
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN SAYISAL VE YAKLAŞIK YÖNTEMLER

Onur GÖRGÜLÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2017

Onur GÖRGÜLÜ tarafından hazırlanan ”KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN SAYISAL VE YAKLAŞIK YÖNTEMLER” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Fatma AYAZ

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum ...……

Başkan : Doç. Dr. Fahd JARAD

Matematik Anabilim Dalı, Çankaya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum ……...

Üye : Yrd. Doç. Dr. Aytekin B.ÇIBIK

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum ……...

Tez Savunma Tarihi: 12/01/2017

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

……..……

Prof. Dr. Hadi GÖKÇEN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Onur GÖRGÜLÜ

12/01/2017

KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN
SAYISAL VE YAKLAŞIK YÖNTEMLER
(Yüksek Lisans Tezi)

Onur GÖRGÜLÜ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ocak 2017

ÖZET

Bu çalışmada, öncelikle bazı özel tipte kesirli mertebeden diferensiyel denklemlerin çözümleri Laplace ve Seri Yöntemi ile incelenmiştir. Ayrıca [3] numaralı kaynakta bahsedilen ve kesirli mertebeden benzer tipteki diferensiyel denklemlere uygulanan sayısal çözüm yöntemi araştırılmıştır. Bu çözüm yöntemini kullanarak farklı formdaki kesirli mertebeden diferensiyel denklemlerin nümerik çözümleri de elde edilmiştir.

Bilim Kodu : 20406
Anahtar Kelimeler : Grünwald-Letnikov, Reimann-Liouville, Caputo, Laplace, Kesirli Seri, Yaklaşım Yöntemi, İntegral Quadrature Metodu
Sayfa Adedi : 61
Danışman : Prof. Dr. Fatma AYAZ

NUMERICAL AND APPROXIMATE METHODS FOR FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

(M. Sc. Thesis)

Onur GÖRGÜLÜ

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2017

ABSTRACT

In this study, first of all, solutions of some particular types of fractional order differential equations have been investigated by Laplace and Series Method. Moreover, the numerical technique which is mentioned in [3] has been studied for similar types of differential equations. By using this numerical technique, different form of fractional order equations has also been solved.

Science Code : 20406

Key Words : Grünwald-Letnikov, Reimann-Liouville, Caputo, Laplace, Fractional Series, The Approximation Method, Integral Quadrature Method

Page Number : 61

Supervisor : Prof. Dr. Fatma AYAZ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans yaptığım süre boyunca bilgi ve birikimlerini benden esirgemeyen, çalışmamda görüş ve önerileriyle beni yönlendiren ve her konuda bana yardımcı olan sayın hocam Prof. Dr. Fatma AYAZ'a, çalışmalarım sırasında bana desteklerini esirgemeyen aileme ve çalışmam boyunca bana anlayış gösteren ve her zaman destek olan sevgili eşim Şenay GÖRGÜLÜ'ye teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

ÇİZELGELERİN LİSTESİ ix

ŞEKİLLERİN LİSTESİ x

SİMGELER VE KISALTMALAR xi

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL KAVRAMLAR VE KESİRLİ MERTEBEDEN TÜREV VE İNTEGRALLER 3

2.1. Gamma Fonksiyonu 3

2.2. Beta Fonksiyonu 3

2.3. Grünwald-Letnikov Kesirli Türev ve İntegrali 5

2.4. Reimann-Liouville Kesirli Türev ve İntegrali 7

2.5. Caputo Kesirli Türevi 11

3. KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ 15

3.1. Kesirli İntegrallerin ve Türevlerin Laplace Dönüşümleri 15

3.1.1. Laplace dönüşümü ile kesirli diferensiyel denklem çözümü 19

3.2. Kesirli Kuvvet Serisi ile Kesirli Mertebeden Diferensiyel Denklemin Çözümü 22

3.2.1. Kuvvet serisi yaklaşımı 22

4. NÜMERİK ÇÖZÜM 27

4.1. Giriş ve Temel Bulgular 27

4.1.1. Diferensiyel denklemler 27

Sayfa

4.1.2. Yaklaşım tekniği 28

4.1.3. Nümerik çözümler ve karşılaştırmalar 34

5. AYNI ZAMANDA KESİRLİ MERTEBEDEN TÜREV VE TAM SAYI MERTEBEDEN TÜREV İÇEREN BELİRLİ TİPTE DİFERENSİYEL DENKLEMLER 45

5.1. Birinci Mertebeden Türev İçeren Kesirli Diferensiyel Denklemin Çözümü 45

5.2. İkinci Mertebeden Türev İçeren Kesirli Diferensiyel Denklemin Çözümü 49

6. SONUÇ VE ÖNERİLER 57

KAYNAKLAR 59

ÖZGEÇMİŞ 61

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

Çizelge 4.1. Örnek 4.1'deki problem için, $q = 1/2$ türevi, $h = 0,1$, $h = 0,01$, $h = 0,001$ farklı adım aralıklarının sonuca etkisinin incelenmesi . . . 38

Çizelge 4.2. Örnek 4.1'deki problem için, $h = 0,1$ adım aralığında $q = 0,25$, $q = 0,5$, $q = 0,75$ farklı kesirli türev değerlerinin çözüme etkisinin incelenmesi 39

Çizelge 4.3. Örnek 4.1'deki problem için, $h = 0,01$ adım aralığında $q = 0,25$, $q = 0,5$, $q = 0,75$ farklı kesirli türev değerlerinin çözüme etkisinin incelenmesi 40

Çizelge 4.4. Örnek 4.2'deki problem için, $q = 1/2$ türevi, $h = 0,1$, $h = 0,01$, $h = 0,001$ farklı adım aralıklarının sonuca etkisinin incelenmesi . . . 41

Çizelge 4.5. Örnek 4.3'deki problem için, $h = 0,01$ adım aralığı ve $q = 0,25$, $q = 0,5$, $q = 0,75$ ve $q = 1$ farklı türev mertebelerinin çözüme etkisinin incelenmesi 43

Çizelge 5.1. Örnek 5.1'deki problem için, $q = 1/2$ kesirli mertebeden ve birinci mertebeden türev içeren diferensiyel denklemin, $h = 0,01$ ve $h = 0,001$ farklı adım aralıkları için sonuca etkisinin incelenmesi 47

Çizelge 5.2. Örnek 5.2'deki problem için, $q = 1/2$ kesirli mertebeden ve birinci mertebeden türev içeren diferensiyel denklemin $h = 0,01$ ve $h = 0,001$ farklı adım aralıkları için sonuca etkisinin incelenmesi 49

Çizelge 5.3. Örnek 5.3'deki problem için, $q = 1/2$ kesirli mertebeden ve ikinci mertebeden türev içeren diferensiyel denklemin , $h = 0,001$ ve $h = 0,0001$ farklı adım aralıklarının sonuca etkisinin incelenmesi 51

Çizelge 5.4. Örnek 5.4'deki problem için, $q = 1/2$ kesirli mertebeden ve ikinci mertebeden türev içeren diferensiyel denklemin, $h = 0,01$ ve $h = 0,001$ farklı adım aralıklarının sonuca etkisinin incelenmesi 52

Çizelge 5.5. Örnek 5.5'deki problem için, kesirli mertebeden ve ikinci mertebeden türev içeren diferensiyel denklemin $h = 0,01$ adım aralığında $q = 0,25$, $q = 0,50$, $q = 0,75$, $q = 0,98$, $q = 0,99$ ve $q = 1$ farklı kesirli türev değerlerinin çözüme etkisinin incelenmesi 54

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

Şekil 4.1. Örnek 4.1'deki problem için, $q = 1/2$ türevi $h = 0,1$, $h = 0,01$, $h = 0,001$ adım aralıkları için sonuçların karşılaştırılması 39

Şekil 4.2. Örnek 4.3'deki problem için, $h = 0,01$ adım aralığı ve $q = 0,25$, $q = 0,5$, $q = 0,75$ ve $q = 1$ farklı türev mertebeleri için çözüme etkisinin karşılaştırılması 43

Şekil 5.1. Örnek 5.1'deki problem için, $q = 1/2$ kesirli mertebeden ve birinci mertebeden türev içeren diferensiyel denklemin, $h = 0,01$ ve $h = 0,001$ farklı adım aralıkları için sonuçların karşılaştırılması 48

Şekil 5.2. Örnek 5.4'deki problem için, $q = 1/2$ kesirli mertebeden ve ikinci mertebeden türev içeren diferensiyel denklemin, $h = 0,01$ ve $h = 0,001$ farklı adım aralıkları için sonuçların karşılaştırılması 52

Şekil 5.3. Örnek 5.5'deki problem için, kesirli mertebeden ve ikinci mertebeden türev içeren diferensiyel denklemin $h = 0,01$ adım aralığında $q = 0,25$, $q = 0,50$, $q = 0,75$, $q = 0,98$, $q = 0,99$ ve $q = 1$ farklı kesirli türev değerlerinin çözüme etkisinin karşılaştırılması 55

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{\Gamma}$	Gamma fonksiyonu
$\boldsymbol{B(x,y)}$	Beta fonksiyonu
$\boldsymbol{f^{(n)}}$	f fonksiyonunun n. mertebeden türevi
${}_a\boldsymbol{D_t^p}$	f fonksiyonunun p. mertebeden kesirli türevi $(p>0)$
${}_a\boldsymbol{D_t^{-p}f}$	f fonksiyonunun p. mertebeden kesirli integrali $(p>0)$
$\boldsymbol{Erf}$	Hata fonksiyonu
$\mathscr{L}$	Laplace dönüşümü
$\mathscr{L}^{-1}$	Ters Laplace dönüşümü
$\sum$	Toplam
$\binom{n}{r}$	Binom açılımı

1. GİRİŞ

Türev ve integral matematiğin temel kavramları olup, uygulama alanlarının çok geniş olduğu yadsınamaz bir gerçektir. L'Hospital'ın bilinen türevin dışında $\frac{d^{1/2}y}{dx^{1/2}}$ nin anlamının ne olacağı sorusu ile kesirli analiz ilk olarak ortaya atılmıştır. Kesirli türev ve integrallerin tanımlanması; kesirli türev içeren diferensiyel denklemlerin çözülmesini ve çözüm yöntemlerinin günümüze kadar gelişmesini sağlamıştır. Kesirli analizin; matematik, fen ve mühendisliğin sıvı akışı, reoloji, difüzyon, gevşeme, salınım, elektrikli reaksiyon difüzyon, türbülans, polimer fizik, kimyasal fizik, korozyon elektrokimya, karmaşık sistemlerde gevşeme süreçleri, sismik dalgaların yayılımı gibi birçok uygulamaları vardır. 18. yüzyıl boyunca Fourier(1822), Abel(1823-1826), Liouville(1822-1837) ve Reimann(1847) gibi birçok matematikçi kesirli analizin gelişimine katkı sağlamıştır. Kesirli diferensiyel denklemlerin çıkışı L'Hospital'ın Leibnitz'e yazdığı mektubundaki $n = \frac{1}{2}$ ise $\frac{d^n y}{dx^n}$ in anlamının ne olacağı sorusuydu. Leibnitz'in 30 Eylül 1695'te verdiği "$d^{1/2}x$ in $x\sqrt{dx/x}$'e eşit olacaktır ve bu paradoks bir gün yararlı sonuçlar verecektir." cevabı ile $d^{1/2}x$ anlam kazanmıştır. Leibniz 28 Mayıs 1967 tarihinde Wallis'e başka bir mektup yazmıştır. Bu mektupta J. Wallis'in π için sonsuz çarpımını tartışmış, diferensiyel hesabından bahsetmiş ve $\frac{1}{2}$. mertebeden türevi ifade etmek için $d^{\frac{1}{2}}y$ notasyonunu kullanmıştır. Lacroix (1819) ise,

$$\frac{d^m}{dx^m}x^n = \frac{n!}{(n-m)!}x^{n-m}, n \in N = 1, 2, 3, ...; m \in N_0 = N \cup 0; n \geq m. \tag{1.1}$$

tanımını vermiştir. Bu denklem gamma fonksiyon formuyla $n! = \Gamma(n+1)$ ve $(n-m)! = \Gamma(n-m-1)$ yazılırsa

$$\frac{d^m}{dx^m}x^n = \frac{\Gamma(n+1)!}{\Gamma(n-m+1)}x^{n-m} \tag{1.2}$$

olur ve $m = \frac{1}{2}$, $n = 1$ alınırsa ,

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \tag{1.3}$$

olarak tanımlanır [11].

Kesirli mertebeden diferensiyel denklemlerin çözülebilmesi için kesirli türev ve integrallerin tanımları iyi bilinmelidir. Bu hesaplamalar Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo gibi kesirli türev veya integral tanımlarıyla analitik veya nümerik olarak hesaplanabilmektedir.

Bu tezde ilk bölümde kesirli türev ve integral ile ilgili genel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde kesirli diferensiyel denklemlerin çözülübilmesi için temel kavramlar, Grünwald-Letnikov, Caputo, Reimann-Liouville kesirli türev ve integral tanımları verilmiştir. Üçüncü bölümde kesirli mertebeden diferensiyel denklemlerin Laplace ve Seri yöntemleriyle çözümleri ve dördüncü bölümde de [3] kaynağında bahsi geçen yaklaşım yöntemiyle kesirli mertebeden türev içeren belirli tipte diferensiyel denklemlerin çözümüne yer verilmiştir. Aynı bölümde ayrıca farklı türev değerleri ve adım aralıkları için diferensiyel denklemlerin çözümleri Laplace ve Kesirli seri yöntemiyle bulunup yaklaşım yöntemiyle elde edilen çözümleri karşılaştırılmıştır. Beşinci bölümde ise kesirli mertebeden türev ile birlikte birinci veya ikinci mertebeden türev içeren belirli tipte diferensiyel denklemlerin çözümü araştırılmıştır. Ayrıca bu bölümde, nümerik çözümleri elde edilen kesirli denklemlerin kesirli olmayan benzerleriyle çözümleri karşılaştırılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE KESİRLİ MERTEBEDEN TÜREV VE İNTEGRALLER

2.1. Gamma Fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanan integrale Gamma Fonksiyonu denir. Gamma fonksiyonunun bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = -e^{-t} t^z \Big|_0^\infty + z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z) \tag{2.2}$$

elde edilir. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ özelliğinde $z = 1, 2, 3, ...$ olarak alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1! \\
&\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1! = 2! \\
&\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2! = 3! \\
&\ldots \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
&\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!
\end{aligned} \tag{2.3}$$

elde edilir.

2.2. Beta Fonksiyonu

Beta fonksiyonunun tanımı,

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt, \qquad (Re(z) > 0, \qquad Re(w) > 0) \tag{2.4}$$

şeklindedir. Beta fonksiyonunu Gamma fonksiyonu şeklinde ifade edilirse,

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \tag{2.5}$$

yazılır. Eş. 2.5'deki Beta fonksiyonunun gamma fonksiyonu tanımıyla $B(z,w) = B(w,z)$ olduğu açıktır.

$B(z,z)$ beta fonkisyonunu ise,

$$B(z,z) = 2^{1-2z}B(z,\frac{1}{2}) \tag{2.6}$$

ile tanımlıdır. Beta fonksiyonu yardımıyla Gamma fonksiyonunun iki önemli özelliği aşağıda verilmiştir.

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sin(\pi z)} \tag{2.7}$$

ve

$$\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}2^{2z-1}\Gamma(2z) \qquad (2z \neq 0,-1,-2,...). \tag{2.8}$$

Örnek 2.1.

$\Gamma(\frac{1}{2})$ ve $\Gamma(\frac{1}{2}+n)$ nin sonucunu bulalım.

Eş. 2.7 yardımıyla,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sin(\pi z)} \tag{2.9}$$

denkleminde özel olarak $z = 1/2$ olarak alınırsa,

$$\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{sin(\frac{\pi}{2})} = \pi \tag{2.10}$$

elde edilir. Buradan $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ olarak bulunur. Benzer şekilde Eş. 2.8 de $z = n + \frac{1}{2}$ olarak alınırsa,

$$\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(n+1) = \sqrt{\pi}2^{-2n}\Gamma(2n+1) \tag{2.11}$$

olur. Buradan, $\Gamma(n+\frac{1}{2})$ düzenlenirse,

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1)2^{2n}} = \frac{\sqrt{\pi}2n!}{n!2^{2n}} \tag{2.12}$$

elde edilir [14].

2.3. Grünwald-Letnikov Kesirli Türev ve İntegrali

Grünwald türevi Gamma Fonksiyonu tanımından yaralanarak hesaplamıştır. Herhangi bir $f(t)$ fonksiyonunun birinci türevi,

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \tag{2.13}$$

şeklindedir. Buradan ikinci türevi,

$$\begin{aligned} f''(t) = \frac{d^2 f}{dt^2} &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \end{aligned} \tag{2.14}$$

olarak bulunur. Benzer biçimde üçüncü mertebeden türevi,

$$f'''(t) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3} \tag{2.15}$$

olur. Bu ifadeyi genelleştirilirse,

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} f(t - rh) \tag{2.16}$$

olur. Burada,

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!} \tag{2.17}$$

binom katsayılarıdır. Eş. 2.13-2.16 genelleştirilirse,

$$f_h^{(p)}(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p}{r} f(t - rh) \tag{2.18}$$

elde edilir. Benzer şekilde p nin negatif olması durumunda

$$\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = \frac{p(p+1)...(p+r-1)}{r!} \tag{2.19}$$

olur. Buradan,

$$\binom{-p}{r} = \frac{-p(-p-1)(-p-2)...(-p-r+1)}{r!} = (-1)^r \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

olur. Bu açılımı Eş. 2.18'da yerine yazıp $-p$ için düzenlersek,

$$f_h^{(-p)}(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) \tag{2.21}$$

elde edilir. $h = \frac{t-a}{n}$ alırsak $n \longrightarrow \infty$ için $h \longrightarrow 0$ olur.

$$\lim_{\substack{h \longrightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{-p}(t) =_a D_t^{-p} f(t) \tag{2.22}$$

olarak alınırsa,

$${}_aD_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h \longrightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \tag{2.23}$$

elde edilir. Eş. 2.18 ve Eş. 2.23 birleştirilirse,

$${}_aD_t^{p} f(t) = \lim_{\substack{h \longrightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) \tag{2.24}$$

yazılabilir. Burada p nin pozitif değerleri türevi, negatif değerleri ise integral göstermektedir. Burada,

$${}_aD_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \tag{2.25}$$

Grünwald-Letnikov kesirli integralini,

$${}_aD_t^{p} f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \tag{2.26}$$

ise f sürekli bir fonksiyon ve $f^{(k)}(t)(k = 1, 2, ..., m+1)$ türevleri de $[a, t]$ aralığında sürekli, $m > p-1$ olmak üzere $m < p < m+1$ şartını sağlayan f fonksiyonunun p. mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türevin tanımını vermektedir [14]. Başka bir

gösterim ise;

$$\frac{d^q f(t)}{[d(t-a)]^q} \equiv \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{(\frac{t-a}{n})^{-q}}{\Gamma(-q)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(k+1)} f\Big(t-k\Big[\frac{t-a}{n}\Big]\Big) \tag{2.27}$$

şeklindedir. Eş. 2.27 denkleminde de q nun negatif değerleri kesirli integrali, pozitif değerleri kesirli türevi verir [2].
Örnek olarak $f(t) = (t-a)^v$ fonksiyonunun p inci mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türevi Eş. 2.23 denkleminde $-p$ yazılırsa ,

$${}_aD_t^p(t-a)^v = \frac{1}{\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1}(\tau-a)^v d\tau \tag{2.28}$$

olarak elde edilir. Burada $\tau = a+\xi(t-a)$ dönüşümü yapılırsa Beta Fonksiyonu yardımıyla,

$$\begin{aligned} {}_aD_t^p(t-a)^v &= \frac{1}{\Gamma(-q)}(t-a)^{v-p} \int_0^1 \xi^v(1-\xi)^{-p-1} d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(-q)} B(-p, v+1)(t-a)^{v-p} \\ &= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-p+1)}(t-a)^{v-p}, \quad (p<0, \quad v>-1) \end{aligned} \tag{2.29}$$

bulunur.

2.4. Reimann-Liouville Kesirli Türev ve İntegrali

$\alpha > 0, t > a, \alpha, a, t \in \Re$ ve $n-1 < \alpha < n \in N$ için,

$${}_aD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \Big(\frac{d}{dt}\Big)^n \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau \tag{2.30}$$

Reimann-Liouville Kesirli türevin tanımıdır [15].

Reimann-Liouville kesirli integralin tanımı ise, $t > 0$ için $v > 0$ olmak üzere f fonsiyonu $(0, \infty)$ de parçalı sürekli ve $[0, \infty)$ de integrallenebilir olmak üzere,

$${}_0D_t^{-v} f(t) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^t (t-\xi)^{v-1} f(\xi) d\xi \tag{2.31}$$

şeklindedir.

2.1. Teorem

f sürekli bir fonksiyon ve $v > 0$ olmak üzere, kesirli integrallerin türevi ve türevli fonksiyonun kesirli integrali sırasıyla,

$$D^{-v-1}[Df(t)] = D^{-v}f(t) - \frac{f(0)}{\Gamma(v+1)}t^v \tag{2.32}$$

ve

$$D[D^{-v}f(t)] = D^{-v}[Df(t)] + \frac{f(0)}{\Gamma(v)}t^{v-1}, \qquad t > 0 \tag{2.33}$$

olarak yazılır.

$\mu > 0$ ve $v = m - \mu > 0$ olmak üzere,

$$D^{\mu}f(t) = D^{m}[D^{-v}f(t)], \qquad \mu > 0, \qquad t > 0 \tag{2.34}$$

eşitliği sağlanır.

Örnek 2.2

$f(t) = (t-a)^v$ fonksiyonunun α. mertebeden kesirli türevini bulalım. Türev tanımından,

$${}_aD_t^p f(t) = \frac{d^n}{dt^n}({}_aD_t^{-(n-p)})f(t)) \tag{2.35}$$

yazılır. $n-1 \leq p < n$ olmak üzere $\alpha = n - p$ olsun. Eş. 2.29'e benzer şekilde çözersek,

$${}_aD_t^{-\alpha}(t-a)^v = \frac{\Gamma(1+v)}{\Gamma(1+v+\alpha)}(t-a)^{v+\alpha} \tag{2.36}$$

dir. Buradan,

$${}_aD_t^{p}(t-a)^v = \frac{\Gamma(1+v)}{\Gamma(1+v-p)}(t-a)^{v-p} \tag{2.37}$$

buluruz. Özel olarak $a = 0$ için t^v fonksiyonunun türevi

$$ {}_0D_t^p t^v = \frac{\Gamma(1+v)}{\Gamma(1+v-p)} t^{v-p} \tag{2.38} $$

olarak bulunur.

Örnek 2.3

$f(t) = t$ olmak üzere $D_t^{-\frac{1}{2}} f(t)$ ve $D_t^{\frac{1}{2}} f(t)$ integral ve türevini Reimann-Liouville tanımından yaralanarak Eş. 2.31'den,

$$ \begin{aligned} {}_0D_t^{-\frac{1}{2}} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t (t-\xi)^{-\frac{1}{2}} \xi d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t t u^{-\frac{1}{2}} - u^{\frac{1}{2}} du, \qquad (t-\xi = u \qquad , -d\xi = du) \\ &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} t^{3/2} \end{aligned} \tag{2.39} $$

bulunur. Benzer şekilde Eş. 2.30'den,

$$ {}_0D_t^{\frac{1}{2}} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{t}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} \tag{2.40} $$

elde edilir. Ayrıca Eş. 2.38'den de aynı sonuç aşağıda bulunmuştur.

$$ {}_0D_t^{\frac{1}{2}} t = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1+1-\frac{1}{2})} t^{1-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} t^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} \tag{2.41} $$

olduğunu görürüz.

Aşağıda ilerleyen bölümlerde kullanacağımız kesirli integrallerlerle ilgili bazı örneklere yer verilmiştir.

Örnek 2.4

$f(t) = e^{at}$ olmak üzere,

$$D^{-v}e^{at} = \frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^t (t-\xi)^{v-1}e^{a\xi}d\xi, \qquad v > 0 \tag{2.42}$$

olmak üzere $x = t - \xi$ dönüşümü yaparsak,

$$D^{-v}e^{at} = \frac{e^{at}}{\Gamma(v)}\int_0^t x^{v-1}e^{-ax}dx, \qquad v > 0 \tag{2.43}$$

olur ve $\gamma^*(v,t)$ ile gösterilen tam olmayan (incomplete) gamma fonksiyonunu aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\gamma^*(v,t) = \frac{1}{\Gamma(v)t^v}\int_0^t \xi^{v-1}e^{-\xi}d\xi \tag{2.44}$$

Bu ifade Eş. 2.43 denkleminde yerine yazılırsa,

$$D^{-v}e^{at} = t^v e^{at}\gamma^*(v,at) \tag{2.45}$$

bulunur.

$$E_t(v,a) = t^v e^{at}\gamma^*(v,at). \tag{2.46}$$

olsun. Bu çalışmada $E_t(v,a)$ fonksiyonu,

$$E_t(v,a) = D^{-v}e^{at} \tag{2.47}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Özel olalrak $v = \frac{1}{2}$ için,

$$\begin{aligned} D^{-1/2}e^{at} &= E_t(1/2,a) \\ &= a^{-1/2}e^{at}Erf(at)^{1/2} \end{aligned} \tag{2.48}$$

olur. Burada $Erf(x)$ fonksiyonu,

$$Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \tag{2.49}$$

şeklinde tanımlanan hata fonksiyonudur [12].

2.5. Caputo Kesirli Türevi

Kesirli diferensiyel denklemlerde başlangıç koşullarını içeren kesirli mertebeden diferensiyel denklemlerin çözümü için Reimann-Liouville kesirli türev denklemi yerine Caputo kesirli türev tanımı daha kullanışlıdır. Caputo bu tanımı ilk kez 1967 yılında "Linear model of dissipation whose q is almost frequency independent" isimli makalesinde yayınlamıştır. Daha sonra Elasticità e Dissipazione kitabında yer vermiştir. Caputo kesirli türev tanımı,

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}, \qquad (n-1) < \alpha < n \tag{2.50}$$

şeklindedir. $f(t)$ fonksiyonunun $\alpha \longrightarrow n$ için Caputo kesirli türevi n'nci mertebeden türevi vermektedir. $0 \leq n-1 < \alpha < n$ aralığında ise aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \longrightarrow n} \quad {}_a^C D_t^\alpha f(t) \quad &= \quad \lim_{\alpha \longrightarrow n} \left(\frac{f^{(n)}(t-a)^{n-a}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \right) \\ &+ \quad \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(\tau) d\tau \\ &= \quad f^n(a) + \int_a^t f^{(n+1)}(\tau) d\tau = f^{(n)}(t), \qquad n = 1, 2, .. \end{aligned} \tag{2.51}$$

verir. Caputo yaklaşımının avantajı, Caputo kesirli türevi ile çözülen kesirli diferensiyel denklemin başlangıç koşullarının tamsayı mertebeden diferensiyel denklemin başlangıç koşullarıyla aynı formda olmasıdır [14].

Örnek 2.5

$f(t) = t$ fonksiyonunun 1/2. mertebeden türevini Caputo türev tanımından bulalım. Eş. 2.50 denkleminden $a = 0$, $\alpha = 1/2$, $n = 1$, $f(t) = t$ değerlerini yerine yazılırsa,

$${}^C D^{1/2} t = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau \tag{2.52}$$

olur. $u = (t-\tau)^{1/2}$ dönüşümü yardımıyla,

$$
\begin{aligned}
{}^{C}D^{1/2}t &= \frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}d\tau \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} \frac{2u}{u}du \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{t}-0) \\
&= \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \qquad (2.53)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

Genelleştirilirse, $f(t) = t^p$ fonksiyonunun α. mertebeden türevi Caputo türevinden,

$$
\begin{aligned}
{}^{C}D^{\alpha}t^p &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t \frac{(\tau^p)^{(n)}}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)}(\tau^{p-n})(t-\tau)^{n-\alpha-1}d\tau \qquad (2.54)
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılır.

Burada $\tau = \lambda t$ dönüşümü yapılırsa $0 \leq \lambda \leq 1$ için,

$$
\begin{aligned}
{}^{C}D^{\alpha}t^p &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)}\int_0^1 (\lambda t)^{p-n}((1-\lambda)t)^{n-\alpha-1}td\tau \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)}t^{p-\alpha}\int_0^1 \lambda^{p-n}(1-\lambda)^{n-\alpha-1}d\tau \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)}t^{p-\alpha}B(p-n+1,n-\alpha) \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)}t^{p-\alpha}\frac{\Gamma(p-n+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(p-\alpha+1)} \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)}t^{p-\alpha} \qquad (2.55)
\end{aligned}
$$

bulunur. $f(t) = t$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. mertebeden Caputo türevi Eş. 2.55'den

$$ {}^{C}D^{\frac{1}{2}}t = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-\frac{1}{2}+1)}t^{1-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})}t^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \tag{2.56} $$

olur. Eş. 2.53 ile Eş.2.56'in aynıdır .

3. KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

3.1. Kesirli İntegrallerin ve Türevlerin Laplace Dönüşümleri

f fonksiyonu $[0,+\infty)$ aralığında tanımlı, $0 \leq t \leq a$ arlığında parçalı sürekli ve $t \geq m$ için $|f(t)| \leq \mu e^{\alpha t}$ olmak üzere,

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona f fonksiyonunun Laplace dönüşümü denir. Bu dönüşümün avantajı; dönüşüm fonksiyonu esas fonksiyondan daha kullanışlı ise, yeni fonksiyonun bulunduğu problemin çözülmesinin esas fonksiyonun bulunduğu problemin çözülmesinden daha kolay olmasıdır.

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanan F fonksiyonuna Ters Laplace Dönüşümü denir.

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(t)\} \tag{3.3}$$

şeklinde gösterilir. Bazı fonksiyonların Laplace dönüşümleri aşağıda verilmiştir.

$$\mathscr{L}\{t^{\mu}\} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{s^{\mu+1}}, \quad \mu > -1 \tag{3.4}$$

$$\mathscr{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

$$\mathscr{L}\{t^{\mu-1}e^{at}\} = \frac{\Gamma(\mu)}{(s-a)^{\mu}}, \quad \mu > 0 \tag{3.5}$$

$$\mathscr{L}\{cosat\} = \frac{s}{s^2+a^2} \tag{3.6}$$

$$\mathscr{L}\{sinat\} = \frac{a}{s^2+a^2} \tag{3.7}$$

$F(s)$ ve $G(s)$ sırasıyla f ve g fonksiyonlarının Laplace dönüşümü olmak üzere,

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(t-\xi)g(\xi)d\xi\right\} = F(s)G(s) \tag{3.8}$$

eşitliği vardır. f fonksiyonunun v ye göre kesirli integrali

$$D_t^{-v}f(t) = \frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^t (t-\xi)^{v-1}f(\xi)d\xi, \quad v > 0, \tag{3.9}$$

şeklindedir. Bu denkleminin laplace dönüşümünü Eş. 3.8 yardımıyla

$$\mathscr{L}\{D^{-v}f(t)\} = \frac{1}{\Gamma(v)}\mathscr{L}\{t^{v-1}\}\mathscr{L}\{f(t)\}$$

$$= s^{-v}F(s), \quad v > 0, \tag{3.10}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 3.1

$D^{-v}sinat$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulalım. Eş. 3.10'den,

$$\mathscr{L}\{D^{-v}sinat\} = \frac{1}{\Gamma(v)}\mathscr{L}\{t^{v-1}\}\mathscr{L}\{sinat\} \tag{3.11}$$

elde ederiz. Burada $\mathscr{L}\{t^{v-1}\}$ ve $\mathscr{L}\{sinat\}$ ifadelerinin değerini Eş. 3.4 - Eş. 3.7 yerine yazılırsa,

$$\mathscr{L}\{D^{-v}sinat\} = \frac{1}{\Gamma(v)}\frac{\Gamma(v)}{s^v}\frac{a}{s^2+a^2} \tag{3.12}$$

$$= \frac{a}{s^v(s^2+a^2)}, \quad v > 0 \tag{3.13}$$

elde edilir.

Benzer şekilde,

$$\mathscr{L}\{D^{-v}t^{\mu}\} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{s^{\mu+v+1}}, \quad \mu > -1, \quad v > 0 \tag{3.14}$$

$$\mathscr{L}\{D^{-v}e^{at}\} = \frac{1}{s^{v}(s-a)} \tag{3.15}$$

$$\mathscr{L}\{D^{-v}t^{\mu-1}e^{at}\} = \frac{\Gamma(\mu)}{s^{v}(s-a)^{\mu}}, \quad \mu > 0, \quad v > 0 \tag{3.16}$$

$$\mathscr{L}\{D^{-v}cosat\} = \frac{1}{s^{v-1}(s^2+a^2)} \quad v > 0 \tag{3.17}$$

$$\mathscr{L}\{D^{-v}sinat\} = \frac{a}{s^{v}(s^2+a^2)}, \quad v > 0 \tag{3.18}$$

eşitliklerini yazabiliriz. Özel olarak Eş. 2.47'da gösterildiği gibi,

$$\mathscr{L}\{E_t(v,a)\} = \frac{1}{s^{v}(s-a)} \qquad v > 0 \tag{3.19}$$

bulunur.

Şimdi $\mathscr{L}\{D^{-v}[Df(t)]\}$ ve $\mathscr{L}\{D[D^{-v}f(t)]\}$ ifadelerini Eş. 3.10'den yararlanarak aşağıdaki gibi bulunabilir. Birinci ifade,

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{D^{-v}[Df(t)]\} &= s^{-v}\mathscr{L}\{Df(t)\} \\ &= s^{-v}[sF(s) - f(0)], \qquad v > 0 \end{aligned} \tag{3.20}$$

şeklinde elde edilir. Burada $f(0)$ fonksiyonu mevcut ve $F(s)$, $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü tanımlamaktadır. Teorem 2.1'den yaralanarak ikinci ifade,

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{D[D^{-v}f(t)]\} &= \mathscr{L}\{D^{-v}[Df(t)]\} + f(0)\mathscr{L}\Big\{\frac{t^{v-1}}{\Gamma(v)}\Big\} \\ &= s^{-v}[sF(s) - f(0)] + s^{-v}f(0) \\ &= s^{1-v}F(s), \qquad v > 0 \end{aligned} \tag{3.21}$$

şeklinde elde edilir.

Ayrıca,

$$f(t) = t^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \qquad \lambda > -1, \tag{3.22}$$

olmak üzere bu fonksiyonunun kesirli türevi

$$D^v f(t) = t^{\lambda - v} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{\Gamma(n+\lambda+1-v)} t^n \tag{3.23}$$

olarak tanımlıdır . Burada $f(t)$ fonkisyonunun Laplace dönüşümü $F(s)$ olmak üzere,

$$F(s) = \frac{1}{s^{\lambda+1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma(n+\lambda+1) s^{-n} \tag{3.24}$$

$D^v f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşünü $\lambda - v > -1$ olmak üzere,

$$\mathscr{L}\{D^v f(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{s^{n+\lambda-v+1}} \tag{3.25}$$

şeklindedir. Burada dikkat edilirse,

$$\mathscr{L}\{D^v f(t)\} = s^v F(s), \quad v < \lambda + 1 \tag{3.26}$$

sağladığı açıktır. Eş. 2.34 özelliğinden yararlanarak,

$$D^v f(t) = D^m [D^{-(m-v)} f(t)], \qquad v - m \leq 0 \tag{3.27}$$

bulunur. $\mathscr{L}\{D^v f(t)\}$ Laplace dönüşümü, $m - 1 < v \leq m$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{D^v f(t)\} &= \mathscr{L}\{D^m [D^{-(m-v)} f(t)]\} \\
&= s^m \mathscr{L}\{D^m [D^{-(m-v)} f(t)]\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} D^k [D^{-(m-v)} f(t)] \Big|_{t=0} \\
&= s^m [s^{-(m-v)} F(s)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} D^{k-(m-v)} f(0) \\
&= s^v F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} D^{k-m-v} f(0)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

şeklindedir. Özel olarak $m = 1$ ve $m = 2$ için,

$$\mathscr{L}\{D^v f(t)\} = s^v F(s) - D^{-(1-v)} f(0), \qquad 0 < v \leq 1 \tag{3.29}$$

ve

$$\mathscr{L}\{D^v f(t)\} = s^v F(s) - sD^{-(2-v)} f(0) - D^{-(1-v)} f(0), \qquad 1 < v \leq 2 \tag{3.30}$$

elde edilir.

3.1.1. Laplace dönüşümü ile kesirli diferensiyel denklem çözümü

Bu bölümde kesirli türev içeren diferensiyel denklemlerin çözümleri incelenecektir. Aşağıda bazı örneklere yer verilmektedir.

Örnek 3.2

$y' + ay^{1/2} + by = 0$ diferensiyel denklemi Laplace Dönüşümü yardımıyla çözelim. Laplace dönüşümünü bu tür problemlere uygulamadan önce $f', f'', ..., f^n(t)$ fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri bilinmelidir. $\mathscr{L}\{f(t)\}$ yardımıyla,

$$\mathscr{L}\{f^n(t)\} = s^n \mathscr{L}\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - ... - f^{n-1}(0) \tag{3.31}$$

olduğu bilinmektedir. O halde $n = 1$ için,

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = s\mathscr{L}\{f(t)\} - sf(0) \tag{3.32}$$

elde edilir. $\mathscr{L}\{y(t)\} = Y(s)$ olarak alınırsa ve probleme Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$y' + ay^{1/2} + by = 0 \tag{3.33}$$

diferensiyel denklemi

$$[sY(s) - y(0)] + a[\mathscr{L}\{D^{1/2} y(t)\}] + bY(s) = 0 \tag{3.34}$$

şeklinde yazılır. Eş. 3.29'den yararlanarak,

$$\mathscr{L}\{D^{1/2}y(t)\} = s^{1/2}Y(s) - D^{-1/2}y(0) \tag{3.35}$$

yazılır. Bu sonuç Eş. 3.34 denkleminde yerine yazılıp düzenlenirse,

$$[s + as^{\frac{1}{2}} + b]Y(s) - y(0) - aD^{-\frac{1}{2}}y(0) = 0 \tag{3.36}$$

elde edilir. Bu denklem $Y(s)$'ye göre çözülürse,

$$C = y(0) + aD^{-\frac{1}{2}}y(0) \tag{3.37}$$

olmak üzere,

$$Y(s) = \frac{C}{P(s^{1/2})} \tag{3.38}$$

olur. Burada $P(x)$ fonksiyonu ikinci dereceden bir polinomdur.

$[D + aD^{1/2} + bD^0]y(t) = 0$ dan yararlanılırsa,

$$P(x) = x^2 + ax + b = (x - \alpha)(x - \beta) \tag{3.39}$$

olarak bulunur. Burada karşımıza iki problem çıkmaktadır. Birincisi $y(0)$ ve $D^{-1/2}y(0)$ ın sonlu olacağı nasıl bilinebilir? sorusu, ikincisi ise Eş. 3.38'in ters Laplace dönüşümü bulunabilir mi? Birinci problemin cevabı için C sayısı bulunabilir mi? C sayısı sonlu mudur? Eğer sonlu değilse yapılanlar anlamsız olmaktadır. $C = 0$ olması durumunda ise ters Laplace dönüşümünü bulunamaz ve $y(t) \equiv 0$ olur. Bu nedenle C sayısını sonlu ve sıfırdan farklı olarak kabul edilmelidir.
İkinci probleme dönülürse Eş. 3.38 denkleminin ters Laplace dönüşümü nasıl bulunur? Şimdi $P^{-1}(x)$ ifadesini çarpanlara ayıralım.

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\Big(\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x-\beta}\Big)$$

yazarız. $x = s^{1/2}$ için,

$$\frac{1}{P(s^{1/2})} = \frac{1}{\alpha-\beta}\Big(\frac{1}{s^{1/2}-\alpha} - \frac{1}{s^{1/2}-\beta}\Big) \tag{3.40}$$

yazılabilir. Şimdi $(s^{1/2}-\alpha)$ nın ters Laplace dönüşümüne bakalım. Bu ifadeyi çarpanlarına ayırıp Laplace dönüşümü bildiğimiz bir ifadeye çevirelim.

$$\frac{1}{s^{1/2}-\alpha} = \frac{1}{s^{-1/2}-(s-\alpha^2)} - \frac{\alpha}{s-\alpha^2} \tag{3.41}$$

bulunur. Eş. 3.19'de verilen Laplace dönüşümünden,

$$\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s^{1/2}-\alpha}\Big\} = E_t(-\frac{1}{2},\alpha^2) + \alpha E_t(0,\alpha^2) \tag{3.42}$$

elde edilir. Benzer işlemleri β için de yapıp aynı sonuç bulunabilir. Bulunan sonuçları Eş. 3.38'de yerine yazılırsa,

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\Big\{Y(s)\Big\} = \frac{C}{\alpha-\beta}[\alpha E_t(0,\alpha^2) - \beta E_t(0,\alpha^2) + E_t(-\frac{1}{2},\alpha^2) - E_t(-\frac{1}{2},\beta^2)] \tag{3.43}$$

bulunur. Şimdi $P(x)$ polinomunda α ve β eşit ise, Eş. 3.38

$$Y(s) = \frac{C}{(s^{1/2}-\alpha)^2} \tag{3.44}$$

olur. Dolayısıyla

$$\frac{1}{(s^{1/2}-\alpha)^2} = \Big[\frac{1}{(s^{-1/2}(s-\alpha)^2)} - \frac{\alpha}{(s-\alpha)^2}\Big]^2 \tag{3.45}$$

elde edilir . Bu ifadenin ters Laplace Dönüşümünü bulmak için

$$\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s^v(s-a)^2}\Big\} = tE_t(v,a) - vE_t(v+1,a) \tag{3.46}$$

özelliğinden yararlanarak

$$y(t) = C[(1+2\alpha^2 t)E_t(0,\alpha^2) + \alpha E_t(\frac{1}{2},\alpha^2) + 2\alpha t E_t(-\frac{1}{2}),\alpha^2)] \tag{3.47}$$

bulunur [12].

3.2. Kesirli Kuvvet Serisi ile Kesirli Mertebeden Diferensiyel Denklemin Çözümü

Kuvvet serileri fonksiyonlara kolay bir yaklaşım için sayısal işlemlerde sıkça kullanılmaktadır. Fizikte kimyada ve diğer pek çok alanda kuvvet serisi yaklaşımı yüksek mertebeden terimlerin ihmali ile pek çok sistem için yaklaşık bir çalışmayı mümkün kılabilmektedir. Bu aynı zamanda problemi lineerleştirme için de uygun bir yoldur ve kolay bir analizi de garanti eder. Kesirli türevlerle çalışmak, onların karmaşık yapıları gereği büyük güçlükler ortaya çıkarmaktadır. Bununla beraber kesirli mertebeden diferensiyel denklemin çözümü, kesirli kuvvet serisi yardımıyla bulunabilmektedir. Pek çok araştırmacı kesirleri de içeren kuvvet serisinin genel bir formunu önermektedir. Bu çalışmada klasik kuvvet serisinin genellemesi olan kesirli kuvvet serisi ile ilgili bazı teoremler ve tanımlar verilecektir.

3.2.1. Kuvvet serisi yaklaşımı

Bu bölümde kuvvet serisi yaklaşımı ve $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n\alpha}$ serisinin yakınsaması ile ilgili sonuçlar verilecektir.
$t = t_0$ civarında kesirli mertebeden türeve sahip bir fonksiyonun kuvvet serisi yaklaşımı,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-t_0)^{n\alpha} = c_0 + c_1(t-t_0)^{\alpha} + c_2(t-t_0)^{2\alpha} + ... \tag{3.48}$$

şeklinde olup $0 < m-1 < \alpha \leq m$ ve $t \geq t_0$ $t_0 = 0$ alınırsa $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n\alpha}$ serisi, kesirli Maclaurin serisidir.($t = t_0$ için seri daima yakınsaktır.)

3.1. Teorem

Kesirli kuvvet serisi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n\alpha}$, $t \geq 0$ için iki durum söz konusudur.

i)Eğer kesirli kuvvet serisi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n\alpha}$, $t = b > 0$ için yakınsak ise $0 \leq t < b$ için de yakınsaktır.
ii)Eğer kesirli kuvvet serisi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n\alpha}$, $t = d > 0$ için ıraksak ise $t < d$ için de ıraksaktır.

İspat

i) Kabul edelim ki $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n\alpha}$ yakınsak olsun. Bu durumda $\lim_{n \longrightarrow \infty} c_n b^{n\alpha} = 0$ olur. Dizilerin limit tanımına göre $\varepsilon = 1$ için öyle bir N pozitif tamsayısı vardır ki $n \geq N$

olduğunda $|c_n b^{n\alpha}| < 1$ olur. Böylece $n \geq N$ için,

$$|c_n t^{n\alpha}| = \left|\frac{c_n b^{n\alpha} t^{n\alpha}}{b^{n\alpha}}\right| = |c_n b^{n\alpha}| \left|\frac{t}{b}\right|^{n\alpha} < \left|\frac{t}{b}\right|^{n\alpha}$$

Yine, $0 \leq t < b$ ise $|\frac{t}{b}| < 1$ böylece $\sum \left(\frac{t}{b}\right)^{n\alpha}$ geometrik serisi yakınsaktır. Böylece karşılaştırma testi ile $\sum_{n=N}^{\infty} \left|c_n t^{n\alpha}\right|$ yakınsaktır ve $\sum c_n t^{n\alpha}$ mutlak yakınsak dolayısıyla yakınsaktır.

ii) Kabul edelim ki $\sum c_n d^{n\alpha}$ ıraksak olsun .Öyle bir $t > d > 0$ sayısı bulunabilir ki $\sum c_n t^{n\alpha}$ serisi yakınsamaz çünkü $\sum c_n d^{n\alpha}$ ıraksaktır. t öyle bir sayı olsun ki $t > d > 0$ olsun. $\sum c_n t^{n\alpha}$ yakınsamaz. Çünkü durum *i*. ile $\sum c_n t^{n\alpha}$ nın yakınsaması $\sum c_n d^{n\alpha}$ nın yakınsamasını gerektirir. Bunun için $\sum c_n d^{n\alpha}$ $t > d$ olduğunda ıraksaktır.

Yakınsak bir seride kısmi toplamlarının bir limit değeri olması gerekir. Genelleştirilmiş Taylor serisinde kısmi toplamlar $T_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{D^{j\alpha} t_0 f(t_0)}{\Gamma(j\alpha+1)}(t-t_0)^{j\alpha}$ şeklindedir. Yani bir $f(t)$ fonksiyonunun Taylor Seri açılımı $f(t) = lim_{n\longrightarrow\infty} T_n(t)$ dir. Diğer bir açıdan da Genelleştirilmiş Taylor serisinin kalan terimi $R_n(t)$ denirse $R_n(t) = f(t) - T_n(t)$ dir.

3.2. Teorem

$0 < \alpha \leq 1$ için, $t_0 \leq t \leq d$ olmak üzere $|D_{t_0}^{(n+1)\alpha} f(t)| \leq M$ olursa, $R_n(t)$ Genelleştirilmiş Taylor serisi kalanı olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$|R_n(t)| \leq \frac{M}{\Gamma((n+1)\alpha+1)}(t-t_0)^{(n+1)\alpha}, \qquad t_0 \leq t \leq d \tag{3.49}$$

3.3. Teorem

Herhangi bir f fonksiyonunun t_0 kesirli kuvvet serisi formu

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-t_0)^{n\alpha}, \qquad 0 \leq m-1 < \alpha \leq m, \qquad t_0 \leq t < t_0 + R \tag{3.50}$$

Burada R Yakınsaklık yarıçapıdır. f fonsiyonu (t_0, t_0+R) araliğında analitiktir [8].

Örnek 3.3

$$y' + y^{1/2} - 2y^2 = 0, \qquad y_0 = c, \tag{3.51}$$

başlangıç şartı verilen diferensiyel denkleminin çözümünü bulalım.Bu kesirli mertebeden diferensiyel denklemi yukarıdaki tanımdan yararlanarak seri şeklinde bir çözümü olsun. $t_0 = 0$ ve $\alpha = 1/2$ olmak üzere,

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n t^{n/2} \tag{3.52}$$

kesirli kuvvet serisi şeklinde çözümünü bulalım. Eş. 3.51 denkelminde Eş. 3.52 çözümünü yerine yazarsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2} t^{(n/2-1)} y_n + \frac{\Gamma(1+n/2)}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} t^{(n-1)/2} y_n - 2\Big(\sum_{n=0}^{\infty} y_n t^{n/2}\Big)^2 = 0 \tag{3.53}$$

elde edilir.

Eş. 3.53 denklemi çözümlenirse,

$$y_1 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} y_0 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} c \tag{3.54}$$

$$y_2 = y_0 + 2y_0^2 = c + 2c^2 \tag{3.55}$$

$$y_3 = -\frac{8y_0^2}{\sqrt{\pi}} - \frac{4y_0^2}{3\sqrt{\pi}} = -\frac{8c^2}{\sqrt{\pi}} - \frac{4c^2}{3\sqrt{\pi}} \tag{3.56}$$

$$y_4 = \frac{y_0}{2} + \Big(5 + \frac{4}{\sqrt{\pi}}\Big) y_0^2 + 4y_0^3 = \frac{c}{2} + \Big(5 + \frac{4}{\sqrt{\pi}}\Big) c^2 + 4c^3 \tag{3.57}$$

$$y_5 = \frac{-8y_0}{15\sqrt{\pi}} - \Big(\frac{32}{3\sqrt{\pi}} + \frac{64}{15\pi\sqrt{\pi}}\Big) y_0^2 - \frac{352y_0^3}{15\sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{-8c}{15\sqrt{\pi}} - \Big(\frac{32}{3\sqrt{\pi}} + \frac{64}{15\pi\sqrt{\pi}}\Big)c^2 - \frac{352c^3}{15\sqrt{\pi}} \tag{3.58}$$

$$y_6 = \frac{y_0}{6} + \Big(\frac{44}{9\pi} + \frac{14}{3}\Big)y_0^2 + \Big(\frac{50}{3} + \frac{80}{3\pi}\Big)y_0^3 + 8y_0^4$$

$$= \frac{c}{6} + \Big(\frac{44}{9\pi} + \frac{14}{3}\Big)y_0^2 + \Big(\frac{50}{3} + \frac{80}{3\pi}\Big)c^3 + 8c^4 \tag{3.59}$$

$$y_7 = \frac{-16y_0}{105\sqrt{\pi}} - \Big(\frac{184}{21\sqrt{\pi}} + \frac{1024}{315\pi\sqrt{\pi}}\Big)y_0^2 - \Big(\frac{1072}{21\sqrt{\pi}} + \frac{192}{5\pi\sqrt{\pi}}\Big)y_0^3 - \frac{6464}{105\sqrt{\pi}}y_0^4$$

$$= \frac{-16c}{105\sqrt{\pi}} - \Big(\frac{184}{21\sqrt{\pi}} + \frac{1024}{315\pi\sqrt{\pi}}\Big)c^2 - \Big(\frac{1072}{21\sqrt{\pi}} + \frac{192}{5\pi\sqrt{\pi}}\Big)c^3 - \frac{6464}{105\sqrt{\pi}}c^4 \tag{3.60}$$

$$y_8 = \frac{y_0}{24} + \Big(\frac{49}{16\pi} + \frac{128}{45\pi}\Big)y_0^2 + \Big(\frac{623}{24} + \frac{901}{18\pi} + \frac{128}{15\pi^2}\Big)y_0^3 + \Big(\frac{92}{2} + \frac{568}{5\pi}\Big)y_0^4 + 16y_0^5$$

$$= \frac{c}{24} + \Big(\frac{49}{16\pi} + \frac{128}{45\pi}\Big)c^2 + \Big(\frac{623}{24} + \frac{901}{18\pi} + \frac{128}{15\pi^2}\Big)c^3 + \Big(\frac{92}{2} + \frac{568}{5\pi}\Big)c^4 + 16c^5 \tag{3.61}$$

başlangıç koşulu cinsinden serinin terimleri bulunur. Bulunan değerler Eş. 3.52'de yerine yazılırsa Eş. 3.51 yaklaşık çözümünü elde edilir. Böylece,

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n = y_0 + t^{1/2}y_1 + t^1 y_2 + t^{3/2}y_3 + t^2 y_4 + t^{5/2}y_5 + t^3 y_6 + ...$$

$$= c - \frac{2c}{\sqrt{\pi}}t^{1/2} + (c + 2c^2)t$$

$$- \Big(\frac{8c^2}{\sqrt{\pi}} + \frac{4c^2}{3\sqrt{\pi}}\Big)t^{3/2}$$

$$+ \left(\frac{c}{2} + \Big(5 + \frac{4}{\sqrt{\pi}}\Big)c^2 + 4c^3\right)t^2$$

$$-\left(\frac{8c}{15\sqrt{\pi}}+\left(\frac{32}{3\sqrt{\pi}}+\frac{64}{15\pi\sqrt{\pi}}\right)c^2+\frac{352c^3}{15\sqrt{\pi}}\right)t^{5/2}$$

$$+\left(\frac{c}{6}+\left(\frac{44}{9\pi}+\frac{14}{3}\right)y_0^2+\left(\frac{50}{3}+\frac{80}{3\pi}\right)c^3+8c^4\right)t^3+... \tag{3.62}$$

olarak yazılır. Bu seri çözümünde fazla terim alınırsa yakınsaklık aralığında gerçek çözüme daha da iyi yaklaşılabilmektedir [16].

4. NÜMERİK ÇÖZÜM

Tamsayı mertebeden olmayan türevleri içeren diferensiyel denklemler; sönümleme kanunları, yayınım süreçleri gibi değişik fiziksel olayları tanımlamak için uygun modeller olarak gösterilmektedir. Bu tür denklemlerin sayısal çözümleri için şimdiye kadar sınırlı sayıda algoritma üretilmiştir ve bu üretilenler de temel olarak hata ölçümlerinden yoksundur. Bu tez çalışmasında Dielthem'in [3] önerdiği aşağıda tanımlanan yaklaşık çözüm tekniği incelenmiştir. Diferensiyel denklemlerin önemli bir sınıfını oluşturan kesirli mertebeden sayısal çözümler için tasarlanan bu algoritma quadrature formül yaklaşımına dayalıdır.

4.1. Giriş ve Temel Bulgular

4.1.1. Diferensiyel denklemler

Bu çalışmada, aşağıda Eş. 4.1 ve Eş. 4.2 ile verilen diferensiyel denklem tipinin çözümü için sayısal bir yöntemden bahsedilecektir.

$$D^q[y - y_0](t) = \beta y(t) + f(t) \qquad 0 \leq t \leq 1 \tag{4.1}$$

$$y(0) = y_0 \tag{4.2}$$

Burada $0 < q < 1$, f fonksiyonu [0,1] aralığında tanımlı bir fonksiyon, $\beta \leq 0$ ve y bilinmeyen bir fonksiyondur. $D^q y$ ise, q. mertebeden y fonksiyonunun Riemann-Liouville kesirli türevini tanımlamaktadır [13].

$$D^q y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \frac{d}{dy} \int_0^t \frac{y(u)}{(t-u)^q} du \tag{4.3}$$

Bu türden diferensiyel denklemler teorisindeki genel pratikleri takip ederek [1] başlangıç koşulu Eş. 4.2 ile diferensiyel denklem Eş. 4.1 ile birleştirilir. Problemin varlığı ve tekliği [10] kaynağında verilmektedir. Başlangıç değer problemi keyfi bir aralığa kolayca genişletilebilir ve burada $[0, 1]$ aralığı gerekli bir sınırlama anlamına gelmemektedir.
$q = \frac{1}{2}$ alındığında böyle bir denklem, mekanikteki sönümlenen modellerin davranışını tanımlamaktadır [9]. Burada x modeldeki yer değiştirmeyi (zamana göre) $\beta = -\frac{1}{\xi}$ (ξ vizkosite) ve $f(t) = lN(t)/(EA\xi)$ dır. l ise zamanla yer değiştiren nesnenin uzunğunu, A hacmini, E young modülünü ve N(t) de dış kuvveti, tanımlandığı bir fonksiyondur. Referans [13] da bahsedildiği gibi Eş. 4.1 aynı zamanda yayılım süreçleri tanımlamak için de kullanılmaktadır. Diğer uygulamaları ise elektromagnetikte, elektrokimyada,

metalurjide, ultra yavaş proseslerde ve özel fonksiyonlarda karşılaşılmaktadır [1].

4.1.2. Yaklaşım tekniği

Bu denklemin çözümü için bir sayısal yöntem [1] numaralı kaynakta verilmiştir. Bu metot kolakasyon yöntemi olup spline fonksiyonlarına dayanmaktadır fakat bu metot için hata analizi yapılmamıştır. Buradaki algoritma ise, [7] numaralı kaynakta verilen gözlemlere dayalı olup Eş. 4.3'deki integral ile diferensiyelin yer değiştirilmesiyle elde edilen

$$D^q y(t) = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_0^t \frac{y(u)}{(t-u)^{q+1}} du \tag{4.4}$$

ifadesinin hesaplanmasına dayalıdır. Buradaki integral Hadamard finite-part integrali olarak gösterilmektedir. Burada verilen bir n için $t_j = j/n$ şeklinde problemin çözüm aralığı içerisinde, eşit aralıklı parçalanma tanımlanabilir. Aralığın parçalanması Eş. 4.1'e ve Eş. 4.4'e uygulanırsa $j = 1, 2, ..., n$ için,

$$f(t_j) + \beta y(t_j) = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_0^{t_j} \frac{y(u) - y(0)}{(t_j - u)^{q+1}} du \tag{4.5}$$

yazılabilir. Burada $t_j - t_j w = u$ dönüşümü yapılırsa $-t_j dw = du$ ve $t_j - u = t_j w$ elde edilir. Böylece Eş. 4.5'de düzenlenirse,

$$\begin{aligned} f(t_j) + \beta y(t_j) &= \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_0^1 \frac{y(t_j - t_j w) - y(0)}{(t_j^{q+1} w^{q+1})} t_j dw \\ &= \frac{t_j^{-q}}{\Gamma(-q)} \int_0^1 \frac{y(t_j - t_j w) - y(0)}{w^{q+1}} dw \end{aligned} \tag{4.6}$$

elde edilir. Böylece eşit aralıklı düğüm noktaları $(j = 1, 2, ..., n)$ $0, 1/j, 2/j, ..., 1$ için integrali ile birinci dereceden kuadratür formülü Eş. 4.6 nın sağındaki integral ile değiştirilirse bu integral,

$$Q_j[g] := \sum_{k=0}^{j} \alpha_{kj} g(k/j) \approx \int_0^1 g(u) u^{-q-1} du \tag{4.7}$$

şeklinde olup kalan terim

$$R_j[g] = \int_0^1 g(u)u^{-q-1}du - Q_j[g] \tag{4.8}$$

dir [6]. Kuadratür formülü integrasyon aralığının uç noktalarını ve düğüm noktaları α_{kj} ağırlıkları için açık gösterimi Lemma 4.3 ile verilmiştir.

Kuadratür hatası ihmal edilirse, $y(t_j)$,$(j = 1, 2, ..., n)$ için yaklaşım formülü,

$$\sum_{k=0}^{j} \alpha_{kj} g(k/j) \approx \int_0^1 g(u)u^{-q-1}du \tag{4.9}$$

yardımıyla yaklaşık sonucu bulunabilir. Şimdi Eş. 4.6 denklemi düzenlenirse,

$$\begin{aligned}\int_0^1 y(t_j - t_j w)w^{-q-1} - y(0)w^{-q-1}dw &= \sum_{k=0}^{j} \alpha_{kj} y_{j-k} + \frac{1}{q}y_0 \\ &= \sum_{k=1}^{j} \alpha_{kj} y_{j-k} + \alpha_{0j} y_j + \frac{1}{q}y_0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

olur. Eş. 4.6 denkleminde Eş. 4.10'i yazıp y_j yi çekilirse,

$$\begin{aligned} f(t_j) + \beta y(t_j) &= \frac{t_j^{-q}}{\Gamma(-q)}\Big(\sum_{k=1}^{j} \alpha_{kj} y_{j-k} + \alpha_{0j} y_j + \frac{1}{q}y_0\Big) \\ &= \frac{t_j^{-q}\alpha_{0j}}{\Gamma(-q)} y_j + \frac{t_j^{-q}}{\Gamma(-q)}\Big(\sum_{k=1}^{j} \alpha_{kj} y_{j-k} + \frac{1}{q}y_0\Big) \end{aligned} \tag{4.11}$$

elde edilir. Denklem y_j ye göre düzenirse,

$$y_j\Big(\beta - \frac{\alpha_{0j}}{\Gamma(-q)t_j^q}\Big) = -f(t_j) + \frac{t_j^q}{\Gamma(-q)}\Big(\sum_{k=1}^{j} \alpha_{kj} y_{j-k} + \frac{1}{q}y_0\Big) \tag{4.12}$$

olur.

Buradan,

$$y_j = \frac{\Gamma(-q)t_j^q}{\alpha_{0j} - \beta\Gamma(-q)t_j^q}\left(f(t_j) - \frac{t_j^{-q}}{\Gamma(-q)}\Big(\sum_{k=1}^{j}\alpha_{kj}y_{j-k} + \frac{1}{q}y_0\Big)\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha_{0j} - \beta\Gamma(-q)t_j^q}\Big(\Gamma(-q)t_j^q f(t_j) - \sum_{k=1}^{j}\alpha_{kj}y_{j-k} - \frac{1}{q}y_0\Big)$$

$$= \frac{1}{\alpha_{0j} - \beta\Gamma(-q)(\frac{j}{n})^q}\Big(\Gamma(-q)(\frac{j}{n})^q f(t_j) - \sum_{k=1}^{j}\alpha_{kj}y_{j-k} - \frac{1}{q}y_0\Big) \tag{4.13}$$

elde edilir. Burada açıktır ki, tamsayı mertebeden diferensiyel denklemler için alışılmış integral metodlarının tersine, metodun sabit bir m değeri için $m-$adımlı bir metod olduğu söylenemez. Çünkü tamsayı mertebeden denklemde y_j nin yaklaşık değeri kendinden önce gelen m tane $y_{j-m}, y_{j-m+1}, ...y_{j-1}$ noktasına bağlı olarak elde edilmektedir. Fakat kesirli denklemlerde her y_j değeri $y_0, y_1, ..., y_{j-1}$ değerlerine bağlı olarak elde edilmektedir.Bu yöntemde de hesaplama yapılırken $y_0, y_1, ..., y_{j-1}$ değerleri hesaplanıp sonra da y_j değerine ulaşılabilir. Buradan şu sonuca ulaşılabilir. Tamsayı türevlerin aksine kesirli mertebeden türevler lokal operatör değildir. Yani $(D^q g)(z)$ yi sadece z nin komşuluğundaki g değerlerini kullanarak belirlenemez. Şüphesiz bu da hata analizinin klasik hata analizindeki metodlardan daha başka metodları da gerektirir. Burada temel sonuçlar lokal ve global hata sınırlarıdır.

4.1. Teorem

Sözü geçen fonksiyonların yeterince düzgün (ileri mertebeden türevlenebilir) olduğu kabulu ile öyle a ve λ sabit değerleri vardır ki q ve y e bağlı olmak üzere (f fonksiyonu ve β üzerinde) yukardaki yaklaşım metodunun mutlak hatası ,

$$|y(t_j) - y_j| \leq \lambda j^q n^{-2}, \qquad j = 0, 1, ...n. \tag{4.14}$$

ile sınırlıdır.

4.2. Sonuç

Eğer sözü geçen fonksiyonlar yeterince düzgün ise kullanılan yaklaşım tekniğinin global

hatası,

$$max_{j=0,1,2,..,n}|y(t_j) - y_j| = O(n^{q-2}) \tag{4.15}$$

şeklindedir.Bu sonucun ispatı aşağıda verilmiştir.

İspat

Aşağıda verilen lemmalar ispatlar için kullanılacaktır.

4.3. Lemma

Q_j kuadratür formülündeki α_{kj} ağırlıkları $j \geq 1$ için aşağıdaki formül ile hesaplanır.

$$q(1-q)j^{-q}\alpha_{kj} = \begin{cases} -1 & k = 0 \text{ ise} \\ 2k^{1-q} - (k-1)^{1-q} - (k+1)^{1-q} & k = 1, 2, .., j-1 \\ (q-1)k^{-q} - (k-1)^{1-q} + k^{1-q} & k = j \end{cases} \tag{4.16}$$

4.4. Lemma

$q \in (0,1)$ olsun.
i) Her $f \in C^2[0,1]$için öyle bir $\gamma_q > 0$ sayısı vardır ki

$$\left| \int_0^1 f(t)t^{-q-1}dt - Q_j[f] \right| \leq \gamma_q j^{q-2}||f''||_\infty \tag{4.17}$$

ii) Eğer f konveks ise,

$$\int_0^1 f(t)t^{-q-1}dt \leq Q_j[f] \tag{4.18}$$

alt ve üst sınır için γ_q [6] de bulunabilir.

4.5. Lemma

$0 < q < 1$ ve (d_j) dizisi $d_1 = 1$ ve

$$d_j = 1 + q(1-q)j^{-q}\sum_{k=1}^{j-1}\alpha_{kj}d_{j-k}, j = 2, 3.., \tag{4.19}$$

olup α_{kj} *Lemma* 4.3 dekilerle aynıdır. Böylece,

$$1 \leq d_j \leq \frac{sin\pi q}{\pi q(1-q)}j^q, \qquad j = 1, 2, 3, ... \tag{4.20}$$

olur.

Uyarı: Bu durum aynı zamanda limit durumları olan $q = 1$ ve $q = 0$ için de geçerlidir. Böylece $d_j = 1$ ve $d_j = 1 + d_{j-1}$ rekürans bağıntısına ulaşılır. Buda $d_j = 1$ ve $d_j = j$ ilişkisini sağlar.

Uyarı: Her $q \in (0, 1)$ için kısa hesaplamalarla $1 < (sin\pi q)/(\pi q(1-q)) \leq 4/\pi$ olduğu kolayca bulunur.

İspat

$1 \leq d_j$ eşitsizliği $k \geq 1$ ve $\alpha_{kj} > 0$ eşitsizliğinin sonucu olarak açıkça bellidir. Böylece,

$$\frac{sin\pi q}{\pi q(1-q)} \geq 1 = d_1 \tag{4.21}$$

j=1 için elde edilir. Bu da hatanın üst sınırıdır. Diğer durumlar için
$\phi(x) = (1-q)^q$ fonksiyonunu tanımlayalım. $\phi''(x) \leq 0$ olduğu açıktır.

Bunun için Lemma 4.4 (ii)'den her j için,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{j+1}\alpha_{k,j+1}\phi(k/(j+1)) &= Q_{j+1}[\phi] \leq \int_0^1 \phi(t)^{-q-1} \\ &= \Gamma(-q)(D^q\phi(1)) \\ &= \Gamma(-q)\Gamma(q+1) = -\frac{\pi}{sin\pi q}\end{aligned} \tag{4.22}$$

elde edilir . $k \geq 1$ için $\alpha_{kj} > 0$ dan,

$$d_{j+1} = 1 + q(1-q)(j+1)^{-q} \sum_{k=1}^{j} \alpha_{k,j+1} d_{j+1-k}$$

$$\leq 1 + \frac{sin\pi q}{\pi} \sum_{k=1}^{j+1} \alpha_{k,j+1} (\frac{j+1-k}{j+1})^q$$

$$= 1 + \frac{sin\pi q}{\pi} (Q_{j+1}[\phi] - \alpha_{0,j+1}[\phi](0))$$

$$\leq -\frac{sin\pi q}{\pi} \alpha_{0,j+1} \phi(0) = \frac{sin\pi q}{\pi q(1-q)} (j+1)^q \tag{4.23}$$

elde edilir. Şimdi teoremin ispatını yapalım. Eş. 4.13 denklemini değerlendirelim. $\alpha_{0j} - (j/n)^q \Gamma(-q)\beta$ paydası, Lemma 4.3'de $\alpha_{0j} < 0$ ve varsayımımız $\beta \leq 0$ a göre yok olmaz. Bu da paydanın negatif olduğunu göstermektedir. Sabit $j \in 1, 2, ..., n$ için

$$f(t_j) + \beta y(t_j) = \frac{t_j^{-q}}{\Gamma(-q)} \int_0^1 \frac{y(t_j - t_j u) - y(0)}{u^{q+1}} du$$

$$= \frac{t_j^{-q}}{\Gamma(-q)} (Q_j[\psi_j] + R_j[\psi_j]) \tag{4.24}$$

yazılabilir. Burada $\omega_j(t) = y(t_j - t_j t) - y(0)$ ve R_j kuadratür hatasıdır.

$$f(t_j) + \beta y(t_j) = \frac{t_j^{-q}}{\Gamma(-q)} \Big(\sum_{k=0}^{j} \alpha_{kj} y(t_{j-k}) - y(0) \sum_{k=0}^{j} \alpha_{kj} + R_j[\psi_j] \Big) \tag{4.25}$$

olur buradan,

$$\sum_{k=0}^{j} \alpha_{kj} = Q_j[1] = \int_0^1 u^{-q-1} du = -\frac{1}{q} \tag{4.26}$$

Bu denklemi kullanarak Eş. 4.25'yi $y(t_j)$ ye göre çözülürse,

$$y(t_j) = \frac{1}{\alpha_{0j} - \beta\Gamma(-q)(\frac{j}{n})^q} (\Gamma(-q)(\frac{j}{n})^q f(t_j) - \sum_{k=1}^{j} \alpha_{kj} y(t_{j-k}) - \frac{y(0)}{q} - R_j[\psi_j]) \tag{4.27}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklem Eş. 4.13 ile birleştirilerek

$$\epsilon_j := y(t_j) - y_j = \frac{1}{\alpha_{0j} - \beta\Gamma(-q)(\frac{j}{n})^q}(-\sum_{k=1}^{j}\alpha_{kj}(y(t_{j-k}) - y_{j-k}) - R_j[\psi_j])$$

$$= \frac{1}{\beta\Gamma(-q)(\frac{j}{n})^q - \alpha_{0j}}(\sum_{k=1}^{j}\alpha_{kj}\epsilon_{j-k} + R_j[\psi_j]) \tag{4.28}$$

bulunur. Bu ilişkiyi genişletip Lemma 4.3 ve Lemma 4.4 (i) deki önerme kullanılarak,

$$|\epsilon_j| \leq \frac{1}{\beta\Gamma(-q)(\frac{j}{n})^q - \alpha_{0j}}\Big(\sum_{k=1}^{j}\alpha_{kj}|\epsilon_{j-k}| + |R_j[\psi_j]|\Big)$$

$$\leq -\frac{1}{\alpha_{0j}}\Big(\sum_{k=1}^{j}\alpha_{kj}|\epsilon_{j-k}| + \gamma_q j^{q-2}||\psi_j''||_\infty\Big)$$

$$\leq q(1-q)j^{-q}\Big(\sum_{k=1}^{j}\alpha_{kj}|\epsilon_{j-k}| + \gamma_q j^q n^{-2}||y_j''||_\infty\Big) \tag{4.29}$$

bulunur. $\epsilon_0 = 0$ başlangıç şartından dolayı $\epsilon_1 \leq q(1-q)\gamma_q n^{-2}||y_j''||_\infty$ olur. Şimdi $d_1 = 1$ ve $d_j = 1 + q(1-q)j^{-q}\sum_{k=1}^{j-1}\alpha_{kj}d_{j-k}$, $j = 2, 3, ...$ kullanarak yeni bir d_j dizisini tanımlasa $|\epsilon_j| \leq q(1-q)\gamma_q n^{-2}||y_j''||_\infty d_j \qquad j = 1, 2, ..., n$ olur. Bu durum $j = 1$ ve $j = 2, 3, ..., n$ için basit bir tümevarımla ilerlediği açıktır. Burada Lemma 4.5'in sonucunu görebiliriz [3].

4.1.3. Nümerik çözümler ve karşılaştırmalar

Bu bölümde aşağıda başlangıç koşulu ile birlikte tanımlanan denklemin çözümü Laplace, Seri yöntemiyle sonra bir önceki bölümde bahsedilen yaklaşım yöntemiyle elde edilecek sonuçlarla karşılaştırılacaktır. Yaklaşım yöntemi tamamen sayısal bir yöntem olup, avantajı çözülemeyen kesirli mertebeden diferensiyel denklemlerin çözümlerini yaklaşık olarak hesaplanabilmesidir. Bu yöntem uygulanırken dikkat edilmesi gereken nokta başlangıç koşulundan başlayarak sonuca adım adım yaklaşıldığı için adımları yeterince küçük seçme gerekliliğidir. Bundan sonraki bölümde başlangıç koşulu verilen kesirli bir diferensiyel denklemin Laplace ve Seri yöntemiyle çözümleri bulunacaktır.

Örnek 4.1

$$D^q[y](t) = -y(t) + t^2 + \frac{2}{\Gamma(3-q)}t^{2-q}, \qquad y(0) = 0 \tag{4.30}$$

[5] kaynağında bahsi geçen, başlangıç koşulu verilen kesirli diferensiyel denkleminin çözümünü $q = 1/2$ için inceleyelim. $q = 1/2$ için,

$$D^{1/2}[y](t) = -y(t) + t^2 + \frac{2}{\Gamma(2,5)}t^{3/2}, \qquad y(0) = 0 \tag{4.31}$$

olur. Denklemimde $\mathscr{L}\{y(t)\} = Y(s)$ olarak gösterip, probleme Laplace dönüşümü uygulanırsa, Eş. 3.35'den

$$\mathscr{L}\{D^{1/2}y(t)\} = s^{1/2}Y(s) - D^{-1/2}y(0) \tag{4.32}$$

bulunur. Eş. 3.4 özelliğinden yararlanarak,

$$\mathscr{L}\{t^2\} = \frac{\Gamma(3)}{s^3} \tag{4.33}$$

ve

$$\mathscr{L}\{t^{3/2}\} = \frac{\Gamma(5/2)}{s^{5/2}} \tag{4.34}$$

elde edilir. Şimdi Laplace dönüşümü Eş. 4.31'e uygulanırsa,

$$s^{1/2}Y(s) - D^{-1/2}y(0) = -Y(s) + \frac{\Gamma(3)}{s^3} + \frac{2}{\Gamma(5/2)}\frac{\Gamma(5/2)}{s^{5/2}} \tag{4.35}$$

elde edilir. Burada denklemi $Y(s)$ ye göre çözülürse,

$$Y(s)(s^{1/2}+1) = \frac{\Gamma(3) + 2s^{1/2}}{s^3} \tag{4.36}$$

$$Y(s) = \frac{\Gamma(3) + 2s^{1/2}}{s^3(s^{1/2}+1)}$$

$$= \frac{2(1+s^{1/2})}{s^3(s^{1/2}+1)} = \frac{2}{s^3} \tag{4.37}$$

bulunur. Şimdi $Y(s)$ nin ters Laplace dönüşümünü bulunmalıdır. Eş. 3.4'ten ters Laplace dönüşümünün,

$$\mathscr{L}^{-1}\Big\{Y(s)\Big\} = y(t) = t^2 \tag{4.38}$$

olduğu açıktır. Bu denklem Eş. 4.31 denkleminin çözümüdür.
Aynı problem şimdi de aşağıda ifadesi verilen kesirli kuvvet serisi ile çözülürse,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n/2} = y(t) \tag{4.39}$$

için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} t^{\frac{n-1}{2}} c_n + \sum_{n=0}^{\infty} t^{n/2} c_n - t^2 - \frac{2}{\Gamma(\frac{5}{2})} t^{3/2} = 0 \tag{4.40}$$

elde edilir. Şimdi bu değerlerin açılımını yazıp katsayıları eşitleyelim.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} t^{\frac{n-1}{2}} c_n = {} & \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{1}{2})} t^{-\frac{1}{2}} c_0 + \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(1)} t^0 c_1 + \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} t^{\frac{1}{2}} c_2 + \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(2)} t^1 c_3 \\ & + \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{5}{2})} t^{-\frac{3}{2}} c_4 + \frac{\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(3)} t^2 c_5 + \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{7}{2})} t^{-\frac{5}{2}} c_6 \\ & + \frac{\Gamma(\frac{9}{2})}{\Gamma(4)} t^3 c_7 + ...\end{aligned} \tag{4.41}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^{n/2} c_n = t^0 c_0 + t^{\frac{1}{2}} c_1 + t^1 c_2 + t^{\frac{3}{2}} c_3 + t^2 c_4 + t^{\frac{5}{2}} c_5 + t^3 c_6 + t^{\frac{7}{2}} c_7 \tag{4.42}$$

elde edilir.

Bu seri açılımlarını Eş. 4.40'da yerine yazıp t^n değerlerine göre düzenlenirse,

$$t^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{1}{2})}c_0\right]+t^0\left[\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(1)}c_1+c_0\right]+t^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})}c_2+c_1\right]+t^1\left[\frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(2)}c_3+c_2\right]$$
$$+t^{\frac{3}{2}}\left[\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{5}{2})}c_4+c_3-\frac{2}{\Gamma(\frac{5}{2})}\right]+t^2\left[\frac{\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(3)}c_5+c_4-1\right]$$
$$+t^{\frac{5}{2}}\left[\frac{\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{7}{2})}c_6+c_5\right]+t^3\left[\frac{\Gamma(\frac{9}{2})}{\Gamma(4)}c_7+c_6\right]+...=0 \tag{4.43}$$

şeklinde yazılabilir. Polinom eşitliği yapılıp katsayılar 0'a eşitlenirse,

$$\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{1}{2})}c_0=0 \quad \Longrightarrow \quad c_0=0 \tag{4.44}$$
$$\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(1)}c_1+c_0=0 \quad \Longrightarrow \quad c_1=0 \tag{4.45}$$
$$\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})}c_2+c_1=0 \quad \Longrightarrow \quad c_2=0 \tag{4.46}$$
$$\frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(2)}c_3+c_2=0 \quad \Longrightarrow \quad c_3=0 \tag{4.47}$$
$$\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{5}{2})}c_4+c_3-\frac{2}{\Gamma(\frac{5}{2})}=0 \quad \Longrightarrow \quad c_4=1 \tag{4.48}$$
$$\frac{\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(3)}c_5+c_4-1=0 \quad \Longrightarrow \quad c_5=0 \tag{4.49}$$
$$\frac{\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{7}{2})}c_6+c_5=0 \quad \Longrightarrow \quad c_6=0 \tag{4.50}$$
$$\frac{\Gamma(\frac{9}{2})}{\Gamma(4)}c_7+c_6=0 \quad \Longrightarrow \quad c_7=0 \tag{4.51}$$

elde edilir. Bulunan c_n değerleri ,

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nt^{n/2}=y(t)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nt^{n/2}=c_0t^0+c_1t^{\frac{1}{2}}+c_2t^1+c_3t^{\frac{3}{2}}+c_4t^2+c_5t^{\frac{5}{2}}+c_6t^3+c_7t^{\frac{7}{2}}+... \tag{4.52}$$

çözümünde yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n/2} = y(t) = t^2 \tag{4.53}$$

çözümü bulunur. Eş. 4.38 ve Eş. 4.53 sonuçlarının aynı olduğu görülür. Her iki çözüm de $y(t) = t^2$ fonksiyonudur. Şimdi yaklaşım yöntemiyle bulunan sonuçları farklı adım ve farklı kesirli türev değerleri için karşılaştıralım. Eş. 4.30 diferensiyel denklemine $y(t) = t^2$ çözümünü yazılırsa tüm q değerleri için sonucun $y(t) = t^2$ olduğunu görülür. Laplace ve seri yöntemiyle türevin mertebesine bağlı olmaksızın çözümün $y(t) = t^2$ olduğunu benzer şekilde bulunabilir. Eş. 4.30 diferensiyel denklemi başlangıç koşulu ile birlikte,

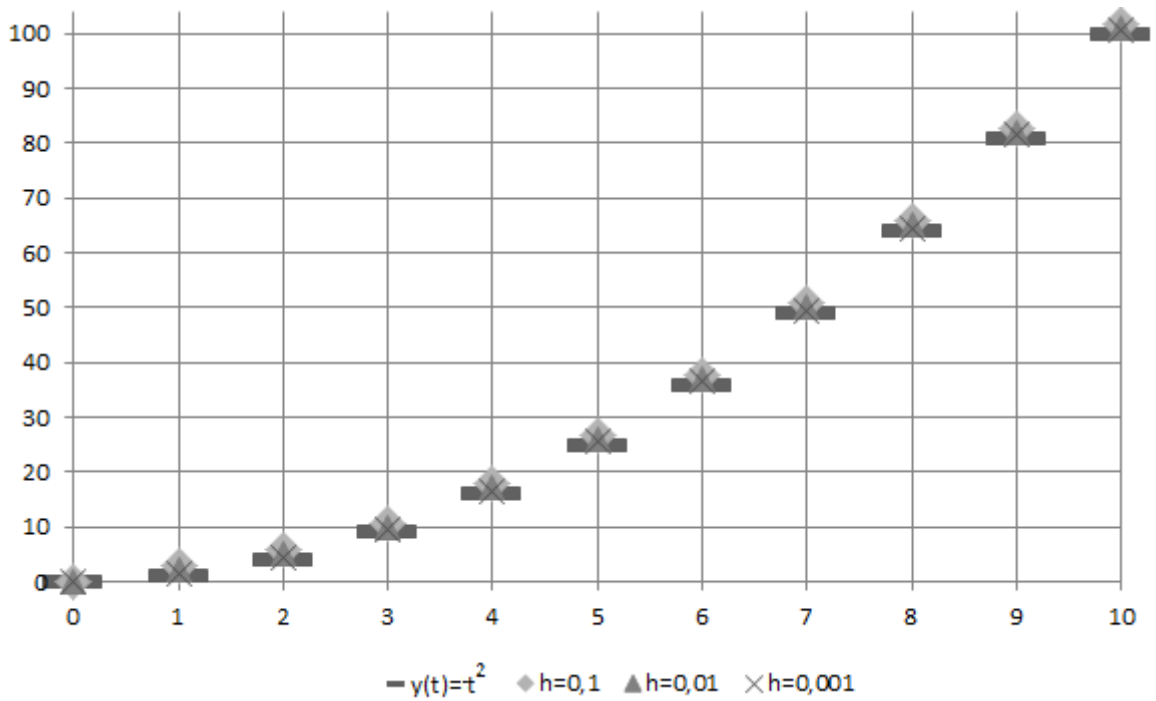
$$D^q[y](t) = -y(t) + t^2 + \frac{2}{\Gamma(3-q)} t^{2-q}, \qquad y(0) = 0 \tag{4.54}$$

yaklaşım yöntemiyle çözüldüğünde elde edilen sonuçlar $q = 1/2$ için Çizelge 4.1'deki gibidir. Grafiği de Çizelge 4.1'de verilmiştir.

Çizelge 4.1. Örnek 4.1'deki problem için, $q = 1/2$ türevi, $h = 0,1$, $h = 0,01$, $h = 0,001$ farklı adım aralıklarının sonuca etkisinin incelenmesi

$q = 1/2$

t	t^2	$h = 0,1$ için $y(t)$	$h = 0,01$ için $y(t)$	$h = 0,001$ için $y(t)$
1	1	1,007725	1,000261	1,000008
2	4	4,009264	4,000306	4,000010
5	25	25,010995	25,000357	25,000012
10	100	100,012019	100,000388	100,000014



Şekil 4.1. Örnek 4.1'deki problem için, $q = 1/2$ türevi $h = 0,1$, $h = 0,01$, $h = 0,001$ adım aralıkları için sonuçların karşılaştırılması

Çizelge 4.1 incelenirse h parçalanmasını yeterince küçük seçersek gerçek değere daha yakın bir sonuç bulunduğu görülür.
Eş. 4.30 diferensiyel denkleminde türevler değiştirilirse $h = 0,1$ ve $h = 0,01$ parçalanmasıyla elde edilen sonuçlar Çizelge 4.2 ve Çizelge 4.3 de gösterilmiştir.

Çizelge 4.2. Örnek 4.1'deki problem için, $h = 0,1$ adım aralığında $q = 0,25$, $q = 0,5$, $q = 0,75$ farklı kesirli türev değerlerinin çözüme etkisinin incelenmesi

$h = 0,1$

t	t^2	$q = 0,25$ için $y(t)$	$q = 0,5$ için $y(t)$	$q = 0,75$ için $y(t)$
1	1	1,001995	1,007725	1,023124
2	4	4,002297	4,009264	4,029497
5	25	25,002681	25,010995	25,035154
10	100	100,002955	100,012019	100,0373306

Çizelge 4.3. Örnek 4.1'deki problem için, $h = 0,01$ adım aralığında $q = 0,25$, $q = 0,5$, $q = 0,75$ farklı kesirli türev değerlerinin çözüme etkisinin incelenmesi

$h = 0,01$

t	t^2	$q = 0,25$ için $y(t)$	$q = 0,5$ için $y(t)$	$q = 0,75$ için $y(t)$
1	1	1,000042	1,000261	1,001349
2	4	4,000046	4,000306	4,001686
5	25	25,000052	25,000357	25,001987
10	100	100,000056	100,000388	100,002102

Burada denklemin yapısından dolayı q nun mertebesinin değişmesi çözüm fonksiyonu $y = t^2$ yi değiştirmemektedir. Fakat yaklaşım yöntemiyle hata oranların değiştiği görülmektedir.

Örnek 4.2

$$D^q[y](t) = -y(t) + t^4 - \frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{\Gamma(4-q)}t^{3-q} + \frac{24}{\Gamma(5-q)}t^{4-q}, \qquad y(0) = 0 \tag{4.55}$$

[4] kaynağında bahsi geçen kesirli diferensiyel denkleminin çözümünü yaklaşım yöntemiyle çözelim. Bu diferensiyel denklemin çözümü,

$$y(t) = t^4 - \frac{1}{2}t^3 \tag{4.56}$$

fonksiyonudur. Gerçekten Eş. 2.38 yardımıyla,

$${}_0D_t^q(t^4 - \frac{1}{2}t^3) = \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(5-q)}t^{4-p} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4-q)}t^{3-p} \tag{4.57}$$

elde edilir. Eş. 4.57 ile elde edilen $D^q[y](t)$ denklemini ve $y(t) = t^4 - \frac{1}{2}t^3$ denklemini Eş. 4.55 da yerine yazılırsa diferensiyel denklemi sağlandığı görülür.
Verilen yaklaşım yöntemiyle Eş. 4.57'deki diferensiyel denklem çözüldüğü zaman elde edilen sonuçlar $q = 1/2$ için Çizelge 4.4 de gösterilmiştir.

Çizelge 4.4. Örnek 4.2'deki problem için, $q = 1/2$ türevi, $h = 0,1$, $h = 0,01$, $h = 0,001$ farklı adım aralıklarının sonuca etkisinin incelenmesi

$q = 1/2$

t	$t^4 - \frac{1}{2}t^3$	$h = 0,1$ için $y(t)$	$h = 0,01$ için $y(t)$	$h = 0,001$ için $y(t)$
1	0,5	0,51908	0,500717	0,500024
2	12	12,123152	12,004348	12,000142
3	67,5	67,836225	67,511580	67,500376
5	562,5	563,628456	562,538002	562,501229

Çizelge 4.4 incelendiği zaman parçalanmayı ne kadar küçük seçilirse gerçek sonuca o kadar yaklaşılacağı görülmektedir. Başlangıç noktasından ne kadar uzaklaşılırsa hata o kadar artmaktadır.

Örnek 4.3

$$D^q[y](t) = -y(t) + t^2 + \frac{2}{\Gamma(2,5)}t^{1,5}, \qquad y(0) = 0 \tag{4.58}$$

Başlangıç şartı verilen kesirli mertebeden diferensiyel denkleminin çözümünü $q = 0,01$, $q = 0,25$, $q = 0,50$, $q = 0,75$, $q = 0,99$ için yaklaşım yöntemiyle çözümlerini yaklaşım metoduyla bulalım. $q = 1$ için yaklaşım metoduyla çözümü bulunamadığından $q = 1$ için diferensiyel denklem

$$y' + f(t)y = g(t) \tag{4.59}$$

şeklindedir. Birinci mertebeden lineer diferensiyel denklemde sol tarafın genel çözümü,

$$y = c(t)e^{-\int f(t)dt} \tag{4.60}$$

şeklindedir ve diferensiyel denklemi sağlar.

$$\frac{dy}{dt} = e^{-\int f(t)dt}\frac{dc(t)}{dt} - c(t)f(t)e^{-\int f(t)dt} \tag{4.61}$$

olur. Bu ifadeler Eş. 4.59'de yerine yazılırsa,

$$\frac{dc(t)}{dt} = e^{\int f(t)dt}g(t) \Rightarrow c(t) = \left(\int e^{\int f(t)dt}g(t)dt + k\right) \tag{4.62}$$

bulunur. $c(t)$ i de yerine yazılırsa genel çözüm,

$$y = e^{-\int f(t)dt}\left(\int e^{\int f(t)dt} g(t)dt + k\right) \tag{4.63}$$

şeklindedir. Eş. 4.58'de $q = 1$ yazılırsa,

$$y'(t) = -y(t) + t^2 + \frac{2}{\Gamma(2,5)}t^{1,5}, \qquad y(0) = 0 \tag{4.64}$$

elde edilir. Bu diferensiyel denklem birinci mertebeden lineer diferensiyel denklemdir. Eş. 4.59 diferensiyel denkleminin çözümü Eş. 4.63 olduğundan, Eş. 4.64 diferensiyel denkleminin çözümü 4.63 yardımıyla,

$$y = e^{-\int dt}\left(\int e^{\int dt}(t^2 + \frac{2}{\Gamma(2,5)}t^{1,5})dt + c\right) \tag{4.65}$$

elde edilir. Bu denklemi başlangıç şartını sağlayacak şekilde Maple 12 kullanarak $q = 1$ hesapladığımızda edilen veriler Çizelge 4.5'de gösterilmiştir.

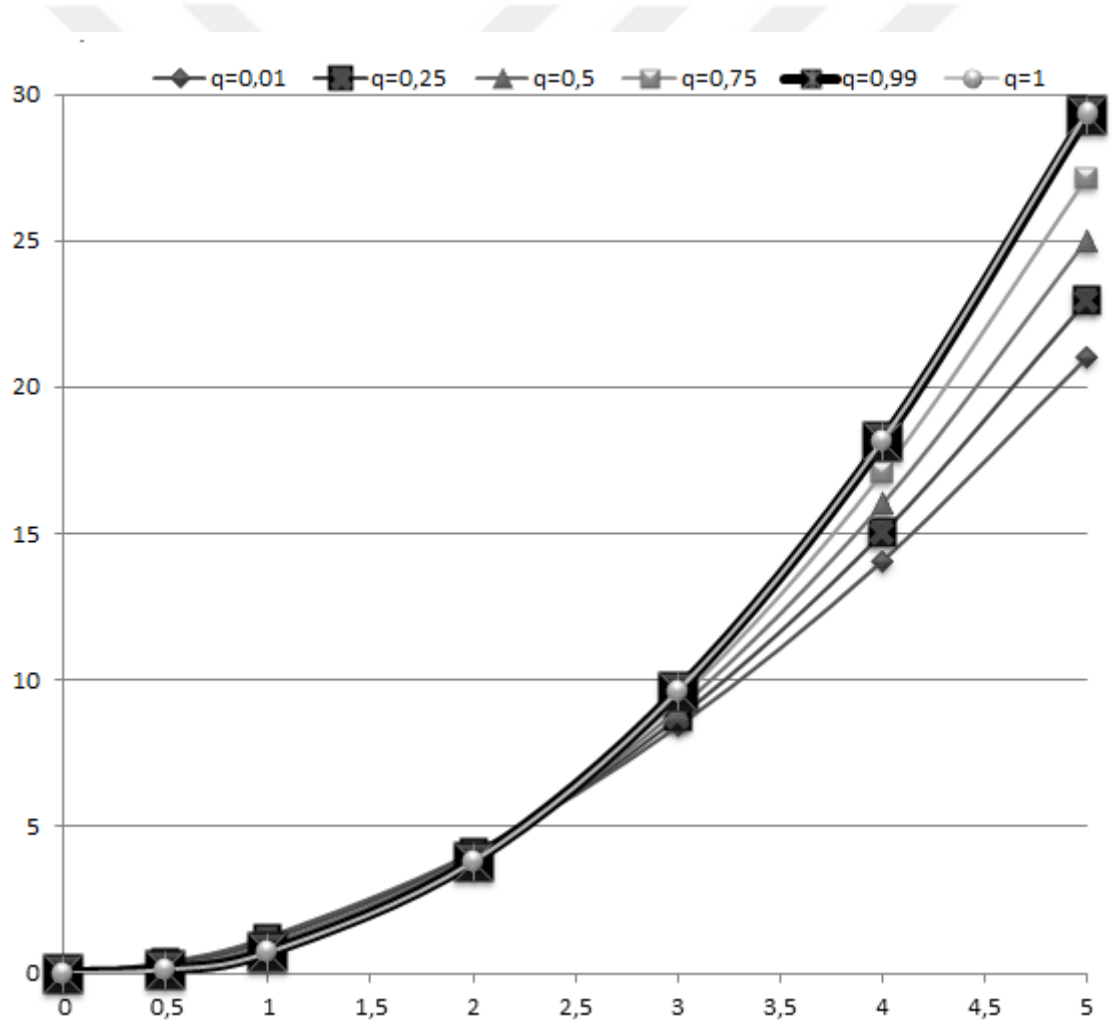
$0 \leq t \leq 5$ aralığında bazı t değerleri için elde edilen sonuçlar Çizelge 4.5'de, grafiği de Şekil 4.2'de verilmiştir.

Çizelge 4.5 ve Şekil 4.2'e dikkat edilirse, türevin değişmesi sonucu elde edilen verilerden yola çıkılarak bulunan sonuçların benzer tipte olduğunu söylenebilir. Türev 1'e yaklaştıkça belirli bir noktaya kadar türevi küçük olanın daha büyük değer, türevi büyük olan diferensiyel denklemin daha küçük değer aldığı gözlenir. Belirli bir noktadan sonra ise türevi büyük olan diferensiyel denklemin daha büyük sonuçlar aldığı gözlenmekteir. $q = 1$ ve $q = 0,99$ türev değerleri için verilerin ve grafiğin birbirine oldukça yakın olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.5. Örnek 4.3'deki problem için, $h = 0,01$ adım aralığı ve $q = 0,25$, $q = 0,5$, $q = 0,75$ ve $q = 1$ farklı türev mertebelerinin çözüme etkisinin incelenmesi

$h = 0,01$

q	$0,01$	$0,25$	$0,50$	$0,75$	$0,99$	1
t						
0,5	0,388095	0,319591	0,250215	0,186218	0,134270	0,129672
1	1,247302	1,12790	1,000261	0,867461	0,737728	0,726304
2	4,125290	4,06674	4,000306	3,921793	3,829871	3,814449
3	8,420506	8,701851	9,000339	9,310598	9,629502	9,630925
4	14,057119	14,998972	16,000345	17,047647	18,131399	18,165949
5	20,991470	22,94085	25,000357	27,122951	29,265401	29,345021



Şekil 4.2. Örnek 4.3'deki problem için, $h = 0,01$ adım aralığı ve $q = 0,25$, $q = 0,5$, $q = 0,75$ ve $q = 1$ farklı türev mertebeleri için çözüme etkisinin karşılaştırılması

5. AYNI ZAMANDA KESİRLİ MERTEBEDEN TÜREV VE TAM SAYI MERTEBEDEN TÜREV İÇEREN BELİRLİ TİPTE DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Bu bölümde, Bölüm 4'te bahsedilen yaklaşım yöntemi tekniğiyle birinci veya ikinci mertebeden türev terimleri de içeren kesirli diferensiyel denklemlerin yaklaşık olarak çözümleri hesaplanmıştır.

5.1. Birinci Mertebeden Türev İçeren Kesirli Diferensiyel Denklemin Çözümü

Şimdi diğer bölümlerde elde ettiğimiz bilgilerden yararlanarak,

$$D^q[y - y_0](t) = y'(t) + \beta y(t) + f(t) \qquad y(t_0) = y_0 \tag{5.1}$$

biçimindeki, içinde birinci mertebeden türev içeren kesirli mertebeden diferensiyel denklemin çözümünü inceleyeceğiz. Burada $0 < q < 1$, f bir fonksiyon, y bilinmeyen bir fonksiyondur. $D^q y$ ise, q. mertebeden y fonksiyonunun Riemann-Liouville kesirli türevini tanımlamaktadır Yaklaşım yönteminde kesirli mertebeden diferensiyel denklem, aralık parçalara ayrılarak adım adım çözüme ulaşılmıştır. Eş. 5.1 diferensiyel denkleminde $y'(t)$ türevini bulurken daha yakın sonuçlar verdiği için merkezi farklar formülasyonu kullanılacaktır. Merkezi farklar formülasyonu göre, f fonksiyonunun türevi,

$$f'(t_i) \approx \frac{f(t_{i+1}) - f(t_{i-1})}{2h} \tag{5.2}$$

şeklindedir. Bu son denklemde h ne kadar küçük seçilirse türev sonucuna daha da yaklaşılmış olur. Eş. 4.5, Eş. 4.6, Eş. 4.11 ve Eş. 5.2'den yararlanıp, 5.1'de yerine yazılırsa,

$$\frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} + f(t_j) + \beta y(t_j) = \frac{t_j^{-q}\alpha_{0j}}{\Gamma(-q)} y_j + \frac{t_j^{-q}}{\Gamma(-q)} \Big(\sum_{k=1}^{j} \alpha_{kj} y_{j-k} + \frac{1}{q} y_0 \Big) \tag{5.3}$$

elde edilir. Bu denklemi y_{j+1} ye göre düzenlenirse,

$$\frac{y_{j+1}}{2h} = \frac{y_{j-1}}{2h} - f(t_j) - \beta y_j + \frac{t_j^{-q}\alpha_{0j}}{\Gamma(-q)} y_j + \frac{t_j^{-q}}{\Gamma(-q)} \Big(\sum_{k=1}^{j} \alpha_{kj} y_{j-k} + \frac{1}{q} y_0 \Big) \tag{5.4}$$

olur. Buradan,

$$y_{j+1} = 2h\left[\frac{y_{j-1}}{2h} - f(t_j) + y(t_j)\Big(\frac{t_j^{-q}\alpha_{0j}}{\Gamma(-q)} - \beta\Big) + \frac{t_j^{-q}}{\Gamma(-q)}\Big(\sum_{k=1}^{j}\alpha_{kj}y_{j-k} + \frac{1}{q}y_0\Big)\right] \tag{5.5}$$

çözümü bulunur . Bu çözümde $j = 1$ için y_2 nin hesaplanması problemi karşımıza çıkar. y_2 değerini hesaplayabilmek için y_1 ve y_0 değerlerinin bilinmesi gerekmektedir. y_0 değeri soruda verilen başlangıç koşuludur. Fakat Eş. 5.5'den y_1 değeri bulunamaz. Bu diferensiyel denklemi çözerken y_1 in değerinin hesaplanabilmesi için Eş. 5.2'de verilen merkezi fark formülasyonu yerine geri farklar formülasyonu kullanılabilir.

$$f'(t_i) \approx \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{h} \tag{5.6}$$

ifadesi Eş. 5.1'de yerine yazılırsa,

$$\frac{y_j - y_{j-1}}{h} + f(t_j) + \beta y(t_j) = \frac{t_j^{-q}\alpha_{0j}}{\Gamma(-q)}y_j + \frac{t_j^{-q}}{\Gamma(-q)}\Big(\sum_{k=1}^{j}\alpha_{kj}y_{j-k} + \frac{1}{q}y_0\Big) \tag{5.7}$$

denklemi elde edilir. Bu denklem y_j ye göre düzenlenirse,

$$y_j\Big(\frac{1}{h} + \beta - \frac{t_j^{-q}\alpha_{0j}}{\Gamma(-q)}\Big) = \frac{y_{j-1}}{h} - f(t_j) + \frac{t_j^{-q}}{\Gamma(-q)}\Big(\sum_{k=1}^{j}\alpha_{kj}y_{j-k} + \frac{1}{q}y_0\Big) \tag{5.8}$$

bulunur. $j = 1$ için,

$$y_1\Big(\frac{1}{h} + \beta - \frac{t_1^{-q}\alpha_{01}}{\Gamma(-q)}\Big) = \frac{y_0}{h} - f(t_1) + \frac{t_1^{-q}}{\Gamma(-q)}\Big(\alpha_{11}y_0 + \frac{1}{q}y_0\Big) \tag{5.9}$$

olur ve y_1 değeri

$$y_1 = \frac{ht_1^q\Gamma(-q)}{\Gamma(-q)t_1^q + \beta h\Gamma(-q)t_1^q - h\alpha_{01}}\left(\frac{y_0}{h} - f(t_1) + \frac{t_1^{-q}}{\Gamma(-q)}\Big(\alpha_{11}y_0 + \frac{1}{q}y_0\Big)\right) \tag{5.10}$$

elde edilir. y_1 değeri elde edildikten sonra, $j = 2, 3, .., n$ çözümü için sırasıyla $y_2, y_3, ..., y_n$ çözümleri Eş. 5.5'den hesaplanabilir. Şimdi birinci mertebeden türev içeren kesirli diferensiyel denklemleri için yaklaşık çözümüne bir örnek verelim.

Örnek 5.1.

Başlangıç koşulu verilen kesirli mertebeden diferensiyel denkleminin çözümünü inceleyelim.

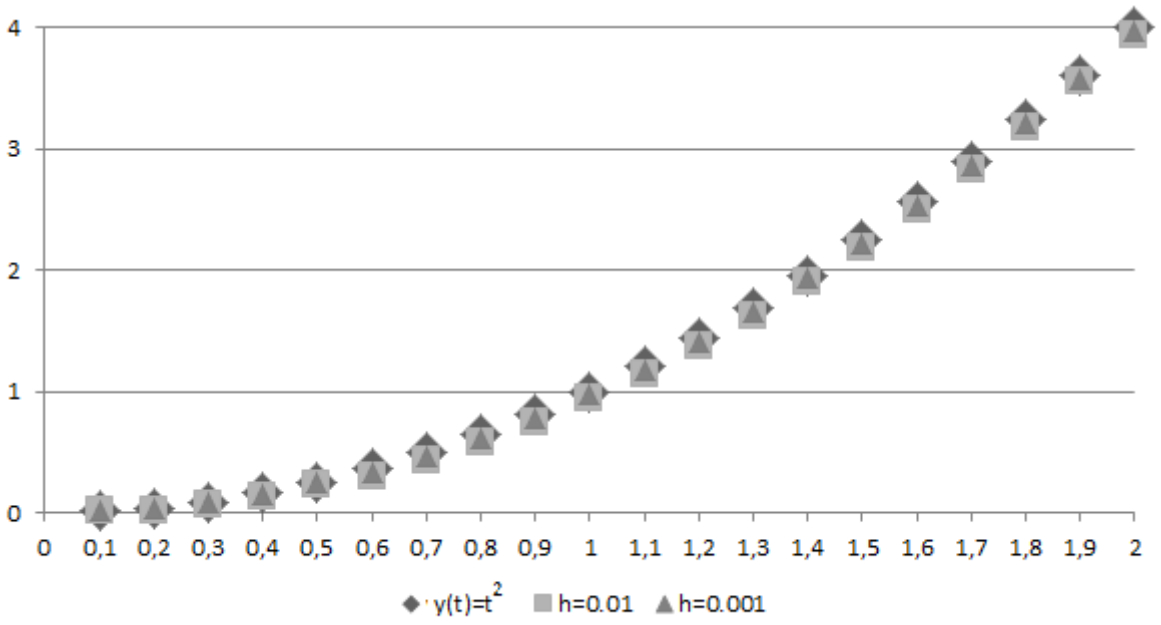
$$D^q[y](t) = y'(t) - y(t) + t^2 - 2t + \frac{2}{\Gamma(3-q)}t^{2-q}, \qquad y(0) = 0 \tag{5.11}$$

Bu diferensiyel denklemin çözümü de Eş. 2.38'den $D_t^q t^2 = \dfrac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-q)}t^{2-q}$ olduğundan çözümü t^2 olduğu kolayca görülebilir. Gerçekten $y(t) = t^2$ için $D_t^q t^2 = \dfrac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-q)}t^{2-q}$ $y'(t) = 2t$ olur. Diferensiyel denklemde verileri yerine yazdığımızda diferensiyel denklemi sağlar. $q = 1/2$ olmak üzere Çizelge 5.1 sonuçları ve Şekil 5.1 de grafikleri elde edilmiştir. $h = 0,01$ ve $h = 0,001$ için gerçek sonuca yakın olduğu görünür. Parçalanma küçültüldüğünde hata değeri daha da küçülmektedir.

Çizelge 5.1. Örnek 5.1'deki problem için, $q = 1/2$ kesirli mertebeden ve birinci mertebeden türev içeren diferensiyel denklemin, $h = 0,01$ ve $h = 0,001$ farklı adım aralıkları için sonuca etkisinin incelenmesi

$q = 1/2$

t	$y(t) = t^2$	$h = 0,01$ için y_j	$h = 0,001$ için y_j
0,1	0,01	0,010028	0,009999
0,2	0,04	0,039985	0,039996
0,3	0,09	0,089913	0,089993
0,4	0,16	0,159814	0,159988
0,5	0,25	0,249681	0,249982
0,6	0,36	0,359506	0,359974
0,7	0,49	0,489276	0,489964
0,8	0,64	0,638975	0,639950
0,9	0,81	0,808583	0,809933
1	1	0,998071	0,999910
2	4	3,969747	3,998636



Şekil 5.1. Örnek 5.1'deki problem için, $q = 1/2$ kesirli mertebeden ve birinci mertebeden türev içeren diferensiyel denklemin, $h = 0,01$ ve $h = 0,001$ farklı adım aralıkları için sonuçların karşılaştırılması

Örnek 5.2

Aşağıda verilen kesirli mertebeden diferensiyel denklemin çözümünü inceleyelim.

$$D^q[y](t) = y'(t) - y(t) + t^4 - \frac{1}{2}t^3 - 4t^3 + \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{\Gamma(4-q)}t^{3-q} + \frac{24}{\Gamma(5-q)}t^{4-q}, y(0) = 0 \quad (5.12)$$

Bu diferensiyel denklemin çözümü,

$$y(t) = t^4 - \frac{1}{2}t^3 \quad (5.13)$$

şeklindedir. $y(t)$ yi diferensiyel denklemde yerine yazarsak çözümü sağladığını kolayca görebiliriz.

Eş. 5.5'de bulunan y_j sonuçları Çizelge 5.2'da verilmiştir.

Çözdüğümüz iki diferensiyel denklemde de h yi ne kadar küçük seçersek istediğimiz sonuca daha da yaklaşmış oluruz.

Çizelge 5.2. Örnek 5.2'deki problem için, $q = 1/2$ kesirli mertebeden ve birinci mertebeden türev içeren diferensiyel denklemin $h = 0,01$ ve $h = 0,001$ farklı adım aralıkları için sonuca etkisinin incelenmesi

$q = 1/2$

t	$y(t) = t^4 - \frac{1}{2}t^3$	$h = 0,01$ için y_j	$h = 0,001$ için y_j
0,1	-0,0004	-0,000394	-0,000400
0,2	-0,0024	-0,002388	-0,002400
0,3	-0,0054	-0,005389	-0,005400
0,4	-0,0064	-0,006409	-0,006400
0,5	0	-0,000063	-0,000001
0,6	0,0216	0,021430	0,021596
0,7	0,0686	0,068244	0,685591
0,8	0,01536	0,152945	0,153583
0,9	0,2916	0,290491	0,291570
1	0,5	0,498223	0,499952
2	12	11,94467	11,998397

5.2. İkinci Mertebeden Türev İçeren Kesirli Diferensiyel Denklemin Çözümü

Şimdi ise ikinci mertebeden ve kesirli mertebeden türev içeren bir diferensiyel denklemin çözümünü benzer yöntemlerle elde edeceğiz.

$$D^q[y - y_0](t) = y''(t) + \beta y(t) + f(t) \qquad y(0) = y_0 \tag{5.14}$$

biçimindeki kesirli mertebeden türevle birlikte ikinci mertebeden türev de içeren diferensiyel denkleminin çözümünü inceleyeceğiz. Burada $0 < q < 1$, f bir fonksiyon ve y bilinmeyen bir fonksiyondur. $D^q y$ ise, q. mertebeden y fonksiyonunun Riemann-Liouville kesirli türevini tanımlamaktadır. Yaklaşım yönteminde kesirli mertebeden diferensiyel denklemi çözerken aralığı parçalara ayırıp çözmüştük. $y''(t)$ türevini bulurken de merkezi farklar formülasyonunu kullanacığız. Merkezi farklar formülasyonuna göre, f fonksiyonunun türevi

$$f''(t_i) \approx \frac{f(t_{i+1}) - 2f(t_j) + f(t_{i-1})}{h^2} \tag{5.15}$$

şeklindedir. Bu son denklemde h ne kadar küçük seçilirse türev sonucuna daha da yaklaşılır. Eş. 4.5, Eş. 4.6, Eş. 4.11 ve Eş. 5.15'den yararlanıp Eş. 5.14'de yerine yazılırsa,

$$\frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} + f(t_j) + \beta y(t_j) = \frac{t_j^{-q}\alpha_{0j}}{\Gamma(-q)} y_j + \frac{t_j^{-q}}{\Gamma(-q)} \Big(\sum_{k=1}^{j} \alpha_{kj} y_{j-k} + \frac{1}{q} y_0 \Big) \tag{5.16}$$

elde edilir. Bu denklem y_j ye göre düzenlenirse,

$$\frac{y_{j+1}}{h^2} = \frac{2y_j}{h^2} - \frac{y_{j-1}}{h^2} - f(t_j) - \beta y_j + \frac{t_j^{-q}\alpha_{0j}}{\Gamma(-q)} y_j + \frac{t_j^{-q}}{\Gamma(-q)}\Big(\sum_{k=1}^{j} \alpha_{kj} y_{j-k} + \frac{1}{q} y_0\Big) \tag{5.17}$$

olur. Buradan,

$$y_{j+1} = h^2\left[-\frac{y_{j-1}}{h^2} - f(t_j) + y_j\Big(\frac{2}{h^2} + \frac{t_j^{-q}\alpha_{0j}}{\Gamma(-q)} - \beta\Big) + \frac{t_j^{-q}}{\Gamma(-q)}\Big(\sum_{k=1}^{j} \alpha_{kj} y_{j-k} + \frac{1}{q} y_0\Big)\right] \tag{5.18}$$

elde edilir.

Örnek 5.3

Başlangıç koşulu verilen kesirli mertebeden diferensiyel denkleminin çözümünü inceleyelim.

$$D^q[y](t) = y''(t) - y(t) + t^2 - 2 + \frac{2}{\Gamma(3-q)} t^{2-q}, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0 \tag{5.19}$$

Bu diferensiyel denklemin çözümü de Eş. yine 2.38'den $D_t^q t^2 = \dfrac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-q)} t^{2-q}$ olduğundan çözümü t^2 olduğu kolayca görülebilir. Gerçekten $y(t) = t^2$ için $y''(t) = 2$ ve $D_t^q t^2 = \dfrac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-q)} t^{2-q}$ olur. Diferensiyel denklemde verileri yerine yazdığımızda diferensiyel denklemi sağlar. $q = 1/2$ olarak seçelim. y_j sonuçları Çizelge 5.3'de gösterilmektedir. Bulunan değerlerin gerçek sonuca daha küçük parçalanmada daha da yakın olduğu görülür.

Çizelge 5.3. Örnek 5.3'deki problem için, $q = 1/2$ kesirli mertebeden ve ikinci mertebeden türev içeren diferensiyel denklemin , $h = 0,001$ ve $h = 0,0001$ farklı adım aralıklarının sonuca etkisinin incelenmesi

$q = 1/2$

t	$y(t) = t^2$	$h = 0,001$ için y_j	$h = 0,0001$ için y_j
0,1	0,01	0,009899	0,00999
0,2	0,04	0,039793	0,039979
0,3	0,09	0,08679	0,089968
0,4	0,16	0,159556	0,159956
0,5	0,25	0,249419	0,249942
0,6	0,36	0,359267	0,359927
0,7	0,49	0,489095	0,489910
0,8	0,64	0,63890	0,639890
0,9	0,81	0,808679	0,809868
1	1	0,998425	0,999843
2	4	3,992355	3,996594

Örnek 5.4

$$D^q[y](t) = y''(t) - y(t) + t^4 - \frac{1}{2}t^3 - 12t^2 + 3t - \frac{3}{\Gamma(4-q)}t^{3-q} + \frac{24}{\Gamma(5-q)}t^{4-q}, \qquad (5.20)$$

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$$

kesirli mertebeden diferensiyel denklemin çözümü,

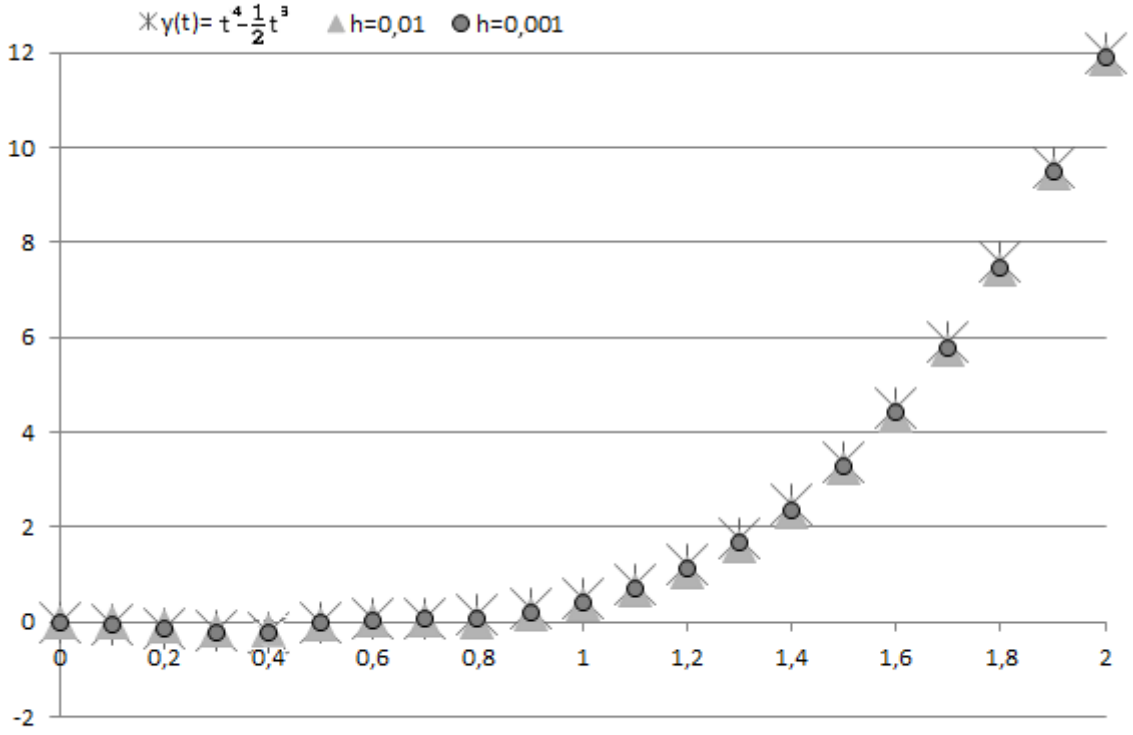
$$y(t) = t^4 - \frac{1}{2}t^3 \qquad (5.21)$$

şeklindedir. $y(t)$ denklemini diferensiyel denklemde yerine yazarsak çözümü sağladığını kolayca görülebilir. $q = 1/2$ için yaklaşık çözümünü hesaplanırsa elde edilen veriler Çizelge 5.4'de grafiği de Şekil 5.2 de verilmiştir. Parçalanma küçültüldüğünde gerçek değere daha yakın sonuçlar elde edilir.

Çizelge 5.4. Örnek 5.4'deki problem için, $q = 1/2$ kesirli mertebeden ve ikinci mertebeden türev içeren diferensiyel denklemin, $h = 0,01$ ve $h = 0,001$ farklı adım aralıklarının sonuca etkisinin incelenmesi

$q = 1/2$

t	$y(t) = t^4 - \frac{1}{2}t^3$	$h = 0,01$ için y_j	$h = 0,001$ için y_j
0,1	-0,0004	-0,000396	-0,0004
0,2	-0,0024	-0,002393	-0,0024
0,3	-0,0054	-0,005392	-0,0054
0,4	-0,0064	-0,006393	-0,0064
0,5	0	-0,00002	0,0
0,6	0,0216	0,021592	0,0216
0,7	0,0686	0,068575	0,068599
0,8	0,1536	0,153545	0,153599
0,9	0,2916	0,291501	0,291597
1	0,5	0,499835	0,499996
2	12	11,995804	11,99987



Şekil 5.2. Örnek 5.4'deki problem için, $q = 1/2$ kesirli mertebeden ve ikinci mertebeden türev içeren diferensiyel denklemin, $h = 0,01$ ve $h = 0,001$ farklı adım aralıkları için sonuçların karşılaştırılması

Örnek 5.5

$$D^q[y](t) = y''(t) - y(t) + t^4 - \frac{1}{2}t^3 - 12t^2 + 3t - \frac{3}{\Gamma(3,5)}t^{2,5} + \frac{24}{\Gamma(4,5)}t^{3,5}, \tag{5.22}$$

$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$
başlangıç şartı verilen diferensiyel denklemde $q = 0,5$ için,

$$D^{0,5}[y](t) = y''(t) - y(t) + t^4 - \frac{1}{2}t^3 - 12t^2 + 3t - \frac{3}{\Gamma(3,5)}t^{2,5} + \frac{24}{\Gamma(4,5)}t^{3,5} \tag{5.23}$$

elde edilir. Bu diferensiyel denklemin çözümü,

$$y(t) = t^4 - \frac{1}{2}t^3 \tag{5.24}$$

dır. Gerçekten Eş. 2.38'dan,

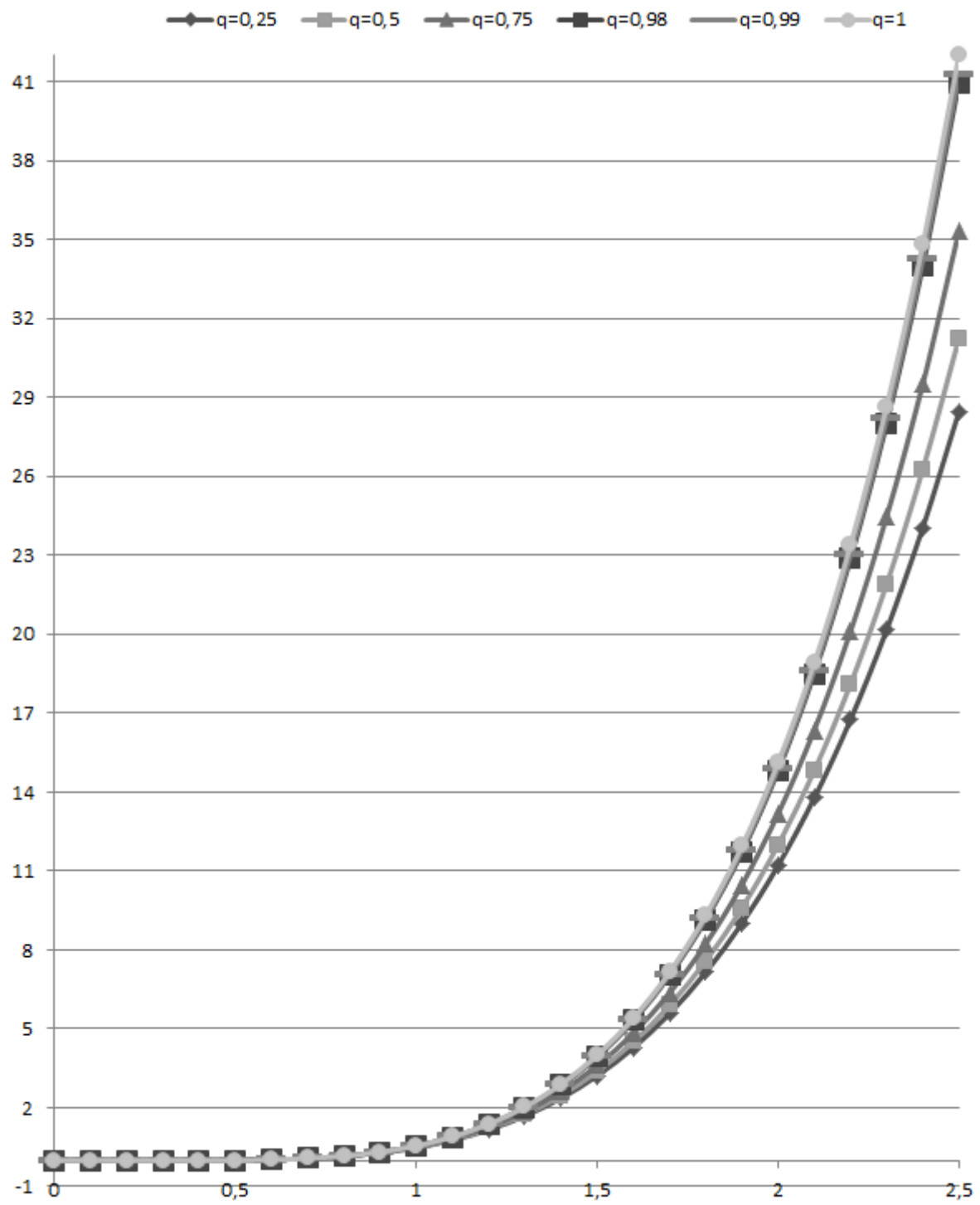
$$D^{0,5}[y](t) = D_t^{0,5}(t^4 - \frac{1}{2}t^3) = \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(5-0,5)}t^{4-0,5} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4-0,5)}t^{3-0,5} \tag{5.25}$$

$$= \frac{24}{\Gamma(4,5)}t^{3,5} - \frac{3}{\Gamma(3,5)}t^{2,5}$$

elde edilir ve $y''(t) = 12t^2 - 3t$ elde olur. Bulunan değerler Eş. 5.23'de yerine yazılırsa diferensiyel denklemin çözümü $q = 0,5$ için $y(t) = t^4 - \frac{1}{2}t^3$ olduğu açıktır. $q = 0,5$ diferensiyel denklemin analitik çözümü vardır fakat q nun farklı değerleri için diferensiyel denklemin çözümü kolaylıkla hesaplanamaz. Başlangıç şartı verilen diferensiyel denklemi h=0,01 adım aralığında $q = 0,25$, $q = 0,5$, $q = 0,75$, $q = 0,98$, $q = 0,99$ ve $q = 1$ türevi için çözümleri incelenmiştir. $q = 1$ için diferensiyel denklemin çözümü Maple 12 programıyla bulunmuştur. Elde edilen veriler Çizelge 5.5'de, grafiği de Şekil 5.3'de verilmiştir. Sonuçlardan ve grafikten elde edilen verilerden, q türevli diferensiyel denklemin çözümü $y_q(t)$ olmak üzere, $0 < m < 1$ olmak üzere $0 < t_n \leq 0,6$ aralığında $y_q(t_n) > y_{q+m}(t_n)$ dir. Ayrıca $0 < m < 1$ olmak üzere $0,7 \leq t_n \leq 2,5$ aralığında $y_{q+m}(t_n) > y_q(t_n)$ sonucu elde edilir. Çözüm fonksiyonlarının grafikleri birbirine benzemektedir.

Çizelge 5.5. Örnek 5.5'deki problem için, Kesirli mertebeden ve ikinci mertebeden türev içceren diferensiyel denklemin $h = 0,01$ adım aralığında $q = 0,25$, $q = 0,50$, $q = 0,75$, $q = 0,98$, $q = 0,99$ ve $q = 1$ farklı kesirli türev değerlerinin çözüme etkisinin incelenmesi

t	$q = 0,25$	$q = 0,50$	$q = 0,75$	$q = 0,98$	$q = 0,99$	$q = 1$
0,1	-0,000395	-0,000396	-0,000398	-0,000402	-0,000403	-0,000409
0,2	-0,002378	-0,002393	-0,002426	-0,002485	-0,002489	-0,002512
0,3	-0,005322	-0,005392	-0,005526	-0,005749	-0,005762	-0,005814
0,4	-0,006221	-0,006393	-0,006695	-0,007162	-0,007188	-0,007264
0,5	0,002730	0,000002	-0,000419	-0,001004	-0,001035	-0,001089
0,6	0,021797	0,021592	0,021390	0,021272	0,021270	0,021363
0,7	0,068236	0,068575	0,069455	0,071181	0,071285	0,071763
0,8	0,151672	0,153545	0,157197	0,163340	0,163692	0,164957
0,9	0,286335	0,291501	0,300796	0,315604	0,316437	0,319108
1	0,488557	0,499835	0,519255	0,549213	0,550879	0,555859
1,1	0,776715	0,798342	0,834462	0,888941	0,891944	0,900498
1,2	1,171183	1,209214	1,271270	1,363262	1,368300	1,382140
1,3	1,694274	1,757042	1,857565	2,004531	2,012538	2,033929
1,4	2,370178	2,468815	2,624354	2,849186	2,861383	2,893261
1,5	3,224901	3,373920	3,605858	3,937973	3,955926	4,002041
1,6	4,286190	4,504142	4,839616	5,316208	5,341895	5,406972
1,7	5,583458	5,893640	6,366604	7,034068	7,069957	7,159888
1,8	7,147695	7,579065	8,231367	9,146936	9,196072	9,318141
1,9	9,011373	9,599321	10,482177	11,715792	11,781898	11,945046
2	11,208337	11,995804	13,171205	14,807674	14,895269	15,110400
2,1	13,773679	14,812282	16,354728	18,496207	18,610746	18,891091
2,2	16,743599	18,094916	20,093361	22,862280	23,010259	23,371806
2,3	20,155246	21,892262	24,452334	27,994512	28,183862	28,645861
2,4	24,046536	26,255269	29,501805	33,990621	34,230616	34,816172
2,5	28,455937	31,237277	35,317226	40,957901	41,259621	41,996399



Şekil 5.3. Örnek 5.5'deki problem için, kesirli mertebeden ve ikinci mertebeden türev içeren diferensiyel denklemin $h = 0,01$ adım aralığında $q = 0,25$, $q = 0,50$, $q = 0,75$, $q = 0,98$, $q = 0,99$ ve $q = 1$ farklı kesirli türev değerlerinin çözüme etkisinin karşılaştırılması

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Kesirli diferensiyel denklemlerin çözümlerinde farklı çözüm yöntemleri mevcuttur. Laplace dönüşümü yardımıyla diferensiyel denklemin analitik çözümü bulunabilir. Bu yöntemin dezavantajı; Laplace dönüşümü diferensiyel denklemdeki ifadelere uygulandıktan sonra bulunan $Y(s)$ çözümünden tekrar $y(t)$ ye geçebilmek için $Y(s)$'nin ters Laplace dönüşümünün bulması gerekir. Fakat her zaman $Y(s)$'nin ters Laplace dönüşümü kolay elde edilmez veya bulunamaz.

Kuvvet serisi yardımıyla diferensiyel denklemi çözerken seri diferensiyel denkleme yazılır ve serinin katsayıları hesaplanır. Tüm katsayıları bulmak bazen mümkün değildir. Bu yöntemde yeterli çoklukta katsayı hesaplanırsa gerçek değere daha yakın sonuç bulunur.

Burada kullandığımız yaklaşım yöntemi ise başlangıç noktasından başlayarak h adım aralığı için y_1, y_2,..., y_{j-1}, y_j sonuçları kolayca bulunmaktadır. Kesirli türevin değişmesi sonucu diferensiyel denklemin çözümünde elde edilen veriler Çizelge 4.5'de ve Şekil 4.2'de verilmiştir. Bu yöntemde başlangıç noktasından uzaklaştıkça hata miktarı daha da artmaktadır. Çizelge 4.1'e bakıldığında, $h = 0,1$ olduğunda $t = 1$ için hata $0,007725$ iken, $t = 10$ için hata $0,012019$ olduğu gözlenmiştir. $h = 0,01$ ve $h = 0,001$ için de benzer durum gözlenir. Hata adım aralığı arttıkça küçülmektedir. Çizelge 4.1'e bakıldığında $t = 1$ için $h = 0,1$ adım aralığında hata $0,007725$, $h = 0,01$ adım aralığında hata $0,000261$, $h = 0,001$ adım aralığında hata $0,000008$ olmaktadır.

Bölüm 5'de tamsayı mertebeden türev ile birlikte ve kesirli türev içeren diferensiyel denklemin çözümü elde edilmiştir. Bulunan çözüm ile gerçek çözüm arasındaki hatanın küçük olduğu Çizelge 5.2 ve Çizelge 5.3'da gözlenmektedir. Türevin değişmesinin diferensiyel denklemin sonucuna etkisi Çizelge 5.5 ve grafiği Şekil 5.3'de verilmiştir.

Yapılan bu çalışmada adım aralığı yeterince küçük seçildiği zaman gerçek değere daha yakın sonuçlar bulunmuştur. Bu yöntemin avantajı bilinen yöntemlerle çözülemeyen diferensiyel denklemin çözümünün yaklaşık değerlerinin hesaplanabilmesidir.

KAYNAKLAR

1. Blank, L.(1996). Numerical treatment of differential equations of fractional order. *Numerical Analysis Manchester, Centre for Computational Mathematics.287*

2. Das, S. (2008). *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls.* Berlin:Springer.

3. Diethelm, K. (1997). An algorithm for the numerical solution for differential equations of fractional order. *Electronic Transaction Numerical Analysis.* 5, 1-6.

4. Diethelm,K. Walz, G. (1997). Numerical solution of fractional order differential equations by extrapolation. *Numerical Algorithms* 16, 231-253.

5. Diethelm, K., Ford,N. (2002). Analysis of Fractional Differential Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 265, 229-248.

6. Diethelm, K.(1997). Generalized compound quadrature formulae for finite-part integrals.*IMA Journal of Numerical Analysis*, 479-493.

7. Elliott, D.(1993). An asymptotic analysis of two algorithms for certain Hadamard finite-part integrals.*IMA Journal of Numerical Analysis*, 13, 445-462.

8. El-Ajou, A. , Abu Arqub, O. , Al Zhour Z. and Momani S. (2013). New results on fractional power series: theories and applications.*Entropy*, 15, 5305 -5323.

9. Gaul, L. , Klein P. and Kempfle S.(1991).Damping description involving fractional operators *Mechanical Systems Signal Processing* , 5, 81-88.

10. Gorenflo, R. and Rutman, R.(1995), On ultraslow and intermediate processes. In P. Rusev, I. Dimovski, and V. Kiryakova (Eds.),*Transform Methods and Special Functions.* Sofia, 61-81.

11. Mathai, A.M., Saxena, R.K. and Haubold, H.J. (2010).*The H-function: Theory and Applications.* New York:Springer, 76-77.

12. Miller,K.S. ,Ross,B. (1993) .*An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations.* New York:John Wiley and Sons,Inc.

13. Oldham, K. B. AND Spanier, J. (1974) *The Fractional Calculus, Mathematics in Science and Engineering* New York, London:Academic Press,111.

14. Podlubny, I. (1999) *Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solution and Some of Their Applications.* New York: Academic Press.

15. Rahimy, M. (2010). Applications of Fractional Differential Equations. *Applied Mathematical Sciences,* 4(50), 2453 - 2461.

16. Ray S.S., Bera R.K (2005). An approximate solution of a nonlinear fractional differential equation by Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, 167, 561-571.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler



Soyadı, adı : GÖRGÜLÜ, Onur

Uyruğu : T.C.

Doğum tarihi ve yeri : 13.09.1987, Ankara

Medeni hali : Evli

Telefon : 0 (505) 404 06 17

e-mail : onr_grg@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi /Matematik	Devam Ediyor
Lisans	Afyon Kocatepe Üniversitesi /Matematik	2009
Lise	Sokullu Mehmet Paşa Lisesi	2005

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2012-Halen	Ankara Çalışma ve İşkurumu	İş ve Meslek Danışmanı

Yabancı Dil

İngilizce



GAZİ GELECEKTİR...