
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

FUZZY n-NORMLU UZAYLARDA BAZI ÖZEL DÖNÜŞÜMLER VE ÖZELLİKLERİ

MUHAMMED RECAİ TÜRKMEN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ŞUBAT 2015

Muhammed Recai TÜRKMEN tarafından hazırlanan "FUZZY n-NORMLU UZAYLARDA BAZI ÖZEL DÖNÜŞÜMLER VE ÖZELLİKLERİ" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Hakan EFE

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum ……

Başkan : Prof. Dr. Cemil YILDIZ

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum ……

Üye : Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum ……

Üye : Doç. Dr. Erdal GÜNER

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum ……

Üye : Doç. Dr. Çetin VURAL

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum ……

Tez Savunma Tarihi: 17/02/2015

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

……
Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Muhammed Recai Türkmen

17.02.2015

FUZZY n-NORMLU UZAYLARDA BAZI ÖZEL DÖNÜŞÜMLER VE ÖZELLİKLERİ

(Doktora Tezi)

Muhammed Recai TÜRKMEN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Şubat 2015

ÖZET

Bu tez çalışmasında; fuzzy n-normlu uzaylarda en uzak nokta dönüşümü ve bu dönüşümün bazı özellikleri ile fuzzy anti n-normlu uzaylarda lineer dönüşümler ve serilerin yakınsaklığını koruyan dönüşümler ele alınmıştır. 2. Bölümde, diğer bölümlerde kullandığımız temel kavramlar olan vektör uzayı, norm ve n-norm tanımları ve bu tanımlarla ilgili diğer temel kavramlar ve teoremler verilmiştir. 3. bölümde fuzzy norm, fuzzy 2-norm, fuzzy n-norm tanımları verilmiştir. Ayrıca yakınsaklık, sınırlılık gibi önemli tanım ve teoremlere örneklerle birlikte yer verilmiştir. Normlu uzaylarda en uzak nokta dönüşümü ile en uzak nokta küme tanımını ve örnekleri 4. bölümde verilmiştir. Bu bölümde ilk defa fuzzy n-normlu uzaylarda en uzak nokta dönüşümü ve bunların özellikleri incelenmiştir. Bunun yanı sıra klasik anlamda n-normlu uzaylardaki en uzak nokta dönüşümü ve kümesi ile fuzzy n-normlu uzaylarda en uzak nokta dönüşümü ve kümesinin karşılaştırılması verilmiştir. 5. bölümde fuzzy anti norm, fuzzy anti 2-norm, fuzzy anti n-norm tanımları ve bunlarla ilgili teoremler verilmiştir. Yeniden yorumladığımız fuzzy anti n-normlu uzaylarda lineer dönüşümler ve bunların özellikleri ile ilk defa tanımladığımız fuzzy anti n-normlu uzaylarda serilerin yakınsaklığını koruyan dönüşümlere 6. bölümde yer verilmiştir.

Bilim Kodu	:	204.1.132
Anahtar Kelimeler	:	Fuzzy n-norm, Fuzzy anti n-norm, lineer dönüşüm, yakınsak seriler, en uzak nokta, yakınsaklığı koruyan dönüşümler.
Sayfa Adedi	:	83
Danışman	:	Doç. Dr. Hakan EFE

SOME SPECIAL MAPS AND THEIR PROPERTIES IN FUZZY n-NORMED SPACES

(Ph. D. Thesis)

Muhammed Recai TÜRKMEN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

February 2015

ABSRACT

In this study, the farthest point map on fuzzy n-normed spaces, some properties of this conversion, linear maps and maps preserving convergence of series on fuzzy anti n-normed spaces have been discussed. In the section 2, the definitions of vector space, norm and n-norm which are used in other sections and other basic concepts and theorems concerned with these definitions have been given. In the section 3, the definitions of fuzzy norm, fuzzy 2-norm and fuzzy n-norm have been recalled. Moreover, important definitions and theorems such as convergence and boundedness have been included with examples. In the section 4 in which we give the farthest point map, set of farthest point on normed spaces and their examples, for the first time, the farthest point map and its properties have been observed. Besides, the comparison between the farthest point and the set of farthest point in classical meaning n-normed spaces and the farthest point map and set of farthest point on fuzyy n-normed spaces has been given. In the fifth section, the definitions of fuzzy anti norm, fuzzy anti-2-norm and fuzzy anti-n-norm and the theorems related to these definitions have been reminded. The linear maps and their properties we have interpreted once more again and the maps preserving the convergence of series on fuzzy anti n-normed spaces we identify for the first time have been included in the sixth section.

Science Code : 204.1.132

Key Words : Fuzzy n-norm, fuzzy anti-n-norm, linear operator, convergent series, the farthest point, maps preserving convergence.

Page Number : 83

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Hakan EFE

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlarken beni yönlendiren, kaynaklarla destekleyen, fikirleriyle yol gösteren, değerli zamanlarını bana ayıran Sayın Hocam Doç. Dr. Hakan EFE' ye teşekkürü borç bilirim. Süreç içerisinde karşılaştığım zorlukların üstesinden gelmemde yardımcı olan değerli hocalarım Prof. Dr. Cemil Yıldız ve Doç. Dr. Erdal GÜNER' e teşekkür ederim. Ayrıca maddi ve manevi destekleriyle hiçbir zaman beni yalnız bırakmayan fedakâr eşim Nazife'ye ve çocuklarım Mert ile Duru'ya teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

SİMGELER VE KISALTMALAR ix

1. GİRİŞ 1

2. NORMLU UZAYLAR 5

2.1. Temel Bilgiler 5

2.2. n-Normlu Uzaylar 9

3. FUZZY NORMLU UZAYLAR 11

3.1. Fuzzy Norm 11

3.2. Fuzzy 2-Norm 18

3.3. Fuzzy n-Norm 20

4. FUZZY n-NORMLU UZAYLARDA EN UZAK NOKTA DÖNÜŞÜMÜ VE ÖZELLİKLERİ 25

4.1. Normlu Uzaylarda En Uzak Nokta Dönüşümü 25

4.2. Fuzzy n-Normlu Uzaylarda En Uzak Nokta Dönüşümü 27

4.3. Fuzzy n-Norm İle Klasik n-Normlu Uzaylarda En Uzak Nokta Dönüşümünün Karşılaştırılması 33

5. FUZZY ANTİ NORMLU UZAYLAR 43

5.1. Fuzzy Anti Norm 43

5.2. Fuzzy Anti 2-Norm 46

5.3. Fuzzy Anti n-Norm 50

Sayfa

6. FUZZY ANTİ n-NORMLU UZAYLARDA SERİLERİN YAKINSAKLIĞINI KORUYAN DÖNÜŞÜMLER 57

6.1. Fuzzy Anti n-Normlu Uzaylarda Lineer Dönüşümler 57

6.2. Fuzzy Anti n-Normlu Uzaylarda Mutlak Yakınsak Seriler 72

6.3. Fuzzy Anti n-Normlu Uzaylarda Serilerin Yakınsaklığını Koruyan Dönüşümler 75

7. SONUÇ VE ÖNERİLER 79

KAYNAKLAR 81

ÖZGEÇMİŞ 83

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\|\ \|$	Norm
N	Fuzzy norm
N^*	Fuzzy anti norm
(X, N)	Fuzzy normlu lineer uzay
$\|\ \|_\alpha$	Fuzzy norma karşılık gelen α - norm
$\|\ \|_\alpha^*$	Fuzzy anti norma karşılık gelen α - anti norm
θ	Uzayın sıfır vektörü
$Q(x)$	A ya göre *x* den en uzak nokta dönüşümü
$Q_\alpha(x)$	A ya göre *x* den fuzzy α -en uzak nokta dönüşümü
${}_\alpha y$	y noktasına α -yakınsama

Kısaltmalar	**Açıklamalar**
***far*(A)**	A nın en uzak noktalarının kümesi
f-n-NLU	Fuzzy n-normlu lineer uzay
f-an-NLU	Fuzzy anti n-normlu lineer uzay

1. GİRİŞ

Yıllardır matematiğin kesinliği diğer bilimlere göre matematikle uğraşanların fikirlerinin çelişmemesine neden olmuştur. Ama yine de bu kesinlik matematik ilerledikçe sınırlandırıcı olmaya başlamış ve farklı bir matematik alanı olarak çalışılan kümenin değiştirilmesi düşünülmüştür. İlk kez Azeri matematikçi Zadeh [31] bu düşünceyle fuzzy mantık ve fuzzy küme kavramlarını tanımlamıştır. Zadeh bu çalışmasında insan düşüncesinin büyük çoğunluğunun bulanık olduğunu, kesin olmadığını belirtmiştir. Bu yüzden 0 ve 1 ile temsil edilen Boolean mantık bu düşünce işlemini yeterli bir şekilde ifade edememektedir. İnsan mantığı, açık, kapalı, sıcak, soğuk, 0 ve 1 gibi değişkenlerden oluşan kesin ifadelerin yanı sıra, az açık, az kapalı, serin, ılık gibi ara değerleri de göz önüne almaktadır. Fuzzy (bulanık) mantık, klasik mantığın aksine iki seviyeli değil, çok seviyeli işlemleri kullanmaktadır. Ayrıca Zadeh insanların denetim alanında, mevcut makinelerden daha iyi olduğunu ve kesin olmayan dilsel bilgilere bağlı olarak etkili kararlar alabildiklerini savunmuştur.

Kümelerin en uzak nokta kavramı üzerine Panda ve Kapoor [12], en uzak nokta dönüşümlerinin sürekliliği üzerine Niknam [30] çalışmalar yapmıştır. Elumalai ve Vijayaragavan [26] ise normlu lineer uzaylarda en uzak noktayı tanımlamış, Saravanan ve Vijayaragavan [13] normlu lineer uzaylarda en uzak noktaların karakterizasyonunu yapmışlardır.

Fuzzy sayılar, fuzzy kümeler ve fuzzy mantıktan sonra Chang [21] Fuzzy topolojik uzay kavramını tanımlamıştır. Katsaras ve Liu [22] fuzzy vektör uzayları ve fuzzy topolojik vektör uzayları kavramlarını çalışmış, Waren [23] ise fuzzy topolojik uzaylarda taban kavramını vermiştir.

İlk defa fuzzy norm tanımını veren Cheng ve Mordeson [24] dan sonra Bag ve Samanta [7] fuzzy norm ve fuzzy normlu uzay tanımlarını yeniden yorumlamışlardır. Yeniden yorumlanan fuzzy norm tanımına göre Somasundaram ve Beaula [8] fuzzy 2-norm, Narayanan ve Vijayabalaji [10] fuzzy n-norm tanımlarını vermişlerdir. Bu tanımlara göre Vijayabalaji ve Thillaigovindan [11] fuzzy n-normlu lineer uzaylarda cauchy dizi ve yakınsak dizi kavramlarını tanımlamış ve fuzzy n-normlu lineer uzayların tamlığını

çalışmışlardır. Ayrıca en uzak nokta dönüşümlerinin kapanabilirliğini fuzzy normlu uzaylarda ilk kez Mirmostafaee ve Mirzavaziri [25] çalışmıştır.

Bag ve Samanta [14] nın tanımladığı fuzzy anti norm tanımıyla birlikte Reddy [9] fuzzy anti 2-norm tanımını, Kavıkumar, Jun ve Khamıs [16] fuzzy anti n-norm tanımını vermiştir. Bu tanımlar ışığında Reddy [17] fuzyy anti n-normlu lineer uzaylarda cauchy dizi ve yakınsak dizi kavramlarını tanımlayarak fuzzy anti n-normlu lineer uzayların tamlığını araştırmıştır.

Fuzzy anti normla birlikte Fuzzy anti normlu uzaylarda dönüşümler ve bu dönüşümlerin sürekliliği, sınırlılığı gibi özellikleri Dinda, Samanta ve Jebril [18] çalışmıştır. Yakınsaklığı koruyan dönüşümler üzerine Wildenberg [27] ve Smith [28] çalışmalar yapmış, Elagan ve Rahmat [29] ise fuzzy n-normlu uzaylarda serilerin yakınsaklığını koruyan dönüşümleri incelemiştir.

Tezimizin 2. bölümünde vektör uzayı, taban, norm, 2-norm, n-norm tanımları ile bu normlara göre yakınsama, Cauchy dizisi gibi temel kavramlar ve örnekler Taşcı [1], Yıldız [2] ve Bayraktar [3] kitaplarından ve Gähler [4], Elumalai ve Vijayaragavan [5] ve Gunawan ve Mashadi [6] makalelerinden faydalanarak verilmiştir. 2. bölümde verilen temel kavramlar ve örneklerin fuzzy kümelerdeki uygulaması olan fuzzy norm, fuzzy 2-norm, fuzzy n-norm tanımları ile bu normlara göre yakınsaklık, sınırlılık, Cauchy dizi gibi fuzzy normla ilgili temel kavramlar, örnekler ve teoremler 3. Bölümde Bag ve Samanta [7], Somasundaram ve Beaula [8], Reddy [9], Narayanan ve Vijayabalaji [10] ve Vijayabalaji ve Thillaigovindan [11] makalelerinde ifade edildiği gibi verilmiştir.

4. bölümde normlu uzaylarda en uzak nokta kümesi ve en uzak nokta dönüşümü Panda ve Kapoor, [12] makalesindeki gibi verilmiştir. Örnekleri Elumalai ve Vijayaragavan [19], Govindarajulu [20] yardımıyla ve bazı sonuçlar ise Saravanan ve Vijayaragavan [13] deki gibi verilmiştir. Ayrıca fuzzy n-normlu uzaylarda en uzak nokta dönüşümü ve özellikleri Turkmen ve Efe [32] den faydalanarak verilmiş ve bu makaleden yola çıkarak klasik n-normlu uzaylar ile fuzzy n-normlu uzaylar da fuzzy en uzak nokta kümesi ve fuzzy en uzak nokta dönüşümlerinin karşılaştırılması teorem ve örneklerle verilmiştir.

5. ve 6. Bölümde fuzzy anti norm üzerinden işlemler yapılmıştır. Öncelikli olarak 5. Bölümde fuzzy anti norm, anti 2-norm ve anti n-norm tanımları Bag ve Samanta [14], Reddy [9], Kavıkumar, Jun ve Khamıs [16] da verildiği gibi, yakınsaklık, Cauchy dizisi gibi kavramlar ise Jebril ve Samanta [15], Elumalai ve Vijayaragavan [19] ve Reddy [17] ye göre verilmiştir. Ayrıca fuzzy anti n-normlu uzayda açık yuvarlar kullanılarak bir taban ve bu tabandan da topolojik vektör uzayı elde edilmiştir. 6. Bölümde Fuzzy anti n-normlu uzaylarda lineer dönüşümler yeniden yorumlanıp, bu dönüşümlerin , sürekliliği, kuvvetli sürekliliği, zayıf sürekliliği, sınırlılığı, kuvvetli sınırlılığı, zayıf sınırlılığı tanımlanmış ve bunlarla ilgili teorem ve örnekler verilmiştir. Son olarak yine 6. bölümde ilk defa mutlak yakınsak seriler fuzzy anti n-normlu uzaylarda tanımlanıp, fuzzy anti n-normlu uzaylarda serilerin yakınsaklığını koruyan dönüşümler ele alınmıştır.

2. NORMLU UZAYLAR

2.1. Temel Bilgiler

Bu kısımda vektör uzayları, norm, normlu uzaylar ve bu uzaylarda yakınsama kavramları ve n-norma hazırlık amaçlı 2-norm ve 2-normlu uzay tanımlarına yer verilecektir.

2.1.1. Tanım [1]

V boştan farklı bir küme ve $\mathbb{F}$ bir cisim olsun. V üzerinde tanımlı "+" ve "." işlemleri sırasıyla toplama ve skalerle çarpma işlemlerini belirtmek üzere aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa, V ye $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı denir.

V1) $(V,+)$ değişmeli bir grup

V2) $\alpha \in \mathbb{F}$ ve $v \in V$ için $\alpha v \in V$,

V3) $\forall \alpha \in \mathbb{F}$ ve $\forall u,v \in V$ için $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$,

V4) $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{F}$, $v \in V$ için $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$,

V5) $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{F}$, $v \in V$ için $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$

V6) $\forall v \in V$ için $1v = v$ olacak şekilde $1 \in \mathbb{F}$ vardır.

2.1.2 Tanım [1]

V, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlanmış bir vektör uzayı ve $G = \{v_1, v_2, .., v_m\}$, V nin bir alt kümesi olsun. Eğer

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_m v_m = \theta$$

olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \in \mathbb{F}$ varsa, bu durumda G kümesine $\mathbb{F}$ cismi üzerinde lineer bağımlıdır denir. α_i lerin hepsi sıfır olmamak şartı ile

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_m v_m = \theta$$

denklemine bir bağımlı bağıntı denir. Eğer

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_m v_m = \theta$$

olması $i=1,2,..,m$ için $\alpha_i=0$ olmasını gerektiriyorsa, G kümesine $\mathbb{F}$ cismi üzerinde lineer bağımsızdır denir.

2.1.3. Tanım [1]

V, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlanmış bir vektör uzayı ve $U\neq\varnothing$, V nin bir alt kümesi olmak üzere, eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa U alt kümesine V nin bir bazı (tabanı) denir.

i. U alt kümesi lineer bağımsızdır.
ii. U alt kümesi V yi gerer.

2.1.4. Tanım [2]

X bir reel (veya kompleks) vektör uzayı olsun. Her $\vec{x}\in X$ vektörünü $\|\vec{x}\|$ reel sayısına dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan reel değerli $\|.\|:X\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm denir.

i. $\forall\vec{x}\in X\left(\vec{x}\neq\vec{\theta}\right)$ için $\|\vec{x}\|>0$ ve $\|\vec{x}\|=0\Leftrightarrow\vec{x}=\vec{\theta}$,

ii. $\forall\vec{x}\in X,\forall\lambda\in\mathbb{R}(\mathbb{C})$ için $\|\lambda\vec{x}\|=|\lambda|\|\vec{x}\|$,

iii. $\forall\vec{x},\vec{y}\in X$ için $\|\vec{x}+\vec{y}\|\leq\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$.

Üzerinde norm tanımlanmış bir lineer X vektör uzayına normlu vektör uzayı veya kısaca normlu uzay denir ve $\left(X,\|.\|\right)$ ile gösterilir. $\|\vec{x}\|$ reel sayısına da $\vec{x}$ vektörünün normu denir.

2.1.5. Tanım [3]

$\left(x_n\right)$, $\left(X,\|.\|\right)$ normlu uzayında bir dizi ve $x_0\in X$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|=0$$

ise $\left(x_n\right)$ dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir ve

$$x_n\to x_0 \text{ ya da } \lim_{n\to\infty}x_n=x_0$$

olarak ifade edilir. Normlu uzayda tanımlanan bu yakınsamaya norma göre yakınsama adı verilir.

2.1.6. Tanım [3]

$(X,\|.\|)$ normlu bir uzay ve (x_n) X de bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $m,n > n_\varepsilon$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir n_ε doğal sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir. Kısaca,

"(x_n) Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ var öyle ki $\forall m,n > n_\varepsilon$ için $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$" şeklinde ifade edilebilir.

2.1.7. Tanım [4]

X, d boyutlu $(d > 1, d \in \mathbb{N})$ bir reel vektör uzayı ve $\|\cdot,\cdot\|$, $X \times X$ de aşağıdaki şartları sağlayan reel değerli fonksiyon olsun.

(1) $\|x, y\| = 0 \Leftrightarrow$ *x* ve y lineer bağımlı,

(2) $\|x, y\| = \|y, x\|$,

(3) $\|\alpha x, y\| = |\alpha| \|x, y\|$, ($\alpha \in \mathbb{R}$),

(4) $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$.

Bu durumda $\|\cdot,\cdot\|$ ye $X \times X$ de 2-norm ve $(X \times X, \|\cdot,\cdot\|)$ ikilisine 2-normlu lineer uzay denir.

2.1.8 Örnek [4]

$\forall i = 1,2$ için $x_i = (x_{i1}, x_{i2}) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere, $\|x_1, x_2\|_E = \left| \det \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \right|$ 2-norm belirtir.

(1) $\|x_1, x_2\|_E = \left|\det\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}\right| = 0$

$\Leftrightarrow |x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12}| = 0$

$\Leftrightarrow x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12} = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = (x_{11}, x_{12}), x_2 = (x_{21}, x_{22})$ lineer bağımlıdır.

(2) $\|x_1, x_2\|_E = \left|\det\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}\right|$

$= |x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12}|$

$= |x_{21}x_{12} - x_{11}x_{22}|$

$= \|x_2, x_1\|_E$

(3) $\|\alpha x_1, x_2\|_E = \left|\det\begin{bmatrix} \alpha x_{11} & \alpha x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}\right|$

$= |\alpha x_{11}x_{22} - \alpha x_{21}x_{12}|$

$= |\alpha (x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12})|$

$= |\alpha||x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12}|$

$= |\alpha|\|x_1, x_2\|_E$

(4) $x = (x_{11}, x_{12}), y = (y_{21}, y_{22}), z = (z_{21}, z_{22})$ olmak üzere

$\|x, y + z\|_E = \left|\det\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ y_{21} + z_{21} & y_{22} + z_{22} \end{bmatrix}\right|$

$= |x_{11}(y_{22} + z_{22}) - x_{12}(y_{21} + z_{21})|$

$= |x_{11}y_{22} + x_{11}z_{22} - x_{12}y_{21} - x_{12}z_{21}|$

$\leq |x_{11}y_{22} - x_{12}y_{21}| + |x_{11}z_{22} - x_{12}z_{21}|$

$= \left|\det\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}\right| + \left|\det\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}\right|$

$= \|x, y\|_E + \|x, z\|_E$

dir. Dolayısıyla $\|x_1, x_2\|_E = \left|\det\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}\right|$ bir 2-normdur.

2.1.9 Örnek [5]

$X = \mathbb{R}^3$ olsun. $x = (a_1, b_1, c_1), y = (a_2, b_2, c_2) \in X$ olmak üzere

$$\|x, y\| = \left\{(a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (a_1c_2 - a_2c_1)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

ve

$\|x, y\| = |a_1 b_2 - a_2 b_1| + |b_1 c_2 - b_2 c_1| + |a_1 c_2 - a_2 c_1|$ ifadeleri $X \times X$ de 2-norm belirtirler.

2.2. n-Normlu Uzaylar

Bu kısımda n-norm tanımı ve n-normlu uzaylarda yakınsaklık tanımları hatırlatılmıştır.

2.2.1. Tanım [6]

$n \in \mathbb{N}$ ve X, d boyutlu ($d \geq n$ ve d sonsuz olabilir) bir reel vektör uzayı olsun. $\underbrace{X \times \cdots \times X}_{n}$ de aşağıdaki özellikleri sağlayan reel değerli $\|\cdot,...,\cdot\|$ fonksiyonuna $X \times \cdots \times X$ de n-norm ve $(X \times \cdots \times X, \|\cdot,...,\cdot\|)$ çiftine n-normlu lineer uzay denir. Kısalığın hatırı için bundan sonraki tüm bölümlerde $X \times \cdots \times X$ yerine X alınarak $(X, \|\cdot,...,\cdot\|)$ n-normlu lineer uzayı denildiğinde $(X \times \cdots \times X, \|\cdot,...,\cdot\|)$ uzayını anlayacağız.

(1) $\|x_1, x_2, ..., x_n\| = 0 \Leftrightarrow x_1, x_2, ..., x_n$ lineer bağımlı ,

(2) $\| x_1, x_2, ..., x_n \|$, $x_1, x_2, ..., x_n$ nin her permütasyonuna göre değişmeyen,

(3) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\|x_1, x_2, ..., \alpha x_n\| = |\alpha| . \|x_1, x_2, ..., x_n\|$,

(4) $\|x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y + z\| \leq \|x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y\| + \|x_1, x_2, ..., x_{n-1}, z\|$.

2.2.2 Örnek [6]

$X = \mathbb{R}^n$ olsun ve her $i = 1, 2, ..., n$ için

$x_i = (x_{i1}, ..., x_{in}) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\| x_1, x_2, ..., x_n \|_E = \left| \det \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \right|$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bir n-norm dur. $(X, \|\cdot,...,\cdot\|_E)$ $n-$normlu lineer uzayına da Öklidyen $n-$normlu uzay denir.

Burada n-normlu uzaylarla ilgili şu bilgileri de hatırlatmakta fayda olacaktır. $\left(X,\|\cdot,...,\cdot\|\right)$ n-normlu uzayında $\forall x_1,x_2,...,x_n\in X$ ve $\forall\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-1}\in\mathbb{R}$ için $\|x_1,x_2,...,x_n\|\geq 0$ ve $\|x_1,...,x_{n-1},x_n\|=\|x_1,...,x_{n-1},x_n+\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_{n-1}x_{n-1}\|$ dir.

Bundan sonraki bölümlerde aksi belirtilmedikçe $n\geq 2$ ve $\left(X,\|\cdot,...,\cdot\|\right)$ $d\left(\geq n\right)$ boyutlu n-normlu uzay olarak alınacaktır.

2.2.3. Teorem [6]

$\{a_1,...,a_n\}$ kümesi X de lineer bağımsız bir küme olmak üzere X^{n-1} üzerinde $\{a_1,...,a_n\}$ kümesine göre değişen $\|x_1,...,x_{n-1}\|_\infty=\max\{\|x_1,...,x_{n-1},a_i\|:i=1,...,n\}$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda $\|x_1,...,x_{n-1}\|_\infty$ fonksiyonu X de $(n-1)$-normdur.

2.2.4. Sonuç [6]

$r=1,...,n-1$ olmak üzere her n-normlu uzay $(n-r)$-normlu uzaydır. Özel olarak her n-normlu uzay normlu uzaydır.

2.2.5. Tanım [6]

(x_k), $\left(X,\|\cdot,...,\cdot\|\right)$ n-normlu uzayında bir dizi ve $x\in X$ olsun. Eğer $\forall a_1,...,a_{n-1}\in X$ için $\lim_{k\to\infty}\|a_1,...,a_{n-1},x_k-x\|=0$ ise (x_k) dizisi x noktasına yakınsıyor denir. n-normlu uzayda tanımlanan bu yakınsamaya n-norma göre yakınsama denir.

2.2.6. Tanım [6]

(x_k), $\left(X,\|\cdot,...,\cdot\|\right)$ n-normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall a_1,...,a_{n-1}\in X$ için $\lim_{k,l\to\infty}\|a_1,...,a_{n-1},x_k-x_l\|=0$ ise bu (x_k) dizisine Cauchy dizisi denir. Eğer X uzayında her Cauchy dizisi bir $x\in X$ noktasına yakınsak ise, X uzayına n-norma göre tamdır denir. n-normlu bir tam uzaya n-Banach uzay denir.

3. FUZZY NORMLU UZAYLAR

Temel kavramlarda verilen norm, 2-norm, n-norm tanımları ve bunlarla ilgili teoremlerin fuzzy kümeler üzerindeki uygulaması olan fuzzy norm, fuzzy 2-norm, fuzzy n-norm tanımları, teoremleri ve örnekleri bu bölümde verilmiştir.

3.1. Fuzzy Norm

Bu kısımda fuzzy normla ilgili tanımlar, teoremler ve örnekler verilmiştir.

3.1.1. Tanım [7]

X, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir lineer uzay ve N de $X \times \mathbb{R}$ nin bir fuzzy alt kümesi olsun. Eğer N aşağıdaki şartları sağlıyorsa N ye X de bir fuzzy norm denir.

$\forall x, y \in X$ ve $c \in \mathbb{R}$ için

(N1) $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $t \leq 0$ için $N(x,t) = 0$,

(N2) $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ için $N(x,t) = 1 \Leftrightarrow x = 0$

(N3) $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ için $c \neq 0$ iken $N(cx,t) = N(x, t/|c|)$ dir,

(N4) $\forall s,t \in \mathbb{R}$ için, $N(x+y, s+t) \geq \min\{N(x,s), N(y,t)\}$,

(N5) $N(x,t)$ $\mathbb{R}$ nin azalmayan bir fonksiyonu ve $\lim_{t\to\infty} N(x,t) = 1$ dir.

Burada (X, N) çiftine fuzzy normlu lineer uzay denir.

$N(x,t)$, "x in normu t reel sayısından küçük ya da eşittir" ifadesinin doğruluk değeri olarak değerlendirilebilir.

3.1.2 Örnek [7]

$(X, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzay olsun. $\forall x \in X$ ve $t \in \mathbb{R}$ için

$$N(x,t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t + \|x\|} & ; \quad t > 0 \\ 0 & ; \quad t \leq 0 \end{cases}$$

olmak üzere, N , X de fuzzy norm ve (X, N) bir fuzzy normlu uzaydır.

Çözüm

(N1) $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $t \le 0$ için $N(x,t)$ nin tanımından $N(x,t)=0$ dır.

(N2) $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $t>0$ için $N(x,t)=1 \Rightarrow \dfrac{t}{t+\|x\|}=1 \Rightarrow t=t+\|x\| \Rightarrow \|x\|=0$, $x \in X$ ve X normlu uzay olduğundan $\|x\|=0 \Rightarrow x=0$ dır.

Tersine $x=0 \Rightarrow \|x\|=0 \Rightarrow \dfrac{t}{t+\|x\|}=\dfrac{t}{t}=1$ dir.

(N3) $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $t>0$ için $c=0$ ise $N(cx,t)=N(0,t)=\dfrac{t}{t+\|0\|}=1$ ve $c \neq 0$ ise

$N(cx,t)=\dfrac{t}{t+\|cx\|}=\dfrac{t/|c|}{t/|c|+\|x\|}=N(x,t/|c|)$ bulunur.

(N4) $\forall t,s \in \mathbb{R}$ ve $x,u \in X$ için $N(x+u,s+t) \ge \min\{N(x,s),N(u,t)\}$ olduğunu göstereceğiz.

a) $s+t<0 \Rightarrow s<0$ veya $t<0$ dır. Bu durumda $N(x,t)=0$ veya $N(u,s)=0$ dır.

Yani $N(x+u,t+s)=0=\min\{N(x,t),N(u,s)\}$ bulunur.

b) $s+t=0 \Rightarrow s=t=0$ veya $s=-t$ olabilir.

$s=t=0 \Rightarrow N(x+u,t+s)=0=\min\{N(x,t)=0,N(u,s)=0\}$

$s=-t \Rightarrow N(x,t)=0$ veya $N(u,s)=0$ olacağından

$N(x+u,t+s)=0=\min\{N(x,t),N(u,s)\}$

c) $s+t>0 \Rightarrow$ i) $s<0<t$ ii) $t<0<s$ iii) $0<t<s$ iv) $0<s<t$ durumları olacaktır.

i) ve ii) durumları için $N(u,s)=0$ ya da $N(x,t)=0$ olacağından iki durum içinde $\min\{N(x,t),N(u,s)\}=0$ olacaktır.

Yani $N(x+u,t+s) \ge \min\{N(x,t),N(u,s)\}$ olacaktır.

iii) ve iv) durumları için ise $N(x,t)>N(u,s)$ veya $N(u,s)>N(x,t)$ durumlarından biri gerçekleşecektir. Biz $N(x,t)>N(u,s)$ durumunu alalım benzer şekilde diğer durumda yapılacaktır.

$N(x,t) > N(u,s) \Rightarrow \frac{t}{t+\|x\|} > \frac{s}{s+\|u\|} \Rightarrow$

$\frac{t}{t+\|x\|} - \frac{s}{s+\|u\|} > 0 \Rightarrow \frac{t\|u\| - s\|x\|}{(t+\|x\|)(s+\|u\|)} > 0$

$\Rightarrow t\|u\| - s\|x\| > 0$ (i)

bulunur.

$N(x,t) > N(u,s)$ olduğundan $\min\{N(x,t), N(u,s)\} = N(u,s)$ olacaktır. Bu durumda $N(x+u,t+s) \geq \min\{N(x,t), N(u,s)\} = N(u,s)$ olup olmadığına bakalım.

$\frac{t+s}{t+s+\|x+u\|} \geq \frac{t+s}{t+s+\|x\|+\|u\|}$ eşitsizliğini kullanalım. Buradan,

$\frac{t+s}{t+s+\|x\|+\|u\|} - \frac{s}{s+\|u\|} = \frac{t\|u\| - s\|x\|}{(t+s+\|x\|+\|u\|)(s+\|u\|)}$

olup (i) den dolayı da

$\frac{t\|u\| - s\|x\|}{(t+s+\|x\|+\|u\|)(s+\|u\|)} > 0$ dır. Yani

$\frac{t+s}{t+s+\|x\|+\|u\|} > \frac{s}{s+\|u\|}$ dir. Buradan

$\frac{t+s}{t+s+\|x+u\|} > \frac{s}{s+\|u\|}$ olur.

Benzer şekilde $N(u,s) > N(x,t)$ durumu da incelenerek, $N(x+u,t+s) \geq \min\{N(x,t), N(u,s)\}$ olduğu görülür.

(N5) $t_1 < t_2 \leq 0$ için $N(x,t_1) = N(x,t_2) = 0$ olur. $0 < t_1 < t_2$ ise

$N(x,t_1) - N(x,t_2) = \frac{t_1}{t_1+\|x\|} - \frac{t_2}{t_2+\|x\|} = \frac{(t_1-t_2)\|x\|}{(t_1+\|x\|)(t_2+\|x\|)}$ olur.

$t_1 < t_2$ olduğundan $N(x,t_1) - N(x,t_2) < 0$ bulunur.

Yani *N*, $\mathbb{R}$ de azalmayan bir fonksiyondur.

$\lim_{t\to\infty} N(x,t)$ ifadesi için iki durum söz konusudur.

$x = 0$ ise $\lim_{t\to\infty} N(x,t) = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{t+\|0\|} = 1$ dir.

$x \neq 0$ ise $\lim_{t\to\infty} N(x,t) = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{t+\|x\|} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1+\frac{\|x\|}{t}} = \frac{1}{1+0} = 1$ bulunur.

Her iki durum içinde $\lim_{t\to\infty} N(x,t) = 1$ dir.

Bu şartları sağladığından *N*, *X* de bir fuzzy norm ve (X, N) bir fuzzy normlu lineer uzaydır.

3.1.3 Örnek [7]

$(X, \|\ \|)$ normlu lineer uzay olmak üzere, *N* fonksiyonunu şu şekilde tanımlayalım.

$N : X \times \mathbb{R} \to [0,1]$

$$N(x,t) = \begin{cases} 0 & ;\ t \leq \|x\| \\ 1 & ;\ t > \|x\| \end{cases}$$

Bu durumda *N*, *X* de bir fuzzy normdur ve (X, N) fuzzy normlu uzaydır.

Çözüm

(N1) $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $t \leq 0$ için $t \leq 0 \leq \|x\|$ olduğundan $N(x,t) = 0$ dır.

(N2) $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ için $N(x,t) = 1$ olsun. Tanımdan $t > \|x\|$ olmalıdır. Bu durumda $\forall t > 0$ için $t > \|x\|$ olduğundan $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ dır. Şimdi de $x = 0$ alalım. Bu durumda $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ için $t > \|x\|$ olduğundan $N(x,t) = 1$ dir.

(N3) $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ ve $c \neq 0$ için

$$N(cx,t) = \begin{cases} 0 & ;t \leq \|cx\| \\ 1 & ;t > \|cx\| \end{cases} = \begin{cases} 0 & ;t/|c| \leq \|x\| \\ 1 & ;t/|c| > \|x\| \end{cases} = N(x, t/|c|) \text{ dir.}$$

(N4) $\forall t, s \in \mathbb{R}$ ve $x, y \in X$ için $N(x+y, s+t) \geq \min\{N(x,s), N(y,t)\}$ olduğunu gösterelim.

- $N(x+y, s+t) = 0 \Rightarrow s+t \leq \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ olduğundan,

a. $s \leq \|x\|$ ve $t \leq \|y\| \Rightarrow N(x+y, s+t) = 0 = \min\{N(x,s) = 0, N(y,t) = 0\}$

b. $s \leq \|x\|$ ve $t > \|y\| \Rightarrow N(x+y, s+t) = 0 = \min\{N(x,s) = 0, N(y,t) = 1\}$

c. $s > \|x\|$ ve $t \le \|y\| \Rightarrow N(x+y, s+t) = 0 = \min\{N(x,s) = 1, N(y,t) = 0\}$

- $N(x+y, s+t) = 1 \Rightarrow \min\{N(x,s), N(y,t)\} \le 1$ olduğundan

$N(x+y, s+t) = 1 \ge \min\{N(x,s), N(y,t)\}$ dir.

(N5) Tanımdan $N(x,t)$ $\mathbb{R}$ de azalmayan bir fonksiyondur ve $\lim_{t\to\infty} N(x,t) = 1$ dir.

Bu durumda *N*, *X* de bir fuzzy norm ve (X, N) bir fuzzy normlu lineer uzaydır.

3.1.4. Teorem [7]

(X, N) fuzzy normlu lineer uzay olsun. Ayrıca bu uzay fuzzy normlu lineer uzaylar için "(N6) $\forall t > 0$ için $N(x,t) > 0 \Rightarrow x = 0$ dır." şartını da sağlasın.

$\alpha \in (0,1)$ ve $\|x\|_\alpha = \inf\{t : N(x,t) \ge \alpha\}$ olmak üzere $\{\| \|_\alpha : \alpha \in (0,1)\}$ ailesi X de normların azalmayan bir ailesidir. Bu normlara *X* deki fuzzy norma karşılık gelen α -norm denir.

3.1.5. Tanım [7]

(X, N) fuzzy normlu lineer uzay ve (x_k), X de bir dizi olsun. Eğer $\forall t > 0$ için $\lim_{k\to\infty} N(x_k - x, t) = 1$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_k) dizisi *x* noktasına yakınsaktır denir. Burada $x \in X$ e (x_k) dizisinin limiti denir ve $\lim x_k = x$ biçiminde gösterilir.

3.1.6. Not [7]

(x_k) dizisinin limiti tektir. Aksini kabul edelim.

$\lim x_k = x$ *ve* $\lim x_k = y$ olsun. O halde

$\forall s, t > 0$ için $\lim_{k\to\infty} N(x_k - x, t) = 1$ ve $\lim_{k\to\infty} (x_k - y, s) = 1$ olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned} N(x-y, t+s) &= N(x - x_k + x_k - y, t+s) \\ &\ge \min\{N(x - x_k, t), N(x_k - y, s)\} \\ &= \min\{N(x_k - x, t), N(x_k - y, s)\} \end{aligned}$$

Limit alırsak,

$N(x-y,t+s) \geq \min\left\{\lim_{k\to\infty} N(x_k - x,t), \lim_{k\to\infty} N(x_k - y,s)\right\} = \min\{1,1\}$

$\Rightarrow \forall s,t>0$ için $N(x-y,t+s)=1$

$\Rightarrow x-y=0$ ($N2$ den dolayı)

$\Rightarrow x=y$

bulunur. O halde limit tektir.

3.1.7. Tanım [7]

(X,N) fuzzy normlu lineer uzay ve (x_k) X de bir dizi olsun. $\forall t>0$ ve $p=1,2,3,...$ için $\lim_{k\to\infty} N(x_{k+p}-x_k,t)=1$ ise, (x_k) dizisine Cauchy dizisi denir.

3.1.8. Önerme [7]

(X,N) fuzzy normlu lineer uzayında, yakınsak her dizinin alt dizisi de yakınsaktır.

3.1.9. Önerme [7]

(X,N) fuzzy normlu lineer uzayında her yakınsak dizi Cauchy dizisidir.

İspat

(x_k) , X de bir dizi ve $\forall t>0$ için $\lim_{k\to\infty} N(x_k-x,t)=1$ alalım.

$t>0$, $s>0$ ve $p=1,2,3,...$ için

$$\begin{aligned} N(x_{k+p}-x_k,s+t) &= N(x_{k+p}-x+x-x_k,s+t) \\ &\geq \min\left\{N(x_{k+p}-x,s), N(x-x_k,t)\right\} \\ &= \min\left\{N(x_{k+p}-x,s), N(x_k-x,t)\right\} \end{aligned}$$

Limit alırsak

$\lim_{k\to\infty} N(x_{k+p}-x_k,s+t) \geq \min\left\{\lim_{k\to\infty} N(x_{k+p}-x,s), \lim_{k\to\infty} N(x_k-x,t)\right\}$ elde edilir. Yakınsak her dizinin alt diziside yakınsak olduğundan $\lim_{k\to\infty} N(x_{k+p}-x,s)=1$ dir. Buradan $\forall t,s>0$ ve $p=1,2,3,...$ için $\lim_{k\to\infty} N(x_{k+p}-x_k,s+t)\geq 1 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} N(x_{k+p}-x_k,s+t)=1$ dir. (x_k) , X de bir Cauchy dizisidir.

3.1.10. Tanım [7]

(X,N) fuzzy normlu lineer uzay ve $A\subset X$ olsun. $\forall x\in A$ ve $\forall t>0$ için $\exists(x_k)\subset A$ dizisi var öyle ki $x_k\to x$ ise yani $\forall t>0$ için $\lim_{k\to\infty}N(x_k-x,t)=1$ ise A ya kapalıdır denir.

3.1.11. Tanım [7]

(X,N) fuzzy normlu lineer uzay ve $A,B\subset X$ olsun. Eğer her $x\in B$ için $x_k\to x$ olacak şekilde A da en az bir (x_k) dizisi varsa yani $\forall x\in B$ için $\exists(x_k)\subset A$ var öyle ki $\forall t>0$ için $\lim_{k\to\infty}N(x_k-x,t)=1$ ise B ye A nın kapanışı denir ve B kümesi $\bar{A}$ ile gösterilir.

3.1.12. Tanım [7]

Fuzzy normlu lineer uzayın bir alt kümesi A olsun. Eğer $\forall x\in A$ için $\exists t>0$ ve $0<r<1$, $r\in\mathbb{R}$ var öyle ki $N(x,t)>1-r$ ise A kümesine sınırlıdır denir.

3.1.13. Tanım [7]

(X,N) fuzzy normlu lineer uzay ve $A\subset X$ olsun. A daki her dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa A ya kompakt denir.

3.1.14. Önerme [7]

Fuzzy normlu lineer uzaylarda her Cauchy dizisi sınırlıdır.

İspat

(X,N) fuzzy normlu lineer uzayında bir (x_k) Cauchy dizisini göz önüne alalım. Buradan $\forall t>0$ ve $p=1,2,...$ için $\lim_{k\to\infty}N(x_k-x_{k+p},t)=1$ dir. α_0 sabitini $0<\alpha_0<1$ seçelim. Biliyoruz ki $\lim_{k\to\infty}N(x_k-x_{k+p},t)=1>\alpha_0$ dır.

$t' > 0$ için $\exists k_0(t')$ var öyle ki $\forall k \geq k_0(t')$ ve $p = 1,2,...$ için $N(x_k - x_{k+p}, t') > \alpha_0$ dır.

$\lim_{t\to\infty} N(x,t) = 1$ iken $\exists t_i$ var öyle ki $\forall t \geq t_i$ $i = 1,2,...$ için $N(x_i, t_i) > \alpha_0$ dır.

$t_0 = t' + \max\{t_1, t_2, ..., t_{k_o}\}$ olsun.

Bu durumda $k > k_0$ için $N(x_k, t_0) \geq N(x_k, t' + t_{k_0}) \geq \min\{N(x_k - x_{k_0}, t'), N(x_{k_0}, t_{k_0})\}$

Böylece $\forall k \geq k_0$ için $N(x_k, t_0) \geq \min\{\alpha_0, \alpha_0\} = \alpha_0$

Yani $\forall k \geq k_0$ için $N(x_k, t_0) \geq \alpha_0$ dır . Hatta $\forall k = 1,2,...,k_0$ için $N(x_k, t_0) \geq N(x_k, t_k)$ dir.

Bundan dolayı $\forall k$ için $N(x_k, t_0) \geq \alpha_0$ dır. Böylece (x_k) sınırlıdır.

3.2. Fuzzy 2-Norm

Fuzzy normda verilen tanım, teorem ve örneklerin fuzzy 2-norma uygulaması bu kısımda verilmiştir.

3.2.1. Tanım [8]

X, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir lineer uzay ve N , $X \times X \times \mathbb{R}$ nin bir fuzzy alt kümesi olsun. Eğer N aşağıdaki şartları sağlıyorsa N ye X de bir fuzzy 2-norm denir.

$\forall x, y, z \in X$ ve $c \in \mathbb{R}$ için

(2-N1) $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $t \leq 0$ için $N(x, y, t) = 0$,

(2-N2) $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ için $N(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow$ *x* ve y lineer bağımlı,

(2-N3) $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ için $N(x, y, t) = N(y, x, t)$,

(2-N4) $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ için $c \neq 0$ iken $N(x, cy, t) = N(x, y, t/|c|)$ dir,

(2-N5) $\forall s, t \in \mathbb{R}$ için, $N(x, y+z, s+t) \geq \min\{N(x, y, s), N(x, z, t)\}$,

(2-N6) $N(x, y, t)$ $\mathbb{R}$ nin azalmayan bir fonksiyonu ve $\lim_{t\to\infty} N(x, y, t) = 1$ dir.

Bu durumda (X, N) çiftine fuzzy 2-normlu lineer uzay denir. Fuzzy 2-normun

"(2-N7) $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ için $N(x, y, t) > 0 \Rightarrow$ *x*,y lineer bağımlıdır." şartı ileride kullanılacaktır.

3.2.2 Örnek [8]

$(X,\|\cdot,\cdot\|)$ 2-normlu lineer uzay olsun. $\forall x, y \in X$ ve $t \in \mathbb{R}$ için

$$N(x,y,t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t+\|x,y\|} & ; \quad t > 0 \\ 0 & ; \quad t \le 0 \end{cases}$$

olmak üzere, N , X de fuzzy 2-norm ve (X,N) bir fuzzy 2-normlu lineer uzaydır.

3.2.3 Örnek [7]

$(X,\|\cdot,\cdot\|)$ 2-normlu lineer uzay olmak üzere, N fonksiyonunu şu şekilde tanımlayalım.

$$N: X \times X \times \mathbb{R} \to [0,1]$$

$$N(x,y,t) = \begin{cases} 0 & ; t \le \|x,y\| \\ 1 & ; t > \|x,y\| \end{cases}$$

Bu durumda N, X de bir fuzzy 2-normdur ve (X,N) fuzzy 2-normlu lineer uzaydır.

3.2.4. Teorem [9]

(X,N), (2-N7) şartını sağlayan fuzzy 2-normlu lineer uzay olsun.

$\|x,y\|_\alpha = \inf\{t : N(x,y,t) \ge \alpha\}$, $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere $\{\|\cdot,\cdot\|_\alpha : \alpha \in (0,1)\}$ ailesi X de 2-normların azalmayan bir ailesidir. Bu 2-normlara X deki fuzzy 2-norma karşılık gelen α -2-normlar denir.

3.2.5. Teorem [9]

X lineer uzayında 2-normların azalmayan bir ailesi $\{\|\cdot,\cdot\|_\alpha : \alpha \in (0,1)\}$ olsun.

$$N': X \times X \times \mathbb{R} \to [0,1]$$

$$N'(x,y,t) = \begin{cases} \sup\{\alpha \in (0,1) : \|x,y\|_\alpha \le t\} & ; \quad (x,y,t) \ne (0,0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y,t) = (0,0,0) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon X üzerinde fuzzy 2-normdur.

3.2.6 Örnek [10]

$X=\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}$ üzerinde lineer uzay olsun.

$\|\cdot,\cdot\|: X\times X\to\mathbb{R}$, $x_i=(a_i,b_i,c_i)\in\mathbb{R}^3, i=1,2$ olmak üzere,

$\|x_1,x_2\|_1=\max\{|a_1b_2-a_2b_1|,|b_1c_2-b_2c_1|,|a_1c_2-a_2c_1|\}$

$\|x_1,x_2\|_2=\frac{1}{2}\{\max\{|a_1b_2-a_2b_1|,|b_1c_2-b_2c_1|,|a_1c_2-a_2c_1|\}\}$ 2-normlarını tanımlayalım. Bu durumda $(X,\|\cdot,\cdot\|_1)$ ve $(X,\|\cdot,\cdot\|_2)$ 2-normlu lineer uzaylardır.

$N: X\times X\times\mathbb{R}\to[0,1]$ normunu

$$N(x_1,x_2,t)=\begin{cases}1 & ; \quad t>\|x_1,x_2\|_1\\ 0,5 & ; \quad \|x_1,x_2\|_2<t\le\|x_1,x_2\|_1\\ 0 & ; \quad t\le\|x_1,x_2\|_2\end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda (X,N) fuzzy 2-normlu lineer uzaydır. $\alpha\in(0,1)$ olmak üzere $\|x_1,x_2\|_\alpha=\inf\{t: N(x_1,x_2,t)\ge\alpha\}$ şeklinde tanımlanırsa bu α-2-normlar

$$\|x_1,x_2\|_\alpha=\begin{cases}\|x_1,x_2\|_1 & ; \quad 1>\alpha>0,5\\ \|x_1,x_2\|_2 & ; \quad 0<\alpha\le 0,5\end{cases}$$

olarak verilir.

3.2.7. Tanım [9]

(X,N) fuzzy 2-normlu lineer uzay, (x_k), X de bir dizi ve $y\in X$ olsun. Eğer $\forall t>0$ için $\lim_{k\to\infty}N(y,x_k-x,t)=1$ olacak şekilde bir $x\in X$ varsa (x_k) dizisi x noktasına yakınsaktır denir. Burada $x\in X$ e (x_k) dizisinin limiti denir ve $\lim x_k=x$ biçiminde gösterilir.

3.2.8. Tanım [9]

(X,N) fuzzy 2-normlu lineer uzay, (x_k) X de bir dizi ve $y\in X$ olmak üzere, $\forall t>0$ ve $p=1,2,3,...$ için $\lim_{k\to\infty}N(y,x_{k+p}-x_k,t)=1$ ise, (x_k) dizisine Cauchy dizisi denir.

3.2.9. Tanım [9]

Fuzzy 2-normlu lineer uzayın bir A alt kümesi sınırlıdır ancak ve ancak $\forall x, y \in A$ için $\exists t > 0$ ve $0 < r < 1$, $r \in \mathbb{R}$ var öyle ki $N(x, y, t) > 1 - r$ dir.

3.2.10. Tanım [9]

(X, N) fuzzy 2-normlu lineer uzay ve $A \subset X$ olsun. A daki her dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa A ya kompakt denir.

3.3. Fuzzy n-Norm

Bu kısımda, fuzzy 2-normlu uzayların genellemesini yaptığımız ve çalışmalarımızda temel olarak kullandığımız fuzzy n-norm ile ilgili tanım, teorem ve örneklere yer verilmiştir.

3.3.1. Tanım [10]

X , $\mathbb{R}$ reel cismi üzerinde bir lineer uzay ve $X \times \cdots \times X \times \mathbb{R}$ nin bir fuzzy kümesi N olsun. N aşağıdaki şartları sağlıyorsa N ye X de fuzzy n-norm denir.

$\forall a_1, ..., a_{n-1}, x, y \in X$ ve $c \in \mathbb{R}$ için,

(n-N1) $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $t \leq 0$ için $N(a_1, ..., a_{n-1}, x, t) = 0$,

(n-N2) $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ için $N(a_1, ..., a_{n-1}, x, t) = 1 \Leftrightarrow a_1, ..., a_{n-1}, x$ lineer bağımlıdır,

(n-N3) $N(a_1, ..., a_{n-1}, x, t)$ $a_1, ..., a_{n-1}, x$ in herhangi permütasyonuna göre değişmeyen,

(n-N4) $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ için eğer $c \neq 0$ ise $N(a_1, ..., a_{n-1}, cx, t) = N(a_1, ..., a_{n-1}, x, t/|c|)$ dir,

(n-N5) $\forall s, t \in \mathbb{R}$ için

$N(a_1, ..., a_{n-1}, x + y, s + t) \geq \min\{N(a_1, ..., a_{n-1}, x, s), N(a_1, ..., a_{n-1}, y, t)\}$,

(n-N6) $N(a_1, ..., a_{n-1}, x, t)$ $\mathbb{R}$ nin azalmayan bir fonksiyonu ve $\lim_{t \to \infty} N(a_1, ..., a_{n-1}, x, t) = 1$ dir.

Bu durumda (X, N) ye bir fuzzy n-normlu lineer uzay veya kısaca f-n-NLU denir

3.3.2. Uyarı [10]

(n-N3) den, f-n-NLU da aşağıdakiler vardır.

(n-N4) $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ için $c \neq 0$ ise,

$N(a_1,...,ca_i,...,a_{n-1},x,t) = N(a_1,...,a_i,...,a_{n-1},x,t/|c|)$ dir.

(n-N5) $\forall s,t \in R$ için,

$N(x+y,a_1,a_2,...,a_{n-1},s+t) \geq \min\{N(x,a_1,a_2,...,a_{n-1},s), N(y,a_1,a_2,...,a_{n-1},t)\}$ dir.

3.3.3 Örnek [10]

$(X,\|\cdot,...,\cdot\|)$ $n-$normlu lineer uzay olsun. $\forall x_1,x_2,...,x_n \in X$ ve $t \in \mathbb{R}$ için

$$N(x_1,x_2,...,x_n,t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t+\| x_1,x_2,...,x_n \|} & ; \quad t > 0 \\ 0 & ; \quad t \leq 0 \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda (X,N) bir f-n-NLU dır.

3.3.4. Teorem [10]

(X,N) fuzzy n-normlu lineer uzay ve

"(n-N7) $\forall t > 0$ için $N(x_1,x_2,...,x_n,t) > 0 \Rightarrow x_1,x_2,...,x_n$ lineer bağımlı" şartı sağlansın. $\|x_1,x_2,...,x_n\|_\alpha = \inf\{t : N(x_1,x_2,...,x_n,t) \geq \alpha\}$ ve $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere $\{\|x_1,x_2,...,x_n\|_\alpha : \alpha \in (0,1)\}$ ailesi X de n-normların artan bir ailesidir. Bu n-normlara X deki fuzzy n-norma karşılık gelen α-n-normlar denir. Bundan sonraki bölümlerde α-n-norm ile (X,N) fuzzy n-normlu lineer uzay olmak üzere, X deki fuzzy n-norma karşılık gelen α-n-norm kastedilecektir.

3.3.5. Tanım [11]

(X,N) fuzzy n-normlu lineer uzay (x_k), X de bir dizi ve $x \in X$ olsun.

Eğer $\forall a_1,...,a_{n-1} \in X$, $\forall t > 0$ ve $0 < r < 1$ için en az bir $k_0 \in \mathbb{N}$ var öyleki $\forall k \geq k_0$ için,

$$N(a_1,...,a_{n-1},x_k - x,t) > 1-r$$

ise (x_k) dizisi x e yakınsaktır denir.

3.3.6. Teorem [11]

(X,N) fuzzy n-normlu lineer uzay ve (x_k), X de bir dizi olsun. (x_k) dizisi $x \in X$ noktasına yakınsaktır ancak ve ancak $\forall t>0, \forall a_1,...,a_{n-1} \in X$ için

$$\lim_{t\to\infty} N(a_1,...,a_{n-1}, x_k - x, t) = 1$$

dir.

3.3.7 Örnek [10]

$\mathbb{R}$ üzerinde bir lineer uzay $X = \mathbb{R}^{n+1}$ olsun. $\|\cdot,\cdot,...,\cdot\| : \underbrace{X \times \cdots \times X}_{n} \to \mathbb{R}$ normu

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n+1)} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{13} & \cdots & a_{1(n+1)} & a_{11} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{n(n+1)} & a_{n1} \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ve $x_i = (a_{i1},...,a_{i(n+1)}) \in \mathbb{R}^{n+1}, i = 1,2,...,n$ olmak üzere

$\|x_1, x_2,..., x_n\|_1 = \max\{\Delta_1, \Delta_2,..., \Delta_{n+1}\}$ ve

$\|x_1, x_2,..., x_n\|_2 = \frac{1}{2}\{\max\{\Delta_1, \Delta_2,..., \Delta_{n+1}\}\}$ şeklinde tanımlansın.

Bu durumda $(X, \|\cdot,\cdot,...,\cdot\|_1)$ ve $(X, \|\cdot,\cdot,...,\cdot\|_2)$ n-normlu lineer uzaydır.

$N : \underbrace{X \times \cdots \times X}_{n} \times \mathbb{R} \to [0,1]$

$$N\left(x_1, x_2, ..., x_n, t\right) = \begin{cases} 1 & t > \left\|x_1, x_2, ..., x_n\right\|_1 \\ 0,5 & \left\|x_1, x_2, ..., x_n\right\|_2 < t \le \left\|x_1, x_2, ..., x_n\right\|_1 \\ 0 & t \le \left\|x_1, x_2, ..., x_n\right\|_2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan norma göre $\left(X, N\right)$ fuzzy n-normlu lineer uzaydır.

$\alpha \in (0,1)$ ve $\left\|x_1, x_2, ..., x_n\right\|_\alpha = \inf\left\{t : N\left(x_1, x_2, ..., x_n, t\right) \ge \alpha\right\}$ olmak üzere α -n-normlar

$$\left\|x_1, x_2, ..., x_n\right\|_\alpha = \begin{cases} \left\|x_1, x_2, ..., x_n\right\|_1 & 1 > \alpha > 0,5 \\ \left\|x_1, x_2, ..., x_n\right\|_2 & 0 < \alpha \le 0,5 \end{cases}$$

olarak verilir.

4. FUZZY n-NORMLU UZAYLARDA EN UZAK NOKTA DÖNÜŞÜMÜ VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde en uzak nokta dönüşümü ve en uzak nokta kümesi kavramları, α -yakınsaklık ve α -sınırlılık kavramları verilmiştir. Ayrıca en uzak nokta dönüşümü ve en uzak nokta kümesi kavramları fuzzy n-normlu uzaylarda ilk defa verilip klasik n-normlu uzaylardaki en uzak nokta problemlerinin bazı sonuçlarının fuzzy n-normlu uzaylarla karşılaştırmasına değinilmiştir.

4.1. Normlu Uzaylarda En Uzak Nokta Dönüşümü

Bu kısımda çalışmamıza temel oluşturan en uzak nokta dönüşümü ve en uzak nokta kümesi kavramlarının literatürde bulunan normlu uzaylardaki tanım ve örnekleri verilmiştir.

4.1.1. Tanım [12]

X reel normlu lineer uzay ve X in boştan farklı sınırlı bir alt kümesi A olsun. $x \in X$ olmak üzere $F_A : X \to \mathbb{R}$ en uzak mesafe dönüşümü $F_A(x) = \sup\{\|x-y\| : y \in A\}$ olarak tanımlansın. $Q(x) = \{y' \in A : \|x-y'\| = F_A(x)\}$ şeklinde tanımlanan küme değerli dönüşüme A ya göre en uzak nokta dönüşümü denir. Her bir $y' \in Q(x)$ elemanına A nın x den en uzak noktası denir ve A nın bütün en uzak noktalarının kümesi $far(A)$ olarak yazılır. Eğer her bir $x \in X$ için $Q(x)$ boştan farklı ise A ya en uzak nokta özelliğine sahiptir (remotal) denir. Eğer her bir $x \in X$ için $Q(x)$ tek noktadan oluşuyor (singleton) ise A ya benzersiz en uzak nokta özelliğine sahiptir (uniquely remotal) denir.

4.1.2 Örnek [19]

$(X = \mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzay ve

$$A = \{(x_1, x_2) : -1 \le x_1 \le 1, -1 \le x_2 \le 1\}$$

olsun. $x = (2,2)$ noktasını aldığımızda

$$F_A(2,2)=\sup\left\{\|(2,2)-(y_1,y_2)\|:(y_1,y_2)\in A\right\}=3\sqrt{2}$$

olacağından

$$Q(x)=\left\{y=(y_1,y_2)\in A:\|(2,2)-(y_1,y_2)\|=3\sqrt{2}\right\}$$

olur. Bu durumda $Q(x)=\{(-1,-1)\}$ dir. $x=(0,2)$ noktasını aldığımızda ise $Q(x)=\{(-1,-1),(1,-1)\}$ bulunur. Benzer şekilde

$$A=\{(x_1,x_2):-1<x_1\le 1,-1\le x_2\le 1\}$$

ve $x=(2,2)$ aldığımızda

$$F_A(2,2)=\sup\left\{\|(2,2)-(y_1,y_2)\|:(y_1,y_2)\in A\right\}=3\sqrt{2}$$

ve

$$Q(x)=\left\{y=(y_1,y_2)\in A:\|(2,2)-(y_1,y_2)\|=3\sqrt{2}\right\}$$

olur. Fakat burada $(-1,-1)\notin A$ olduğundan $Q(x)=\varnothing$ bulunur.

4.1.3 Örnek [20]

$X=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $x=(a,b)\in X$ olsun. X de l_∞-normunu $a,b\in\mathbb{R}$ olmak üzere $\|(a,b)\|_\infty=\max\{|a|,|b|\}$ şeklinde tanımlayalım. $A=\{(a_1,a_2):-3\le a_1\le 3,a_2=0\}$ ve $x=(5,0)$ aldığımızda $F_A(x)=\sup\left\{\|(5,0)-(y_1,y_2)\|_\infty:(y_1,y_2)\in A\right\}=8$ olacağından $Q(x)=\left\{y=(y_1,y_2)\in A:\|(5,0)-(y_1,y_2)\|=8\right\}$ olur. Bu durumda $Q(x)=\{(-3,0)\}$ bulunur.

$A=\{(a_1,a_2):-5\le a_2\le 5,a_1=0\}$ ve $x=(0,1)$ aldığımızda

$F_A(x)=\sup\left\{\|(0,1)-(y_1,y_2)\|_\infty:(y_1,y_2)\in A\right\}=6$ olacağından

$Q(x)=\left\{y=(y_1,y_2)\in A:\|(0,1)-(y_1,y_2)\|=6\right\}$ olur. Bu durumda $Q(x)=\{(0,-5)\}$

bulunur. Aynı şekilde $A=\{(a_1,a_2):-3\le a_1\le 3,-1\le a_2\le 5\}$ ve $x=(0,2)$ aldığımızda

$F_A(x)=\sup\left\{\|(0,2)-(y_1,y_2)\|_\infty:(y_1,y_2)\in A\right\}=3$ olacağından

$Q(x)=\left\{y=(y_1,y_2)\in A:\|(0,2)-(y_1,y_2)\|=3\right\}$ olur. Bu durumda

$Q(x)=\{(y_1,5),(y_1,-5):-3\le y_1\le 3\}\cup\{(3,y_2),(-3,y_2):-5\le y_2\le 5\}$ bulunur.

4.1.4. Tanım [13]

A, X reel normlu lineer uzayının sınırlı bir alt kümesi ve $x \in X$ olsun. Her $a \in A$ için $\|x-a_0\| \geq \|x-a\| + K_x \|a-a_0\|$ olacak şekilde sabit bir $K_x > 0$ varsa $a_0 \in A$ ya A dan X e kuvvetli benzersiz en uzak nokta denir.

4.1.5. Teorem [13]

A, normlu X lineer uzayının kompakt bir alt kümesi ise $\forall x \in X$ için A da bir en uzak nokta vardır.

4.1.6. Sonuç [13]

A, normlu X lineer uzayının kapalı ve sınırlı sonlu boyutlu bir kümesi olsun. Bu durumda $\forall x \in X$ için A da bir en uzak nokta vardır.

4.1.7. Sonuç [13]

Normlu X lineer uzayından, normlu Y lineer uzayına f sürekli dönüşümü ve X in kompakt bir G alt kümesi verilsin. Bu durumda $\forall y \in Y$ için $f(G)$ ye göre en az bir en uzak nokta vardır.

4.2. Fuzzy n-Normlu Uzaylarda En Uzak Nokta Dönüşümü

α-yakınsaklık ve α-sınırlılık kavramlarını verdiğimiz bu kısımda en uzak nokta dönüşümü ve en uzak nokta kümesi kavramları fuzzy n-normlu uzaylarda ilk defa verilmiştir.

4.2.1. Tanım

(X, N) fuzzy n-normlu uzay olmak üzere, (x_k), X de bir dizi ve $\alpha \in (0,1)$ olsun.

$\forall \varepsilon > 0$, $\forall t > 0$ ve $a_1, ..., a_{n-1}, x \in X$ için $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ var öyleki $k \geqslant k_0$ iken

$$N(a_1, ..., a_{n-1}, x_k - x, t) \geqslant \alpha - \varepsilon$$

ise (x_k) dizisi $x \in X$ noktasına $\alpha-$yakınsaktır denir ve

$$x_k \to_{\alpha} x \text{ veya } \alpha - \lim_{k\to\infty} x_k = x$$

şeklinde yazılır. Eğer her bir $\alpha \in (0,1)$ için $\alpha-$yakınsak veya eşiti olarak her bir $t > 0$ için

$$\lim_{k\to\infty} N(a_1,...,a_{n-1}, x_k - x, t) = 1$$

ise x e yakınsaktır denir ve $x_k \to x$ olarak yazılır. A, X in bir alt kümesi olmak üzere eğer her $a_1,...,a_{n-1}, x \in A$ için

$$N(a_1,...,a_{n-1}, x, m) \geqslant \alpha$$

olacak şekilde bir pozitif m reel sayısı varsa A ya fuzzy $\alpha-$sınırlı denir. Eğer her bir $\alpha \in (0,1)$ için fuzzy $\alpha-$sınırlı ise A ya fuzzy sınırlıdır denir.

4.2.2. Tanım

(X, N) fuzzy n-normlu uzay olmak üzere, A, X in $\alpha-$sınırlı bir alt kümesi olsun. $a_1,...,a_{n-1}, x \in X$ ve $0 < s < t$ için

$$Q_{\alpha}(A,x) = \{a \in A : N(a_1,...,a_{n-1}, x-a, s) \geqslant \alpha \Rightarrow \forall b \in A \text{ için } N(a_1,...,a_{n-1}, x-b, t) \geqslant \alpha\}$$

şeklinde tanımlayalım. $Q_{\alpha}(A,x)$ i kısaca $Q_{\alpha}(x)$ şeklinde gösterirsek $Q_{\alpha}(x)$ in her bir a elemanına A nın x den fuzzy $\alpha-$en uzak noktası denir ve

$$x \to Q_{\alpha}(x)$$

dönüşümüne A ya göre fuzzy $\alpha-$en uzak nokta dönüşümü denir. Her bir $x \in X$ için

$$Q_{\alpha}(x) \neq \varnothing$$

ise A kümesine X de fuzzy $\alpha-$remotal (en uzak nokta özelliğine sahip) denir. Eğer her $x, y \in A$, $a_1,...,a_{n-1} \in X$ ve her bir $t > 0$ için

$$N(a_1,...,a_{n-1}, x-y, t) \geq \alpha$$

ilişkisi varsa A ya $\alpha-$singleton (tek noktadan oluşan) denir. Ayrıca A nın singleton olabilmesi için gerek ve yeter şart her $\alpha \in (0,1)$ için A nın $\alpha-$singleton olmasıdır. Eğer $Q_{\alpha}(x)$ kümesi $\alpha-$singleton ise bu durumda x noktası X de $\alpha-$benzersiz en uzak

noktadır denir. Eğer her bir $x \in X$ noktası A da $\alpha-$benzersiz en uzak nokta ise A, X de fuzzy $\alpha-$benzersiz en uzak nokta özelliğine sahiptir.

4.2.3. Uyarı

Eğer bazı $x \in X$ ler için $Q_\alpha(x)$ boştan farklı ise bu durumda A ya fuzzy $\alpha-$sınırlıdır denir. Gerçekten $a \in Q_\alpha(x)$ olsun. O halde $s_0 > 0$ sayısı vardır öyle ki $a_1,...,a_{n-1},x,a \in X$ için

$$N(a_1,...,a_{n-1},x-a,s_0) \geq \alpha \Rightarrow \forall b \in A \text{ ve } t_0 > s_0 \text{ için } N(a_1,...,a_{n-1},x-b,t_0) \geq \alpha$$

dır.

Ayrıca bazı $t_1 > 0$ sayıları için

$$N(a_1,...,a_{n-1},x,t_1) \geq \alpha$$

yazabiliriz. Böylece $m = t_0 + t_1$ için

$$N(a_1,...,a_{n-1},b,m) \geq \min\{N(a_1,...,a_{n-1},b-x,t_0), N(a_1,...,a_{n-1},x,t_1)\} \geq \alpha$$

ifadesi $\forall b \in A$ için vardır. Buda gösteriyor ki A fuzzy $\alpha-$sınırlıdır. Böylece A bundan sonraki bölümlerde fuzzy $\alpha-$sınırlı olarak alınacaktır.

4.2.4. Lemma

(X,N) fuzzy n-normlu uzay olmak üzere, A, X in bir alt kümesi ve $a \in A$ olsun. A ya göre fuzzy α -en uzak nokta dönüşümü Q_α olmak üzere, $a_1,...,a_{n-1} \in X$ ve her $t > 0$ için

$$N(a_1,...,a_{n-1},a-q_{\alpha x},t) \geq \alpha$$

olacak şekilde $\exists q_{\alpha x} \in Q(x)$ var ise $a \in Q_\alpha(x)$ dir.

İspat

$a_1,...,a_{n-1} \in X, a \in A$ ve $0 < s < t$ için $N(a_1,...,a_{n-1},x-a,s) \geq \alpha$ olsun. $\varepsilon = t - s$ olmak üzere,

$$N\left(a_1,...,a_{n-1},x-q_{\alpha x},s+\frac{\varepsilon}{2}\right) \geq \min\left\{N(a_1,...,a_{n-1},x-a,s), N\left(a_1,...,a_{n-1},a-q_{\alpha x},\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}$$

$$\geq \min\{\alpha,\alpha\} = \alpha$$

dır. $q_{\alpha x} \in Q_\alpha(x)$ oldugundan $\forall b \in A$ ve $t = s+\varepsilon > s+\frac{\varepsilon}{2}$ için $Q_\alpha(x)$ tanımından

$$N\left(a_1,...,a_{n-1},x-q_{\alpha x},s+\frac{\varepsilon}{2}\right) \geq \alpha \Rightarrow N(a_1,...,a_{n-1},x-b,t) \geq \alpha$$

dır. Yani $0<s<t$, $a_1,...,a_{n-1},x \in X$ ve $a \in A$ için

$$N(a_1,...,a_{n-1},x-a,s) \geq \alpha \Rightarrow \forall b \in A \text{ için } N(a_1,...,a_{n-1},x-b,t) \geq \alpha$$

olduğundan $a \in Q_\alpha(x)$ dir.

4.2.5. Sonuç

(X,N) fuzzy n-normlu uzay olmak üzere, A, X in bir fuzzy $\alpha-$benzersiz en uzak nokta özelliğine sahip alt kümesi olsun. Eğer $Q_\alpha(x) \cap Q_\alpha(y) \neq \varnothing$ ise $Q_\alpha(x) = Q_\alpha(y)$ dir.

İspat

$a \in Q_\alpha(x) \cap Q_\alpha(y)$ olsun. O halde her bir $q_{\alpha x} \in Q_\alpha(x)$, $q_{\alpha y} \in Q_\alpha(y)$, $a_1,...,a_{n-1},x \in X$ ve $t>0$ için

$$N\left(a_1,...,a_{n-1},a-q_{\alpha x},\frac{t}{2}\right) \geq \alpha$$

ve

$$N\left(a_1,...,a_{n-1},a-q_{\alpha y},\frac{t}{2}\right) \geq \alpha$$

dır. Bu nedenle

$$N(a_1,...,a_{n-1},q_{\alpha x}-q_{\alpha y},t) \geq \min\left\{N\left(a_1,...,a_{n-1},q_{\alpha x}-a,\frac{t}{2}\right),N\left(a_1,...,a_{n-1},a-q_{\alpha y},\frac{t}{2}\right)\right\}$$

$$\geq \alpha$$

dır. Böylece Lemma 4.2.4 den dolayı $Q_\alpha(x) = Q_\alpha(y)$ dır.

4.2.6. Tanım

(X,N) fuzzy n-normlu uzay olmak üzere, A, X in bir fuzzy sınırlı alt kümesi olsun. $x \in X$ için

$$Q(A,x) = \cap_{\alpha \in (0,1)} Q_\alpha (A,x)$$

şeklinde tanımlayalım. Her bir $a \in Q(A,x)$ elemanına A nın x den fuzzy en uzak noktası ve

$$x \to Q(A,x)$$

dönüşümüne A ya göre fuzzy en uzak nokta dönüşümü denir.(Kısalık için $Q(A,x)$ yerine $Q(x)$ yazabiliriz.)

4.2.7. Lemma

(X,N) fuzzy n-normlu uzay olmak üzere, A, X in fuzzy sınırlı alt kümesi ise aşağıdaki ifadeler vardır.

i. Her $0 < s < t$ ve $\forall b \in A$, $a_1,...,a_{n-1}, x \in X$ için

$Q(x) = \{a \in A : N(a_1,...,a_{n-1}, x-a, s) \le N(a_1,...,a_{n-1}, x-b, t)\}$ dir.

ii. A fuzzy benzersiz en uzak nokta özelliğine sahiptir gerek ve yeter şart $\forall x \in X$ için $Q(x)$ tek noktadan (singleton) oluşmaktadır.

İspat

i. $a \in Q(x)$ ve $a_1,...,a_{n-1}, x \in X$ olsun. $0 < s < t$ ise o halde her $\alpha \in (0,1)$ ve $b \in A$ için

$$N(a_1,...,a_{n-1}, x-a, s) < \alpha \text{ veya } N(a_1,...,a_{n-1}, x-b, t) \ge \alpha$$

dır.

$$\alpha = N(a_1,...,a_{n-1}, x-a, s)$$

seçersek $a \in Q_\alpha (x)$ olduğundan $t > s$ için

$$N(a_1,...,a_{n-1}, x-b, t) \ge \alpha = N(a_1,...,a_{n-1}, x-a, s)$$

dır.

Tersine, eğer her $\forall b \in A,\ a_1,...,a_{n-1} \in X$ ve her $s < t$ için

$$N(a_1,...,a_{n-1}, x-a, s) \le N(a_1,...,a_{n-1}, x-b, t)$$

ise bu durumda her bir $\alpha \in (0,1)$ ve $N(a_1,...,a_{n-1}, x-a, s) \ge \alpha$ için

$$\alpha \le N(a_1,...,a_{n-1}, x-a, s) \le N(a_1,...,a_{n-1}, x-b, t)$$

dır. Tanımdan $\forall \alpha \in (0,1)$ için $a \in Q_\alpha(x)$ dir. Bundan dolayı $a \in Q(x)$ dir.

ii. A fuzzy benzersiz en uzak nokta özelliğine sahip olsun. $x \in X$ benzersiz en uzak nokta ise $\forall a,b \in Q(x)$ ve $\forall \alpha \in (0,1)$ için $a,b \in Q_\alpha(x)$ dir. Lemma 4.2.4 den $\forall t > 0$ ve $\forall \alpha \in (0,1)$ için

$$N(a_1,...,a_{n-1}, a-b, t) \ge \alpha$$

dır. Buda gösterir $Q_\alpha(x)$ α-singletondur. $\forall \alpha \in (0,1)$ için $\alpha-$singleton olduğundan $Q(x) = \underset{\alpha \in (0,1)}{\cap} Q_\alpha(x)$ singleton dur.

Tersine $Q(x)$ singleton ise $\forall \alpha \in (0,1)$ için $Q_\alpha(x)$ α-singleton dur. Bu durumda *x* noktası α- benzersiz en uzak noktadır. Ayrıca $\forall \alpha \in (0,1)$ için *x* α-benzersiz en uzak nokta ise $Q(x)$ içinde benzersiz en uzak noktadır. Hatta *x* keyfi oldugundan $\forall x \in X$ için benzersiz en uzak nokta oldugundan $Q(x)$ benzersiz en uzak nokta özelliğine sahiptir.

4.2.8. Teorem

(X,N) fuzzy n-normlu uzay olmak üzere, *A*, X in fuzzy $\alpha-$sınırlı alt kümesi, $x \to Q_\alpha(x)$ fuzzy $\alpha-$en uzak nokta dönüşümü ve (x_k), *X* de bir dizi olsun. Eğer her bir $k \in \mathbb{N}$ için $x_k \to_\alpha x$ ve $q_{\alpha x_k} \in Q_\alpha(x_k)$ iken $q_{\alpha x_k} \to_\alpha y$ ise $y \in Q_\alpha(x)$ dir.

İspat

$a_1,...,a_{n-1}, x, y \in X$ ve (x_k), *X* de bir dizi olsun.

$0 < s < t$, $\varepsilon = t - s$ ve $N(a_1,...,a_{n-1}, x-y, s) \ge \alpha$ olsun. $k_0 \in \mathbb{N}$ alalım öyleki her bir $k \ge k_0$ için,

$$N\left(a_1,...,a_{n-1},x_k-x,\frac{\varepsilon}{8}\right)\geq\alpha \text{ ve } N\left(a_1,...,a_{n-1},y-q_{\alpha x_k},\frac{\varepsilon}{8}\right)\geq\alpha$$

dır. Kabul edelimki bazı $k\geq k_0$ için

$$N\left(a_1,...,a_{n-1},x_k-q_{\alpha x_k},s+\frac{\varepsilon}{4}\right)<\alpha$$

olsun. Bu durumda

$$\alpha > N\left(a_1,...,a_{n-1},x_k-q_{\alpha x_k},s+\frac{\varepsilon}{4}\right)$$

$$\geq \min\left\{\begin{array}{c} N\left(a_1,...,a_{n-1},x_k-x,\frac{\varepsilon}{8}\right),N\left(a_1,...,a_{n-1},x-y,s\right), \\ N\left(a_1,...,a_{n-1},y-q_{\alpha x_k},\frac{\varepsilon}{8}\right) \end{array}\right\}$$

$$\geq \min\left\{\alpha,N\left(a_1,...,a_{n-1},x-y,s\right),\alpha\right\}=\alpha$$

$$\alpha>\alpha$$

dır. Bu da çelişkidir. Böylece her $k\geq k_0$ için

$$N\left(a_1,...,a_{n-1},x_k-q_{\alpha x_k},s+\frac{\varepsilon}{2}\right)\geq N\left(a_1,...,a_{n-1},x_k-q_{\alpha x_k},s+\frac{\varepsilon}{4}\right)$$

$$\geq\alpha$$

dır. Dolayısıyla $Q_\alpha\left(x_k\right)$ tanımından

$$\forall k\geq k_0,\forall b\in A \text{ için } N\left(a_1,...,a_{n-1},x_k-b,s+\frac{\varepsilon}{2}\right)\geq a$$

dır. Böylece her $b\in A$ ve $k\geq k_0$ için,

$$N\left(a_1,...,a_{n-1},x-b,t\right)=N\left(a_1,...,a_{n-1},x-b,s+\varepsilon\right)$$

$$\geq \min\left\{N\left(a_1,...,a_{n-1},x-x_k,\frac{\varepsilon}{2}\right),N\left(a_1,...,a_{n-1},x_k-b,s+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}$$

$$\geq \min\left\{\alpha,\alpha\right\}$$

$$=\alpha$$

dır. Tanımdan dolayı, $y\in Q_\alpha\left(x\right)$ dir.

4.2.9. Sonuç

(X,N) fuzzy n-normlu uzay olmak üzere, A, X in fuzzy sınırlı alt kümesi, $x \to Q(x)$ fuzzy en uzak nokta dönüşümü ve (x_k), X de bir dizi olsun. Eğer her bir k için $x_k \to x$ ve $q_{x_k} \in Q(x_k)$ iken $q_{x_k} \to y$ ise bu durumda $y \in Q(x)$ dir.

4.3. Fuzzy n-Normlu Uzaylar İle Klasik n-Normlu Uzaylarda En Uzak Nokta Dönüşümünün Karşılaştırılması

Bu kısımda klasik $n-$normlu uzaylardaki en uzak nokta problemlerinin bazı sonuçlarının fuzzy $n-$normlu uzaylarla karşılaştırmasına değineceğiz.

Aşağıdaki lemma $(X,\|\cdot,...,\cdot\|)$ $n-$normlu lineer uzay olmak üzere $\forall x_1,x_2,...,x_n \in X$ ve $t>0$ için

$$N(x_1,x_2,...,x_n,t)=\begin{cases}\dfrac{t}{t+\|x_1,x_2,...,x_n\|} & ; \quad x_1,x_2,...,x_n \text{ lineer bağımsız} \\ 1 & ; \quad x_1,x_2,...,x_n \text{ lineer bağımlı}\end{cases} \qquad (*)$$

fuzzy $n-$normu ele alındığında (X,N) fuzzy $n-$normlu uzayında bizim tanımlarımızla klasik $n-$normdaki durumların denklik gösterdiğini ifade etmektedir.

4.3.1. Lemma

$(X,\|\cdot,...,\cdot\|)$ $n-$normlu uzay ve A, X in sınırlı bir alt kümesi olsun. Bu durumda $\cap_{\alpha\in(0,1)} Q_\alpha(A,x)$ ifadesi $Q(A,x)$ e $(X,\|\cdot,...,\cdot\|)$ de eşittir.

İspat

$a_1,...,a_{n-1},x,a \in X$ ve $a \in \cap_{\alpha\in(0,1)} Q_\alpha(A,x)$ keyfi elemanını alalım. $0<s<t$ ve $\forall b \in A$ için

$$N(x_1,x_2,...,x_{n-1},x-b,t) \geq N(x_1,x_2,...,x_{n-1},x-a,s)$$

dir. Bu eşitsizliği kullanarak $\forall b \in A$ için

$$\frac{t}{t+\|a_1,...,a_{n-1},x-b\|} = N(a_1,...,a_{n-1},x-b,t) \geq$$

$$N\left(a_1,...,a_{n-1},x-a,s\right)=\frac{s}{s+\left\|a_1,...,a_{n-1},x-a\right\|}$$

dır. Böylece $\forall b\in A$ ve $0<s<t$ için

$$\begin{aligned}
&\frac{t}{t+\left\|a_1,...,a_{n-1},x-b\right\|} \quad \geq \frac{s}{s+\left\|a_1,...,a_{n-1},x-a\right\|}\\
&t.\left(s+\left\|a_1,...,a_{n-1},x-a\right\|\right)\geq s.\left(t+\left\|a_1,...,a_{n-1},x-b\right\|\right)\\
&t.s+t.\left\|a_1,...,a_{n-1},x-a\right\| \geq s.t+s.\left\|a_1,...,a_{n-1},x-b\right\|\\
&t.\left\|a_1,...,a_{n-1},x-a\right\| \quad \geq s.\left\|a_1,...,a_{n-1},x-b\right\|
\end{aligned}$$

dir. $s\to t$ yazarsak

$$\left\|a_1,...,a_{n-1},x-b\right\|\leq\left\|a_1,...,a_{n-1},x-a\right\|$$

oldugunu görürüz. a keyfi olduğundan $\forall a\in\cap_{\alpha\in(0,1)}Q_\alpha\left(A,x\right)$ için $\left(X,\|\cdot,...,\cdot\|\right)$ de $a\in Q\left(A,x\right)$ dir.

Tersine, varsayalım ki $\left(X,\|\cdot,...,\cdot\|\right)$ de $a\in Q\left(A,x\right)$ keyfi elemanını alalım. Bu durumda $\forall b\in A$ ve $0<s<t$ için

$$\left\|a_1,...,a_{n-1},x-b\right\|\leq\left\|a_1,...,a_{n-1},x-a\right\|$$

$$\Rightarrow t.\left\|a_1,...,a_{n-1},x-a\right\|\geq s.\left\|a_1,...,a_{n-1},x-a\right\|\geq s.\left\|a_1,...,a_{n-1},x-b\right\|$$

$$\Rightarrow s.t+t.\left\|a_1,...,a_{n-1},x-a\right\|\geq s.t+s.\left\|a_1,...,a_{n-1},x-b\right\|$$

$$\Rightarrow t\left(s+\left\|a_1,...,a_{n-1},x-a\right\|\right)\geq s\left(t+\left\|a_1,...,a_{n-1},x-b\right\|\right)$$

$$\Rightarrow \frac{t}{t+\left\|a_1,...,a_{n-1},x-b\right\|}\geq\frac{s}{s+\left\|a_1,...,a_{n-1},x-a\right\|}$$

$$\Rightarrow N\left(a_1,...,a_{n-1},x-b,t\right)\geq N\left(a_1,...,a_{n-1},x-a,s\right)$$

bulunur. Böylece a keyfi olduğundan $\forall a\in Q\left(A,x\right)$ için tanımdan $a\in\cap_{\alpha\in(0,1)}Q_\alpha\left(A,x\right)$ dır.

4.3.2 Örnek

$X=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $x_1=\left(x_{11},x_{12}\right),x_2=\left(x_{21},x_{22}\right)\in X$ olsun.

$\left\|\cdot,\cdot\right\|:X\times X\to\mathbb{R}$,

$\|x_1, x_2\| = \left|\det \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}\right|$ şeklinde tanımlanan fonksiyon 2-norm belirtir. Bu durumda $\left(X = \mathbb{R}^2, \|\cdot,\cdot\|\right)$ 2-normlu lineer uzay, $A = \{(a_1, a_2) : -1 \le a_1 \le 1, a_2 = 0\}$, $x_1 = (3,1)$ olmak üzere $x = (2,2)$ noktası için $x \to Q(A, x)$ en uzak nokta dönüşümünü hesaplayalım.

$$\begin{aligned} F_A(x) &= \sup\{\|x_1, x - a\| : a \in A\} \\ &= \sup\{\|(3,1), (2,2) - (a_1, a_2)\| : (a_1, a_2) \in A\} \\ &= \sup\{\|(3,1), (2 - a_1, 2 - a_2)\| : (a_1, a_2) \in A\} \\ &= \sup\{|3.(2 - a_2) - 1.(2 - a_1)| : (a_1, a_2) \in A\} \\ &= \sup\{|4 + a_1 - 3a_2| : (a_1, a_2) \in A\} \\ &= 4 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} Q(A, x) &= \{a = (a_1, a_2) \in A : \|x_1, x - a\| = 5\} \\ &= \{(a_1, a_2) \in A : \|(3,1), (2,2) - (a_1, a_2)\| = 5\} \\ &= \{(a_1, a_2) \in A : \|(3,1), (2 - a_1, 2 - a_2)\| = 5\} \\ &= \{(a_1, a_2) \in A : |3.(2 - a_2) - 1.(2 - a_1)| = 5\} \\ &= \{(a_1, a_2) \in A : |4 + a_1 - 3a_2| = 5\} \\ &= \{(1,0)\} \end{aligned}$$

küme değerli dönüşümü elde edilir.

Şimdide yukarıda verdiğimiz örneği fuzzy 2-norm üzerinde yaptığımız aşağıdaki örneği inceleyelim.

4.3.3 Örnek

$\left(X, \|\cdot,\cdot\|\right)$ örnek 4.3.2 de tanımlı 2-normlu lineer uzay olmak üzere *N* fuzzy 2-normunu

$N : X \times X \times \mathbb{R} \to [0,1]$

$$N(x, y, t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t + \|x, y\|} & ; t > 0, x, y \in X \\ 0 & ; t \le 0, x, y \in X \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. $A = \{(a_1, a_2) : -1 \le a_1 \le 1, a_2 = 0\}$, $y = (3,1)$ olmak üzere $x = (2,2)$ noktası için $x \to Q(A, x)$ fuzzy en uzak nokta dönüşümünü hesaplayalım.

$0 < s < t$ ve $\forall b \in A$ için

$$Q(A,x) = \{a = (a_1, a_2) \in A : N(y, x-a, s) \leq N(y, x-b, t)\}$$

şeklindedir. Bu durumda

$$N(y, x-a, s) \leq N(y, x-b, t)$$

$$\Rightarrow \frac{s}{s + \|y, x-a\|} \leq \frac{t}{t + \|y, y-b\|}$$

$$\Rightarrow s.\|y, y-b\| \leq t.\|y, x-a\|$$

bulunur. $s \to t$ yazarsak

$$\|y, x-b\| \leq \|y, x-a\|$$

elde edilir. $\forall b \in A$ için bu şartı sağlayan $a \in A$ değeri örnek 4.3.2 de hesapladığımız $(1,0) \in A$ değeridir. Bu durumda $Q(A,x) = \{(1,0)\}$ olarak bulunur. Verdiğimiz bu iki örnekle de görüldüğü gibi klasik 2-norm ve fuzzy 2-norm ile yapılan en uzak nokta dönüşümü ve kümesi eşitlik göstermiştir.

Şimdide verdiğimiz örneklerden farklı bir örnek olarak kullandığımız fuzzy normu değiştirdiğimizde de aynı sonuçların elde edilebileceğini görelim. Bu örneği fuzzy 3-normlu uzaylarda verelim. Öncelikle bu dönüşümün fuzzy 3-norm oldugunu gösterelim.

4.3.4 Örnek

$X = \mathbb{R}^3$, $\left(X, \|\cdot,\cdot,\cdot\|_\infty\right)$ 3-normlu lineer uzay olsun. $\forall x_1, x_2, x_3 \in X$ ve $t \in \mathbb{R}$ için

$$N : X \times X \times X \times \mathbb{R} \to [0,1]$$

$$N(x_1, x_2, x_3, t) = \begin{cases} \left(e^{\frac{\|x_1, x_2, x_3\|_\infty}{t}} \right)^{-1} & ; \quad t > 0, x_1, x_2, x_3 \in X \\ 0 & ; \quad t \leq 0, x_1, x_2, x_3 \in X \end{cases}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Burada $\|x_1, x_2, x_3\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 3} \sum_{j=1}^{3} |x_{ij}|$ olmak üzere N dönüşümünün fuzzy 3-norm ve (X, N) nin fuzzy 3-normlu lineer uzay olduğunu gösterelim.

Çözüm

$x_1, x_2, x_3 \in X$ alalım.

N1) $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $t \le 0$ için $N(x_1, x_2, x_3, t)$ nin tanımından $N(x_1, x_2, x_3, t) = 0$ dır.

N2) $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ için

$$N(x_1, x_2, x_3, t) = 1 \Rightarrow \left(e^{\frac{\|x_1, x_2, x_3\|_\infty}{t}} \right)^{-1} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\|x_1, x_2, x_3\|_\infty}{t} = 0$$

$$\Rightarrow \|x_1, x_2, x_3\|_\infty = 0$$

$$\Rightarrow \max_{1 \le i \le 3} \sum_{j=1}^{3} |x_{ij}| = 0$$

$$\Rightarrow x_{ij} = 0, \forall i = 1,2,3 \text{ ve } \forall j = 1,2,3$$

$$\Rightarrow x_1, x_2, x_3 \text{ lineer bağımlıdır.}$$

N3) $\|x_1, x_2, x_3\|_\infty$ 3-norm olduğundan x_1, x_2, x_3 ün herhangi bir permütasyonuna göre değişmediğinden

$\forall t \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ için $N(x_1, x_2, x_3, t) = \left(e^{\frac{\|x_1, x_2, x_3\|_\infty}{t}} \right)^{-1}$ değeri de x_1, x_2, x_3 ün herhangi bir permütasyonuna göre değişmeyendir.

N4) $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ için $c \neq 0$ olsun.

$$N(x_1, x_2, cx_3, t) = \left(e^{\frac{\|x_1, x_2, cx_3\|_\infty}{t}} \right)^{-1}$$

$$= \left(e^{\frac{|c|\|x_1, x_2, x_3\|_\infty}{t}} \right)^{-1}$$

$$= \left(e^{\frac{\|x_1, x_2, x_3\|_\infty}{t/|c|}} \right)^{-1}$$

$$= N(x_1, x_2, x_3, t/|c|)$$

bulunur.

N5) $\forall s, t \in \mathbb{R}$ ve $x_1, x_2, a, b \in X$ için

$N(x_1, x_2, a+b, s+t) \ge \min\{N(x_1, x_2, a, s), N(x_1, x_2, b, t)\}$ olduğunu gösterelim.

a) $s + t < 0 \Rightarrow s < 0$ veya $t < 0$ dır. Bu durumda $N(x_1, x_2, a, s) = 0$ veya $N(x_1, x_2, b, t) = 0$ dır. $N(x_1, x_2, a+b, s+t) = 0 = \min\{N(x_1, x_2, a, s), N(x_1, x_2, b, t)\}$ bulunur.

b) $s + t = 0 \Rightarrow s = t = 0$ veya $s = -t$ olabilir.

$s=t=0 \Rightarrow N(x_1,x_2,a+b,s+t)=0=\min\{N(x_1,x_2,a,s)=0, N(x_1,x_2,b,t)=0\}$

$s=-t \Rightarrow N(x_1,x_2,a,s)=0$ veya $N(x_1,x_2,b,t)=0$ dır.

Buradan $N(x_1,x_2,a+b,s+t)=0=\min\{N(x_1,x_2,a,s),N(x_1,x_2,b,t)\}$ bulunur.

c) $s+t>0 \Rightarrow$ i) $s<0<t$ ii) $t<0<s$ iii) $0<s<t$ iv) $0<t<s$ durumları olacaktır. i) ve ii) durumları için $N(x_1,x_2,a,s)=0$ ya da $N(x_1,x_2,b,t)=0$ olacağından bu iki durum içinde $\min\{N(x_1,x_2,a,s),N(x_1,x_2,b,t)\}=0$ olacaktır. Yani

$N(x_1,x_2,a+b,s+t) \geq \min\{N(x_1,x_2,a,s),N(x_1,x_2,b,t)\}=0$ dır.

iii) ve iv) durumları için ise $N(x_1,x_2,a,s)>N(x_1,x_2,b,t)$ veya $N(x_1,x_2,a,s)<N(x_1,x_2,b,t)$ durumlarından biri gerçekleşecektir. Biz $N(x_1,x_2,a,s)>N(x_1,x_2,b,t)$ durumunu ele alalım. Diğer durum için de benzer işlemler yapılabilir.

$$N(x_1,x_2,a,s)>N(x_1,x_2,b,t) \Rightarrow \left(e^{\frac{\|x_1,x_2,a\|}{s}}\right)^{-1} > \left(e^{\frac{\|x_1,x_2,b\|}{t}}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\|x_1,x_2,a\|}{s} < \frac{\|x_1,x_2,b\|}{t}$$

$$\Rightarrow t.\|x_1,x_2,a\| < s.\|x_1,x_2,b\|$$

$$\Rightarrow t.\|x_1,x_2,a\| - s.\|x_1,x_2,b\| < 0$$

bulunur. Bu ifade birazdan kullanılacaktır. $N(x_1,x_2,a,s)>N(x_1,x_2,b,t)$ olduğundan $\min\{N(x_1,x_2,a,s),N(x_1,x_2,b,t)\}=N(x_1,x_2,b,t)$ olacaktır. Bu durumda biz de $N(x_1,x_2,a+b,s+t)>N(x_1,x_2,b,t)$ ifadesinin doğruluğuna bakacağız. Bunun için $\frac{\|x_1,x_2,a+b\|}{s+t} < \frac{\|x_1,x_2,a\|+\|x_1,x_2,b\|}{s+t}$ eşitsizliğini kullanarak

$\frac{\|x_1,x_2,b\|}{t} - \frac{\|x_1,x_2,a\|+\|x_1,x_2,b\|}{s+t}$ değerini hesaplayalım.

$$\frac{\|x_1,x_2,b\|}{t} - \frac{\|x_1,x_2,a\|+\|x_1,x_2,b\|}{s+t} = \frac{s.\|x_1,x_2,b\|+t.\|x_1,x_2,b\|-t.\|x_1,x_2,a\|-t.\|x_1,x_2,b\|}{t.(t+s)}$$

$$= \frac{s.\|x_1,x_2,b\|-t.\|x_1,x_2,a\|}{t.(t+s)} > 0$$

ifadesi bulunur ki bu ifadenin pozitif olduğu yukarıda bulduğumuz eşitsizlikten ve $s>0, t>0$ ifadelerinden faydalanarak görülür. Bu durumda

$$\frac{s.\|x_1,x_2,b\|-t.\|x_1,x_2,a\|}{t.(t+s)}>0$$

$$\Rightarrow e^{\frac{\|x_1,x_2,b\|}{t}-\frac{\|x_1,x_2,a\|+\|x_1,x_2,b\|}{s+t}}>1$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{\|x_1,x_2,a\|+\|x_1,x_2,b\|}{s+t}}>e^{-\frac{\|x_1,x_2,b\|}{t}}$$

$$\Rightarrow N(x_1,x_2,a+b,s+t)>N(x_1,x_2,b,t)$$

bulunur. Benzer şekilde $N(x_1,x_2,a,s)<N(x_1,x_2,b,t)$ durumu da gösterilebilir. O halde iii) ve iv) durumları içinde $N(x_1,x_2,a+b,s+t)>\min\{N(x_1,x_2,a,s),N(x_1,x_2,b,t)\}$ olduğu görülür.

N5) $t_1<t_2\le 0$ için $N(x_1,x_2,x_3,t_1)=N(x_1,x_2,x_3,t_2)=0$ olur. $0<t_1<t_2$ ise

$e^{\frac{\|x_1,x_2,x_3\|}{t_1}-\frac{\|x_1,x_2,x_3\|}{t_2}}=e^{\frac{t_2.\|x_1,x_2,x_3\|-t_1.\|x_1,x_2,x_3\|}{t_1.t_2}}>1$ bulunur. Buradan $N(x_1,x_2,x_3,t_1)<N(x_1,x_2,x_3,t_2)$ dir. Yani *N*, $\mathbb{R}$ de azalmayan bir fonksiyondur.

$\lim_{t\to\infty}N(x_1,x_2,x_3,t)$ değeri için 2 durumda inceleyelim. x_1,x_2,x_3 lineer bağımlı ise $\lim_{t\to\infty}N(x_1,x_2,x_3,t)=\lim_{t\to\infty}1=1$ dir.

Lineer bağımlı değil ise $\lim_{t\to\infty}N(x_1,x_2,x,t)=\lim_{t\to\infty}e^{-\frac{\|x_1,x_2,x_3\|}{t}}=e^{\lim_{t\to\infty}-\frac{\|x_1,x_2,x_3\|}{t}}=e^0=1$ dir. Her iki durum için de $\lim_{t\to\infty}N(x_1,x_2,x,t)=1$ bulunur.

Bu durumda *N*, *X* de fuzzy 3-norm ve (X,N) fuzzy 3-normlu lineer uzaydır.

Şimdide en uzak nokta dönüşümünü ve kümesini fuzzy 3-norm olduğunu gösterdiğimiz bu norma göre bulalım. Göreceğiz ki buradaki fuzzy 3-norm ile bulunan en uzak nokta dönüşümü ve kümesi ile klasik anlamdaki $\|\cdot,\cdot,\cdot\|_\infty$ normuna göre en uzak nokta dönüşümü ve kümesi denklik gösterecektir.

4.3.5 Örnek

$X=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $i=1,2,3$ için $x_i=(x_{i1},x_{i2},x_{i3})\in X$ olsun.

$\|\cdot,\cdot,\cdot\|: X\times X\times X\to\mathbb{R}$,

$\|x_1, x_2, x_3\|_\infty = \max_{1\le i\le 3} \sum_{j=1}^{3} |x_{ij}|$ şeklinde tanımlanan fonksiyon 3-norm belirtir. Bu durumda $\left(X = \mathbb{R}^3, \|\cdot,\cdot,\cdot\|\right)$ 3-normlu lineer uzay, $x_1 = (1,0,0)$, $x_2 = (0,1,0)$ ve $A = \left\{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 : a_1^{\,2} + a_2^{\,2} \le 1, 0 \le a_3 \le a_1^{\,2} + a_2^{\,2}\right\}$ olmak üzere $x = (0,0,4)$ noktası için $x \to Q(A, x)$ en uzak nokta dönüşümünü hesaplayalım.

$$\begin{aligned} F_A(x) &= \sup\left\{\|x_1, x_2, x - a\|_\infty : a \in A\right\} \\ &= \sup\left\{\|(1,0,0),(0,1,0),(0,0,4) - (a_1,a_2,a_3)\|_\infty : (a_1,a_2,a_3) \in A\right\} \\ &= \sup\left\{\|(1,0,0),(0,1,0),(-a_1,-a_2,4-a_3)\|_\infty : (a_1,a_2,a_3) \in A\right\} \\ &= \sup\left\{\max\left\{1,1,|a_1|+|a_2|+|4-a_3|\right\} : (a_1,a_2,a_3) \in A\right\} \\ &= 4+\sqrt{2} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} Q(A,x) &= \left\{a = (a_1,a_2,a_3) \in A : \|x_1, x_2, x-a\|_\infty = 4+\sqrt{2}\right\} \\ &= \left\{(a_1,a_2,a_3) \in A : \|(1,0,0),(0,1,0),(0,0,4) - (a_1,a_2,a_3)\|_\infty = 4+\sqrt{2}\right\} \\ &= \left\{(a_1,a_2,a_3) \in A : \|(1,0,0),(0,1,0),-(a_1,a_2,a_3-4)\|_\infty = 4+\sqrt{2}\right\} \\ &= \left\{(a_1,a_2,a_3) \in A : \max\left\{1,1,|a_1|+|a_2|+|a_3-4|\right\} = 4+\sqrt{2}\right\} \\ &= \left\{(a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3 : |a_1|+|a_2|+|a_3-4| = 4+\sqrt{2}, a_1^{\,2}+a_2^{\,2} \le 1, 0 \le a_3 \le a_1^{\,2}+a_2^{\,2}\right\} \end{aligned}$$

küme değerli dönüşümü elde edilir. Bu durumda

$$Q(A,x) = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right\}$$

olarak hesaplanır.

4.3.6 Örnek

$X = \mathbb{R}^3$, $\left(X, \|\cdot,\cdot,\cdot\|_\infty\right)$ 3-normlu lineer uzay olsun. $\forall x_1, x_2, x_3 \in X$ ve $t \in \mathbb{R}$ için

$N : X \times X \times X \times \mathbb{R} \to [0,1]$

$$N(x_1,x_2,x_3,t) = \begin{cases} \left(e^{\frac{\|x_1,x_2,x_3\|_\infty}{t}}\right)^{-1} & ; \quad t > 0 \\ 0 & ; \quad t \le 0 \end{cases}$$

fuzzy 3-normunu tanımlayalım. Burada $\|x_1, x_2, x_3\|_\infty = \max_{1\le i\le 3} \sum_{j=1}^{3} |x_{ij}|$ olmak üzere, (X, N) fuzzy 3-normlu lineer uzay, $x_1 = (1,0,0)$, $x_2 = (0,1,0)$ ve $A = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 : a_1^2 + a_2^2 \le 1, 0 \le a_3 \le a_1^2 + a_2^2\}$ olmak üzere $x = (0,0,4)$ noktası için $x \to Q(A, x)$ fuzzy en uzak nokta dönüşümünü hesaplayalım.

$0 < s < t$ ve $\forall b \in A$ için

$$Q(A, x) = \{a = (a_1, a_2, a_3) \in A : N(x_1, x_2, x-a, s) \le N(x_1, x_2, x-b, t)\}$$

şeklindedir. Bu durumda

$$N(x_1, x_2, x-a, s) \le N(x_1, x_2, x-b, t)$$

$$\Rightarrow \left(e^{\frac{\|x_1, x_2, x-a\|_\infty}{s}}\right)^{-1} \le \left(e^{\frac{\|x_1, x_2, x-b\|_\infty}{t}}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\|x_1, x_2, x-a\|_\infty}{s} \ge \frac{\|x_1, x_2, x-b\|_\infty}{t}$$

$$\Rightarrow t.\|x_1, x_2, x-a\|_\infty \ge s.\|x_1, x_2, x-b\|_\infty$$

bulunur. $s \to t$ yazarsak

$$\|x_1, x_2, x-a\|_\infty \ge \|x_1, x_2, x-b\|_\infty$$

elde edilir. $\forall b \in A$ için bu şartı sağlayan $a \in A$ değerleri Örnek 4.3.5 de hesapladığımız $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, 0\right) \in A$ değerleridir.

Bu durumda

$$Q(A, x) = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right\}$$

olarak bulunur.

Örnek 4.3.5 ve Örnek 4.3.6 da görüldüğü gibi klasik 3-norm ve fuzzy 3-norm ile yapılan en uzak nokta dönüşümü ve kümesi eşitlik göstermiştir.

5. FUZZY ANTİ NORMLU UZAYLAR

Bu bölümde, sonraki bölümde kullanacağımız fuzzy anti n-normlu uzaylar ve bunların temeli olan fuzzy anti norm, fuzzy anti 2-norm, fuzzy anti n-norm tanımları ile bunlarla ilgili olan yakınsaklık, Cauchy dizisi, tam uzay gibi tanımlar ve teoremler hatırlatılmıştır. Ayrıca fuzzy anti n-normlu uzayda

$$B(t,r,A)=\left\{x\in X : N^*(a_1,a_2,...,a_{n-1},x,t)<r, a_1,a_2,...,a_{n-1}\in A\right\}$$

açık yuvarından faydalanarak bir taban ve bu tabandan da topolojik vektör uzayı elde edilmiştir.

5.1. Fuzzy Anti Norm

Bu kısımda fuzzy anti normla ilgili tanımlar, teoremler ve örnekler verilmiştir.

5.1.1. Tanım [14]

X, $\mathbb{R}$ reel cismi üzerinde bir lineer uzay ve $X\times\mathbb{R}$ nin bir fuzzy alt kümesi N^* olsun. N^* aşağıdaki şartları sağlıyorsa N^* a X de bir fuzzy anti norm denir.

$\forall x,y\in X$ için

(N*1) $\forall t\in\mathbb{R}$ ve $t\le 0$ için $N^*(x,t)=1$

(N*2) $\forall t\in\mathbb{R}$ ve $t>0$ için $N^*(x,t)=0 \Leftrightarrow x=0$,

(N*3) $\forall t\in\mathbb{R}$ ve $t>0$ için eğer $c\neq 0$, $c\in\mathbb{R}$ ise $N^*(cx,t)=N^*\left(x,\frac{t}{|c|}\right)$ dir,

(N*4) $\forall s,t\in\mathbb{R}$ için $N^*(x+y,s+t)\le \max\left\{N^*(x,s),N^*(y,t)\right\}$,

(N*5) $N^*(x,t)$, $\mathbb{R}$ nin artmayan bir fonksiyonu ve $\lim_{t\to\infty}N^*(x,t)=0$ dır.

Bu durumda (X,N^*) ye bir fuzzy anti normlu lineer uzay veya kısaca f-a-NLU denir. İleride bazı fuzzy anti normlu lineer uzayların aşağıdaki şartı sağladıklarını varsayacağız.

(N*6) $\forall t>0$ için $N^*(x,t)<1$ ise $x=0$ dır.

5.1.2 Örnek [15]

$(X,\|\ \|)$ normlu lineer uzay olsun. $\forall x \in X$ için

$$N^*(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\|x\|}{t+\|x\|} & ; \quad t(>0)\in\mathbb{R},\\ 1 & ; \quad t(\le 0)\in\mathbb{R},\end{cases}$$

ise (X, N^*) fuzzy anti normlu lineer uzaydır.

5.1.3 Örnek [15]

$(X,\|\ \|)$ normlu lineer uzay ve $x \in X$ olmak üzere, N^* fonksiyonunu şu şekilde tanımlayalım.

$$N^*: X\times\mathbb{R}\to[0,1]$$

$$N^*(x,t)=\begin{cases}1 & ; \quad t\le\|x\|, t\in\mathbb{R}\\ 0 & ; \quad t>\|x\|, t\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Bu durumda N^*, X de bir fuzzy anti normdur ve (X, N^*) fuzzy anti normlu lineer uzaydır.

5.1.4. Not [14]

N^*, X de fuzzy anti normdur ancak ve ancak $(1-N^*)$, X de fuzzy normdur.

5.1.5. Lemma [15]

(X, N^*) fuzzy anti normlu lineer uzay olsun. Bu durumda $\forall x, y \in X$ ve $t \in (0,\infty)$ için $N^*(x-y,t)=N^*(y-x,t)$ dir.

5.1.6. Teorem [14]

(X, N^*) fuzzy anti normlu uzayı (N^*6) koşulunu sağlasın ve $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere $\|x\|_\alpha^* = \inf\{t>0 : N^*(x,t)<\alpha\}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\{\|\ \|_\alpha^* : \alpha\in(0,1]\}$ ailesi X üzerinde normların artmayan bir ailesidir. Bu normlara X deki fuzzy anti norma karşılık

gelen α-anti normlar denir. Bundan sonraki bölümlerde α-anti norm ile $\left(X, N^*\right)$ fuzzy anti normlu lineer uzay olmak üzere, X deki fuzzy anti norma karşılık gelen α-anti norm kastedilecektir.

5.1.7. Lemma [15]

N^* , X de (N*6) şartını sağlayan bir fuzzy anti norm olsun. $x \in X$ ve $\alpha \in (0,1]$ için aşağıdaki ifadeler vardır.

i. $0 < \alpha < \beta \leq 1$ için $\|x\|_\alpha^* \geq \|x\|_\beta^*$ dır.

ii. Herhangi bir c skaleri için $\|cx\|_\alpha^* = |c|\|x\|_\alpha^*$

iii. $x, y \in X$ için $\|x+y\|_\alpha^* \leq \|x\|_\alpha^* + \|y\|_\alpha^*$

5.1.8. Tanım [15]

$\left(X, N^*\right)$ fuzzy anti normlu uzayı ve $\left(x_k\right)$, X de bir dizi olsun. Eğer $0 < r < 1$ ve $t > 0$ için $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki $\forall k \geq k_0$ için $N^*\left(x_k - x, t\right) < r$ ise $\left(x_k\right)$ dizisi x e yakınsaktır denir.

5.1.9. Teorem [15]

$\left(X, N^*\right)$ fuzzy anti normlu uzayında $\left(x_k\right)$ dizisi $x \in X$ noktasına yakınsaktır ancak ve ancak $\forall t > 0$ için $\lim_{k\to\infty} N\left(x_k - x, t\right) = 0$ dır.

5.1.10. Tanım [15]

$\left(X, N^*\right)$ fuzzy anti normlu uzay ve $\left(x_k\right)$, X de bir dizi olsun. Eğer $0 < r < 1$ ve $t > 0$ için en az bir $k_0 \in N$ var öyle ki her $k \geq k_0$ ve $p = 1, 2, 3, \ldots$ için $N^*\left(x_{k+p} - x_k, t\right) < r$ ise $\left(x_k\right)$ dizisine Cauchy dizisi denir. X de her Cauchy dizisi yakınsak ise $\left(X, N^*\right)$ fuzzy anti normlu uzayına tam uzay denir. Bir tam fuzzy anti normlu $\left(X, N^*\right)$ uzayına fuzzy anti normlu Banach uzayı denir.

5.1.11. Teorem [15]

$\left(X, N^*\right)$ fuzzy anti normlu uzay ve $\left(x_k\right)$, X de bir dizi olsun. Eğer $\forall t>0$ ve $p=1,2,3,...$ için $\lim_{k\to\infty} N^*\left(x_{k+p}-x_k, t\right)=0$ ise $\left(x_k\right)$ dizisi X de bir Cauchy dizisidir.

5.1.12. Tanım [15]

$\left(X, N^*\right)$ fuzzy anti normlu uzay ve $A\subset X$ olsun. $\forall x\in A$ ve $\forall t>0$ için $\exists\left(x_k\right)\subset A$ var öyle ki $x_k\to x$ ise yani $\forall t>0$ için $\lim_{k\to\infty} N^*\left(x_k-x, t\right)=0$ ise A ya kapalıdır denir.

5.2. Fuzzy Anti 2-norm

Fuzzy anti normda verilen tanım, teorem ve örneklerin fuzzy anti 2-norma uygulaması bu kısımda verilmiştir.

5.2.1. Tanım [9]

X, $\mathbb{R}$ reel cismi üzerinde bir lineer uzay ve $X\times X\times\mathbb{R}$ nin bir fuzzy alt kümesi N^* olsun. N^* aşağıdaki şartları sağlıyorsa N^* a X de bir fuzzy anti 2-norm denir.

$\forall x, y, z\in X$ için,

(2-N*1) $\forall t\in\mathbb{R}$ ve $t\le 0$ için $N^*\left(x, y, t\right)=1$

(2-N*2) $\forall t\in\mathbb{R}$ ve $t>0$ için $N^*\left(x, y, t\right)=0 \Leftrightarrow x, y$ lineer bağımlıdır,

(2-N*3) $\forall t\in\mathbb{R}$ için $N^*\left(x, y, t\right)=N^*\left(y, x, t\right)$

(2-N*4) $\forall t\in\mathbb{R}$ ve $t>0$ için eğer $c\neq 0$, $c\in\mathbb{R}$ ise $N^*\left(x, cy, t\right)=N^*\left(x, y, \frac{t}{|c|}\right)$ dir,

(2-N*5) $\forall s, t\in\mathbb{R}$ için $N^*\left(x, y+z, s+t\right)\le \max\left\{N^*\left(x, y, s\right), N^*\left(x, z, t\right)\right\}$,

(2-N*6) $N^*\left(x, y, t\right)$, $\mathbb{R}$ nin artmayan bir fonksiyonu ve $\lim_{t\to\infty} N^*\left(x, y, t\right)=0$ dır.

Bu durumda $\left(X, N^*\right)$ ye bir fuzzy anti 2-normlu lineer uzay veya kısaca f-a2-NLU denir. İleride bazı fuzzy anti 2-normlu lineer uzayların aşağıdaki şartı sağladıklarını varsayacağız.

(2-N*7) Her $t>0$ için $N^*\left(x, y, t\right)<1$ ise x, y lineer bağımlıdır.

5.2.2 Örnek [9]

$(X,\|\cdot,\cdot\|)$ 2-normlu lineer uzay olsun.

$$N^*(x,y,t)=\begin{cases}\dfrac{\|x,y\|}{t+\|x,y\|} & ; \quad t(>0)\in\mathbb{R},\forall x,y\in X\\ 1 & ; \quad t(\le 0)\in\mathbb{R},\forall x,y\in X\end{cases}$$

ise (X,N^*) fuzzy anti 2-normlu lineer uzaydır.

5.2.3 Örnek [9]

$(X,\|\cdot,\cdot\|)$ 2-normlu lineer uzay ve $x,y\in X$ olmak üzere, $N^*: X\times X\times\mathbb{R}\to[0,1]$ fonksiyonunu şu şekilde tanımlayalım.

$$N^*(x,y,t)=\begin{cases}1 & ; \quad t\le\|x,y\|, t\in\mathbb{R}\\ 0 & ; \quad t>\|x,y\|, t\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Bu durumda N^*, X de bir fuzzy anti 2-normdur ve (X,N^*) fuzzy anti 2-normlu lineer uzaydır.

5.2.4. Not [9]

N^*, X de fuzzy anti 2-normdur ancak ve ancak $(1-N^*)$, X de fuzzy 2-normdur.

5.2.5. Lemma [9]

(X,N^*) fuzzy anti 2-normlu lineer uzay olsun. Bu durumda $\forall x,y,z\in X$ ve $t\in(0,\infty)$ için $N^*(z,x-y,t)=N^*(z,y-x,t)$ dir.

5.2.6. Teorem [9]

(X,N^*) fuzzy anti 2-normlu uzayı (2-N*7) koşulunu sağlasın ve $\alpha\in(0,1]$ olmak üzere $\|x,y\|_\alpha^*=\inf\{t>0: N^*(x,y,t)<\alpha\}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\{\|\cdot,\cdot\|_\alpha^*:\alpha\in(0,1]\}$ ailesi X üzerinde 2-normların artmayan bir ailesidir. Bu normlara X deki fuzzy anti 2-

norma karşılık gelen α-anti 2-normlar denir. Bundan sonraki bölümlerde α-anti 2-norm ile (X, N^*) fuzzy anti 2-normlu lineer uzay olmak üzere, X deki fuzzy anti 2-norma karşılık gelen α-anti 2-norm kastedilecektir.

5.2.7. Lemma [9]

N^*, X de (2-N*7) şartını sağlayan bir fuzzy anti 2-norm olsun. $x, y \in X$ ve $\alpha \in (0,1]$ için aşağıdaki ifadeler vardır.

i. $0 < \alpha < \beta \leq 1$ için $\|x, y\|_\alpha^* \geq \|x, y\|_\beta^*$ dır.

ii. Herhangi bir c skaleri için $\|x, cy\|_\alpha^* = |c| \|x, y\|_\alpha^*$

iii. $x, y, z \in X$ için $\|x, y+z\|_\alpha^* \leq \|x, y\|_\alpha^* + \|x, z\|_\alpha^*$

İspat

i. $0 < \alpha < \beta \leq 1$ için $\inf\{t > 0 : N^*(x, y, t) < \alpha\} \geq \inf\{t > 0 : N^*(x, y, t) < \beta\}$ olduğundan $\|x, y\|_\alpha^* \geq \|x, y\|_\beta^*$ dir.

ii. Herhangi bir c skaleri ve $\alpha \in (0,1]$ için

$$\|x, cy\|_\alpha^* = \inf\{t > 0 : N^*(x, cy, t) < \alpha\} = \inf\left\{t > 0 : N^*\left(x, y, \frac{t}{|c|}\right) < \alpha\right\}$$

$$= |c| . \inf\{t > 0 : N^*(x, y, t) < \alpha\} = |c| \|x, y\|_\alpha^*$$

bulunur.

iii. $\alpha \in (0,1]$ için

$$\|x, y\|_\alpha^* + \|x, z\|_\alpha^* = \inf\{t > 0 : N^*(x, y, t) < \alpha\} + \inf\{s > 0 : N^*(x, z, s) < \alpha\}$$

$$\geq \inf\{s + t > 0 : N^*(x, y, t) < \alpha, N^*(x, z, s) < \alpha\} = \|x, y+z\|_\alpha^*$$

dır.

5.2.8. Teorem [9]

$\left\{\|\cdot,\cdot\|_\alpha^* : \alpha \in (0,1]\right\}$ ailesi X lineer uzayı üzerinde 2-normların artmayan bir ailesi olsun. $N^* : X \times X \times \mathbb{R} \to [0,1]$ fonksiyonunu

$$N^*(x,y,t) = \begin{cases} \inf\left\{\alpha \in (0,1) : \|x,y\|_\alpha^* \le t\right\} & ; \quad (x,y,t) \neq (0,0,0) \\ 1 & ; \quad (x,y,t) = (0,0,0) \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda N^*, X üzerinde fuzzy anti 2-norm dur.

5.2.9. Tanım [9]

(X, N^*) fuzzy anti 2-normlu uzay, (x_k), X de bir dizi ve $x, y \in X$ olsun. Eğer $0 < r < 1$ ve $t > 0$ için $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki $\forall k \ge k_0$ için $N^*(y, x_k - x, t) < r$ ise (x_k) dizisi x e yakınsaktır denir.

5.2.10. Teorem [9]

(X, N^*) fuzzy anti 2-normlu uzay ve $x, y \in X$ olmak üzere, (x_k) dizisi $x \in X$ noktasına yakınsaktır ancak ve ancak $\forall t > 0$ için $\lim_{k\to\infty} N(y, x_k - x, t) = 0$ dır.

5.2.11. Tanım [9]

(X, N^*) fuzzy anti 2-normlu uzay, (x_k), X de bir dizi ve $x, y \in X$ olsun. Eğer $0 < r < 1$ ve $t > 0$ için en az bir $k_0 \in N$ var öyle ki her $k \ge k_0$ ve $p = 1,2,3,...$ için $N^*(y, x_{k+p} - x_k, t) < r$ ise (x_k) dizisine Cauchy dizisi denir.

5.2.12. Teorem [9]

(X, N^*) fuzzy anti 2-normlu uzay, (x_k), X de bir dizi ve $x, y \in X$ olsun. Eğer $\forall t > 0$ ve $p = 1,2,3,...$ için $\lim_{k\to\infty} N^*(y, x_{k+p} - x_k, t) = 0$ ise (x_k) dizisi X de bir Cauchy dizisidir.

5.2.13. Teorem [9]

$\left(X, N^*\right)$ fuzzy anti 2-normlu uzayında her yakınsak dizi Cauchy dizisidir.

5.3. Fuzzy Anti n-Norm

Üzerinde çalıştığımız fuzzy anti n-norm ile ilgili tanım, teorem ve örnekler bu kısımda verilmiştir.

5.3.1. Tanım [16]

X, $\mathbb{R}$ reel cismi üzerinde bir lineer uzay ve $X\times\cdots\times X\times\mathbb{R}$ nin bir fuzzy alt kümesi N^* olsun. N^* aşağıdaki şartları sağlıyorsa N^* a *X* de bir fuzzy anti n-norm denir.

$\forall x_1, x_2, ..., x_n, x_n' \in X$ için

(n-N*1) $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $t \le 0$ için $N^*\left(x_1, x_2, ...x_n, t\right) = 1$

(n-N*2) $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ için $N^*\left(x_1, x_2 ..., x_n, t\right) = 0 \Leftrightarrow x_1, x_2, ..., x_n$ lineer bağımlıdır,

(n-N*3) $N^*\left(x_1, x_2, ..., x_n, t\right)$ $x_1, x_2, ..., x_n$ in herhangi permütasyonuna göre değişmeyen,

(n-N*4) $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ için eğer $c \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$ ise

$N^*\left(x_1, x_2, ..., cx_n, t\right) = N^*\left(x_1, x_2, ..., x_n, \frac{t}{|c|}\right)$ dir,

(n-N*5) $\forall s, t \in \mathbb{R}$ için

$N^*\left(x_1, x_2, ..., x_n + x_n', s + t\right) \le \max\left\{N^*\left(x_1, x_2, ..., x_n, s\right), N^*\left(x_1, x_2, ..., x_n', t\right)\right\}$,

(n-N*6) $N^*\left(x_1, x_2, ..., x_n, t\right)$ $\mathbb{R}$ nin artmayan bir fonksiyonu ve $\lim_{t\to\infty} N^*\left(x_1, x_2, ..., x_n, t\right) = 0$ dır.

Bu durumda $\left(X \times X \times ... \times X, N^*\right)$ ye bir fuzzy anti n-normlu lineer uzay veya kısaca f-an-NLU denir. Kısalığın hatrı için fuzzy anti n-normlu lineer uzay $\left(X, N^*\right)$ ile gösterilir. İleride bazı fuzzy anti n-normlu lineer uzayların aşağıdaki şartı sağladıklarını varsayacağız.

(n-N*7) Her $t > 0$ için $N^*\left(x_1, x_2, ..., x_n, t\right) < 1$ ise $x_1, x_2, ..., x_n$ lineer bağımlıdır.

5.3.2 Örnek [16]

$\left(X,\|\cdot,...,\cdot\|\right)$ n-normlu lineer uzay olsun.

$$N^*\left(x_1,x_2,...,x_n,t\right)=\begin{cases}\dfrac{\|x_1,x_2,...,x_n\|}{t+\|x_1,x_2,...,x_n\|} & ;\quad t\left(>0\right)\in\mathbb{R},\forall x_1,x_2,...,x_n\in X\\ 1 & ;\quad t\left(\le 0\right)\in\mathbb{R},\forall x_1,x_2,...,x_n\in X\end{cases}$$

ise $\left(X,N^*\right)$ fuzzy anti n-normlu lineer uzaydır.

5.3.3. Teorem [16]

N^*, X de fuzzy anti n-normdur ancak ve ancak $\left(1-N^*\right)$, X de fuzzy n-normdur.

5.3.4. Teorem [16]

$\left(X,N^*\right)$ fuzzy anti n-normlu uzayı (n-N*7) koşulunu sağlasın ve $\alpha\in\left(0,1\right]$ olmak üzere $\|x_1,x_2,...,x_n\|_\alpha^*=\inf\left\{t>0:N^*\left(x_1,x_2,...,x_n,t\right)<\alpha\right\}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\left\{\|\cdot,...,\cdot\|_\alpha^*:\alpha\in\left(0,1\right]\right\}$ ailesi X üzerinde n-normların artmayan bir ailesidir. Bu n-normlara X deki fuzzy anti n-norma karşılık gelen α -anti n-normlar denir. Bundan sonraki bölümlerde α -anti n-norm ile $\left(X,N^*\right)$ fuzzy anti n-normlu lineer uzay olmak üzere, X deki fuzzy anti n-norma karşılık gelen α -anti n-norm kastedilecektir.

Aşağıdaki teorem ve sonuç ile fuzzy anti n-normlu uzaylarda bir açık yuvar kullanılarak oluşturulan ailenin taban olma şartlarını sağladığı ve bu tabanın bir topoloji ürettiği ilk defa verilmiştir.

5.3.5. Teorem

$\mathscr{A}$, $\left(X,N^*\right)$ fuzzy anti n-normlu uzayın tüm sonlu ve boş olmayan altkümelerinin ailesi ve $A\in\mathscr{A}$ olsun. $B\left(t,r,A\right)=\left\{x\in X:N^*\left(a_1,...,a_{n-1},x,t\right)<r,a_1,...,a_{n-1}\in A\right\}$ olmak üzere $\mathscr{B}=\left\{B\left(t,r,A\right):t>0,0<r<1,A\in\mathscr{A}\right\}$ ailesi X de taban olma şartlarını sağlar.

İspat

$B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ olsun. $B_1 = B(t_1, r_1, A_1) \in \mathscr{B}$ ve $B_2 = B(t_2, r_2, A_2) \in \mathscr{B}$ olarak alabiliriz. Bu durumda $A = A_1 \cup A_2$, $r = \min\{r_1, r_2\}$ ve $t = \min\{t_1, t_2\}$ için

$B(t, r, A) \subset B(t_1, r_1, A_1) \cap B(t_2, r_2, A_2)$ olur.

Bu da $\forall B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ için $\exists B \in \mathscr{B}$ var öyle ki $B \subset B_1 \cap B_2$ olması demektir.

$B \in \mathscr{B}$ ve $c(\neq 0) \in \mathbb{R}$ iken $cB \in \mathscr{B}$ olduğunu gösterelim. Burada $cB = cB(t, r, A) = \{cx : N(a_1, ..., a_{n-1}, cx, t) < r\}$ dir.

$N^*(a_1, ..., a_{n-1}, x, t) = N^*(a_1, ..., a_{n-1}, cx, ct)$ olduğundan $cB = \{cx : N^*(a_1, ..., a_{n-1}, cx, ct) < r\}$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $cB \subset B(ct, r, A)$ dır. $y \in B(ct, r, A)$ alalım. Bu durumda $N^*(a_1, ..., a_{n-1}, y, ct) < r$ dir. Fakat $N^*(a_1, ..., a_{n-1}, y, ct) = N^*\left(a_1, ..., a_{n-1}, \frac{y}{c}, t\right) < r$ dolayısıyla $N^*\left(a_1, ..., a_{n-1}, \frac{y}{c}, t\right) < r$ yani $\frac{y}{c} \in B(t, r, A)$ dır. Buradan $y \in cB(t, r, A)$ ve $B(ct, r, A) \subset cB(t, r, A)$ bulunur. Sonuç olarak da $cB(t, r, A) = B(ct, r, A) \in \mathscr{B}$ dir.

$c \in \mathbb{R}$, $|c| \leq 1$ olsun. $x \in cB(t, r, A) \Rightarrow \exists y \in B(t, r, A)$ var öyle ki $x = cy$ dir. $\forall a_1, ..., a_{n-1} \in A$ için

$$N^*(a_1, ..., a_{n-1}, x, t) = N^*(a_1, ..., a_{n-1}, cy, t) = N^*\left(a_1, ..., a_{n-1}, y, \frac{t}{|c|}\right)$$
$$< N^*(a_1, ..., a_{n-1}, y, t)$$
$$< r$$

dir. Buradan $x \in B(t, r, A)$ elde edilir. Böylece $\forall B \in \mathscr{B}$ için $\exists B_0 \in \mathscr{B}$ var öyle ki $\forall c \in \mathbb{R}, |c| \leq 1$ iken $cB_0 \subset B$ dir.

Şimdi de $\forall B \in \mathscr{B}$ ve $x \in X$ için $\exists \beta(\neq 0) \in \mathbb{R}$ var öyle ki $\beta x \in B$ olduğunu gösterelim. Eğer $B \in \mathscr{B}$ ise $t > 0, r \in (0,1)$ ve $A \in \mathscr{A}$ için $B = B(t, r, A)$ dır. X de x keyfi sabit ve $c(\neq 0) \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $N^*(a_1, ..., a_{n-1}, cx, t) = N^*\left(a_1, ..., a_{n-1}, x, \frac{t}{|c|}\right)$ dir.

$\lim_{c \to 0} N^*\left(a_1, ..., a_{n-1}, x, \frac{t}{|c|}\right) = 0$ olduğundan $\forall a_1, ..., a_{n-1} \in A$ için bunlara bağlı bir $c_{a_1, ..., a_{n-1}} \in \mathbb{R}$

var öyle ki $N^*\left(a_1,...,a_{n-1},x,\frac{t}{\left|c_{a_1,...,a_{n-1}}\right|}\right)<r$ dir. Eğer $\beta=\min\left\{\left|c_{a_1,...,a_{n-1}}\right|:a_1,...,a_{n-1}\in X\right\}$ alınırsa $\forall a_1,...,a_{n-1}\in A$ için

$$N^*\left(a_1,...,a_{n-1},\beta x,t\right)=N^*\left(a_1,...,a_{n-1},x,\frac{t}{|\beta|}\right)<N^*\left(a_1,...,a_{n-1},x,\frac{t}{|c|}\right)<r$$

ve buradan $\beta x\in B$ bulunur.

$\forall B\in\mathscr{B}$ için $\exists B_0\in\mathscr{B}$ var öyle ki $B_0+B_0\subset B$ olduğunu göstermek için, $B=B(t,r,A)$ ve $x\in B(t,r,A)$ olsun. Bu durumda $\forall a_1,...,a_{n-1}\in A$ için $\exists\eta(>0)\in\mathbb{R}$ var öyle ki $N^*\left(a_1,...,a_{n-1},x,t\right)<\eta<r$ dir.

$\eta_0=\sup\left\{\eta:N^*\left(a_1,...,a_{n-1},x,t\right)<\eta<r,x\in B(t,r,A),a_1,...,a_{n-1}\in A\right\}$ alalım.

$B_0=B\left(\frac{t}{2},\frac{\eta_0}{3},A\right)$ olsun.

Eğer $x,y\in B_0$ ise

$$\begin{aligned}N^*\left(a_1,...,a_{n-1},x+y,t\right)&\le\max\left\{N^*\left(a_1,...,a_{n-1},x,\frac{t}{2}\right),N^*\left(a_1,...,a_{n-1},y,\frac{t}{2}\right)\right\}\\&\le\max\left\{\frac{\eta_0}{3},\frac{\eta_0}{3}\right\}\\&\le\frac{\eta_0}{3}\\&<r\end{aligned}$$

olduğundan $x+y\in B$ dir. Bu da $B_0+B_0\subset B$ olduğunu gösterir.

5.3.6. Sonuç

Teorem 5.3.5 de verilen $\mathscr{B}$ ailesi bir τ^*-topolojisi üretir. Bu topoloji ile birlikte $\left(X,\tau^*\right)$ bir topolojik vektör uzayıdır.

5.3.7. Tanım [17]

$\left(X,N^*\right)$ fuzzy anti n-normlu uzay, $\left(x_k\right)$ X de bir dizi ve $a_1,...,a_{n-1},x\in X$ olsun. Eğer $0<r<1$ ve $t>0$ için $\exists k_0\in\mathbb{N}$ var öyle ki $\forall k\ge k_0$ için $N^*\left(a_1,...,a_{n-1},x_k-x,t\right)<r$

ise (x_k) dizisi x e yakınsaktır denir.

5.3.8. Teorem [17]

$a_1,...,a_{n-1} \in X$ olmak üzere, (X, N^*) fuzzy anti n-normlu uzayında (x_k) dizisi $x \in X$ noktasına yakınsaktır ancak ve ancak $\forall t > 0$ için $\lim_{k\to\infty} N(a_1,...,a_{n-1}, x_k - x, t) = 0$ dır.

5.3.9. Tanım [17]

(X, N^*) fuzzy anti n-normlu uzay, $a_1,...,a_{n-1} \in X$ ve (x_k), X de bir dizi olsun. Eğer $0 < r < 1$ ve $t > 0$ için en az bir $k_0 \in N$ var öyle ki her $k \geq k_0$ ve $p = 1,2,3,...$ için $N^*(a_1,...,a_{n-1}, x_{k+p} - x_k, t) < r$ ise (x_k) dizisine Cauchy dizisi denir. X de her Cauchy dizisi yakınsak ise (X, N^*) fuzzy anti n-normlu uzayına tam uzay denir. Bir tam fuzzy anti n-normlu (X, N^*) uzayına fuzzy anti n-normlu Banach uzayı denir. Yarıçapı $0 < r < 1$ ve merkezi $x \in X$ olan açık yuvar $B(t,r,x)$ ve kapalı yuvar $B[t,r,x]$, $t > 0$ olmak üzere $B(t,r,x) = \{y \in X : N^*(a_1,...,a_{n-1}, x-y, t) < r\}$ ve
$B[t,r,x] = \{y \in X : N^*(a_1,...,a_{n-1}, x-y, t) \leq r\}$ şeklinde tanımlanır. Eğer X in bir A alt kümesi için $\exists r \in (0,1)$ var öyle ki $\forall x \in A$ ve $t > 0$ için $B(t,r,x) \subset A$ ise A ya açıktır denir. (X, N^*) fuzzy anti n-normlu lineer uzay ve $A \subset X$ olmak üzere, $\forall x \in A$ ve $\forall t > 0$ için $\exists (x_k) \subset A$ var öyle ki $x_k \to x$ ise yani $\forall t > 0$ için $\lim_{k\to\infty} N^*(a_1,...,a_{n-1}, x_k - x, t) = 0$ ise A ya kapalıdır denir.

5.3.10. Teorem [17]

(X, N^*) fuzzy anti n-normlu uzay , $a_1,...,a_{n-1} \in X$ ve (x_k), X de bir dizi olsun. Eğer $\forall t > 0$ ve $p = 1,2,3,...$ için $\lim_{k\to\infty} N^*(a_1,...,a_{n-1}, x_{k+p} - x_k, t) = 0$ ise (x_k) dizisi X de bir Cauchy dizisidir.

5.3.11. Lemma [17]

N^* , X de (n-N*7) şartını sağlayan bir fuzzy anti n-norm olsun. $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ ve $\alpha \in (0,1]$ için $\|x_1, x_2, ..., x_n\|_\alpha^* = \inf \{t : N^*(x_1, x_2, ..., x_n, t) < \alpha\}$ tanımlayalım. Bu durumda aşağıdaki ifadeler vardır.

i. $0 < \alpha < \beta \leq 1$ için $\|x_1, x_2, ..., x_n\|_\alpha^* \geq \|x_1, x_2, ..., x_n\|_\beta^*$ dır.

ii. Herhangi bir $c \in \mathbb{R}$ skaleri için $\|x_1, x_2, ..., x_{n-1}, cx_n\|_\alpha^* = |c| \|x_1, x_2, ..., x_n\|_\alpha^*$

iii. $x, y \in X$ için $\|x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x + y\|_\alpha^* \leq \|x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x\|_\alpha^* + \|x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y\|_\alpha^*$

6. FUZZY ANTİ n-NORMLU UZAYLARDA SERİLERİN YAKINSAKLIĞINI KORUYAN DÖNÜŞÜMLER

6.1. Fuzzy Anti n-Normlu Lineer Uzaylarda Dönüşümler

Bu kısımda fuzzy anti n-normlu lineer uzaylarda dönüşümlerin sürekliliklerinin çeşitli tipleri olan fuzzy anti n-süreklilik, fuzzy anti n-dizisel süreklilik, zayıf fuzzy anti n-süreklilik, kuvvetli fuzzy anti n-süreklilik ve dönüşümlerin sınırlılıklarının tipleri olan zayıf fuzzy anti n-sınırlılık, kuvvetli fuzzy anti n-sınırlılık kavramları ilk defa verilmiş ve aralarındaki ilişki incelenmiştir. Ayrıca bölüm içerisinde fuzzy anti n-normlu uzaylarda çalışıldığından $\left(X, N^*\right)$ ile fuzzy anti n-normlu lineer uzay kastedilecektir.

6.1.1. Tanım

$\left(X, N_1^*\right)$ ve $\left(Y, N_2^*\right)$ fuzzy anti n-normlu uzaylar ve $T: X \to Y$ bir dönüşüm olsun. $\forall y, z \in X$ için T dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa bu dönüşüme fuzzy anti n-normlu uzaylarda lineer dönüşüm denir;

(1) $T\left(y+z\right)=T\left(y\right)+T\left(z\right)$

(2) $T\left(cy\right)=c.T\left(y\right)$, $c \in \mathbb{R}$

6.1.2. Tanım

$\left(X, N_1^*\right)$, $\left(Y, N_2^*\right)$ fuzzy anti n-normlu uzaylar, $T: X \to Y$ bir fuzzy anti n-lineer dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ ve $\alpha \in \left(0,1\right]$ için $\exists \delta = \delta\left(\alpha, \varepsilon\right) > 0$ ve $\beta = \beta\left(\alpha, \varepsilon\right) \in \left(0,1\right]$ var öyle ki $\forall x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x \in X$ için

$N_1^*\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x - x_0, \delta\right) < \beta$ iken $N_2^*\left(T\left(x_1\right), T\left(x_2\right), ..., T\left(x_{n-1}\right), T\left(x\right) - T\left(x_0\right), \varepsilon\right) < \alpha$

oluyorsa, T ye $x_0 \in X$ noktasında fuzzy anti n-süreklidir denir.

Eğer T, *X* in her noktasında fuzzy anti n-sürekli ise, T ye *X* de fuzzy anti n-süreklidir denir.

6.1.3. Tanım

$\left(X,N_1^*\right)$, $\left(Y,N_2^*\right)$ fuzzy anti n-normlu uzaylar, $T:X\to Y$ bir fuzzy anti n-lineer dönüşüm ve $x_0\in X$ olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$ için $\exists\delta>0$ var öyle ki $\forall x_1,x_2,...,x_{n-1},x\in X$ için $N_2^*\left(T\left(x_1\right),T\left(x_2\right),...,T\left(x_{n-1}\right),T\left(x\right)-T\left(x_0\right),\varepsilon\right)\le N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x-x_0,\delta\right)$ ise, T ye $x_0\in X$ noktasında kuvvetli fuzzy anti n-süreklidir denir.

Eğer T, *X* in her noktasında kuvvetli fuzzy anti n-sürekli ise, T ye *X* de kuvvetli fuzzy anti n-süreklidir denir.

6.1.4. Tanım

$\left(X,N_1^*\right)$, $\left(Y,N_2^*\right)$ fuzzy anti n-normlu uzaylar, $T:X\to Y$ bir fuzzy anti n-lineer dönüşüm ve $x_0\in X$ olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$, $\alpha\in\left(0,1\right]$ için $\exists\delta=\delta\left(\alpha,\varepsilon\right)>0$ var öyle ki $\forall x_1,x_2,...,x_{n-1},x\in X$ için

$N_1^*\left(x_1,...,x_{n-1},x-x_0,\delta\right)\le1-\alpha$ iken $N_2^*\left(T\left(x_1\right),...,T\left(x_{n-1}\right),T\left(x\right)-T\left(x_0\right),\varepsilon\right)\le1-\alpha$

ise T ye $x_0\in X$ noktasında zayıf fuzzy anti n-süreklidir denir.

Eğer T, *X* in her noktasında zayıf fuzzy anti n-sürekli ise T ye *X* de zayıf fuzzy anti n-süreklidir denir.

6.1.5. Tanım

$\left(X,N_1^*\right)$, $\left(Y,N_2^*\right)$ fuzzy anti n-normlu uzaylar, $T:X\to Y$ bir fuzzy anti n-lineer dönüşüm ve $x_0\in X$ olsun. *X* de her $\left(x_k\right)$ dizisi için $x_k\to x_0$ iken $T\left(x_k\right)\to T\left(x_0\right)$ ise yani $\forall t>0$ ve $\forall x_1,x_2,...,x_{n-1}\in X$ için

$\lim_{k\to\infty}N_1^*\left(x_1,...,x_{n-1},x_k-x_0,t\right)=0$ iken $\lim_{k\to\infty}N_2^*\left(T\left(x_1\right),...,T\left(x_{n-1}\right),T\left(x_k\right)-T\left(x_0\right),t\right)=0$ ise T ye $x_0\in X$ noktasında dizisel fuzzy anti n-süreklidir denir.

Eğer T, *X* in her noktasında dizisel fuzzy anti n-sürekli ise T ye *X* de dizisel fuzzy anti n-süreklidir denir.

6.1.6. Teorem

Bir fuzzy anti n-lineer dönüşüm kuvvetli fuzzy anti n-sürekli ise zayıf fuzzy anti n-süreklidir.

İspat

$\left(X,N_1^*\right)$ ve $\left(Y,N_2^*\right)$ f-an-NLU ve $T:X\to Y$ bir fuzzy anti n-lineer dönüşüm olsun. Kabul edelim ki T, $x_0\in X$ noktasında kuvvetli fuzzy anti n-sürekli olsun. Yani $\forall\varepsilon>0$ için $\exists\delta>0$ var öyle ki $\forall x_1,x_2,...,x_{n-1},x\in X$ için $N_2^*\left(T\left(x_1\right),T\left(x_2\right),...,T\left(x_{n-1}\right),T\left(x\right)-T\left(x_0\right),\varepsilon\right)\le N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x-x_0,\delta\right)$ dır.

$N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x-x_0,\delta\right)\le 1-\alpha$ olacak şekilde bir $\alpha\in\left(0,1\right]$ alalım. Bu durumda

$N_2^*\left(T\left(x_1\right),T\left(x_2\right),...,T\left(x_{n-1}\right),T\left(x\right)-T\left(x_0\right),\varepsilon\right)\le N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x-x_0,\delta\right)\le 1-\alpha$

olduğundan $N_2^*\left(T\left(x_1\right),T\left(x_2\right),...,T\left(x_{n-1}\right),T\left(x\right)-T\left(x_0\right),\varepsilon\right)\le 1-\alpha$ bulunur. Yani T zayıf fuzzy anti n-süreklidir.

6.1.7. Teorem

$\left(X,N_1^*\right)$ ve $\left(Y,N_2^*\right)$ f-an-NLU olmak üzere, $T:X\to Y$ fuzzy anti n-lineer dönüşümü kuvvetli fuzzy anti n-sürekli ise dizisel fuzzy anti n-süreklidir.

İspat

T, $x_0\in X$ noktasında kuvvetli fuzzy anti n-sürekli olsun. Bu durumda

$\forall\varepsilon>0$ için $\exists\delta=\delta\left(x_0,\varepsilon\right)>0$ var öyle ki $\forall x_1,x_2,...,x_{n-1},x\in X$ için

$N_2^*\left(T\left(x_1\right),T\left(x_2\right),...,T\left(x_{n-1}\right),T\left(x\right)-T\left(x_0\right),\varepsilon\right)\le N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x-x_0,\delta\right)$ (i)

dır. $\left(x_k\right)$, X de $x_0\in X$ noktasına yakınsayan bir dizi yani $\forall t>0$ için

$\lim_{k\to\infty}N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_k-x_0,t\right)=0$ (ii)

olsun. Şimdi (i) den $k=1,2,...$ için

$N_2^*\left(T\left(x_1\right),T\left(x_2\right),...,T\left(x_{n-1}\right),T\left(x_k\right)-T\left(x_0\right),\varepsilon\right)\le N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_k-x_0,\delta\right)$

dır. Bu durumda

$\lim_{k\to\infty} N_2^*\left(T\left(x_1\right),T\left(x_2\right),...,T\left(x_{n-1}\right),T\left(x_k\right)-T\left(x_0\right),\varepsilon\right) \le \lim_{k\to\infty} N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_k-x_0,\delta\right)$

dır. Bu da (ii) den $\lim_{k\to\infty} N_2^*\left(T\left(x_1\right),T\left(x_2\right),...,T\left(x_{n-1}\right),T\left(x_k\right)-T\left(x_0\right),\varepsilon\right)=0$ dir. $\varepsilon>0$ keyfi olduğundan $T\left(x_k\right)\to T\left(x_0\right)$ dır. Böylece T dizisel fuzzy anti n-süreklidir.

6.1.8. Teorem

$\left(X,N_1^*\right)$ ve $\left(Y,N_2^*\right)$ f-an-NLU ve $T:X\to Y$ bir fuzzy anti n-lineer dönüşüm olmak üzere, T fuzzy anti n-süreklidir $\Leftrightarrow$ T dizisel fuzzy anti n-süreklidir.

İspat

T, $x_0\in X$ de fuzzy anti n-sürekli ve $\left(x_k\right)$, X de $x_0\in X$ noktasına yakınsayan bir dizi olsun. Herhangi bir $\varepsilon>0$ için $\alpha\in\left(0,1\right]$ alalım. T, x_0 da fuzzy anti n-sürekli olduğundan $\exists\delta=\delta\left(\alpha,\varepsilon\right)>0$ ve $\beta=\beta\left(\alpha,\varepsilon\right)\in\left(0,1\right]$ var öyle ki $\forall x_1,x_2,...,x_{n-1},x\in X$ için $N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x-x_0,\delta\right)<\beta$ iken $N_2^*\left(T\left(x_1\right),T\left(x_2\right),...,T\left(x_{n-1}\right),T\left(x\right)-T\left(x_0\right),\varepsilon\right)<\alpha$ dır. X uzayında $x_k\to x_0$ olduğundan $\exists k_0\in\mathbb{N}$ sabiti var öyle ki $\forall k\ge k_0$ için $N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_k-x_0,\delta\right)<\beta$ dır. Bu durumda $\forall k\ge k_0$ için $N_2^*\left(T\left(x_1\right),T\left(x_2\right),...,T\left(x_{n-1}\right),T\left(x_k\right)-T\left(x_0\right),\varepsilon\right)<\alpha$ dır. Böylece herhangi bir $\varepsilon>0$ ve $\forall\alpha\in\left(0,1\right]$ için $\exists k_0\in\mathbb{N}$ sabiti vardır öyle ki $\forall k\ge k_0$ için $N_2^*\left(T\left(x_1\right),T\left(x_2\right),...,T\left(x_{n-1}\right),T\left(x_k\right)-T\left(x_0\right),\varepsilon\right)<\alpha$ dır.

Buradan $\lim_{k\to\infty} N_2^*\left(T\left(x_1\right),T\left(x_2\right),...,T\left(x_{n-1}\right),T\left(x_k\right)-T\left(x_0\right),\varepsilon\right)=0$ dır. $\varepsilon>0$ keyfi olduğundan X de $T\left(x_k\right)\to T\left(x_0\right)$ yani T, X de dizisel fuzzy anti n-süreklidir.

Şimdi de T, $x_0\in X$ de dizisel fuzzy anti n-sürekli olsun. Kabul edelim ki T, x_0 da fuzzy anti n-sürekli olmasın. Böylece $\forall\delta>0$ ve $\beta\in\left(0,1\right]$ için $\exists\varepsilon>0$ ve $\alpha\in\left(0,1\right]$ var öyle ki $\forall x_1,x_2,...,x_{n-1}\in X$ ve $\exists w\in X$ (δ ve β ya bağlı) için $N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},w-x_0,\delta\right)<\beta$ iken $N_2^*\left(T\left(x_1\right),T\left(x_2\right),...,T\left(x_{n-1}\right),T\left(w\right)-T\left(x_0\right),\varepsilon\right)\ge\alpha$ dır. Bu durumda $k=1,2,3,...$ $\beta=\frac{1}{k+1}$, $\delta=\frac{1}{k+1}$ için bir $\exists w_k\in X$ var öyle ki

$N_1^*\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, w - x_0, \frac{1}{k+1}\right) < \frac{1}{k+1}$ iken

$N_2^*\left(T(x_1), T(x_2), ..., T(x_{n-1}), T(w) - T(x_0), \varepsilon\right) \geq \alpha$ dır.

$\delta > 0$ olduğundan, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki $\forall k \geq k_0$ için $\frac{1}{k+1} < \delta$ dır. Bu durumda $\forall k \geq k_0$ için

$$N_1^*\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, w_k - x_0, \delta\right) \leq N_1^*\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, w_k - x_0, \frac{1}{k+1}\right)$$
$$\leq \frac{1}{k+1}$$

dir. Dolayısıyla $\lim_{k\to\infty} N_1^*\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, w_k - x_0, \delta\right) \leq 0 \Rightarrow w_k \to x$ dir.

Fakat $N_2^*\left(T(x_1), T(x_2), ..., T(x_{n-1}), T(w_k) - T(x_0), \varepsilon\right) \geq \alpha$ olduğundan $k \to \infty$ iken $N_2^*\left(T(x_1), T(x_2), ..., T(x_{n-1}), T(w_k) - T(x_0), \varepsilon\right) \not\to 0$ dir. Böylece $T(w_k) \not\to T(x_0)$ dır. Bu durum bizim kabulümüzle çelişir. Çünkü T dizisel fuzzy anti n-sürekli olduğundan $w_k \to x_0 \Rightarrow T(w_k) \to T(x_0)$ olması gerekir. Dolayısıyla T, x_0 da fuzzy anti n-süreklidir.

6.1.9. Tanım

$\left(X, N_1^*\right)$ ve $\left(Y, N_2^*\right)$ f-an-NLU ve $T: X \to Y$ bir fuzzy anti n-lineer dönüşüm olsun. Eğer $\forall x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x \in X$ ve $\forall s \in \mathbb{R}$ için

$N_2^*\left(T(x_1), T(x_2), ..., T(x_{n-1}), T(x), s\right) \leq N_1^*\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x, \frac{s}{M}\right)$ olacak şekilde $\exists M\,(>0) \in \mathbb{R}$ reel sayısı varsa T ye *X* de kuvvetli fuzzy anti n-sınırlıdır denir.

6.1.10 Örnek

Sıfır ve özdeşlik dönüşümleri kuvvetli fuzzy anti n-sınırlıdır.

6.1.11 Örnek

$\left(X, \|\cdot, \ldots, \cdot\|\right)$ n-normlu lineer uzay olsun. $X \times \cdots \times X \times \mathbb{R}$ den $[0,1]$ aralığına iki fonksiyon tanımlayalım. $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ ve $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_n,t\right)=\begin{cases}\dfrac{\alpha_1\left\|x_1,x_2,...,x_n\right\|}{t+\alpha_1\left\|x_1,x_2,...,x_n\right\|} & ;t>0\\ 1 & ;t\le 0\end{cases}$$

ve

$$N_2^*\left(x_1,x_2,...,x_n,t\right)=\begin{cases}\dfrac{\alpha_2\left\|x_1,x_2,...,x_n\right\|}{t+\alpha_2\left\|x_1,x_2,...,x_n\right\|} & ;t>0\\ 1 & ;t\le 0\end{cases}$$

Burada α_1 ve α_2 iki sabit pozitif reel sayı ve $\alpha_1>\alpha_2$ dir. Kolaylıkla gösterilebilir ki N_1^* ve N_2^* , X de iki fuzzy anti n-normdur. Bir T dönüşümünü $T:\left(X,N_1^*\right)\to\left(X,N_2^*\right)$ $T\left(x\right)=r.x$ şeklinde tanımlayalım. Burada $r\in\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$ sabittir. Açıkça T bir lineer dönüşümdür. Eğer M pozitif sayısını $M\ge\left|r\right|^n$ olacak şekilde seçersek bu durumda $\forall x_1,x_2,...,x_{n-1},x\in X$ ve $\forall t\in\mathbb{R}$ için

$N_2^*\left(T\left(x_1\right),T\left(x_2\right),...,T\left(x_{n-1}\right),T\left(x\right),t\right)\le N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x,\dfrac{t}{M}\right)$ olduğunu gösterebiliriz.

$\forall x_1,x_2,...,x_{n-1},x\in X$ ve $\forall t>0$ için $M\ge\left|r\right|^n$ alalım. Bu durumda

$$\alpha_1M\ge\alpha_2\left|r\right|^n$$

$$\Rightarrow\alpha_1M\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|\ge\alpha_2\left|r\right|^n\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|$$

$$\Rightarrow t+\alpha_1M\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|\ge t+\alpha_2\left|r\right|^n\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|$$

$$\Rightarrow\frac{t}{t+\alpha_2\left|r\right|^n\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|}\ge\frac{t}{t+\alpha_1M\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|}$$

$$\Rightarrow1-\frac{t}{t+\alpha_2\left|r\right|^n\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|}\le1-\frac{t}{t+\alpha_1M\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|}$$

$$\Rightarrow\frac{\alpha_2\left|r\right|^n\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|}{t+\alpha_2\left|r\right|^n\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|}\le\frac{\alpha_1M\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|}{t+\alpha_1M\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|}$$

$$\Rightarrow\frac{\alpha_2\left|r\right|^n\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|}{t+\alpha_2\left|r\right|^n\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|}\le\frac{\alpha_1\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|}{\dfrac{t}{M}+\alpha_1\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|}$$

$$\Rightarrow\frac{\alpha_2\left\|rx_1,rx_2,...,rx_{n-1},rx\right\|}{t+\alpha_2\left\|rx_1,rx_2,...,rx_{n-1},rx\right\|}\le\frac{\alpha_1\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|}{\dfrac{t}{M}+\alpha_1\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|}$$

$\Rightarrow N_2^*\left(T\left(x_1\right),T\left(x_2\right),...,T\left(x_{n-1}\right),T\left(x\right),t\right)\leq N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x,\frac{t}{M}\right)$

bulunur. Ayrıca $t<0$ ise

$N_2^*\left(T\left(x_1\right),T\left(x_2\right),...,T\left(x_{n-1}\right),T\left(x\right),t\right)=1=N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x,\frac{t}{M}\right)$ bulunur. Bu da T nin kuvvetli fuzzy anti n-sınırlı lineer dönüşüm olduğunu gösterir.

6.1.12. Tanım

$\left(X,N_1^*\right)$ ve $\left(Y,N_2^*\right)$ f-an-NLU ve $T:X\to Y$ bir fuzzy anti n-lineer dönüşüm olsun. $\forall\alpha\in\left(0,1\right]$, $\forall x_1,x_2,...,x_{n-1},x\in X$ ve $\forall t\in\mathbb{R}$ için

$N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x,\frac{t}{M_\alpha}\right)\leq 1-\alpha$ iken $N_2^*\left(T\left(x_1\right),T\left(x_2\right),...,T\left(x_{n-1}\right),T\left(x\right),t\right)\leq 1-\alpha$ olacak şekilde $\exists M_\alpha>0$ var ise T ye *X* de zayıf fuzzy anti n-sınırlı denir.

6.1.13. Teorem

$\left(X,N_1^*\right)$ ve $\left(Y,N_2^*\right)$ f-an-NLU ve $T:X\to Y$ bir fuzzy anti n-lineer dönüşüm olsun. Eğer T kuvvetli fuzzy anti n-sınırlı ise bu durumda T zayıf fuzzy anti n-sınırlıdır fakat tersi doğru değildir.

İspat

T nin kuvvetli fuzzy anti n-sınırlı olduğunu kabul edelim. O halde $\exists M>0$ var öyle ki $\forall x_1,x_2,...,x_{n-1},x\in X$ ve $\forall t\in\mathbb{R}$ için

$N_2^*\left(T\left(x_1\right),T\left(x_2\right),...,T\left(x_{n-1}\right),T\left(x\right),t\right)\leq N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x,\frac{t}{M}\right)$ dir.

Böylece $\forall\alpha\in\left(0,1\right]$ için $\exists M_\alpha\left(=M\right)>0$ var öyle ki $\forall x_1,x_2,...,x_{n-1},x\in X$ ve $\forall t\in\mathbb{R}$ için

$N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x,\frac{t}{M_\alpha}\right)\leq 1-\alpha\Rightarrow N_2^*\left(T\left(x_1\right),T\left(x_2\right),...,T\left(x_{n-1}\right),T\left(x\right),t\right)\leq 1-\alpha$ dır. Bu da T nin zayıf fuzzy anti n-sınırlı olması demektir.

Aşağıdaki örnek ile tersinin doğru olmadığını gösterelim.

6.1.14 Örnek

$(X,\|\cdot,\ldots,\cdot\|)$ bir n-normlu lineer uzay olsun. $N_1^*, N_2^* : X\times\cdots\times X\times\mathbb{R}\to[0,1]$ fonksiyonlarını şu şekilde tanımlayalım. $\forall x_1,x_2,...,x_n\in X$ ve $t\in\mathbb{R}$ için

$$N_1^*(x_1,x_2,...,x_n,t)=\begin{cases}\dfrac{2\|x_1,x_2,...,x_n\|^2}{t^2+\|x_1,x_2,...,x_n\|^2} & ;t>\|x_1,x_2,...,x_n\|\\ 1 & ;t\le\|x_1,x_2,...,x_n\|\end{cases}$$

ve

$$N_2^*(x_1,x_2,...,x_n,t)=\begin{cases}\dfrac{\|x_1,x_2,...,x_n\|}{t+\|x_1,x_2,...,x_n\|} & ;t>0\\ 1 & ;t\le 0\end{cases}$$

N_1^* ve N_2^* X de fuzzy anti n-normdur.

$T:X\to X$ fuzzy anti n-lineer dönüşümünü $T(x)=x$ olarak tanımlayalım.

$\forall\alpha\in(0,1]$ için $M_\alpha=\dfrac{1}{1-\alpha}$ seçerek

$N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x,\dfrac{t}{M_\alpha}\right)\le 1-\alpha\Rightarrow N_2^*(T(x_1),T(x_2),...,T(x_{n-1}),T(x),t)\le 1-\alpha$ olduğunu gösterelim. $\forall t>\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\|\ge 0$ için

$$N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x,\frac{t}{M_\alpha}\right)\le 1-\alpha$$

$$\Rightarrow\frac{2\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\|^2}{t^2(1-\alpha)^2+\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\|^2}\le 1-\alpha$$

$$\Rightarrow 2\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\|^2\le(1-\alpha)^3t^2+\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\|^2-\alpha.\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\|^2$$

$$\Rightarrow\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\|^2+\alpha.\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\|^2\le(1-\alpha)^3t^2$$

$$\Rightarrow(1+\alpha)\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\|^2\le(1-\alpha)^3t^2$$

$$\Rightarrow\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\|^2\le\frac{(1-\alpha)^3t^2}{1+\alpha}$$

$$\Rightarrow\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\|\le\frac{t(1-\alpha)\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}}$$

$$\Rightarrow t+\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\|\le\frac{t(1-\alpha)\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}}+t$$

$$\Rightarrow t+\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\| \le \frac{t\left(1-\alpha\right)\sqrt{1-\alpha}+t\sqrt{1+\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{t+\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|} \ge \frac{\sqrt{1+\alpha}}{\left(1-\alpha\right)\sqrt{1-\alpha}+\sqrt{1+\alpha}}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{t}{t+\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|} \le 1-\frac{\sqrt{1+\alpha}}{\left(1-\alpha\right)\sqrt{1-\alpha}+\sqrt{1+\alpha}}$$

$$\Rightarrow \frac{\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|}{t+\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|} \le \frac{\left(1-\alpha\right)\sqrt{1-\alpha}}{\left(1-\alpha\right)\sqrt{1-\alpha}+\sqrt{1+\alpha}}$$

ifadesi elde edilir. Burada

$\frac{\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|}{t+\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|} = N_2^*\left(x_1,x_2,...,x_n,t\right) = N_2^*\left(T\left(x_1\right),T\left(x_2\right),...,T\left(x_n\right),t\right)$ olduğundan

$\frac{\left(1-\alpha\right)\sqrt{1-\alpha}}{\left(1-\alpha\right)\sqrt{1-\alpha}+\sqrt{1+\alpha}} \le 1-\alpha$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$$\frac{\left(1-\alpha\right)\sqrt{1-\alpha}}{\left(1-\alpha\right)\sqrt{1-\alpha}+\sqrt{1+\alpha}} \le 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{\left(1-\alpha\right)\sqrt{1-\alpha}}{\left(1-\alpha\right)\sqrt{1-\alpha}+\sqrt{1+\alpha}} \ge 1-\left(1-\alpha\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(1-\alpha\right)\sqrt{1-\alpha}+\sqrt{1+\alpha}-\left(1-\alpha\right)\sqrt{1-\alpha}}{\left(1-\alpha\right)\sqrt{1-\alpha}+\sqrt{1+\alpha}} \ge \alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{1+\alpha}}{\left(1-\alpha\right)\sqrt{1-\alpha}+\sqrt{1+\alpha}} \ge \alpha$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\alpha} \ge \alpha\left(\left(1-\alpha\right)\sqrt{1-\alpha}+\sqrt{1+\alpha}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\alpha} \ge \alpha\left(1-\alpha\right)\sqrt{1-\alpha}+\alpha\sqrt{1+\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\alpha\right)\sqrt{1+\alpha} \ge \alpha\left(1-\alpha\right)\sqrt{1-\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\alpha} \ge \alpha\sqrt{1-\alpha}$$

$$\Leftrightarrow 1+\alpha \ge \alpha^2\left(1-\alpha\right)$$

$$\Leftrightarrow 1+\alpha \ge \alpha^2-\alpha^3$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3-\alpha^2+\alpha+1 \ge 0$$

ifadesi $\forall\alpha\in\left(0,1\right]$ için doğru olduğundan $\frac{\left(1-\alpha\right)\sqrt{1-\alpha}}{\left(1-\alpha\right)\sqrt{1-\alpha}+\sqrt{1+\alpha}} \le 1-\alpha$ ifadesi de doğrudur. Bu durumda $\forall\alpha\in\left(0,1\right]$ için $M_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}$ seçilerek

$N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x,\frac{t}{M_\alpha}\right)\le 1-\alpha \Rightarrow N_2^*\left(T\left(x_1\right),T\left(x_2\right),...,T\left(x_{n-1}\right),T\left(x\right),t\right)\le 1-\alpha$ elde edilir. Ayrıca $\forall t<\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|$ için $\alpha\in(0,1]$ olduğundan

$N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},T\left(x\right),\frac{t}{M_\alpha}\right)=1\le 1-\alpha \Rightarrow N_2^*\left(T\left(x_1\right),T\left(x_2\right),...,T\left(x_{n-1}\right),T\left(x\right),t\right)\le 1-\alpha$

önermesi doğrudur. Böylece T zayıf fuzzy anti n-sınırlıdır.

Fakat T kuvvetli fuzzy anti n-sınırlı değildir. Kabul edelim ki T kuvvetli fuzzy anti n-sınırlı olsun. Yani $\forall x_1,x_2,...,x_{n-1},x\in X$ ve $\forall t\in\mathbb{R}$ için $\exists M\left(>0\right)\in\mathbb{R}$ reel sayısı var öyle ki

$N_2^*\left(T\left(x_1\right),T\left(x_2\right),...,T\left(x_{n-1}\right),T\left(x\right),t\right)\le N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x,\frac{t}{M}\right)$ dir. Bu durumda

$$N_2^*\left(x_1,x_2...,x_{n-1},x,t\right)\le N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x,\frac{t}{M}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|}{t+\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|}\le \frac{2\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|^2}{\frac{t^2}{M^2}+\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|}{t+\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|}\le \frac{2M^2\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|^2}{t^2+M^2\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|^2}$$

$$\Leftrightarrow \left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|t^2+M^2\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|^3\le 2tM^2\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|^2+2M^2\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|^3$$

$$\Leftrightarrow \left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|t^2\le 2tM^2\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|^2+M^2\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|^3$$

$$\Leftrightarrow t^2\le 2tM^2\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|+M^2\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2}{2t\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|+\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|^2}\le M^2$$

$$\Leftrightarrow M\ge \frac{t}{\sqrt{2t\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|+\left\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\right\|^2}}$$

elde edilir. Fakat $t\to\infty$ için $M=\infty$ olacağından kabulümüz yanlıştır. T, X de kuvvetli fuzzy anti n-sınırlı değildir.

6.1.15. Teorem

$\left(X, N_1^*\right)$ ve $\left(Y, N_2^*\right)$ f-an-NLU ve $T: X \to Y$ bir fuzzy anti n-lineer dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler vardır.

i. T, $x_0 \in X$ noktasında kuvvetli fuzzy anti n-sürekliyse, X üzerinde her yerde kuvvetli fuzzy anti n-süreklidir.

ii. T kuvvetli fuzzy anti n-süreklidir $\Leftrightarrow$ T kuvvetli fuzzy anti n-sınırlıdır.

İspat

i. T, $x_0 \in X$ noktasında kuvvetli fuzzy anti n-sürekli olsun. Bu durumda

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ var öyle ki $\forall x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x \in X$ için

$N_2^*\left(T\left(x_1\right), T\left(x_2\right), ..., T\left(x_{n-1}\right), T\left(x\right) - T\left(x_0\right), \varepsilon\right) \le N_1^*\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x - x_0, \delta\right)$ dır.

$x' \in X$ alalım ve x yerine $x + x_0 - x'$ yazalım.

$N_2^*\left(T\left(x_1\right), ..., T\left(x_{n-1}\right), T\left(x + x_0 - x'\right) - T\left(x_0\right), \varepsilon\right) \le N_1^*\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x + x_0 - x' - x_0, \delta\right)$

$\Rightarrow N_2^*\left(T\left(x_1\right), ..., T\left(x_{n-1}\right), T\left(x\right) + T\left(x_0\right) - T\left(x'\right) - T\left(x_0\right), \varepsilon\right) \le N_1^*\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x - x', \delta\right)$

$\Rightarrow N_2^*\left(T\left(x_1\right), ..., T\left(x_{n-1}\right), T\left(x\right) - T\left(x'\right), \varepsilon\right) \le N_1^*\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x - x', \delta\right)$ bulunur.

$x' \in X$ keyfi olduğundan T, X üzerinde her yerde kuvvetli fuzzy anti n-süreklidir.

ii. T, kuvvetli fuzzy anti n-sürekli olsun. Bu durumda T nin $x_0 = \theta \in X$ noktasındaki kuvvetli fuzzy anti n-sürekliliğini kullanalım. Bu durumda $\varepsilon = 1$ seçersek $\exists \delta > 0$ var öyle ki $\forall x_1, ..., x_{n-1}, x \in X$ için

$N_2^*\left(T\left(x_1\right), T\left(x_2\right), ..., T\left(x_{n-1}\right), T\left(x\right) - T\left(\theta\right), 1\right) \le N_1^*\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x - \theta, \delta\right)$

$\Rightarrow N_2^*\left(T\left(x_1\right), T\left(x_2\right), ..., T\left(x_{n-1}\right), T\left(x\right), 1\right) \le N_1^*\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x, \delta\right)$ bulunur. Eğer $x_1, ..., x_{n-1}, x$ lineer bağımsız ise $T\left(x_1\right), ..., T\left(x_{n-1}\right), T\left(x\right)$ de lineer bağımsızdır. Bu durumda $t > 0$ için $x = u.t$ yazarak

$$N_2^*\left(T\left(x_1\right),T\left(x_2\right),...,T\left(x_{n-1}\right),T\left(u.t\right),t\right)=N_2^*\left(T\left(x_1\right),T\left(x_2\right),...,T\left(x_{n-1}\right),T\left(u\right),1\right)$$
$$\le N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},u,\delta\right)$$
$$=N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},\frac{x}{t},\delta\right)$$
$$=N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x,\frac{\delta}{|1/t|}\right)$$
$$=N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x,\frac{t}{M}\right)$$

Dolayısıyla $x_1,...,x_{n-1},x\in X$ lineer bağımsız ve $t>0$ için $N_2^*\left(T\left(x_1\right),T\left(x_2\right),...,T\left(x_{n-1}\right),T\left(x\right),t\right)\le N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x,\frac{t}{M}\right)$ olacak şekilde $\exists M=\frac{1}{\delta}$ pozitif reel sayısı vardır.

$x_1,...,x_{n-1},x\in X$ lineer bağımlı ise $T\left(x_1\right),...,T\left(x_{n-1}\right),T\left(x\right)$ de lineer bağımlıdır. Bu durumda $t>0$ için

$N_2^*\left(T\left(x_1\right),T\left(x_2\right),...,T\left(x_{n-1}\right),T\left(x\right),t\right)=0=N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x,\frac{t}{M}\right)$ elde edilir.

$x_1,...,x_{n-1},x\in X$ ve $t\le 0$ ise

$N_2^*\left(T\left(x_1\right),T\left(x_2\right),...,T\left(x_{n-1}\right),T\left(x\right),t\right)=1=N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x,\frac{t}{M}\right)$ ifadesi elde edilir.

Böylece $\forall x_1,...,x_{n-1},x\in X$ ve $t\in\mathbb{R}$ için

$N_2^*\left(T\left(x_1\right),T\left(x_2\right),...,T\left(x_{n-1}\right),T\left(x\right),t\right)\le N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x,\frac{t}{M}\right)$ olacak şekilde $\exists M>0$ reel sayısı vardır. Bu durumda T, kuvvetli fuzzy anti n-sınırlıdır.

Tersine kabul edelim ki T, kuvvetli fuzzy anti n-sınırlı olsun. Dolayısıyla $\forall x_1,...,x_{n-1},x\in X$ ve $\forall t\in\mathbb{R}$ için

$N_2^*\left(T\left(x_1\right),T\left(x_2\right),...,T\left(x_{n-1}\right),T\left(x\right),t\right)\le N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x,\frac{t}{M}\right)$ olacak şekilde $\exists M>0$ reel sayısı vardır. Buradan $\forall x_1,...,x_{n-1},x\in X$ ve $\forall t\in\mathbb{R}^+$ için

$$N_2^*\left(T\left(x_1\right),T\left(x_2\right),...,T\left(x_{n-1}\right),T\left(x\right)-T\left(\theta\right),t\right)\le N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x-\theta,\frac{t}{M}\right)$$
$$\Rightarrow N_2^*\left(T\left(x_1\right),T\left(x_2\right),...,T\left(x_{n-1}\right),T\left(x\right)-T\left(\theta\right),t\right)\le N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x-\theta,\delta\right)$$

olacak şekilde $\exists \delta = \frac{t}{M}$ pozitif reel sayısı vardır. Bu durumda T, $\theta \in X$ noktasında kuvvetli fuzzy anti n-süreklidir. Dolayısıyla T, X de kuvvetli fuzzy anti n-süreklidir.

6.1.16. Not

T fuzzy anti n-lineer dönüşümü kuvvetli fuzzy anti n-sınırlı ise T, X de dizisel fuzzy anti n-süreklidir.

6.1.17. Teorem

$\left(X, N_1^*\right)$ ve $\left(Y, N_2^*\right)$ f-an-NLU ve $T: X \to Y$ bir fuzzy anti n-lineer dönüşüm olmak üzere, T, $x_0 \in X$ noktasında dizisel fuzzy anti n-sürekli ise T, X de dizisel fuzzy anti n-süreklidir.

İspat

Kabul edelim ki T, $x_0 \in X$ de dizisel fuzzy anti n-sürekli olsun. $x \in X$ bir keyfi nokta ve $\left(x_k\right)$, X de x noktasına yakınsayan bir dizi olsun. Bu durumda $\forall x_1, x_2, ..., x_{n-1} \in X$ ve $\forall t > 0$ için,

$\lim_{k\to\infty} N_1^*\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_k - x, t\right) = 0$ dır. Yani $\forall t > 0$ için

$\lim_{k\to\infty} N_1^*\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, \left(x_k - x + x_0\right) - x_0, t\right) = 0$ dır.

T, $x_0 \in X$ de fuzzy anti n-sürekli olduğundan biliyoruz ki $\forall t > 0$ ve $\forall x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x \in X$ için

$\lim_{k\to\infty} N_2^*\left(T\left(x_1\right), T\left(x_2\right), ..., T\left(x_{n-1}\right), T\left(x_k - x + x_0\right) - T\left(x_0\right), t\right) = 0$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} N_2^*\left(T\left(x_1\right), T\left(x_2\right), ..., T\left(x_{n-1}\right), T\left(x_k\right) - T\left(x\right) + T\left(x_0\right) - T\left(x_0\right), t\right) = 0$

$\Rightarrow N_2^*\left(T\left(x_1\right), T\left(x_2\right), ..., T\left(x_{n-1}\right), T\left(x_k\right) - T\left(x\right), t\right) = 0$ dır.

Böylece $\forall t > 0$ ve $\forall x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x \in X$ için $\lim_{k\to\infty} N_1^*\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_k - x, t\right) = 0$ iken $\lim_{k\to\infty} N_2^*\left(T\left(x_1\right), T\left(x_2\right), ..., T\left(x_{n-1}\right), T\left(x_k\right) - T\left(x\right), t\right) = 0$ olduğundan T, X de dizisel fuzzy anti n-süreklidir.

6.1.18. Teorem

$\left(X, N_1^*\right)$ ve $\left(Y, N_2^*\right)$ iki f-an-NLU ve $T: X \to Y$ bir fuzzy anti n-lineer dönüşüm olmak üzere aşağıdaki ifadeler vardır.

i. T, $x_0 \in X$ noktasında zayıf fuzzy anti n-sürekli ise T, X üzerinde her yerde zayıf fuzzy anti n-süreklidir.

ii. T zayıf fuzzy anti n-süreklidir $\Leftrightarrow$ T zayıf fuzzy anti n-sınırlıdır.

İspat

i. T, $x_0 \in X$ noktasında zayıf fuzzy anti n-sürekli olsun. Bu durumda $\forall \varepsilon > 0$ ve $\alpha \in (0,1]$ için $\exists \delta = \delta(\alpha, \varepsilon) > 0$ var öyle ki $\forall x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x \in X$ için $N_1^*(x_1, ..., x_{n-1}, x - x_0, \delta) \le 1 - \alpha$ iken $N_2^*(T(x_1), ..., T(x_{n-1}), T(x) - T(x_0), \varepsilon) \le 1 - \alpha$ dır.

$x' \in X$ alalım ve x yerine $x + x_0 - x'$ yazalım.

$$N_1^*(x_1, ..., x_{n-1}, x + x_0 - x' - x_0, \delta) \le 1 - \alpha \Rightarrow$$
$$N_2^*(T(x_1), ..., T(x_{n-1}), T(x + x_0 - x') - T(x_0), \varepsilon) \le 1 - \alpha$$

$$N_1^*(x_1, ..., x_{n-1}, x - x', \delta) \le 1 - \alpha \Rightarrow$$
$$N_2^*(T(x_1), ..., T(x_{n-1}), T(x) + T(x_0) - T(x') - T(x_0), \varepsilon) \le 1 - \alpha$$

$$N_1^*(x_1, ..., x_{n-1}, x - x', \delta) \le 1 - \alpha \Rightarrow$$
$$N_2^*(T(x_1), ..., T(x_{n-1}), T(x) - T(x'), \varepsilon) \le 1 - \alpha$$

bulunur.

$x' \in X$ keyfi olduğundan T, X üzerinde her yerde zayıf fuzzy anti n-süreklidir.

ii. T, zayıf fuzzy anti n-sürekli olsun. Bu durumda T nin $x_0 = \theta \in X$ noktasındaki zayıf fuzzy anti n-sürekliliğini kullanalım. Bu durumda $\varepsilon = 1$ ve $\alpha \in (0,1]$ için $\exists \delta = \delta(\alpha, 1) > 0$ var öyle ki $\forall x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x \in X$ için

$$N_1^*(x_1, ..., x_{n-1}, x - \theta, \delta) \le 1 - \alpha \Rightarrow N_2^*(T(x_1), ..., T(x_{n-1}), T(x) - T(\theta), 1) \le 1 - \alpha$$

dır. Buradan

$$N_1^*(x_1, ..., x_{n-1}, x, \delta) \le 1 - \alpha \Rightarrow N_2^*(T(x_1), ..., T(x_{n-1}), T(x), 1) \le 1 - \alpha$$

elde edilir.

Eğer $x_1,...,x_{n-1},x$ lineer bağımsız ise $T(x_1),...,T(x_{n-1}),T(x)$ de lineer bağımsızdır. Bu durumda $t>0$ için $x=\frac{u}{t}$ yazarsak

$$N_1^*\left(x_1,...,x_{n-1},\frac{u}{t},\delta\right)\le 1-\alpha \Rightarrow N_2^*\left(T(x_1),...,T(x_{n-1}),T\left(\frac{u}{t}\right),1\right)\le 1-\alpha$$

$$N_1^*\left(x_1,...,x_{n-1},u,t\delta\right)\le 1-\alpha \Rightarrow N_2^*\left(T(x_1),...,T(x_{n-1}),T(u),t\right)\le 1-\alpha$$

$$N_1^*\left(x_1,...,x_{n-1},u,\frac{t}{M_\alpha}\right)\le 1-\alpha \Rightarrow N_2^*\left(T(x_1),...,T(x_{n-1}),T(u),t\right)\le 1-\alpha$$

Dolayısıyla $x_1,...,x_{n-1},x\in X$ lineer bağımsız ve $t>0$ için $N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x,\frac{t}{M_\alpha}\right)\le 1-\alpha$ iken $N_2^*\left(T(x_1),T(x_2),...,T(x_{n-1}),T(x),t\right)\le 1-\alpha$ olacak şekilde $\exists M_\alpha=\frac{1}{\delta(\alpha,1)}$ pozitif reel sayısı vardır.

$x_1,...,x_{n-1},x\in X$ lineer bağımlı ise $T(x_1),...,T(x_{n-1}),T(x)$ de lineer bağımlıdır. Bu durumda $t>0$ ise

$$N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x,\frac{t}{M_\alpha}\right)=0\le 1-\alpha \text{ iken } N_2^*\left(T(x_1),T(x_2),...,T(x_{n-1}),T(x),t\right)=0\le 1-\alpha$$

ifadesi $\forall M_\alpha>0$ için elde edilir.

$x_1,...,x_{n-1},x\in X$ ve $t\le 0$ ise

$$N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x,\frac{t}{M_\alpha}\right)=1\le 1-\alpha \text{ iken } N_2^*\left(T(x_1),T(x_2),...,T(x_{n-1}),T(x),t\right)=1\le 1-\alpha$$

ifadesi $\forall M_\alpha>0$ için elde edilir.

Dolayısıyla $\forall x_1,...,x_{n-1},x\in X$ ve $t\in\mathbb{R}$ için

$$N_1^*\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x,\frac{t}{M_\alpha}\right)\le 1-\alpha \text{ iken } N_2^*\left(T(x_1),T(x_2),...,T(x_{n-1}),T(x),t\right)\le 1-\alpha$$ olacak

şekilde $\exists M_\alpha>0$ reel sayısı vardır. Bu durumda T, zayıf fuzzy anti n-sınırlıdır.

Tersine kabul edelim ki T, zayıf fuzzy anti n-sınırlı olsun. Dolayısıyla $\forall x_1,...,x_{n-1},x\in X$ ve $\forall t\in\mathbb{R}$ için

$N_1^*\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x, \frac{t}{M_\alpha}\right) \le 1-\alpha$ iken $N_2^*\left(T(x_1), T(x_2), ..., T(x_{n-1}), T(x), t\right) \le 1-\alpha$ olacak şekilde $\exists M_\alpha > 0$ reel sayısı vardır. Buradan $\forall x_1, ..., x_{n-1}, x \in X$ ve $\forall t \in \mathbb{R}^+$ için

$N_1^*\left(x_1, ..., x_{n-1}, x-\theta, \frac{t}{M_\alpha}\right) \le 1-\alpha \Rightarrow N_2^*\left(T(x_1), ..., T(x_{n-1}), T(x)-T(\theta), t\right) \le 1-\alpha$ elde edilir. Bu durumda

$N_1^*\left(x_1, ..., x_{n-1}, x-\theta, \delta\right) \le 1-\alpha$ iken $N_2^*\left(T(x_1), ..., T(x_{n-1}), T(x)-T(\theta), \varepsilon\right) \le 1-\alpha$ olacak şekilde $\exists \delta = \frac{\varepsilon}{M_\alpha}$ pozitif reel sayısı bulunabildiğinden T, $\theta \in X$ noktasında zayıf fuzzy anti n-süreklidir. Dolayısıyla T, *X* de zayıf fuzzy anti n-süreklidir.

6.2. Fuzzy Anti n-Normlu Uzaylarda Mutlak Yakınsak Seriler

Bu kısımda ilk defa fuzzy anti n-normlu uzaylarda mutlak yakınsaklık tanımı yapılacak ve bazı sonuçları verilecektir. Bundan sonraki bölümlerde aksi belirtilmedikçe $\left(X, N^*\right)$, fuzzy anti n-normlu lineer uzay olarak alınacaktır.

6.2.1. Tanım

$\left(X, N^*\right)$ fuzzy anti n-normlu uzayında $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisini alalım. $\forall a_1, ..., a_{n-1} \in X$ ve $\alpha \in (0,1]$ için eğer $\sum_{k=1}^{\infty} \left\| a_1, ..., a_{n-1}, x_k \right\|_\alpha^* < \infty$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisine mutlak yakınsaktır denir.

Aşağıdaki lemma ile mutlak yakınsaklığı farklı bir şekilde ifade edebiliriz.

6.2.2. Lemma

$\left(X, N^*\right)$ da $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisi mutlak yakınsaktır ancak ve ancak $\forall a_1, a_2, ..., a_{n-1} \in X$ ve $\forall \alpha \in (0,1]$ için $\exists t_k \ge 0$ var öyle ki $\sum_{k=1}^{\infty} t_k < \infty$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $N^*\left(a_1, ..., a_{n-1}, x_k, t_k\right) < \alpha$ dır.

İspat

$\left(X, N^*\right)$ da $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisi mutlak yakınsak olsun. Bu durumda $\forall a_1,...,a_{n-1} \in X$ ve $\forall \alpha \in (0,1]$ için $\sum_{k=1}^{\infty} \|a_1,...,a_{n-1},x_k\|_\alpha^* < \infty$ dır.

O halde $\sum_{k=1}^{\infty} \inf\left\{t_k : N^*\left(a_1,...,a_{n-1},x_k,t_k\right) < \alpha\right\} < \infty$ dur. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\exists t_k \geq 0$ vardır öyle ki $N^*\left(a_1,...,a_{n-1},x_k,t_k\right) < \alpha$ ve $t_k < \|a_1,...,a_{n-1},x_k\|_\alpha^* + \frac{1}{2^k}$ dır. Buradan

$\sum_{k=1}^{\infty} t_k < \sum_{k=1}^{\infty} \|a_1,...,a_{n-1},x_k\|_\alpha^* + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty$ elde edilir.

Diğer taraftan $\forall a_1,...,a_{n-1} \in X$ ve $\forall \alpha \in (0,1]$ için $\exists t_k \geq 0$ var öyle ki $N^*\left(a_1,...,a_{n-1},x_k,t_k\right) < \alpha$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} t_k < \infty$ olsun. O halde $N^*\left(a_1,...,a_{n-1},x_k,t_k\right) < \alpha$ şartını sağlayan $\exists t_k \geq 0$ için

$$\|a_1,...,a_{n-1},x_k\|_\alpha^* = \inf\left\{t_k : N^*\left(a_1,...,a_{n-1},x_k,t_k\right) < \alpha\right\} < t_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \|a_1,...,a_{n-1},x_k\|_\alpha^* < \sum_{k=1}^{\infty} t_k < \infty$$

olur. Buda $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisinin mutlak yakınsak olduğunu gösterir.

6.2.3. Lemma

$\left(X, N^*\right)$ tam uzay olsun. Bu durumda her mutlak yakınsak $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisi yakınsaktır. Ayrıca $\forall a_1,...,a_{n-1} \in X$, $\forall \alpha \in (0,1]$ için $\left\|a_1,...,a_{n-1},\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right\|_\alpha^* \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|a_1,...,a_{n-1},x_k\|_\alpha^*$ dır.

İspat

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisini alalım. $\forall a_1,...,a_{n-1} \in X$ ve $\forall \alpha \in (0,1]$ için seri mutlak yakınsak olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} \|a_1,...,a_{n-1},x_k\|_\alpha^* < \infty$ dur. $y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ kısmi toplamlar dizisi , $a_1,...,a_{n-1} \in X$,

$\alpha \in (0,1]$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $\exists \eta \in \mathbb{N}$ sayısı var öyle ki $\sum_{k=\eta+1}^{\infty} \|a_1,...,a_{n-1},x_k\|_\alpha^* < \varepsilon$ dur. O halde $n > m \geq \eta$ için

$$\begin{aligned}\left|\|a_1,...,a_{n-1},y_n\|_\alpha^* - \|a_1,...,a_{n-1},y_m\|_\alpha^*\right| &\leq \|a_1,...,a_{n-1},y_n - y_m\|_\alpha^* \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{n} \|a_1,...,a_{n-1},x_k\|_\alpha^* \\ &\leq \sum_{k=\eta+1}^{\infty} \|a_1,...,a_{n-1},x_k\|_\alpha^* \\ &\leq \varepsilon\end{aligned}$$

olur. Buda (X,N^*) da (y_n) dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Ayrıca (X,N^*) tam olduğu için (y_n) dizisi yakınsak ve dolayısıyla $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisi yakınsaktır. Aynı zamanda $\|x_1,x_2,...,x_{n-1},x+y\|_\alpha^* \leq \|x_1,x_2,...,x_{n-1},x\|_\alpha^* + \|x_1,x_2,...,x_{n-1},y\|_\alpha^*$ ifadesini genellersek $\left\|a_1,...,a_{n-1},\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right\|_\alpha^* \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|a_1,...,a_{n-1},x_k\|_\alpha^*$ ifadesi elde edilir.

6.2.4. Tanım

I herhangi bir sayılabilir küme olsun. $\mathbb{N}$ den I ya bir ψ birebir ve örten fonksiyonu için $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\psi(k)}$ serisi mutlak yakınsak ise (X,N^*) tam fuzzy anti n-normlu uzayının elemanlarının $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ailesine mutlak toplanabilir denir.

6.2.5. Teorem

$(x_i)_{i \in I}$ tam fuzzy anti n-normlu (X,N^*) uzayının elemanlarının mutlak toplanabilir ailesi olsun. B_k, A nın boştan farklı bir alt kümesinin sonsuz bir dizisi ve $i \neq j$ iken $B_i \cap B_j = \varnothing$ olmak üzere $A = \bigcup_k B_k$ olsun. Bu durumda $z_k = \sum_{i \in B_k} x_i$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ serisi mutlak yakınsaktır.

İspat

$I=\bigcup_{k=1}^{\eta} B_k$ ayrık sonlu birleşimleri için doğru olduğunu görmek kolaydır. Kabul edelim ki ayrık birleşimler $I=\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ olsun. Lemma 6.2.3 den her $a_1,...,a_{n-1}\in X$ ve her $\alpha\in(0,1)$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|a_1,...,a_{n-1},z_k\|_{\alpha}^{*}\le\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i\in B_k}\|a_1,...,a_{n-1},x_i\|_{\alpha}^{*}$$

$$=\sum_{i\in I}\|a_1,...,a_{n-1},x_i\|_{\alpha}^{*}<\infty$$

dır. Bu nedenle, $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ mutlak yakınsaktır.

6.3. Fuzzy Anti n-Normlu Uzaylarda Serilerin Yakınsaklığını Koruyan Dönüşümler

Bu kısımda fuzzy anti n-normlu uzaylarda serilerin yakınsaklığını koruyan $T:X\to X$ dönüşümünü tanımlayacağız. Burada (X,N^{*}) de Cauchy yakınsaklık şartı olan "$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ yakınsaktır ancak ve ancak $\forall\varepsilon>0$ için bir η var öyle ki her $n\ge m\ge\eta$ için $a_1,...,a_{n-1}\in X$ olmak üzere $\left\|a_1,...,a_{n-1},\sum_{k=m}^{n} x_k\right\|_{\alpha}^{*}<\varepsilon$ dur." ifadesini kullanacağız.

6.3.1. Tanım

(X,N^{*}) fuzzy anti n-normlu uzay olsun. Her bir $x,y\in X$, $a_1,...,a_{n-1}\in X$ ve $\forall\alpha\in(0,1]$ için eğer $\|a_1,...,a_{n-1},T(x+y)\|_{\alpha}^{*}=\|a_1,...,a_{n-1},T(x)+T(y)\|_{\alpha}^{*}$ ise $T:X\to X$ fonksiyonuna fuzzy anti n-normlu (X,N^{*}) uzayında toplamsaldır denir.

6.3.2. Tanım

$\left(X, N^*\right)$ fuzzy anti n-normlu uzayında her yakınsak $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisi için $\sum_{k=1}^{\infty} T\left(x_k\right)$ da yakınsak ise yani her $a_1,...,a_{n-1} \in X$ için $\sum_{k=1}^{\infty} \left\|a_1,...,a_{n-1}, x_k\right\|_\alpha^* < \infty$ iken $\sum_{k=1}^{\infty} \left\|a_1,...,a_{n-1}, T\left(x_k\right)\right\|_\alpha^* < \infty$ ise $T: X \to X$ dönüşümü yakınsaklığı korur denir.

6.3.3. Teorem

$\left(X, N^*\right)$ fuzzy anti n-normlu uzay $A \subset X$ ve $a_1,...,a_{n-1} \in X$ olsun. $T: X \to X$ dönüşümü $B(\alpha, \delta, A) = \left\{x \in X : \left\|a_1,...,a_{n-1}, x\right\|_\alpha^* < \delta\right\}$ komşuluğunda toplamsal ve sürekli dönüşüm ise T dönüşümü $\left(X, N^*\right)$ fuzzy anti n-normlu uzayda serilerin yakınsaklığını korur.

İspat

$\left(X, N^*\right)$ fuzzy anti n-normlu uzay ve $T: X \to X$ dönüşümü $B(\alpha, \delta, A)$ komşuluğunda toplamsal ve sürekli olsun. $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ yakınsak serisini alalım. $\sum_{k=1}^{\infty} T\left(x_k\right)$ serisinin yakınsak olduğunu gösterelim. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \eta \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n \geq m \geq \eta$ için $\left\|a_1,...,a_{n-1}, \sum_{k=m}^{n} T\left(x_k\right)\right\|_\alpha^* < \varepsilon$ olduğunu göstermeliyiz. T dönüşümü toplamsal olduğundan

$$\left\|a_1,...,a_{n-1}, T\left(\sum_{k=1}^{s} x_k\right)\right\|_\alpha^* = \left\|a_1,...,a_{n-1}, T\left(x_1 + x_2 + ... + x_s\right)\right\|_\alpha^*$$

$$= \left\|a_1,...,a_{n-1}, T\left(x_1\right) + T\left(x_2\right) + \cdots + T\left(x_s\right)\right\|_\alpha^*$$

$$= \left\|a_1,...,a_{n-1}, \sum_{k=1}^{s} T\left(x_k\right)\right\|_\alpha^*$$

ifadesi bulunur. Ayrıca $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisi yakınsak olduğundan $\forall \delta > 0$ için $\exists \mu \in \mathbb{N}$ var öyle ki $n \geq m \geq \mu$ için $\left\| a_1, ..., a_{n-1}, \sum_{k=m}^{n} x_k \right\|_{\alpha}^{*} < \delta$ dır. Buradan $j \in [m, n]$ için $\left\| a_1, ..., a_{n-1}, x_j \right\|_{\alpha}^{*} < \delta_j$ olacak şekilde $\delta_j > 0$ vardır. T dönüşümü toplamsal olduğundan $0 \in X$ için $T(0) = 0$ bulunur ve T dönüşümünün sürekliliğinden $\forall \varepsilon_j > 0$ için $\exists \delta_j > 0$ var öyle ki $\left\| a_1, ..., a_{n-1}, x_j \right\|_{\alpha}^{*} < \delta_j \Rightarrow \left\| a_1, ..., a_{n-1}, T(x_j) \right\|_{\alpha}^{*} < \varepsilon_j$ dir.

Bu durumda

$$\left\| a_1, ..., a_{n-1}, T\left(\sum_{k=m}^{n} x_k \right) \right\|_{\alpha}^{*} = \left\| a_1, ..., a_{n-1}, \sum_{k=m}^{n} T(x_k) \right\|_{\alpha}^{*} \leq \sum_{k=m}^{n} \left\| a_1, ..., a_{n-1}, T(x_k) \right\|_{\alpha}^{*} < \sum_{k=m}^{n} \varepsilon_k < \varepsilon$$

bulunur.

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \eta = \mu > 0$ sayısı var öyle ki $n \geq m \geq \mu$ için $\left\| a_1, ..., a_{n-1}, \sum_{k=m}^{n} T(x_k) \right\|_{\alpha}^{*} < \varepsilon$ dur.

Cauchy yakınsaklık kriterine göre $\sum_{k=1}^{\infty} T(x_k)$ serisi yakınsaktır. Böylece $T : X \to X$ dönüşümü (X, N^*) fuzzy anti n-normlu uzay üzerinde serilerin yakınsaklığını korur.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında; fuzzy n-normlu uzaylarda en uzak nokta dönüşümü

"A, X in bir fuzzy sınırlı alt kümesi olsun. $x \in X$ için

$$Q(A,x) = \cap_{\alpha\in(0,1)} Q_\alpha(A,x)$$

olmak üzere, her bir $a \in Q(A,x)$ elemanına A nın x den fuzzy en uzak noktası ve

$$x \to Q(A,x)$$

dönüşümüne A ya göre fuzzy en uzak nokta dönüşümü denir" şeklinde tanımlanmış

"A, X in fuzzy $\alpha-$sınırlı alt kümesi, $x \to Q_\alpha(x)$ fuzzy $\alpha-$en uzak nokta dönüşümü ve (x_k), X de bir dizi olsun. Eğer her bir $k \in \mathbb{N}$ için $x_k \to_\alpha x$, $q_{\alpha x_k} \in Q_\alpha(x_k)$ ve $q_{\alpha x_k} \to_\alpha y$ ise bu durumda $y \in Q_\alpha(x)$ dir." gibi bazı özellikleri verilmiştir.

Ayrıca fuzzy anti n-lineer dönüşüm tanımı

"(X, N_1^*) ve (Y, N_2^*) fuzzy anti n-normlu uzaylar ve $T: X \to Y$ bir dönüşüm olsun. $\forall y, z \in X$ için T dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa bu dönüşüme fuzzy anti n-normlu uzaylarda lineer dönüşüm denir;

(1) $T(y+z) = T(y) + T(z)$

(2) $T(cy) = c.T(y)$, $c \in \mathbb{R}$ "

şeklinde verilip bu dönüşümlerin sürekliliklerinin çeşitli tipleri olan fuzzy anti n-süreklilik, fuzzy anti n-dizisel süreklilik, zayıf fuzzy anti n-süreklilik, kuvvetli fuzzy anti n-süreklilik ve fuzzy anti n-lineer dönüşümlerin sınırlılıkların tipleri olan zayıf fuzzy anti n-sınırlılık, kuvvetli fuzzy anti n-sınırlılık kavramları ve bu kavramların arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Son olarak ise fuzzy anti n-normlu uzaylarda mutlak yakınsaklık tanımı "(X, N^*) fuzzy anti n-normlu uzayında $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisini alalım. $\forall a_1, ..., a_{n-1} \in X$ ve $\alpha \in (0,1]$ için eğer $\sum_{k=1}^{\infty} \|a_1, ..., a_{n-1}, x_k\|_\alpha^* < \infty$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisine mutlak yakınsaktır denir." şeklinde yapılıp fuzzy anti n-normlu uzaylarda serilerin yakınsaklığını koruyan $T: X \to X$ dönüşümü

"$\left(X, N^*\right)$ fuzzy anti n-normlu uzayında her yakınsak $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisi için $\sum_{k=1}^{\infty} T\left(x_k\right)$ da yakınsak ise yani her $a_1,...,a_{n-1} \in X$ için $\sum_{k=1}^{\infty} \left\| a_1,...,a_{n-1}, x_k \right\|_\alpha^* < \infty$ iken $\sum_{k=1}^{\infty} \left\| a_1,...,a_{n-1}, T\left(x_k\right) \right\|_\alpha^* < \infty$ ise $T : X \to X$ dönüşümü yakınsaklığı korur denir." şeklinde verilmiştir.

KAYNAKLAR

1. Taşçı, D. (2007). Soyut Cebir. *Ankara/Türkiye: Alp Yayınevi*

2. Yıldız, C. (2005). Genel Topoloji. *Ankara/Türkiye: Gazi Kitabevi*

3. Bayraktar, M. (2006). Fonksiyonel Analiz. *Ankara/Türkiye: Gazi Kitabevi*

4. Gähler, S. (1964). Lineare 2-normierte Räume. *Math. Nachr*., 28, 1-43.

5. Elumalai, S. and Vijayaragavan, R. (2009). Characterizations of best approximations in linear 2-normed spaces. *General Mathematics*, 17(3), 141-160.

6. Gunawan, H. and Mashadi, M. (2001). On n-normed spaces. *Int. J. Math. Math. Sci.*, 27(10), 631-639.

7. Bag, T. and Samanta, S. K. (2003). Finite dimensional fuzzy normed linear spaces. *J. Fuzzy Math.*, 11(3), 687-705.

8. Somasundaram, R. M. and Beaula, T. (2009). Some Aspects of 2-Fuzzy 2-Normed Linear Spaces. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 32(2), 211-221.

9. Surender Reddy, B. (2011). Fuzzy Anti-2-Normed Linear Space. *Journal of Mathematics Research*, 3(2), 137-144.

10. Narayanan, Al. and Vijayabalaji, S. (2005). Fuzzy n-normed linear space. *Int. J. Math. Math. Sci.*, 24, 3963-3977.

11. Vijayabalaji, S., and Thillaigovindan, N. (2007). Complete fuzzy n-normed linear space. *Journal of Fundamental Sci.*, 3(1), 119-126.

12. Panda, B. B. and Kapoor, O. P. (1978). On Farthest Points of Sets. J*ournal of mathematical analysis and applications*, 62, 345-353.

13. Saravanan, R. and Vijayaragavan, R. (2013). E*x*ıstence And Characterızatıon Of Farthest Points In Normed Linear Spaces. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 86(3), 527-535.

14. Bag, T. and Samanta, S.K. (2008). A comparative study of fuzzy norms on a linear space. *Fuzzy Sets and Systems*, 159, 670- 684.

15. Jebril, I. H. and Samanta, T.K. (2010). Fuzzy anti n-normed space, *Journal of Mathematics and Technology*, February, 66-77.

16. Kavıkumar, J., Jun, Y. B. and Khamıs, A. (2009). The riesz theorem in fuzzy n-normed linear spaces. *J. Appl. Math. & Informatics*, 27(3-4), 541-555.

17. Surender Reddy B. (2011). Fuzzy anti-n-normed linear space. *J. Mathematics and Technology*, 2(1), 14 - 26.

18. Dinda, B., Samanta T.K. and Jebril, I.H. (2010) Fuzzy Anti-Bounded Linear Operator. *http://arxiv.org/abs/1002.3817v1, arXiv:1002.3817v1 ath.GM.,* 19 Feb.

19. Elumalai, S. and Vijayaragavan, R. (2006). Farthest Points in Normed Linear Spaces. *General Mathematics Vol.*, 14(3), 9-22.

20. Govindarajulu, P. (1984). On Remotal Points Of Pairs Of Sets. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 15(8), 885-888.

21. Chang, C. L. (1968). Fuzzy Topological Spaces, *Journal Of Mathematical Analysis And Applications*, 24, 182-190.

22. Katsaras, A. K. and Liu, D. B. (1977). Fuzzy vector spaces and fuzzy topological vector spaces. *Journal Of Mathematical Analysis And Applications*, 58, 135-146.

23. Warren, R.H. (1978). Neighborhoods bases and continuity in fuzzy topological spaces. *Rocky Mountain J. Math.*, 8, 459-470.

24. Chang, S.C. and Mordesen, J. N. (1994). Fuzzy linear operators and fuzzy normed linear spaces. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, 86(5), 429-436.

25. Mirmostafaee, A.K. and Mirzavaziri, M. (2010). Closability of farthest point map in fuzzy normed spaces. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 2(4), 140-145

26. Elumalai, S. and Vijayaragavan, R. (2006). Farthest Points in Normed Linear Spaces. *General Mathematics*, 14(3), 9-22

27. Wildenberg, G. (1988). Convergence preserving functions, *Amer. Math. Monthly*, 95, 542- 544.

28. Smith, A. (1991). Convergence preserving function: an alternative discussion. *Amer. Math. Monthly*, 96, 831-833.

29. Elagan, S. and Rahmat, M. R. S. (2009). On Functions Preserving Convergence of Series in Fuzzy n-Normed Spaces, *International J.Math. Combin.*, 3, 61-70.

30. Niknam, A. (1987). Continuity of the farthest point map, *Indian j. Pure appl. Math.*, 18(7), 630- 632.

31. Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8, 338-353.

32. Turkmen, M.R. and Efe, H. (2013). On some properties of closability of farthest point maps in fuzzy n-normed spaces. *i-manager's Journal on Mathematics*, 2(4), 32-37

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler



Soyadı, adı	: TÜRKMEN, Muhammed Recai
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 30.08.1981, Ankara
Medeni hali	: Evli
Telefon	: 0 (436) 249 49 49
e-mail	: mrtmath@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Doktora	Gazi Üniversitesi/F.B.E. Matematik	2015
Yüksek Lisans	Gazi Üniversitesi/F.B.E. Matematik	2011
Yüksek Lisans	Gazi Üniversitesi/E.B.E. Matematik	2004
Lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik	2002
Lise	Prof. Dr. Şevket Raşit Hatipoğlu Lisesi	1998

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2010-….	Muş Alparslan Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2002-2010	Ankara Açı Dershaneleri	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Turkmen, M.R. and Efe, H. (2013). On some properties of closability of farthest point maps in fuzzy n-normed spaces. i-manager's Journal on Mathematics, 2(4), 32-37



GAZİ GELECEKTİR...