

**AMAÇ FONKSİYONU KISITLI
ULAŞTIRMA PROBLEMLERİNDE
TAMSAYILI BULANIK OPTİMİZASYON**

133504

Mustafa YILMAZ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
(ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ)**

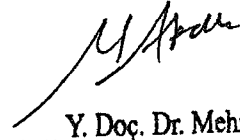
**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Şubat 2003

ANKARA

133504

Mustafa YILMAZ tarafından hazırlanan AMAÇ FONKSİYONU KISITLI ULAŞTIRMA PROBLEMLERİNDE TAMSAYILI BULANIK OPTİMİZASYON adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.


Y. Doç. Dr. Mehmet ATAK

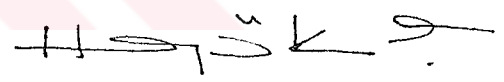
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Mehmet EROGLU



Üye : Doç. Dr. Hadi GÖKCEN



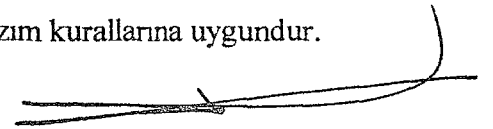
Üye : Y. Doç. Dr. Mehmet ATAK



Üye : _____

Üye : _____

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.



İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ	iv
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	v
SİMGELER	vi
1. GİRİŞ	1
2. BULANIK MANTIK	3
2.1 Bulanık Mantık Kavramı.....	3
2.2. Bulanık Mantığın Tarihçesi.....	4
2.3. Bulanık Mantığın Uygulama Alanları.....	8
2.4. Bulanık Mantığın Dezavantajları Ve Avantajları.....	10
2.5 Bulanık Küme Teorisi.....	11
2.5.1 Küme kavramı.....	11
2.5.2 Bulanık küme teorisi.....	12
2.5.2.1 Dilsel değişkenler.....	14
2.5.2.2 Bulanık kümenin normalliği.....	14
2.5.2.3 Bulanık kümenin desteği.....	15
2.5.2.4 Bulanık kümenin α -kesmesi.....	15
2.5.2.5 Bulanık kümenin konveksliği.....	16
2.6 Bulanık Sayılar Teorisi.....	16
2.6.1 Güven aralığı.....	17
2.6.1.1 Güven aralığı ve bulanık sayılar üzerinde aritmetik işlemler.....	17
2.6.2. Üçgensel ve yamuksal bulanık sayılar.....	19
2.6.2.1 Üçgensel bulanık sayılar.....	19
2.6.2.2 Yamuksal bulanık sayılar.....	20
2.6.3 Bulanık bağıntı.....	22
2.6.3.1 Bulanık bağıntıların bileşkesi.....	27
3. BULANIK ULAŞTIRMA.....	30
3.1 Ulaştırma Modeli.....	30
3.2. Ulaştırma Problemlerinin Matematiksel Modeli.....	30
3.3 Bulanık Verilerle Ulaştırma Optimizasyonu.....	34
3.3.1 Bulanık maliyet verileri ile ulaştırma optimizasyonu.....	35
3.3.1.1 Kesin sayılarla atlama taşı metodu.....	35
3.3.1.2 Bulanık sayılarla atlama taşı metodu.....	44
3.3.2. Bulanık kapasite ve talep verileri ile ulaştırma optimizasyonu.....	51
3.3.2.1 Parametrik yaklaşım.....	52
3.3.2.2 Parametrik yeniden çözüm metodu ile bulanık ulaştırma.....	58
3.3.3 Bulanık ulaştırma problemlerinin optimizasyonuna farklı bir yaklaşım.....	66
3.3.3.1 Problem formülasyonu ve notasyonları.....	67

3.3.3.2	Problemin çözümü.....	69
3.3.4	Tamsayılı bulanık ulaştırma problemlerinin optimizasyonu.....	75
3.3.4.1	Tamsayılı bulanık ulaştırma problemi formülasyonu.....	76
3.3.4.2	Mükemmel atama prosedürü.....	77
3.3.4.3	Tamsayılı bulanık ulaştırma problemi için çözüm prosedürü.....	78
3.3.4.4	Tamsayılı bulanık ulaştırma problemi için algoritma.....	79
4.	UYGULAMA	87
5.	SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	116
KAYNAKLAR.....		117
ÖZGEÇMİŞ.....		119



AMAÇ FONKSİYONU KISITLI ULAŞTIRMA PROBLEMLERİNDE TAMSAYILI BULANIK OPTİMİZASYON

(Yüksek Lisans Tezi)

Mustafa YILMAZ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Şubat 2003

ÖZET

Hazırlanan bu çalışmada öncelikle bulanık küme teorisinden bahsedilmiş, daha sonra bu tekniğin ulaştırma problemlerinde nasıl kullanıldığı ayrıntılarıyla incelenmiştir. Amaç fonksiyonunda ve sağ taraf değerlerinde bulanıklık olan modeller incelenmiş ve bunlara birer örnek problem verilmiştir. Eldeki bu algoritmalara tamsayı kısıtı ve amaç fonksiyonu kısıtı eklenmiştir. Ortaya çıkan modele parametrik yaklaşımla çözüm sunulmuş ve uygulama kısmında verilen model çözülmüş ve sonuçları tartışılmıştır.

Bilim Kodu :

Anahtar Kelimeler : Bulanık ulaştırma problemleri, Tamsayılı programlama

Sayfa Adedi : 130

Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Mehmet ATAĞ

**AN INTEGER FUZZY TRANSPORTATION PROBLEM OPTIMIZATION
WITH RESTRICTED OBJECTIVE FUNCTION**

(M.Sc. Thesis)

Mustafa YILMAZ

GAZI UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

February 2003

ABSTRACT

In this study, firstly fuzzy set theory is explained then the utilities of this technic on transportation problem is handled widely. The fuzzy state of objective function and right-hand side values are researched and presented with some samples. Integer constraints and objective function constraints are added to the algorithms which were generated for the state of fuzzy right-hand side values exist and some solutions are found with parametrical approach. In the application section a model with these constraints are solved and the conclusions from this work are discussed.

Science Code :

Key Words : Fuzzy transportation problems, Integer Programming

Page Number : 130

Adviser : Assoc. Prof. Dr. Mehmet ATAĞ

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren hocam Yrd. Doç. Dr. Mehmet ATAĞ'a, tez yazımında yardımlarını esirgemeyen mesai arkadaşım Arş. Gör. Tahsin ÇETİNYOKUŞ'a, maddi ve manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme teşekkürü bir borç bilirim.



ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 2. 1	Bulanık mantık kuramının geçirdiği önemli aşamalar6
Çizelge 2.2	Bulanık mantığın uygulamaları9
Çizelge 2.3	A ve B kümelerinde Z bağıntısı22
Çizelge 2.4	A ve B kümelerinde fonksiyonel bağıntı23
Çizelge 2.5	$R = \text{"x, y'den oldukça büyük"}$ bağıntısı24
Çizelge 2.6	$Z = \text{"y, x'den çok büyük"}$ bağıntısı24
Çizelge 2.7	R ve Z bağıntılarının bileşim bağıntısı25
Çizelge 2.8	R ve Z bağıntılarının kesişim bağıntısı25
Çizelge 2.9	R Bulanık bağıntısı26
Çizelge 2.10	$\alpha = .3, \alpha = .5, \alpha = .9, \alpha = 1$ seviyelerinde R bağıntısı26
Çizelge 2.11	$R_1(x,y)$ bulanık bağıntısı28
Çizelge 2.12	$R_2(y,z)$ bulanık bağıntısı28
Çizelge 2.13	$R_1 \circ R_2$ bileşke bağıntısı29
Çizelge 3.1	Standart ulaştırma tablosu32
Çizelge 3.2	Fabrikalar ve depolar arasındaki birim ulaştırma maliyet matrisi ..36
Çizelge 3.3	Ulaştırma probleminde en iyi çözümün bulunması için değişik atlama taşı adımları40
Çizelge 3.4	Geliştirilen yeni çözüm41
Çizelge 3.5	En iyi araştırılmasında atlama taşı yöntemine göre ikinci proses ...42
Çizelge 3.6	İkinci geliştirilen çözüm43
Çizelge 3.7	Alternatif en iyi çözüm44

Çizelge 3.8	Üçgensel bulanık sayılarla (a_1, a_2, a_3) maliyet değerlerine bağlı olarak fabrikalar ve depolar arasındaki bulanık birim ulaştırma maliyet matrisi	44
Çizelge 3.9	İlk bulanık atlama taşı çözümü	45
Çizelge 3.10	Bulanık verilerle oluşturulan ulaştırma probleminde en iyi çözümün bulunması için değişik atlama taşı adımları	46
Çizelge 3.11	Bulanık verilerle oluşturulan ulaştırma probleminde daha iyi bir çözümün elde edilebilmesi için yapılan araştırmada, değişik atlama taşı adımları	48
Çizelge 3.12	En iyi çözüm değerleri	50
Çizelge 3.13	Alternatif en iyi çözüm değerleri	51
Çizelge 3.14	Hayali kaynak ve hedefle birlikte bulanık ulaştırma tablosu	59
Çizelge 3.15	Düzeltilmiş ulaştırma tablosu (1)	60
Çizelge 3.16	Düzeltilmiş ulaştırma tablosu (2)	62
Çizelge 3.17	Bulanık ulaştırma problemi için birim ulaştırma maliyetleri	62
Çizelge 3.18	Elde edilen ve verilerden hareketle ulaştırma tablosu	64
Çizelge 3.19	Parametrik yeniden çözüm metodundan elde edilen değerler.....	65
Çizelge 3.20	Bulanık ulaştırma problemi için elde edilen bulanık optimal çözüm değerleri	66
Çizelge 3.21	Taşıma maliyetlerine ait matris	80
Çizelge 4.1	Kaynak ve talep merkezleri arasındaki maliyet matrisi	87
Çizelge 4.2	Optimum ulaştırma planı	106
Çizelge 4.3	Tamsayılı bulanık ulaştırma problemi için ulaştırma matrisi	115

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil		Sayfa
Şekil 2.1	Kesin kümeler: Yaş gruplarının kümelendirilmesi	4
Şekil 2.2	Bulanık kümenin desteği ve α -kesmesi	16
Şekil 2.3	Üçgensel bulanık sayı ($A=(a_1, a_2, a_3)$)	20
Şekil 2.4	Yamuksal bulanık sayı ($A=(a_1, a_2, a_3, a_4)$)	21
Şekil 3.1	Ulaştırma problemlerinin standart gösterimi	31
Şekil 3.2	Fabrikalar ve depolar arasındaki ulaştırma problemi	35
Şekil 3.3	α 'nın farklı değerleriyle ona karşılık gelen ulaştırma maliyeti arasındaki ilişki	77
Şekil 3.4	Üyelik fonksiyonları $\mu_f (f_j)$	81
Şekil 3.5	Üyelik fonksiyonları $\mu_t (f_j)$	82
Şekil 4.1	Üyelik fonksiyonları $\mu_s (f_j)$	89
Şekil 4.2	Üyelik fonksiyonları $\mu_t (f_j)$	90

SİMGELER

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\mu_A(x)$	x kümesine ait üyelik fonksiyonu
α	Üyelik derecesi
A_α	A bulanık kümesinin α desteği
a_i	i üretim merkezinin sunabileceği mal miktarı
b_j	j tüketim merkezinin istediği mal miktarı
c_{ij}	i üretim merkezinden j tüketim merkezine bir birim mal gönderme maliyeti
d_{ij}	Boş bir hücreye bir birimlik bir atama yapıldığında maliyetteki net değişme veya test miktarı
D_j	Parametrik çözüm için tüketim merkezleri
E	Evrensel küme
E	Parametresi p olan üssel fonksiyon
F_i	Parametrik çözüm için üretim merkezleri
G	Bulanık amaç fonksiyonu
L	Doğrusal fonksiyon
m	Üretim merkezi
n	Tüketim merkezi
P	Parametresi p olan kuvvet fonksiyon
$P(E)$	Kuvvet küme
R	Parametresi p olan rasyonel fonksiyon
x_{ij}	i. üretim merkezinden j. tüketim merkezine gönderilen, mamul birim sayısını

1. GİRİŞ

Bilim adamları, bugün bile insan beyninin nasıl çalıştığını, nasıl karar verdiğini ve nasıl öğrendiğini tam olarak çözmuş değillerdir. Fakat çok iyi bilinen bir gerçek var ki, insan beyninin mükemmel çalışma prensipleri makinelere veya çağdaş insanın en büyük yardımcısı bilgisayarlara kazandırılabilse, insanoğlunun yapabileceği işler de mükemmel doğru ilerleyecektir. Bugün pek çok bilim adamı, bilgisayar destekli tasarımlarına insan beyni gibi çalışma özelliği kazandırmak için birbirleriyle yarışıyor.

İnsan beyni sayısal bir işlemi birkaç dakikada yapmasına rağmen, idrak etmeye ait olayları birkaç saniyede çözebilecek kadar hızlıdır. Örneğin yolda giden şoför bir tehlike karşısında aniden fren yapar. Şoför, o an hızının, yolun kayganlık derecesinin, önündeki tehlikeden uzaklaştığının vb. sayısal olarak kesin değerlerini bilmediği halde, geçmişte kazandığı deneyimlerden ve tehlikeyi idrak ettiğinden dolayı anında tehlikeye karşı koymaya çalışır. Bilgisayarlar ise çok karmaşık sayısal işlemleri birkaç saniyede yapabilmelerine rağmen, idrak etmeye ve deneyimlerle kazanılmış bilmeye ait konularda yetersiz ve yavaşlardır. İnsan beyni, hesaplamalar yapan bilgisayarlardan farklı olarak, sinirsel algılayıcılar vasıtasıyla kazanılmış görelilik olarak sınıflandırılmış bilgileri kullanma temeline dayanır. İşte ilk defa 1965 yılında Lotfi A. Zadeh tarafından ortaya atılan “Bulanık Küme Teorisi” ve bu teorinin üzerine kurulduğu, insan beyninin kullandığı ve fiziksel dünyaya klasik var-yok mantığından daha uyumlu olan “Bulanık Mantık”, pek çok konuda bilim adamlarına yeni ufuklar açmıştır. Bulanık mantık teorisi, kavramsal işlev ve görelilik sınıflandırılmış üyelik sanılan temeline dayandığından, bilgisayarlara ve bilgisayar destekli tasarımlara uygulanabilme açısından günümüzde oldukça değer kazanmıştır. Bulanık mantık, gelişmekte olan uzman denetim sistemleri için en başarılı sonuçları veren yöntemleri içerir. Özellikle bilgisayar destekli tasarımlarda pahalı ve çok zaman alan projeler, bulanık mantığın uygulanmasıyla ucuza mal olmakta ve yapılan işler de basitleşmektedir. Bulanık mantık için, matematiğin gerçek dünyaya uyarlanması diyebiliriz. Çünkü gerçek dünyada her an değişen durumlardan değişik sonuçlar çıkabilir ve deneyimlerden yararlanmak gerekir [1].

Bulanık ulaştırma problemi ilk olarak 1980 yılında Prade tarafından çalışılmıştır. Daha sonraki yıllarda Oheigeartaigh (1982), Verdegay (1983) ve Delgado (1984) tarafından bu çalışma sürdürölmüştür.

Bulanık ulaştırma problemlerinin parametrik yaklaşımla çözümü ise Chanas Kolodziejczyk ve Machaj (1984) tarafından yürütölmüştür.

Bulanık ulaştırma problemlerini bugüne kadar yapılan çalışmalar sonucunda bulanık maliyet verileri ile ulaştırma ve bulanık kapasite ve talep verileri ile ulaştırma şeklinde iki kısımda incelemek mümkündür.

Bulanık maliyet verileri ile ulaştırma problemlerinin optimizasyonunda atlama taşı metodundan, bulanık kapasite ve talep verileri ile ulaştırma problemlerinin optimizasyonunda ise parametrik yaklaşımdan faydalanılmaktadır.

Ulaştırma modelleri geniş bir uygulama alanına sahiptir. Bu ulaştırma modellerinin parametreleri, birim taşıma maliyeti, talep ve kaynaklardır. Pratikte bu parametreler her zaman kesin olarak bilinmemektedir. Bu durumda bu tip problemlere bulanık sayılarla bir yaklaşım gerekmektedir. Tamsayılı talep ve kaynak kısıt değerleri ile oluşturulmuş klasik ulaştırma problemleri daima tamsayılı özömler sunmaktadır. Bu tip problemler simplex yöntemi ile kolaylıkla özöllebilir. Ancak bulanık ulaştırma problemlerinde bu özellik korunamaz. Yani her zaman tamsayılı özömler elde edilemez. Çalışmada sunulan algoritma genel bulanık ulaştırma problemleri için tamsayılı bir çözüm sunmaktadır.

Bu gerçekler göz önünde bulundurularak hazırlanan bu çalışmada bulanık ortamda ulaştırma problemlerinin optimizasyonu üzerinde durulmuştur. Sağ taraf değerlerinin bulanık olduğu ve buna ek olarak karar verici tarafından belirlenen bir amaç fonksiyonu kısıtının bulunduğu ulaştırma modeli ele alınmış ve tamsayılı çözüm sunan bir algoritma kullanılmıştır. Gerçek hayattaki bulanık ulaştırma problemlerinde tamsayılı özömlerin istendiği göz önünde bulundurulursa, elde edilen sonuçların önemi daha iyi anlaşılacaktır.

2. BULANIK MANTIK

2.1 Bulanık Mantık Kavramı

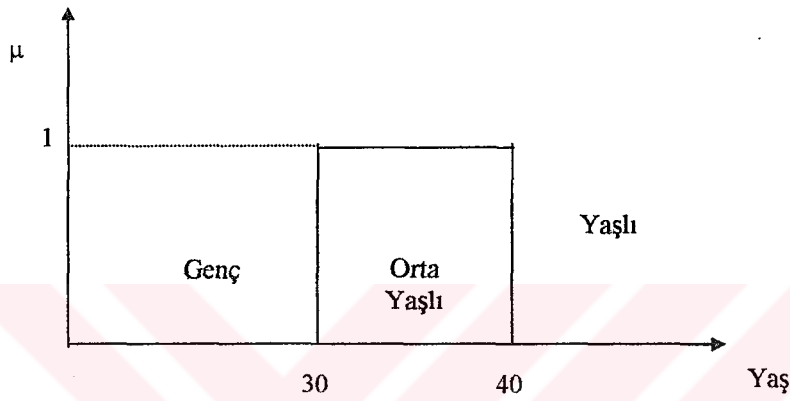
Endüstriyel bir sürecin denetimi için tasarım yapılırken, her şeyden önce o sürecin bir dinamik modeline gereksinim vardır. Ancak pratikte bu her zaman mümkün olmayabilir. Süreç içindeki olaylar matematiksel modelleşmeye el verecek ölçüde açıkça bilinmeyebilir veya bir model kurulsa bile bu modelin parametreleri zamanla büyük değişiklikler gösterebilir. Bazı durumlarda doğru bir model kurulsa bile bunun denetleyici tasarımında kullanılması karmaşık problemlere yol açabilir. Bu gibi sorunlarla karşılaşıldığı zaman genellikle bir uzman kişinin bilgi ve deneyimlerinden yararlanılma yoluna gidilir. Uzman operatör dilsel değişkenler olarak tanımlanabilecek uygun, çok uygun değil, yüksek, biraz yüksek, fazla, çok fazla gibi günlük yaşantımızda sıkça kullandığımız kelimeler doğrultusunda esnek bir denetim mekanizması geliştirir. İşte bulanık mantık da bu tür mantıksal ilişkiler üzerine kurulmuştur.

İlk defa Zadeh tarafından kullanılan bulanık terimi, temelde çok değerli mantık, olasılık kuramı, yapay zeka ve yapay sinir ağları alanları üzerine oturtulmuş; olasılığından çok oluşum derecesiyle ilgilenen bir kavramı tanımlar. Olasılık ve bulanıklık kavranılan arasındaki en önemli farklılık, bulanıklığın bir deterministik belirsizlik olmasıdır.

Bulanık mantık kuramı temelde, insan düşünüş tarzını örnek alır. Oldukça kapsamlı ve ayrıntılı bir matematiksel temeli varsa da, ana özellikleri aşağıdaki şekilde açıklanabilir.

Geleneksel mantıkta bir kümeyi oluşturan elemanlar kesin elemanlar olup, bir eleman bir kümenin ya elemanıdır ya da değildir (var veya yok, 0 veya 1). Bu tür kümelere kesin kümeler denilir. İleride ele alınacak bu konu, orta yaşlı kavramı örnek olarak incelenebilir. Eğer 40 yaşı orta yaş olarak kabul edecek olursak, geleneksel kümelendirmede 30 yaşın altındaki kişiler şekil 2.1’de gösterildiği üzere "genç", 30-50 arası "orta yaşlı", 50 yaşın üstü de "yaşlı" kümeleri olarak sınıflandırılabilir. Dolayısıyla 29.5 yaşındaki birisi "genç" iken 30.5 yaşındaki diğer bir kişi "orta yaşlı" olarak

anılacaktır! Bir endüstriyel denetleyici için bu durum ele alınabilir. Eğer bu denetleyicide fiziksel büyüklüklerin dahil olduğu kümeler birbirlerinden böyle keskin çizgilerle ayrılmışlarsa denetim çıktısının ani değişiklikler göstermesi kaçınılmaz olacaktır. Örneğin soğuk/sıcak sınırının 25° olduğu bir sayısal açık/kapalı denetleyicide 24.5° soğuk olarak algılanacak, buna karşın 25.5° sıcak olarak ele alınarak, denetim çıktısı ani olarak değiştirilebilecek. Örneğin;



Şekil 2.1 Kesin kümeler: Yaş gruplarının kümelendirilmesi

Yukarıda açıklananlara karşıt olarak bulanık mantık, kesin mantığı açık/kapalı, soğuk/sıcak, hızlı/yavaş gibi ikili denetim değişkenlerinden oluşan keskin dünyayı, az açık/az kapalı, serin/ılık, biraz hızlı/biraz yavaş gibi gevşek niteleyicilerle yumuşatarak gerçek dünyaya benzetir. Bu, yine yaş konusu ele alınarak biraz daha açılabilir. 35 yaşındaki bir insana pek orta yaşlı denemeyeceği gibi, o kişi pek genç de sayılmaz, duruma göre belki genç tanımı, belki de orta yaşlı tanımı daha uygun düşer. Kümelerin birbirlerinden keskin çizgilerle ayrılmamış olması, aralarında belirli bir örtüşüm olması, 35 yaşın bir oranda hem orta yaşlı, hem genç; ısı denetleyicisi örneğinde ise 20° sıcaklığın hem biraz serin hem de biraz sıcak olarak düşünülmesine olanak tanır.

2.2. Bulanık Mantığın Tarihçesi

Bulanık mantık kuramının günümüze kadar geçirdiği önemli aşamalar çizelge 2.1’de bir kronolojik sıra ile sunulmuştur. Bulanık mantık kuramı ilk kez 1965 yılında University of California, Berkeley öğretim üyelerinden, aslen Azerbaycanlı, Lotfi A.

Zadeh tarafından ortaya atılmış ve hızla gelişerek modern denetim alanında birçok bilim adamının ilgisini çeken araştırmaya açık yeni bir dal olmuştur. Örneğin, Londra Üniversitesi'nden Mamdani, bulanık mantık kuramını bir buhar türbininin hızının denetlenmesine uygulamayı düşünmüş ve bu amaçla, bir insanın davranışlarını mimikleyen “eğer türbin hızı çok hızlı artıyorsa ve basınç da çok düşükse, buhar vanasını biraz aç” türünden kurallardan oluşan bir uzman sistem geliştirmiştir. Mamdani, bulanık mantık temelli bu tür bir uzman sistemle, türbin hızının ve performansının çok başarılı bir şekilde denetlenebileceğini göstermiştir.

Bulanık mantık kuramının ilk önemli endüstriyel uygulaması çimento sanayiinde olmuştur. Bu sanayide değirmen içerisindeki sıcaklık ve oksijen oranı, ürün kalitesi açısından çok önemlidir. Kısıtlı ve hassas olmayan, ısı ve karbonmonoksit oranı gibi bilgilerle iyi bir çalışma düzeni elde edilebilmesi bir sanat olup, operatörlerin bu konuda yeterli bir uzmanlık kazanabilmeleri için yıllar geçmesi gerekir. Fakat kişiler ve uzmanlık düzeyleri arasında kaçınılmaz farklılıklar olacağından, üretilen çimento da vardiyadan vardiyaya değişecek, tutarlı kalitede çimento üretimi çok zor olacaktır.

Bir Danimarka firması bu nedenlerden dolayı doğrusal bir model üzerine kurulu geleneksel denetleyici yerine bir bulanık mantık denetleyici kullanmayı düşünmüş ve çok başarılı sonuçlar veren bir uzman sistem geliştirmiştir. Bu veya benzeri sistemler günümüzde Japonya ve Amerika da dahil olmak üzere birçok ülkede kullanılmaktadır.

Çizelge 2. 1 Bulanık mantık kuramının geçirdiği önemli aşamalar

1965	Bulanık Küme Kuramı (Lotfi A.Zadeh, University of California, Berkeley)
1966	Bulanık Mantık (Peter Merinos, Bell Laboratuvarı)
1972	Buhar türbini denetiminde bulanık mantık uygulaması (E.H. Mamdani, Queen Mary College, University of London)
1980	Çimento sanayiinde uygulama (F. L. Smidth, Danimarka)
1987	Sendai Metrosunda otomatik tren denetimi (Hitachi)
1988	Hisse senedi portföyü için uzman sistem (Yamaichi Security)
1989	Japonya'da LIFE (Laboratory for International Fuzzy Engineering) laboratuvarının kurulması

Kronolojik sıra içerisinde, çimento sanayiindeki uygulamadan sonraki en önemli asama Japonya'da, 1987 yılında görülmüştür. Hitachi firması ilk olarak 1978 yılında Ulaştırma Bakanlığı'na başvurmuş ve Sendai metro sisteminde çalışan trenlerin otomatik olarak denetimi için bulanık mantık kullanımını önermiştir. Bakanlık öneriye olumlu baktığını belirtmiş fakat bulanık mantık denetleyicinin, kullanılmakta olan sisteme göre belirgin üstünlükleri olacağı konusunda kanıt istemiştir. Hitachi firması 9 yıl içerisinde 300.000 benzetim çalışması ve 3000 insansız operasyon gerçekleştirmiş ve sonunda, 1986 yılının sonlarına doğru Ulaştırma Bakanlığı'ndan kullanım iznini almıştır. Geliştirilen sistemde, daha önce tren operatörü tarafından basit bir denetleyici aracılığı ile yapılan ve yolcuların sarsıntılı bir yolculuk geçirmelerine neden olabilen hızlanma ve yavaşlama gibi işlemler otomatik olarak yapılmakta ve tren operatörünün yapması gereken işler kapıları kapatmak ve başlatma düğmesine basmak gibi birkaç işlemle sınırlı kalmaktadır. Böylece yolcuların, demirlere tutunma gereksinimi duymadan rahat bir yolculuk yapabilmeleri sağlanmış, daha önce kullanılan sisteme göre trenin istenilen konumda durması 3 kat iyileşmiş ve kullanılan enerji %10 azalmıştır. Sağlanan bu başarının Hitachi firmasına getirdiği mükafat, Tokyo metrosunda da böyle bir sistemin kullanılması için gerekçe oluşturmuştur.

Yukarıda açıklanan başarılı uygulamadan sonra bulanık mantık konusundaki çalışmalar yeni bir ivme kazanmış ve endüstriyel uygulama alanları hızla artmıştır. Çalışmaların uluslararası alanda koordinasyonu amacı ile Japonya'da 1989 yılında, LIFE (Laboratory for International Fuzzy Engineering) adlı bir laboratuvar kurulmuştur. Bu laboratuvar da yapılan araştırma çalışmalarına, aralarında Hitachi, Toshiba, Omron, Matsushita gibi ünlü Japon firmalarının yanı sıra IBM, NCR, Thomson gibi Japonya dışı firmaların da bulunduğu toplam 51 firma katılmış ve 6 yıllık bütçesi 70 milyon dolar olmuştur.

Bulanık mantık denetleyiciler konusundaki kuramsal çalışmalar hala devam etmekle birlikte, bu konu endüstride kendisine önemli bir yer edinmiş durumdadır. Uygulama alanları arasında çeşitli beyaz eşya, tren, asansör, trafik kontrolü ve otomotiv sanayii sayılabilir. Bugün Japonya'da bulanık mantık prensibiyle çalışan beyaz eşyalar ve elektronik aletler, örneğin fotoğraf ve çamaşır makineleri, güncel yaşamın birer parçasıdır. Tüm dünyada bulanık mantık içeren ürünlerin satış hacmi 1990 yılında 1.5 milyar dolara ulaşmıştır. Bu miktarın 2000 yılına kadar 13 milyar dolara çıkması beklenmektedir.

Günümüzde 30'dan fazla ülkede bulanık mantık konusunda araştırmalar yapılmakta olup, bunlar arasında ABD, Japonya, Çin ve Batı Avrupa ülkeleri başta gelmektedir. Çin'de bu konu ile uğraşan bilim adamı sayısı on binin üzerinde olup, hemen arkasında Japonya yer almaktadır. Uygulama açısından ise, Japonya belirgin bir şekilde önde gözükmektedir. Bu durum, belki de Uzakdoğu insanının düşüncü şeklinin bulanık mantığa daha uygun oluşundan kaynaklanmaktadır. Üzerinde "bulanık" sözcüğü yer alan bir fotoğraf makinesi, bir batı ülkesinin toplumu tarafından tepki ile karşılanabilir. Japonya'da ise, ev hanımları bile bu sözcükle haşır neşir olmuşlar ve bulanık mantık kullanan her türlü ev aletini özellikle arar duruma gelmişlerdir. Bir başka neden de, ABD'de yapılan çalışmaların genellikle askeri amaçlara ve uzay uygulamalarına yönelik olması ve bu nedenle projelerin ve sonuçlarının herkese açık literatürde yayınlanmaması olabilir. NASA bünyesinde bulanık mantık konusunda çalışan çok kuvvetli bir grup vardır. Bu grup, uzay mekiği için, pilotların yükünü azaltmak,

sistemin güvenilirliğini arttırmak ve yakıt tüketimini azaltmak amacı ile bir bulanık mantık temelli sistem geliştirmiştir. Bu sistem, konuşlandırma ve o pozisyonda tutma sırasında harcanan yakıtta 3 misli, yaklaşma sırasında tüketilen yakıtta ise, 1.5 misli azalma meydana getirmiştir [3].

2.3. Bulanık Mantığın Uygulama Alanları

Daha önce de açıklandığı üzere, bulanık mantığın ilk uygulamaları genellikle endüstriyel alanlarda, çimento sanayiinde (1980) ve su arıtma sistemlerinde (1983) olmuştur. Daha sonraları literatürde nükleer reaktör, asansör ve vinç denetimi gibi daha değişik uygulamalar görülmüştür. Bu gelişim içerisindeki en önemli olay, bulanık mantığın, Kuzey Japonya'nın Sendai kentindeki metro sisteminde çok başarılı bir biçimde kullanılması olmuştur. Bu olay, bulanık mantığın uygulamalarına büyük bir ivme kazandırmış, Japonya'da adeta bir patlama (fuzzy boom) meydana getirmiştir. 1987 yılında başlayan bu patlama 1990'da bir zirveye ulaşarak bulanık mantığın ev aletlerinden borsa portföyü denetimine, fotoğraf makinelerinden hasta izleme uzman sistemlerine kadar uzanan çok geniş bir yelpaze içerisinde kullanılması ile sonuçlanmıştır. Günümüzde artık bulanık mantığın uygulamalarına yönelik özel yazılım ve donanımlar piyasadan hazır bir şekilde temin edilebilmektedir. Örneğin Omron firması bulanık mantık benzetim paketleri ve bulanık mikroişlemci olarak adlandırdıkları özel tümleşik devreler pazarlamaktadır. Benzer paketler Togai firması tarafından da pazarlanmaktadır.

Bulanık mantığın Japon toplumu içerisinde gördüğü yüksek oranda kabule ilginç bir örnek, bir Japon ev hanımının, çocuk yetiştirmede kazandığı deneyimlerden yararlanarak geliştirdiği bebek bakımı uzman sistemidir. Bu bulanık uzman sistem, çocuğun karakterini, fiziksel durumunu ve çevre koşullarını da içeren bir bilgi tabanına dayandırılmış ve anneye bebeğine ne kadar süt vermesi gerektiğini söylemektedir. Sistem anneler arasında oldukça popüler olmuş ve mucit anneyi zengin etmiştir. Diğer benzer bir uzman sistem de Maruman firması tarafından geliştirilmiş olup, golf oyuncusuna golf sopasının seçiminde yardımcı olur.

Çizelge 2.2 Bulan mantığının uygulamaları

UYGULAMA	FİRMA	SONUÇ
Asansör denetimi	Fujitec/Toshiba Mitsubishi/Hitachi	Yolcu trafiğini değerlendirir, böylece bekleme zamanı azalır.
SLR Fotoğraf makinesi	Sanyo/Fischer Canon/Minolta	Ekranda birkaç obje olması durumunda en iyi fokusu ve aydınlatmayı belirler.
Video kayıt aleti	Panasonic	Cihazın elle tutulması nedeni ile çekim sırasında oluşan sarsıntıları ortadan kaldırır.
Çamaşır makinesi	Matsushita	Çamaşırın kirliliğini, ağırlığını, kumaş cinsini sezer ve ona göre yıkama programını seçer.
Elektrikli süpürge	Matsushita	Yerin durumunu ve kirliliğini sezer ve motor gücünü uygun bir şekilde ayarlar.
Su ısıtıcısı	Matsushita	Isıtmayı, kullanılan suyun miktar ve sıcaklığına göre ayarlar.
Klima cihazı	Mitsubishi	Ortam koşullarını sezerek en iyi çalışma durumunu saptar.
Otomobil aktarma organı	Subaru-Nissan	Araba kullanım stilini ve motor yükünü sezerek en iyi dişli oranını seçer.
ABS fren sistemi	Nissan	Tekerleklerin kilitlenmeden frenlenmesini sağlar.
Çelik endüstrisi	Nippon Steel	Geleneksel denetleyicilerin yerini alır.
Sendai metro sistemi	Hitachi	Hızlanma ve yavaşlamayı ayarlayarak rahat bir yolculuk yapmayı sağlar.
Çimento sanayi	Mitsubishi Chem.	Değirmende ısı ve oksijen oranı denetimini yapar.
Tansiyon aleti	Omron	Tansiyon ölçer.
PLC	Omron	Fabrikalarda süreç denetimini sağlar.
Televizyon	Sony	Ekran kontrastını, parlaklığını ve rengini ayarlar.
El bilgisayarı	Sony	El yazısı ile veri girişine olanak sağlar.
Hisse senedi alım satım programı	Yamaichi-Securities	Hisse senedi portföyünü idare eder.

Daha önce de değinildiği üzere, bulanık mantık günümüzde, özellikle Japonya’da, çok geniş uygulama alanları bulmuştur. Çizelge 2’de bu alanlara bazı örnekler verilmiştir. Burada şunu belirtmek gerekir ki, yukarıdaki çizelgede yer alan uygulama alanları ve firmalar sadece birer örnektirler. Çizelgede değinilmemiş daha birçok uygulama alanı olduğu gibi, belirtilen bir uygulama alanında üretim yapan, fakat çizelgede adı geçmemiş birçok firma da olabilir.

Çizelge 2’de sıralanan uygulama alanlarında iki ayrı düzey göze çarpabilir. Birinci düzeyde amaç, uzman operatör yerine bulanık kural tabanlı bir sistem kullanılmasıdır. Sendai metrosu, çimento değirmeni, asansör denetimi vs. bu düzeyde yer alır. Daha üst ikinci bir düzeyde ise hedef, bir uzman yerine bulanık mantık temelli bir karar verici sistem kullanımıdır. Örnek olarak, Yamaichi Securities firmasının geliştirdiği uzman sistem verilebilir. Bu sistem, borsada kara pazar olarak bilinen 1988 yılının ekim ayındaki büyük çöküşü 18 gün önceden haber verebilmiştir. Kullanıma alındığı 1988 yılından bu yana, portföyündeki hisse senetlerinin değeri Nikkei ortalamasından sürekli olarak % 20, genellikle % 40 fazla olmuştur. Bu özellikleri ile yatırımcıların büyük ilgisini çekmiş ve “Fuzzy Fund” olarak adlandırılan portföyün hacmi 1989 yılında 2 milyar dolara ulaşmıştır [3].

2.4. Bulanık Mantığın Avantajları ve Dezavantajları

Bulanık mantığın belirli bir formal tasarım metodunun olmayışı ve halen iyi metriklerle sahip bulunmayışı, bulanık mantığın ne zaman kullanılması gerektiğinin ve geleneksel yöntemlerden ne kadar iyi sonuç vereceğinin kestirilmesini zorlaştırmaktadır. Ayrıca bulanık mantık uygulamalarında kullanılan kuralların, mutlaka uzman deneyimlerine bağlı olarak konulması gereksinimi ve üyelik fonksiyonları deneme ile bulunduğu için zaman kaybının olabileceği, bulanık mantığın dezavantajları arasında sayılabilir.

Bulanık mantığın en güçlü uygulamaları, doğrusal olmayan ve girişlerinde veya tanımlanmalarında belirsizlik bulunan karmaşık sistemlerin gerçekleştirilmesinde ortaya çıkmaktadır. Çok büyük doğa (hava, doğal biçimler, okyanuslar gibi) veya

insan yapısı (ekonomi, borsa veya seçimler gibi) sistemlerinin modellenmesi ve kontrolü için, bulanık mantığın en iyi olduğunu savunur kontrol sistemleri ile birlikte;

i) Yeterli doğrulukta modellenemeyen çok karmaşık sistemler

ii) Önemli ölçüde doğrusal olmayan sistemler,

iii) Girişlerinde veya tanımlarında belirsizlik olan sistemler,

için bulanık mantığı kullanmak en iyi çözümü verir.

Bulanık mantığın her durumda bir sonuç sistemi olduğunu vurgulamak yanlış bir düşüncedir. Gerçek dünyadaki olayların açıklanması ve teknolojiye aktarılması geleneksel mantıksal sistemler yerine bulanık mantığın kullanılması ile daha başarılı olacağı açıktır.

Çok karmaşık, doğrusal olmayan, belirsizlik içeren ve geleneksel yöntemlerle oluşturulamayan sistemlerin oluşturulmasına olanak tanınması da bulanık mantığın avantajları arasındadır. Ayrıca, bulanık mantığın insan düşünüş tarzına yakın olması, matematiksel modellere uyum sağlaması, uygulamalarının hızlı ve ucuz olması, insan davranışlarını formüle etmesi, karar aşamalarını açık bırakmayacak şekilde tanımlaması, sistemlerde insan müdahalesine yer vermemesi ile birlikte sistemin kısa sürede gerçekleştirilmesi ve yeni olanaklara açık olması bulanık mantığın avantajlarından [4].

2.5 Bulanık Küme Teorisi

2.5.1 Küme kavramı

Modern matematiğin temelini oluşturan küme teorisi, matematiksel işlemlerde kolaylık sağladığı için son yıllarda yaygın olarak kullanılmaya başlanan bir konu haline gelmiştir. Ayrıca sayısal bilgisayarların tasarımının küme teorisine dayandırılması, bu konunun önemini bir kat daha artırmıştır. Bunun yanı sıra çağdaş olasılık tanımının temeli de küme teorisine dayandırılmıştır.

Küme, “içinde yer alan elemanların, herhangi bir kuşkuyla yer vermeyecek şekilde, doğru tanımlanmış olduğu objeler veya nesneler topluluğudur”, şeklinde tanımlanabilir. Kümeler eleman sayılarına göre; i) sonlu küme, ii) sonsuz küme ve iii) boş küme olmak üzere üç grupta toplanabilir. Kümenin içinde yer alan eleman sayısı, belirli sayıda olabileceği gibi, sayılamayacak kadar çok da olabilir. İşte sonlu sayıda elemanı olan küme “sonlu küme”, sonsuz sayıda elemanı olan küme de “sonsuz küme” olarak adlandırılır. Kümeler sonlu veya sonsuz olabilecekleri gibi boş da olabilir. Hiç elemanı olmayan kümeye de “boş küme” adı verilir ve $\emptyset$ veya $\{\}$ sembolleri ile gösterilir [5].

2.5.2 Bulanık küme teorisi

Elemanı x olan bir E kümesi için, x 'in üyelik fonksiyonu,

$$\forall x \in E : \mu_A(x) \in [0,1] \quad (2.1)$$

şeklinde dir. Burada $[0,1]$, 0'dan 1'e kapalı aralığını temsil etmektedir. $\mu_A(x)$ altkümesi, bulanık altküme veya bulanık küme olarak adlandırılır. Bulanık küme, yalnızca 0 (ait değil) veya 1 (ait) değerlerini almamakta, bunlardan başka 0 ile 1 arasında değerler de almaktadır. Örneğin; 0.3, 0.512, 0.99, vb... [6].

Bulanık bir kümenin, matematiksel olarak, başka bir şekilde gösterimi de mümkündür:

E evrensel kümesi sonlu ise;

$$\forall x \in E \text{ için } A = \mu_A(x_1)/x_1 + \dots + \mu_A(x_n)/x_n = \sum \mu_A(x_i)/x_i \quad (2.2)$$

E evrensel kümesi sonsuz ise;

$$A = \int_E \mu_A(x)/x \quad (2.3)$$

Burada E , evrensel bir kümeyi; A , E evrensel kümesinin altkümesini; x , E evrensel kümesinin üyelerini ve A altkümesinde olmaya aday elemanları; μ , üyelik fonksiyonunu temsil eder [7].

Görüldüğü gibi, kesin bir küme ile bulanık bir küme arasındaki temel farklılık, elemanların aldığı üyelik derecelerinden kaynaklanmaktadır. Kesin bir kümenin elemanlarının üyelik dereceleri, yalnızca 0 ya da 1 değerlerini alırken, bulanık bir kümenin elemanlarının üyelik dereceleri, $[0,1]$ kapalı aralığındaki herhangi bir değeri alabilmektedir.

Bulanık altkümelerin kümesi, "kuvvet küme" olarak adlandırılır ve $P(E)$ veya $\{0,1\}^E$ şeklinde gösterilir, örneğin, $E = \{v,y,z\}$ için kuvvet kümesi;

$$P(E) = \{\emptyset, \{v\}, \{y\}, \{z\}, \{v,y\}, \{v,z\}, \{y,z\}, \{v,y,z\}\} \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır.

Kesişim (minimum), birleşim (maksimum), ve tümleyen işlemleri bulanık kümeler için de geçerli olmaktadır. Bunları örnekler üzerinde göstermek istersek :

A=

a	b	c	d	e	f
.7	.4	0	.2	.8	.1

B=

a	b	c	d	e	f
.3	.1	.4	.9	0	1

A ve B'nin kesişimi;

$A \cap B =$

a	b	c	d	e	f
.3	.4	0	.5	0	1

A ve B'nin birleşimi;

$A \cup B =$	a	b	c	d	e	f
	.7	1	.4	.9	.2	1

A'nın tümleyeni;

$\bar{A} =$	a	b	c	d	e	f
	.3	.6	1	.5	.8	0

şeklindedir.

2.5.2.1 Dilsel değişkenler

Bulanık kümeler için kullanılan cebirsel işlemlere ilave olarak, iyi, çok, vb..., “dilsel değişkenler” kullanılabilir.

Örneğin, üyelik fonksiyonu $\mu_A(x)$ olan bulanık küme “A” için, “çok A”nın üyelik fonksiyonu aşağıdaki şekilde nitelendirilir;

$$\mu_{\text{çok A}}(x) = \begin{cases} \mu_A(x+k), & x \geq k \text{ ise} \\ 0 & x < k \text{ ise} \end{cases} \quad (2.5)$$

Halbuki “az A” için üyelik fonksiyonu;

$$\mu_{\text{az A}}(x) = \mu_A(x-k) \quad (2.6)$$

olur [8].

2.5.2.2 Bulanık kümenin normallığı

Bir A bulanık kümesinde, ancak ve ancak bir veya daha çok x değeri için, normallik;

$$\exists x \in R : \forall_x \mu_A(x) = 1 \quad (2.7)$$

anlamına gelmektedir. Bu aynı zamanda, R içindeki bulanık kümenin, maksimum değerinin 1 olmasıdır [9].

Ayrıca normal olmayan bulanık küme, şu şekilde normalleştirilebilir;

$$\mu_{Anorm}(x) = \mu_A(x) / \text{Max } \mu_A(x) \quad (2.8)$$

2.5.2.3 Bulanık kümenin desteği

E kümesindeki $\mu_A(x) > 0$ noktalarının oluşturduğu kümeye A'nın desteği denir. x'in olağan bir alt kümesi olan bu küme,

$$\text{destek}(A) = \{x \in K \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad (2.9)$$

ile gösterilir. $\mu_A(x) = 0.5$ değerine sahip x elemanları, A'nın köprü noktalandır. A'nın yüksekliği ise, A'nın üyeliğinin en üst olan noktasını tanımlar. Diğer bir ifadeyle, A'nın yüksekliği en küçük en üst sınırla belirlenir [10].

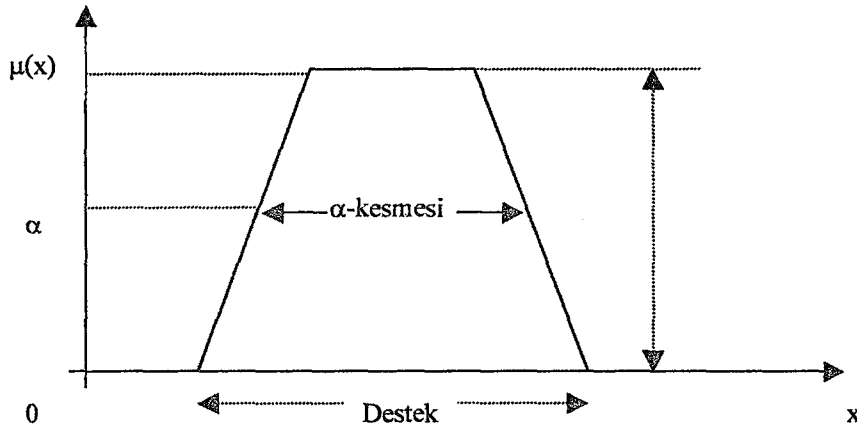
2.5.2.4 Bulanık kümenin α -kesmesi

A bulanık kesinin α -kesmesi A'ya ait elemanların (en az α derecesine kadar olanların) bir sıralı kümesidir, α -kesmesi, bulanık kümenin desteğinin genelleştirilmiş bir seklidir. Buna göre, A bulanık kümesinin α -kesmesi aşağıdaki gibi tanımlanabilir;

$$A_\alpha = \{x \in E \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad (2.10)$$

$$\alpha = 0 \text{ için } A_\alpha = \text{destek}(A) \quad (2.11)$$

şeklindedir [11].



Şekil 2.2 Bulanık kümenin desteği ve α -kesmesi

2.5.2.5 Bulanık kümenin konveksliği

Bir bulanık kümenin konveksliği uygulama yönünden oldukça önemli bir özelliktir,

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \Rightarrow \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)) \quad (2.12)$$

ise A bulanık kümesi konvektir [12].

2.6 Bulanık Sayılar Teorisi

Matematiksel modellerin gelişimi içinde ve kuramsal çalışmalarda geniş bir şekilde kullanılan, bulanık sayılar ve bazı önemli özellikleri şu şekildedir;

Normal ve konveks bir bulanık kümenin, zayıf bir α -kesmesi kapalı bir küme ise, bulanık sayı olarak adlandırılır.

Bulanık sayılar, gerçel sayıların bir alt kümesini oluşturur. Bu sayıların kullanıldığı fonksiyonda, en büyük değer (1) olmaktadır. Bu değer dışındaki her x değeri için elde edilen $\mu(x)$ değeri, azalan bir özellik taşır. Burada kullanılan $\mu(x)$, bir dışbükey fonksiyondur. Bu fonksiyon, en az bir x değeri için, $\mu(x) = 1$ değerini alır [13].

2.6.1 Güven aralığı

$a \in R$ şeklindeki, kesin sayı a 'yı göstermektedir. Bu kesin sayı, bulanık fonksiyon kavramı kullanılarak nitelendirilmek istenirse;

$$\mu_a(x) = \begin{cases} 1, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases} \quad (2.13)$$

şeklinde olur.

R içindeki güven aralığı, belirsizliğin tipini temsil eden, R 'nin kesin alt kümesidir. A 'nın, a_1 'den daha küçük ve a_3 'den daha büyük olamayacağı açık bir şekilde bilinmektedir. Güven aralığının sembolik gösterimi ise, genellikle $A = [a_1, a_3]$ şeklinde yazılmaktadır [14].

2.6.1.1 Güven aralığı ve bulanık sayılar üzerinde aritmetik işlemler

Bulanık sayıların aritmetiği, güven aralıklarının aritmetiğine dayanmaktadır.

$$\forall a_1, a_3, b_1, b_3 \in R: A = [a_1, a_3], B = [b_1, b_3] \quad (2.14)$$

şeklinde güven aralıkları verilen A ve B sayılan için, bazı temel işlemler aşağıda tanımlanmıştır.

(i) Toplama:

$$A(+)B = [a_1, a_3] (+) [b_1, b_3] = [a_1 + b_1, a_3 + b_3] \quad (2.15)$$

(ii) Çıkarma:

$$A(-)B = [a_1, a_3] (-) [b_1, b_3] = [a_1 - b_3, a_3 - b_1] \quad (2.16)$$

(iii) Çarpma:

$$A(.)B = [a_1, a_3] (.) [b_1, b_3] = [a_1.b_1 \wedge a_1.b_3 \wedge a_3.b_1 \wedge a_3.b_3, a_1.b_1 \vee a_1.b_3 \vee a_3.b_1 \vee a_3.b_3] \quad (2.17)$$

(iv) Ters:

$$A^{-1} = [a_1, a_3]^{-1} = [1/a_1 \wedge 1/a_3, 1/a_1 \vee 1/a_3] \quad (2.18)$$

$a_1 \leq 0 \leq a_3$ hariç

(v) Bölme:

$$\begin{aligned} A(:)B &= [a_1, a_3] (:) [b_1, b_3] \\ &= [a_1/b_1 \wedge a_1/b_3 \wedge a_3/b_1 \wedge a_3/b_3, a_1/b_1 \vee a_1/b_3 \vee a_3/b_1 \vee a_3/b_3] \end{aligned} \quad (2.19)$$

$a_1 \leq 0 \leq a_3$ hariç

(vi) Minimum:

$$A(\wedge)B = [a_1, a_3] (\wedge) [b_1, b_3] = [a_1 \wedge b_1, a_3 \wedge b_3] \quad (2.20)$$

(vii) Maksimum:

$$A(\vee)B = [a_1, a_3] (\vee) [b_1, b_3] = [a_1 \vee b_1, a_3 \vee b_3] \quad (2.21)$$

Verilen işlemleri örnekler üzerinde göstermeye çalışalım:

A ve B sayıları $A = [3.25, 5.46]$, $B = [-2.12, 7.51]$ güven aralıkları ile verilmiş olsun.

$$\begin{aligned} A(+)B &= [3.25, 5.46] (+) [-2.12, 7.51] \\ &= [3.25 - 2.12, 5.46 + 7.51] = [1.13, 12.97] \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} A(-)B &= [3.25, 5.46] (-) [-2.12, 7.51] \\ &= [3.25 - 7.51, 5.46 + 2.12] = [-4.26, 7.58] \end{aligned} \quad (2.23)$$

$B = [2.12, 7.51]$ için;

$$B^{-1} = [2.12, 7.51]^{-1} = [1/2.12 \wedge 1/7.51, 1/2.12 \vee 1/7.51] = [0.13, 0.47] \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned}
A(.)B &= [3.25, 5.46] (.) [-2.12, 7.51] \\
&= [(3.25)(-2.12) \wedge (3.25)(7.51) \wedge (5.46)(-2.12) \wedge (5.46)(7.51), \\
&\quad (3.25)(2.12) \vee (3.25)(7.51) \vee (5.46)(-2.12) \vee (5.46)(7.51)] \\
&= [(5.46)(-2.12), (5.46)(7.51)] = [-11.57, 41.00]
\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}
A(:)B &= [3.25, 5.46] (:) [-2.12, 7.51] \\
&= [(3.25)/(-2.12) \wedge (3.25)/(7.51) \wedge (5.46)/(-2.12) \wedge (5.46)/(7.51), \\
&\quad (3.25)/(2.12) \vee (3.25)/(7.51) \vee (5.46)/(-2.12) \vee (5.46)/(7.51)] \\
&= [0.43, 2.57]
\end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}
A(\wedge)B &= [3.25, 5.46] (\wedge) [-2.12, 7.51] \\
&= [3.25 \wedge -2.12, 5.46 \wedge 7.51] = [-2.12, 5.46]
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}
A(\vee)B &= [3.25, 5.46] (\vee) [-2.12, 7.51] \\
&= [3.25 \vee -2.12, 5.46 \vee 7.51] = [3.25, 7.51]
\end{aligned} \tag{2.28}$$

2.6.2. Üçgensel ve yamuksal bulanık sayılar

Bulanık sayılar kümesinin eleman sayısı sonsuzdur. Çeşitli bulanık sayı biçimleri arasında en önemli grubu, üçgensel ve yamuksal bulanık sayılar oluştururlar. Özellikle olanaksal (possibilistic) matematiksel programlama problemlerini çözmede, bu tip bulanık sayılar çok sık kullanılırlar. Bundan dolayı, burada, üçgensel ve yamuksal bulanık sayıların aritmetiği ve uygulamaları incelenecektir.

2.6.2.1 Üçgensel bulanık sayılar

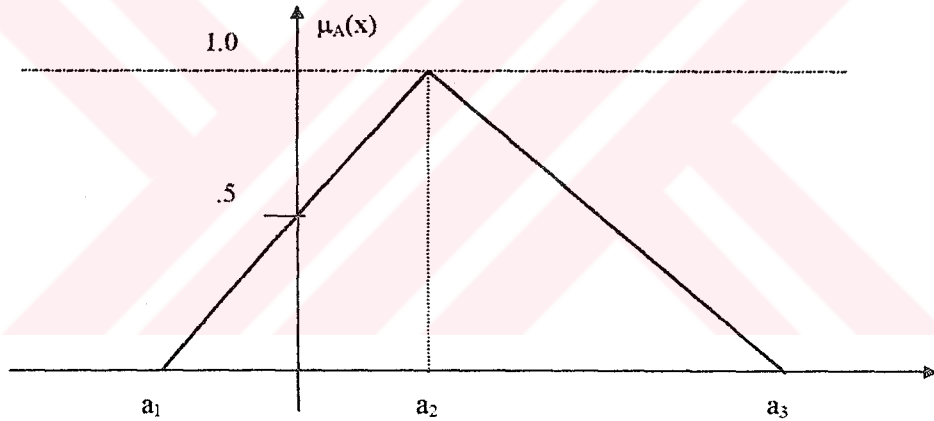
Üçgensel bulanık sayılar, özellikle sistem modellemede çok sık kullanılmaktadır. Üçgensel bulanık sayılar, üç elemandan oluşan, (a_1, a_2, a_3) takımı şeklinde tanımlanabilir. Şekil 2.3'de gösterilen üçgensel bulanık sayı için, üyelik fonksiyonu şu şekilde tanımlanabilir;

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x < a_1 \text{ ise} \\ (x-a_1)/(a_2-a_1) & a_1 \leq x \leq a_2 \text{ ise} \\ (a_3-x)/(a_3-a_2) & a_2 \leq x \leq a_3 \text{ ise} \\ 0 & x > a_3 \text{ ise} \end{cases} \quad (2.29)$$

Alternatif olarak, α seviyesinde güven aralığı tanımı, üçgensel bulanık sayı olarak aşağıdaki şekilde nitelendirilebilir [15].

$\forall \alpha \in [0,1] :$

$$A_\alpha = [a_1(\alpha), a_3(\alpha)] = [(a_2-a_1)\alpha + a_1, -(a_3-a_2)\alpha + a_3] \quad (2.30)$$

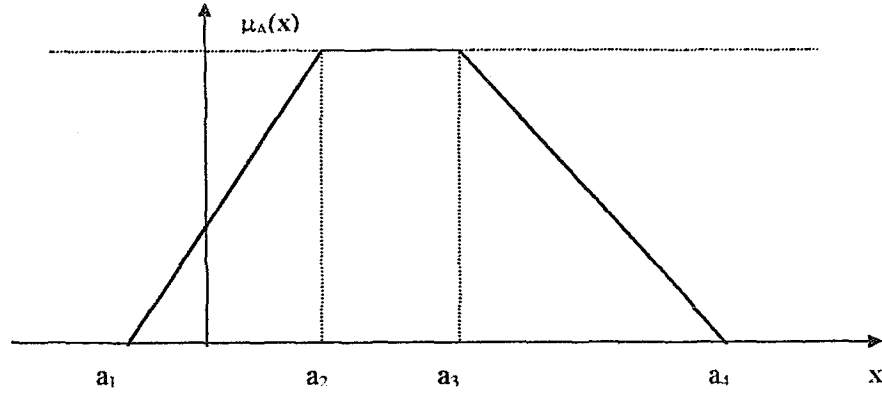


Şekil 2.3 Üçgensel bulanık sayı ($A=(a_1, a_2, a_3)$)

2.6.2.2 Yamuksal bulanık sayılar

Bulanık sayıların diğer önemli bir bölümünü “yamuksal bulanık sayılar” teşkil etmektedir. Bu durumda, $\alpha = 1$ için bir nokta değil, şekil 2.4’de görüldüğü gibi, (a_2, a_3) aralığında tanımlı, bir doğru söz konusudur. Bu, bulanık sayıların özel bir sınıfı olan, yamuksal bulanık sayıların oluşturur.

Yamuksal bulanık sayıların özellikleri, üçgensel bulanık sayılarınki ile benzerdir. Yamuksal bulanık sayı, tamamıyla $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ şeklindeki bir dörtlüyle temsil edilebilir.



Şekil 2.4 Yamuksal bulanık sayı ($A=(a_1, a_2, a_3, a_4)$)

Yamuksal bulanık bir sayı, güven aralığı ile birlikte α -kesme düzeyinde nitelendirilebilir;

$$\forall \alpha \in [0,1]$$

$$A_\alpha = (a_2 - a_1)\alpha + a_1, -(a_4 - a_3)\alpha + a_4 \quad (2.31)$$

olur. Yamuksal bir sayının üyelik fonksiyonu ise aşağıdaki gibi tanımlanabilir [15].

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x < a_1 \text{ ise} \\ (x - a_1)/(a_2 - a_1) & a_1 \leq x \leq a_2 \text{ ise} \\ 1 & a_2 \leq x \leq a_3 \text{ ise} \\ (a_4 - x)/(a_4 - a_3) & a_3 \leq x \leq a_4 \text{ ise} \\ 0 & x > a_4 \text{ ise} \end{cases} \quad (2.32)$$

22. Fuzzy Set ve Fuzzy Sayılar
Yamuksal Bulanık Sayılar

2.6.3 Bulanık bağıntı

Bulanık bağıntı kavramını açıklamadan önce, bağıntı kavramının tanımını yapmakta fayda olacaktır; bağıntı bir ikililer kümesidir. Eğer (Z) bir bağıntı ise,

$$A = \{x \mid x, Z\text{'deki bazı ikililerin birinci koordinatı}\}$$

kümesine (Z) 'nin tanım kümesi,

$$B = \{y \mid y, Z\text{'deki bazı ikililerin ikinci koordinatı}\}$$

kümesine (Z) 'nin değer kümesi denir.

Böylece tanım kümesi A ve değer kümesi B olmak üzere, bağıntı $A \times B$ kartezyen çarpımından bulunan ikililer kümesinin bir alt kümesidir. A 'nın her elemanı bağıntıdaki bazı ikililerin ilk koordinatı, B 'nin her elemanı da bazı ikililerin ikinci koordinatı olmaktadır.

Diğer taraftan A ve B şeklindeki iki kümenin kartezyen çarpımı olan $A \times B$ 'nin bir alt kümesi bağıntı olduğundan, bağıntının tanım kümesi A 'nın bir alt kümesi ve değer kümesi de B 'nin bir alt kümesi olacaktır. $A = \{k, l, m, n, p\}$ ve $B = \{t, u, v, y\}$ kümeleri verildiğinde, Z bağıntısı A ve B arasında bir alt küme oluşturur ve bu bağıntı aşağıda görülmektedir.

Çizelge 2.3 A ve B kümelerinde Z bağıntısı

	t	u	v	y
k	0	0	1	0
l	1	0	0	1
m	1	1	0	0
n	0	0	1	0
n	1	0	1	0

Bir bağıntının tanım kümesindeki her elemana değer kümesinde yalnız bir eleman karşı geliyorsa, bu bağıntıya bir fonksiyon denir. Fonksiyonlar bağıntıların bir alt kümesidir. Yani her fonksiyon bir bağıntı olduğu halde, her bağıntı bir fonksiyon değildir. Aşağıda ise A ve B kümelerinde fonksiyonel bağıntı görülmektedir.

Çizelge 2.4 A ve B kümelerinde fonksiyonel bağıntı

	t	u	v	y
k	1	0	0	0
l	0	1	0	0
m	0	0	0	1
n	0	1	0	0
p	0	0	1	0

Verilen fonksiyon örneği bir başka biçimde aşağıdaki gibi gösterilebilir

$$F(k) = t, \quad F(l) = u, \quad F(m) = y, \quad F(n) = u, \quad F(p) = v$$

$X, Y \subseteq R$ evrensel kümeler olmak üzere $X*Y$ üzerinde bulanık bağıntı;

$$R = \{((x,y), \mu_R(x,y)) \mid (x,y) \in X*Y\} \quad (2.33)$$

şeklinde gösterilir [15].

$X = Y = R$ ve $R =$ “ x, y ’ den oldukça büyük” olmak üzere, R bağıntısının üyelik fonksiyonu şu şekilde tanımlanabilir;

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 0 & x \leq y & \text{ise} \\ (x-y)/10y & y < x \leq 11y & \text{ise} \\ 1 & x > 11y & \text{ise} \end{cases} \quad (2.34)$$

Bu bağıntı için farklı üyelik fonksiyonu ise;

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 0 & x \leq y \quad \text{ise} \\ (1+(y-x)-2)-1 & x > y \quad \text{ise} \end{cases} \quad (2.35)$$

şeklindedir [16].

$X = \{ x_1, x_2, x_3 \}$ ve $Y = \{ y_1, y_2, y_3, y_4 \}$ şeklinde verilen iki küme için bulanık bağıntı matris şeklinde gösterilebilir.

$R = \text{"x, y'den oldukça büyük"}$ ve $Z = \text{"y, x'den çok büyük"}$ bağıntıları sırasıyla Çizelge 2.5 ve Çizelge 2.6'de gösterilmiştir.

Çizelge 2.5 $R = \text{"x, y'den oldukça büyük"}$ bağıntısı

		y_1	y_2	y_3	y_4
$R:$	x_1	.8	.1	.1	.7
	x_2	0	.8	0	0
	x_3	.9	1	.7	.8

Çizelge 2.6 $Z = \text{"y, x'den çok büyük"}$ bağıntısı

		y_1	y_2	y_3	y_4
$Z:$	x_1	.4	0	.9	.6
	x_2	.9	.4	.5	.7
	x_3	.3	0	.8	.5

Verilen R ve Z bağıntıları üzerindeki birleşim ve kesişim bağıntıları ise şöyle tanımlanabilir;

$$\mu_{R \cup Z}(x,y) = \max \{ \mu_R(x,y), \mu_Z(x,y) \}, \quad (x,y) \in X \times Y \quad (2.36)$$

$$\mu_{R \cap Z}(x,y) = \min \{ \mu_R(x,y), \mu_Z(x,y) \}, \quad (x,y) \in X \times Y \quad (2.37)$$

R ve Z bağıntılarının kesişim ve birleşim bağıntıları ise sırasıyla çizelge 2.7 ve çizelge 2.8'de görülmektedir [16].

Çizelge 2.7 R ve Z bağıntılarının bileşim bağıntısı

		y ₁	y ₂	y ₃	y ₄
R ∪ Z :	x ₁	.8	1	.9	.7
	x ₂	.9	.8	.5	.7
	x ₃	.9	1	.8	.8

Çizelge 2.8 R ve Z bağıntılarının kesişim bağıntısı

		y ₁	y ₂	y ₃	y ₄
R ∩ Z :	x ₁	.4	0	.1	.6
	x ₂	0	.4	0	0
	x ₃	.3	0	.7	.5

Bulanık bir bağıntıyı seviye seviye analiz etmek oldukça önemlidir. Bu analiz işlemini, α -seviyelerinde incelemek mümkündür, örneğin; $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ bir otomotiv fabrikasının üretmiş olduğu otomobilleri, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ bir otomobilde bulunması gereken özellikleri göstermek üzere, her bir otomobilin sahip olduğu özellikler 0-1 aralığında derecelenebilir. Bu durumda X ve Y'ye bağlı olarak R bağıntısı oluşturulabilir, bu da çizelge 2.9'da gösterilmiştir.

Çizelge 2.9 R Bulanık bağıntısı

		y ₁	y ₂	y ₃	y ₄	y ₅
R :	x ₁	.2	.8	.5	1	.6
	x ₂	.7	.6	.9	.3	1
	x ₃	.5	.1	.7	.6	.4
	x ₄	.3	1	.9	.7	.5

R bağıntısının değişik düzeylerdeki α -seviyeleri incelenerek, iyi bir analiz yapmak mümkün olacaktır. Çizelge 2.10'da $\alpha = .3$, $\alpha = .5$, $\alpha = .9$, $\alpha = 1$ seviyeleri incelenmiştir.

Çizelge 2.10 $\alpha = .3$, $\alpha = .5$, $\alpha = .9$, $\alpha = 1$ seviyelerinde R bağıntısı

$\alpha = .3$ düzeyinde

		y ₁	y ₂	y ₃	y ₄	y ₅
R _{.3} :	x ₁	0	.8	.5	1	.6
	x ₂	.7	.6	.9	.3	1
	x ₃	.5	0	.7	.6	.4
	x ₄	.3	1	.9	.7	.5

$\alpha = .5$ düzeyinde

		y ₁	y ₂	y ₃	y ₄	y ₅
R _{.5} :	x ₁	0	.8	.5	1	.6
	x ₂	.7	.6	.9	0	1
	x ₃	.5	0	.7	.6	0
	x ₄	0	1	.9	.7	.5

$\alpha = .9$ düzeyinde

		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
$R_3 :$	x_1	0	0	0	1	0
	x_2	0	0	.9	0	1
	x_3	0	0	0	0	0
	x_4	0	1	.9	0	0

$\alpha = 1$ düzeyinde

		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
$R_3 :$	x_1	0	0	0	1	0
	x_2	0	0	0	0	1
	x_3	0	0	0	0	0
	x_4	0	1	0	0	0

Çizelge 2.10'da gösterilen bağıntı matrislerinden hareketle, bir otomobilde bulunması gereken belirli bir özelliğin, hangi seviyelerde hangi otomobillerde bulunduğunu görmek mümkün olmaktadır.

2.6.3.1 Bulanık bağıntıların bileşkesi

Farklı kuvvet uzaylarında tanımlı bulanık bağıntılar, bileşke işlemi yardımıyla, birbirleriyle birleştirilebilirler. Matematiksel özellikler münasebetiyle ve sonuçları farklılaştırmalarıyla, bileşke işleminin farklı durumları da önerilmektedir. Max-min bileşke de en iyi bilinen ve en çok sıklıkta kullanılan bileşkelerden biridir.

$$R_1(x,y), (x,y) \in X*Y \text{ ve } R_2(y,z), (y,z) \in Y*Z \quad (2.38)$$

iki bulanık bağıntı olmak üzere, max-min bileşkesi;

$$R_1 \circ R_2 = \{[(x,z), \max \{ \min \{ \mu_{R_1}(x,y), \mu_{R_2}(y,z) \} \}] \mid x \in X, y \in Y, z \in Z \} \quad (2.39)$$

şeklinde ifade edilir [17].

$\mu_{R_1 \circ R_2}$, bulanık kümeler üzerinde bulanık bağıntının üyelik fonksiyonunu temsil etmektedir.

$R_1(x,y)$ ve $R_2(y,z)$ bağıntıları, çizelge 2.11've çizelge 2.12'de gösterilen matrislerle tanımlansınlar.

Çizelge 2.11 $R_1(x,y)$ bulanık bağıntısı

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	.1	.2	0	1	.7
x_2	.3	.5	0	.2	1
x_3	.8	0	1	.4	.3

Çizelge 2.12 $R_2(y,z)$ bulanık bağıntısı

	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	.9	0	.3	.4
y_2	.2	1	.8	0
y_3	.8	0	.7	1
y_4	.4	.2	.3	0
y_5	0	1	0	.8

Çizelge 2.11 ve 2.12'de verilen $R_1(x,y)$ ve $R_2(y,z)$ bulanık bağıntıları için $R_1 \circ R_2(x,z)$ max-min bileşkesi hesaplanmak istenirse öncelikle $R_1 \circ R_2(x_1, z_1)$ hesaplanır.

$x = x_1, z = z_1$, ve $y = y_i, i = 1, \dots, 5$ olmak üzere;

$$\min \{ \mu_{R_1}(x_1, y_1), \mu_{R_2}(y_1, z_1) \} = \min \{ .1, .9 \} = .1 \quad (2.40)$$

$$\min \{ \mu_{R_1}(x_1, y_2), \mu_{R_2}(y_2, z_1) \} = \min \{ .2, .2 \} = .2 \quad (2.41)$$

$$\min \{ \mu_{R_1}(x_1, y_3), \mu_{R_2}(y_3, z_1) \} = \min \{ 0, .8 \} = 0 \quad (2.42)$$

$$\min \{ \mu_{R_1}(x_1, y_4), \mu_{R_2}(y_4, z_1) \} = \min \{ 1, .4 \} = .4 \quad (2.43)$$

$$\min \{ \mu_{R_1}(x_1, y_5), \mu_{R_2}(y_5, z_1) \} = \min \{ .7, 0 \} = 0 \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} R_1 \circ R_2(x_1, z_1) &= ((x_1, z_1), \mu_{R_1 \circ R_2}(x_1, z_1)) \\ &= ((x_1, z_1), \max \{ .1, .2, 0, .4, 0 \}) = ((x_1, z_1), .4) \end{aligned} \quad (2.45)$$

bulunur. Bu hesaplamaya benzer şekilde, $i = 1, \dots, 3, j = 1, \dots, 4$ olmak üzere tüm (x_i, z_j) çiftleri için üyelik fonksiyonları hesaplandığında $R_1 \circ R_2$ bileşke bağıntısı çizelge 2.13'de gösterilen şekilde elde edilir [18].

Çizelge 2.13 $R_1 \circ R_2$ bileşke bağıntısı

	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	.4	.7	.3	.7
x_2	.3	1	.5	.8
x_3	.8	.3	.7	1

3. BULANIK ULAŞTIRMA

3.1 Ulaştırma Modeli

Ulaştırma modeli, lineer programlama modellerinin bir özel şekli olup, belirli bir malın, çeşitli yerlerdeki üretim merkezlerinden, çeşitli yerlerdeki tüketim merkezlerine dağıtımını temsil eden bir matematiksel modeldir. Ulaştırma modelinin gayesi, toplam ulaştırma maliyetinin minimum olmasını sağlayan dağıtım planının bulunmasıdır.

Dağıtım problemlerinin formülasyonu ve çözümünde matematiksel kavramların kullanılması, 1941 yılında başlamıştır. II. Dünya Savaşından sonra Danzig ve Koopmans'ın çalışmaları ile dağıtım problemlerinin çözüm metotları geliştirilmiştir. Bu kademedeki, ancak ileri matematik bilgisine sahip olanların anlayabileceği şekilde bulunan çözüm metotları, birkaç yıl sonra, uygulayıcıların faydalanabileceği hale getirilmiştir. Atlama taşı ve basitleştirilmiş ulaştırma modeli çözüm teknikleri, 1953-1955 yıllarında W. Cooper ve A. Charnes tarafından ortaya atılmıştır. Daha sonraki yıllarda W. Kuhn, M. Flood, S. Dwyer ve A. Galler gibi araştırmacılar, ulaştırma modelinin daha komplike varyasyonları (örneğin çok boyutlu dağıtım problemleri gibi) üzerinde ileri teknikler ve yaklaşık çözüm metotları geliştirmişlerdir [19].

Ulaştırma modelleri aşağıdaki alanlarda sıkça kullanılabilir :

- a. Üretim ve tüketim merkezleri arasında optimal mal dağıtımının belirlenmesinde,
- b. İşlerin makinelere dağıtımında,
- c. Üretim planlamasında,
- d. Çeşitli şebeke ağı (Networks) problemlerinde,
- e. İşletmelerin (fabrikaların) kuruluş yeri seçiminde v.b.

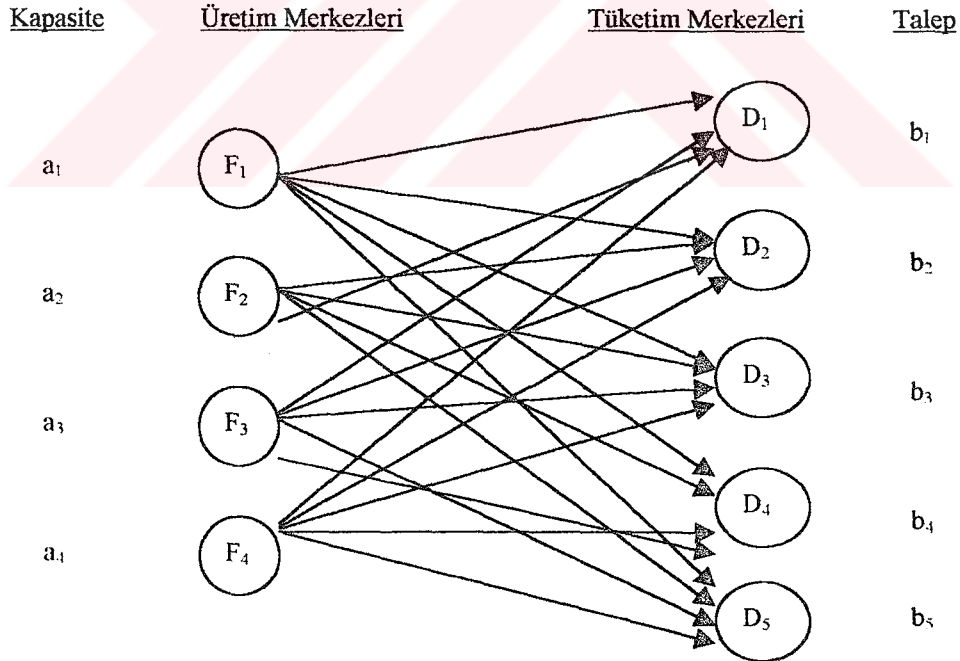
3.2. Ulaştırma Problemlerinin Matematiksel Modeli

(m) üretim merkezinin ve (n) tüketim merkezinin olduğu bir ulaştırma probleminde, tüketim merkezi (j) ancak b_j miktarında mal isterken üretim merkezi (i) de ancak a_i

miktarında malı sunabilir. (i) üretim merkezinden (j) tüketim merkezine bir birim malın gönderilmesi c_{ij} birim maliyette gerçekleşir.

Ayrıca ulaştırma modeli şu varsayımları ve gerekleri de içerir :

1. Modelde kullanılan tüm bilgiler ve probleme konu olan mal ve hizmetler, bütün üretim ve tüketim merkezleri için aynı birim ve homojenlikte tanımlanmış olmalıdır.
2. Her bir üretim merkezi ile tüketim merkezi arasında bir birim malın kaçta taşınacağı bilinmelidir.
3. Her bir üretim ve tüketim merkezindeki toplam miktar tam olarak bilinmelidir
4. Üretim merkezlerinden dağıtılacak toplam miktar, üretim merkezlerince istenen toplam miktara eşit olmalıdır. Eğer böyle bir eşitlik yoksa, problem dengelenmemiş olmaktadır. Şekil 3.1’de dört üretim ve beş tüketim merkezli bir ulaştırma problemi verilmiştir.



Şekil 3.1 Ulaştırma problemlerinin standart gösterimi

Aslında ulaştırma problemlerinin standart gösterimi, şekilden çok ulaştırma çizelgesi ile olur. Örneğin, (m) tane fabrika ve (n) tane depo olduğunu varsayalım. Bu

işletmenin ulaştırma sorusuna ilişkin ulaştırma modelinin tablosunu çizelge 3.1'deki gibi düzenleyebiliriz.

Çizelge 3.1 Standart ulaştırma tablosu

	1	2	3		n-1	n	Kapasite
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}		$c_{1,n-1}$ $x_{1,n-1}$	c_{1n} x_{1n}	a_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}		$c_{2,n-1}$ $x_{2,n-1}$	c_{2n} x_{2n}	a_2
m-1	$c_{m-1,1}$ $x_{m-1,1}$	$c_{m-1,2}$ $x_{m-1,2}$	$c_{m-1,3}$ $x_{m-1,3}$		$c_{m-1,n-1}$ $x_{m-1,n-1}$	$c_{m-1,n}$ $x_{m-1,n}$	a_{m-1}
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}		$c_{m,n-1}$ $x_{m,n-1}$	c_{mn} x_{mn}	a_m
Talep	b_1	b_2	b_3		b_{n-1}	b_n	

Ulaştırma tablosunda kullanılan notasyonların anlamları :

Z = Toplam ulaştırma problemini en küçükleyen amaç fonksiyonunu,

m = Üretim merkezi sayısını ($i = 1,2,3,.....,m$),

n = Tüketim merkezi sayısını ($j = 1,2,3,.....,n$),

c_{ij} = i . Üretim merkezinden j . tüketim merkezine gönderilen, belirli bir mamule ilişkin birim ulaştırma maliyetini,

x_{ij} = i . üretim merkezinden j . tüketim merkezine gönderilen, mamul birim sayısını ($i = 1,2,3,.....,m; j = 1,2,3,.....,n$),

a_i = i . üretim merkezinin üretim kapasitesini ($i = 1,2,3,.....,m$),

b_j = j . tüketim merkezinin talebini ($j = 1,2,3,.....,n$) ifade etmektedir.

Modeli doğrusal programlama ilkelerine göre formüle etmek istersek;

Amaç fonksiyonu ;

$$Z_{enk} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad \text{veya} \quad Z_{enk} = c_{11} x_{11} + c_{12} x_{12} + \dots + c_{mn} x_{mn} \quad (3.1)$$

Kısıtlayıcılar ;

$$a) \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (3.2)$$

(m) üretim merkezine ilişkin toplam kapasiteyi gösterir. Kapasite kısıtı daha açık olarak;

$$\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + \dots + x_{1n} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + \dots + x_{2n} = a_2 \\ \vdots \\ x_{m1} + x_{m2} + x_{m3} + \dots + x_{mn} = a_m \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + \dots + x_{1n} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + \dots + x_{2n} = a_2 \\ \vdots \\ x_{m1} + x_{m2} + x_{m3} + \dots + x_{mn} = a_m \end{array}} \right\} \text{Kapasite kısıtı} \quad (3.3)$$

biçiminde yazılır.

$$a) \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.4)$$

(n) satış merkezine ilişkin toplam talebi gösterir. Talep kısıtı daha açık olarak;

$$\begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + x_{31} + \dots + x_{m1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + \dots + x_{m2} = b_2 \\ \vdots \\ x_{1n} + x_{2n} + x_{3n} + \dots + x_{mn} = b_n \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + x_{31} + \dots + x_{m1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + \dots + x_{m2} = b_2 \\ \vdots \\ x_{1n} + x_{2n} + x_{3n} + \dots + x_{mn} = b_n \end{array}} \right\} \text{Talep kısıtı} \quad (3.5)$$

biçiminde yazılır [20].

Ulaştırma modelinin tutarlı olabilmesi için, toplam kapasitenin toplam talebe eşit olması koşulu vardır. Bunun için de;

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^n x_{ij} \quad (3.6)$$

veya

$$\sum_{j=1}^n b_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m x_{ij} \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} \right) = \sum_{i=1}^m a_i \quad (3.7)$$

olması gerekir. Bu koşula “tutarlılık koşulu” veya “denge” denir. Fakat, gerçek problemlerde, toplam talep toplam arza her zaman eşit olmaz [21].

Tutarlılık koşulunda kullanılan a_i ve b_j pozitif değerlere sahiptir, negatif olması söz konusu değildir.

3.3 Bulanık Verilerle Ulaştırma Optimizasyonu

Bulanık ulaştırma problemi ilk olarak 1980 yılında Prade tarafından çalışılmıştır. Daha sonraki yıllarda Oheigeartaigh (1982), Verdegay (1983) ve Delgado (1984) tarafında bu çalışma sürdürülmüştür.

Bulanık ulaştırma problemlerinin parametrik yaklaşımla çözümü ise Chanas Kolodziejczyk ve Machaj (1984) tarafından yürütülmüştür.

Bulanık ulaştırma problemlerini bugüne kadar yapılan çalışmalar sonucunda bulanık maliyet verileri ile ulaştırma ve bulanık kapasite ve talep verileri ile ulaştırma şeklinde iki kısımda incelemek mümkündür.

Bulanık maliyet verileri ile ulaştırma problemlerinin optimizasyonunda atlama taşı metodundan, bulanık kapasite ve talep verileri ile ulaştırma problemlerinin optimizasyonunda ise parametrik yaklaşımdan faydalanılmaktadır.

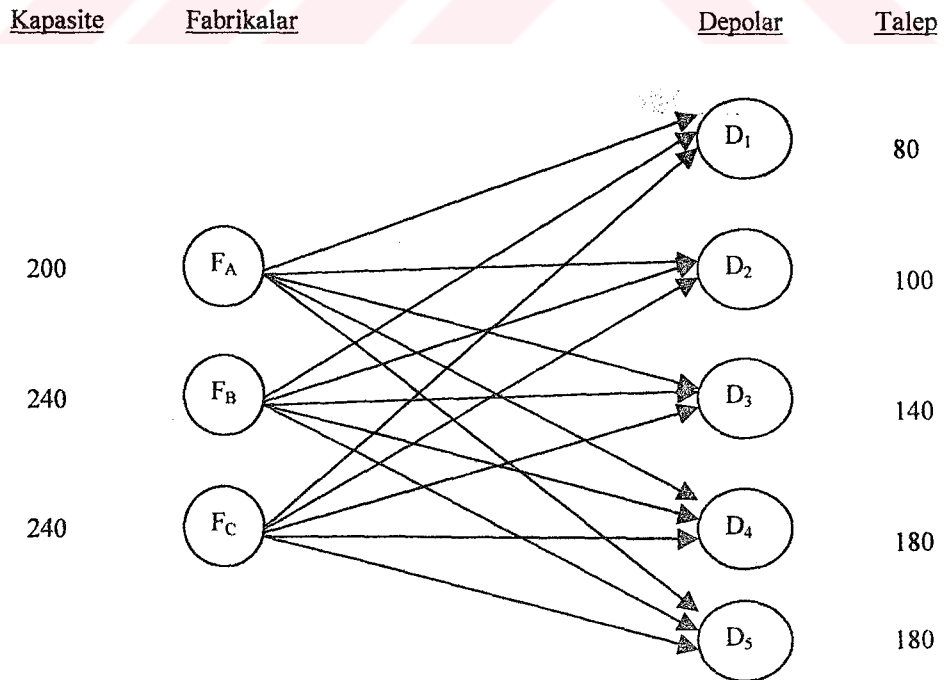
3.3.1 Bulanık maliyet verileri ile ulaştırma optimizasyonu

Daha önce de belirtildiği üzere bulanık maliyet verileri ile ulaştırma optimizasyonunda atlama taşı metodundan yararlanılmaktadır. Atlama taşı metodu, ulaştırma ve programlama problemlerinin çözümünde geniş surette kullanılan, çok iyi bilinen klasik bir yaklaşımdır. Amerikan matematikçisi George Danzig tarafından 40 yıl önce öne sürülmüştür.

Konuyu açıklarken öncelikle bulanık olmayan verilerle işe başlanacak ve daha sonra bulanık verilerle birlikte durum ele alınarak, metot genişletilecektir. Metodu açıklamak için örneklerden faydalanılacaktır.

3.3.1.1 Kesin sayılarla atlama taşı metodu

Şekil 3.2’de gösterilen ulaştırma problemine dikkat edilirse, bu problemde A, B, C şeklinde adlandırılan üç fabrika ürün üretmektedir. Burada belirtilmeyen belli bir zaman aralığında A, B, C fabrikaları sırasıyla 200, 240 ve 240 birim ürünü 1, 2, 3, 4 ve 5 depolarına göndermektedir. Depoların talebi ise sırasıyla 80, 100, 140, 180 ve 180 birim şeklindedir.



Şekil 3.2 Fabrikalar ve depolar arasındaki ulaştırma problemi

Fabrikalar ile depolar arasındaki ulaştırma maliyetleri çizelge 3.2’de verilmiştir. Problem, toplam ulaştırma maliyetini minimum kılacak sistemi geliştirmeyi içermektedir.

Çizelge 3.2 Fabrikalar ve depolar arasındaki birim ulaştırma maliyet matrisi

	1	2	3	4	5	Kapasite
A	8	2	4	12	18	200
B	12	8	6	10	14	240
C	10	4	12	8	16	240
Talep	80	100	140	180	180	680

Bu problem, 15 değişkenle bir lineer programlama problemini oluşturmaktadır. Satırlar ve sütunlar için uygun işaretler kullanılarak problemin formülasyonu aşağıdaki şekilde yazılabilir. Formülasyondaki x_{ij} ’de yer alan (i) indisi fabrikaları (A $\rightarrow$ 1, B $\rightarrow$ 2, C $\rightarrow$ 3) ve (j) işareti ise depoları simgelemektedir.

Ulaştırma maliyetini minimum kılacak olan (z) amaç fonksiyonu;

$$\begin{aligned} \text{Min (z)} = & 8x_{11} + 2x_{12} + 4x_{13} + 12x_{14} + 18x_{15} \\ & + 12x_{21} + 8x_{22} + 6x_{23} + 10x_{24} + 14x_{25} \\ & + 10x_{31} + 4x_{32} + 12x_{33} + 8x_{34} + 16x_{35} \end{aligned}$$

Kısıtlar;

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 200$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 240$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 240$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 100$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 140$$

$$\begin{aligned}
x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 180 \\
x_{15} + x_{25} + x_{35} &= 180 \\
x_{ij} &\geq 0, \quad i = 1,2,3,4,5 \quad j = 1,2,3
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Bu sekiz kısıt bağımsız değildir, çünkü problemde kapasite toplamalarının talep toplamalarına eşit olması şartı yer almaktadır.

$$200 + 240 + 240 = 80 + 100 + 140 + 180 + 180 = 680 \tag{3.9}$$

Başlangıç çözüm yöntemlerinden “Kuzey-Batı Köşegeni Yöntemi”ni kullanarak çözüme başlanacaktır.

İlk taşıma, tablodaki kuzey-batı köşesine (sol üst köşeye) yapılmaktadır. Bu durumda (A,1) hücresine kapasite ve talep değerlerinden hareketle en küçük değer atanır.

Bu yüzden $(200 \wedge 80) = 80$ birim (A,1) hücresine yerleştirilir. Sonra (A,2) hücresine geçilir ve $((200-80) \wedge 100) = 100$ değeri atanır. (A,3) hücresine de $((200-80-100) \wedge 140) = 20$ değeri atanır ve A satırı doymuş hale gelir. Daha sonra B satırına bakılır, B satırında 1 ve 2 kolonları zaten doyurulmuştur, bu durumda (B,3) hücresine bakılır, $((140-20) \wedge 240) = 120$ birim ürün (B,3) hücresine atanır ve 3. kolon da artık doyurulmuştur. (B,4) hücresine ise $((240-120) \wedge 180) = 120$ birim ürün atanır, B satırı da doyurulmuştur. 4. kolonda C hücresi karşımıza çıkmaktadır. (C,4) hücresine $((180-120) \wedge 180) = 60$ birim ürün atanır ve 4. kolon da doymuş hake gelmiş olur. Geriye (C,5) hücresi ve 180 birimlik ürün kalmıştır, bu miktar da (C,5) hücresine gönderilerek başlangıç çözümü gerçekleştirilmiş olur. Kuzey-batı köşegeni yöntemiyle elde edilen başlangıç çözümü çizelge 3.3a’da gösterilmiştir.

$$\begin{aligned}
x_{11} &= 80, x_{12} = 100, x_{13} = 20, x_{14} = 0, x_{15} = 0, \\
x_{21} &= 0, x_{22} = 0, x_{23} = 120, x_{24} = 120, x_{25} = 0, \\
x_{31} &= 0, x_{32} = 0, x_{33} = 0, x_{34} = 60, x_{35} = 180
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Toplam ulaştırma maliyeti hesaplanmak istenirse;

$$z = (80)(8) + (100)(2) + (20)(4) + (120)(6) + (120)(10) + (60)(8) + (180)(16)$$

$$z = 6200 \quad (3.11)$$

bulunur.

Bu çözümün optimal olup olmadığını belirlemek demek, eldeki dağıtım programındaki boş gözlere ayırma yapıldığında toplam maliyetin azalıp azalmadığını bulmaktır. Eğer yeni yapılan ayrımlar ile dağıtım bileşimi değiştiğinde daha düşük bir toplam maliyet elde ediliyorsa, yani bir anlamda tasarruf söz konusu ise, optimal çözüme daha yaklaşılmış olur. Eğer yeni yapılan ayrımlar ile dağıtım bileşimi değiştiği halde daha düşük bir toplam maliyete ulaşılamıyorsa, optimal çözüme ulaşılmış demektir.

Atlama taşı yöntemi, boş bir göze atama yaptığımızda, toplam maliyetin ne kadar değişeceğini hesaplayabilmektedir. Boş bir hücreye bir birimlik bir atama yapıldığında maliyetteki net değişme veya test miktarı (d_{ij}) hesaplanır. Herhangi bir boş göze bir birim ürün atandığında o hücrenin bulunduğu satır ve sütun koşullarının, yani kapasite ve talep miktarlarının, aynen korunması gerekir. Bu nedenle atama yaptığımız hücreden başlayarak komşu dağıtım yapılmış, yani dolu hücrelerdeki miktarları bir birim azaltarak veya bir birim arttırarak dengeyi korumuş oluruz [22].

Atamaların ilk önce hangi boş hücreye yapılması gerektiğine karar verirken en yüksek negatif net değişim maliyetli olan hücreden başlanması daha doğru olur. Eğer boş hücrelerin net değişim maliyeti ($d_{ij} > 0$) olursa, herhangi bir boş hücreye yapılacak atama, toplam maliyette bir tasarruf sağlamayacaktır. Bu durumda ulaşılan çözüm en uygun çözüm ve toplam maliyet de en düşük maliyettir.

Kuzey-batı köşegeni başlangıç çözümünden hareketle, daha düşük toplam maliyetin bulunabilmesi için diğer bir çözüme bakılacak olursa, 8 boş hücre içinden en elverişli yere bir atama yapılabilir. Örneğin (A,4) hücreesine bir atama söz konusu olursa, (A,3), (B,3), (B,4) hücrelerinde yapılacak bir atama çevrimini ile (A,4) hücreesine gerekli atama yapılabilir. Bu çevrimde yapılacak bir birimlik değişim toplam maliyeti de

Çizelge 3.3 Ulaştırma probleminde en iyi çözümün bulunması için değişik atlama taşı adımları

	1	2	3	4	5
A	80	100	20		
B			120	120	
C				60	180

$$a : d_{A4} = (12-4) + (6-10) = 4$$

	1	2	3	4	5
A	80	100	20		
B			120	120	
C				60	180

$$b : d_{A5} = (18-4) + (6-10) + (8-16) = 2$$

	1	2	3	4	5
A	80	100	20		
B			120	120	
C				60	180

$$c : d_{B1} = (12-6) + (4-8) = 2$$

	1	2	3	4	5
A	80	100	20		
B			120	120	
C				60	180

$$d : d_{B2} = (8-6) + (4-2) = 4$$

	1	2	3	4	5
A	80	100	20		
B			120	120	
C				60	180

$$e : d_{B5} = (14-10) + (8-16) = 4^*$$

	1	2	3	4	5
A	80	100	20		
B			120	120	
C				60	180

$$f : d_{C1} = (10-8) + (10-6) + (4-8) = 2$$

	1	2	3	4	5
A	80	100	20		
B			120	120	
C				60	180

$$f : d_{C2} = (4-8) + (10-6) + (4-2) = 2$$

	1	2	3	4	5
A	80	100	20		
B			120	120	
C				60	180

$$h : d_{C3} = (12-8) + (10-6) = 8$$

Bu sonuçlardan ortaya çıkan, atama yapılacak hücre (B,5) hücresidir. (B,5) hücresine bir birim ürün atanırsa, bir birim ürün başına 4 birim tasarruf edilir. Ayrıca söz konusu hücreye daha çok ürünü (120 birim) atanma olanağı bulunduğundan, atama işlemine

(B,5) hücresinden başlanır. (B,5) hücresine kaç birim ürünün atanabileceğine karar verirken şu yol izlenir; d_{B5} net maliyet değişimi hesaplanırken, kullanılan dolu hücrelerde yer alan negatif en büyük atama miktarı, boş hücreye atanacak miktardır. Çünkü bu durumda sıra ve sütun koşulları korunabilir.

Örneğimizde, $(B,4) = -120$, $(C,4) = 60$, $(C,5) = -180$ dir. Buna göre negatif en büyük değer $(B,4) = -120$ birim olduğundan (B,5) hücresine atanacak miktar da 120 birim olacaktır. Geliştirilen çözüm çizelge 3.4’de görülmektedir.

Çizelge 3.4 Geliştirilen yeni çözüm

	1	2	3	4	5	
A	80	100	20			200
B			120		120	240
C				180	60	240
	80	100	140	180	180	

Ulaştığımız çözümde $(m+n-1 = 7)$ adet atanmış hücre olduğundan çözüm temeldir ve dolayısıyla bozulma söz konusu değildir. Yeni bulunan çözüme göre toplam ulaştırma maliyeti :

$$z = (80)(8) + (100)(2) + (20)(4) + (120)(6) + (120)(14) + (180)(8) + (60)(16)$$

$$z = 5720 \quad (3.13)$$

bulunur. Daha önce toplam ulaştırma maliyeti 6200 olarak hesaplanmıştı. Buna göre toplam taşıma maliyetinde bir tasarruf sağlanmıştır, yani geliştirilen çözümün daha iyi bir çözüm olduğu ortadadır. Şimdi çizelge 3.4 ile bulunan geliştirilmiş çözümü ele alarak, tekrar atlama taşı yöntemine dönersek, çeşitli hücreler için hesaplanan maliyetler çizelge 3.5’de verilmiştir.

Çizelge 3.5 En iyi araştırılmasında atlama taşı yöntemine göre ikinci proses

	1	2	3	4	5
A	80	100	20		
B			120		120
C				180	60

$$a : d_{A4} = (12-4) + (6-14) + (16-8) = 8$$

	1	2	3	4	5
A	80	100	20		
B			120		120
C				180	60

$$b : d_{A5} = (18-4) + (6-14) = 6$$

	1	2	3	4	5
A	80	100	20		
B			120		120
C				180	60

$$c : d_{B1} = (12-6) + (4-8) = 2$$

	1	2	3	4	5
A	80	100	20		
B			120		120
C				180	60

$$d : d_{B2} = (8-6) + (4-2) = 4$$

	1	2	3	4	5
A	80	100	20		
B			120		120
C				180	60

$$e : d_{B4} = (10-14) + (16-8) = 4$$

	1	2	3	4	5
A	80	100	20		
B			120		120
C				180	60

$$f : d_{C1} = (10-16) + (14-6) + (4-8) = -2^*$$

	1	2	3	4	5
A	80	100	20		
B			120		120
C				180	60

$$g : d_{C2} = (4-16) + (14-6) + (4-2) = -2^*$$

	1	2	3	4	5
A	80	100	20		
B			120		120
C				180	60

$$h : d_{C3} = (12-16) + (14-6) = 4$$

Çizelge 3.5’de d_{C1} ve d_{C2} aynı negatif değerleri vermektedir ve bunlardan keyfi olarak d_{C1} seçilirse, (-2) ’nin bulunduğu d_{C1} durumunda, hücrelerde negatif en büyük değer dikkate alınır ve bu (C,5) hücresidir. Çözüm yeniden geliştirilirse çizelge 3.6’daki durum elde edilir.

Çizelge 3.6 İkinci geliştirilen çözüm

	1	2	3	4	5	
A	20	100	80			200
B			60		180	240
C	60			180		240
	80	100	140	180	180	

Bunun karşılığı olan toplam ulaştırma maliyeti ise ;

$$z = (20)(8) + (100)(2) + (60)(6) + (180)(14) + (60)(10) + (180)(8)$$

$$z = 5600 \quad (3.14)$$

bulunur.

Bu adımda tekrar atlama taşı yöntemi uygulanmaya devam edilirse ;

$$d_{A4} = (12-8) + (10-8) = 6,$$

$$d_{B4} = (10-6) + (4-8) + (10-8) = 2,$$

$$d_{A5} = (18-6) + (6-14) = 6,$$

$$d_{C2} = (4-10) + (8-2) = 0,$$

$$d_{B1} = (12-6) + (4-8) = 2,$$

$$d_{C3} = (12-10) + (8-4) = 6,$$

$$d_{B2} = (8-6) + (4-2) = 4,$$

$$d_{C5} = (16-10) + (8-4) + (6-14) = 2, \quad (3.15)$$

sonuçları elde edilir. Bu adımdan sonra yapılacak herhangi bir değişiklik toplam ulaştırma maliyetinde bir azalma sağlamayacaktır. Çünkü bütün d_{ij} değerleri pozitif veya boş hücreye sahiptir. Bu yüzden daha iyi bir çözümün bulunamayacağı sonucuna varılabilir. Fakat bulunan çözüm tek en iyi çözüm değildir. Çünkü $d_{C2} = 0$ değeri bulunmaktadır. Çizelge 3.6'da d_{C2} ile birlikte yapılan bir değişiklik ile çizelge 3.7 elde edilir ve bu çözümle toplam ulaştırma maliyeti, yine $z = 5600$ olarak bulunur.

Çizelge 3.7 Alternatif en iyi çözüm

	1	2	3	4	5	
A	80	40	80			200
B			60		180	240
C		60		180		240
	80	100	140	180	180	

Böylece verilen ulaştırma problemi için minimum toplam ulaştırma maliyeti, çizelge 3.6 ve çizelge 3.7’de verilen iki optimal çözüm ile 5600 değerini almaktadır [20].

3.3.1.2 Bulanık sayılarla atlama taşı metodu

Ele alınan atlama taşı metodu, üçgensel bulanık sayılar ve bulanık veriler kullanılarak dikkate alınırsa, optimizasyon için ölçü, üçgensel bulanık sayının (a_1, a_2, a_3) birleştirilmiş kesin sayısı olan $\tilde{A}$ olacaktır.

Kesin sayılarla sonuçlandırılan ulaştırma problemi, bulanık verilerle tekrar ele alınırsa; burada negatif en küçük d_{ij} değerlerine bakmak yerine, her atlama taşında maliyet fonksiyonu (z) hesaplanıp, bu değer in azalma ihtimali gözlemlenerek test edilir. Çizelge 3.8’de üçgensel bulanık sayılarla maliyet verileri verilmektedir.

Çizelge 3.8 Üçgensel bulanık sayılarla (a_1, a_2, a_3) maliyet değerlerine bağlı olarak, fabrikalar ve depolar arasındaki bulanık birim ulaştırma maliyet matrisi

		1	2	3	4	5	
(1)	A	(6,8,12)	(2,2,6)	(2,4,8)	(6,12,12)	(16,18,24)	200
(2)	B	(10,12,14)	(4,8,14)	(4,6,8)	(4,10,12)	(12,14,14)	240
(3)	C	(4,10,12)	(4,4,8)	(12,12,12)	(6,8,16)	(10,16,18)	240
		80	100	140	180	180	

Başlangıç ulaştırma çözümü olarak “kuzey –batı köşegeni yöntemi” kullanıldı. Elde edilen değerler çizelge 3.9’da gösterilmiş ve buna karşılık gelen toplam ulaştırma maliyeti ;

$$z = (80)(6,8,12) + (100)(2,2,6) + (20)(2,4,8) + (120)(4,6,8) \\ + (120)(4,10,12) + (60)(6,8,16) + (180)(10,16,18)$$

$$z = (3840,6200,8320) \quad (3.16)$$

bulunur.

$z = (a, b, c)$ verildiğinde $z = (a + 2b + c) / 4$ olduğuna göre;

Birleştirilmiş sayının terimleri için de, karşılık gelen maliyet değeri ise;

$$z = 6140 \quad (3.17)$$

olur.

Çizelge 3.9 İlk bulanık atlama taşı çözümü

	1	2	3	4	5	
A	80	100	20			200
B			120	120		240
C				60	180	240
	80	100	140	180	180	

Kesin sayılarla ulaştırma probleminin çözümünde gösterildiği gibi, atlama taşı metodu kullanılarak yeni çözüm araştırılır. En iyi çözümü bulabilmek için değişik atlama taşı adımları çizelge 3.10’da verilmiştir. Her bir durum için üçgensel bulanık sayılar ile ifade edilen bulanık maliyetler hesaplanır ve buna karşılık gelen birleştirilmiş sayılar elde edilir.

Çizelge 3.10 Bulanık verilerle oluşturulan ulaştırma probleminde en iyi çözümün bulunması için değişik atlama taşı adımları

	1	2	3	4	5
A	80	100	20	-1	1
B			120	120	
C				60	180
	80	100	140	180	180

$$a : z_{A4} = (3920, 6280, 8320)$$

	1	2	3	4	5
A	80	100		20	
B			140	100	
C				60	180
	80	100	140	180	180

$$z_{A4} = 6200$$

	1	2	3	4	5
A	80	100	20	-1	1
B			120	120	
C				60	180
	80	100	140	180	180

$$b : z_{A5} = (4040, 6240, 8520)$$

	1	2	3	4	5
A	80	100			20
B			140	100	
C				80	160
	80	100	140	180	180

$$z_{A5} = 6260$$

	1	2	3	4	5
A	80	100	20	-1	1
B			120	120	
C				60	180
	80	100	140	180	180

$$c : z_{B1} = (4000, 6320, 8480)$$

	1	2	3	4	5
A		100	100		
B	80		40	120	
C				60	180
	80	100	140	180	180

$$z_{B1} = 6280$$

	1	2	3	4	5
A	80	100	20	-1	1
B			120	120	
C				60	180
	80	100	140	180	180

$$d : z_{B2} = (3840, 6600, 9120)$$

	1	2	3	4	5
A	80		120		
B		100	20	120	
C				60	180
	80	100	140	180	180

$$z_{B2} = 6540$$

Çizelge 3.10 Devamı,

	1	2	3	4	5
A	80	100	20		
B			120	120	
C				60	180
	80	100	140	180	180

$$e : z_{B5} = (4320, 5720, 8320)$$

	1	2	3	4	5
A	80	100	20		
B			120		120
C				180	60
	80	100	140	180	180

$$z_{B5} = 6020^*$$

	1	2	3	4	5
A	80	100	20		
B			120	120	
C				60	180
	80	100	140	180	180

$$f : z_{C1} = (3480, 6320, 8080)$$

	1	2	3	4	5
A	20	100	80		
B			60	180	
C	60				180
	80	100	140	180	180

$$z_{C1} = 6050$$

	1	2	3	4	5
A	80	100	20		
B			120	120	
C				60	180
	80	100	140	180	180

$$g : z_{C2} = (3720, 6320, 8200)$$

	1	2	3	4	5
A	80	40	80		
B			60	180	
C		60			180
	80	100	140	180	180

$$z_{C2} = 6140$$

	1	2	3	4	5
A	80	100	20		
B			120	120	
C				60	180
	80	100	140	180	180

$$h : z_{C3} = (4200, 6680, 8320)$$

	1	2	3	4	5
A	80	100	20		
B			60	180	
C			60		180
	80	100	140	180	180

$$z_{C3} = 6470$$

Çizelge 3.9'da verilen başlangıç çözümü geliştirildiğinde, en iyi çözüm olarak çizelge 3.10e'de bulunan maliyet değeri elde edilir. Bu da ;

$$z_{B5} = (4320, 5720, 8320) = 6020 \text{ olmaktadır.} \quad (3.18)$$

Çizelge 3.10e'de bulunan çözümden daha iyi bir çözümü elde etmek için araştırmaya devam edilirse, çizelge 3.11'de bulunan çözümler elde edilir.

Çizelge 3.11 Bulanık verilerle oluşturulan ulaştırma probleminde daha iyi bir çözümün elde edilebilmesi için yapılan araştırmada, değişik atlama taşı adımları

	1	2	3	4	5
A	80	100	20	-1	1
B			120	1	120
C				180	60
	80	100	140	180	180

$$a : z_{A4} = (4320, 5880, 8320)$$

	1	2	3	4	5	
A	80	100		20		200
B			140		100	240
C				160	80	240
	80	100	140	180	180	

$$z_{A4} = 6100$$

	1	2	3	4	5
A	80	100	20	-1	1
B			120	1	120
C				180	60
	80	100	140	180	180

$$b : z_{A5} = (4440, 5600, 8520)$$

	1	2	3	4	5	
A	80	100			20	200
B			140		100	240
C				180	60	240
	80	100	140	180	180	

$$z_{A5} = 6040$$

	1	2	3	4	5
A	80	100	20		
B			120		120
C				180	60
	80	100	140	180	180

$$c : z_{B1} = (4480, 5880, 8480)$$

	1	2	3	4	5	
A		100	100			200
B	80		40		120	240
C				180	60	240
	80	100	140	180	180	

$$z_{B1} = 6180$$

Çizelge 3.11 Devamı

	1	2	3	4	5
A	80	100	20		
B			120		120
C				180	60
	80	100	140	180	180

$$d : z_{B2} = (4320, 6120, 9120)$$

	1	2	3	4	5
A	80		120		
B		100	20	120	
C				60	180
	80	100	140	180	180

$$z_{B2} = 6420$$

	1	2	3	4	5
A	80	100	20		
B			120		120
C				180	60
	80	100	140	180	180

$$e : z_{B4} = (3840, 6200, 8320)$$

	1	2	3	4	5
A	80	100	20		
B			120	120	
C				60	180
	80	100	140	180	180

$$z_{B4} = 6140$$

	1	2	3	4	5
A	80	100	20		
B			120		120
C				180	60
	80	100	140	180	180

$$f : z_{C1} = (4200, 5600, 8080)$$

	1	2	3	4	5
A	20	100	80		
B			60		180
C	60			180	
	80	100	140	180	180

$$z_{C1} = 5870^*$$

	1	2	3	4	5
A	80	100	20		
B			120		120
C				180	60
	80	100	140	180	180

$$g : z_{C2} = (4440, 5600, 8200)$$

	1	2	3	4	5
A	80	40	80		
B			60		180
C		60		180	
	80	100	140	180	180

$$z_{C2} = 5960$$

Çizelge 3.11 Devamı

	1	2	3	4	5
A	80	100	20		
B			120		120
C				180	60
	80	100	140	180	180

$$h : z_{C3} = (4200, 5960, 8320)$$

	1	2	3	4	5
A	80	100	20		
B			60		180
C			60	180	
	80	100	140	180	180

$$z_{C3} = 6110$$

Böylece daha iyi çözüm çizelge 3.11f değerleri ile elde edilmiş olur ve bulunan sonuç;

$$z_{C1} = (4200, 5600, 8080) \quad z_{C1} = 5870 \quad (3.19)$$

şeklindedir.

Eğer bu çözüm atlama taşı yöntemi kullanılarak tekrar çözüme girerse, daha iyi çözüm elde edilecektir ve bulunan sonuçlar çizelge 3.12 ve çizelge 3.13'de gösterilmiştir.

Çizelge 3.12 En iyi çözüm değerleri

	1	2	3	4	5
A		60	140		
B				60	180
C	80	40		120	
	80	100	140	180	180

$$z = (4000, 5720, 7920) \quad z = 5840 \quad (3.20)$$

Çizelge 3.13 Alternatif en iyi çözüm değerleri

	1	2	3	4	5	
A		100	100			200
B			40	20	180	240
C	80			160		240
	80	100	140	180	180	

$$z = (4080, 5640, 8000) \quad z = 5840 \quad (3.21)$$

Atlama taşı prosesine burada son verilir, çünkü bu noktada en iyi çözüm değeri çizelge 3.12 veya çizelge 3.13 ile elde edilmiş olur.

Ortalama kriterlerini kullanarak bulunan iki optimal çözümünden birini seçecek olursak, en iyi çözüm olarak ;

$$z = (4080, 5640, 8000) \quad z = 5840 \quad (3.22)$$

bulunur [8].

3.3.2. Bulanık kapasite ve talep verileri ile ulaştırma optimizasyonu

Chanas, Kolodziejczyk ve Machaj(1984); Oheigeartaigh(1982); Delgado ve Verdegay(1984)'den hareketle bulanık ulaştırma problemi, bulanık kapasite, talep ve bulanık olmayan amaç fonksiyonu şeklinde ele alınırsa;

Amaç Fonksiyonu ;

$$Z_{\text{enk}} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Kısıtlar ;

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i \in I = \{1, 2, 3, \dots, m\}$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = b_j \quad j \in J = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in I^*J \quad (3.23)$$

$i \in I$ ve $j \in J$ olmak üzere a_i ve b_j negatif olmayan bulanık sayılarla gösterilmektedir. Bunlardan bazıları kesin sayılar olabilir. Bununla birlikte, en az birisinin kesin olmayan sayı olduğu dikkate alınmaktadır

$(\mu_{a_i}(\sum_{j=1}^n x_{ij})), (\mu_{b_j}(\sum_{i=1}^m x_{ij}))$ 'nin her bir $\{x_{ij} \in I^*J\}$ değeri i ve j kısıt ilişkisiyle birlikte $\{x_{ij}, \in I^*J\}$ çözümünün uyuma derecesini açıklamaktadır [22].

3.3.2.1 Parametrik yaklaşım

Analiz teoremi (Negoita ve Ralescu, 1975) ve bulanık matematiksel programlama problemlerinin çözümünde parametrik yaklaşım kullanılarak (Delgado ve Verdegay'ın bulanık ulaştırma problemlerindeki uygulamaları, 1984; Verdegay, 1983) problem şu şekilde yazılabilir;

$$Z_{enk} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Kısıtlar;

$$\mu_{a_i}(\sum_j x_{ij}) \geq \alpha, \quad i \in I$$

$$\mu_{b_j}(\sum_i x_{ij}) \geq \alpha, \quad j \in J$$

$$\alpha \in (0, 1], \quad x_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in I^*J \quad (3.24)$$

Eğer a_i ($i \in I$), b_j ($j \in J$), bulanık sayılar (Dubois ve Prade, 1980) veya daha ayrıntılı olarak yamuksal bulanık sayılar (Chanas, Kolodziejczyk ve Machaj (1984)) şeklinde olursa, problem 3.24 aşağıdaki duruma gelir;

$$Z_{enk} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Kısıtlar;

$$\sum_j x_{ij} \in [a_i(\alpha), A_i(\alpha)], \quad i \in I$$

$$\sum_i x_{ij} \in [b_j(\alpha), B_j(\alpha)], \quad j \in J$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \alpha \in (0,1], \quad (i,j) \in I*J \quad (3.25)$$

Formülasyonda geçen $\in [a_i(\alpha), A_i(\alpha)], [b_j(\alpha), B_j(\alpha)], \alpha \in (0,1]$, tanımları $(a_i), (b_j), i \in I, j \in J$ değerlerinin α -kesme değerleridir.

Yukarıdaki problemde yer alan kısıtlardan herbiri iki eşitsizlik vasıtasıyla ifade edilmektedir. Bu ise açık bir şekilde problemin parametrik doğrusal programlama problemi olduğunu göstermektedir. Burada teorik noktadan hareketle, problem, simplex metod yardımıyla çözüme ulaştırılabilir. Bununla birlikte, klasik ulaştırma problemlerinin çözümü kapsamında, yukarıdaki problemin çözüm yolu hakkında cevap arandığında, problemin çözümünün özel yollarla olduğu ortaya çıkmaktadır. Bu da $\{x_{ij}, \alpha \in (0,1] \in I*J\}$ 'nin daha hızlı ve daha kolay bir şekilde elde edildiğini göstermektedir [23].

3.3.2.1.1 Parametrik yaklaşımla bulanık ulaştırma problemlerinin formülasyonu

Her $\alpha \in (0,1]$ için, iki taraflı şebeke akışı üzerindeki ulaştırma problemi için problem aşağıdaki şekilde açıklanabilir.

$D_1, \dots, D_n$ şeklinde belirli miktarlarda ürün talep eden n sayıda hedef (talep noktası) bulunmaktadır. j . hedefin talebi $b_j(\alpha)$ ve $B_j(\alpha)$ arasında (minimum ve maksimum talep) olmak durumundadır.

Diğer taraftan belirli miktarlarda ürün üreten, hedeflerin taleplerini karşılayan m sayıda kaynak (tedarik noktası) bulunmaktadır. F_i şeklinde belirtilen kaynaklar $a_i(\alpha)$ ve $A_i(\alpha)$ arasında mal üretmektedirler. F_i 'nin kapasitesi en az $a_i(\alpha)$ en çok $A_i(\alpha)$ miktarında olmak durumundadır.

F_i 'den D_j 'ye birim ulaştırma maliyeti c_{ij} ile gösterilmektedir. Eğer ulaştırma imkansız ise $c_{ij} = \infty$ şeklindedir. Her zaman olduğu gibi $c_{ij} \geq 0$, $\forall (i,j) \in I \times J$ olmaktadır. İstenilen; toplam ulaştırma maliyetini minimum kılacak şekilde $\{x_{ij}(\alpha), (i,j) \in I \times J\}$ ($\alpha \in (0,1]$) miktarlarını bulmaktır.

Şebeke akış teoremi içindeki genel metod, tek kaynak ve tek hedefle birlikte, ulaştırma problemine dönüştürülebilir ve aşağıdaki şekilde elde edilir;

- 1) Sınırsız kapasite ile birlikte, F şeklindeki yeni bir kaynak, değersiz maliyetle, (F, F_i) halinde, F_i durumundaki her bir kaynağa eklendiğinde, $i \in I$ olmak üzere en düşük kapasite $a_i(\alpha)$ 'ya, en yüksek kapasite de $A_i(\alpha)$ 'ya eşit olur.
- 2) D şeklindeki yeni bir hedef değersiz bir maliyetle birlikte, (D_j, D) halinde, D_j durumundaki her bir orijinal hedefe eklendiğinde, $j \in J$ olmak üzere en düşük kapasite $b_j(\alpha)$ 'ya en yüksek kapasite de $B_j(\alpha)$ 'ya eşit olur.
- 3) Orijinal kaynaklar ve hedefler, değersiz kaynak ve hedef noktaları şeklinde geçiş noktaları olarak dikkate alınmaktadır.

Toplam ulaştırma maliyetini minimum kılacak şekilde ve F 'den D 'ye uygun kapasite kısıtlarıyla birlikte, ulaştırma problemi dikkate alınırsa;

$T1(\alpha)$ şeklinde tanımlanan ulaştırma problemi, her bir $\alpha \in (0,1]$ için iyi bilinen teknikler kullanılarak çözüme ulaştırılabilir. Diğer taraftan, $T1(\alpha)$ 'nın boyutları $a_i(\alpha)$, $A_i(\alpha)$, $b_j(\alpha)$, $B_j(\alpha)$, $i \in I$, $j \in J$, $\alpha \in (0,1]$ değerleri haline getirilebilir ve bunların ilişkileri aşağıdaki şekilde açıklanabilir;

$$a(\alpha) = \sum_i a_i(\alpha) \qquad b(\alpha) = \sum_j b_j(\alpha) \qquad (3.26)$$

$$A(\alpha) = \sum_i A_i(\alpha) \qquad B(\alpha) = \sum_j B_j(\alpha) \qquad (3.27)$$

$(0,1)$ aralığındaki her bir α için, $a(\alpha) < A(\alpha)$ ve $b(\alpha) < B(\alpha)$ olmaktadır.

Hoffmann'ın teoremine göre, eğer $B(\alpha) < a(\alpha)$ veya $A(\alpha) < b(\alpha)$ olursa $T1(\alpha)$ çözüme sahip değildir. Orijinal ulaştırma problemindeki bu durumlar aşağıdaki şekilde açıklanabilir:

i) $B(\alpha) < a(\alpha)$ olduğu zaman problem 3.25 çözümsüzdür, çünkü en düşük kapasite ve en yüksek talebin kısıtlarının doğruluğunu kanıtlamak imkansızdır. $B(\alpha) < a(\alpha)$ ile kaynaklar en az $a(\alpha)$ kadar göndermek durumundadır, fakat hedefler en fazla $B(\alpha)$ kadar kabul ederler.

ii) $A(\alpha) < b(\alpha)$ durumunda en düşük talep ve en yüksek kapasite kısıtlarının doğruluğu kanıtlanamaz. Talep $b(\alpha)$ 'ya eşit veya daha büyük olmak durumundadır, fakat $A(\alpha) < b(\alpha)$ ile maksimum toplam talep $A(\alpha)$ 'ya eşit olmaktadır. $T1(\alpha)$ uygun olduğunda ulaştırma maliyetleri negatif olmadığı için, ulaştırma probleminin optimal çözümü, kısıtların uygunluğu altında minimum toplam maliyeti uygun kılacak şekilde, F' 'den D 'ye gerekli aktarmalar yapılmak durumundadır.

Her α için üç durum söz konusudur ve bular;

A) $a(\alpha) < b(\alpha)$. Bu durumda minimum uygun miktar $b(\alpha)$ kadardır ve bu yüzden optimal çözüm aşağıdaki durumu yerine getirmek zorundadır;

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}(\alpha) = b(\alpha) \qquad (3.28)$$

Yukarıda yapılan değişiklik ile problem aşağıdaki duruma gelir;

$$Z_{enk} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Kısıtlar;

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \in [a_i(\alpha), A_i(\alpha)] \quad i \in I$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j(\alpha) \quad j \in J$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i,j) \in I*J \quad (3.29)$$

Orijinal ulaştırma probleminden sonra elde edilen yukarıdaki problem şu şekilde elde edilir;

A.1) $b(\alpha)$ kapasitesi ile birlikte, F şeklindeki yeni bir kaynak, F_i durumundaki her bir kaynağa eklendiğinde, $i \in I$ olmak üzere, en yüksek kapasite $A_i(\alpha)$ 'ya, en düşük kapasite ise $a_i(\alpha)$ 'ya eşit olur.

A.2) $j \in J$ olmak üzere, D_j hedef noktasıyla tespit edilen talep, tamamıyla $b_j(\alpha)$ 'ya eşittir.

A.3) Orijinal kaynaklar değersiz kaynak noktaları şeklinde geçiş noktaları olarak dikkate alınmaktadır.

B) $a(\alpha) > b(\alpha)$. Bu durumda minimum uygun akış $a(\alpha)$ kadardır ve bu yüzden optimal çözümlü aşağıdaki durumu yerine getirmek durumundadır;

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}(\alpha) = a(\alpha) \quad (3.30)$$

Yukarıda yapılan değişiklik ile problem aşağıdaki duruma gelir;

$$Z_{enk} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Kısıtlar;

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i(\alpha) \quad i \in I$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \in [b_j(\alpha), B_j(\alpha)] \quad j \in J$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i,j) \in I*J \quad (3.31)$$

Orijinal ulaştırma probleminin ardından elde edilen yukarıdaki problem şu şekilde elde edilir;

B.1) $a(\alpha)$ talebi ile birlikte, D şeklindeki yeni hedef, D_i durumundaki her bir kaynağa eklendiğinde, $j \in J$ olmak üzere en yüksek kapasite $B_j(\alpha)$ 'ya, en düşük kapasite de $b_j(\alpha)$ 'ya eşit olur.

B.2) F_i 'nin kapasitesi tamamıyla $a_i(\alpha)$ 'ya eşittir.

B.3) Orijinal hedefler değersiz hedef noktaları şeklinde geçiş noktaları olarak dikkate alınmaktadır.

C) $a(\alpha) = b(\alpha)$ şeklinde ise optimal çözüm, aşağıdaki hali yerine getirmek durumundadır;

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}(\alpha) = a(\alpha) = b(\alpha) \quad (3.32)$$

Bu durumun aşağıdaki formölasyondan elde edilmesi mümkündür;

$$Z_{enk} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Kısıtlar;

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i(\alpha) \quad i \in I$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j(\alpha) \quad j \in J$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i,j) \in I*J \quad (3.33)$$

Yukarıdaki formülasyonu $i \in I$ ve $j \in J$ olmak üzere, F_i içindeki $a_i(\alpha)$ kaynağı ve D_j içindeki $b_j(\alpha)$ talebiyle birlikte, orijinal iki taraflı şebeke akışı üzerindeki klasik ulaştırma problemini oluşturmaktadır [23].

3.3.2.2 Parametrik yeniden çözüm metodu ile bulanık ulaştırma

Genel olarak, bulanık ulaştırma problemlerini parametrik tekniği kullanarak çözmek mümkündür. Bununla birlikte, ulaştırma problemleri emek isteyen yeniden çözüme sahiptir. Bu yüzden yeniden çözüm metodunun daha kolay bir şekilde sonuca ulaşabilmesi üzerinde durulabilir.

Chanas, Kolodziejczyk ve Machaj'dan hareketle ulaştırma problemi aşağıdaki şekilde elde edilir.

1) Eğer $D_1, \dots, D_n$ orijinal hedefler ise, n sayıda $(D_1', \dots, D_n')$ yeni hedefler eklenir. $D_1, \dots, D_n, D_1', \dots, D_n'$ hedefleri sırasıyla $b_1(\alpha), \dots, b_n(\alpha), d_1(\alpha) = B_1(\alpha) - b_1(\alpha), d_n(\alpha) = B_n(\alpha) - b_n(\alpha)$ taleplerine eşittir. Bu yüzden toplam talep $B(\alpha)$ 'ya eşittir.

2) $F_1, \dots, F_n$ orijinal kaynaklar ise, n sayıda $(F_1', \dots, F_n')$ yeni kaynaklar eklenir. $F_1, \dots, F_n, F_1', \dots, F_n'$ kaynakları sırasıyla $a_1(\alpha), \dots, a_n(\alpha), d_1'(\alpha) = A_1(\alpha) - a_1(\alpha), d_n'(\alpha) = A_n(\alpha) - a_n(\alpha)$ kapasitelerine eşittir. Bu yüzden toplam kapasite $A(\alpha)$ 'ya eşittir.

c_{ij} F_i 'den D_j 'ye orijinal birim ulaştırma maliyeti şeklinde ise, $i \in I$ ve $j \in J$ olmak üzere yeni problemde bu değer $(F_i, D_j), (F_i', D_j), (F_i, D_j'), (F_i', D_j')$ ilişkilerine de atanır.

3) c_{ij} F_i 'den D_j 'ye orijinal birim ulaştırma maliyeti şeklinde ise, $i \in I$ ve $j \in J$ olmak üzere yeni problemde bu değer $(F_i, D_j), (F_i', D_j), (F_i, D_j'), (F_i', D_j')$ ilişkilerine de atanır.

4) FF şeklindeki hayali kaynağın kapasitesi $B(\alpha) - b(\alpha)$ 'ya ve DF şeklindeki hayali talebin talebi ise $A(\alpha) - a(\alpha)$ 'ya eşit olur.

F_i 'den DF 'ye veya FF 'den D_j 'ye birim ulaştırma maliyeti, M şeklinde belirtilen, değeri çok yüksek bir maliyete eşittir. $i \in I$ ve $j \in J$ olmak üzere F_i 'den DF 'ye veya FF 'den D_j 'ye birim maliyet ise sıfıra eşittir. Bunlardan hareketle ulaştırma tablosu çizelge 3.14'deki şekilde elde edilir.

Burada ulaştırmanın temel fikri, daha düşük kapasitelerle birlikte, daha düşük taleplerin ($a_i(\alpha)$, $b_j(\alpha)$) sağlanmasıdır. Eğer bu mümkün değilse, $d_i(\alpha)$ veya $d_j(\alpha)$ farklılıkları kullanılır. Her zaman olduğu gibi FF ve DF , kapasite ve talep arasındaki karışıklığı yutmaktadır.

Çizelge 3.14 Hayali kaynak ve hedefle birlikte bulanık ulaştırma tablosu

	$D_1, \dots, D_n$	$D_1', \dots, D_n'$	DF	
F_1	c_{ij}	c_{ij}	M	$a_1(\alpha)$
$\cdot$			$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$			$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$			$\cdot$	$\cdot$
F_m			M	$a_m(\alpha)$
F_1'	c_{ij}	c_{ij}	0	$d_1(\alpha)$
$\cdot$			$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$			$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$			$\cdot$	$\cdot$
F_m'			0	$d_m(\alpha)$
FF	$M, \dots, M$	$0, \dots, 0$		$B(\alpha) - b(\alpha)$
	$b_1(\alpha), \dots, b_n(\alpha)$	$d_1(\alpha), \dots, d_n(\alpha)$	$A(\alpha) - b(\alpha)$	

Formülasyon yapısı incelendiğinde $a(\alpha) > b(\alpha)$ ($b(\alpha) > A(\alpha)$) durumunda, F_i 'den DF 'ye veya FF 'den D_j 'ye optimal çözüm için, α seviyelerinde yukarıdaki problemin uygun olmadığı görülmektedir. Aksi takdirde $\max(a(\alpha), b(\alpha))$ için optimal çözüme ulaşılabilir.

m sayıda kaynak ve n sayıda hedefle birlikte bulanık problemin, $(m+n+1)$ satır ve $(m+n+1)$ kolon sayısında parametrik ulaştırma tablosuna sahip olması gerekir. Son

incelemeden hareketle yapılan analizin temelinde, tablonun önemli bir azaltmayla elde edilmesi gerekmektedir.

A) $\alpha \in (0, \alpha]$ için $a(\alpha) < b(\alpha)$ olduğu zaman, problem 3.29'un optimal çözümü, problem 3.30'dan elde edilebilir. Bu dönüşümden sonra ortaya çıkan problem, takip eden ulaştırma probleminin yardımıyla çözüme ulaştırılabilir:

A.1) $D_1, \dots, D_n$ hedeflerinin talepleri sırasıyla $b_1(\alpha), \dots, b_n(\alpha)$ şeklinde dikkate alınır.

A.2) $F_1, \dots, F_m$ orijinal kaynaklar ise, $F_1', \dots, F_m'$ şeklinde m sayıda yeni kaynak ilave edilir. $i \in I$ olmak üzere F_i 'nin kapasitesi $a_i(\alpha)$ 'ya F_i' 'nin kapasitesi ise $d_i'(\alpha) = A_i(\alpha) - a_i(\alpha)$ 'ya eşittir. Ayrıca $i \in I$ ve $j \in J$ olmak üzere F_i ve F_i' 'den D_j 'ye birim ulaştırma maliyeti c_{ij} 'ye eşittir.

A.3) $A(\alpha) - b(\alpha)$ talebine sahip hayali hedef ise DF şeklinde ilave edilir. F_i 'den DF'ye birim ulaştırma maliyeti, büyük değerde olan M 'ye, F_i 'den DF'ye birim ulaştırma maliyeti ise sıfıra eşit olur. Bu ulaştırmayı uygun kılacak olan ulaştırma tablosu çizelge 3.15'de verilmektedir.

Çizelge 3.15 Düzeltilmiş ulaştırma tablosu (1)

	$D_1, \dots, D_n$	DF	
F_1	c_{ij}	M	$a_1(\alpha)$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
F_m		M	$a_m(\alpha)$
F_1'	c_{ij}	0	$d_1'(\alpha)$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
F_m'		0	$d_m'(\alpha)$
	$b_1(\alpha), \dots, b_n(\alpha)$	$A(\alpha) - b(\alpha)$	

Çizelge 3.15 2m satır ve n+1 kolona sahiptir ve çizelge 3.14'ün yaklaşık olarak bir yarımıdır.

B) $\alpha \in (0, \alpha]$ için $a(\alpha) > b(\alpha)$ olduğu zaman, problem 3.29'un optimal çözümü, problem 3.31'den elde edilebilir. Bu dönüşümden sonra ortaya çıkan problem, takip eden ulaştırma probleminin yardımıyla çözüme ulaştırılabilir:

B.1) m sayıdaki $F_1, \dots, F_m$ hedeflerinin kapasiteleri sırasıyla $b_1(\alpha), \dots, b_m(\alpha)$ şeklinde dikkate alınır.

B.2) $D_1, \dots, D_n$ orijinal hedefler ise, $D_1', \dots, D_n'$ şeklinde n sayıda yeni hedef ilave edilir. $j \in J$ olmak üzere D_j 'nin talebi $b_j(\alpha)$ 'ya D_j' 'nin talebi ise $d_j(\alpha) = B_j(\alpha) - b_j(\alpha)$ 'ya eşittir. Ayrıca $(i, j) \in I * J$ olmak üzere D_i ve D_j' 'den F_i 'ye birim ulaştırma maliyeti c_{ij} 'ye eşittir.

B.3) $B(\alpha) - a(\alpha)$ kapasitesine sahip hayali kaynak FF şeklinde ilave edilir. FF'den D_j 'ye birim ulaştırma maliyeti, büyük değerde olan M'ye, FF'den D_j' 'ye birim ulaştırma maliyeti ise sıfıra eşit olur. Bu ulaştırmayı uygun kılacak olan ulaştırma tablosu çizelge 3.16'da verilmektedir.

Çizelge 3.16 Düzeltilmiş ulaştırma tablosu (2)

	$D_1, \dots, D_n$	$D'_1, \dots, D'_n$	
F_1	c_{ij}	c_{ij}	$a_1(\alpha)$
$\cdot$			$\cdot$
$\cdot$			$\cdot$
$\cdot$			$\cdot$
F_m			$a_m(\alpha)$
FF	$M, \dots, M$	$0, \dots, 0$	$B(\alpha) - b(\alpha)$
	$b_1(\alpha), \dots, b_n(\alpha)$	$d_1(\alpha), \dots, d_n(\alpha)$	

Şimdiye kadar yapılan açıklamalardan hareketle Chanas, Kolodziejczyk ve Machaj'ın öne sürdüğü bulanık ulaştırma problemi dikkate alınarak, iki kaynak (fabrika) ve üç depo şeklinde verilen ulaştırma problemine ait birim ulaştırma maliyetleri çizelge 3.17'de verildiği gibi olsun.

Çizelge 3.17 Bulanık ulaştırma problemi için birim ulaştırma maliyetleri

	D_1	D_2	D_3
F_1	10	20	30
F_2	20	50	60

Kapasite ve talepler üyelik fonksiyonlarıyla birlikte üçgensel bulanık sayılar şeklindedir.

$$\mu_{a_1}(x) = \begin{cases} (x-5)/5 & ; x \in [5,10] \Rightarrow a_1(\alpha) = 5 + 5\alpha \\ (15-x)/5 & ; x \in [10,15] \Rightarrow A_1(\alpha) = 15 - 5\alpha \end{cases} \quad (3.34)$$

$$\mu_{a_2}(x) = \begin{cases} (x-11)/5 & ; x \in [11,16] \Rightarrow a_2(\alpha) = 11+5\alpha \\ (21-x)/5 & ; x \in [16,21] \Rightarrow A_2(\alpha) = 21-5\alpha \end{cases} \quad (3.35)$$

$$\mu_{b_1}(x) = \begin{cases} (x-5)/5 & ; x \in [5,10] \Rightarrow b_1(\alpha) = 5+5\alpha \\ (15-x)/5 & ; x \in [10,15] \Rightarrow B_1(\alpha) = 15-5\alpha \end{cases} \quad (3.36)$$

$$\mu_{b_2}(x) = \begin{cases} (x-5)/4 & ; x \in [5,9] \Rightarrow b_2(\alpha) = 5+4\alpha \\ (13-x)/4 & ; x \in [9,13] \Rightarrow B_2(\alpha) = 13-4\alpha \end{cases} \quad (3.37)$$

$$\mu_{b_3}(x) = \begin{cases} x & ; x \in [0,1] \Rightarrow b_3(\alpha) = \alpha \\ 2-x & ; x \in [1,2] \Rightarrow B_3(\alpha) = 2-\alpha \end{cases} \quad (3.38)$$

Buradan;

$$a(\alpha) = (5+5\alpha) + (11+5\alpha) = 16+10\alpha \quad (3.39)$$

$$A(\alpha) = (15-5\alpha) + (21-5\alpha) = 36-10\alpha \quad (3.40)$$

$$b(\alpha) = (5+5\alpha) + (5+5\alpha) + \alpha = 10+10\alpha \quad (3.41)$$

$$B(\alpha) = (15-5\alpha) + (13-4\alpha) + (2-\alpha) = 30-10\alpha \quad (3.42)$$

bulunur.

Bu değerlerden hareketle; $\alpha \in (0,0.7]$ ise $a(\alpha) \leq B(\alpha)$ ve aksi takdirde $a(\alpha) > B(\alpha)$ olmaktadır. Ayrıca α 'nın $(0,1]$ aralığındaki her değeri için de $b(\alpha) \leq A(\alpha)$ şeklindedir. Böylece her $\alpha \in (0,0.7]$ için bulanık ulaştırma probleminin parametrik versiyonu uygun olmaktadır.

Diğer taraftan;

$$a(\alpha) = 16 + 10\alpha \geq 10 + 10\alpha = b(\alpha) \quad \forall \alpha \in (0, 0.7] \quad (3.43)$$

olduğundan $(0, 0.7]$ sınırları içindeki bütün α değerleri için problem 3.29, problem 3.31 şeklinde değiştirilebilir. Elde edilen ve verilen değerlerden hareketle ulaştırma tablosu Çizelge 3.18'deki gibi olmaktadır.

Çizelge 3.18 Elde edilen ve verilerden hareketle ulaştırma tablosu

	D_1	D_2	D_3	D_1'	D_2'	D_3'	
F_1	10	20	30	10	20	30	$5 + 5\alpha$
F_2	20	50	60	20	50	60	$11 + 5\alpha$
FF	M	M	M	0	0	0	$14 - 20\alpha$
	$5 + 5\alpha$	$5 + 4\alpha$	α	$10 - 10\alpha$	$8 - 8\alpha$	$2 - 2\alpha$	

Parametrik yeniden çözüm metodundan hareketle belirlenen α seviyeleri için çizelge 3.19'daki değerler elde edilir.

Çizelge 3.19 Parametrik yeniden çözüm metodundan hareketle elde edilen değerler

	D_1	D_2	D_3	D_1'	D_2'	D_3'
F_1		$5+4\alpha$	α			
F_2	$5+5\alpha$			6		
FF				$4-10\alpha$	$8-8\alpha$	$2-2\alpha$

$\alpha \in (0, 0.4]$

	D_1	D_2	D_3	D_1'	D_2'	D_3'
F_1		$5+4\alpha$	α			
F_2	$5+5\alpha$			$10-10\alpha$	$-4+10\alpha$	
FF					$12-18\alpha$	$2-2\alpha$

$\alpha \in (0.4, 2/3]$

	D_1	D_2	D_3	D_1'	D_2'	D_3'
F_1			α		$17-14\alpha$	$-$ $12+18\alpha$
F_2	$5+5\alpha$	$5+4\alpha$		$10-10\alpha$	$-9+6\alpha$	
FF						$14-20\alpha$

$\alpha \in (2/3, 0.7]$

Bundan sonra, orijinal bulanık ulaştırma problemi için bulanık optimal çözüm çizelge 3.20’de belirtilen şekilde temsil edilebilir [23].

Çizelge 3.20 Bulanık ulaştırma problemi için elde edilen bulanık optimal çözüm değerleri

	D_1	D_2	D_3	
F_1		$5+4\alpha$	α	$\alpha \in (0,0.4]$
F_2	$11+5\alpha$			

	D_1	D_2	D_3	
F_1		$5+4\alpha$	α	$\alpha \in (0.4,2/3]$
F_2	$15-5\alpha$	$-4+10\alpha$		

	D_1	D_2	D_3	
F_1		$17-14\alpha$	$-12+19\alpha$	$\alpha \in (2/3,0.7]$
F_2	$15-5\alpha$	$-4+10\alpha$		

3.3.3 Bulanık ulaştırma problemlerinin optimizasyonuna farklı bir yaklaşım

Ulaştırma modelleri geniş bir uygulama alanına sahiptir. Bu ulaştırma modellerinin parametreleri, birim taşıma maliyeti, talep ve kaynaklardır. Pratikte bu parametreler her zaman kesin olarak bilinmemektedir. Bu durumda bu tip problemlere bulanık sayılarla bir yaklaşım gerekmektedir. Tamsayı talep ve kaynak kısıt değerleri ile oluşturulmuş klasik ulaştırma problemleri daima tamsayılı çözümler sunmaktadır. Bu tip problemler simplex yöntemi ile kolaylıkla çözülebilir. Ancak bulanık ulaştırma problemlerinde bu özellik korunamaz. Yani her zaman tamsayılı çözümler elde

edilemez. Aşağıda sunulan algoritma genel bulanık ulaştırma problemleri için bir çözüm sunmaktadır.

3.3.3.1 Problem formülasyonu ve notasyonları

Bütün bulanık sayıları L-R tipinde bulanık sayı kabul ediyoruz. L-R tipindeki A gibi bir bulanık sayı $A = (a_1, a_2, \alpha_A, \beta_A)_{L-R}$ olarak belirtilir ve üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\mu_A(t) = \begin{cases} L((a_1 - t)/\alpha_A) & t \leq a_1 \text{ için} \\ 1 & t \in [a_1, a_2] \quad (t \in R) \text{ için} \\ R((t - a_2)/\beta_A) & t \geq a_2 \text{ için} \end{cases} \quad (3.44)$$

Buradaki a_1 , a_2 , α_A , ve β_A gerçekte ve negatif olmayan parametrelerdir ve L-R ise uygun bir fonksiyonu göstermektedir. Aşağıda bazı fonksiyonlara ait örnekler verilmiştir.

$$\text{Doğrusal Fonksiyon : } F(y) = \max \{0, 1-y\}, y \in R^+ \cup \{0\} \quad (3.45)$$

$$\text{Üssel Fonksiyon : } F(y) = e^{-py}, p \geq 1, y \in R^+ \cup \{0\} \quad (3.46)$$

$$\text{Kuvvet Fonksiyonu : } F(y) = \max \{0, 1-y^p\}, p \geq 1, y \in R^+ \cup \{0\} \quad (3.47)$$

$$\text{Rasyonel Fonksiyon : } F(y) = 1/(1+y^p), p \geq 1, y \in R^+ \cup \{0\} \quad (3.48)$$

Bulanık ulaştırma probleminin genel formülasyonu ise aşağıdaki formatta olmaktadır.

$$c(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \longrightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \cong A_i \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \cong B_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \quad (3.49)$$

şeklindedir.

A_i ve B_j şeklinde gösterilen bulanık sayılar ise aşağıdaki formdadır.

$$A_i = (a_1, a_2, \alpha_A, \beta_A)_{Li-Ri} \quad (3.50)$$

$$B_j = (b_1, b_2, \alpha_B, \beta_B)_{Sj-Tj} \quad (3.51)$$

$$i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Bilindiği gibi x , $[x_{ij}]_{m \times n}$ çözüm matrisini, c_{ij} ise birim ulaştırma maliyetini göstermekte olup her ikisi de kesin sayılardır.

Yukarıdaki formülasyonun tamamlanması için amaç fonksiyonunun da bulanık olarak ifade edilmesi gerekir. Bu fonksiyon ise G ile gösterilir ve aşağıdaki formda gösterilebilir.

$$G = (-\infty, c_0, 0, \beta_G)_{LG-RG} \quad (3.52)$$

Aşağıdaki tanımlar bulanık kısıtların ve bulanık amaç fonksiyonunun tatminini açıklamaktadır.

Tanım 1 :

$x = [x_{ij}]_{m \times n}$ şeklinde keyfi bir çözüm olsun.

$$a) \mu_c(x) = \min \left\{ \mu_{A_i} \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} \right) \quad (i = 1, \dots, m) \right. \\ \left. \mu_{B_j} \left(\sum_{i=1}^m x_{ij} \right) \quad (j = 1, \dots, n) \right\} \quad (3.53)$$

Yukarıdaki fonksiyon problem 3.49'un kısıt tatmin derecesi olarak tanımlanır.

$$b) \mu_G(x) = \mu_G(c(x)) = \mu_G\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}\right) \quad (3.54)$$

ise problem 3.53'ün amaç fonksiyonu tatmin derecesi olarak tanımlanır.

Bellmann-Zadeh yaklaşımına göre kısıtların ve amaç fonksiyonunun maximum tatmin derecesine ulaşması eşzamanlı olarak meydana gelebilir.

Tanım 2 :

Problemin maximum çözümü, $\mu_D(x) = \min\{\mu_C(x), \mu_G(x)\}$ için max değerini alır. Bu maximum değer "0" değerini alırsa problem çözümsüzdür.

3.3.3.2 Problemin çözümü

Tanım 2'ye göre problem 3.53'ün çözümü aşağıdaki matematiksel programlama probleminin çözümüne eşittir

$$\begin{aligned} \min\{\mu_C(x), \mu_G(x)\} &\longrightarrow \max \\ x_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Yukarıdaki problemin çözümü sıra ile aşağıdaki problemin çözümüne eşit olur.

$$\lambda \longrightarrow \text{Max}$$

$$\mu_G(c(x)) \geq \lambda$$

$$\mu_{Ai}\left(\sum_{j=1}^n x_{ij}\right) \geq \lambda \quad i = 1, \dots, m$$

$$\mu_{Bi}\left(\sum_{i=1}^m x_{ij}\right) \geq \lambda \quad j = 1, \dots, n$$

$$\lambda > 0 \quad x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.56)$$

BU KİTAPIN KOPYASI
T.C. MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI
T.C. İZMİR İLİ EĞİTİM BAKANLIĞI
T.C. İZMİR İLİ EĞİTİM BAKANLIĞI
T.C. İZMİR İLİ EĞİTİM BAKANLIĞI

Tanım 3 :

A'yı bir bulanık sayı kabul edelim. A'nın α -kesimi olarak tanımlanan A^α , A'nın α 'dan daha küçük olmayan üyelik fonksiyonu değerini gösteren ve gerçek sayılardan oluşan bir settir ve aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$A^\alpha = \{t \in R \quad \mu_A(t) \geq \alpha \} \quad (3.57)$$

Buradan A_i ve B_j için α -kesimine göre A_i^α ve B_j^α fonksiyonları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$A_i^\alpha = [a_i - L_i^{-1}(\alpha) \alpha_{A_i}, a_i + R_i^{-1}(\alpha) \beta_{A_i}] \quad i = 1, \dots, m \quad (3.58)$$

$$B_j^\alpha = [b_j - S_j^{-1}(\alpha) \alpha_{B_j}, b_j + T_j^{-1}(\alpha) \beta_{B_j}] \quad j = 1, \dots, n \quad (3.59)$$

Bulanık amaç fonksiyonu G için α -kesim fonksiyonu ise ;

$$G^\alpha = [-\infty, c_0 + R_G^{-1}(\alpha) \beta_G] \text{ şeklinde yazılabilir.} \quad (3.60)$$

Bu durumda problem 3.56'yı aşağıdaki şekilde düzenleyebiliriz.

$$\alpha \longrightarrow \max$$

$$c(x) \in G^\alpha$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \in A_i^\alpha \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \in B_j^\alpha \quad j = 1, \dots, n$$

$$\alpha > 0 \quad x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.61)$$

Yukarıdaki problemin bir ulaştırma problemi olmadığı amaç fonksiyonu ve birinci kısıt sebebiyle açıktır. Ancak bu problemi aralıklı ulaştırma problemi ile ilişkilendirip klasik

ulaştırma problemleri için çözülebilir hale getirebiliriz. İlişkilendirdiğimiz bu problem aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$c(x) \longrightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \in A_i^\alpha \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \in B_j^\alpha \quad j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.62)$$

Yukarıdaki formülasyon denenmiş α 'nın sıfırdan büyük değerleri için problem 3.61'in mümkün çözüme sahip olup olmadığını bize gösterebilir. Ancak bulunan değerlerin bizim istediğimiz aralıkta olup olmadığı hala belirli değildir. Bundan dolayı problemin aşağıdaki şekilde yeniden düzenlenmesi gerekir

Tanım 4 :

$[A] = [a, b]$ şeklinde gösterilen bir aralık olsun.

$$a = \min \{t \mid t \in A, t \text{ tamsayı} \} \quad (3.63)$$

$$b = \max \{t \mid t \in A, t \text{ tamsayı} \} \quad (3.64)$$

Bu değişikliklerle problem aşağıdaki son halini alır.

$$c(x) \longrightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \in [A_i^\alpha] \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \in [B_j^\alpha] \quad j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.65)$$

Son halini alan ulaştırma problemi için bulanık ulaştırma problemi algoritması aşağıdaki gibi çalışır.

Algoritma Adımları :

Adım 1 : $\alpha(1) = 0$ ve $\alpha(2) = 1$ olarak ata.

Adım 2 : Problemi $\alpha = \alpha(1)$ olarak öz. Eğer problemin çözümü var ve $c(x(\alpha(2))) \in G^{\alpha(2)}$ ise 3. adıma git. Diğer durumda DUR.(Problemin özümü yok)

Adım 3 : Problemi $\alpha = \alpha(2)$ için öz. Problemin özümü var ve $c(x(\alpha(2))) \in G^{\alpha(2)}$ ise DUR. ($x(\alpha(2))$ optimal sonuçtur). Diğer durumda 4. adıma git.

Adım 4 : α' 'yı $\alpha(\text{yarım}) = (\alpha(1) + \alpha(2))/2$ olarak ata ve adım 5'e git.

Adım 5 : Problemi $\alpha = \alpha(\text{yarım})$ için öz. Problemin özümü yoksa $\alpha = \alpha(2)$ olarak ata ve 6. adıma git. Diğer durumda 3 durum mümkündür;

(i) $\mu_G(x(\alpha(\text{yarım}))) = \mu_C(x(\alpha(\text{yarım})))$; $x(\alpha(\text{yarım}))$ problemin optimal çözümüdür. DUR.

(ii) $\mu_G(x(\alpha(\text{yarım}))) > \mu_C(x(\alpha(\text{yarım})))$; $\alpha(1) = \mu_C(x(\alpha(\text{yarım})))$ olarak ata ve 6. adıma git

(iii) $\mu_G(x(\alpha(\text{yarım}))) < \mu_C(x(\alpha(\text{yarım})))$; $\alpha(2) = \mu_C(x(\alpha(\text{yarım})))$ olarak ata veya eğer $\alpha(2) = \mu_C(x(\alpha(\text{yarım})))$ ise $\alpha(2) = \alpha(\text{yarım})$ olarak ata ve 6. adıma git.

Adım 6 : Eğer $\alpha(2) - \alpha(1) < \epsilon$ ise 4. adıma git. Problemin $\alpha = \alpha(2)$ için minimum uzantısının $\alpha = \alpha(1)$ olup olmadığını kontrol et. Değilse 4. adıma git. Diğer durumda DUR. $x(\alpha(1))$ veya $x(\alpha(2))$ 'den biri problemin optimal sonucudur. Problemin $\alpha = \alpha(2)$ için mümkün sonucu yok ise $x(\alpha(1))$ problemin optimal sonucudur.

ϵ sayısı karar verici tarafından belirlenir ve 0.1'den küçük ve 0.05'den büyük olması gerekir.

Yukarıda verilen algoritmayı uygun bir sayısal ulaştırma problemine uygulayalım.

$$\min Z = 10x_{11} + 20x_{12} + 30x_{13} + 20x_{21} + 50x_{22} + 60x_{23}$$

Kısıtlar ;

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \cong (10,10,5,5)_{L-E}$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \cong (16,16,5,5)_{E-L}$$

$$x_{11} + x_{21} \cong (10,10,5,5)_{P-E}$$

$$x_{12} + x_{22} \cong (9,9,4,4)_{L-E}$$

$$x_{13} + x_{23} \cong (1,1,1,1)_{P-R}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2, \quad j = 1,2,3. \quad (3.66)$$

Bulanık amaç fonksiyonu ise bulanık sayılarla aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$G = (0,300,0,500)_{L-L} \quad (3.67)$$

L doğrusal bir fonksiyonu, E, parametresi $p = 1$ olan bir üssel fonksiyonunu, P, parametresi $p = 2$ olan bir kuvvet fonksiyonunu ve R parametresi $p = 1$ olan rasyonel bir fonksiyonu ifade etmektedir.

Buna göre bulanık kaynak, bulanık talep ve bulanık amaç fonksiyonları aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$A_1^\alpha = [10 - 5(1-\alpha), 10 - 5\ln(\alpha)] \quad (3.68)$$

$$A_2^\alpha = [16 + 5\ln(\alpha), 16 + 5(1-\alpha)] \quad (3.69)$$

$$B_1^\alpha = [10 - 5\sqrt{(1-\alpha)}, 10 - 5\ln(\alpha)] \quad (3.70)$$

$$B_2^\alpha = [9 - 4(1-\alpha), 9 - 4\ln(\alpha)] \quad (3.71)$$

$$B_3^\alpha = [1 - \sqrt{(1-\alpha)}, 1 + (1-\alpha)/\alpha] \quad (3.72)$$

$$G^\alpha = [0, 300 + (1-\alpha)500] \quad (3.73)$$

Algoritmanın adımları örnek problemimiz için aşağıdaki gibi çalışır :

Adım 1 : $\alpha(1) = 0, \alpha(2) = 1$.

Adım 2 : Problem, $\alpha = 0$ için mümkün çözüme sahiptir ve $G^0 = [0,800]$ değerini alır.

Adım 3 : Problem, $\alpha = 1$ için mümkün çözüme sahip değildir.

Adım 4 : $\alpha(\text{yarım}) = (0 + 1)/2 = 0,5$.

Adım 5 : Problem, $\alpha = 0,5$ için mümkün çözüme sahiptir ve $\mu_G(x(0,5)) = 0,74 > \mu_c(x(0,5)) = 0,5$. Bu nedenle $\alpha(1) = 0,5$ olur.

Adım 6 : $\alpha(2) - \alpha(1) = 1 - 0,5 = 0,5 > 0,05$

Adım 4 : $\alpha(\text{yarım}) = (0,5 + 1)/2 = 0,75$.

Adım 5 : Problem 7, $\alpha = 0,75$ için mümkün çözüme sahip değildir. Bu nedenle $\alpha(2) = 0,75$ olur.

Adım 6 : $\alpha(2) - \alpha(1) = 0,75 - 0,5 = 0,25 > 0,05$.

Adım 4 : $\alpha(\text{yarım}) = (0,5 + 0,75)/2 = 0,625$.

Adım 5 : Problem, $\alpha = 0,625$ için mümkün çözüme sahiptir ve $\mu_G(x(0,625)) = 0,54 < \mu_c(x(0,625)) = 0,64$. Bu nedenle $\alpha(2) = 0,64$ olur.

Adım 6 : $\alpha(2) - \alpha(1) = 0,64 - 0,5 > 0,05$.

Adım 4 : $\alpha(\text{yarım}) = (0,5 + 0,64)/2 = 0,57$.

Adım 5 : Problem, $\alpha = 0,57$ için mümkün çözüme sahiptir ve $\mu_G(x(0,57)) = 0,58 < \mu_c(x(0,57)) = 0,6$. Bu nedenle $\alpha(2) = 0,6$ olur.

Adım 6 : $\alpha(2) - \alpha(1) = 0,6 - 0,5 = 0,1 > 0,05$.

Adım 4 : $\alpha(\text{yarım}) = (0,5 + 0,6)/2 = 0,55$.

Adım 5 : Problem, $\alpha = 0,55$ için mümkün çözüme sahiptir ve $\mu_G(x(0,55)) = 0,58 < \mu_C(x(0,55)) = 0,6$. $\alpha(2) = \mu_C(x(0,55)) = 0,6$ olduğundan $\alpha(2) = 0,55$ olur.

Adım 6 : $\alpha(2) - \alpha(1) = 0,55 - 0,5 = 0,05 = 0,05$.

Adım 4 : $\alpha(\text{yarım}) = (0,5 + 0,55)/2 = 0,525$.

Adım 5 : Problem, $\alpha = 0,525$ için mümkün çözüme sahiptir ve $\mu_G(x(0,525)) = 0,7 > \mu_C(x(0,525)) = 0,5488$. Bu nedenle $\alpha(1) = 0,5488$ olur.

Adım 6 : $\alpha(2) - \alpha(1) = 0,55 - 0,5488 < 0,05$

Problem, $x(0,5488)$ ve $x(0,55)$ değerlerinde çözüme sahiptir ve $\mu_D(x(0,55)) = 0,58 > \mu_D(x(0,5488)) = 0,5488$ olduğundan $x(0,55)$ optimal sonuçtur.

Toplam maliyet = 510 pb. olarak hesaplanır [24].

3.3.4 Tamsayıli bulanık ulaştırma problemlerinin optimizasyonu

Göz önünde bulundurduğumuz bulanık ulaştırma problemi; m kaynaktan oluşan F, n talep merkezinden oluşan T ve bu kaynaklardan talep merkezlerine gönderilecek olan miktarı gösteren A setinden oluşmaktadır. f_i ($f_i \in F$) ve f_{ij} ($t_j \in T$) i kaynağından j talep merkezine gönderilecek olan miktarı göstermektedir. Kaynak ve taleplere ait üyelik fonksiyonları $\mu_{fi}(f_i)$ ve $\mu_{tj}(f_{tj})$ şeklinde karakterize edilir.

$$\mu_{si}(f_{si}) = \begin{cases} 1 & f_{si} \leq a_{si} \\ -\frac{f_{si} - b_{si}}{b_{si} - a_{si}} & a_{si} < f_{si} < b_{si} \\ 0 & f_{si} \geq b_{si} \end{cases} \quad (3.74)$$

$$\mu_{ij}(f_{ij}) = \begin{cases} 1 & f_{ij} \leq d_{ij} \\ \frac{f_{ij} - d_{ij}}{e_{ij} - d_{ij}} & d_{ij} < f_{ij} < e_{ij} \\ 0 & f_{ij} \geq e_{ij} \end{cases} \quad (3.75)$$

a_{fi} , b_{fi} , d_{ij} ve e_{ij} pozitif tamsayılarla ifade edilmektedir.

Her f_i kaynağından t_j talep merkezine birim ürün gönderme maliyeti c_{fij} ile gösterilir. Bu verilerle ulaştırma problemlerinin bulanık versiyonu aşağıdaki şekilde formüle edilir.

Amaç fonksiyonu: $\text{Max min } \{ \mu_{fi}(f_{fi}), \mu_{ij}(f_{ij}) \mid f_i \in F, t_j \in T \}$

Kısıtlar;

$$\sum_{t_j \in T} f(f_i, t_j) = f_{fi} \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{s_j \in S} f(f_i, t_j) = f_{ij} \quad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{fij} f(f_i, t_j) \leq \hat{C}$$

$$f(f_i, t_j) \geq 0 \quad f_i \in F \quad t_j \in T$$

$$f_{fi}, f_{ij} \geq 0 \text{ ve tamsayı} \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.76)$$

$\hat{C}$, tamsayıyla ifade edilir ve taşıma maliyetinin alabileceği max. değeri ifade eder [25].

3.3.4.1 Tamsayılı bulanık ulaştırma problemi formülasyonu

İlk olarak yukarıda formüle ettiğimiz tamsayılı bulanık ulaştırma probleminin tamsayı kısıtı olmadan nasıl çözülebileceğine bakacağız. Bunun için “mükemmel atama” diye

adlandırdığımız kaynak ve talep miktarlarını tatmin eden bir üyelik derecesi bulmamız gerekmektedir. Bu üyelik derecesi aşağıda verilen algoritma sayesinde kolaylıkla bulunabilir.

3.3.4.2 Mükemmel atama prosedürü:

Adım 1 : Bütün üyelik fonksiyonlarını α_{MA} parametresine bağlı olarak çöz ve $i=1, \dots, m$ ve $j = 1, \dots, n$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikleri çöz;

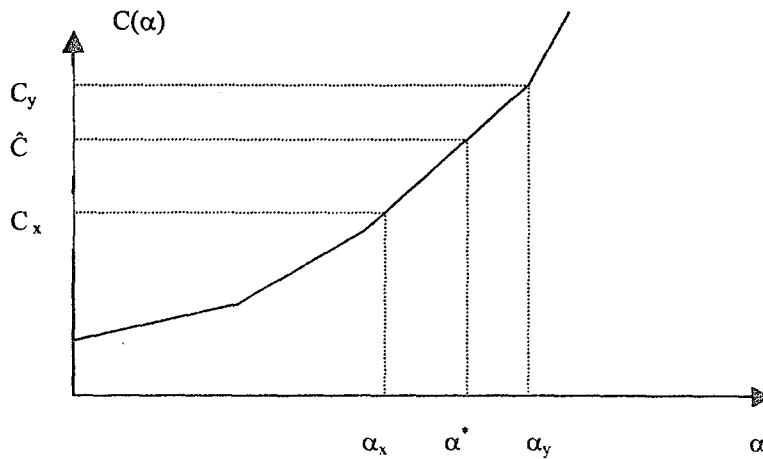
$$f_{fi} = F_{fi}^{-1}(\alpha_{MA}), \quad (3.77)$$

$$f_{tj} = G_{tj}^{-1}(\alpha_{MA}) \quad (3.78)$$

Adım 2 : $\sum_{s_j \in S} F_{fi}^{-1}(\alpha_{MA}) = \sum_{t_j \in T} G_{tj}^{-1}(\alpha_{MA})$ eşitliğinden mükemmel atama üyelik derecesi α_{MA} 'yı hesapla.

Yukarıda bulduğumuz α_{MA} problemi çözmeye başlayacağımız üyelik derecesidir ve amacımız çözüm aşamasında amaç fonksiyonumuzu optimum yapabilmek için bu üyelik derecesinden daha iyi sonuçlar veren üyelik derecesini bulmaktır.

α 'nın farklı değerleriyle ona karşılık gelen ulaştırma maliyeti arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde gösterilmiştir. Aradığımız α^* değerinin α_x ve α_y değerleri arasında olduğu açıktır.



Şekil 3.3 α 'nın farklı değerleriyle ona karşılık gelen ulaştırma maliyeti arasındaki ilişki [α_x, α_y] aralığındaki eğim ise aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$g(\alpha_x, \alpha_y) = (C_y - C_x) / (\alpha_y - \alpha_x) \quad (3.79)$$

Bu aralıktaki herhangi bir α^* değeri için aralık ikiye bölünürse aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$g(\alpha_x, \alpha_y) = g(\alpha_x, \alpha^*) = g(\alpha^*, \alpha_y) \quad (3.80)$$

Buradan optimum üyelik derecesi olan α^* aşağıdaki eşitlikler ile bulunabilir.

$$\alpha^* = \alpha_x + (\hat{C} - C_x) / (g(\alpha_x, \alpha_y)), \quad (3.81)$$

$$\alpha^* = \alpha_y - (C_y - \hat{C}) / (g(\alpha_x, \alpha_y)) \quad (3.82)$$

Bulduğumuz bu α^* değeri ile $f_{fi}^* = F_{fi}^{-1}(\alpha^*)$ ve $f_{ij}^* = G_{ij}^{-1}(\alpha^*)$ değerleri hesaplanabilir. Bununla birlikte f_{fi}^* 'ların toplamının f_{ij}^* 'lerin toplamına eşit olması beklenemez. Yani problem dengesiz bir ulaştırma problemi olabilir.

3.3.4.3 Tamsayılı bulanık ulaştırma problemi için çözüm prosedürü

İlk olarak mükemmel atama prosedürü çalıştırılır ve α_{MA} bulunur. Daha sonra minimum maliyetli ulaştırma planını elde etmemizi sağlayacak olan üyelik derecesi aşağıdaki prosedürde gösterildiği gibi aranır.

Bütün kaynak ve talep merkezi verileri güncellenir. Şöyle ki;

$$\overline{f_{fi}} = \lfloor f_{fi} \rfloor \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.83)$$

$$\overline{f_{ij}} = \lceil f_{ij} \rceil \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.84)$$

$\overline{f_{fi}}$ 'ler f_{fi} 'den küçük en büyük tamsayı ve $\overline{f_{ij}}$ 'ler f_{ij} 'den büyük en küçük tamsayı değerleri olarak atanır. Dengesizlik değeri olan k aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$k = \sum_{j=1}^n \lceil f_{ij} \rceil - \sum_{i=1}^m \lfloor f_{fi} \rfloor, \quad k > 0. \quad (3.85)$$

Bulduğumuz bu k değerini kullanarak $P_{i,h}$ ve $W_{j,l}$ değerleri hesaplanır. Bu değerleri hesaplamamızın amacı, bütün artan ve azalan üyelik değerlerini 1'den $(f_{fi} + k)$ ve $(f_{fi} - k)$ aralığındaki değerlerle karşılaştırmak ve bunlar içinden amacımıza en uygun olanını seçmektir. Kullandığımız h ve l değişkenleri sırasıyla $f_{fi} + 1 \leq h \leq f_{fi} + k$ ve $f_{ij} - 1 \geq l \geq f_{ij} - k$ arasında değer almaktadır.

$$P_{i,h} = \mu_{fi} (f_{fi} + v), \quad i = 1, \dots, m, \quad v = 1, \dots, k, \quad (3.86)$$

$$W_{j,l} = \mu_{ij} (f_{ij} - v), \quad j = 1, \dots, n, \quad v = 1, \dots, k. \quad (3.87)$$

Bulduğumuz bu $P_{i,h}$ ve $W_{j,l}$ değerleri büyükten küçüğe doğru sıralanır. Aynı değere sahip olanlar düğüm olarak adlandırılır ve aradığımız optimum sonuç bu değerler içerisinde aranır [26].

3.3.4.4 Tamsayılı bulanık ulaştırma problemi için algoritma

Adım 0 : Mükemmel atama prosedürünü kullanarak f_{fi} ve f_{ij} değerlerini hesapla. Eğer bütün değişkenler tamsayı ve ulaştırma maliyeti minimum ise çözüm optimumdur. Aksi takdirde adım 1'e git.

Adım 1 : f_{fi} ve f_{ij} değerlerini k dengesizlik değeri ile güncelle. $P_{i,h}$ ve $W_{j,l}$ değerlerini hesapla ve azalan sırda sırala ve en küçük k elemanını seç. Bu işlemten sonra hesaplanan değerleri sırasıyla ($f^{(n)}$ olarak) kaynak ve talep değerlerinin yerine koy. Eğer k . elemene kadar q düğüm varsa $(k+1)$. elemandan $(k+q)$. Elemana kadar olan işlemler $f^{(0)}$ ayarlaması için alınır. $V = 0$ olarak ata.

Adım 2 : Yukarıdaki değerler için taşıma planını ve maliyet değerini hesapla. Adım 3'e git.

Adım 3 : Eğer $C_v \leq \hat{C}$ ve $V = 0$ ise sonuç optimaldir. DUR. Eğer $C_v > \hat{C}$ ve $V = 0$ ise adım 4'e git. Diğer durumlarda problem iki kısma bölünür. Eğer $C_v > \hat{C}$ ve $V \neq 0$ ise $L = V$ olarak ata ve adım 5'e git. Eğer $C_v \leq \hat{C}$ ve $V = 0$ ise $U = V$ ve $F = F_v$ olarak ata. Adım 5'e git.

Adım 4 : Bulunan değerleri azalan sıra ile sırala. $L = 0$ ve $U = r + 1$ olarak ata.

Adım 5 : Eğer $U - L = 1$ ise adım 6'ya git. Diğer durumda $V = \lfloor (L + U) / 2 \rfloor$ olarak ata. Adım 2'ye git.

Adım 6 : Eğer $V = r$ ve $C_v > \hat{C}$ ise mümkün sonuç yok. Diğer durumda bulunan çözüm optimum çözümdür.

SON.

Aşağıda FTP ile çözülmüş bir ulaştırma problemi verilmiştir. Problemde f_1 , ve f_2 şeklinde belirtilen iki adet arz merkezi ve t_1 , t_2 , ve t_3 şeklinde üç tane talep merkezi mevcuttur. Taşıma maliyetlerine ait matris aşağıda verilmiştir. Eski verilere dayanarak karar verici $\hat{C} = 14$ olarak atamıştır.

Çizelge 3.21 Taşıma maliyetlerine ait matris

f_i/t_j	1	2	3	
1	2	1	5	(2,7)
2	6	4	3	(3,6)
	(0,4)	(0,5)	(1,6)	

Verilen bu maliyet matrisine göre üyelik fonksiyonlar aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

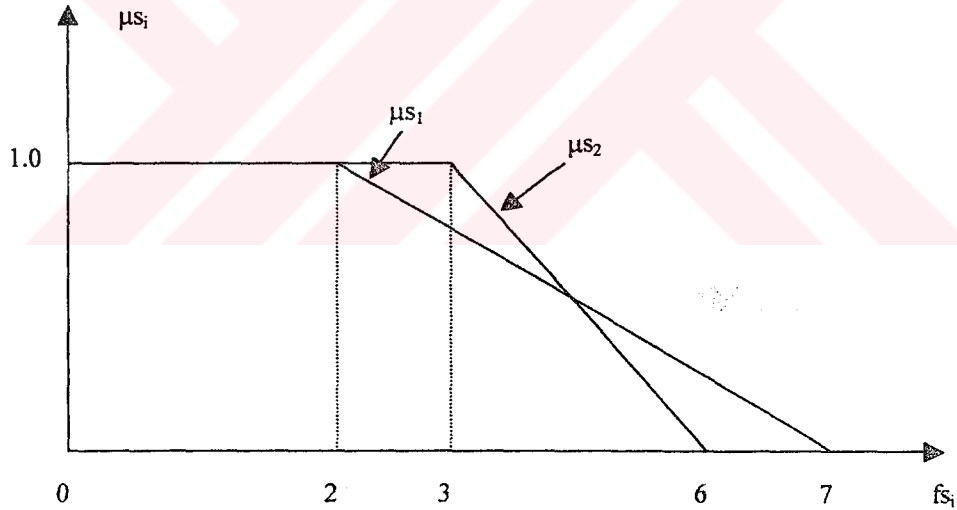
$$\mu_{f1}(f_{f1}) = \begin{cases} 1 & f_{f1} \leq 2 \\ -\frac{f_{f1} - 7}{5} & 2 < f_{f1} < 7 \\ 0 & f_{f1} \geq 7 \end{cases} \quad (3.88)$$

$$\mu_{f2}(f_{f2}) = \begin{cases} 1 & f_{f2} \leq 3 \\ -\frac{f_{f2} - 6}{3} & 3 < f_{f2} < 6 \\ 0 & f_{f2} \geq 6 \end{cases} \quad (3.89)$$

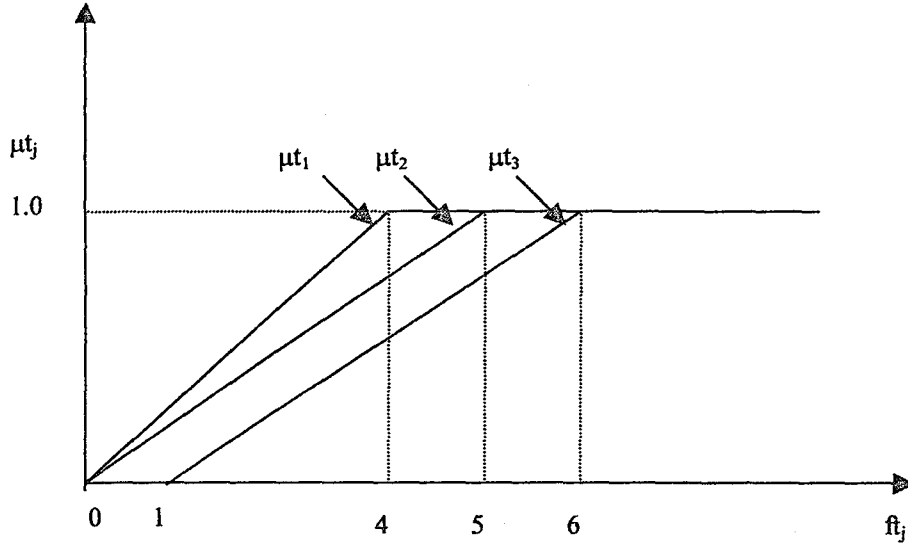
$$\mu_{t1}(f_{t1}) = \begin{cases} 1 & f_{t1} \geq 4 \\ \frac{f_{t1}}{4} & 0 < f_{t1} < 4 \\ 0 & f_{t1} = 0 \end{cases} \quad (3.90)$$

$$\mu_{t2}(f_{t2}) = \begin{cases} 1 & f_{t2} \geq 5 \\ \frac{f_{t2}}{5} & 0 < f_{t2} < 5 \\ 0 & f_{t2} = 0 \end{cases} \quad (3.91)$$

$$\mu_{t3}(f_{t3}) = \begin{cases} 1 & f_{t3} \geq 6 \\ \frac{f_{t3}-1}{5} & 1 < f_{t3} < 6 \\ 0 & f_{t3} \leq 1 \end{cases} \quad (3.92)$$



Şekil .3.4 Üyelik fonksiyonları $\mu_{f_i}(f_{t_j})$



Şekil 3.5 Üyelik fonksiyonları $\mu_{t_j}(f_{t_j})$

İlk olarak kaynak ve talep verilerini hesap edeceğiz ve mükemmel atama prosedürünü kullanarak en iyi α değerini bulacağız.

$$f_{t1} = -5\alpha_{MA} + 7 \quad (3.93)$$

$$f_{t2} = -3\alpha_{MA} + 6 \quad (3.94)$$

$$f_{t1} = 4\alpha_{MA} \quad (3.95)$$

$$f_{t2} = 5\alpha_{MA} \quad (3.96)$$

$$f_{t3} = 5\alpha_{MA} + 1 \quad (3.97)$$

Kaynak ve talep değerlerinin toplamı birbirine eşitlenerek mükemmel atama değeri olan α aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$-8\alpha_{MA} + 13 = 14\alpha_{MA} + 1 \quad (3.98)$$

$$\alpha_{MA} = \frac{6}{11} (=0.545), \quad (3.99)$$

$$f_{f1} = \frac{47}{11} (=4.273), \quad (3.100)$$

$$f_{f2} = \frac{48}{11} (=4.364), \quad (3.101)$$

$$f_{f1} = \frac{24}{11} (=2.182), \quad (3.102)$$

$$f_{f2} = \frac{30}{11} (=2.727), \quad (3.103)$$

$$f_{f3} = \frac{41}{11} (=3.727). \quad (3.104)$$

Bulduğumuz bu değerleri, $f^{MA} = (47/11, 48/11; 24/11, 30/11, 41/11)$ şeklinde de ifade edebiliriz. Bu değerler bilinen bir ulaştırma problemi algoritması ile çözüldüğünde aşağıdaki çözüm matrisi elde edilir.

$$F_U = \begin{pmatrix} 24/11 & 23/11 & 0 \\ 0 & 7/11 & 41/11 \end{pmatrix}, \quad (3.105)$$

$$C_U = 222/11 (= 20,182) \quad (3.106)$$

Bulduğumuz bu maliyet değeri $C_U = 222/11 \geq \hat{C} = 14$ olduğundan kullanmış olduğumuz α_{MA} değerini modifiye etmemiz gerekmektedir. Bunun için üyelik derecesi α 'nın alt sınırı olan "0" değeriyle toplayıp yarısını hesaplamamız gerekmektedir.

$$\alpha_m = (\alpha_l + \alpha_u) / 2 = (0 + 6/11) / 2 = 3/11 \quad (3.107)$$

bulunur.

Bulduğumuz bu yeni değer ile problemimizi yeniden düzenlersek;

$$f^m = (62/11, 57/11; 12/11, 15/11, 26/11) \quad (3.108)$$

$$F_U = \begin{pmatrix} 12/11 & 15/11 & 0 \\ 0 & 0 & 26/11 \end{pmatrix}, \quad (3.109)$$

$$C_U = 117/11 (= 10.636), \quad (3.110)$$

$\alpha_m = 3/11$ için bulduğumuz sonuç $\hat{C}$ 'den küçük bir değerdir. Şimdi matris değerlerinin birbirine eşit olup olmadığını kontrol etmemiz gerekmektedir.

$$\begin{pmatrix} 24/11 & 23/11 & 0 \\ 0 & 7/11 & 41/11 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 12/11 & 15/11 & 0 \\ 0 & 0 & 26/11 \end{pmatrix} \quad (3.111)$$

değerleri birbirine eşit olmadığından $\alpha_1 = \alpha_m$, $F_1 = F_m$ ve $C_1 = C_u$ olarak atanır ve çözüm işlemi devam eder.

$$\alpha_m = (3/11 + 6/11) / 2 = 9/22 \quad (3.112)$$

$$f^m = (109/22, 105/22; 36/22, 45/22, 67/22) \quad (3.113)$$

$$F_m = \begin{pmatrix} 36/22 & 45/22 & 0 \\ 0 & 0 & 67/22 \end{pmatrix}, \quad (3.114)$$

$$C_m = 318/22 (= 14.455) \quad (3.115)$$

$$\begin{pmatrix} 36/22 & 45/22 & 0 \\ 0 & 0 & 68/22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12/11 & 15/11 & 0 \\ 0 & 0 & 26/11 \end{pmatrix} \quad (3.116)$$

Bulduğumuz bu matrisin ulaştırma maliyeti $\hat{C}$ 'den büyük olmasına rağmen matrisin değerleri bir önceki aşamada bulduğumuz matrisin değerlerine eşit çıkmıştır. Bu aşamada problemin formülasyonunda belirttiğimiz aralık daraltma işlemini yapmak gerekmektedir.

$$g(\alpha_x, \alpha_y) = (318/22 - 117/11) / (9/22 - 3/11) = 28 \quad (3.117)$$

$$\alpha^* = 6/22 + (14 - 117/11) / 28 = 11/28 (= 0.393) \quad (3.118)$$

Bulduğumuz bu α^* değeri ile problemimizin optimum sonucunu bulabiliriz.

$$\alpha^* = 11/28 \quad (3.119)$$

$$f_{f1} = 141/28, f_{f2} = 135/28, f_{f1} = 44/28, f_{f2} = 55/28, f_{f3} = 83/28 \quad (3.120)$$

$$F_m = \begin{pmatrix} 44/28 & 55/28 & 0 \\ 0 & 0 & 83/28 \end{pmatrix}, \quad (3.121)$$

$$C^* = 14 \text{ olarak bulunur.} \quad (3.122)$$

Şimdi aynı problemi tamsayıli bulanık ulaştırma çözüml prosedürüne göre çözelim.

$$(f_{f1}, f_{f2}, f_{f3}; f_{f1}, f_{f2}, f_{f3}) = (4, 4; 3, 3, 4), \quad (3.123)$$

$$k = (3 + 3 + 4) - (4 + 4) = 2. \quad (3.124)$$

Bu değere göre $P_{i,h}$ ve $W_{j,l}$ değere aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$P_{1,5} = 2/5, P_{1,6} = 1/5, P_{2,5} = 1/3, P_{2,6} = 0, \quad (3.125)$$

$$W_{1,2} = 1/2, W_{1,1} = 1/4, W_{2,2} = 2/5, W_{2,1} = 1/5, W_{3,3} = 2/5, W_{3,2} = 1/5 \quad (3.126)$$

Bulduğumuz bu değere azalan sıra ile sıralarsak aşağıdaki sıralamayı elde ederiz.

$$W_{1,2} = 1/2 \geq W_{3,3} = 2/5 \geq W_{2,2} = 2/5 \geq P_{1,5} = 2/5 \geq P_{2,5} = 1/3 \geq W_{1,1} = 1/4 \geq W_{2,1} = 1/5 \geq W_{3,2} = 1/5 \geq P_{2,6} = 0, \quad (3.127)$$

Görüldüğü gibi 2/5 ve 1/5 değereinde iki adet düğüm noktamız oluştu. Bu değere göre ulaştırma problemimizi yeniden çözersek aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

$$f^0 = (5, 4; 2,2,3) \quad (3.128)$$

Şimdi bu problemi bilinen herhangi bir ulaştırma problemi çözüml algoritması ile çözersek şu sonucu elde ederiz.

$$F_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (3.129)$$

$$C_0 = 15 \text{ olarak bulunur.} \quad (3.130)$$

Bulduğumuz diğer düğüm noktası için problemimizi tekrar çözersek aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

$$f^1 = (5, 5; 1, 2, 3) \quad (3.131)$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (3.132)$$

$$C_1 = 13 \text{ olarak bulunur.} \quad (3.133)$$

Amaç fonksiyonu kısıtımız $\hat{C} < 14$ olduğu için ikinci düğüm noktasından elde ettiğimiz $f^1 = (5, 5; 1, 2, 3)$ çözümü bu problem için optimum sonucu vermektedir. Aşağıda problemin optimum sonucunu veren değerler gösterilmiştir.

$$f^* = (3, 3; 1, 2, 3) \quad (3.134)$$

$$F^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (3.135)$$

$$C^* = 13 \text{ olarak bulunur [25].} \quad (3.136)$$

4. UYGULAMA

Yapılan uygulama çalışmasında, İç Anadolu bölgesinde tekstil sektöründe faaliyet gösteren bir işletme üzerinde, bulanık ulaştırma problemi ele alınmıştır. İşletmenin Sivas, Kayseri ve Konya olmak üzere 3 adet atölyesi bulunmakta ve burada üretilen ürünler Antalya, İzmir, İstanbul, Samsun ve Erzurum'daki 5 bölge bayisine gönderilmektedir. Gönderilen ürünler 20 kg. lik balyalar halinde paketlenmekte ve bayilere bu şekilde gönderilmektedir. Çalışmada birim olarak bu balyalar göz önüne alınmıştır.

Bu 3 üretim merkezi ile 5 bölge bayileri arasındaki taşıma maliyetleri kesin sayılarla ifade edilebilirken, üretim merkezlerinin kapasiteleri ve bayilerin talepleri bulanık sayılarla ifade edilmektedir. 3 üretim merkezi ile 5 bayinin bulanık sayılarla belirtilen kapasite ve talepleri ile bunlar arasındaki kesin sayılarla belirtilen taşıma maliyeti matrisi aşağıda verilmiştir. Verilen maliyetler enflasyonda ki dalgalanmalar göz önünde tutularak \$ cinsinden verilmiştir, mesela 1 no'lu kaynaktan A talebine gönderilen bir birimlik mamul maliyeti 1.20 \$'dır. Uygulamada kolaylık olması açısından şehir isimleri şu şekilde kısaltılmıştır: Sivas (1), Kayseri (2), Konya (3), Antalya (A), İzmir (B), İstanbul (C), Samsun (D) ve Erzurum (E). Çizelge 4.1'de de görüldüğü gibi kaynakların gönderebilecekleri mamul miktarları ve talep merkezlerinin istedikleri mamul miktarları bulanık sayılarla ifade edilmektedir.

Çizelge 4.1 Kaynak ve talep merkezleri arasındaki maliyet matrisi

	A	B	C	D	E	
1	120	140	120	40	50	(20,22)
2	90	110	100	70	80	(23,25)
3	40	60	80	80	130	(30,37)
	(10,14)	(16,20)	(20,25)	(12,14)	(8,12)	

Üretici firmanın arzusu talep merkezlerinin taleplerini tamsayılarla ifade etmek ve taşıma maliyetinin 5000 br.'den fazla olmamasıdır. Bu durumda elimizdeki problem bir önceki bölümde bahsettiğimiz tamsayılı bulanık ulaştırma problemine dönüşmektedir.

İlk olarak mükemmel atama prosedürü çalıştırılmak suretiyle başlangıç üyelik derecesi olan α_{MA} değerini hesaplamamız gerekmektedir. Bunun için önce her kaynak ve talep merkezine ait üyelik fonksiyonunu belirlememiz gerekmektedir. Sırasıyla kaynak ve talep merkezlerine ait üyelik fonksiyonları aşağıda verilmiştir.

$$\mu_1(f_1) = \begin{cases} 1 & f_1 \leq 20 \\ -\frac{f_1 - 22}{2} & 20 < f_1 < 22 \\ 0 & f_1 \geq 22 \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\mu_2(f_2) = \begin{cases} 1 & f_2 \leq 23 \\ -\frac{f_2 - 25}{2} & 23 < f_2 < 25 \\ 0 & f_2 \geq 25 \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\mu_3(f_3) = \begin{cases} 1 & f_3 \leq 30 \\ -\frac{f_3 - 37}{7} & 30 < f_3 < 37 \\ 0 & f_3 \geq 37 \end{cases} \quad (4.3)$$

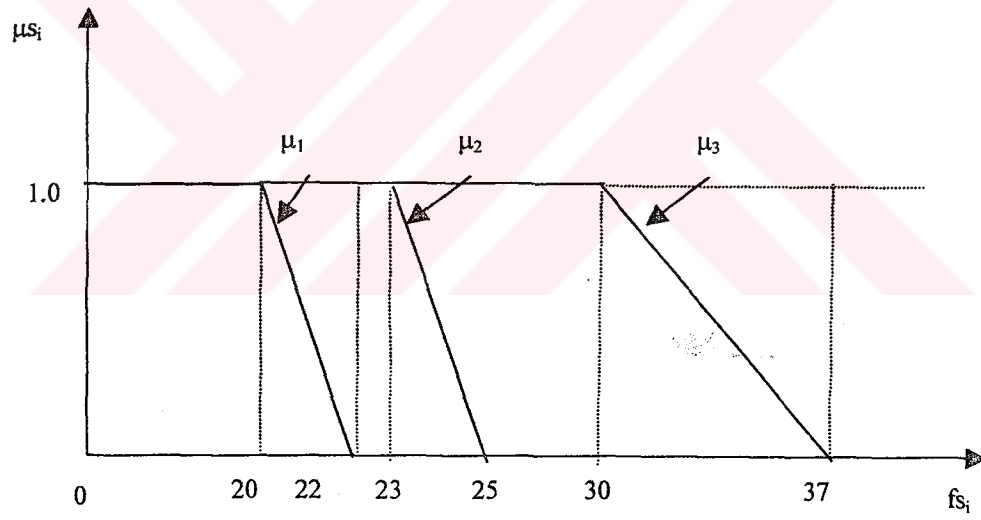
$$\mu_A(f_A) = \begin{cases} 1 & f_A \geq 14 \\ \frac{f_A - 10}{4} & 10 > f_A > 14 \\ 0 & f_A \leq 10 \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\mu_B(f_B) = \begin{cases} 1 & f_B \geq 20 \\ \frac{f_B - 16}{4} & 16 > f_B > 20 \\ 0 & f_B \leq 16 \end{cases} \quad (4.5)$$

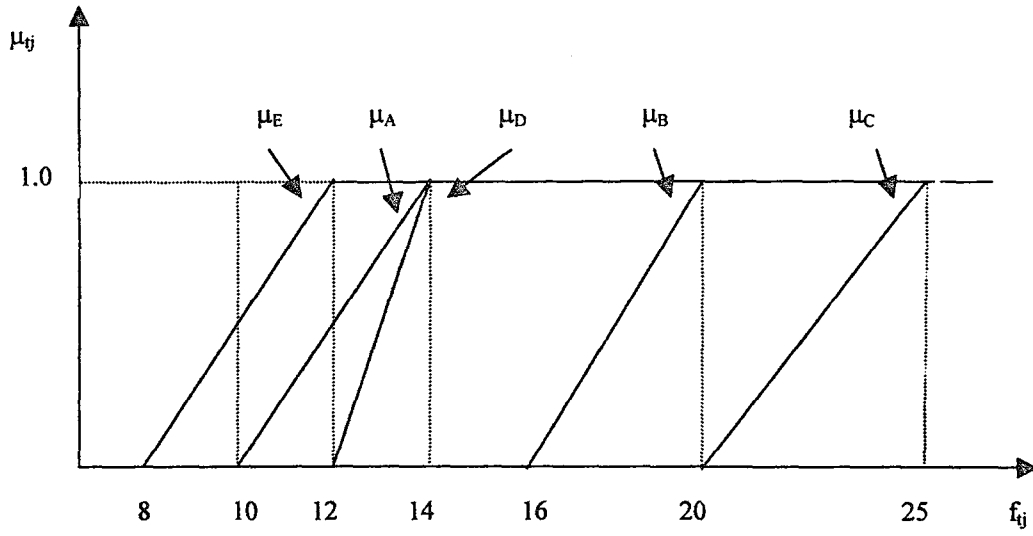
$$\mu_C(f_C) = \begin{cases} 1 & f_C \geq 25 \\ \frac{f_C - 20}{5} & 20 > f_C > 25 \\ 0 & f_C \leq 20 \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\mu_D(f_D) = \begin{cases} 1 & f_D \geq 16 \\ \frac{f_D - 12}{4} & 12 > f_D > 16 \\ 0 & f_D \leq 12 \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\mu_E(f_E) = \begin{cases} 1 & f_E \geq 12 \\ \frac{f_E - 8}{4} & 8 > f_E > 12 \\ 0 & f_E \leq 8 \end{cases} \quad (4.8)$$



Şekil 4.1 Üyelik fonksiyonları $\mu_{s_i}(f_{t_j})$



Şekil 4.2 Üyelik fonksiyonları μ_j (f_j)

Bu üyelik fonksiyonlarını düzenleyip α_{MA} değerini de aşağıdaki şekilde hesaplayabiliriz.

$$f_1 = -2\alpha_{MA} + 22 \quad (4.9)$$

$$f_2 = -2\alpha_{MA} + 25 \quad (4.10)$$

$$f_3 = -7\alpha_{MA} + 37 \quad (4.11)$$

$$f_A = 4\alpha_{MA} + 10 \quad (4.12)$$

$$f_B = 4\alpha_{MA} + 16 \quad (4.13)$$

$$f_C = 5\alpha_{MA} + 20 \quad (4.14)$$

$$f_D = 4\alpha_{MA} + 12 \quad (4.15)$$

$$f_E = 4\alpha_{MA} + 8 \quad (4.16)$$

Bulduğumuz bu eşitlikleri kendi aralarında, kaynak ve talep olmak üzere, toplayıp birbirlerine eşitlediğimiz zaman bulmak istediğimiz ve başlangıç değeri olarak kullanacağımız α_{MA} değerini aşağıdaki şekilde hesaplayabiliriz.

$$(-2\alpha_{MA} + 22) + (-2\alpha_{MA} + 25) + (-7\alpha_{MA} + 37) = (4\alpha_{MA} + 10) + (4\alpha_{MA} + 16) + (5\alpha_{MA} + 20) + (4\alpha_{MA} + 12) + (4\alpha_{MA} + 8) \quad (4.17)$$

$$\Rightarrow -11\alpha_{MA} + 84 = 21\alpha_{MA} + 66 \quad (4.18)$$

$$\Rightarrow \alpha_{MA} = 9/16 (= 0.562) \quad (4.19)$$

olarak bulunur.

Bulduğumuz bu değeri kullanarak kaynak ve talep üyelik fonksiyonlarını yeniden düzenlersek;

$$f_1 = -2\alpha_{MA} + 22 = -2 * 0.562 + 22 = 20.876 \quad (4.20)$$

$$f_2 = -2\alpha_{MA} + 25 = -2 * 0.562 + 25 = 23.876 \quad (4.21)$$

$$f_3 = -7\alpha_{MA} + 37 = -7 * 0.562 + 37 = 33.066 \quad (4.22)$$

$$f_A = 4\alpha_{MA} + 10 = 4 * 0.562 + 10 = 12.248 \quad (4.23)$$

$$f_B = 4\alpha_{MA} + 16 = 4 * 0.562 + 16 = 18.248 \quad (4.24)$$

$$f_C = 5\alpha_{MA} + 20 = 5 * 0.562 + 20 = 22.810 \quad (4.25)$$

$$f_D = 4\alpha_{MA} + 12 = 4 * 0.562 + 12 = 14.248 \quad (4.26)$$

$$f_E = 4\alpha_{MA} + 8 = 4 * 0.562 + 8 = 10.248 \quad (4.27)$$

Bulduğumuz bu değerleri Lindo ile çözersek aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Min $120 x_{1a} + 90 x_{2a} + 40 x_{3a} + 140 x_{1b} + 110 x_{2b} + 60 x_{3b} + 120 x_{1c} + 100 x_{2c}$
 $+ 80 x_{3c} + 40 x_{1d} + 70 x_{2d} + 80 x_{3d} + 50 x_{1e} + 80 x_{2e} + 130 x_{3e}$

SUBJECT TO

$$x_{1a} + x_{2a} + x_{3a} \geq 12.248$$

$$x_{1b} + x_{2b} + x_{3b} \geq 18.248$$

$$x_{1c} + x_{2c} + x_{3c} \geq 22.810$$

$$x_{1d} + x_{2d} + x_{3d} \geq 14.248$$

$$x_{1e} + x_{2e} + x_{3e} \geq 10.248$$

$$x_{1a} + x_{1b} + x_{1c} + x_{1d} + x_{1e} \leq 20.876$$

$$x_{2a} + x_{2b} + x_{2c} + x_{2d} + x_{2e} \leq 23.876$$

$$x_{3a} + x_{3b} + x_{3c} + x_{3d} + x_{3e} \leq 33.066 \quad (4.28)$$

END

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 5005.320

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
x_{1a}	0.000000	90.000000
x_{2a}	0.000000	30.000000
x_{3a}	12.248000	0.000000
x_{1b}	0.000000	90.000000
x_{2b}	0.000000	30.000000

x3b	18.247999	0.000000
-----	-----------	----------

x1c	0.000000	50.000000
-----	----------	-----------

x2c	20.239998	0.000000
-----	-----------	----------

x3c	2.570003	0.000000
-----	----------	----------

x1d	14.248000	0.000000
-----	-----------	----------

x2d	0.000000	0.000000
-----	----------	----------

x3d	0.000000	30.000000
-----	----------	-----------

x1e	6.627999	0.000000
-----	----------	----------

x2e	3.620001	0.000000
-----	----------	----------

x3e	0.000000	70.000000
-----	----------	-----------

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
-----	------------------	-------------

2)	0.000000	-60.000000
----	----------	------------

3)	0.000000	-80.000000
----	----------	------------

4)	0.000000	-100.000000
----	----------	-------------

5)	0.000000	-70.000000
----	----------	------------

6)	0.000000	-80.000000
----	----------	------------

7)	0.000000	30.000000
----	----------	-----------

8)	0.016001	0.000000
----	----------	----------

9)	0.000000	20.000000
----	----------	-----------

NO. ITERATIONS= 7

(4.29)

Bulunan ulaştırma maliyeti 5005.320 bulunmuştur. Bu değer bizim amaç fonksiyonumuzdaki değerden daha büyük olduğu için aşağıda hesapladığımız yeni α değeriyle problemimizi yeniden çözmeliyiz.

$$\alpha_m = (\alpha_1 + \alpha_u) / 2 = (0 + 0,562) / 2 = 0,281 \quad (4.30)$$

olarak bulunur.

Bulduğumuz bu değeri kullanarak kaynak ve talep üyelik fonksiyonlarını yeniden düzenlersek;

$$f_1 = -2\alpha_m + 22 = -2 * 0.281 + 22 = 21,438 \quad (4.31)$$

$$f_2 = -2\alpha_m + 25 = -2 * 0.281 + 25 = 24,438 \quad (4.32)$$

$$f_3 = -7\alpha_m + 37 = -7 * 0.281 + 37 = 35,033 \quad (4.33)$$

$$f_A = 4\alpha_m + 10 = 4 * 0.281 + 10 = 11,124 \quad (4.34)$$

$$f_B = 4\alpha_m + 16 = 4 * 0.281 + 16 = 17,124 \quad (4.35)$$

$$f_C = 5\alpha_m + 20 = 5 * 0.281 + 20 = 21,405 \quad (4.36)$$

$$f_D = 4\alpha_m + 12 = 4 * 0.281 + 12 = 13,124 \quad (4.37)$$

$$f_E = 4\alpha_m + 8 = 4 * 0.281 + 8 = 9,124 \quad (4.38)$$

Bulduğumuz bu değerleri Lindo ile çözersek aşağıdaki sonuçları elde ederiz

$$\text{Min } 120 x_{1a} + 90 x_{2a} + 40 x_{3a} + 140 x_{1b} + 110 x_{2b} + 60 x_{3b} + 120 x_{1c} + 100 x_{2c} + 80 x_{3c} + 40 x_{1d} + 70 x_{2d} + 80 x_{3d} + 50 x_{1e} + 80 x_{2e} + 130 x_{3e}$$

SUBJECT TO

$$x_{1a} + x_{2a} + x_{3a} \geq 11.124$$

$$x_{1b} + x_{2b} + x_{3b} \geq 17.124$$

$$x1c + x2c + x3c \geq 21.405$$

$$x1d + x2d + x3d \geq 13.124$$

$$x1e + x2e + x3e \geq 9.124$$

$$x1a + x1b + x1c + x1d + x1e \leq 21.438$$

$$x2a + x2b + x2c + x2d + x2e \leq 24.438$$

$$x3a + x3b + x3c + x3d + x3e \leq 35.033 \quad (4.40)$$

END

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 4482.660

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
x1a	0.000000	90.000000
x2a	0.000000	30.000000
x3a	11.124000	0.000000
x1b	0.000000	90.000000
x2b	0.000000	30.000000
x3b	17.124001	0.000000
x1c	0.000000	50.000000
x2c	14.620000	0.000000
x3c	6.785001	0.000000
x1d	13.124000	0.000000

x2d	0.000000	0.000000
x3d	0.000000	30.000000
x1e	8.314000	0.000000
x2e	0.809999	0.000000
x3e	0.000000	70.000000

ROW SLACK OR SURPLUS DUAL PRICES

2)	0.000000	-60.000000
3)	0.000000	-80.000000
4)	0.000000	-100.000000
5)	0.000000	-70.000000
6)	0.000000	-80.000000
7)	0.000000	30.000000
8)	9.008000	0.000000
9)	0.000000	20.000000

NO. ITERATIONS= 0 (4.41)

Yeni maliyet değerimiz $C_m = 4482.660$ olarak bulunmuştur. Bu değer bizim amaç fonksiyonu kısıtımızı sağlamakta, ancak optimum olup olmadığını anlamak için matris değerlerinin eşit olup olmadığını kontrol etmeliyiz.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 14.248 & 6.628 \\ 0 & 0 & 20.242 & 0 & 3.620 \\ 12.248 & 18.248 & 2.570 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 13.124 & 8.314 \\ 0 & 0 & 14.620 & 0 & 0.810 \\ 11.124 & 17.124 & 6.785 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

Matris değerleri birbirine eşit olmadığından α 'yı revize ederek yeniden çözüme sokmalıyız.

$$\alpha_m = (\alpha_l + \alpha_u) / 2 = (0,281 + 0,562) / 2 = 0,421 \quad (4.43)$$

olarak bulunur.

Bulduğumuz bu değeri kullanarak kaynak ve talep üyelik fonksiyonlarını yeniden düzenlersek;

$$f_l = -2\alpha_m + 22 = -2 * 0.421 + 22 = 21,158 \quad (4.44)$$

$$f_2 = -2\alpha_m + 25 = -2 * 0.421 + 25 = 24,158 \quad (4.45)$$

$$f_3 = -7\alpha_m + 37 = -7 * 0.421 + 37 = 34,053 \quad (4.46)$$

$$f_A = 4\alpha_m + 10 = 4 * 0.421 + 10 = 11,684 \quad (4.47)$$

$$f_B = 4\alpha_m + 16 = 4 * 0.421 + 16 = 17,684 \quad (4.48)$$

$$f_C = 5\alpha_m + 20 = 5 * 0.421 + 20 = 22,105 \quad (4.49)$$

$$f_D = 4\alpha_m + 12 = 4 * 0.421 + 12 = 13,684 \quad (4.50)$$

$$f_E = 4\alpha_m + 8 = 4 * 0.421 + 8 = 9,684 \quad (4.51)$$

Bulduğumuz bu değerleri Lindo ile çözersek aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

$$\begin{aligned} \text{Min } & 120 x_{1a} + 90 x_{2a} + 40 x_{3a} + 140 x_{1b} + 110 x_{2b} + 60 x_{3b} + 120 x_{1c} + 100 x_{2c} \\ & + 80 x_{3c} + 40 x_{1d} + 70 x_{2d} + 80 x_{3d} + 50 x_{1e} + 80 x_{2e} + 130 x_{3e} \end{aligned}$$

SUBJECT TO

$$x1a + x2a + x3a \geq 11.684$$

$$x1b + x2b + x3b \geq 17.684$$

$$x1c + x2c + x3c \geq 22.105$$

$$x1d + x2d + x3d \geq 13.684$$

$$x1e + x2e + x3e \geq 9.684$$

$$x1a + x1b + x1c + x1d + x1e \leq 21.158$$

$$x2a + x2b + x2c + x2d + x2e \leq 24.158$$

$$x3a + x3b + x3c + x3d + x3e \leq 34.053$$

(4.52)

END

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 4743.060

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
x1a	0.000000	90.000000
x2a	0.000000	30.000000
x3a	11.684000	0.000000
x1b	0.000000	90.000000
x2b	0.000000	30.000000
x3b	17.684000	0.000000
x1c	0.000000	50.000000

x2c	17.419998	0.000000
x3c	4.685001	0.000000
x1d	13.684000	0.000000
x2d	0.000000	0.000000
x3d	0.000000	30.000000
x1e	7.474001	0.000000
x2e	2.209999	0.000000
x3e	0.000000	70.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
-----	------------------	-------------

2)	0.000000	-60.000000
3)	0.000000	-80.000000
4)	0.000000	-100.000000
5)	0.000000	-70.000000
6)	0.000000	-80.000000
7)	0.000000	30.000000
8)	4.528004	0.000000
9)	0.000000	20.000000

NO. ITERATIONS= 0 (4.53)

Yeni maliyet değerimiz $C_m = 4743.060$ olarak bulunmuştur. Bu değer yine bizim amaç fonksiyonu kısıtımızı sağlamakta, ancak optimum olup olmadığını anlamak için matris değerlerinin eşit olup olmadığını kontrol etmeliyiz.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 13.684 & 7.474 \\ 0 & 0 & 17.420 & 0 & 2.210 \\ 11.684 & 17.684 & 4.685 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 14.248 & 6.628 \\ 0 & 0 & 20.242 & 0 & 3.620 \\ 12.248 & 18.248 & 2.570 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

Matris değerleri birbirine eşit olmadığından α 'yı revize ederek yeniden çözüme sokmalıyız.

$$\alpha_m = (\alpha_1 + \alpha_u) / 2 = (0,421 + 0,281) / 2 = 0,351 \quad (4.55)$$

olarak bulunur.

Bulduğumuz bu değeri kullanarak kaynak ve talep üyelik fonksiyonlarını yeniden düzenlersek;

$$f_1 = -2\alpha_m + 22 = -2 * 0.351 + 22 = 21,298 \quad (4.56)$$

$$f_2 = -2\alpha_m + 25 = -2 * 0.351 + 25 = 24,298 \quad (4.57)$$

$$f_3 = -7\alpha_m + 37 = -7 * 0.351 + 37 = 34,543 \quad (4.58)$$

$$f_A = 4\alpha_m + 10 = 4 * 0.351 + 10 = 11,404 \quad (4.59)$$

$$f_B = 4\alpha_m + 16 = 4 * 0.351 + 16 = 17,404 \quad (4.60)$$

$$f_C = 5\alpha_m + 20 = 5 * 0.351 + 20 = 21,755 \quad (4.61)$$

$$f_D = 4\alpha_m + 12 = 4 * 0.351 + 12 = 13,404 \quad (4.62)$$

$$f_E = 4\alpha_m + 8 = 4 * 0.351 + 8 = 9,404 \quad (4.63)$$

Bulduğumuz bu değerleri Lindo ile çözersek aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

$$\begin{aligned} \text{Min } & 120 x_{1a} + 90 x_{2a} + 40 x_{3a} + 140 x_{1b} + 110 x_{2b} + 60 x_{3b} + 120 x_{1c} + 100 x_{2c} \\ & + 80 x_{3c} + 40 x_{1d} + 70 x_{2d} + 80 x_{3d} + 50 x_{1e} + 80 x_{2e} + 130 x_{3e} \end{aligned}$$

Yazdırma...

SUBJECT TO

$$x1a + x2a + x3a \geq 11.404$$

$$x1b + x2b + x3b \geq 17.404$$

$$x1c + x2c + x3c \geq 21.755$$

$$x1d + x2d + x3d \geq 13.404$$

$$x1e + x2e + x3e \geq 9.404$$

$$x1a + x1b + x1c + x1d + x1e \leq 21.298$$

$$x2a + x2b + x2c + x2d + x2e \leq 24.298$$

$$x3a + x3b + x3c + x3d + x3e \leq 34.543 \quad (4.64)$$

END

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 4612.860

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
x1a	0.000000	90.000000
x2a	0.000000	30.000000
x3a	11.404000	0.000000
x1b	0.000000	90.000000
x2b	0.000000	30.000000
x3b	17.403999	0.000000
x1c	0.000000	50.000000

x2c	16.320000	0.000000
x3c	5.735000	0.000000
x1d	13.404000	0.000000
x2d	0.000000	0.000000
x3d	0.000000	30.000000
x1e	7.894000	0.000000
x2e	1.510000	0.000000
x3e	0.000000	70.000000

ROW SLACK OR SURPLUS DUAL PRICES

2)	0.000000	-60.000000
3)	0.000000	-80.000000
4)	0.000000	-100.000000
5)	0.000000	-70.000000
6)	0.000000	-80.000000
7)	0.000000	30.000000
8)	6.768001	0.000000
9)	0.000000	20.000000

NO. ITERATIONS= 0 (4.65)

Bulduğumuz bu yeni $C_m = 4612.860$ maliyet değerimiz bir önceki maliyet değerimizden daha küçük olduğu için çözümü burada sonlandırıyoruz. Optimum sonucu bulmak için aralık daraltma işlemini uygulamamız gerekmektedir.

$$g(\alpha_x, \alpha_y) = \frac{(4743,060) - (4612,860)}{(0,421) - (0,351)} = 1860 \quad (4.66)$$

$$\alpha^* = 0,281 + \frac{(5000 - 4612,860)}{1860} = 0,4891 \quad (4.67)$$

Bulduğumuz bu α^* değeri yukarıdaki ulaştırma problemi için optimum sonucu vermektedir. Aşağıda α^* değeri için problem yeniden düzenlenmiş ve optimal ulaştırma planı ve maliyeti hesap edilmiştir.

$$f_1 = -2\alpha_m + 22 = -2 * 0,49 + 22 = 21,02 \quad (4.68)$$

$$f_2 = -2\alpha_m + 25 = -2 * 0,49 + 25 = 24,02 \quad (4.69)$$

$$f_3 = -7\alpha_m + 37 = -7 * 0,49 + 37 = 34,57 \quad (4.70)$$

$$f_A = 4\alpha_m + 10 = 4 * 0,49 + 10 = 11,96 \quad (4.71)$$

$$f_B = 4\alpha_m + 16 = 4 * 0,49 + 16 = 17,96 \quad (4.72)$$

$$f_C = 5\alpha_m + 20 = 5 * 0,49 + 20 = 22,45 \quad (4.73)$$

$$f_D = 4\alpha_m + 12 = 4 * 0,49 + 12 = 13,96 \quad (4.74)$$

$$f_E = 4\alpha_m + 8 = 4 * 0,49 + 8 = 9,96 \quad (4.75)$$

Bulduğumuz bu değerleri Lindo ile çözersek aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

$$\text{Min } 120 x_{1a} + 90 x_{2a} + 40 x_{3a} + 140 x_{1b} + 110 x_{2b} + 60 x_{3b} + 120 x_{1c} + 100 x_{2c} \\ + 80 x_{3c} + 40 x_{1d} + 70 x_{2d} + 80 x_{3d} + 50 x_{1e} + 80 x_{2e} + 130 x_{3e}$$

SUBJECT TO

$$x_{1a} + x_{2a} + x_{3a} \geq 11,96$$

$$x_{1b} + x_{2b} + x_{3b} \geq 17,96$$

$$x1c + x2c + x3c \geq 22.45$$

$$x1d + x2d + x3d \geq 13.96$$

$$x1e + x2e + x3e \geq 9.96$$

$$x1a + x1b + x1c + x1d + x1e \leq 21.02$$

$$x2a + x2b + x2c + x2d + x2e \leq 24.02$$

$$x3a + x3b + x3c + x3d + x3e \leq 34.57 \quad (4.76)$$

END

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 4871.400

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
x1a	0.000000	90.000000
x2a	0.000000	30.000000
x3a	11.960000	0.000000
x1b	0.000000	90.000000
x2b	0.000000	30.000000
x3b	17.959999	0.000000
x1c	0.000000	50.000000
x2c	18.799999	0.000000
x3c	3.650000	0.000000
x1d	13.960000	0.000000

x2d	0.000000	0.000000
x3d	0.000000	30.000000
x1e	7.060000	0.000000
x2e	2.900000	0.000000
x3e	0.000000	70.000000

ROW SLACK OR SURPLUS DUAL PRICES

2)	0.000000	-60.000000
3)	0.000000	-80.000000
4)	0.000000	-100.000000
5)	0.000000	-70.000000
6)	0.000000	-80.000000
7)	0.000000	30.000000
8)	2.320000	0.000000
9)	0.000000	20.000000

NO. ITERATIONS= 7

(4.77)

Çizelge 4.2 Optimum ulaştırma planı

	A	B	C	D	E
1	0	0	0	13,96	7,06
2	0	0	18.80	0	2,90
3	11.96	17,96	3.65	0	0

$$C^* = 4871.400 \quad (4.78)$$

olarak bulunur.

Yukarıda görüldüğü gibi bütün sonuçlar kesirli sayılardan oluşmaktadır. Bu aşamada ilk olarak, her bir kaynak değeri için kendisinden küçük en büyük tamsayıyı, her bir talep merkezi için kendisinden büyük en küçük tamsayı değerlerini bulmamız gerekmektedir. Yeni kaynak ve talep merkezi değerlerimiz ve dengesizlik katsayımız (k) aşağıda görülmektedir.

$$(f_1, f_2, f_3; f_A, f_B, f_C, f_D, f_E) = (20, 23, 33; 13, 19, 23, 15, 11) \quad (4.79)$$

$$k = (13 + 19 + 23 + 15 + 11) - (20 + 23 + 33) = 5 \quad (4.80)$$

Bu değerleri hesapladıktan sonra şimdi de $P_{i,h}$ ve $W_{j,l}$ değerlerini hesaplayıp düğüm noktalarını bulalım. h değişkeninin $f_{si} + 1 \leq h \leq f_{si} + k$ ve l değişkeninin $f_{lj} - 1 \geq l \geq f_{lj} - k$ aralığında değer aldıkları bir önceki bölümde açıklanmıştı. Dolayısıyla bizim problemimizde h ve l değişkenleri kaynaklar ve talep merkezleri için aşağıdaki değerleri almaktadır.

$$1 \text{ no'lu kaynak için: } 21 \leq h \leq 25, \quad (4.81)$$

$$2 \text{ no'lu kaynak için: } 24 \leq h \leq 28, \quad (4.82)$$

$$3 \text{ no'lu kaynak için: } 34 \leq h \leq 38, \quad (4.83)$$

$$A \text{ talep merkezi için: } 12 \geq l \geq 8, \quad (4.84)$$

$$B \text{ talep merkezi için: } 18 \geq l \geq 14, \quad (4.85)$$

$$C \text{ talep merkezi için: } 22 \geq l \geq 18, \quad (4.86)$$

$$D \text{ talep merkezi için: } 14 \geq l \geq 10, \quad (4.87)$$

$$E \text{ talep merkezi için: } 10 \geq l \geq 6. \quad (4.88)$$

Bu aralıkları bulduktan sonra $P_{i,h}$ ve $W_{j,l}$ değerleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$P_{1,21} = -\frac{21-22}{2} = 0.5 \quad (4.89)$$

$$P_{1,22} = -\frac{22-22}{2} = 0 \quad (4.90)$$

$$P_{1,23} = -\frac{23-22}{2} = -0.5 \quad (4.91)$$

$$P_{1,24} = -\frac{24-22}{2} = -1 \quad (4.92)$$

$$P_{1,25} = -\frac{25-22}{2} = -1.5 \quad (4.93)$$

$$P_{2,24} = -\frac{24-25}{2} = 0.5 \quad (4.94)$$

$$P_{2,25} = -\frac{25-25}{2} = 0 \quad (4.95)$$

$$P_{2,26} = -\frac{26-25}{2} = -0.5 \quad (4.96)$$

$$P_{2,27} = -\frac{27-25}{2} = -1 \quad (4.97)$$

$$P_{2,28} = -\frac{28-25}{2} = -1.5 \quad (4.98)$$

$$P_{3,34} = -\frac{34-37}{7} = 0.428 \quad (4.99)$$

$$P_{3,35} = -\frac{35-37}{7} = 0.285 \quad (4.100)$$

$$P_{3,36} = -\frac{36-37}{7} = 0.142 \quad (4.101)$$

$$P_{3,37} = -\frac{37-37}{7} = 0 \quad (4.102)$$

$$P_{3,38} = -\frac{38-37}{7} = -0.142 \quad (4.103)$$

$$W_{1,8} = \frac{8-10}{4} = -0.5 \quad (4.104)$$

$$W_{1,9} = \frac{9-10}{4} = -0.25 \quad (4.105)$$

$$W_{1,10} = \frac{10-10}{4} = 0 \quad (4.106)$$

$$W_{1,11} = \frac{11-10}{4} = 0.25 \quad (4.107)$$

$$W_{1,12} = \frac{12-10}{4} = 0.5 \quad (4.108)$$

$$W_{2,14} = \frac{14-16}{4} = -0.5 \quad (4.109)$$

$$W_{2,15} = \frac{15-16}{4} = -0.25 \quad (4.110)$$

$$W_{2,16} = \frac{16-16}{4} = 0 \quad (4.111)$$

$$W_{2,17} = \frac{17-16}{4} = 0.25 \quad (4.112)$$

$$W_{2,18} = \frac{18-16}{4} = 0.5 \quad (4.113)$$

$$W_{3,18} = \frac{18-20}{5} = -0.4 \quad (4.114)$$

$$W_{3,19} = \frac{19-20}{5} = -0.2 \quad (4.115)$$

$$W_{3,20} = \frac{20-20}{5} = 0 \quad (4.116)$$

$$W_{3,21} = \frac{21-20}{5} = 0.2 \quad (4.117)$$

$$W_{3,22} = \frac{22-20}{5} = 0.4 \quad (4.118)$$

$$W_{4,10} = \frac{10-12}{4} = -0.5 \quad (4.119)$$

$$W_{4,11} = \frac{11-12}{4} = -0.25 \quad (4.120)$$

$$W_{4,12} = \frac{12-12}{4} = 0 \quad (4.121)$$

$$W_{4,13} = \frac{13-12}{4} = 0.25 \quad (4.122)$$

$$W_{4,14} = \frac{14-12}{4} = 0.5 \quad (4.123)$$

$$W_{5,6} = \frac{6-8}{4} = -0.5 \quad (4.124)$$

$$W_{5,7} = \frac{7-8}{4} = -0.25 \quad (4.125)$$

$$W_{5,8} = \frac{8-8}{4} = 0 \quad (4.126)$$

$$W_{5,9} = \frac{9-8}{4} = 0.25 \quad (4.127)$$

$$W_{5,10} = \frac{10-8}{4} = 0.5 \quad (4.128)$$

Bulduğumuz bu düğüm noktalarını azalan şekilde sıralayalım. Ancak sadece(+)değerli $P_{i,h}$ ve $W_{j,l}$ değerlerini göz önüne alıyoruz. Buna göre $P_{i,h}$ ve $W_{j,l}$ değerleri aşağıdaki gibi sıralanır.

$$(P_{1,21} = 0.5) = (P_{2,24} = 0.5) = (W_{1,12} = 0.5) = (W_{2,18} = 0.5) = (W_{4,14} = 0.5) = (W_{5,10} = 0.5) > (P_{3,34} = 0.428) > (W_{3,22} = 0.4) > (P_{3,35} = 0.285) > (W_{1,11} = 0.25) = (W_{2,17} = 0.25) = (W_{4,13} = 0.25) = (W_{5,9} = 0.25) > (W_{3,21} = 0.2) > (P_{3,36} = 0.142) > (P_{1,22} = 0) = (P_{2,25} = 0) = (P_{3,37} = 0) = (W_{1,10} = 0) = (W_{2,16} = 0) = (W_{3,20} = 0) = (W_{4,12} = 0) = (W_{5,8} = 0) \quad (4.129)$$

Elde ettiğimiz bu sıralamaya göre $(P_{1,21} = 0.5) = (P_{2,24} = 0.5) = (W_{1,12} = 0.5) = (W_{2,18} = 0.5) = (W_{4,14} = 0.5) = (W_{5,10} = 0.5)$ ve $(W_{1,11} = 0.25) = (W_{2,17} = 0.25) = (W_{4,13} = 0.25) = (W_{5,9} = 0.25)$ değerlerinde iki adet düğüm noktası vardır. Bulduğumuz bu düğüm noktaları ile ulaştırma problemimizi yeniden çözersek optimum sonuç aşağıdaki gibi bulunur.

$$f^0 = (21, 24, 33; 12, 18, 23, 14, 10) \quad (4.130)$$

Min $120 x_{1a} + 90 x_{2a} + 40 x_{3a} + 140 x_{1b} + 110 x_{2b} + 60 x_{3b} + 120 x_{1c} + 100 x_{2c}$
 $+ 80 x_{3c} + 40 x_{1d} + 70 x_{2d} + 80 x_{3d} + 50 x_{1e} + 80 x_{2e} + 130 x_{3e}$

SUBJECT TO

$$x_{1a} + x_{2a} + x_{3a} \geq 12$$

$$x_{1b} + x_{2b} + x_{3b} \geq 18$$

$$x_{1c} + x_{2c} + x_{3c} \geq 23$$

$$x_{1d} + x_{2d} + x_{3d} \geq 14$$

$$x_{1e} + x_{2e} + x_{3e} \geq 10$$

$$x_{1a} + x_{1b} + x_{1c} + x_{1d} + x_{1e} \leq 21$$

$$x_{2a} + x_{2b} + x_{2c} + x_{2d} + x_{2e} \leq 24$$

$$x_{3a} + x_{3b} + x_{3c} + x_{3d} + x_{3e} \leq 33$$

(4.131)

END

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 4950.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
x _{1a}	0.000000	90.000000
x _{2a}	0.000000	30.000000
x _{3a}	12.000000	0.000000
x _{1b}	0.000000	90.000000
x _{2b}	0.000000	30.000000

x3b	18.000000	0.000000
x1c	0.000000	50.000000
x2c	20.000000	0.000000
x3c	3.000000	0.000000
x1d	11.000000	0.000000
x2d	3.000000	0.000000
x3d	0.000000	30.000000
x1e	10.000000	0.000000
x2e	0.000000	0.000000
x3e	0.000000	70.000000

ROW SLACK OR SURPLUS DUAL PRICES

2)	0.000000	-60.000000
3)	0.000000	-80.000000
4)	0.000000	-100.000000
5)	0.000000	-70.000000
6)	0.000000	-80.000000
7)	0.000000	30.000000
8)	1.000000	0.000000
9)	0.000000	20.000000

(4.132)

Diğer düğüm noktası ile bir çözüm daha yaparsak aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

$$f^d = (20, 23, 33; 11, 17, 23, 13, 9) \quad (4.133)$$

$$\text{Min } 120 x_{1a} + 90 x_{2a} + 40 x_{3a} + 140 x_{1b} + 110 x_{2b} + 60 x_{3b} + 120 x_{1c} + 100 x_{2c} \\ + 80 x_{3c} + 40 x_{1d} + 70 x_{2d} + 80 x_{3d} + 50 x_{1e} + 80 x_{2e} + 130 x_{3e}$$

SUBJECT TO

$$x_{1a} + x_{2a} + x_{3a} \geq 11$$

$$x_{1b} + x_{2b} + x_{3b} \geq 17$$

$$x_{1c} + x_{2c} + x_{3c} \geq 23$$

$$x_{1d} + x_{2d} + x_{3d} \geq 13$$

$$x_{1e} + x_{2e} + x_{3e} \geq 9$$

$$x_{1a} + x_{1b} + x_{1c} + x_{1d} + x_{1e} \leq 20$$

$$x_{2a} + x_{2b} + x_{2c} + x_{2d} + x_{2e} \leq 23$$

$$x_{3a} + x_{3b} + x_{3c} + x_{3d} + x_{3e} \leq 33 \quad (4.134)$$

END

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 4690.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
x _{1a}	0.000000	90.000000
x _{2a}	0.000000	30.000000
x _{3a}	11.000000	0.000000
x _{1b}	0.000000	90.000000

x2b	0.000000	30.000000
x3b	17.000000	0.000000
x1c	0.000000	50.000000
x2c	18.000000	0.000000
x3c	5.000000	0.000000
x1d	11.000000	0.000000
x2d	2.000000	0.000000
x3d	0.000000	30.000000
x1e	9.000000	0.000000
x2e	0.000000	0.000000
x3e	0.000000	70.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
-----	------------------	-------------

2)	0.000000	-60.000000
3)	0.000000	-80.000000
4)	0.000000	-100.000000
5)	0.000000	-70.000000
6)	0.000000	-80.000000
7)	0.000000	30.000000
8)	3.000000	0.000000
9)	0.000000	20.000000

(4.135)

Elde ettiğimiz iki adet düğüm noktası ile çözülen ulaştırma problemimiz için en iyi çözümü $f^0 = (21, 24, 33; 12, 18, 23, 14, 10)$ ulaştırma planı sunmaktadır. Buna göre ulaştırma matrisi ve toplam ulaştırma maliyeti aşağıda görülmektedir.

Çizelge 4.3 Tamsayıli bulanık ulaştırma problemi için ulaştırma matrisi

	A	B	C	D	E
1	0	0	0	11	10
2	0	0	20	3	0
3	12	18	3	0	0

$$C_{opt} = 4950 \text{ br.}$$

(4.136)

olarak bulunur.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Yapılan çalışmada uygulamaya teşkil eden temel kavramlar ve modeller, çalışmanın ilk üç bölümünde ayrıntılı olarak irdelenmiş ve daha sonra bulanık ulaştırma modeli ele alınarak, bulanık ulaştırma problemleri üzerinde kapasite ve talep değerleriyle, maliyet değerinin bulanık olması durumları incelenmiştir. Gerçek hayat problemleri tamsayılı çözümler istediğinden bulanık kapasite ve talep değerlerine sahip ve amaç fonksiyonu kısıtlı tamsayılı bulanık optimizasyon problemleri üzerinde durulmuştur.

Kavramsal ve teorik incelemeden sonra, konunun pratiğe dökülmesine ilişkin olarak yapılan uygulama çalışmasında İç Anadolu bölgesinde faaliyet gösteren bir tekstil firmasının, üç atölyeden beş bölge bayisine bulanık talep ve kapasite verileri ile dağıtım yapılmıştır. Yapılan uygulamada bulanık ulaştırma problemlerinden tamsayılı bulanık ulaştırma problemi göz önüne alınmıştır.

Uygulamanın sonunda ulaştırma problemlerinde talep ve kapasite verilerinin bulanık olmasıyla, dağıtımın, tez içerisinde anlatılan tamsayılı bulanık ulaştırma metoduyla çözüme ulaşabileceği açık şekilde görülmektedir. Burada güç olan nokta, bulanık verilerin oluşturulmasında belirli bir yöntemin olmaması ve genellikle en uygun değerlerin geçmiş verilerden hareketle bulunmasıdır.

Bugüne kadar devam eden çalışmaların daha yoğun bir şekilde kendisini göstereceği ve bulanık mantığın uygulama alanının genişleyeceği bir gerçektir. Ancak çalışmaların belli bir disiplin içerisine oturtulması ve özellikle bulanık değerlerin oluşturulması konularına ağırlık veren çalışmaların hız kazanması konunun güvenilirlik kazanması açısından önem taşımaktadır.

KAYNAKLAR

1. Başbuğ, A., 1994, Bulanık Teknoloji, Byte Türkiye Dergisi, s.147.
2. Zadeh, L. A., 1987, Fuzzy Sets and Applications, Selected Papers, A. Wiley Interscience Publication, New York, s. 56.
3. Kaynak, M. O., 1992, Armağan, G. Süreç Denetiminde Yeni Bir Yaklaşım Bulanık Mantık, Otomasyon Dergisi, s. 74.
4. Tekin, N., Karanfil, 1995, S. Fuzzy Logic (Bulanık Mantık), Öneri, Marmara Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, s. 14.
5. Aytaç, M., Sevüktekin, M., Işığışok, E., 1995, Sosyal Bilimlerde Matematik 1, Nesil Matbaacılık, s. 47.
6. Klir, G. J.,Yuan, B., 1995, Fuzzy Sets and Logic, Theory and Applications, Prentice-Hall, s. 5-34.
7. Etener, Ş., 1993, Bulanık Kontrol, Otomasyon Dergisi, s. 107.
8. Kaufmann, A., Gupta, M. M., 1991, Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science, Elsevier Science Publishers, New York, s. 9-35.
9. Bart, K., 1993, Fuzzy Thinking: The new science of Fuzzy Logic, New York, s. 95.
10. Evans, G. W., Karwowski, W., Wilhelm, M. R., 1989, Applications of Fuzzs Sets Methodologies in Industrial Engineering, Elsevier, s. 3-6.
11. Klir, G. J., Folger, T. A., 1988, Fuzzy Sets, Uncertainty and Information, Prentice-Hall, s. 16.
12. Kandel, A., 1986, Fuzzy Mathematical Techniques with Applications, Addison Wesley Comp., s. 1-13.
13. Lai, Y., Hwang, C., 1992, Fuzzy Mathematical Programming, Methods and Applications, Springer-Verlag, Germany, s. 301.
15. Kaufmann, A., Gupta, M. M., 1991, Introduction to Fuzzy Arithmetic, Theory and Application, Van Nostrand Reinhold, New York, s. 3-26.
16. Mamdani, E. H., Gaines, B. R., 1981, Fuzzy Reasoning and Its Applications, Akademik Press, New York, s. 55.
17. Jang, J-S. R., Sun, C-T., Mizutani, E., 1997, Neuro-Fuzzy and Soft Computing, Prentice Hall, s. 50-53.

18. Zimmermann, H-J., 1994, Fuzzy Set Theory and Its Applications, **Kluwer Academic Publishers**, Boston, s. 69-86.
19. Zimmermann, H-J., 1987, Fuzzy Sets, Decision Making and Expert Systems, **Kluwer Academic Publishers**, Boston, s. 32-44.
20. Hamdy, A. T., 1987, Operations Research, **Macmillan Publishing Company**, New York, s. 171-203.
21. Winston, W. L., 1993, Operations Research Applications and Algorithms, **International Thomson Publishing**, California, s. 338-351.
22. Bit, A. K., Biswal, M. P., Alam, S. S., 1992, Fuzzy Programming Approach to Multicriteria Decision Making Transportation Problem, **Fuzzy Sets and Systems**, 50, North Holland, s. 135-141.
23. Kacprzyk, J., Orlovski, S. A., 1987, Optimization Models Using Fuzzy Sets and Possibility Theory, **Kluwer Academic Publishers**, Boston, s. 342-358.
24. Chanas, S., Kuchta, D., 1998, Fuzzy Integer Transportation Problem, **Fuzzy Sets and Systems**, 98, North Holland, s. 291-298.
25. Tada, M., Ishii, H., 1996, An Integer Fuzzy Transportation Problem, **Computer Math. Applic.**, Vol.31, No.9, Great Britain, s. 71-87.
26. Chanas, S., Kolodziejczyk, W., Machaj, A., 1984, A Fuzzy Approach to the Transportation Problem, **Fuzzy Sets and Systems**, 13, North Holland, s. 211-221.
27. Waiel, F., Abd El-Wahed, 2001, A multi-objective transportation problem under fuzziness, **Fuzzy Sets and Systems**, 117, North Holland, s. 27-33.
28. Teodorovic, Dusan, 1999, Fuzzy logic systems for transportation engineering: the state of the art, **Transportation Research**, Part A, 33, s. 337-364.

ÖZGEÇMİŞ

Mustafa Yılmaz, 1973 yılında Sivas'ta doğdu. İlk öğrenimini Sivas Namık Kemal İlkokulu'nda tamamladı. Ortaokul ve lise öğrenimini Sivas Selçuk Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 1992 yılında başladığı lisans öğrenimini 1998 yılında Selçuk Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Endüstri Mühendisliği Bölümü'nde tamamladı. 2000 yılında Atatürk Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Endüstri Mühendisliği Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. Aynı yıl 35. maddeye göre Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisans ve doktora eğitimi için görevlendirildi. Halen Gazi Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Endüstri Mühendisliği Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.

