
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

f-CEBİRLERİ ÜZERİNDE
ORTALAMA OPERATÖRLERİ VE KELLEY TEOREMİ

Kazım ÖZCAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AĞUSTOS 2014

Kazım ÖZCAN tarafından hazırlanan "f-CEBİRLERİ ÜZERİNDE ORTALAMA OPERATÖRLERİ VE KELLEY TEOREMİ" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Bahri TURAN
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak yüksek lisans tezi olduğunu onaylıyorum …….

Başkan: Prof. Dr. Şafak ALPAY
Matematik Anabilim Dalı, O.D.T.Ü
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak yüksek lisans tezi olduğunu onaylıyorum …….

Üye: Prof. Dr. Birol ALTIN
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak yüksek lisans tezi olduğunu onaylıyorum …….

Tez Savunma Tarihi: 26/08/2014

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

……
Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Kazım ÖZCAN
09/07/2014

f-CEBİRLERİ ÜZERİNDE ORTALAMA OPERATÖRLERİ VE KELLEY TEOREMİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Kazım ÖZCAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ağustos 2014

ÖZET

Bu tezde, $C_0(X)$ cebiri üzerinde tanımlı operatörler için verilen Kelley Teoreminin farklı yaklaşımları incelenmiştir. İlk olarak $C(X)$ üzerinde modül teori kullanılarak, sonra da f-cebirleri üzerinde, sıra ve cebirsel özellikler kullanılarak, Kelley Teoremi araştırılmıştır.

Bilim Kodu : 204.1.095

Anahtar Kelimeler : Ortalama operatör, f-cebiri, orthomorfizm, Banach örgü cebiri, Kelley Teoremi, altcebir

Sayfa Adedi : 107

Danışman : Prof. Dr. Bahri TURAN

AVERAGING OPERATORS AND KELLEY THEOREM ON f-ALGEBRAS

(M. Sc. Thesis)

Kazım ÖZCAN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

August 2014

ABSTRACT

In this thesis, different approximation property has been analysed for Kelley Theorem which is given for declared operators on algebra $C_0(X)$. Kelley Theorem has been searched firstly by being used modüle theory on $C(X)$, then by being used order and algebraic specifications on f-algebras.

Science code : 204.1.095

Key words : Averaging operator, f-algebra, orthomorphism, Banach lattice algebra, Kelley Theorem, subalgebra

Number of pages : 107

Supervisor : Prof. Dr. Bahri TURAN

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada, derin bilgi birikimi ve yol göstericiliği ile desteklerini benden hiç esirgemeyen saygıdeğer hocam Prof. Dr. Bahri TURAN'a, ayrıca her zaman moral kaynağım ve destekçilerim olan sevgili eşim Serap ve kızım Nehir'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

SİMGELER VE KISALTMALAR viii

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER 3

2.1. Riesz Uzayları 3

2.2. Operatörler, Orthomorfizmalar ve Örgü Homomorfizmaları 13

2.3. Cebir, f-Cebirleri ve Banach Cebirleri 25

3. C(X)'TE ORTALAMA OPERATÖRLER 33

3.1. Operatörün A-Lineer Olma Koşulu 33

3.2. Operatörün Ortalama Operatör Olma Koşulları 42

4. ARCHIMEDIAN f-CEBİRLERİNDE ORTALAMA OPERATÖRLER VE POZİTİF KONTRAKTİV PROJEKSİYONLAR 49

4.1. f-Cebirleri İçin Schwarz Eşitsizliği 49

4.2. Birimli f-Cebirlerinde Seever Eşitliği 59

4.3. Görüntü Kümesinin Riesz Altuzay Olma Koşulu 75

4.4. Birimli f-Cebirlerinde Kelley Teoremi 81

4.5. Birimli Olmayan f-Cebirleri İçin Seever Eşitliği ve Kelley Teoremi 88

5. SONUÇ 103

KAYNAKLAR 105

ÖZGEÇMİŞ 107

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
Orth(E)	E üzerinde tanımlı orthomorfizmalar
$\mathbf{I_x}$	x tarafından üretilen ideal
$\mathbf{B_x}$	x tarafından üretilen band
$\mathbf{x^+}$	x'in pozitif kısmı
$\mathbf{x^-}$	x'in negatif kısmı
|x|	x'in modülü (mutlak değeri)
|T|	T'nin modülü (mutlak değeri)
||T||	T'nin normu
$\mathbf{A^+}$	A kümesinin pozitif kısmı
$\mathbf{A^d}$	A kümesinin dik tümleyeni
$\mathbf{x_\alpha \uparrow x}$	Yukarı yönlendirilmiş ve supremumu x olan net
$\mathbf{x_\alpha \downarrow x}$	Aşağı yönlendirilmiş ve infimumu x olan net
x⊥y	Birbirine dik elemanlar
A⊥B	Birbirine dik kümeler
x ∧ y	x ile y'nin infimumu
x ∨ y	x ile y'nin supremumu
supA	A kümesinin supremumu
infA	A kümesinin infimumu
Z(E)	Merkez operatörlerinin kümesi
L(E,F)	Operatörlerin vektör uzayı
$\mathbf{L_b(E,F)}$	Sıra sınırlı operatörlerin uzayı
E⊕F	E ile F'nin direkt toplamı
R(T)	T operatörünün görüntü kümesi
C(X)	X'ten R'ye tanımlı sürekli fonksiyonların kümesi
$\boldsymbol{C_b(X)}$	X'ten R'ye tanımlı, sınırlı, sürekli fonksiyonlar
$\boldsymbol{C_0(X)}$	∞'da sıfır olan X'te tanımlı tüm sürekli fonksiyonlar
$\boldsymbol{c_0}$	Sıfıra yakınsak diziler uzayı

Simgeler	**Açıklamalar**
ℓ_∞	Sınırlı diziler uzayı
$X\|_\sim$	X'in bölüm uzayı
[x]	x'in deklik sınıflarının kümesi

1. GİRİŞ

A değişmeli reel cebir ve $T : A \longrightarrow A$ lineer dönüşüm olmak üzere eğer her $a, b \in A$ için

$$T\ a \cdot Tb\ = Ta \cdot Tb$$

sağlanırsa T'ye ortalama operatör denir. Ortalama operatörler ile ilgili değişik değişmeli reel cebirler üzerinde çalışmalar yapılmıştır.

X lokal kompakt Hausdorff uzayı olmak üzere K(X); X üzerinde tanımlı, kompakt desteğe sahip reel değerli sürekli fonksiyonların kümesi yani

$$K\ X\ =\ f\ \ f : X \longrightarrow R\ sürekli\ fonksiyon\ ve$$
$$supp\ f\ =\ x \in X : f\ x\ \neq 0\ \ kompakt\ \}$$

olsun. $C_b(X)$; X üzerinde tanımlı, reel değerli, sınırlı ve sürekli fonksiyonların uzayı ise $K(X) \subseteq C_b(X)$ dir. $K(X)$'in $C_b(X)$ içindeki kapanışı $C_0(X)$ olarak tanımlanır. $C_0(X)$ değişmeli reel cebirdir ve Kelley Teoremi (1958) şunu söyler;

" $T : C_0(X) \longrightarrow C_0(X)$ pozitif, normu 1 olan projeksiyon olsun. T'nin ortalama operatör olması için gerekli ve yeterli koşul T'nin görüntü kümesi $R(T)$'nin alt cebir olmasıdır."

Farklı cebirlerde farklı yaklaşımlar kullanılarak Kelley Teoremi elde edilmeye çalışılmıştır. Biz bu tezde X kompakt Hausdorff uzayı olmak üzere C(X) üzerinde tanımlı lineer dönüşüm için Kelley Teoreminin, modül teori kullanılarak, elde edilmesinin verildiği M. Orhon'un [17] makalesini ve daha genel olarak f-cebirlerinde Kelley Teoremini veren C. B. Huijsmans ve B. D. Pagter'in [11] makalesini inceledik.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde çalışmamızda kullandığımız temel kavramlar ile bazı sonuçlar verilmiştir.

2.1. Riesz Uzayları

2.1.1. Tanım

$E \neq \emptyset$ bir küme ve ''$\leq$'', E'de bir bağıntı olsun. Eğer bu bağıntı

i-) $\forall x \in E\,, \quad x \leq x$

ii-) $\forall x, y \in E\,, \quad x \leq y \;\; ve \;\; y \leq x \;\; \Rightarrow x = y$

iii-) $\forall x, y, z \in E\,, \;\; x \leq y \;\; \wedge \;\; y \leq z \;\; \Rightarrow x \leq z$

koşullarını sağlıyorsa bir sıralama bağıntısı olarak adlandırılır.

$E, \leq$ ikilisine de sıralı küme denir [1].

2.1.2. Tanım

$E, \leq$ sıralı bir küme ve $A \subseteq E$ olsun.

i-) Her $a \in A$ için $a \leq x$ olacak şekilde $x \in E$ varsa A kümesine üstten sınırlı küme, x'e de A'nın bir üst sınırı denir [1].

ii-) Her $a \in A$ için $x \leq a$ olacak şekilde $x \in E$ varsa A kümesine alttan sınırlı küme, x'e de A'nın bir alt sınırı denir [1].

iii-) Alttan ve üstten sınırlı kümeye sınırlı küme denir [1].

iv-) A kümesinin üst sınırları kümesinin bir en küçük elemanı varsa buna A kümesinin en küçük üst sınırı denir ve supA ile gösterilir [1].

v-) A kümesinin alt sınırları kümesinin bir en büyük elemanı varsa buna A kümesinin en büyük alt sınırı denir ve infA ile gösterilir [1].

$A = \{x, y\}$ alırsak,

$supA = x \vee y$ ve $infA = x \wedge y$ şeklinde ifade edilir.

2.1.3. Tanım

$E, \leq$ sıralı küme olsun. Her $x, y \in E$ için $x \vee y$ ve $x \wedge y$ E kümesine ait ise E'ye örgü (lattice) denir [1].

2.1.4. Tanım

$E, \leq$ örgü olsun. Her $x, y, z \in E$ için $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ sağlanıyorsa E'ye dağılmalı örgü denir [1].

2.1.5. Tanım

$E, \leq$ örgü olsun. E'nin en küçük elemanı varsa buna sıfır (null) eleman denir ve θ ile gösterilir. E'nin en büyük elemanı varsa buna birim (unit) eleman denir ve e veya I ile gösterilir [1].

2.1.6. Tanım

E gerçel vektör uzayı ve ''$\leq$'', E'de bir sıralama bağıntısı olsun. Eğer;

i-) $\forall x, y, z \in E\,,\ x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
ii-) $\forall x, y \in E\,,\ 0 \leq \lambda \in R\,,\ x \leq y \Rightarrow \lambda x \leq \lambda y$

şartları sağlanıyorsa $E, \leq$ sıralı vektör uzayı olarak adlandırılır [1].

2.1.7. Tanım

E sıralı vektör uzayı ve θ, E'nin sıfır vektörü olsun. $\theta \leq x$ şartını sağlayan E'nin x elemanına pozitif eleman denir. E'nin tüm pozitif elemanlarının kümesi E^+ ile gösterilir ve

$$E^+ = \{x \in E : \theta \leq x\}$$

şeklinde ifade edilir [1].

2.1.8. Tanım

E sıralı vektör uzayı ve $V \subseteq E$ altvektör uzayı olmak üzere E'den gelen sıralama ile V'ye sıralı altvektör uzayı denir [1].

2.1.9. Tanım

E sıralı vektör uzayı olsun. Her $x, y \in E$ için $x \vee y \in E \ veya \ x \wedge y \in E$ oluyorsa E'ye Riesz uzayı (vektör lattice) denir [1].

2.1.10. Tanım

E Riesz uzayı ve G, E'nin bir altvektör uzayı olsun. Her $x, y \in G$ için $x \vee y \in G$ veya $x \wedge y \in G$ ise G'ye E'nin Riesz altuzayı denir [1].

Örnek

i-) Ω, τ topolojik uzay olmak üzere $C\ \Omega = f \mid f: \Omega \longrightarrow R \ sürekli \ fonksiyon$ kümesi,

$\forall f, g \in C\ \Omega\ , \quad f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in \Omega, \quad f(x) \leq g(x)$

şeklinde tanımlı noktasal sıralama ile bir Riesz uzayıdır [1].

ii-) $F = f \mid f: R \longrightarrow R \ lineer \ fonksiyon$ kümesi,

$\forall f, g \in F, \quad f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in \mathrm{R}, \quad f(x) \leq g(x)$

şeklinde tanımlı noktasal sıralama ile Riesz uzayı değildir [1].

2.1.11. Tanım

E Riesz uzayı olsun. Eğer E'nin boş olmayan üstten sınırlı her altkümesinin supremumu (veya buna denk olarak, boş olmayan alttan sınırlı her altkümesinin infimumu) varsa E'ye Dedekind tam Riesz uzayı denir.

Benzer olarak; eğer E'nin boş olmayan üstten sınırlı sayılabilir her altkümesinin supremumu (veya buna denk olarak, boş olmayan alttan sınırlı sayılabilir her altkümesinin infimumu) varsa E'ye σ-Dedekind tam Riesz uzayı denir [1].

2.1.12. Tanım

E Riesz uzayı ve $x \in E$ olsun.

i-) $x \vee 0$ elemanına x 'in pozitif kısmı denir ve x^+ ile gösterilir [1].
ii-) $-x \vee 0$ elemanına x 'in negatif kısmı denir ve x^- ile gösterilir [1].
iii-) $-x \vee x$ elemanına x 'in modülü denir ve x ile gösterilir [1].

2.1.13. Tanım

E Riesz uzayı ve $\emptyset \neq A, B \subseteq E$ olsun. Aşağıdaki tanımlamaları yazabiliriz [1].

i-) $A^+ = a^+ : a \in A$
ii-) $A^- = a^- : a \in A$
iii-) $A = a : a \in A$
iv-) $x \in E$, $x \vee A = x \vee a : a \in A$
v-) $x \in E$, $x \wedge A = x \wedge a : a \in A$
vi-) $A \vee B = a \vee b : a \in A, b \in B$
vii-) $A \wedge B = a \wedge b : a \in A, b \in B$
viii-) $A + B = a + b : a \in A, b \in B$

2.1.1. Teorem

E Riesz uzayı ve $\emptyset \neq A \subseteq E$ olsun. Eğer supA varsa her $x \in E$ için sup $x \wedge A$ vardır ve sup $x \wedge A = x \wedge$ supA dır. Benzer şekilde eğer infA varsa her $x \in E$ için inf $x \vee A$ vardır ve inf $x \vee A = x \vee$ infA dır [1].

2.1.2. Teorem

E Riesz uzayı ve $x, y, z \in E$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır [1].

i-) $x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)]$ ve $x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$

ii-) $x + y = x \wedge y + x \vee y$

iii-) $x + \ y \vee z \ = x \vee y + x \vee z$ ve $x + \ y \wedge z \ = x \wedge y + x \wedge z$

iv-) $\forall \alpha \geq 0$, $\alpha \ x \vee y \ = \alpha x \vee \alpha y \ ve \ \alpha \ x \wedge y \ = \alpha x \wedge \alpha y$

v-) $x = x^+ - x^-$

vi-) $x \ = x^+ + x^-$

vii-) $x^+ \wedge x^- = 0$

Ayrıca $x = y - z$ ve $y \wedge z = 0$ ise $y = x^+$ ve $z = x^-$ dir.

2.1.3. Teorem

E Riesz uzayı ve $x, y \in E$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır [1].

i-) $x \vee y = \frac{1}{2} \ x + y + \ x - y$ ve $x \wedge y = \frac{1}{2} \ x + y - \ x - y$

ii-) $x - y \ = \ x \vee y \ - \ x \wedge y$

iii-) $x \ \vee \ y \ = \frac{1}{2} \ x + y \ + \ x - y$

iv-) $x \ \wedge \ y \ = \frac{1}{2} \ x + y \ - \ x - y$

Sonuç

E sıralı vektör uzayı olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir [1].

i-) E Riesz uzayıdır.

ii-) Her $x \in E$ için $x^+ \in E$ dir.

iii-) Her $x \in E$ için $x^- \in E$ dir.

iv-) Her $x \in E$ için $x \ \in E$ dir.

2.1.4. Teorem

E Riesz uzayı ve $x, y, z \in E$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır [1].

i-) $x - y \leq x + y \leq x + y$

ii-) $x \vee z - y \vee z \leq x - y$ ve $x \wedge z - y \wedge z \leq x - y$

iii-) $x, y, z \geq 0 \Rightarrow x \wedge y + z \leq x \wedge y + x \wedge z$

2.1.5. Teorem

E Riesz uzayı olsun. Her $x, y \in E$ için $x - x \wedge y \wedge y - x \wedge y = 0$ dır [15].

2.1.14. Tanım

E Riesz uzayı ve $x, y \in A$ için $x \wedge y = 0$ oluyorsa x ile y birbirine diktir denir ve $x \perp y$ ile gösterilir.

$\emptyset \neq A \subseteq E$ $için$ $A^d = \{y \in E : \forall x \in A$ $için$ $x \perp y\}$ kümesine A kümesinin dik tümleyeni denir. $A, B \subseteq E$ olmak üzere her $x \in A$ ve her $y \in B$ için $x \perp y$ oluyorsa A ile B kümeleri birbirine diktir denir ve $A \perp B$ şeklinde gösterilir [1].

Sonuç

E Riesz uzayı ve $\emptyset \neq A \subseteq E$ olsun.

i-) A^d alt vektör uzayıdır [1],

ii-) $A^{dd} = z \in E : \forall y \in A^d$, $y \perp z$ olmak üzere $A^d \cap A^{dd} = 0$ dır [1].

2.1.15. Tanım

$\emptyset \neq \Lambda$ bir küme ve ‘’$\leq$’’, Λ üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer

i-) Her $p \in \Lambda$ için $p \leq p$,

ii-) Her $p, q, r \in \Lambda$ için $p \leq q$ ve $q \leq r$ iken $p \leq r$,
iii-) Her $p, q \in \Lambda$ için $p \leq s$ ve $q \leq s$ olacak şekilde bir $s \in \Lambda$ vardır.

şartları sağlanıyorsa "≤" e yönlendirme bağıntısı ve Λ kümesine ''≤'' bağıntısına göre (yukarı) yönlendirilmiş küme denir [13].

2.1.16. Tanım

$\Lambda, \leq$ yönlendirilmiş bir küme ve X herhangi bir küme olsun. Herhangi bir $f: \Lambda \longrightarrow X$ fonksiyonuna terimleri X'in elemanlarından oluşan bir ağ (net) denir [13].

2.1.17. Tanım

E Riesz uzayı ve $\{x_\lambda\}$, E'de bir net olsun. Her $x_\alpha, x_\beta \in x_\lambda$ için E'deki sıralamaya göre $x_\alpha \leq x_\gamma$ ve $x_\beta \leq x_\gamma$ olacak şekilde bir $x_\gamma \in x_\lambda$ varsa x_λ neti yukarı yönlendirilmiş denir ve $x_\lambda \uparrow$ şeklinde gösterilir. Eğer $x_\lambda \uparrow$ ve $\sup x_\lambda = x$ elemanı E içinde varsa bu durum $x_\alpha \uparrow x$ ile ifade edilir.

Benzer şekilde her $x_\alpha, x_\beta \in x_\lambda$ için E'deki sıralamaya göre $x_\gamma \leq x_\alpha$ ve $x_\gamma \leq x_\beta$ olacak şekilde bir $x_\gamma \in x_\lambda$ varsa x_λ neti aşağı yönlendirilmiş denir ve $x_\lambda \downarrow$ şeklinde gösterilir. Eğer $x_\lambda \downarrow$ ve $\inf x_\lambda = y$ elemanı E içinde varsa bu durum $x_\alpha \downarrow x$ ile ifade edilir.

$\{x_\lambda\}$ neti yerine herhangi bir $A \subseteq E$ alındığında, $A \uparrow$ ve supA=x elemanı E içinde mevcut ise $A \uparrow x$ şeklinde yazılır. Eğer $A \downarrow$ ve infA=y elemanı E içinde mevcut ise $A \downarrow y$ şeklinde gösterilir [1].

2.1.18. Tanım

E Riesz uzayı olsun. Her $x \in E^+$ ve $n \in N^+$ için $n^{-1}x \downarrow 0$ ise E'ye Archimedian Riesz uzayı denir [1].

Örnek

i-) R^2 kümesi her $x = \ x_1, x_2 \ , y = (y_1, y_2) \in R^2$ için

$x \leq y \Leftrightarrow x_1 \leq y_1 \ \wedge \ x_2 \leq y_2$

sıralamasına göre Archimedian Riesz uzayıdır [1].

ii-) R^2 kümesi her $x = \ x_1, x_2 \ , y = (y_1, y_2) \in R^2$ için

$x \leq y \Leftrightarrow x_1 < y_1 \ \vee \ \ x_1 = y_1 \ \wedge \ x_2 \leq y_2$

sıralamasına göre Archimedian Riesz uzayı değildir [1].

2.1.19. Tanım

E Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ olsun. $x \in A$ ve her $y \in E$ için $y \leq x$ iken $y \in A$ oluyorsa A'ya solid küme denir [1].

A, E'nin solid altuzayı ise A'ya E içinde ideal denir [1].

$\emptyset \neq A \subseteq E$ için A'yı kapsayan en küçük ideale A'nın ürettiği ideal denir ve I_A ile gösterilir [1].

2.1.20. Tanım

E Riesz uzayı ve A, E'de ideal olsun. Her $B \subseteq A$ için $supB = b \in E$ iken $b \in A$ oluyorsa A'ya band denir.

$\emptyset \neq A \subseteq E$ için A'yı kapsayan en küçük banda A'nın ürettiği band denir ve B_A ile gösterilir [1].

Sonuç

Her ideal bir Riesz altuzaydır [1].

2.1.6. Teorem

E Riesz uzayı olmak üzere A ve B, E'de ideal ise A∩B ve A+B, E'de idealdir [1].

2.1.7. Teorem

E Archimedian Riesz uzayı, $\emptyset \neq A \subseteq E$ olsun. $B_A = A^{dd}$ dir. Eğer A band ise $A = A^{dd}$ dir [1].

2.1.8. Teorem

E Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ olsun. I_A, A'nın ürettiği ideali göstermek üzere,

$$I_A = \{ x \in E : \exists x_1, x_2, \dots, x_n \in A,\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in R^+ \ni x \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i ,\ n \in N \}$$

dir [1].

Sonuç

E Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ olsun. $A = \{x\}$ ise ürettiği ideal,

$$I_A = I_x = \{ y \in E : \exists \lambda > 0 \ için \ y \leq \lambda x \}$$

şeklindedir [1].

2.1.9. Teorem

E Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ ideal olsun. B_A, A'nın ürettiği bandı göstermek üzere,

$B_A = \{x \in E : \exists\ x_\alpha \subseteq A^+,\quad 0 \leq x_\alpha \uparrow x\}$

dir [1].

Sonuç

E Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ ideal olsun. $A = \langle x \rangle$ ise ürettiği band,

$B_A = B_x = \{y \in E : |y| \wedge n|x| \uparrow |y|\}$

şeklindedir [1].

2.1.21. Tanım

E Riesz uzayı ve $0 < e \in E$ olsun.

i-) $I_e = E$ ise e'ye güçlü birim (strong unit) denir [1],
ii-) $B_e = E$ ise e'ye zayıf birim (weak unit) denir [1].

Örnek

K kompakt Hausdorff uzayı olmak üzere C(K)'nın güçlü birimi:

$1: K \longrightarrow R$
$x \longrightarrow 1(x) = 1$

sabit fonksiyonudur. Dolayısıyla $I_1 = C(K)$ dır [1].

2.1.22. Tanım

E Riesz uzayı olsun. G, E'nin Riesz altuzayı olmak üzere her $0 < x \in E$ için $0 < y \leq x$ olacak şekilde bir $y \in G$ varsa G kümesine E'de sıra yoğun (order dense) denir [1].

2.1.10. Teorem

E Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ ideal olsun. Aşağıdaki önermeler doğrudur [1].

i-) A, E'de sıra yoğundur ancak ve ancak $A^d = 0$ dır,
ii-) $A \oplus A^d$ ideali E içinde sıra yoğundur,
iii-) A ideali A^{dd} içinde sıra yoğundur.

2.1.23. Tanım

E Riesz uzayı ve $e \in E^+$ olsun. Eğer $p \in E^+$ iken $p \perp e - p$ ise p'ye e'nin bileşeni denir [1].

2.1.11. Teorem

E Riesz uzayı ve $e \in E^+$ olsun. $p \in E^+$ için p, e'nin bileşeni ise $p \leq e$ dir [15].

2.2. Operatörler, Orthomorfizmalar ve Örgü Homomorfizmaları

2.2.1. Tanım

G (gerçel) vektör uzayı, F Riesz uzayı olsun. $p: G \to F$ dönüşümü,

i-) $\forall x, y \in G \; için \; p\ x + y\ \leq p\ x\ + p(y)$
ii-) $\forall x \in G, \forall \lambda \geq 0 \; için \; p\ \lambda x\ = \lambda p(x)$

koşullarını sağlıyorsa p'ye altlineer dönüşüm denir [1].

2.2.2. Tanım

E ve F gerçel vektör uzayları olmak üzere $T: E \to F$ dönüşüm olsun. Her $x, y \in E$ ve $\alpha, \beta \in R$ için

$T\ \alpha x + \beta y\ = \alpha T\ x\ + \beta T(y)$

koşulunu sağlıyorsa T'ye lineer dönüşüm adı verilir. Lineer dönüşüm yerine operatör kelimesi ve $T(x)$ yerine de Tx gösterimi kullanılabilir [1].

2.2.3. Tanım

E ve F iki sıralı vektör uzayı ve $T: E \to F$ operatör olsun. Her $0 \leq x \in E$ için $0 \leq T(x)$ oluyorsa T'ye pozitif operatör denir ve $T \geq 0\ \ veya\ \ 0 \leq T$ ile gösterilir [1].

2.2.4. Tanım

E ve F Riesz uzayları olmak üzere E'den F'ye tanımlanan bütün operatörlerin kümesi L(E,F) ile gösterilir [1].

Sonuç

Her $S, T \in L(E, F)$ için "$T \geq S \Leftrightarrow \forall\, x \in E^{+}, T\ x\ \geq S\ x$ " şeklinde tanımlanan sıralama bağıntısı ile L(E,F) sıralı vektör uzayıdır [1].

2.2.5. Tanım

E ve F sıralı vektör uzayları ve $T: E \to F$ bir operatör olsun. Her $x, y \in E$ için $x \leq y$ iken $T(x) \leq T(y)$ oluyorsa T'ye sıra koruyan operatör denir [1].

2.2.1. Teorem

E ve F iki sıralı vektör uzayı ve $T: E \to F$ operatör olsun. T pozitiftir ancak ve ancak T sıra koruyandır [1].

2.2.6. Tanım

E, F Riesz uzayları ve $T: E \longrightarrow F$ operatör olsun. $T, -T \in L(E, F)$ olmak üzere $T \vee\ -T$

varsa bu supremuma T operatörünün modülü denir ve T ile gösterilir [1].

2.2.2. Teorem

E ve F Riesz uzayları, $T: E \longrightarrow F$ operatör ve her $x \in E^+$ için $sup\ \ Ty\ :\ \ y\ \leq x, y \in E$, F'de mevcut olsun. O halde T'nin modülü vardır ve her $x \in E^+$ için

$$T\ \ x\ \ = sup\ \ Ty\ :\ \ y\ \leq x, y \in E$$

şeklindedir [1].

Sonuç

E,F Riesz uzayı ve $T: E \longrightarrow F$ operatör olmak üzere T mevcut ise her $x \in E^+$ için

$$Tx\ \leq\ T\ (x)$$

eşitsizliği sağlanır [1].

2.2.7. Tanım

E Riesz uzayı ve $x, y \in E$ için $x \leq y$ olsun.

$$x, y\ \coloneqq\ z \in E : x \leq z \leq y$$

kümesine sıra aralık, herhangi bir $A \subseteq E$ için $A \subseteq\ a, b$ olacak şekilde $a, b \in E$ varsa A'ya sıra sınırlı küme denir [1].

Sonuç

E Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ olsun. A'nın sıra sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $A \subseteq\ -x, x$ olacak şekilde en az bir $x \in E^+$ elemanının olmasıdır [1].

2.2.8. Tanım

E ve F Riesz uzayları olmak üzere $T: E \to F$ operatör olsun. Eğer T operatörü, E'nin her sıra sınırlı altkümesini F'de sıra sınırlı altkümeye dönüştürüyorsa, sıra sınırlı operatör olarak adlandırılır.

E'den F'ye tanımlı bütün sıra sınırlı operatörlerin kümesi $L_b\ E, F$ ile gösterilir [1].

Sonuç

E ve F Riesz uzayları olsun. Her $T_1, T_2 \in L_b(E, F)$ için
"$T_1 \leq T_2 \Leftrightarrow \forall x \in E^+, T_1(x) \leq T_2(x)$" sıralama bağıntısıyla $L_b\ E, F$ bir sıralı vektör uzayıdır. Eğer F Dedekind tam Riesz uzayı ise $L_b\ E, F$ de Dedekind tam Riesz uzayıdır [1].

2.2.3. Teorem

Her pozitif operatör sıra sınırlıdır [1].

2.2.9. Tanım

E ve F Riesz uzayları ve $T: E \longrightarrow F$ operatör olsun. Her $x, y \in E$ için $x \perp y$ iken $Tx \perp Ty$ oluyorsa, T'ye dikliği koruyan operatör denir [1].

2.2.4. Teorem

E ve F Archimedian Riesz uzayları ve $T: E \longrightarrow F$ sıra sınırlı ve dikliği koruyan operatör olsun. O halde T mevcuttur ve her $x \in E$ için

$$T\ \ x\ \ = T(\ x\ ) = T(x)$$

eşitliği sağlanır [1].

2.2.10. Tanım

E Riesz uzayı ve $T: E \to E$ operatör olsun. Her $B \subseteq E$ bandı için $T(B) \subseteq B$ ise T'ye band koruyan operatör denir [1].

2.2.5. Teorem

E Archimedian Riesz uzayı ve $T: E \to E$ operatör olsun. $x \in E$ için B_x , x'in ürettiği band olmak üzere aşağıdakiler birbirine denktir [1].

i-) T band koruyandır.
ii-) $\forall x, y \in E\ , x \perp y \Rightarrow Tx \perp y$
iii-) $\forall x \in E\ ,\ Tx \in B_x$

2.2.11. Tanım

E Riesz uzayı olmak üzere $T: E \longrightarrow E$ operatörü, sıra sınırlı ve band koruyan ise T'ye orthomorfizma denir ve E üzerindeki orthomorfizmaların kümesi Orth(E) ile gösterilir [1].

Sonuç

E Riesz uzayı ve $T: E \longrightarrow E$ sıra sınırlı operatör ise T'nin orthomorfizma olması için gerek ve yeter koşul her $x, y \in E$ için $x \perp y$ iken $Tx \perp y$ olmasıdır [1].

$$Orth\ E = T \mid T : E \longrightarrow E\ sıra\ sınırlı\ ve\ band\ koruyan\ operatör$$
$$= T \mid T \in L_b\ E \quad \ni x, y \in E,\ x \perp y \Rightarrow Tx \perp y$$

Orth(E), L_b(E)'nin bir altvektör uzayıdır ve L_b(E)'den indirgenen noktasal sıralama ile Orth(E) bir sıralı vektör uzayıdır [1].

Sonuç

Her orthomorfizma dikliği koruyandır [1].

2.2.6. Teorem

E Dedekind tam Riesz uzayı ise Orth(E), L_b(E) içinde birim operatörün ürettiği banddır[1].

2.2.12. Tanım

E Archimedian Riesz uzayı olmak üzere,

$$Z\ E\ =\ T \in L_b\ E\ :\ \exists \lambda \in R^+, \qquad T\ \leq \lambda I$$

kümesine E'nin merkezi denir [1].

Sonuç

E Dedekind tam Riesz uzayı ise Z(E), L_b(E) içinde birimin ürettiği idealdir [1].

Sonuç

E Riesz uzayı olmak üzere $Z(E) \subseteq Orth(E)$ dir [1].

2.2.7. Teorem

E Riesz uzayı ve $\emptyset \neq A \subseteq E$ olsun. $S,T \in Orth(E)$ ve her $x \in A$ için $S\ x\ = T(x)$ ise bu orthomorfizmalar A'nın ürettiği band üzerinde de eşittirler [1].

Sonuç

E Archimedian Riesz uzayı, $D \subseteq E$, $D^{dd} = E$ ve $T_1, T_2 \in Orth(E)$ olsun. Eğer her $x \in D$ için $T_1\ x\ = T_2(x)$ oluyorsa $T_1 = T_2$ dir. Ayrıca e, E'nin zayıf birimi olmak üzere $T_1\ e\ = T_2(e)$ ise $T_1 = T_2$ dir [25].

2.2.13. Tanım

E Riesz uzayında bir B bandı için $E = B \oplus B^d$ ise B'ye projeksiyon band denir. Bir Riesz uzayında her band, projeksiyon band ise bu uzaya projeksiyon özelliğine sahiptir denir [1].

Sonuç

Dedekind tam Riesz uzayları projeksiyon özelliğine sahiptir [1].

2.2.8. Teorem

E Riesz uzayı ve B, E'de bir ideal olmak üzere aşağıdakiler birbirine denktir [1].

i-) B projeksiyon banddır, yani $E = B \oplus B^d$ dir,
ii-) Her $x \in E^+$ için $B^+ \cap \ 0, x$ kümesinin supremumu E içinde mevcut olup B'dedir.

2.2.14. Tanım

E Riesz uzayı olmak üzere $P: E \longrightarrow E$ operatörü $P^2 = P$ özelliğini sağlıyorsa P'ye projeksiyon denir. Ayrıca P pozitif ise P'ye pozitif projeksiyon denir.

$B \subseteq E$ projeksiyon band olsun. Bu durumda her $x \in E$ için $x_1 \in B$ ve $x_2 \in B^d$ olmak üzere $x = x_1 + x_2$ şeklinde olup,

$$P_B : E \longrightarrow E$$
$$x \longrightarrow P_B\ x\ = x_1$$

biçiminde tanımlanan P_B operatörüne band projeksiyon denir. P_B , pozitif projeksiyondur. Benzer şekilde

$$P_{B^d} : E \longrightarrow E$$
$$x \longrightarrow P_{B^d}\ x\ = x_2$$

biçiminde tanımlanan P_{B^d} projeksiyonu da pozitiftir [1].

Sonuç

Riesz uzaylarında her projeksiyon banda karşılık bir band projeksiyon vardır [1].

2.2.9. Teorem

E Riesz uzayı ve $T: E \longrightarrow E$ operatör olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir [1].

i-) T band projeksiyondur,
ii-) $I : E \longrightarrow E$ birim operatör olmak üzere T projeksiyon ve $0 \leq T \leq I$ dır,
iii-) Her $x, y \in E$ için $Tx \perp y - Ty$ dir.

2.2.15. Tanım

E Riesz uzayı, $x_\alpha \subseteq E$ bir ağ ve $x \in E$ olsun. $x_\alpha - x \leq y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $y_\alpha \subseteq E^+$ ağı varsa, x_α ağı x elemanına sıra (order) yakınsar denir ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ biçiminde gösterilir [1].

2.2.16. Tanım

E ve F Riesz uzayları ve $T: E \longrightarrow F$ bir operatör olsun. Her $x_\alpha \subseteq E$ için E'de $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ iken F'de $Tx_\alpha \xrightarrow{o} 0$ oluyorsa T operatörüne sıra sürekli operatör denir [1].

Her $x_n \subseteq E$ için $n \in N$ olmak üzere E'de $x_n \xrightarrow{o} 0$ iken F'de $Tx_n \xrightarrow{o} 0$ oluyorsa T operatörüne σ-sıra sürekli operatör denir [1].

Sonuç

E ve F Riesz uzayları ve $T: E \longrightarrow F$ pozitif operatör olsun. T'nin sıra sürekli olması için gerek ve yeter koşul her $x_\alpha \subseteq E$ için $x_\alpha \downarrow 0$ iken $Tx_\alpha \downarrow 0$ (veya $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ iken $Tx_\alpha \uparrow Tx$) olmasıdır [1].

2.2.10. Teorem

E Riesz uzayı, F Dedekind tam Riesz uzayı ve $T: E \longrightarrow F$ sıra sınırlı operatör olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir [1].

i-) T sıra süreklidir,

ii-) Her $x_\alpha \subseteq E$ için $x_\alpha \downarrow 0$ iken $Tx_\alpha \xrightarrow{o} 0$ dır,

iii-) Her $x_\alpha \subseteq E$ için $x_\alpha \downarrow 0$ iken $inf\ Tx_\alpha = 0$ dır,

iv-) T^+ ve T^- operatörleri sıra süreklidir,

v-) T operatörü sıra süreklidir.

2.2.17. Tanım

E Archimedian Riesz uzayı, $x_n \subseteq E$ ve $x \in E$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için en az bir $n_0 \in N$ ve her $n \geq n_0$ için $|x_n - x| \leq \varepsilon u$ olacak şekilde bir $u \in E^+$ varsa x_n dizisi, x elemanına u-düzgün (uniformly) yakınsar denir ve $x_n \overset{u-d}{} x$ şeklinde gösterilir [1].

2.2.18. Tanım

E Archimedian Riesz uzayı, $x_n \subseteq E \; ve \; x \in E$ olmak üzere en az bir $u \in E^+$ için $x_n \overset{u-d}{} x$ oluyorsa x_n dizisi x elemanına göreceli düzgün yakınsar (relatively uniformly convergent) denir ve $x_n \longrightarrow x \; (r.u)$ şeklinde gösterilir [1].

E Archimedian Riesz uzayı olmak üzere göreceli düzgün limitler tektir.

2.2.19. Tanım

E Archimedian Riesz uzayı ve $x_n \subseteq E$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için en az bir $n_0 = n_0 \; \varepsilon \in N$ ve her $m, n \geq n_0$ için $|x_m - x_n| \leq \varepsilon u$ olacak şekilde bir $u \in E^+$ mevcut ise x_n dizisine u-düzgün (uniformly) Cauchy dizisi denir [1].

2.2.20. Tanım

E Archimedian Riesz uzayı ve $D \subseteq E$ olsun. Her $x_n \subseteq D$ için $x_n \longrightarrow x \ (r.u)$ iken $x \in D$ oluyorsa D'ye göreceli düzgün kapalı (relatively uniformly closed) küme denir [1].

2.2.21. Tanım

E Archimedian Riesz uzayı olsun. E'de ki her u-düzgün Cauchy dizisi göreceli düzgün yakınsak ise E'ye göreceli düzgün tam uzay denir [1].

2.2.11. Teorem

E ve F Archimedian Riesz uzayları olsun. $T: E \to F$ pozitif operatör ise T göreceli düzgün süreklidir [25].

İspat

$x_n \subseteq E, x \in E, u \in E^+ \ ve \ x_n \overset{u-d}{} x$ olsun. $x_n \overset{u-d}{} x$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ iken $x_n - x \leq \varepsilon u$ olacak şekilde bir $n_0 \in N$ mevcuttur.

$$\begin{aligned} T\ x_n - T\ x = T\ x_n - x &\leq T\ x_n - x \\ &\leq T\ \varepsilon u \\ &= \varepsilon T(u) \end{aligned}$$

olduğundan $T(x_n) \overset{T\ u\ -d}{} T(x)$ olacak şekilde $T(u) \in F^+$ mevcuttur. Dolayısıyla T göreceli düzgün süreklidir.

2.2.22. Tanım

E ve F Riesz uzayları ve $T: E \longrightarrow F$ bir operatör olmak üzere her $x, y \in E$ için

$T\ x \vee y = T\ x \vee T\ y$

oluyorsa T'ye örgü (lattice) veya Riesz homomorfizması denir [1].

Sonuç

Her örgü homomorfizması pozitif operatördür [1].

Sonuç

E ve F Riesz uzayları ve $T: E \longrightarrow F$ örgü homorfizması olsun. $T(E)$, F'nin Riesz altuzayıdır [1].

2.2.12. Teorem

E ve F Riesz uzayları olmak üzere $T: E \longrightarrow F$ bir operatör olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir [1].

i-) T operatörü örgü homomorfizmasıdır,
ii-) Her $x \in E$ için $T\ x^{+} = Tx\ ^{+}$ dır,
iii-) Her $x, y \in E$ için $T\ x \wedge y = Tx \wedge Ty$ dir,
iv-) Her $x, y \in E$ için, E'de $x \wedge y = 0$ ise F'de $Tx \wedge Ty = 0$ dır,
v-) Her $x \in E$ için $T\ x = Tx$ dir.

2.2.13. Teorem

E ve F Archimedian Riesz uzayları ve $T: E \to F$ sıra sınırlı ve dikliği koruyan operatör olsun. T^{+} ve T^{-} Riesz homomorfizmaları ve her $x \in E^{+}$ için

$T^{+}x = Tx\ ^{+}$ ve $T^{-}x = Tx\ ^{-}$

olmak üzere $T = T^{+} - T^{-}$ şeklindedir [18].

Sonuç

Her sıra (band) projeksiyon örgü homomorfizmasıdır [1].

Sonuç

E ve F Riesz uzayları ve $T: E \longrightarrow F$ operatör olsun. Bu durumda T örgü homomorfizması ise $Ker\ T = x \in E : Tx = 0$ kümesi bir idealdir [1].

2.2.23. Tanım

E ve F Riesz uzayları ve $T: E \longrightarrow F$ operatörü örgü homomorfizması olsun. T, bire-bir ve örtense T'ye örgü izomorfizmi denir. Bu durumda E ve F, Riesz izomorfiktir [1].

2.2.14. Teorem

E ve F Riesz uzayları ve $T: E \longrightarrow F$ operatörü bire-bir ve örten olmak üzere T'nin örgü izomorfizmi olması için gerek ve yeter koşul T ve T^{-1} operatörlerinin pozitif olmasıdır [1].

2.2.24. Tanım

U,V ve W aynı F (R veya C) cismi üzerinde üç vektör uzayı olsun. $\varphi : U \times V \longrightarrow W$ dönüşümü her $x, x_1, x_2 \in U$, her $y, y_1, y_2 \in V$ ve $\alpha \in F$ için

i-) $\varphi\ x_1 + x_2, y = \varphi\ x_1, y + \varphi\ x_2, y$
ii-) $\varphi\ x, y_1 + y_2 = \varphi\ x, y_1 + \varphi\ x, y_2$
iii-) $\varphi\ \alpha x, y = \alpha\varphi\ x, y$
iv-) $\varphi\ x, \alpha y = \alpha\varphi\ x, y$

koşullarını sağlıyorsa bilineer dönüşüm olarak adlandırılır. Eğer $U = V$ yani, $\varphi : V \times V \longrightarrow W$ iken her $x, y \in V$ için

$\varphi\ x, y = \varphi\ y, x$

oluyorsa φ, simetrik bilineer dönüşüm olarak adlandırılır. Şayet $W = R$ veya $W = C$ ise φ'ye bilineer form veya bilineer fonksiyonel denir [2].

2.3. Cebir, f-Cebirleri ve Banach Cebirleri

2.3.1. Tanım

A, R cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Her x,y,z∈A ve her $\beta \in$R için $\cdot : AxA \to A$ çarpma işlemi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa A'ya R üzerinde bir cebir denir [2].

C1) $\beta\ x \cdot y\ = \beta x\ \cdot y = x \cdot \beta y$
C2) $x \cdot\ y + z\ = x \cdot y + x \cdot z$
C3) $x \cdot\ y \cdot z\ =\ x \cdot y\ \cdot z$

Eğer her $x, y \in A$ için $x \cdot y = y \cdot x$ ise A'ya değişmeli cebir denir.

Eğer her $x \in A$ için $x \cdot e = e \cdot x = x$ olacak şekilde $e \in A$ varsa A'ya birimli cebir denir.

Örnek

X topolojik uzay olmak üzere X'te tanımlı, reel değerli, sürekli fonksiyonların kümesi olan C(X); her $f, g \in$ C(X) , her $\lambda \in$ R ve her $x \in$ X için

$$f \oplus g\ \ x\ = f\ x\ + g(x)\ \text{ ve }\ \ \lambda \odot f\ \ x\ = \lambda f(x)$$

işlemleri ile vektör uzayı,

$$f \cdot g\ \ x\ = f\ x\ g(x)$$

işlemi ile birlikte bir cebirdir [2].

2.3.2. Tanım

E bir cebir ve $\emptyset \neq A \subseteq E$ olsun. A altvektör uzayı olmak üzere her $x, y \in A$ için $x \cdot y \in A$ oluyorsa A'ya altcebir denir [2].

2.3.3. Tanım

E bir cebir ve , E'de bir norm olsun. Her $x, y \in E$ için

$$x \cdot y \leq x \quad y$$

özelliğini sağlıyor ve birim elemanı olması durumunda $e = 1$ oluyorsa E'ye normlu cebir denir. Ayrıca E, bu norma göre tam ise E'ye Banach cebiri denir [1].

Örnek

$X = a, b$ seçersek $C[a, b]$ cebiri, her $f \in C[a, b]$ için $f = sup\ f(x) : x \in a, b$ normu ile Banach cebiridir.

2.3.4. Tanım

E Riesz uzayı ve , E'de bir norm olsun. Her $x, y \in E$ için $x \leq y$ iken $x \leq y$ oluyorsa bu norma örgü (lattice) normu denir. Eğer E, bu norma göre tam ise E'ye Banach örgüsü (lattice) denir [1].

2.3.1. Teorem

E Banach örgüsü ve T, E'de pozitif operatör ise T norm sınırlıdır (süreklidir) [1].

2.3.2. Teorem

E Riesz uzayı olsun. E'yi Banach örgüsü yapan bütün normlar denktir [1].

2.3.3. Teorem

E Banach örgüsü olsun. Bu durumda Z(E)=Orth(E) dir [1].

2.3.5. Tanım

E Banach örgüsü olsun. Eğer her $x, y \in E^+$ için $x \wedge y = 0$ iken

$$x \vee y = max \quad x \ , \ y$$

sağlanıyorsa E'ye AM-uzayı denir [1].

2.3.4. Teorem

E Banach örgüsü ve $x \in E$ olsun. x'in ürettiği ideal olan I_x , E'de

$$y \ _\infty = inf \ \lambda > 0 : \ y \ \leq \lambda \ x$$

nornu ile bir AM-uzayıdır [1].

2.3.5. Teorem (Kakutani-Bohnenblust ve M. Krein-S. Krein)

E birimli Banach örgüsü ve $A \subseteq E$ olsun.

A, AM-uzayıdır $\Leftrightarrow$ A$\cong$C(K) örgü izometrisi olacak şekilde K Hausdorff topolojik uzayı vardır [1].

2.3.6. Tanım

A gerçel cebir ve aynı zamanda Riesz uzayı iken her $a, b \in A^+$ için $a.b \in A^+$ oluyorsa A'ya Riesz cebiri denir [1].

Örnek

X kompakt Hausdorff uzayı olmak üzere, X üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların uzayı olan C(X), noktasal sıralama ve çarpma ile Riesz cebiridir [1].

2.3.7. Tanım

A Riesz cebiri olsun. Her $a, b \in A$ ve her $c \in A^+$ için $a \wedge b = 0$ iken $ca \wedge b = ac \wedge b = 0$ oluyorsa A'ya f-cebiri denir [1].

Örnek

i-) X boştan farklı bir küme olmak üzere X üzerinde tanımlı reel değerli bütün fonksiyonların kümesi R^X , noktasal çarpma ile birimli f-cebiridir.

ii-) A=C[0,1] olmak üzere her $f, g \in A$ için $f \cdot g \quad x = f\ 0\ g(0)$ şeklinde tanımlı çarpma işlemi ve noktasal sıralamayla A, f-cebiri değildir.

2.3.8. Tanım

A Riesz cebiri olmak üzere $\{a \in A : a^n = 0\,, \exists n \in N\}$ kümesine A'nın nilpotent elemanlarının kümesi denir ve N(A) ile gösterilir.

Eğer N(A)={0} ise A'ya semiprime (yarıasal) denir [4].

2.3.6. Teorem

A bir f-cebiri olsun. A'nın semiprime olması için gerek ve yeter koşul $a \in A$ için $a^2 = 0$ iken $a = 0$ olmasıdır [4].

2.3.7. Teorem

A Archimedian f-cebiri olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır [8] , [25].

i-) $\forall a,b \in A, \forall c \in A^+,\ c\ a \wedge b\ = ca \wedge cb\ ,\ \ a \wedge b\ c = ac \wedge bc$ ve
$c\ a \vee b\ = ca \vee cb\ ,\ \ a \vee b\ c = ac \vee bc$

ii-) $\forall a,b \in A,\ \ ab\ =\ a\ \ b$

iii-) $\forall a,b \in A,\ a \perp b\ \Rightarrow\ \forall c \in A,\ ca \perp b$

iv-) $\forall a,b \in A,\ a \perp b\ \Rightarrow ab = 0$

v-) $\forall a \in A,\ a^2 =\ a^+\ ^2 +\ a^-\ ^2 \geq 0$

vi-) $\forall a \in A,\ aa^+ =\ a^+\ ^2 \geq 0$

vii-) $a,b \in A^+,\ \ a \vee b\ ^2 = a^2 \vee b^2\ \ ve\ \ \ a \wedge b\ ^2 = a^2 \wedge b^2$

viii-) $\forall a,b \in A,\ ab =\ a \vee b\ \ a \wedge b$

ix-) Pozitif elemanla çarpma sıra süreklidir.

x-) A semiprime ise $a \perp b \Leftrightarrow ab = 0$

xi-) A semiprime ise $a^2 \leq b^2 \Leftrightarrow\ a\ \leq\ b$

xii-) A'nın birim elemanı varsa A, semiprime olur.

xiii-) A'nın birim elemanı varsa zayıf birimdir.

xiv-) Eğer A'nın birim elemanı e var ve A göreceli düzgün tam ise her $a \geq e$ için a'nın tersi vardır ve pozitiftir.

2.3.8. Teorem

Her Archimedian f-cebiri değişmelidir [1].

2.3.9. Teorem

E Archimedian Riesz uzayı olsun. Orth(E), bilinen vektör uzayı operasyonları ve çarpma olarak bileşke işlemi ile bir Archimedian f-cebiridir. E'de tanımlı I birim dönüşümü birim elemandır. Ayrıca her $x \in E^+$ ve her $T_1, T_2 \in Orth\ E$ için

$$T_1 \vee T_2\ (x) = T_1(x) \vee T_2(x)\ \text{ ve }\ \ T_1 \wedge T_2\ (x) = T_1(x) \wedge T_2(x)$$

eşitlikleri sağlanır [25].

2.3.10. Teorem

A Archimedian f-cebiri olsun. Her $a \in A$ için

$$\rho: A \longrightarrow Orth\ A$$
$$a \longrightarrow \rho\ a\ = T_a : A \longrightarrow A$$
$$b \longrightarrow T_a\ b\ = ab$$

şeklinde tanımladığımız dönüşüm yardımıyla A, hem Riesz altuzay hem de cebir ideali olarak Orth(A)'nın içine gömülebilir.

ρ bire-birdir ancak ve ancak A semiprimedır.

ρ örtendir ancak ve ancak A'nın birim elemanı vardır [1].

2.3.9. Tanım

R bir cebir ve (M,+) değişmeli grup olsun. $R \times M \to M$ 'ye tanımlı dış çarpım aşağıda belirtilen özellikleri sağlıyorsa M'ye R üzerinde bir modül veya kısaca R-Modül denir [8].

i-) $r_1, r_2 \in R\ ve\ m \in M\ için\ \ r_1 + r_2\ m = r_1 m + r_2 m$
ii-) $r_1, r_2 \in R\ ve\ m \in M\ için\ \ r_1 . r_2\ m = r_1 . (r_2 m)$
iii-) $r \in R\ ve\ m_1, m_2 \in M\ için\ r\ m_1 + m_2\ = r m_1 + r m_2$
iv-) $m \in M\ için\ 1_R m = m$

2.3.11. Teorem (Stone-Weierstrass)

X kompakt bir küme ve A, C(X)'in kapalı bir altcebiri olsun.

i-) $1 \in A$,
ii-) $x, y \in X$ ve $x \neq y$ iken $f(x) \neq f(y)$ olacak şekilde bir $f \in A$ vardır,

koşulları sağlanıyorsa A≅C(X) dir [8].

2.3.10. Tanım

X lokal kompakt Hausdorff uzayı olmak üzere $f: X \longrightarrow R$ sürekli fonksiyon olsun ve $supp\ f := x \in X : f(x) \neq 0$ şeklinde tanımlansın. $supp\ f$ kompakt özelliğini taşıyan tüm f fonksiyonlarının kümesini $K(X)$ ile gösterelim. $K(X) \subseteq C_b(X)$ olup $C_b(X)$'teki norma göre $C_0\ X := K(X)$ dır.

Eğer X kümesi kompakt ise $C_0\ X = C(X)$ olur [8].

2.3.12. Teorem

X kompakt bir küme olmamak üzere $f \in C(X)$ olsun. Bu durumda aşağıda belirtilen ifadeler birbirine denktir [8].

i-) $f \in C_0(X)$,

ii-) Her $\varepsilon > 0$ için $x \in X : f(x) \geq \varepsilon$ kümesi kompakttır,

iii-) Her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X \backslash K$ için $f(x) \leq \varepsilon$ koşulunu sağlayan kompakt bir $K \subseteq X$ kümesi mevcuttur.

3. C(X)'TE ORTALAMA OPERATÖRLER

Bu bölümde X kompakt Hausdorff uzayı olmak üzere, noktasal sıralama ve çarpma ile Riesz cebiri olan C(X) üzerinde tanımlı operatörlerin ortalama operatör olma kriterlerini vereceğiz. Ayrıca bu bölümde B=C(X) alınacaktır.

3.1. Operatörün A-Lineer Olma Koşulu

3.1.1. Tanım

X, τ topolojik uzay ve Y boş olmayan bir küme olmak üzere $p: X \longrightarrow Y$ örten bir fonksiyon olsun. Y kümesi üzerindeki

$$\tau_p = \ U \subseteq Y : \ p^{-1}(U) \in \tau$$

topolojisine p fonksiyonuna karşılık gelen bölüm topolojisi ve Y, τ_p uzayına da bölüm uzayı denir [13].

3.1.2. Tanım

X, τ topolojik uzay olmak üzere "$\sim$", X üzerinde bir denklik bağıntısı ve bu bağıntıya göre denklik sınıflarının kümesi

$$Y = X|_{\sim} = \ \ x \ : x \in X$$

olsun. Her $x \in X$ için

$$p: X \longrightarrow Y$$
$$x \longrightarrow p\ x \ = \ x$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona izdüşüm fonksiyonu denir [13].

Sonuç

X, τ topolojik uzay olmak üzere izdüşüm fonksiyonu örtendir ve $Y = X|_{\sim}$ üzerinde,
$\tau_p = \{U \subseteq Y \mid p^{-1}(U) \in \tau\}$

bölüm topolojisi oluşturulabilir [13].

Sonuç

Bölüm topolojisinin tanımı gereği p izdüşüm fonksiyonu süreklidir [13].

3.1.1. Lemma

X kompakt Hausdorff uzayı, B=C(X) ve A, B'nin sabit fonksiyonlarını içeren kapalı bir altcebiri olsun. X üzerinde A yardımıyla,

$\forall x, y \in X\ ,\ x \sim y \Leftrightarrow \forall a \in A\ ,\ a\ x\ = a(y)$

şeklide tanımlanan "$\sim$" , bir denklik bağıntısıdır.
$x \in X$ 'in denklik sınıfları, $x\ = \{y \in X: \forall a \in A, a\ x\ = a\ y\ \}$ şeklindedir.

İspat

i-) $x \in X$ keyfi olsun. Her $a \in A$ için $a\ x\ = a(x)$ olduğundan $x \sim x$ yani "$\sim$" , yansıyandır.

ii-) $x, y \in X$ için $x \sim y$ olsun.

$$x \sim y \Rightarrow\ \forall a \in A\ , a\ x\ = a(y)$$
$$\Rightarrow\ \forall a \in A\ , a\ y\ = a\ x$$
$$\Rightarrow\ y \sim x$$

elde edilir. Dolayısıyla "$\sim$" , simetriktir.

iii-) $x, y, z \in X$ için $x \sim y$ ve $y \sim z$ olsun.

$$x \sim y \text{ ve } y \sim z \Rightarrow \forall a \in A, a\ x = a\ y \text{ ve } a\ y = a(z)$$
$$\Rightarrow \forall a \in A, a\ x = a\ y = a\ z$$
$$\Rightarrow \forall a \in A, a\ x = a\ z$$
$$\Rightarrow x \sim z$$

elde edilir. O halde "$\sim$" , geçişkendir.

Dolayısıyla (i),(ii),(iii) gereği "$\sim$" , denklik bağıntısıdır.

3.1.2. Lemma

X, τ kompakt Hausdorff uzayı, B=C(X) ve A, B'nin sabit fonksiyonlarını içeren kapalı bir altcebiri olmak üzere X üzerinde "$x \sim y \Leftrightarrow \forall a \in A,\ a\ x = a(y)$" şeklinde tanımlanan "$\sim$" denklik bağıntısı ile X'in bölüm uzayı Y olsun. Bu durunda

1) Y kümesi bölüm topolojisine göre kompakttır,
2) A≅C(Y)'dir [17].

İspat

Her $x \in X$ için

$$p: X \longrightarrow Y$$
$$x \longrightarrow p\ x = x$$

izdüşüm fonksiyonu ve

$$\tau_p = \{U \subseteq Y \mid p^{-1}(U) \in \tau\}$$

bölüm topolojisi olmak üzere,

1) $Y \subseteq \ _{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ olacak şekilde $U_\lambda \in \tau_p \ \lambda \in \Lambda$, Y'nin bir açık örtüsü olsun.

$$Y \subseteq \ _{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \ \Rightarrow \ X = p^{-1}\ Y \ \subseteq p^{-1} \ _{\lambda\epsilon\Lambda} U_\lambda \ = \ _{\lambda\epsilon\Lambda} p^{-1}(U_\lambda)$$
$$\Rightarrow \ X \subseteq \ _{\lambda\epsilon\Lambda} p^{-1}\ U_\lambda$$

dir. Her $\lambda \in \Lambda$ için τ_p'nin tanımı gereği $p^{-1}\ U_\lambda \ \in \tau$ dir. τ_p tanımından ve X kompakt olduğundan X'in $\{p^{-1}\ U_\lambda \ : \lambda \in \Lambda\}$ açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü vardır ki bu sonlu altörtü $p^{-1}\ U_i \ : i = 1,2, \dots, n$ olsun. Ayrıca p örten olduğundan

$$X \subseteq \ _{i=1}^{n} p^{-1}(U_i) \ \Rightarrow \ p(X) \subseteq p \ _{i=1}^{n} p^{-1}(U_i)$$
$$\Rightarrow Y \subseteq \ _{i=1}^{n} p \ p^{-1}(U_i) \ \subseteq \ _{i=1}^{n} U_i$$

elde edilir. Bu da Y'nin kompakt olması demektir.

2) Her $f \in A$ ve her $x \ \in Y$ için

$$T: A \longrightarrow C \ Y$$
$$f \longrightarrow T \ f \ = f: Y \to R, \ f \ x \ = f(x)$$

şeklinde tanımlayalım.

i-)$f \in A$ alalım. $f = f \circ p$ şeklinde yazılabilir ve f sürekli olduğundan her $G \subseteq R$ açık kümesi için $f^{-1}\ G \ = \ f \circ p \ ^{-1}(G) \in \tau$ dır. $f \circ p \ ^{-1}\ G \ = p^{-1}\ f^{-1}(G) \ \in \tau$ ve τ_p tanımından $f^{-1}\ G \ \in \tau_p$ elde edilir. Böylece $f = T(f) \in C(Y)$ olur. Yani T anlamlıdır.

ii-)$f, g \in A \ ve \ f = g$ olsun. O halde her $x \in X$ için $f \ x \ = g \ x$ dir. $T \ f \ x \ = f \ x \ = f \ x \ = g \ x \ = g \ x \ = T(g)(x)$ olduğundan $T \ f \ = T(g)$ elde edilir. Yani T iyi tanımlıdır.

iii-)$f \in A$ keyfi olmak üzere,

$$f \ = \sup \ f \ x \ : x \in X \ = \sup \ f \ x \ : \ x \ \in Y \ = \ f$$

olduğundan T izometridir ve dolayısıyla T bire-bir fonksiyondur.

$T(1) \in T(A)$ ve $T(1)$, C(Y)'nin birimi olduğundan birim $T(A)$'ya aittir. Şimdi $T(A)$'nın Y'nin noktalarını ayırdığını gösterelim. $x , y \in Y$ ve $x \neq y$ olsun.

$$x \neq y \Rightarrow x \sim y \text{ değildir}$$
$$\Rightarrow \exists f \in A,\ f(x) \neq f(y)$$
$$\Rightarrow \exists f \in T\ A\ ,\ f\ x\ \neq f\ y$$

elde edilir. Şimdi Y'nin Hausdorff uzayı olduğunu gösterelim. $x , y \in Y$ ve $x \neq y$ olsun. Yukardan görülür ki $f\ x\ \neq f\ y$ olacak şekilde en az bir $f \in T\ A\ \subseteq C(Y)$ vardır. $f\ x\ = \lambda_x < f\ y\ = \lambda_y$ varsayabiliriz. $\lambda_x < \lambda_y$ olduğundan $\lambda_x < \lambda < \lambda_y$ olacak şekilde bir $\lambda \in R$ sayısı vardır. $U_1 = \ z : f\ z\ < \lambda$ ve $U_2 = \ z : f\ z\ > \lambda$ kümeleri ayrıktır ve f sürekli olduğundan açık kümelerdir. Ayrıca $x \in U_1$ ve $y \in U_2$ olduğunu görmek kolaydır.
Böylece Stone-Weierstrass Teoreminden T(A)=C(Y) yani, T dönüşümü örtendir. O halde A≅C(Y) bulunur.

3.1.3. Tanım

A, B'nin bir altcebiri ve M, A'da bir modül olmak üzere $T: M \to B$ lineer dönüşümü, her $a \in A$ ve her $m \in M$ için

$$T\ am\ = aT(m)$$

özelliğini sağlıyorsa T'ye A-lineer dönüşüm denir [17].

3.1.4. Tanım

A, B'nin bir altcebiri ve M, A'da bir modül olmak üzere $p: M \to B$ altlineer dönüşümü, her $0 \leq a \in A , m \in M$ için

$$p\ am\ = ap(m)$$

koşulunu sağlıyorsa p'ye A-altlineer dönüşüm denir. Bu tanıma ek olarak her $m \in M$ için $p\ -m\ = p(m)$ oluyorsa p'ye simetrik A-altlineer dönüşüm denir [17].

Sonuç

Her $a \in A$ için $\ a\ \geq 0$ olduğundan her $m \in M$ için $p\ am\ =\ a\ p(m)$ dir [17].

İspat

p, A-altlineer dönüşüm olduğundan $0 \leq a \in A\ ve\ m \in M\ için\ p\ am\ = ap(m)$ dir. Her $a \in A\ için\ a = a^{+} - a^{-}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} p\ am\ = p\ \ a^{+} - a^{-}\ m\ = p\ a^{+}m - a^{-}m\ &\leq p\ a^{+}m\ + p\ -a^{-}m \\ &= p\ a^{+}m\ + p\ a^{-}m \\ &= a^{+}p\ m\ + a^{-}p(m) \\ &=\ a\ p(m) \end{aligned}$$

olur. Buradan $p\ am\ \leq\ a\ p\ m\ \ldots(i)$ elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} ap\ m\ = a^{+}p\ m\ - a^{-}p\ m\ &= p\ a^{+}m\ - p(a^{-}m) \\ &= p\ \ a + a^{-}\ m\ - p(a^{-}m) \\ &= p\ am + a^{-}m\ - p(a^{-}m) \\ &\leq p\ am\ + p\ a^{-}m\ - p(a^{-}m) \\ &= p(am) \end{aligned}$$

olmasından $ap\ m\ \leq p\ am\ \ldots(*)$ ifadesine ulaşılır.

$$\begin{aligned} -ap\ m\ = -\ a^{+} - a^{-}\ p\ m\ &= a^{-}p\ m\ - a^{+}p(m) \\ &= p\ a^{-}m\ - p(a^{+}m) \\ &= p\ \ a^{+} - a\ m\ - p(a^{+}m) \\ &= p\ a^{+}m - am\ - p(a^{+}m) \\ &\leq p\ a^{+}m\ + p\ -am\ - p(a^{+}m) \\ &= p\ -am\ = p(am) \end{aligned}$$

ve böylece $-ap\ m\ \leq p\ am\ \ldots(**)$ dır. $*\ ve\ **\ 'dan\ ap(m)\ \leq p(am)$ elde edilir. $a\ p\ m\ \leq\ ap\ m\ \leq p\ am$ olduğundan $a\ p\ m\ \leq p\ am\ \ldots(ii)$ olur.
$i\ ve\ ii\ 'den\ \ p\ am\ =\ a\ p(m)$ olduğu görülür.

3.1.5. Tanım

A, B'nin bir altcebiri ve M, A'da bir modül olsun. $p: M \to B\ \ ve\ \ T: M \to B$ iki dönüşüm olmak üzere her $m \in M$ için $T(m) \leq p(m)$ oluyorsa p dönüşümü, T dönüşümünü domine ediyor denir [17].

3.1.3. Lemma

A, B'nin sabit fonksiyonları içeren kapalı bir altcebiri ve M, A'da bir modül olsun. $T: M \to B$ lineer dönüşümünün A-lineer olması için gerek ve yeter koşul bir $p: M \to B$ (simetrik) A-altlineer dönüşüm tarafından domine edilmesidir [17].

İspat

$\Rightarrow$:
$T: M \to B$ A-lineer olsun. $p: M \to B$ dönüşümünü her $m \in M$ için $p\ m\ =\ T(m)$ şeklinde tanımlayalım.

i-) Her $m, n \in M$ için

$$\begin{aligned} p\ m+n\ &=\ T\ m+n\ &=\ T\ m\ +T(n) \\ &&\leq\ T\ m\ \ +\ T(n) \\ &&= p\ m\ +p(n) \end{aligned}$$

dir. Her $m \in M$ ve her $\lambda \in R\ \ \lambda \geq 0$ için

$$p\ \lambda m\ =\ T\ \lambda m\ =\ \lambda\ T(m)\ =\ \lambda\ p\ m\ =\lambda p(m)$$

olduğundan p dönüşümü altlineerdir.

ii-) Her $m \in M$ ve her $0 \leq a \in A$ için

$$p\ am\ = T(am)\ = aT(m)\ = a\ \ T(m)\ = a\ p\ m\ = ap(m)$$

dir. O halde (i) ve (ii)'den p dönüşümü A-altlineerdir.

Ayrıca her $m \in M$ için $p\ -m\ = T(-m)\ = -T(m)\ = T(m)\ = p(m)$ olduğundan p dönüşümü simetriktir.

Her $m \in M$ için $T\ m\ \leq T\ m\ = p(m)$ olduğundan p dönüşümü, T dönüşümünü domine eder.

$:\Leftarrow$

$T: M \to B$ lineer dönüşüm olsun ve $p: M \to B$ (simetrik) A-altlineer dönüşüm tarafından domine edilsin. Her $m \in M$ için $p(m) = p(m) \vee p(-m)$ şeklinde tanımlayalım.

i-) Her $m, n \in M$ için

$$\begin{aligned} p\ m+n\ = p\ m+n\ \vee p\ -(m+n)\ &= T(m+n) \vee T(-(m+n)) \\ &= T(m+n)\ \vee\ -T(m+n) \\ &= T(m)+T(n)\ \vee\ T\ m\ +T(n) \\ &= T\ m\ +T(n) \\ &\leq T\ m\ \ +\ T(n) \\ &= p\ m\ +p(n) \\ &\leq p\ m\ \vee p\ -m\ +p(n) \vee p(-n) \\ &= p\ m\ +p(n) \end{aligned}$$

dir. Her $m \in M$ ve her $\lambda \in R\ \ \lambda \geq 0$ için

$$\begin{aligned} p\ \lambda m\ = p\ \lambda m\ \vee\ p\ -\lambda m\ = T\ \lambda m\ \vee\ T(-\lambda m)\ &= \lambda T(m)\ \vee\ \lambda T(-m) \\ &= \lambda\ \ T(m)\ \vee\ T(-m) \\ &= \lambda\ \ p\ m\ \vee p(-m) \\ &= \lambda p(m) \end{aligned}$$

olduğundan p dönüşümü altlineerdir.

ii-) Her $0 \leq a \in A$ ve her $m \in M$ için

$$p\ am\ = p\ am\ \vee p\ -am\ = ap\ m\ \vee ap(-m)$$
$$= a\ p\ m\ \vee p(-m)$$
$$= ap\ m$$

O halde (i) ve (ii)'den p dönüşümü A-altlineerdir.

Ayrıca p dönüşümü simetrik ise $p = p$ olur.

Şimdi $a \in A, m \in M$ keyfi ve $x \in X$ sabit olsun.

$$T(am - a\ x\ m)\ \leq p\ \ a - a\ x\ .1\ m\ =\ a - a\ x\ 1\ p(m)$$

ve her $x \in X$ için

$$a - a\ x\ 1\ \ x\ =\ a\ x\ - a\ x\ 1\ x\ =\ a\ x\ - a\ x\ = 0$$

olduğundan $0 \leq\ T\ am - a\ x\ m\ \ (x) \leq 0$ elde edilir. Böylece her $x \in X$ için

$$T\ am\ \ x\ = a\ x\ T\ m\ \ x$$

bulunur. Dolayısıyla her $a \in A$ ve $m \in M$ için

$$T\ am\ = aT(m)$$

elde edilir. Bu da T'nin A-lineer olması demektir.

3.2. Operatörün Ortalama Operatör Olma Koşulları

3.2.1. Tanım

T dönüşümü, B üzerinde sınırlı operatör olmak üzere T'nin görüntü kümesi olan R(T) ve sabit fonksiyonlar tarafından üretilen B'nin altcebirinin kapanışını A_T ile göstereceğiz.

Sonuç

$T: B \to B$ sınırlı operatörünün ortalama operatör olması için gerek ve yeter koşul A_T-lineer olmasıdır [17].

İspat

$\Rightarrow$:
$T: B \to B$ ortalama operatör olduğundan her $a, b \in B$ için $T\ aT\ b\ = T\ a\ T\ b$ dir. $T\ b\ = c \in A_T$ olduğundan $T\ ac\ = T\ a\ c$ olur. Dolayısıyla T, A_T-lineerdir.

$: \Leftarrow$
T, A_T-lineer olsun. O halde; $c \in B, a \in A_T\ için\ T\ ac\ = aT\ c$ olur. $a \in A_T$ ise $a = T\ b$ olacak şekilde $b \in B$ vardır. $T\ c\ T\ b\ = T\ ca\ = aT\ c\ = T\ c\ T(b)$ olduğundan T, ortalama operatördür.

3.2.1. Lemma

X kompakt Hausdorff uzayı, "$x \sim y \Leftrightarrow \forall a \in A\ ,\ a\ x\ = a(y)$" ile tanımlanan "$\sim$", X üzerinde denklik bağıntısı ve $Y = X|_{\sim}$ olsun. Noktasal sıralama ve supremum normu ile Y'deki sınırlı, gerçel değerli fonksiyonların uzayını B(Y) ile gösterelim. O halde B(Y)=C(S) olacak şekilde bir S kompakt Hausdorff uzayı vardır [17].

İspat

$$I : Y \longrightarrow R$$
$$x \longrightarrow I_x = I_x = 1$$

şeklinde tanımladığımız dönüşüm B(Y)' nin birim elemanı ve

$$f \in B\ Y\ , \qquad f = sup\ f\ x = f(x) < \infty : x \in Y$$

şeklinde tanımlanan norm ile B(Y), Banach örgüsü (lattice) olup her $f, g \in B(Y)$ için

$f \wedge g = 0$ iken $f \vee g = max\ f\ ,\ g$

olduğundan B(Y), birimli AM-uzayıdır. Dolayısıyla Teorem 2.3.5'ten B(Y)≅C(S) olacak şekilde bir S kompakt Hausdorff uzayı vardır.

3.2.2. Lemma

Her $f \in B$ ve her $x \in Y$ için

$$\emptyset : B \longrightarrow B\ Y$$
$$f \longrightarrow \emptyset\ f\ ,\ \emptyset\ f\ x = \sup\{ f\ y : y \in x \}$$

şeklinde tanımladığımız dönüşüm A_T-altlineerdir [17].

İspat:

i-) Her $f \in B\ ve\ x \in X$ için

$$\begin{aligned} \emptyset\ -f\ x &= \sup\ -f\ y : y \in x \\ &= \sup\ -f\ y : y \in x \\ &= \sup\ f\ y : y \in x \\ &= \emptyset(f)\ x \end{aligned}$$

olduğundan $\emptyset$ simetriktir.

ii-) Her $f, g \in B \ ve \ x \in X$ için

$$\begin{aligned}\emptyset\ f+g\ \ x\ &= \sup\ \ f+g\ \ y\ \ : y \in\ x\ \ = \sup\ \ f\ y\ +g\ y\ \ : y \in\ x \\ &\leq \sup\{\ f\ y\ \ +\ g\ y\ \ : y \in\ x\ \} \\ &\leq \sup\ \ f\ y\ \ : y \in\ x\ \ + \sup\ \ g\ y\ \ : y \in\ x \\ &= \emptyset\ f\ \ x\ + \emptyset(g)\ x\end{aligned}$$

dir. Her $f \in B, x \in X \ ve \ \lambda \in R \ \ \lambda \geq 0$ için

$$\begin{aligned}\emptyset\ \lambda f\ \ x\ &= \sup\ \ \lambda f\ \ y\ \ : y \in\ x\ \ = \sup\ \ \lambda f\ y\ \ : y \in\ x \\ &= \lambda\ \sup\ \ f\ y\ \ : y \in\ x \\ &= \lambda \emptyset(f)\ x\end{aligned}$$

olduğundan $\emptyset$ dönüşümü altlineerdir.

iii-) Her $f \in B, 0 \leq a \in A_T \ ve \ x \in X$ için

$$\begin{aligned}\emptyset\ a.f\ \ x\ &= \sup\ \ a.f\ \ y\ \ : y \in\ x \\ &= \sup\{\ a\ y\ f\ y\ \ : y \in\ x\ \} \\ &= \sup\{\ a\ y\ \ f\ y\ \ : y \in\ x\ \} \\ &= \ a(y)\ \sup\{\ f\ y\ \ : y \in\ x\ \} \\ &= a(y) \sup\ \ f\ y\ \ : y \in\ x \\ &= a\ x\ \emptyset\ f\ \ x\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla (i), (ii) ve (iii)'den $\emptyset$ dönüşümü A_T-altlineerdir.

3.2.2. Tanım

X topolojik uzay olmak üzere f fonksiyonu X'te gerçel (veya genişletilmiş gerçel) değerli fonksiyon olsun. Eğer $x : f\ x\ < \delta$ kümesi her $\delta \in R$ için açık ise f fonksiyonuna üst yarı-sürekli fonksiyon denir [8].

Sonuç

$f \in B = C(X)$ için f fonksiyonu sürekli ve ayrıca $-\infty, \delta$ açık küme olduğundan dolayı $U = f^{-1}\ -\infty, \delta\ = x \in X : f\ x\ < \delta$ kümesi X'te açıktır. Dolayısıyla f, X'te üst yarı-sürekli fonksiyondur. f fonksiyonu "$\sim$"-denklik sınıfında sabit olduğundan $x \in U$ olması $x\ \in U$ olduğu anlamına gelir ve dolayısıyla U kümesi Y'nin τ_p-açık altkümesidir. O halde f fonksiyonu Y'de üst yarı-sürekli fonksiyondur [23].

Sonuç

Lemma 3.2.2'de tanımladığımız $\emptyset$ dönüşümünü göz önüne alırsak her $f \in B$ için $\emptyset(f)$, Y'de üst yarı-sürekli fonksiyondur [23]. Her bir üst yarı-sürekli fonksiyon, onu domine eden sürekli fonksiyonların noktasal infimumu olduğundan [16] her $x \in X$ için

$$\emptyset\ f\ \ x\ = \inf\ a\ x : \emptyset\ f\ \leq a, a \in A_T\ = \inf\{a\ x :\ f\ \leq a, a \in A_T\}$$

olur.

3.2.1. Teorem

T, B'de sınırlı operatör olsun. T'nin ortalama operatör olması için gerek ve yeter koşul $f\ \leq a,\ a \in A_T$ iken $T\ f\ \leq\ T\ a$ olmasıdır [17].

İspat

$\Rightarrow$:
T ortalama operatör olsun. Her $a, b \in B$ için $T\ a\ T\ b\ = T(aT\ b\ ) \in R(T)$ olduğundan R(T), B'nin altcebiridir. O halde A_T, R(T)+R1'in B'deki kapanışı yani, $A_T = R\ T\ + R1$ dir. $f \in B$, $f\ \leq a\ ve\ a \in A_T$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $f\ \leq (a + \varepsilon 1) \in A_T$ dir. A_T cebir ve $a + \varepsilon 1$ pozitif olduğundan tersi mevcuttur. Dolayısıyla,

$$\pm f \leq a + \varepsilon 1\ \Rightarrow\ u = \frac{\pm f}{a + \varepsilon 1} \leq 1\ \Rightarrow\ \ u\ \leq 1$$

elde edilir.

$$T = \sup\{\ Tu\ :\ u\ \leq 1\}\ \text{ve}\ I_1 = \{\ f \in C\ X : f\ \leq \lambda 1\ \} = C(X)\ [1]$$

olduğundan,

$$\frac{Tu}{T} = \frac{Tu}{T} \leq 1 \Rightarrow \frac{Tu}{T} \leq 1$$
$$\Rightarrow \frac{Tu}{T} \leq 1$$
$$\Rightarrow Tu \leq 1\ T$$
$$\Rightarrow T[(\pm f)\ /\ (a + \varepsilon 1)] \leq 1\|T\|$$
$$\Rightarrow \frac{\pm T(f)}{(a+\varepsilon 1)} \leq 1\ T$$
$$\Rightarrow \pm T\ f\ \leq (a + \varepsilon 1)1\ T$$
$$\Rightarrow T(f) \leq |T\ f\ | \leq (a + \varepsilon 1)\ T$$

olur. Burada $\varepsilon \to 0$ iken limit durumunda $T\ f\ \leq\ T\ a$, $a \in A_T$ elde edilir.

$:\Leftarrow$

$f \in B$, $f\ \leq a$ ve $a \in A_T$ iken $T(f) \leq\ T\ a$ olsun. O halde $x \in X$ keyfi olmak üzere her $y \in x$ için $f\ y = f\ y\ \leq a\ y = a(x)$ dir. Buradan her $x \in X$ için $sup_{y \in x}\{\ f\ y\ : y \in\ x\ \} \leq a(x)$ olmasından dolayı $\emptyset(f)\ x\ \leq a(x)$ elde edilir. Bu da $\emptyset(f) \leq a$ olması demektir.

$\emptyset$'nin simetrik ve A_T-altlineer olduğunu biliyoruz ve hipotezden $T(f) \leq\ T\ a$ dir.

$$T(f) \leq\ T\ a \Rightarrow T(f) \leq inf_{f \leq a}\{\ T\ a\}$$
$$\Rightarrow T\ f\ \leq\ T\ inf_{f \leq a}\ a$$
$$\Rightarrow T\ f\ \leq\ T\ \emptyset(f)$$

dir. O halde her $f \in B$ için $\emptyset$ dönüşümü T dönüşümünü domine eder. Dolayısıyla Lemma 3.1.3 gereği T dönüşümü A_T-lineer olur ve buradan da T ortalama operatördür.

3.2.2. Teorem

$T : B \longrightarrow B$ pozitif, idempotent (T^2=T) ve normu 1 olan bir operatör olsun. Bu durumda T'nin ortalama operatör olması için gerek ve yeter koşul R(T)'nin B'nin altcebiri olmasıdır [17].

İspat

⇒:
T ortalama operatör olduğundan her $a, b \in B$ için $T\ a\ T\ b\ = T(aT\ b\ ) \in R(T)$ olup R(T), B'nin altcebiridir.

:⇐
R(T), B'nin altcebiri olsun. T, idempotent ve sınırlı olduğundan R(T) kapalıdır. Bunun için $x_n\ \subseteq R\ T$ ve $x_n \quad x$ iken $x \in R(T)$ olduğunu göstermeliyiz. $x_n\ \subseteq R\ T$ olsun. Bu durumda $T\ a_n\ = x_n \longrightarrow x$ olacak şekilde $a_n\ \subseteq B$ vardır. T'nin sürekli oluşundan dolayı $T(T\ a_n\ ) \longrightarrow T(x)$ olur. Buradan T operatörü idempotent yani, $T^2 = T$ olmasından $T\ a_n\ = x_n \longrightarrow T(x)$ elde edilir. $x_n \longrightarrow x\ ve\ x_n \longrightarrow T(x)$ için limitin tekliğini kullanırsak $x = T(x) \in R(T)$ ve dolayısıyla R(T) kapalı olur.

i-) $1 \in R(T)$ olsun. O halde A_T'nin tanımından A_T=R(T)'dir. $f \in B$, $f\ \leq a\ ve\ a \in A_T$ olsun. $a \in A_T = R\ T$ ise $T\ b\ = a$ olacak şekilde $b \in B$ vardır. $f \leq\ f\ \leq a = T(b)$ ve T pozitif olduğundan

$$T\ f\ \leq T\ T\ b\ \ = T\ b\ = a$$

olur. $T(f) \leq a$ ve $T\ = 1$ olduğundan $T\ f\ \leq\ T\ a$ elde edilir. O halde Teorem 3.2.1 gereği T ortalama operatördür.

ii-) $1 \notin R(T)$ olsun. O halde $A_T = R\ T\ + R1$ dir. $a, b \in R\ T$ ve $R(T)$ cebir olduğundan $a(b + \lambda 1) \in R(T)$ dir. R(T), A_T'nin cebir idealidir. Yani, her $a \in R(T)$ için $a\ x'\ = 0$ olacak şekilde en az bir $x' \in X$ vardır. Bu durumu olmayana ergi yöntemiyle

gösterelim. En az bir $a \in R\ T$ ve her $x' \in X$ için $a(x') \neq 0$ olsun. O halde a^{-1} vardır. R(T) ideal olduğundan $a.a^{-1} = 1 \in R(T)$ olur ki bu $1 \notin R(T)$ olması ile çelişir.

T pozitif ve $T\ = 1$ olduğundan $0 \leq T(1) \leq 1$ dir. Gerçekten, $0 \leq 1$ ve T pozitif olduğundan $T\ 0\ = 0 \leq T(1)$ olur. C(K)'nın birimi güçlü birim olduğundan $I_e = E$ yani, $x\ = \inf\{\lambda \in R :\ x\ \leq \lambda e\}$ dir. O halde $f \in C\ X$ için

$$f\ = \inf\ \lambda \in R :\ f\ \leq \lambda 1 \quad \text{ve}\ I_1 = C(X)$$

dir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} T\ 1\ \leq \lambda 1 \Rightarrow\ & T\ 1\ \leq inf_\lambda\ \lambda 1\ =\ T\ 1 = 1 \\ \Rightarrow\ & T\ 1\ \leq 1 \\ \Rightarrow\ & 0 \leq T(1) \leq 1 \end{aligned}$$

olur. En az bir $a \in A_T$ için $f \in B$ ve $f\ \leq a$ olsun. O halde en az bir $b \in R\ T\ \ ve\ \lambda \in R$ için $a = b + \lambda 1$ dir.

$$\begin{aligned} f\ \leq a \Rightarrow\ & f\ \leq b + \lambda 1 \\ \Rightarrow\ & T\ f\ \leq T\ \ f\ \ \leq T\ b + \lambda 1\ = T\ b\ + \lambda T\ 1\ \leq b + \lambda 1 = a \\ \Rightarrow\ & T(f) \leq a \end{aligned}$$

olduğundan Teorem 3.2.1 gereği T ortalama operatördür.

4. ARCHIMEDIAN f-CEBİRLERİNDE ORTALAMA OPERATÖRLER VE POZİTİF KONTRAKTİV PROJEKSİYONLAR

Bir önceki bölümde C(X) üzerinde, modül teori kullanarak ortalama operatör olma koşullarını verdik. Bu bölümde ise Archimedian f-cebirleri üzerinde, cebirsel özellikler kullanılarak ortalama operatör olma koşullarını vereceğiz.

4.1. f-Cebirleri İçin Schwarz Eşitsizliği

4.1.1. Lemma

E Riesz uzayı, $a_k \ _{k=1}^{n} \subseteq E$ sonlu bir dizi ve $b \in E^+$ olsun öyle ki;

i-) $a_k - a_{k+1} \leq b\ ,\ k = 1,2,\dots,n-1$

ii-) $a_1 \wedge \dots \wedge a_n \leq b\ ,\ a_1 \vee \dots \vee a_n \geq -b$

ise $a_1 \wedge \dots \wedge a_n \leq b$ dır [11].

İspat

$a_k, a_{k+1} \in a_k \ _{k=1}^{n}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} a_1 \wedge \dots \wedge a_k \wedge a_{k+1} \wedge \dots \wedge a_n &\leq a_k \wedge a_{k+1} \\ &= a_k \wedge -a_{k+1} \\ &= \frac{1}{2}\ a_k - a_{k+1} - a_k + a_{k+1} \\ &\leq \frac{1}{2}\ a_k - a_{k+1} \\ &\leq \frac{1}{2} b \\ &\leq b \end{aligned}$$

elde edilir.

4.1.2. Lemma

E Riesz uzayı olmak üzere $\emptyset \neq A \subseteq E$ ve $\emptyset \neq B \subseteq E$ olsun. infA ve infB mevcut ise inf $A \cup B = infA \wedge infB$, eğer supA ve supB mevcut ise sup $A \cup B = supA \vee supB$ dir [1].

İspat

inf $A \cup B \leq infA$, inf $A \cup B \leq infB \Rightarrow$ inf $A \cup B \leq infA \wedge infB$ ... $(*)$

Her $z \in A \cup B$ için $z \geq infA \wedge infB$ dir. $z \in A \cup B$ ise $z \in A$ veya $z \in B$ dir.

i) $z \in A \Rightarrow infA \leq z$

$\Rightarrow infA \wedge infB \leq infA \leq z$

ii) $z \in B \Rightarrow infB \leq z$

$\Rightarrow infA \wedge infB \leq infB \leq z$

(i) ve (ii)'den $infA \wedge infB \leq \inf_{z \in A \cup B} z$ olur. O halde $infA \wedge infB \leq$ inf $A \cup B$ ... $(**)$ dir. $* ve (**)$'dan $infA \wedge infB =$ inf $A \cup B$ elde edilir.

Benzer şekilde sup $A \cup B = supA \vee supB$ bulunur.

4.1.1. Önerme

E Archimedian Riesz uzayı ve $0 < e \in E$ olsun. e zayıf birimdir ancak ve ancak her $a \in E^+$ için $\inf_{\lambda \in R} a - \lambda e = 0$ dır [11].

İspat:

$\Rightarrow$:

$e > 0$ zayıf birim olsun. O halde $B_e = y \in E : y \wedge n\, e \uparrow y = E$ dir. $a \in E^+$ ve

sabit bir $n \in N$ için $a_k = a - \frac{k}{n}\, e\,,\ k = 0,1,\dots,n^2$ ve $b_n = a - a \wedge ne$ ve $c_n = b_n + \frac{1}{n}\, e$ biçiminde tanımlayalım.

i-) $a_k - a_{k+1} = a - \frac{k}{n}\, e - a + \frac{k+1}{n}\, e = \frac{1}{n} e \le c_n$

ii-) $a_0 \wedge a_1 \wedge \dots \wedge a_{n^2} = a_{n^2} = a - ne \le b_n \le c_n$

$a_0 \vee a_1 \vee \dots \vee a_{n^2} = a_0 = a \ge a \wedge ne \ge a \wedge ne - a = -b_n \ge -c_n$

olur. Lemma 4.1.1'in şartları sağlandığından $a_0 \wedge a_1 \wedge \dots \wedge a_{n^2} \le c_n$ dir. $a \in E^+$ ve B_e'nin tanımından $a \wedge ne \uparrow a$ dır. O halde $b_n = a - a \wedge ne \downarrow 0$ olur. Dolayısıyla $c_n \downarrow 0$ elde edilir. Her $n \in N^+$ için $a_{n^2} \le b_n \le c_n$ olduğundan,

$$\inf_{k=0,1,\dots,n^2} a - \frac{k}{n}\, e \le c_n \Rightarrow \inf_{n \in N^+} \inf_{k=0,1,\dots,n^2} a - \frac{k}{n}\, e \le \inf_{n \in N^+} c_n = 0$$

yani, $\inf_{k=0,1,\dots,n^2} a - \frac{k}{n}\, e = 0$ bulunur. Burada $\frac{k}{n} = \lambda$ dersek $\inf_{\lambda \in R} a - \lambda e = 0$ olur.

$:\Leftarrow$

Her $a \in E^+$ için $\inf_{\lambda \in R} a - \lambda e = 0$ olsun. $a \in e^{d}$ ve $a \ge 0$ alalım. Bu durumda $a \wedge e = 0$ olur. Her $\lambda \in R$ için $0 \le a - \lambda e^{+} \le a - \lambda e$ olduğundan $0 \le \inf_{\lambda \in R} a - \lambda e^{+} \le \inf_{\lambda \in R} a - \lambda e = 0$ elde edilir. O halde $\inf_{\lambda \in R} a - \lambda e^{+} = 0$ dır. Dolayısıyla Lemma 4.1.2'den $\inf_{\lambda \in R} a - \lambda e^{+} \le \inf_{\lambda \in R^+} a - \lambda e^{+} \dots (*)$ bulunur.

Diğer taraftan, her $\lambda \in R^- \cup 0$ için $\lambda \le 0$ olduğundan $0 \le -\lambda$ dır. Buradan hareketle

$$\begin{aligned}
0 \le -\lambda &\Rightarrow -e \le 0 \le -\lambda e \\
&\Rightarrow a - e \le a - \lambda e \\
&\Rightarrow a - 1e \le \inf_{\lambda \in R^- \cup 0} a - \lambda e \\
&\Rightarrow \inf_{\lambda \in R^+} a - \lambda e \le a - e \le \inf_{\lambda \in R^- \cup 0} a - \lambda e \\
&\Rightarrow \inf_{\lambda \in R^+} a - \lambda e \le \inf_{\lambda \in R^- \cup 0} a - \lambda e \wedge \inf_{\lambda \in R^+} a - \lambda e \\
&\Rightarrow \inf_{\lambda \in R^+} a - \lambda e \le \inf_{\lambda \in R^- \cup 0 \cup R^+} a - \lambda e = \inf_{\lambda \in R} a - \lambda e \\
&\Rightarrow \inf_{\lambda \in R^+} a - \lambda e \le \inf_{\lambda \in R} a - \lambda e \\
&\Rightarrow \inf_{\lambda \in R^+} a - \lambda e^{+} \le \inf_{\lambda \in R} a - \lambda e^{+} \dots (**)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $*$ ve $(**)$'dan $\inf_{\lambda\in R^+}\ a-\lambda e\ ^+=\inf_{\lambda\in R}\ a-\lambda e\ ^+$ dır. $\inf_{\lambda\in R}\ a-\lambda e\ ^+=0$ olduğundan $\inf_{\lambda\in R^+}\ a-\lambda e\ ^+=0$ olur. Buradan her $\lambda\in R^+$ için

$$a\wedge\lambda e=0\Rightarrow\ a-\lambda e\ ^+=a-\ a\wedge\lambda e\ =a$$
$$\Rightarrow\ a-\lambda e\ ^+=a$$
$$\Rightarrow\ 0=\inf_{\lambda\in R^+}\ a-\lambda e\ ^+=a$$
$$\Rightarrow\ a=0$$
$$\Rightarrow\ e\ ^d=\ 0$$
$$\Rightarrow\ e\ ^{dd}=B_e=E$$

elde edilir yani, e zayıf birimdir.

4.1.2. Önerme

A Archimedian semiprime f-cebiri ve $a,b,c\in A$ olsun. Eğer her $\lambda\in R$ için $\lambda^2a+2\lambda b+c\geq 0$ ise $b^2\leq ac$ dır [11].

İspat

Verilen hipotezle $a,c\in A^+$ olduğunu gösterelim. Her $\lambda\in R$ için $\lambda^2a+2\lambda b+c\geq 0$ olsun. $\lambda=0$ için $c\geq 0$ olur. $\lambda>0$ için $a+\frac{2}{\lambda}\ b\ +\frac{1}{\lambda^2}c\geq a+\frac{2}{\lambda}b+\frac{1}{\lambda^2}c\geq 0$ olup $b\ ,c\geq 0$ ve A Archimedian olduğundan $\frac{1}{\lambda^2}c\downarrow 0$ ve $\frac{2}{\lambda}\ b\ \downarrow 0$ olacağından $a\geq 0$ elde edilir.

$$\rho: A\longrightarrow Orth\ A$$
$$a\longrightarrow\rho\ a\ =\pi_a: A\longrightarrow A$$
$$b\longrightarrow\pi_a\ b\ =ab$$

şeklinde tanımladığımız ρ dönüşümü, A semiprime olduğundan içine Riesz izomorfizmidir. Bu ρ dönüşümü yardımıyla A'yı Orth(A) içine ve Orth(A)'yı da Dedekind tamlamasının içine gömebiliriz.

$A \overset{1-1}{\longrightarrow} Orth(A) \overset{1-1}{\longrightarrow} Orth(A)$

Dolayısıyla A içinde $b^2 \leq ac$ olduğunu göstermekle Orth(A)'nın Dedekind tamlamasında $b^2 \leq ac$ olduğunu göstermek aynıdır. Bu nedenle A'yı birimli ve göreceli düzgün tam alabiliriz. Şimdi c tersinir olsun. c'nin tersi de pozitiftir. O halde eşitsizliğin her iki yanını da c^{-1} ile çarparsak;

$$\lambda^2 ac^{-1} + 2\lambda bc^{-1} + cc^{-1} \geq 0 \Rightarrow \lambda^2 ac^{-1} + 2\lambda bc^{-1} + e \geq 0$$
$$\Rightarrow \lambda^2 \ ac^{-1} - \ bc^{-1}\ ^2 \ + \ \lambda bc^{-1} + e\ ^2 \geq 0$$
$$\Rightarrow \ \ bc^{-1} + \frac{1}{\lambda}e\ ^2 \geq \ bc^{-1}\ ^2 - ac^{-1}$$
$$\Rightarrow \ \inf_{\lambda \neq 0} \ bc^{-1} + \frac{1}{\lambda}e\ ^2 \geq \ bc^{-1}\ ^2 - ac^{-1}$$

Burada e, A'nın zayıf birimi olduğundan Önerme 4.1.1 gereği $b \in A^+$ için $\inf_{\lambda \neq 0} \ b + \frac{1}{\lambda}e \ = 0$ dır. Teorem 2.3.7-(ix) gereği pozitif elemanla çarpma sıra sürekli olduğundan her $\lambda, \beta \in R - \ 0$ için

$$\inf_{\lambda} \ \ b + \frac{1}{\beta}e \ \ b + \frac{1}{\lambda}e \ \ = \ b + \frac{1}{\beta}e \ \inf_{\lambda \neq 0} \ b + \frac{1}{\lambda}e \ = 0$$

olur. O halde $\lambda = \beta$ için $\inf_{\lambda \neq 0} \ b + \frac{1}{\lambda}e\ ^2 = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $b, c^{-1} \in A^+$ için $bc^{-1} \in A^+$ olup $\inf_{\lambda \neq 0} \ bc^{-1} + \frac{1}{\lambda}e\ ^2 = 0$ bulunur.

$$0 = \inf_{\lambda \neq 0} \ bc^{-1} + \frac{1}{\lambda}e\ ^2 \geq \ bc^{-1}\ ^2 - ac^{-1} \Rightarrow 0 \geq \ bc^{-1}\ ^2 - ac^{-1}$$
$$\Rightarrow b^2c^{-2} \leq ac^{-1}$$
$$\Rightarrow b^2 \leq ac$$

elde edilir. Şimdi keyfi bir $c \in A^+$ alalım. $c_n = c + \frac{1}{n}e$, $n = 1,2, \ldots$ şeklinde tanımlayalım. Her $n \in N^+$ için $nc_n \geq e$ olduğundan Teorem 2.3.7-(xiv) gereği $nc_n\ ^{-1}$ mevcuttur ve pozitiftir. O halde $n\ nc_n\ ^{-1} = c_n{}^{-1}$ mevcuttur ve pozitiftir. Her $n \in N^+$

için $\lambda^2 a + 2\lambda b + c_n \geq \lambda^2 a + 2\lambda b + c \geq 0$ olduğunu kullanırsak ispatın ilk kısmından $b^2 \leq ac_n = ac + \frac{1}{n}a$ elde edilir. A Archimedian olduğundan $\frac{1}{n}a \downarrow 0$ olup $b^2 \leq ac$ olur.

4.1.1. Teorem

V Reel vektör uzayı, A Archimedian semiprime f-cebiri ve $F: V \times V \to A$ simetrik bilineer dönüşüm öyle ki her $x \in V$ için $F(x,x) \geq 0$ olsun. Bu durumda her $x, y \in V$ için $F(x,y)^{\,2} \leq F\ x,x\ F(y,y)$ dir [11].

İspat

Hipotezden dolayı her $x, y \in V$ ve $\lambda \in R$ için $F(x+\lambda y, x+\lambda y) \geq 0$ dır. F bilineer olduğundan,

$$\begin{aligned} F\ x+\lambda y, x+\lambda y\ &= F\ x, x+\lambda y\ + \lambda F\ y, x+\lambda y \\ &= F\ x,x\ + \lambda F\ x,y\ + \lambda F\ y,x\ + \lambda^2 F(y,y) \\ &= \lambda^2 F\ y,y\ + 2\lambda F\ x,y\ + F(x,x) \geq 0 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla Önerme 4.1.2 gereği $F(x,y)^{\,2} \leq F\ x,x\ F(y,y)$ elde edilir.

4.1.2. Teorem

B Archimedian f-cebiri ve A Archimedian semiprime f-cebiri olmak üzere $T: B \to A$ pozitif operatör olsun. Her $a, b \in B$ için $T(ab)^{\,2} \leq T\ a^2\ T\ b^2$ dir [11].

İspat

$$\begin{aligned} F: B \times B &\longrightarrow B \\ a, b\ &\longrightarrow F\ a, b\ = ab \end{aligned}$$

şeklinde tanımladığımız F dönüşümü, B Archimedian f-cebiri olduğundan simetriktir. $T: B \to A$ ve $F: B \times B \to B$ olduğundan $T \circ F: B \times B \to A$ dır.

i-) Her $a,b \in B \times B$ için

$$T \circ F\ a,b = T\ F\ a,b = T\ F\ b,a = T \circ F(b,a)$$

olduğundan $T \circ F$ simetriktir.

ii-) $a \geq 0$ olmak üzere her $a,a \in B \times B$ için

$$T \circ F\ a,a = T\ F\ a,a = T(a^2) \geq 0$$

olduğundan $T \circ F$ pozitiftir. Dolayısıyla her $a,b \in B \times B$ için

$$\begin{aligned} T(ab)^{\,2} = T(F\ a,b\ )^{\,2} = T \circ F(a,b)^{\,2} &\leq T \circ F(a,a)\ \ T \circ F(b,b) \\ &= T(F\ a,a\ )\ \ T(F\ b,b\ ) \\ &= T\ a^2\ T(b^2) \end{aligned}$$

elde edilir.

4.1.3. Teorem

A Archimedian semiprime f-cebiri ve B, birimi e_B olan Archimedian f-cebiri olmak üzere $T: B \to A$ pozitif lineer dönüşüm olsun. Bu durumda her $a \in B$ için $Ta^{\,2} \leq T\ a^2\ T(e_B)$ olur. Ayrıca e_A , A'nın birim elemanı ve $T\ e_B \leq e_A$ olmak üzere her $a \in B$ için $Ta^{\,2} \leq T(a^2)$ dır [11].

İspat

Teorem 4.1.2'nin ifadesinde $b = e_B \in B$ alırsak,

$$T(ae_B)^{\,2} \leq T\ a^2\ T\ {e_B}^2$$

olur ki buradan da istenilen elde edilir. Eğer $e_A \in A$ birim ve $T\ e_B \leq e_A$ ise

$$Ta\ ^2 \leq T\ a^2\ T\ e_B\ \leq T\ a^2\ e_A = T\ a^2$$

olduğundan $Ta\ ^2 \leq T\ a^2$ dir.

4.1.4. Teorem

A, birim elemanı e olan Archimedian f-cebiri ve $T: A \to A$ pozitif operatör olsun. Her $a \in A^+$ için $Ta = 0$ dır ancak ve ancak $T\ a^2\ = 0$ dır [11].

İspat

⇒:

$a \in A^+$ ve $Ta = 0$ olsun. Öncelikle $0 \leq a^2 - a^2 \wedge na \leq \frac{1}{n}a^3$ olduğunu gösterelim. $a^2 - a^2 \wedge na\ \wedge\ na - a^2 \wedge na\ = 0$ olduğunu biliyoruz. A, f-cebiri ve $n^{-1}a \in A$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
&a^2 - a^2 \wedge na\ \wedge n^{-1}a\ na - a^2 \wedge na\ = 0\\
\Rightarrow\ &a^2 - a^2 \wedge na\ \wedge\ a^2 - n^{-1}a(a^2 \wedge na)\ = 0\\
\Rightarrow\ &a^2 + \ - a^2 \wedge na\ \wedge -n^{-1}a(a^2 \wedge na)\ = 0\\
\Rightarrow\ &a^2 - \ \ a^2 \wedge na\ \vee n^{-1}a(a^2 \wedge na)\ = 0\\
\Rightarrow\ &a^2 = \ \ a^2 \wedge na\ \vee n^{-1}a(a^2 \wedge na)
\end{aligned}$$

olur ve buradan

$$\begin{aligned}
0 \leq a^2 - a^2 \wedge na &= a^2 + \ -a^2 \vee -na\\
&= 0 \vee\ a^2 - na\\
&= 0 \vee\ \ a^2 - na\ \wedge 0\ \vee\ n^{-1}a\ a^2 \wedge na\ -na\\
&\leq 0 \vee\ 0 \vee\ n^{-1}a\ a^2 \wedge na\\
&\leq 0 \vee\ n^{-1}a\ a^2 \wedge na\ \ = \ n^{-1}a\ a^2 \wedge na\ ^+\\
&= \ n^{-1}a\ a^2 \wedge na\ \leq n^{-1}aa^2 = \frac{1}{n}a^3
\end{aligned}$$

elde edilir. T pozitif olduğundan sıra koruyan olup,

$0 \leq a^2 - a^2 \wedge na \leq \frac{1}{n} a^3 \;\Rightarrow\; 0 \leq T(a^2 - a^2 \wedge na) \leq \frac{1}{n} T(a^3)$

ifadesine ulaşılır. A Archimedian olduğundan $\frac{1}{n} T(a^3) \downarrow 0$ dır. O halde $T\ a^2 - a^2 \wedge na\ = 0$ olur ve burada T'nin lineer olduğunu kullanırsak $T\ a^2\ = T(a^2 \wedge na)$ elde edilir. Her $n \in N^+$ için $a^2 \wedge na \leq na$ ve T pozitif olduğundan,

$0 \leq T\ a^2\ = T\ a^2 \wedge na\ \leq T\ na\ = nT\ a\ = 0$

olup $T\ a^2\ = 0$ elde edilir.

$:\Leftarrow$

$T\ a^2\ = 0$ olsun. Teorem 4.1.3 gereği

$0 \leq\ Ta\ ^2 \leq T\ a^2\ T\ e\ = 0$

olduğundan $Ta\ ^2 = 0$ olur. A semiprime olduğundan $Ta = 0$ dır.

Teorem 4.1.4'te A'nın birimli olması önemlidir. Şimdi A'nın birimli olmaması durumunda bu ifadenin sağlanmayacağına dair bir örnek verelim.

Örnek

$A = C[0,1]$ seçelim.

$i\colon\ 0,1\ \longrightarrow R$

$x \longrightarrow i\ x\ = x$

şeklinde tanımlayalım. $i \in A$ dır. A kümesi üzerinde,

$*\colon A \times A \longrightarrow A$

$f, g\ \longrightarrow f * g = ifg$

çarpmasını tanımlayalım. Keyfi bir $f \in A$ için $f^2 = 0$ olsun. Dolayısıyla, $f^2 = f * f = 0$ dır. O halde her $x \in [0,1]$ için

$$f * f\ x = iff\ x = i\ x\ f\ x\ f\ x = xf^2\ x = 0$$

olur.

i-) $x \in [0,1]$ olsun. $x \neq 0$ olduğundan $xf^2\ x = 0$ olması $f^2\ x = 0$ olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla $f\ x = 0$ dır.

ii-) $x_n = \frac{1}{n} \subseteq (0,1]$ olsun. Her $n \in N^+$ için $x_n \in (0,1]$ olduğundan (i)-şıkkı gereği $f\ \frac{1}{n} = 0$ dır.

$$f\ \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f\ \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow f\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow f\ 0 = 0$$

olur. (i) ve (ii)'den her $x \in [0,1]$ için $f\ x = 0$ dır. Dolayısıyla $f = 0$ yani A, semiprime olur. Fakat A'nın $*$-çarpmasına göre birim elemanı yoktur. Bu durumu olmayana ergi yöntemini kullanarak gösterelim. Farz edelim ki $e \in A$ birim eleman olsun. O halde her $f \in A$ için

$$f * e = e * f = f$$

olur. Şimdi

$$f\colon [0,1] \longrightarrow R$$
$$x \longrightarrow f\ x = 1$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $f \in A$ olduğu açıktır. O halde her $x \in [0,1]$ için

$$i\ x\ f\ x\ e\ x = f(x)$$

şeklindedir. Bu ifade de $x = 0 \in [0,1]$ yazarsak,

$1 = f(0) = i\ 0\ f\ o\ e\ 0\ = 0.1.e\ 0\ = 0$

çelişkisi doğar. O halde A'nın birim elemanı yoktur. Her $x \in [0,1]$ için $e\ x\ = 1$ olsun.

$$T: A \longrightarrow A$$
$$f \longrightarrow T\ f\ = f\ 0\ e$$

şeklinde tanımlanan pozitif lineer dönüşüm her $f, g \in A$ için

$$T\ f * g\ = T\ ifg\ =\ ifg\ \ 0\ e = i\ 0\ f\ 0\ g\ 0\ e = 0\,, \qquad i\ 0\ = 0$$

olduğundan $T\ f * g\ = 0$ şartını sağlar. Burada $f = g$ alırsak $T\ f^2\ = 0$ olur. Fakat,

$$f:\ 0,1\ \longrightarrow R$$
$$x \longrightarrow f\ x\ = 1$$

fonksiyonunu seçersek $T\ f\ = f\ 0\ e = 1e = e \neq 0$ olur. Dolayısıyla Teorem 4.1.4 gerçekleşmez.

4.2. Birimli f-Cebirlerinde Seever Eşitliği

4.2.1. Tanım

E vektör uzayı olmak üzere $T: E \to E$ lineer operatörü $T^2 = T$ şartını sağlıyorsa T'ye projeksiyon denir [1].

4.2.1. Teorem

Her Archimedian f-cebiri birleşmelidir [11].

İspat

A Archimedian f-cebiri ve $a \in A$ keyfi olsun.

$T_a: A \longrightarrow A$

$b \longrightarrow T_a\ b\ = ab$

şeklinde bir dönüşüm tanımlayalım. $T_a \in Orth(A)$'dır. Dolayısıyla her $a, b \in A$ için $T_b, T_{ab}, T_a \circ T_b \in Orth(A)$ olur.

$T_{ab}\ a\ =\ ab\ a = \ ba\ a = a\ ba\ = a\ T_b\ a\ \ = T_a\ T_b\ a\ \ =\ T_a \circ T_b\ \ a$

olduğundan B_a üzerinde $T_{ab} = T_a \circ T_b$ elde edilir. Şimdi $c \in A$ ve $c \perp a$ olsun. O halde $c \perp ab$ dir. Dolayısıyla,

$T_{ab}\ c\ =\ ab\ c = 0$

olur. Benzer şekilde $c \perp a$ ise $bc \perp a$ dır. Dolayısıyla,

$T_a \circ T_b\ \ c\ = T_a\ T_b\ c\ \ = T_a\ bc\ = a\ bc\ = 0$

elde edilir. O halde ${B_a}^d$ üzerinde $T_{ab} = T_a \circ T_b = 0$ olur. $B_a \oplus {B_a}^d$, A'da sıra yoğun olduğundan A'nın tamamında $T_{ab} = T_a \circ T_b$ dir. Yani her $c \in A$ için

$ab\ c = T_{ab}\ c\ =\ T_a \circ T_b\ \ c\ = a(bc)$

olduğundan A birleşmelidir.

4.2.1. Lemma

A Archimedian f-cebiri ve T, A'da pozitif projeksiyon olsun. $a \in R(T)^+$ ve $b \in A^+$ için $T\ a \wedge b\ = 0$ ise her $c \in A^+$ için $T\ T\ ac\ \wedge b\ = 0$ dır [11].

İspat

Öncelikle T projeksiyon olduğundan her $a \in R(T)$ için $a = T(a)$ olduğunu gösterelim.

$$a \in R\ T \ \Rightarrow \exists b \in A : T\ b\ = a$$
$$\Rightarrow T\ T\ b\ = T\ a$$
$$\Rightarrow T^2\ b\ = T\ a$$
$$\Rightarrow T\ b\ = T\ a$$
$$\Rightarrow a = T(a)$$

Şimdi $a \in R\ T^{+}, b \in A^{+}$ için $T\ a \wedge b\ = 0$ ve $c \in A^{+}$ keyfi olsun.

$$0 \leq ac \wedge na \leq na \Rightarrow 0 \leq T\ ac \wedge na\ \leq T\ na\ = nT\ a\ = na$$
$$\Rightarrow 0 \leq T(ac \wedge na) \wedge b \leq na \wedge b \leq n\ a \wedge b$$
$$\Rightarrow 0 \leq T\ T\ ac \wedge na\ \wedge b\ \leq T\ n\ a \wedge b\ = nT\ a \wedge b\ = 0$$
$$\Rightarrow T\ T(ac \wedge na\ \wedge b) = 0\,, \quad n = 1,2, \ldots$$

A Archimedian f-cebiri olduğundan $a, c \in A^{+}\ ve\ n = 1,2, \ldots$ için

$$0 \leq ac - ac \wedge na \leq \frac{1}{n} ac^2 \downarrow 0 \ \Rightarrow\ ac \wedge na \overset{u-d}{} ac$$

dır. T pozitif olduğundan uniformly (düzgün) sürekli olur. O halde $T\ ac \wedge na \overset{u-d}{} T\ ac$ elde edilir. $T\ T(ac \wedge na\ \wedge b) = 0$ olduğundan $T\ T(ac\ \wedge b) = 0$ olur.

4.2.2. Tanım

A Archimedian f-cebiri ve T, A'da pozitif projeksiyon olsun. A'dan gelen sıralamayla $a, b \in R(T)$ için

$a\ ile\ b$ nin R(T)'deki supremumunu $a \overset{*}{\vee} b = T(a \vee b)$

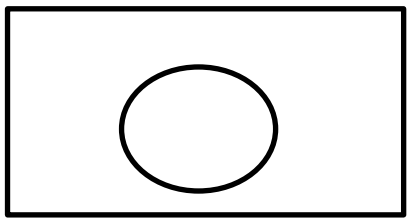
$a\ ile\ b$ nin R(T)'deki infimumunu $a \overset{*}{\wedge} b = T(a \wedge b)$

ve ayrıca R(T)'deki çarpmayı $a * b = T(ab)$ şeklinde tanımlayalım [11].

4.2.2. Teorem

A Archimedian f-cebiri ve T, A'da pozitif projeksiyon olsun. $*$-operasyonları ile R(T) Archimedian f-cebiridir [11].

İspat



A'nın Riesz uzayı ve R(T)'nin sıralı alt uzay olduğunu biliyoruz. $a, b, c \in R(T)$ olsun.

$$a \leq a \vee b \text{ ve } b \leq a \vee b \Rightarrow T\ a \leq T\ a \vee b \text{ ve } T\ b \leq T\ a \vee b$$
$$\Rightarrow a = T(a) \leq T\ a \vee b \text{ ve } b = T(b) \leq T(a \vee b)$$
$$\Rightarrow a \overset{*}{\vee} b \leq T\ a \vee b \ \ldots (*)$$

elde edilir. Diğer yandan

$$a \leq T\ c = c \text{ ve } b \leq T\ c = c \Rightarrow a \vee b \leq c$$
$$\Rightarrow T\ a \vee b \leq T\ c = c \ldots (**)$$

dir. Dolayısıyla $* \ ve \ (**)$'dan $a \overset{*}{\vee} b = T(a \vee b)$ ifadesine ulaşılır.

$$a \wedge b \leq a \text{ ve } a \wedge b \leq b \Rightarrow T\ a \wedge b \leq T\ a \text{ ve } T\ a \wedge b \leq T\ b$$
$$\Rightarrow T\ a \wedge b \leq T\ a = a \text{ ve } T\ a \wedge b \leq T\ b = b$$
$$\Rightarrow T(a \wedge b) \leq a \overset{*}{\wedge} b \ldots (i)$$

elde edilir. Ayrıca

$$T\ c = c \leq a \text{ ve } T\ c = c \leq b \Rightarrow c \leq a \wedge b$$
$$\Rightarrow c = T(c) \leq T\ a \wedge b \ \ldots (ii)$$

olur. (i) ve (ii)'den $a \overset{*}{\wedge} b = T(a \wedge b)$ olduğu görülür. Şimdi $a \in R(T)$ olsun.

$$a = a \overset{*}{\vee} -a = T\ a \vee -a = T\ a$$

olup A, Riesz uzayı olduğundan $a \in A$ ve dolayısıyla $T\ a \in R(T)$ dir. O halde R(T), $\overset{*}{\vee}\ ve\ \overset{*}{\wedge}$ ile Riesz uzayıdır.

Ayrıca $a, b \in R(T)^+$ için T pozitif olduğundan $a * b = T(ab) \in R(T)^+$ olur ve dolayısıyla $*$-çarpmasıyla R(T) Riesz cebiridir.

$a, b \in R\ T\ ^+\ ve\ a \overset{*}{\wedge} b = 0$ olsun. O halde $a \overset{*}{\wedge} b = T\ a \wedge b = 0$ dır. $c \in R(T)^+$ için Lemma 4.2.1 gereği $T\ T\ ac \wedge b = 0$ olup $c * a \overset{*}{\wedge} b = T\ ca \overset{*}{\wedge} b = T\ T\ ca \wedge b = 0$ elde edilir. A, f-cebiri olduğundan değişmeli olup benzer şekilde $a * c \overset{*}{\wedge} b = 0$ olur.
O halde R(T), $*$-çarpmasıyla bir f-cebiridir.

$a \in R(T)^+$ olsun. $R(T) \subseteq A$ ve A Archimedian olduğundan her $n \in N^+$ için $\frac{1}{n} a \downarrow 0$ olup R(T), Archimediandır.

Sonuç

A Archimedian f-cebiri ve T, A'da pozitif projeksiyon olsun. R(T), değişmeli ve birleşmelidir [11].

İspat

R(T), Archimedian f-cebiri olduğundan Teorem 2.3.8 gereği değişmeli ve Teorem 4.2.1 gereği birleşmelidir.

4.2.3. Teorem

A Archimedian f-cebiri ve T, A'da pozitif projeksiyon olmak üzere her $a, b, c \in A$ için $T\ T\ TaTb\ Tc = T\ Ta\ TbTc$ dir [11].

İspat

$a, b, c \in A$ olsun. O halde $Ta, Tb, Tc \in R(T)$ olur. R(T)'deki $*$-çarpmasının tanımından

$$Ta * Tb \ * Tc = T\ Ta.Tb \ * Tc = T\ T\ Ta.Tb\ .Tc$$

ve

$$Ta * \ Tb * Tc \ = Ta * T\ Tb.Tc \ = T(Ta.T\ Tb.Tc\ )$$

olup R(T) birleşmeli olduğundan $T\ T\ Ta.Tb\ .Tc \ = T(Ta.T\ Tb.Tc\ )$ elde edilir.

4.2.4. Teorem

A Archimedian f-cebiri ve T, A'da pozitif projeksiyon olsun. R(T), A'nın Riesz altuzayı ise $a \overset{*}{\vee} b = a \vee b$ ve $a \overset{*}{\wedge} b = a \wedge b$ dir. Eğer R(T), A'nın altcebiri ise $a * b = ab$ dir [11].

İspat

R(T), A'nın Riesz altuzayı olsun. $a, b \in R(T)$ ise $a = Tx$ ve $b = Ty$ olacak şekilde $x, y \in A$ mevcuttur. R(T), Riesz altuzay olduğundan $a \vee b \in R(T)$ olup $a \vee b = Tz$ olacak şekilde $z \in A$ mevcuttur.

$$a \overset{*}{\vee} b = T\ a \vee b \ = T\ Tz \ = T^2 z = Tz = a \vee b$$

olur. Benzer şekilde R(T), Riesz altuzay olduğundan $a \wedge b \in R(T)$ olup $a \wedge b = Tw$ olacak şekilde $w \in A$ mevcuttur.

$$a \overset{*}{\wedge} b = T\ a \wedge b \ = T\ Tw \ = T^2 w = Tw = a \wedge b$$

elde edilir. R(T) altcebir olsun. O halde $a, b \in R(T)$ için $ab \in R(T)$ dir. Burada $a = Tx$ ve $b = Ty$ şeklinde olup $x, y \in A$ dır. Ayrıca R(T) altcebir olduğundan $ab = Tz$ olacak

şekilde $z \in A$ mevcuttur. Dolayısıyla,

$$a * b = T\ ab\ = T\ Tz\ = Tz = ab$$

eşitliğine ulaşılır.

Şimdi A'nın, üzerinde tanımlı çarpmayla semiprime olmasına rağmen R(T)'nin $*$-çarpmasına göre semiprime olmayabileceğine dair bir örnek verelim.

Örnek

$A = C[0,1]$ olsun. Her $x \in\ 0,1$ için

$$i :\ 0,1\ \longrightarrow R$$
$$x \longrightarrow i\ x\ = x$$

şeklinde tanımlayalım. Her $a, b \in A$ için $a \cdot b = iab$ şeklinde tanımlanan çarpmayla A (semiprime) f-cebiridir. Her $a \in A$ ve her $x \in\ 0,1$ için

$$T: A \longrightarrow A$$
$$a \longrightarrow Ta :\ 0,1\ \longrightarrow R$$
$$x \longrightarrow\ Ta\ \ x\ = a(0)(1 - x)$$

şeklinde tanımlayalım. $a \in A^{+}$ olsun. Her $x \in\ 0,1$ için $a\ x\ \geq 0$ olacağından $a(0) \geq 0$ ve $0 \leq x \leq 1$ olduğundan $1 - x \geq 0$ dır. O halde

$$Ta\ \ x\ = a\ 0\ \ 1 - x\ \geq 0$$

olur. $Ta \geq 0$ olduğundan $T \geq 0$ yani, T pozitiftir. $a \in A$ keyfi olsun.

$$T^{2}a\ \ x\ =\ T\ Ta\ \ \ x$$
$$= T\ a\ \ 0\ \ 1 - x$$
$$= a\ 0\ \ 1 - 0\ \ 1 - x$$

$$= a\ 0 \quad 1 - x$$
$$= (Ta)(x)$$

olduğundan $T^2 = T$ yani, T projeksiyondur. $a, b \in R(T)$ keyfi olsun. Her $x \in \ 0,1\ $ için

$$T\ ab \quad x \ = \ a \cdot b \quad 0 \quad 1 - x$$
$$= i\ 0\ a\ 0\ b\ 0 \quad 1 - x \ , \quad i\ 0 \ = 0$$
$$= 0 \ldots (*)$$

olduğundan $a * b = T\ ab \ = 0$ elde edilir. $a = 1 \in C[0,1]$ seçelim.

$$1 : \ 0,1 \ \longrightarrow R$$
$$x \longrightarrow 1\ x \ = 1$$

şeklinde olup $T1 \in R(T)$ dir. O halde $(*)$'dan $T1\ ^2 = T1 * T1 = 0$ dır. Fakat

$$T1 \quad x \ = 1\ 0 \quad 1 - x \ = 1\ 1 - x \ = 1 - x \neq 0$$

olduğundan $T1 \neq 0$ dır. Dolayısıyla R(T), $*$-çarpmasına göre semiprime değildir. Eğer A birimli ise R(T), $*$-çarpmasına göre semiprime olur. Gerçekten, $a \in R(T)^+$ için $a^2 = a * a = T\ a^2 \ = 0$ olsun. Teorem 4.1.4 gereği $Ta = a = 0$ olacağından istenilen elde edilir.

4.2.3. Tanım

A Archimedian semiprime f-cebiri olsun. A'yı Orth(A)'nın altkümesi olarak düşünelim. T, A'da pozitif operatör olmak üzere $0 \leq a \leq I \quad I \in Orth(A)$ şeklinde olan her $a \in A$ için $0 \leq Ta \leq I$ oluyorsa veya diğer bir deyişle T operatörü, $A \cap [0, I]$ kümesini sabit bırakıyorsa T'ye kontraktiv denir [11].

Sonuç

A Archimedian semiprime f-cebiri olsun. A'yı Orth(A)'nın altkümesi olarak düşünelim. T,

A'da pozitif operatör olmak üzere her $a \in A^+$ için $a^2 \leq a$ iken $Ta^{\,2} \leq Ta$ ise T kontraktiv olur [11].

İspat

$a \in A^+$ ve $0 \leq a \leq I$ olsun.

$$
\begin{aligned}
0 \leq a \leq I \;&\Rightarrow\; a^2 \leq a \\
&\Rightarrow\; T\,a^2 \leq Ta\,,\ (T\ pozitif) \\
&\Rightarrow\; Ta^{\,2} \leq T\,a^2 \leq Ta\,,\ (Teorem\ 4.1.3) \\
&\Rightarrow\; Ta^{\,2} - Ta \leq 0 \\
&\Rightarrow\; Ta\,(Ta - I) \leq 0 \\
&\Rightarrow\; Ta \leq I
\end{aligned}
$$

elde edilir. Dolayısıyla T kontraktiv olur.

Sonuç

A, birim elemanı e olan Archimedian semiprime f-cebiri olmak üzere (bu durumda e ile I çakışır ve A=Orth(A) olur), T'nin kontraktiv olması için gerek ve yeter şart $Te \leq e$ olmasıdır [11].

İspat

$\Rightarrow$:
T kontraktiv olsun. $0 \leq e \leq e$ olduğundan $Te \leq e$ olur.

$:\Leftarrow$
$Te \leq e$ ve $0 \leq a \leq e$ olsun. T pozitif olduğundan $0 \leq Ta \leq Te \leq e$ elde edilir. Dolayısıyla $0 \leq Ta \leq e$ yani, T kontraktiv olur.

Herhangi bir sıra projeksiyon, kontraktiv olmakla beraber bunun tersinin her zaman doğru olmadığına dair bir örnek verelim.

Örnek

$$e: \ 0,1 \longrightarrow R$$
$$x \longrightarrow e\ x\ = 1$$

ve

$$T: C\ 0,1 \longrightarrow C\ 0,1$$
$$a \longrightarrow Ta = \ {}_0^1 a\ x\ dx\ \ e$$

şeklinde tanımlayalım. $a \in C\ 0,1\ ^{+}$ olsun. O halde her $x \in \ 0,1\ $ için $a(x) \geq 0$ dır.

$$a(x) \geq 0 \ \Rightarrow \ {}_0^1 a\ x\ dx \geq 0$$
$$\Rightarrow Ta = \ {}_0^1 a\ x\ dx\ \ e \geq 0$$

olduğundan T pozitiftir. $0 \leq a \leq e\ $ olsun. Her $x \in [0,1]\ $ için

$$0 \leq a\ x\ \leq e\ x\ = 1 \Rightarrow 0 \leq \ {}_0^1 a\ x\ dx\ \leq 1$$
$$\Rightarrow 0 \leq \ {}_0^1 a\ x\ dx\ \ e \leq e$$
$$\Rightarrow 0 \leq Ta \leq e$$

dir. O halde T kontraktiv olur. $a \in C[0,1]\ $ keyfi olsun.

$$T^2 a = T(Ta)) = T \ \ {}_0^1 a\ x\ dx\ \ e \ = \ {}_0^1 a\ x\ dx\ \ Te$$
$$= \ {}_0^1 a\ x\ dx\ \ {}_0^1 e\ x\ dx\ \ e$$
$$= \ {}_0^1 a\ x\ dx\ \ e$$
$$= Ta$$

olduğundan T projeksiyondur. Fakat T, sıra projeksiyon değildir. Bunu olmayana ergi yöntemi ile gösterelim. T sıra projeksiyon yani, her $a \in C[0,1]^{+}\ $ için $0 \leq Ta \leq a$ olsun.

$a\colon\ 0,1\ \longrightarrow R$

$\quad\ x \longrightarrow a\ x\ = x$

fonksiyonunu seçelim.

$e\colon\ 0,1\ \longrightarrow R$

$\quad\ x \longrightarrow e\ x\ = 1$

olduğundan,

$$Ta = \int_0^1 a\ x\ dx\ \ e = \frac{1}{2}e \leq a$$

dir. $x = \frac{1}{3} \in\ 0,1$ seçersek $\frac{1}{2}e\ \ \frac{1}{3}\ = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{3} = a(\frac{1}{3})$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla T sıra projeksiyon değildir.

4.2.1. Önerme

A Archimedian birimli f-cebiri ve T, A'da pozitif kontraktiv projeksiyon olmak üzere;

i-) Her $a \in A$ için $T\ aTe\ = Ta$ dır,

ii-) $*$-çarpmasıyla Te, R(T)'nin birim elemanıdır [11].

İspat

i-) $a \in A^+$ ve $0 \leq a \leq e$ olsun. T kontraktiv olduğundan $0 \leq Ta \leq e$ dır.

$$0 \leq Ta \leq e \Rightarrow 0 \leq a - aTe = a\ e - Te\ \leq e\ e - Te\ = e - Te$$
$$\Rightarrow 0 \leq a - aTe \leq e - Te$$
$$\Rightarrow 0 \leq T\ a - aTe\ \leq T\ e - Te\ ,\quad T\ pozitif$$
$$\Rightarrow 0 \leq T\ a - aTe\ \leq T\ e - Te\ = Te - T^2e = Te - Te = 0$$
$$\Rightarrow T\ a - aTe\ = 0$$
$$\Rightarrow Ta - T\ aTe\ = 0$$

$$\Rightarrow Ta = T\ aTe$$

elde edilir. O halde her $n \in N^+$ için $0 \leq a \leq ne$ iken $Ta = T\ aTe$ ...$(*)$ dır. Şimdi $a_n = a \wedge ne$ şeklinde olsun. $0 \leq a \wedge ne \longrightarrow a\ (r.u)$ olup $(*)$'dan dolayı her $n \in N^+$ için

$$T\ a \wedge ne\ = T\ \ a \wedge ne\ Te$$

dir. T pozitif olduğundan göreceli düzgün süreklidir. Dolayısıyla, $a \wedge ne \longrightarrow a\ (r.u)$ iken $T\ a \wedge ne\ \longrightarrow Ta\ (r.u)$ olur.

$$T\ a \wedge ne\ = T\ \ a \wedge ne\ Te\ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} T\ a \wedge ne\ = \lim_{n\to\infty} T\ \ a \wedge ne\ Te$$
$$\Rightarrow Ta = T\ \lim_{n\to\infty}\ a \wedge ne\ \ Te\ \ = T\ aTe$$

eşitliği elde edilir. Şimdi $a \in A$ keyfi olsun. $a = a^+ - a^-$ ve $a^+, a^- \geq 0$ olduğundan

$$T\ a^+\ = T\ a^+Te\ \ \text{ve}\ T\ a^-\ = T\ a^-Te$$

olur.

$$T\ a\ = T\ a^+\ - T\ a^-\ = T\ a^+Te\ - T\ a^-Te\ = T\ a^+Te - a^-Te\ = T\ aTe$$

olup istenilene ulaşılır.

ii-) $a \in R(T)$ olsun. O halde $Ta = a$ dir.

$$a * Te = T\ aTe\ = Ta = a$$

olduğundan $*$-çarpmasına göre Te, R(T)'nin birim elemanıdır.

4.2.5. Teorem

A Archimedian birimli f-cebiri ve T, A'da pozitif kontraktiv projeksiyon olsun. Bu durumda T, her $a, b \in A$ için $T\ aTb\ = T\ TaTb$ şeklindeki Seever eşitliğini sağlar [11].

İspat

$R\ T$ 'nin $*$-çarpmasıyla, birim elemanı Te olan Archimedian f-cebiri olduğunu biliyoruz. $a \in A$ sabit olsun.

$$\pi_a : R\ T \longrightarrow R\ T$$
$$b \longrightarrow \pi_a\ b\ = T(ab)$$

şeklinde tanımladığımız dönüşüm lineerdir. Her $a \in A^+$ ve $b \in R(T)^+$ için

$$T\ ab\ \geq 0 \Rightarrow \pi_a(b) \geq 0$$
$$\Rightarrow \pi_a \text{ pozitiftir}$$
$$\Rightarrow \pi_a \text{ sıra sınırlıdır...} (*)$$

ifadesine ulaşılır. $a \in A\ ve\ b \in R(T)^+$ olsun.

$$\pi_a\ b\ = T\ ab\ = T\ a^+b - a^-b\ = T\ a^+b\ - T\ a^-b\ = \pi_{a^+}\ b\ - \pi_{a^-}(b)$$

elde edilir. $(*)$'dan dolayı $\pi_{a^+}\ b$ ve $\pi_{a^-}(b)$ sıra sınırlıdır. Sıra sınırlıların farkı sıra sınırlı olduğundan π_a sıra sınırlıdır. $b, c \in R(T)^+$ için $b \overset{*}{\wedge} c = T\ b \wedge c\ = 0$ olsun. O halde Lemma 4.2.1 gereği $a \in A^+$ için $T\ T\ ab\ \wedge c\ = 0$ olacağından

$$T\ T\ ab\ \wedge c\ = T\ ab\ \overset{*}{\wedge} c = \pi_a\ b\ \overset{*}{\wedge} c = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla π_a band koruyandır. π_a sıra sınırlı ve band koruyan olduğundan $\pi_a \in Orth(R\ T\ )$ dir. $Te \in R(T)$ için

$$\pi_a\ Te\ = a * Te = T\ aTe\ = Ta \ldots (i)$$

elde edilir. $\pi_a(Te) \in A$ olduğundan $\pi_{\pi_a(Te)} \in Orth(R\ T\ )$ dir. Dolayısıyla,

$$\pi_{\pi_a\ Te}\ Te\ = \pi_a\ Te\ * Te = \ a * Te\ * Te = T\ aTe\ * Te = Ta * Te = Ta \ldots (ii)$$

bulunur. $i \ ve \ (ii)$'den Te'de, π_a ile $\pi_{\pi_a(Te)}$ eşittir. Te, R(T)'nin zayıf birimi olduğundan π_a ile $\pi_{\pi_a(Te)}$, R(T)'nin tamamında eşit olurlar. O halde her $b \in R(T)$ için

$$\begin{aligned} \pi_a \ b \ = \pi_{\pi_a \ Te} \ \ b \ &\Rightarrow a * b = \pi_a \ Te \ * b \\ &\Rightarrow T \ ab \ = \ a * Te \ * b \\ &\Rightarrow T \ ab \ = T \ aTe \ * b \\ &\Rightarrow T \ ab \ = Ta * b \\ &\Rightarrow T \ ab \ = T(Ta.b) \end{aligned}$$

elde edilir. $b \in R(T)$ olduğundan bu ifade $a, b \in A$ için $T \ aTb \ = T(TaTb)$ şeklinde yazılabilir.

Kontraktiv olmayan pozitif projeksiyonlar için Seever eşitliğinin sağlanmadığına dair bir örnek verelim.

Örnek

$A = C[0,2]$ olsun. Noktasal sıralama ve çarpma ile A'nın birimli Archimedian f-cebiri olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned} i: \ 0,2 \ &\longrightarrow R \\ x &\longrightarrow i \ x \ = x \end{aligned}$$

olmak üzere A üzerinde,

$$\begin{aligned} &T: A \longrightarrow A \\ &a \longrightarrow Ta = \ {}_0^{\overline{2}} a \ x \ dx \ \ i \end{aligned}$$

operatörünü tanımlayalım. $a \in A^+$ olsun. Her $x \in [0,2]$ için

$$\begin{aligned} a \ x \ \geq 0 \ &\Rightarrow \ {}_0^{\overline{2}} a \ x \ dx \geq 0 \ \text{ ve } \ i \ x \ = x \geq 0 \\ &\Rightarrow \ Ta \ \ x \ = \ {}_0^{\overline{2}} a \ x \ dx \ \ i(x) \geq 0 \end{aligned}$$

olduğundan T pozitiftir. $a \in A$ keyfi olsun.

$$T^2 a = T\ Ta\ = T\ \int_0^{\overline{2}} a\ x\ dx\ \ i$$
$$= \int_0^{\overline{2}} a\ x\ dx\ \ T\ i$$
$$= \int_0^{\overline{2}} a\ x\ dx\ \ \int_0^{\overline{2}} i\ x\ dx\ \ i$$
$$= \int_0^{\overline{2}} a\ x\ dx\ \ i$$
$$= Ta$$

olduğundan T idempotent olur. T'nin kontraktiv olmadığını olmayana ergi yöntemiyle gösterelim. T kontraktiv olsun. O halde $0 \leq a \leq e$ olan her $a \in A$ için $0 \leq Ta \leq e$ dir. $a = e$ seçersek,

$$Te = \int_0^{\overline{2}} e\ x\ dx\ \ i = \ \overline{2}i$$

olur. $x = 2 \in \ 0,2\ \ $ için $\ \overline{2}i\ 2\ \ = 2\ \ \overline{2}\ $ ve $\ e\ 2\ \ = 1$ olduğundan $Te = \ \ \overline{2}i \leq e$ ifadesi sağlanmaz. Dolayısıyla T kontraktiv değildir. Seever eşitliğinin sağlanmadığını göstermek için $a = b = e$ seçelim.

$$T\ TeTe\ \ = T\ \ Te\ ^2\ = T\ \ \ \overline{2}i\ ^2\ \ = 2T\ i^2\ \ = 2\int_0^{\overline{2}} x^2 dx\ \ i = \frac{4\ \ \overline{2}}{3} i$$

ve

$$T\ \ eTe\ \ = T\ \ Te\ \ = Te = \ \ \overline{2}i$$

olup $\ \overline{2}i \neq \frac{4\ \ \overline{2}}{3} i$ olduğundan T, Seever eşitliğini sağlamaz. $a, b \in A$ olsun. O halde $Ta, Tb \in R(T)$ olup $Ta = \ \int_0^{\overline{2}} a\ x\ dx\ \ i$ ve $Tb = \ \int_0^{\overline{2}} b\ x\ dx\ \ i$ şeklindedir. $\lambda, \beta \in R$ ve $\lambda \geq \beta$ olmak üzere $\lambda - \beta \geq 0$ ve i pozitif olduğundan $\lambda - \beta\ i \geq 0$ dır. Buradan $\lambda i \geq \beta i$ ifadesi elde edilir. Benzer şekilde $\int_0^{\overline{2}} a\ x\ dx\ \ ,\ \ \int_0^{\overline{2}} b\ x\ dx\ \ \in R$ olduğundan,

$$\int_0^{\overline{2}} a\ x\ dx \leq \int_0^{\overline{2}} b\ x\ dx \Rightarrow Ta \vee Tb = \int_0^{\overline{2}} a\ x\ dx\ \ i \vee \int_0^{\overline{2}} b\ x\ dx\ \ i$$

$$= Tb \in R(T)$$

veya

$$\int_0^{\overline{2}} b\ x\ dx \leq \int_0^{\overline{2}} a\ x\ dx \Rightarrow Ta \vee Tb = \int_0^{\overline{2}} a\ x\ dx\ \ i \vee \int_0^{\overline{2}} b\ x\ dx\ \ i$$

$$= Ta \in R(T)$$

olmak suretiyle R(T), Riesz altuzaydır. Fakat R(T) altcebir değildir. Bunu olmayana ergi yöntemiyle gösterelim. R(T) altcebir olsun. O halde Teorem 4.2.4 gereği $a, b \in R\ T$ için $a * b = ab$ dir. Dolayısıyla $Ta, Tb \in R(T)$ için $Ta * Tb = TaTb$ dir. Ayrıca $Ta * Tb = T(TaTb)$ olduğundan $T\ TaTb\ = TaTb$ elde edilir. $a = b = e$ seçersek,

$$T\ TeTe\ = \ Te\ ^2 \Rightarrow T\ \ Te\ ^2 \ = \ Te\ ^2$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\overline{2}\, i = 2i^2$$

olmalıdır ki bu eşitlik $x = 1 \in \ 0{,}2\ $ için $\frac{4}{3}\overline{2} = 2$ çelişkisini doğurur. Dolayısıyla R(T) altcebir değildir.

Sonuç

A Archimedian birimli f-cebiri olmak üzere T, A'da Markov operatörü $Te = e$ olsun. T projeksiyondur ancak ve ancak T Seever eşitliğini sağlar [11].

İspat

⇒:

T projeksiyon olsun. Hipotezden $Te = e$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $Te \leq e$ yazabiliriz. O halde T kontraktiv olur ve Teorem 4.2.5 gereği T, Seever eşitliğini sağlar.

$:\Leftarrow$

Her $a,b \in A$ için $T\ aTb\ = T(TaTb)$ olsun. $b = e$ seçelim.

$$T\ aTe\ = T\ TaTe\ \Rightarrow T\ ae\ = T\ Ta.e$$
$$\Rightarrow Ta = T^2a$$
$$\Rightarrow T = T^2$$
$$\Rightarrow T \text{ projeksiyondur}$$

4.3. Görüntü Kümesinin Riesz Altuzay Olma Koşulu

4.3.1. Teorem

A birimli Archimedian f-cebiri ve T, A'da pozitif kontraktiv projeksiyon olsun. O halde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir [11].

i-) R(T), A'nın Riesz altuzayıdır,
ii-) $a,b \in A$ için $Ta.Tb = Te.T(Ta.Tb)$ dir.

Not: Seever eşitliğinden (ii)'de ki ifade $a,b \in A$ için $Ta.Tb = Te.T(a.Tb)$ şeklinde yazılabilir. Bu ifadeyi $a,b \in R(T)$ için $ab = Te(a * b)$ şeklinde de ifade edebiliriz. Yani, A'da tanımlı çarpma ile R(T)'de ki $*$-çarpması sadece bazı durumlarda farklıdır.

İspat

$i \Rightarrow ii$:
R(T), A'nın Riesz altuzayı olsun. Bu durumda $a,b \in R(T)$ için

$$a \overset{*}{\vee} b = a \vee b \qquad \text{ve} \qquad a \overset{*}{\wedge} b = a \wedge b$$

olacağından R(T)'deki diklik A'daki dikliğe denktir. $a \in R(T)$ sabit olmak üzere

$$\tau_a : R(T) \longrightarrow A$$
$$b \longrightarrow \tau_a\ b\ = ab$$

ve

$$\sigma_a : R(T) \longrightarrow A$$
$$b \longrightarrow \sigma_a\ b\ = Te(a * b)$$

dönüşümlerini tanımlayalım. $\tau_a\ ve\ \sigma_a$ lineer dönüşümlerdir. $a \in A^+$ için $\tau_a\ ve\ \sigma_a$ pozitif operatörlerdir. Dolayısıyla $\tau_a\ ve\ \sigma_a$ sıra sınırlıdırlar. $a \in A$ olsun. $\tau_a = \tau_{a^+} - \tau_{a^-}$ şeklinde yazılabilir. τ_{a^+} ve τ_{a^-} sıra sınırlı olduklarından τ_a sıra sınırlıdır. Benzer şekilde σ_a sıra sınırlıdır. $b \in R(T)$ ve $c \in A$ için $b \perp c$ olsun. $a \in R(T)$ için A, f-cebiri olduğundan $ab \perp c$ olur. Dolayısıyla $\tau_a(b) \perp c$ dir. $b \in R(T)^+$ ve $c \in A^+$ için $b \perp c$ olsun. $0 \leq a \leq Te$ olmak üzere,

$$0 \leq \sigma_a\ b\ = Te\ a * b\ \leq e\ a * b\ \text{,(T kontraktiv olduğundan } Te \leq e\ )$$
$$= a * b \leq Te * b = b\ \text{,(}\ Te,\ R\ T\ \text{,}*\ \text{'ın birim elemanı)}$$

olduğundan $0 \leq \sigma_a(b) \leq b$ elde edilir.

$$0 \leq \sigma_a\ b\ \leq b\ \Rightarrow\ 0 \leq \sigma_a\ b\ \wedge c \leq b \wedge c = 0$$
$$\Rightarrow\ \sigma_a(b) \perp c$$

dir. O halde her $n \in N^+$ için $0 \leq a \leq nTe$ olacağından $\sigma_a(b) \perp c$ olur... $(*)$
$a \in R(T)^+$ keyfi olsun. $R(T)$'de

$$0 \leq a \wedge nTe \longrightarrow a\ r.u\ \Rightarrow 0 \leq\ a \wedge nTe\ * b \longrightarrow a * b\ r.u\ \text{,} b \in R(T)^+$$
$$\Rightarrow 0 \leq Te.\ \ a \wedge nTe\ * b\ \longrightarrow Te.\ a * b\ \ r.u\ \text{,} Te \geq 0$$

dir. $a_n = a \wedge nTe \leq nTe$ olduğundan $(*)$'dan $\sigma_{a_n}\ b\ \wedge c = 0$ elde edilir.

$$0 = \sigma_{a_n}\ b\ \wedge c \longrightarrow \sigma_a(b) \wedge c \Rightarrow \sigma_a\ b\ \wedge c = 0$$
$$\Rightarrow \sigma_a(b) \perp c$$

olur. Şimdi $a \in R(T)$ olsun. $a\ ,\ b\ ,\ c\ \geq 0$ olduğundan $\sigma_a\ \ b\ \ \wedge\ c\ = 0$ dır.

$$0 \leq \sigma_a\ b\ \wedge\ c\ \leq \sigma_a\ \ b\ \wedge\ c\ = 0 \Rightarrow\ \sigma_a\ b\ \wedge\ c\ = 0$$
$$\Rightarrow \sigma_a(b) \perp c$$

dir. $b \in R(T)$ olsun. $b^+, b^- \in R(T)^+$ olmak üzere $b = b^+ - b^-$ şeklinde olduğundan

$$\sigma_a\ b^+\ \perp c\ ve\ \sigma_a\ b^-\ \perp c \Rightarrow\ \sigma_a\ b^+\ - \sigma_a\ b^-\ \perp c$$
$$\Rightarrow \sigma_a(b) \perp c$$

elde edilir. Şimdi $c \in A$ olsun. $c = c^+ - c^-$ ve $c^+, c^- \in A^+$ olup

$$\sigma_a\ b\ \perp c^+ ve\ \sigma_a(b) \perp c^- \Rightarrow \sigma_a(b) \perp\ c^+ - c^-$$
$$\Rightarrow \sigma_a(b) \perp c$$

dir. O halde her $a, b \in R(T)$ ve her $c \in A$ için $b \perp c$ iken $\sigma_a(b) \perp c$ ve $\tau_a(b) \perp c$ dir. $a \in R(T)$ sabit olmak üzere $\rho_a: R(T) \longrightarrow A$ dönüşümünü

$$\rho_a = \tau_a - \sigma_a$$

şeklinde tanımlayalım. $\tau_a\ ve\ \sigma_a$ lineer ve sıra sınırlı olduklarından ρ_a lineer ve sıra sınırlıdır. $b, c \in R(T)$ için $b \perp c$ olsun.

$$\tau_a\ b\ \perp c\ ve\ \sigma_a(b) \perp c \Rightarrow \rho_a(b) \perp c$$
$$\Rightarrow \rho_a(b) \perp \rho_a(c)$$

olduğundan ρ_a dikliği koruyandır. ρ_a pozitif ve dikliği koruyan olduğundan ρ_a vardır ve Riesz homomorfizmasıdır. Te, $(R\ T\ ,*)$'ın birim elemanı olduğundan

$$\begin{aligned} \rho_a\ \ Te\ \ = \ \rho_a(Te)\ &= \ \tau_a\ Te\ - \sigma_a(Te) \\ &= \ a.Te - Te(a * Te) \\ &= \ a.Te - Te.a \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Şimdi $b \in R(T)^+$ ve $0 \leq b \leq nTe$ olsun.

$0 \leq \rho_a\ b \leq \rho_a\ nTe = n\,\rho_a\ Te = 0 \Rightarrow \rho_a\ b = 0$

dır. $b_n = b \wedge nTe$ olmak üzere her $n \in N^+$ için $b_n \leq nTe$ olduğundan $\rho_a\ b_n = 0$ olur. Buradan,

$0 = \rho_a\ b_n \longrightarrow \rho_a\ b\ r.u \Rightarrow \rho_a\ b = 0$

elde dilir. Her $b \in R(T)$ için $\rho_a\ b = 0$ olduğundan $\rho_a = 0$ dır.

$\rho_a = 0 \Rightarrow \tau_a - \sigma_a = 0 \Rightarrow \tau_a = \sigma_a$

olacağından her $b \in R(T)$ için $\tau_a\ b = \sigma_a(b)$ olup $a.b = Te.(a * b)$ elde edilir.

$ii \Rightarrow i$:

$a \in A$ keyfi olsun. $Ta \in R(T)$ olup Teorem 4.1.3 gereği $T\ Ta\ ^2 \leq T\ Ta\ ^2\ Te \ldots (1)$ elde edilir. Hipotezden $a, b \in A$ için $Ta.Tb = Te.T(Ta.Tb)$ olduğunu biliyoruz. Bu eşitlikte $Ta = Tb$ yazarsak $Ta\ ^2 = Te.T\ Ta\ ^2 \ldots (2)$ olur. O halde (1) ve (2)'den $T\ Ta\ ^2 \leq Ta\ ^2 \ldots (*)$ eşitsizliğine ulaşılır. Ayrıca T projeksiyon olduğundan $a \in A$ için $Ta = T(Ta) \leq T\ Ta$ dır.

$Ta \leq T\ Ta \Rightarrow Ta\ ^2 \leq T\ Ta\ ^2 \ldots (**)$

ifadesi bulunur. $*$ ve $(**)$'dan $Ta\ ^2 = T\ Ta\ ^2$ eşitliği elde edilir. $Ta\ ^2 = T\ Ta\ ^2$ ve A semiprime olduğundan $T\ Ta = Ta$ olur. $Ta \geq 0$ ve T pozitif olduğundan $T\ Ta = Ta$ dır. T'nin projeksiyon ve $T\ Ta = Ta$ olması $Ta \in R(T)$ olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla $Ta \in R(T)$ iken $Ta \in R(T)$ olduğundan R(T), Riesz altuzaydır.

Sonuç

A birimli Archimedian f-cebiri ve T, A'da pozitif kontraktiv projeksiyon olsun. R(T), A'nın Riesz altuzayıdır ancak ve ancak her $a \in A$ için $Ta\ ^2 = Te.T\ Ta\ ^2$ dir [11].

4.3.2. Teorem

A birimli Archimedian f-cebiri ve T, A'da pozitif kontraktiv projeksiyon olsun. R(T), A'nın altcebiri ise R(T), A'nın Riesz altuzayıdır [11].

İspat

R(T), A'nın altcebiri olsun. O halde $a, b \in R(T)$ için $a \cdot b \in R(T)$ dir. $a \cdot b \in R(T)$ ve T projeksiyon olduğundan

$$a * b = T\ ab\ = a \cdot b$$

olur. O halde $*$-çarpması, A'daki esas çarpma gibi çalışır. Te, R(T)'nin $*$-çarpmasına göre birimi olduğundan $a, b \in R\ T$ için

$$Te\ a * b\ = Te\ a \cdot b\ = a \cdot b$$

elde edilir. Dolayısıyla Teorem 4.3.1 gereğince R(T), A'nın Riesz altuzayıdır.

Teorem 4.3.2'deki ifadenin tersinin her zaman doğru olmadığına dair bir örnek verelim.

Örnek

$A = C[0,1]$ kümesi üzerinde noktasal sıralama ve çarpmayı göz önüne alalım.

$$i: [0,1] \longrightarrow R$$
$$x \longrightarrow i\ x\ = x$$

olmak üzere

$$T: A \longrightarrow A$$
$$a \longrightarrow Ta = a\ 1\ i$$

dönüşümünü tanımlayalım. T'nin lineer ve pozitif olduğu açıktır. Buradan her $a \in A$ için

$$T^2 a = T\ Ta\ = T\ a\ 1\ i\ = a\ 1\ Ti = a\ 1\ i\ 1\ i = a\ 1\ i = Ta$$

olduğundan T projeksiyondur. Her $x \in [0,1]$ için

$$Te\ x\ =\ e\ 1\ i\ \ x\ = i\ x\ = x \leq 1 = e(x)$$

elde edilir. Buradan $Te \leq e$ yani T kontraktiv olur. Ayrıca $a \in A$ için $Ta \in R(T)$ olup,

$$T\ Ta\ = T\ a\ 1\ i\ =\ a(1)\ T\ i\ =\ a(1)\ Ti =\ a\ 1\ i\ =\ Ta$$

olduğundan $Ta \in R(T)$ dir. Dolayısıyla R(T), Riesz altuzaydır. Fakat R(T) altcebir değildir. R(T)'nin altcebir olmadığını olmayana ergi yöntemi ile gösterelim. R(T) altcebir olsun. O halde her $a, b \in A$ için $Ta, Tb \in R(T)$ olup $Ta \cdot Tb \in R(T)$ dir.

$$Ta \cdot Tb \in R\ T\ \ \Rightarrow\ \ T\ Ta \cdot Tb\ = Ta \cdot Tb$$

dir. $a = b = e$ seçersek,

$$T\ \ Te\ ^2\ =\ Te\ ^2\ \Rightarrow\ T\ i^2\ = i^2\ \Rightarrow\ i = i^2$$

elde edilir. $x = \frac{1}{2} \in [0,1]$ için

$$i\ \ \frac{1}{2}\ \ = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} = i^2\ \ \frac{1}{2}$$

çelişkisine ulaşılır. Dolayısıyla R(T) altcebir değildir.

4.3.3. Teorem

A birimli Archimedian f-cebiri ve T, A'da idempotent Markov operatörü $Te = e$ olsun. R(T)'nin altcebir olması için gerek ve yeter koşul Riesz altuzay olmasıdır [11].

İspat

⇒:

T Markov operatörü olduğundan kontraktiv olur. Dolayısıyla R(T) altcebir olduğundan Teorem 4.3.2 gereği R(T) Riesz altuzaydır.

:⇐

R(T) Riesz altuzay olsun. Bu durumda Teorem 4.3.1 gereği her $a, b \in A$ için $Ta.Tb = Te.T(Ta.Tb)$ dir. T Markov operatörü yani, $Te = e$ olduğundan bu eşitlik $Ta.Tb = T(Ta.Tb)$ şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla $Ta.Tb \in R(T)$ yani, R(T) altcebirdir.

4.4. Birimli f-Cebirlerinde Kelley Teoremi

4.4.1. Lemma

A birim elemanı e olan değişmeli gerçel cebir olmak üzere T, A'da ortalama operatör ve $Te = e$ olsun. O halde T projeksiyondur [11].

İspat

$a \in A$ için

$$T^2a = T\ Ta\ = T\ Ta.e\ = Ta.Te = Ta.e = Ta$$

olduğundan $T^2 = T$ yani, T projeksiyondur.

4.4.1. Teorem

A birimli Archimedian f-cebiri ve T, A'da pozitif projeksiyon olsun. Aşağıdakiler denktir.

(i) T ortalama operatördür,
(ii) T kontraktiv ve R(T), A'nın altcebiridir [11].

İspat

$i \Rightarrow ii$:

T ortalama operatör olsun. $a, b \in R(T)$ için

$$a.b = Ta.b = T\ a.b\ = a * b \in R(T)$$

olduğundan R(T), altcebirdir. Her $a \in A$ için

$$Ta = T^2a = T\ Ta\ = T\ e.Ta\ = Te.Ta$$

olduğundan A'daki (esas) çarpmaya göre Te, R(T)'nin birim elemanıdır. $Te\ ^2 = Te$ olduğundan $Te\ e - Te\ = 0$ dır.

$$Te\ e - Te\ = 0 \Rightarrow Te \perp (e - Te)$$
$$\Rightarrow Te, e\text{'nin bileşenidir.}$$
$$\Rightarrow Te \leq e$$

elde edilir. O halde T kontraktiv olur.

$ii \Rightarrow i$:

T pozitif kontraktiv projeksiyon olduğundan Teorem 4.2.5 gereği Seever eşitliğini sağlar yani, her $a, b \in A$ için $T\ a.Tb\ = T(Ta.Tb)$ dir. R(T), altcebir olduğundan her $a, b \in A$ için $Ta.Tb \in R(T)$ olur. T projeksiyon ve $Ta.Tb \in R(T)$ iken $T\ Ta.Tb\ = Ta.Tb$ dir. O halde $T\ a.Tb\ = T\ Ta.Tb\ = Ta.Tb$ elde edilir. Dolayısıyla T ortalama operatördür.

Teorem 4.4.1'in (ii)-maddesindeki kontraktiv şartının kaldırılamayacağına dair bir örnek verelim.

Örnek

$A = L_\infty[0,1]$ olsun. A üzerinde T lineer dönüşümünü,

$$T: A \longrightarrow A$$
$$f \longrightarrow Tf = 2 \int_0^1 f\ x\ dx\ .\chi_{[0,1\ 2]}$$

şeklinde tanımlayalım. $f \in A^+$ olsun. Her $x \in [0,1]$ için

$$f\ x\ \geq 0 \Rightarrow \int_0^1 f\ x\ dx \geq 0 \Rightarrow 2 \int_0^1 f\ x\ dx \geq 0$$

ve

$$\chi_{0,1\ 2}\ x = \begin{matrix} 1, & x \in 0,1\ 2 \\ 0, & x \in (1\ 2\ ,1] \end{matrix} \Rightarrow \chi_{0,1\ 2}\ (x) \geq 0$$

dır. O halde her $x \in [0,1]$ için

$$Tf\ x = 2 \int_0^1 f\ x\ dx\ .\chi_{0,1\ 2}\ x\ \geq 0 \Rightarrow Tf \geq 0$$

olur. Dolayısıyla T pozitiftir. $f \in A$ için

$$\begin{aligned} T^2 f = T\ Tf &= T\ \ 2 \int_0^1 f\ x\ dx\ \chi_{[0,1\ 2]} \\ &= 2 \int_0^1 f\ x\ dx\ .T(\chi_{0,1\ 2}) \\ &= 2 \int_0^1 f\ x\ dx\ .\ 2 \int_0^1 \chi_{0,1\ 2}\ x\ dx\ \chi_{[0,1\ 2]} \\ &= 2 \int_0^1 f\ x\ dx\ .\chi_{[0,1\ 2]} \\ &= Tf \end{aligned}$$

olduğundan T projeksiyondur. Fakat T kontraktiv değildir. Bunu olmayana ergi yöntemiyle gösterelim. T kontraktiv olsun. O halde

$$e : [0,1] \longrightarrow R$$
$$x \longrightarrow e\ x\ = 1$$

olmak üzere $Te = 2.\chi_{[0,1\ \ 2]} \leq e$ dir. $x = 1\ \ 2 \in [0,1]$ için

$$Te\ \ 1\ \ 2\ \ = 2 \leq 1 = e(1\ \ 2)$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla T kontraktiv değildir. T ortalama operatör de değildir. Bunu olmayana ergi yöntemiyle gösterelim. T ortalama operatör olsun. Bu durumda Teorem 4.4.1 gereği T kontraktiv olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla T ortalama operatör değildir.

4.4.2. Lemma

A Archimedian f-cebiri ve e, A'nın birim eleman olsun. $a \in A^{+}$ ve $a^2 \leq a^3$ ise $a \wedge e$ idempotent olur [11].

İspat

$a \geq 0$ ise $a^2 \geq 0$ olduğundan $-a \leq 0$ ve $-a^2 \leq 0$ dır.

$$\begin{aligned} -a \leq 0\ \wedge -a^2 \leq 0\ &\Rightarrow\ -a\ \vee\ -a^2\ \leq 0 \\ &\Rightarrow\ -a\ \vee\ -a^2\ \ + a \leq a \\ &\Rightarrow\ 0 \vee\ a - a^2\ \ \leq a \\ &\Rightarrow\ a - a^2\ ^{+} \leq a \end{aligned}$$

dır. Şimdi, $a \in A^{+}$ ve $a^2 \leq a^3$ olsun.

$$\begin{aligned} a^2 \leq a^3\ &\Rightarrow\ a^2 - a^3 \leq 0 \\ &\Rightarrow\ \ a^2 - a^3\ ^{+} = 0 \\ &\Rightarrow\ a.\ a - a^2\ ^{+} = 0 \\ &\Rightarrow\ a \wedge\ a - a^2\ ^{+} = 0 \\ &\Rightarrow\ \ a - a^2\ ^{+} = 0 \\ &\Rightarrow\ a - a^2 \leq 0 \\ &\Rightarrow\ a \leq a^2 \\ &\Rightarrow\ a \wedge e \leq a^2 \wedge e \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$a \wedge e \leq a^2 \wedge e = \ a \wedge e \ ^2 \leq \ a \wedge e \ .e = a \wedge e \ \Rightarrow \ a \wedge e \leq \ a \wedge e \ ^2 \leq a \wedge e$$
$$\Rightarrow \ a \wedge e = \ a \wedge e \ ^2$$

olduğundan $a \wedge e$ idempotent olur.

4.4.3. Lemma

A birimli Archimedian f-cebiri ve T, görüntü kümesi altcebir olan pozitif projeksiyon olmak üzere

i $Te \wedge e$ idempotenttir,
ii $Te \geq e$ ise T Markov operatörüdür [11].

İspat

i $a \in R(T)$ olsun. R(T) altcebir olduğundan $a.a = a^2 \in R(T)$ olur.

$$0 \leq a^2 = a.a = Ta.Ta = \ Ta \ ^2 \leq T \ a^2 \ .Te \quad , \ Teorem \ 4.1.3$$
$$= a^2.Te$$

olduğundan $a^2 \leq a^2.Te$ elde edilir. $a = Te \in R(T)$ seçersek $\ Te \ ^2 \leq \ Te \ ^3$ olacağından Lemma 4.4.2 gereği $Te \wedge e$ idempotent olur.

ii $Te \geq e$ olsun. O halde $Te - e \geq 0$ olur. Diğer taraftan ise

$$T \ Te - e \ = T^2e - Te = Te - Te = 0$$

dır. $Te - e \geq 0$ ve $T \ Te - e \ = 0$ olduğundan Teorem 4.1.4'ten $T \ Te - e \ ^2 = 0$ elde edilir.

$$T(T^2e - Te) \ ^2 \leq T \ T^2e \ .T \ \ Te - e \ ^2 \ = 0 \Rightarrow \ T(T^2e - Te) \ ^2 = 0$$

olur. A'nın semiprime oluşundan $T(T^2e - Te)^{\,2} = 0 \;\Rightarrow T\;T^2e - Te\; = 0$ olduğu görülür. $T^2e - Te \in R(T)$ olduğundan $T\;T^2e - Te\; = T^2e - Te = 0$ ifadesine ulaşılır.

$$T^2e - Te = 0 \;\Rightarrow\; Te\;e - Te\; = 0 \;\Rightarrow\; Te \perp\; e - Te$$

dir. O halde Te, e'nin bileşenidir yani, $Te \leq e$ olur. $Te \leq e$ ve hipotezden $Te \geq e$ olduğundan $Te = e$ yani, T Markov operatörüdür.

4.4.2. Teorem

A, birim elemanı e olan Archimedian f-cebiri olmak üzere A'nın idempotentleri sadece 0 ve e olsun. T, A'da tanımlı pozitif projeksiyon iken R(T) altcebir ise T=0 dır veya T Markov operatörüdür (ve dolayısıyla Teorem 4.4.1'in sonucu olarak T ortalama operatördür) [11].

İspat

R(T) altcebir olsun. Lemma 4.4.3-(i)'den $Te \wedge e$ idempotenttir. Hipotezden $Te \wedge e = 0$ veya $Te \wedge e = e$ olduğunu biliyoruz. $Te \wedge e = 0$ ise e zayıf birim olduğundan $e^{\,d} = 0$ olup $Te = 0$ olur. Şimdi $a \in A^+$ için $0 \leq a_n = a \wedge ne \leq ne$ olsun. T pozitif olduğundan

$$0 \leq T\;a \wedge ne\; \leq T\;ne\; = nTe = 0$$

dır. O halde her $n \in N^+$ için $T\;a \wedge ne\; = 0$ olur. $a_n \longrightarrow a\;(r.u)$ ve T pozitif olduğundan $T\;a_n\; = 0 \longrightarrow Ta\;(r.u)$ elde edilir. Dolayısıyla her $a \in A^+$ için $Ta = 0$ olduğu görülür. Keyfi bir $a \in A$ için $a = a^+ - a^-$ şeklinde yazılabileceğini biliyoruz ve $a^+, a^- \in A^+$ olduklarından $T\;a^+\; = 0$ ve $T\;a^-\; = 0$ dır. Buradan

$$Ta = T\;a^+ - a^+\; = T\;a^+\; - T\;a^-\; = 0$$

eşitliğine ulaşılır ki bu $T = 0$ olduğunu söyler. Şimdi $Te \wedge e = e$ olsun. Dolayısıyla $e \leq Te$ dir. O halde Lemma 4.4.3-(ii)'den T Markov operatörüdür.

Sonuç

X bağlantılı topolojik uzay, A=C(X) ve T, A'da pozitif projeksiyon olmak üzere, T ortalama operatördür ancak ve ancak R(T) altcebirdir [11].

İspat

⇒:
Aşikardır.

:⇐
R(T) altcebir olsun. Teorem 4.4.2'ye göre T'nin ortalama operatör olduğunu göstermek için C(X)'in idempotent elemanlarının sadece 0 ve 1 fonksiyonları olduğunu göstermeliyiz. $f \in C(X)$ için $f^2 = f$ olsun. Her $x \in X$ için

$$f^2\ x\ =\ f.f\ \ x\ = f\ x\ .f\ x\ = f(x)$$

olup, X bağlantılı olduğundan $f\ x\ = 0$ veya $f\ x\ = 1$ dir. O halde C(X)'in idempotent elemanları sadece 0 ve 1 fonksiyonlarıdır. Dolayısıyla T ortalama operatördür.

Aşikar idempotent elemanları olan Archimedian birimli f-cebirinde tanımlı bir pozitif projeksiyonun Seever eşitliğini sağlamayabileceğine dair bir örnek verelim.

Örnek

Noktasal sıralama ve çarpma ile $A = C[0,2]$'nin Archimedian birimli f-cebiri olduğunu biliyoruz. İdempotent elemanları da sadece 0 ve 1 fonksiyonlarıdır.

$$i:\ \ 0,2\ \longrightarrow R$$
$$x \longrightarrow i\ x\ = x$$

olmak üzere

$$T: A \longrightarrow A$$
$$a \longrightarrow Ta = \int_0^{\overline{2}} a\ x\ dx\ \ i$$

dönüşümünü tanımlayalım. T kontraktiv değildir. e, A'nın birim elemanı olmak üzere R(T) Riesz altuzaydır fakat $a = b = e$ seçersek Teorem 4.3.1-(ii) maddesinin sağlanmadığı görülür dolayısıyla Seever eşitliği de sağlanmaz.

4.5. Birimli Olmayan f-Cebirleri İçin Seever Eşitliği ve Kelley Teoremi

A birimli olmayan Archimedian semiprime f-cebiri olsun ve Stone şartını sağlasın. Banach cebirleri teorisindeki prosedüre benzer olarak A'yı birimli hale getireceğiz.

$$\rho: A \longrightarrow Orth(A)$$
$$a \longrightarrow \rho\ a\ = \pi_a: A \longrightarrow A$$
$$b \longrightarrow \pi_a\ b\ = ab$$

şeklinde tanımladığımız dönüşüm yardımıyla A'yı Orth(A)'nın içine bire-bir olarak gömelim. Burada A, Stone şartını sağladığından her $a \in A^+$ için $\pi_a \wedge I \in \rho(A)$ dır.

$$A^{\#} = \{a + \lambda I : a \in A,\ \lambda \in R\} = \{\pi_a + \lambda I : a \in A,\ \lambda \in R\}$$

şeklinde tanımlayalım. $A^{\#}$, Orth(A)'nın altkümesidir. Ayrıca $a = 0$ ve $\lambda = 1$ için $0 + 1 \cdot I \in A^{\#}$ olup $I \notin A$ olduğundan $A \subsetneq A^{\#} \subseteq Orth(A)$ dır [11].

4.5.1. Lemma

A, birimli olmayan Archimedian semiprime f-cebiri olsun ve Stone şartını sağlasın. $A^{\#} = \{a + \lambda I : a \in A,\ \lambda \in R\} = \{\pi_a + \lambda I : a \in A,\ \lambda \in R\}$ olmak üzere

i-) $A^{\#}$, Orth(A)'nın altcebiridir,
ii-) A, $A^{\#}$'da maksimal cebir idealidir,
iii-) $I \notin A$ olmak üzere her $x \in A^{\#}$ için $x = \pi_a + \lambda I$ yazılışı tektir [11].

İspat

i-) Her $x, y \in A^{\#}$ için $x = \pi_a + \lambda I$ ve $y = \pi_b + \beta I$ olacak şekilde $\pi_a, \pi_b \in \rho(A)$ ve $\lambda, \beta \in R$ vardır.

$$\begin{aligned} x \cdot y &= \pi_a + \lambda I \cdot \pi_b + \beta I \\ &= \pi_a \cdot \pi_b + \beta \pi_a + \lambda \pi_b + \lambda \beta I \\ &= \pi_{ab} + \beta \pi_a + \lambda \pi_b + \lambda \beta I \end{aligned}$$

şeklinde olup $x \cdot y \in A^{\#}$ dır. Dolayısıyla Orth(A)'dan indirgenen operasyonlarla $A^{\#}$, Orth(A)'nın altcebiridir.

ii-) $A, A^{\#}$ içinde idealdir. Ayrıca $A \subset I \subseteq A^{\#}$ iken I ideal olduğundan $I = A^{\#}$ olacağından $A, A^{\#}$ içinde maksimaldir. Dolayısıyla $A, A^{\#}$ içinde maksimal cebir idealidir.

iii-) Varsayalım ki $I \notin A$ olmak üzere her $x \in A^{\#}$ için $x = \pi_a + \lambda I$ yazılışı tek olmasın yani, $x = \pi_a + \lambda I = \pi_b + \beta I$ olacak şekilde $\pi_a, \pi_b \in \rho(A)$ ve $\lambda, \beta \in R$ olsun. Buradan

$$\pi_a - \pi_b = \beta - \lambda \; I$$

elde edilir. A vektör uzayı olduğundan $I \in A$ olur. Bu ise $I \notin A$ olması ile çelişir. O halde bu yazılış tektir.

4.5.2. Lemma

A Archimedian semiprime f-cebiri olsun ve Stone şartını sağlasın. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

i-) Her $\lambda \geq 0$ ve $a \in A$ için $a + \lambda I \; ^{+} = a^{+} - a^{-} \wedge \lambda I + \lambda I$ dır,
ii-) Her $\lambda < 0$ ve $a \in A$ için $a + \lambda I \; ^{+} = a^{+} - a^{+} \wedge \; -\lambda I$ dır [11].

İspat

i-) $\lambda \geq 0$ ve $a \in A$ keyfi olsun.

$$\begin{aligned} a^+ - a^- \wedge \lambda I + \lambda I &= a^+ + \ -a^- \vee -\lambda I \ + \lambda I \\ &= \ a^+ - a^- \ \vee \ a^+ - \lambda I \ + \lambda I \\ &= \ a \vee \ a^+ - \lambda I \ + \lambda I \\ &= \ a + \lambda I \ \vee a^+ \\ &= \ a + \lambda I \ \vee \ a \vee 0 \\ &= \ a + \lambda I \ \vee 0 \\ &= \ a + \lambda I \ ^+ \end{aligned}$$

ii-) $\lambda < 0$ ve $a \in A$ keyfi olsun.

$$\begin{aligned} a^+ - a^+ \wedge \ -\lambda I \ &= a^+ + \ -a^+ \ \vee \ \lambda I \\ &= 0 \vee \ a^+ + \lambda I \\ &= 0 \vee \ a \vee 0 \ + \lambda I \\ &= 0 \vee \ a + \lambda I \ \vee \lambda I \\ &= \ 0 \vee \lambda I \ \vee \ a + \lambda I \\ &= 0 \vee \ a + \lambda I \\ &= \ a + \lambda I \ ^+ \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç

A Archimedian semiprime f-cebiri olsun ve Stone şartını sağlasın. Orth(A)'dan gelen sıralamayla $A^\sharp$ Riesz altuzaydır [11].

İspat

Orth(A)'nın sıralı vektör uzayı olduğunu biliyoruz. $A^\sharp \subseteq Orth(A)$ olduğundan $A^\sharp$ da sıralı vektör uzayıdır. Lemma 4.5.2'den her $a + \lambda I \ \in A^\sharp$ için $a + \lambda I \ ^+ \in A^\sharp$ olduğundan $A^\sharp$

Riesz altuzaydır.

A kümesi Stone şartını sağlamasa da $A^{\#}$'ın Orth(A)'nın Riesz altuzayı olabileceğine dair örnek verelim.

Örnek

$$A = \ a \in C\ R^{+} \ : Sonunda\ a\ x\ = x.p_a\ x\ \ olacak\ şekilde\ p_a\ polinomu\ vardır$$

şeklinde tanımlayalım. A kümesi üzerinde noktasal sıralama ve çarpma işlemlerini göz önüne alalım. $f, g \in A$ ve $\lambda \in R$ olsun. $f \in A$ olduğundan en az bir $x_f \in R^{+}$ için $x_f \leq x$ iken $f\ x\ = x.p_f(x)$ olacak şekilde bir p_f polinomu mevcuttur. $g \in A$ olduğundan en az bir $x_g \in R^{+}$ için $x_g \leq x$ iken $g\ x\ = x.p_g(x)$ olacak şekilde bir p_g polinomu vardır. $x_h = x_f \vee x_g \in R^{+}$ için $x_h \leq x$ iken $f\ x\ + g\ x\ = x.\ p_f(x) + p_g(x)$ şeklindedir ve $p_f + p_g$ polinom olduğundan $f + g \in A \ldots (*)$ elde edilir. Ayrıca $\lambda f\ \ x\ = \lambda f\ x\ = \lambda x.p_f\ x\ = x.\ \lambda p_f(x)$ şeklinde yazılabilir ve λp_f polinom olduğundan $\lambda f \in A$ ... $**$ olur. O halde $(*)$ ve $(**)$'dan $A, C(R^{+})$'nın altvektör uzayıdır.

$A, C(R^{+})$'dan gelen sıralama ile sıralı vektör uzayıdır.

$$f\ \ x\ = f(x)\ = x.p_f(x)\ = x\ .\ p_f(x)\ = x.\ p_f(x)$$

şeklinde olup p_f sonunda bir polinom olacağından A Riesz altuzaydır. $x_0 = x_f \vee x_g \leq x$ için $f \cdot g\ \ x\ = x.\ x.p_f(x).p_g(x)$ olup $p_f.p_g$ bir polinom olduğundan $f \cdot g \in A$ dır. Dolayısıyla A altcebirdir. Ayrıca $f, g \geq 0$ iken $f \cdot g \geq 0$ olduğundan A Riesz cebiridir. $C(R^{+})$ f-cebiri ve A, Riesz altcebir olduğundan A da f-cebiridir. $C(R^{+})$ semiprime ve A, alt f-cebiri olduğundan A da semiprimedır. Varsayalım ki $1 \in A$ olsun. O halde $x_1 \in R^{+}$ için $x_1 \leq x$ iken $1\ x\ = x.p_1(x)$ olacak şekilde p_1 polinomu vardır. Buradan $1 = x.p_1(x)$ dolayısıyla $p_1\ x\ = \frac{1}{x}$ elde edilir ki bu bir polinom değildir. Dolayısıyla $1 \notin A$ dır.

$$i : R^+ \longrightarrow R$$
$$x \longrightarrow i\ x\ = x$$

şeklinde tanımlayalım. $i\ x\ = x.1(x)$ olduğundan $i \in A$ dır. Fakat $\pi_i \in Orth(A)$ ve $I \in Orth(A)$ olmasına karşın $\pi_i \wedge I \notin A^+$ dır. Bunu olmayana ergi yöntemiyle gösterelim. Varsayalım ki $\pi_i \wedge I \in A^+$ olsun. O halde $\pi_i \wedge I = \pi_a$ olacak şekilde $a \in A^+$ vardır.

$$\pi_i \wedge I\ \ f\ = \pi_a\ f\ \Rightarrow \pi_i\ f\ \wedge I\ f\ = \pi_a\ f$$
$$\Rightarrow i \cdot f \wedge f = a \cdot f$$

$f \in A$ olduğundan en az bir $x_f \in R^+$ için $x_f \leq x$ iken $f\ x\ = x.p_f(x)$ olacak şekilde bir p_f polinomu vardır. Dolayısıyla

$$i \cdot f \wedge f\ \ x\ =\ a \cdot f\ \ x\ \Rightarrow\ i \cdot f\ \ x\ \wedge f\ x\ = a\ x\ .f(x)$$
$$\Rightarrow i\ x\ .f\ x\ \wedge f\ x\ = a\ x\ .f(x)$$
$$\Rightarrow x.f\ x\ \wedge f\ x\ = a\ x\ .f(x)$$

Burada $x \geq 1$ düşünebiliriz. O halde $f\ x\ = a\ x\ .f(x)$ dir. $x_f \geq 1$ için

$$x.p_f\ x\ = a\ x\ .x.p_f\ x\ \Rightarrow a\ x\ = 1$$
$$\Rightarrow a = 1$$
$$\Rightarrow a \notin A$$

elde edilir ki bu $a \in A$ olması ile çelişir. O halde A Stone şartını sağlamaz.
Standart argümanlarla,

$$B = \ a \in C\ R^+\ :\ Sonunda\ a\ x\ = q_a\ x\ \ olacak\ şekilde\ q_a\ polinomu\ vardır$$

kümesini tanımlayalım. B birimli f-cebiridir.

$$\emptyset : B \longrightarrow Orth(A)$$
$$b \longrightarrow \pi_b : A \longrightarrow A$$
$$a \longrightarrow \pi_b\ a\ = ab$$

şeklinde tanımladığımız dönüşüm lineer, sıra sınırlı ve dikliği koruyandır. Ayrıca cebir ve lattice izomorfizmdir. Dolayısıyla $B \cong Orth(A)$ şeklindedir. Orth(A)'nın tabanı $Sp\ 1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ şeklinde olup buradaki her bir elemanı x ile çarparsak A'nın tabanı $Sp\ x, x^2, \dots, x^n, \dots$ elde edilir. O halde A'nın boyutu Orth(A)'nın boyutundan 1 eksiktir. $A \subset A^{\sharp} \subseteq Orth(A)$ olup A, Orth(A) içinde codimension 1 olduğundan $A^{\sharp} = Orth(A)$ dır. Dolayısıyla A, Stone şartını sağlamasa da $A^{\sharp}$, Riesz altuzay olabilir.

4.5.3. Lemma

A birimsiz Archimedian semiprime f-cebiri olsun ve Stone şartını sağlasın. T, A'da pozitif projeksiyon olmak üzere

$$T^{\sharp} : A^{\sharp} \longrightarrow A^{\sharp}$$
$$a + \lambda I \longrightarrow T^{\sharp}(a + \lambda I) = Ta + \lambda I$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm lineer ve idempotent olup $T^{\sharp}(I) = I$ özelliğini sağlar [11].

İspat

$T^{\sharp}$'ın anlamlı, iyi tanımlı ve lineer olduğu açıktır. Her $a + \lambda I \in A^{\sharp}$ için

$$\begin{aligned} T^{\sharp 2}(a + \lambda I) = T^{\sharp}(T^{\sharp}(a + \lambda I)) &= T^{\sharp}(Ta + \lambda I) \\ &= T^2 a + \lambda I \\ &= Ta + \lambda I \\ &= T^{\sharp}(a + \lambda I) \end{aligned}$$

olduğundan $T^{\sharp}$ idempotenttir. Ayrıca $a = 0$ ve $\lambda = 1$ için

$$T^{\sharp}(I) = T^{\sharp}(0 + I) = T(0) + I = I$$

eşitliği elde edilir.

4.5.4. Lemma

A birimsiz Archimedian semiprime f-cebiri olsun ve Stone şartını sağlasın. T, A'da pozitif projeksiyon olmak üzere, $T^{\#}$ pozitiftir ancak ve ancak T kontraktivdir [11].

İspat

⇒:
$T^{\#}$ pozitif ve $0 \leq a \leq I$ olsun.

$$a \leq I \Rightarrow I - a \geq 0$$
$$\Rightarrow T^{\#}(I - a) \geq 0$$
$$\Rightarrow T\ -a\ + I \geq 0$$
$$\Rightarrow -Ta + I \geq 0$$
$$\Rightarrow 0 \leq Ta \leq I$$

olduğundan T kontraktiv olur.

:⇐
T kontraktiv ve $a + \lambda I \geq 0$ olsun.

i $\lambda = 0$ ise $T^{\#}a = Ta \geq 0$ dır.

ii $\lambda < 0$ olsun. $a + \lambda I \geq 0$ olduğundan $a \geq -\lambda I > 0$ dır. A, Stone şartını sağladığından $a \wedge\ -\lambda I\ = -\lambda I \in A$ olur. Buradan $\lambda = -1$ için $I \in A$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $a + \lambda I \geq 0$ iken $\lambda > 0$ olduğu görülür.

$$a + \lambda I \geq 0 \Rightarrow a \geq -\lambda I$$
$$\Rightarrow -a \leq \lambda I$$
$$\Rightarrow\ -a\ ^{+} \leq\ \lambda I\ ^{+}$$
$$\Rightarrow 0 \leq a^{-} \leq \lambda I$$
$$\Rightarrow 0 \leq T\ a^{-}\ \leq \lambda I$$
$$\Rightarrow Ta = Ta^{+} - Ta^{-} \geq -Ta^{-} \geq -\lambda I$$

$$\Rightarrow Ta + \lambda I \geq 0$$
$$\Rightarrow T^{\#}\ a + \lambda I\ \geq 0$$

olduğundan $T^{\#}$ pozitiftir.

Lemma 4.5.4'teki Stone şartının gerekli olduğuna dair bir örnek verelim.

Örnek

Bir önceki örnekte tanımlanan ve noktasal sıralama ve çarpma ile f-cebiri olan $A = \ a \in C\ R^{+}\ : Sonunda\ a\ x\ = x.p_a\ x\ \ olacak\ şekilde\ p_a\ polinomu\ vardır$ kümesini göz önüne alalım. $x = 1$ ve $x = 2$ noktalarında sürekli olmak koşuluyla,

$$T : A \longrightarrow A$$
$$a \longrightarrow Ta : R^{+} \longrightarrow R$$
$$x \longrightarrow Ta\ x\ = \begin{matrix} a\ x\ , & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x \geq 2 \\ lineer, & 1 < x < 2 \end{matrix}$$

operatörünü tanımlayalım. T'nin pozitif ve lineer olduğu açıktır. $a \in A$ ve $0 \leq a \leq I$ olsun. $0 \leq x \leq 1$ için

$$0 \leq a \leq I \Rightarrow 0 \leq a(x) \leq I(x)$$
$$\Rightarrow 0 \leq Ta\ x\ = a(x) \leq 1$$
$$\Rightarrow Ta\ x\ f(x) \leq f(x)$$
$$\Rightarrow\ Ta \cdot f\ (x) \leq f(x)$$
$$\Rightarrow Ta \cdot f \leq I \cdot f$$
$$\Rightarrow \pi_{Ta}\ f\ \leq I\ f$$
$$\Rightarrow \pi_{Ta} \leq I$$
$$\Rightarrow Ta \leq I$$

elde edilir. $1 < x < 2$ için

$$Ta\ x\ = a\ 1\ .(2 - x)$$

şeklinde olacaktır. $0 \leq a \leq I$ olduğundan her $f \in A^+$ için $0 \leq a \cdot f \leq f$ dir. Dolayısıyla her $x \in R^+$ için $0 \leq a\ x\ .f(x) \leq f(x)$ olur. Özel olarak $f\ x\ = i(x)$ seçersek her $x \in R^+$ için $0 \leq a\ x\ \leq 1$ dir.

$$\begin{aligned} x \in\ 1{,}2\ &\Rightarrow 0 < 2 - x < 1 \text{ ve } 0 \leq a(1) \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 \leq a\ 1\ .(2 - x) \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 \leq Ta(x) \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 \leq Ta\ x\ .f(x) \leq f(x) \\ &\Rightarrow Ta \leq I \end{aligned}$$

elde edilir. $x \geq 2$ için $Ta\ x\ = 0$ olduğundan $Ta \leq I$ dır. O halde T kontraktiv olur. Şimdi $a \in A$ keyfi olsun.

$$\begin{aligned} T\ ^2a\ \ x\ = T\ Ta\ \ x\ &= \begin{matrix} Ta\ \ x\ ,\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0,\ x \geq 2 \\ Ta\ \ 1\ .\ 2 - x\ ,\ 1 < x < 2 \end{matrix} \\ &= \begin{matrix} a\ x\ ,\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0,\ x \geq 2 \\ a\ 1\ .\ 2 - x\ ,\ 1 < x < 2 \end{matrix} \\ &= Ta \end{aligned}$$

olduğundan T projeksiyondur. Şimdi $a = i \vee I$ elemanını göz önüne alalım. Bu eşitlik $\pi_a = \pi_i \vee I$ şeklinde düşünülebilir. Her $f \in A$ için

$$\pi_i \vee I\ \ f\ = \pi_i(f) \vee I(f) = i \cdot f \vee f$$

dir. Her $x \in R^+$ için

$$\begin{aligned} i \cdot f \vee f\ \ x\ &= i \cdot f\ \ x\ \vee f\ x \\ &= i\ x\ .f(x) \vee f(x) \\ &= x.f(x) \vee f(x) \end{aligned}$$

olur. Burada $1 \leq x_f \leq x$ alabiliriz. Buradan

$$1 \leq x_f \leq x \Rightarrow x.f\ x\ \vee f\ x\ = x.f(x)$$
$$\Rightarrow\ i \cdot f \vee f\ \ x\ = x.f(x) \in A^+$$

elde edilir. $a = i$ seçersek $x_f \leq x$ iken $a\ x\ = i\ x\ = x$ olup $a = i \vee I \in A^+$ olur. Dolayısıyla $a - I \geq 0$ dır. Fakat T'nin tanımı gereği

$$T^\sharp\ a - I\ = Ta - I < 0$$

olduğundan $T^\sharp$ pozitif değildir.

4.5.1. Teorem

A Archimedian semiprime f-cebiri olsun ve Stone şartını sağlasın. T, A'da pozitif kontraktiv projeksiyon ise her $a, b \in A$ için $T\ a \cdot Tb\ = T(Ta \cdot Tb)$ dir [11].

İspat

$A^\sharp = \ a + \lambda I : a \in A,\ \lambda \in R$ olmak üzere

$T^\sharp :\ A^\sharp \longrightarrow A^\sharp$
$a + \lambda I\ \longrightarrow T^\sharp\ a + \lambda I\ = Ta + \lambda I$

şeklinde tanımladığımız dönüşümün lineer ve idempotent olduğunu biliyoruz. Ayrıca Lemma 4.5.4'te gösterdik ki T kontraktiv olduğunda $T^\sharp$ pozitiftir. $T^\sharp\ I\ = I$ olduğundan $T^\sharp$ kontraktivdir. Dolayısıyla Teorem 4.2.5'i $A^\sharp, T^\sharp$ çiftine uygularsak $T^\sharp$ Seever eşitliğini sağlar. O halde $T^\sharp$'ın A'ya kısıtlaması olan T operatörü de A'da Seever eşitliğini sağlar.

4.5.2. Teorem

A, Stone şartını sağlayan Archimedian semiprime f-cebiri ve T, A'da pozitif kontraktiv projeksiyon olsun. R(T), A'nın altcebiri ise R(T), A'nın Riesz altuzayıdır [11].

İspat

$A^{\#} = \ a + \lambda I : a \in A, \ \lambda \in R$ olmak üzere

$T^{\#} : A^{\#} \longrightarrow A^{\#}$

$a + \lambda I \ \longrightarrow T^{\#} \ a + \lambda I \ = Ta + \lambda I$

şeklinde tanımlayalım. $T^{\#}$ idempotent Markov operatörüdür. $a, b \in A$ ve $\lambda, \beta \in R$ olsun. R(T) altcebir olduğundan $Ta \cdot Tb \in R(T)$, $\beta Ta \cdot I \in R(T)$ ve $\lambda Tb \cdot I \in R(T)$ dir. Dolayısıyla

$$T^{\#} \ a + \lambda I \ \cdot T^{\#} \ b + \beta I \ = \ Ta + \lambda I \ \cdot \ Tb + \beta I$$
$$= Ta \cdot Tb + \beta Ta \cdot I + \lambda Tb \cdot I + \lambda \beta I \in R(T^{\#})$$

elde edilir. O halde $R(T^{\#})$, $A^{\#}$'ın altcebiridir. Şimdi $R \ T \ = A \cap R(T^{\#})$ olduğunu gösterelim. $Ta \in R(T)$ olsun. $R(T) \subseteq A$ olduğundan $Ta \in A$ dır. Ayrıca $Ta = Ta + 0.I$ şeklinde yazılabildiğinden $Ta \in R(T^{\#})$ olur. Dolayısıyla $Ta \in A \cap R \ T^{\#}$ elde edilir. Buradan $R(T) \subseteq A \cap R(T^{\#}) \ldots (*)$ ifadesine ulaşılır. Şimdi $x \in A \cap R(T^{\#})$ olsun. Yani $x \in A$ ve $x \in R(T^{\#})$ dir. $x = T^{\#} \ x + 0.I \ = Tx$ olduğundan $x \in R(T)$ olur. O halde $A \cap R(T^{\#}) \subseteq R(T) \ldots (**)$ dir. $(*)$ ve $(**)$'dan $R \ T \ = A \cap R(T^{\#})$ elde edilir. $R(T^{\#})$, $A^{\#}$'ın altcebiri olduğundan Teorem 4.3.2 gereği $R(T^{\#})$, $A^{\#}$'ın Riesz altuzayıdır. Sonuç olarak $R \ T \ = A \cap R(T^{\#})$, A'nın Riesz altuzayıdır.

4.5.3. Teorem

A, Stone şartını sağlayan Archimedian semiprime f-cebiri ve T, A'da pozitif projeksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

i-) T ortalama operatördür,
ii-) R(T), A'nın altcebiridir ve T kontraktivdir [11].

İspat

$i \Rightarrow ii$:

T ortalama operatör olsun. Dolayısıyla her $a, b \in A$ için $T\ a \cdot Tb\ = Ta \cdot Tb$ olduğundan $Ta \cdot Tb \in R(T)$ olur. O halde R(T) altcebirdir. $a \in A$ ve $0 \leq a \leq I$ olsun. T pozitif olduğundan Ta pozitiftir. Buradan $a \cdot Ta \leq Ta$ olur. T'nin pozitif olduğunu kullanırsak $T\ a \cdot Ta\ \leq T\ Ta$ ... $(*)$ elde edilir.

$$\begin{aligned} Ta\ ^2 = Ta \cdot Ta &= T\ a \cdot Ta \\ &\leq T\ Ta\ ,\ (*)'dan \\ &= T^2 a \\ &= Ta\ ,\quad T\ projeksiyon \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla Orth(A)'da

$$\begin{aligned} Ta\ ^2 \leq Ta \Rightarrow\ & Ta\ ^2 - Ta \leq 0 \\ \Rightarrow\ & Ta\ ^2 - Ta\ ^+ = \ Ta \cdot\ Ta - I\ \ ^+ = Ta \cdot\ Ta - I\ ^+ = 0 \\ \Rightarrow & Ta \wedge\ Ta - I\ ^+ = 0\ ,\quad Orth\ A\ \ semiprime \\ \Rightarrow\ & Ta - I\ ^+ = 0\ ,\quad Ta\ pozitif \\ \Rightarrow & Ta - I \leq 0 \\ \Rightarrow & Ta \leq I \end{aligned}$$

olur ki bu T'nin kontraktiv olduğu anlamına gelir.

$ii \Rightarrow i$:

R(T), A'nın altcebiri ve T kontraktiv olsun. O halde Teorem 4.5.1 gereği her $a, b \in A$ için $T\ a \cdot Tb\ = T(Ta \cdot Tb)$ dir. Ayrıca R(T) altcebir olduğundan $Ta \cdot Tb \in R(T)$ olur. $Ta \cdot Tb \in R(T)$ ve T projeksiyon olduğundan dolayı $T\ Ta \cdot Tb\ = Ta \cdot Tb$ eşitliği elde edilir. O halde $T\ a \cdot Tb\ = T(Ta \cdot Tb) = Ta \cdot Tb$ yani, T ortalama operatördür.

Lemma 4.5.3'te tanımladığımız ve T pozitif projeksiyonunun $A^{\#}$'a genişlemesi olan $T^{\#}$'ın genelde pozitif olmadığına dair bir örnekle çalışmamızı tamamlayalım.

Örnek

N üzerinde ayrık topolojiyi göz önüne alalım. $N \subseteq \ _{n\in N}\ n$ olup, $\ _{n\in N}\ n$ kümesi sonlu olmadığından ayrık topolojiye göre N kompakt değildir. $X = N$ seçersek $C_0\ X\ = c_0$ dır. Gerçekten, $f \in C_0\ N$ olsun. Teorem 2.3.12-(ii)'den $B = \ n \in N :\ f(n)\ \geq \varepsilon$ şeklinde tanımlanan küme N üzerindeki ayrık topolojiye göre kompakt olur ve dolayısıyla sonludur. $A = \ f\ n\ : n \in N$ kümesini göz önüne alalım. A, sonsuz küme olduğundan dolayı $A \setminus B = \ f\ n : f(n)\ < \varepsilon$ kümesi de sonsuzdur. O halde $f(n) \longrightarrow 0$ dır. Dolayısıyla $f \in c_0$ olup buradan $C_0\ N\ \subseteq c_0$ ... $(*)$ elde edilir. Şimdi $f \in c_0$ olsun.

$$f : N \longrightarrow R$$
$$n \longrightarrow f(n)$$

şeklinde olup $f(n) \longrightarrow 0$ dır. Ayrık topolojiden başka bir topolojiye tanımlanan bütün fonksiyonlar sürekli olacağından $f \in C(N)$ olur. $f(n) \longrightarrow 0$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olan her n için $\ f(n)\ < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in N$ mevcuttur. O halde $\ n \in N :\ f(n)\ \geq \varepsilon$ kümesi sonludur ve dolayısıyla kompakttır. Teorem 2.3.12-(ii) gereği $f \in C_0\ N$ yani, $c_0 \subseteq C_0\ N$ ... $(**)$ olur. Dolayısıyla $X = N$ için $C_0\ N\ = c_0$ dır. Şimdi $e_1 = \ 1,0,0, \ldots$ olmak üzere

$$T :\ c_0 \longrightarrow c_0$$
$$a_n\ \longrightarrow T\ a_n\ =\ \ _{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}\ .e_1$$

operatörünü tanımlayalım. $\ a_n\ \in c_0$ olsun. $a_n \longrightarrow 0$ olduğundan $\varepsilon = 1$ için $\ a_n\ < 1$ olacak şekilde bir $n_0 \in N$ vardır.

$$a_n\ < 1 \Rightarrow \frac{a_n}{n^2} < \frac{1}{n^2} \Rightarrow\ \ _{n=n_0}^{\infty}\ \frac{a_n}{n^2}\ <\ \ _{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

elde edilir. $\ _{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ serisi yakınsak olduğundan $\ _{n=n_0}^{\infty}\ \frac{a_n}{n^2}$ serisi de yakınsaktır. R tam uzay olduğundan $\ _{n=n_0}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}$ serisi yakınsak olur. O halde $\ _{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}\ .e_1$ serisi yakınsak olur ki bu T'nin anlamlı olduğu anlamına gelir. T'nin lineer ve pozitif projeksiyon olduğu açıktır. Ayrıca $Orth\ c_0\ = \ell_\infty$ ve $I = \ 1,1,1, \ldots$ olup c_0, ℓ_∞ içinde Stone şartını sağlar.

Bunu göstermek için $0 \leq a = a_n \in c_0$ olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ iken $a_n < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in N$ vardır. $0 \leq a = a_n$ olduğundan $a_n < \varepsilon$ yazabiliriz. Burada $\varepsilon < 1$ seçersek,

$$a_n \wedge 1 < \varepsilon \wedge 1 = \varepsilon \Rightarrow a_n \wedge 1 < \varepsilon \Rightarrow a \wedge I \longrightarrow 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $a \wedge I \in c_0$ olur. Buradan istenilene ulaşılır. Şimdi $A^{\#} = c$ olduğunu gösterelim. $a + \lambda I \in A^{\#}$ olsun. $a + \lambda I = a_n + \lambda I$ ve $a_n \in c_0$ olduğundan $a + \lambda I \in c$ olur. O halde $A^{\#} \subseteq c \ldots (*)$ dır. $x = b_n \in c$ olsun. b_n yakınsak olduğundan $b_n \longrightarrow b$ dir. $b = b, b, b, \ldots$ sabit dizisini göz önüne alırsak $b_n - b \longrightarrow 0$ olur. Buradan $b_n - b + b = b_n \longrightarrow b$ olur ki bu $x = b_n \in A^{\#}$ olması demektir. Yani $c \subseteq A^{\#} \ldots (**)$ elde edilir. Dolayısıyla $c = A^{\#}$ olduğu görülür. Fakat $a = -1, -1, 0, 0, \ldots$ için $a + I = 0, 0, 1, 1, \ldots \geq 0$ olmasına rağmen

$$\begin{aligned} T^{\#}(a + I) = Ta + I &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} . e_1 + I \\ &= -1 + \frac{-1}{4} + 0 + 0 \ldots . e_1 + 1, 1, 1, \ldots \\ &= \frac{-5}{4} . e_1 + 1, 1, 1, \ldots \\ &= \frac{-5}{4}, 0, 0, \ldots + 1, 1, 1, \ldots \\ &= \frac{-1}{4}, 1, 1, \ldots \end{aligned}$$

olduğundan $T^{\#}$ pozitif değildir.

5. SONUÇ

A birimli f-cebiri, L Riesz Uzayı ve

$A \times L \longrightarrow L$

$a, x \longrightarrow a.x$

dönüşümü verilsin. Eğer

(1) L, A üzerinde sol modül ve her $x \in L$ için $e.x = x$

(2) Her $a \in A^+, x \in L^+$ için $a.x \in L^+$

(3) Her $x, y \in L,\ x \perp y$ iken her $a \in A$ için $ax \perp y$

şartları sağlanırsa L'ye A üzerinde bir sol f-modül veya kısaca f-modül denir. Her f-cebiri kendi üzerinde bir f-modülüdür. Tezin ilk kısmında C(K) modülleri için verilen teori aslında f-modüllerinin özel bir halidir. Kelley Teoreminin f-modüllerine genişletilebileceği düşünülmüş fakat istenilen genişleme elde edilemediği için açık bir problem olarak kalmıştır. İleriki çalışmalarımızda bu genişlemenin elde edileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

1. Aliprantis, C. D., Burkinshaw, O. (1985). *Positive Operators*. Orlando: Academic Press.

2. Bayraktar, M. (2006). *Fonksiyonel Analiz*. Ankara: Gazi Kitabevi, 188.

3. Bernau, S. J. (1965). On Semi-Normal Lattice Rings. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 61(3), 613-616.

4. Bernau, S. J., Huijsmans, C. D. (1990). Almost f-Algebras and d-Algebras. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 107(2), 287-308.

5. Birkhoff, G. (1961). *Lattice Theory, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 2*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 163-172.

6. Birkhoff, G., Pierce, R. S. (1956). Lattice Ordered Rings. *Anais da Academia Brasileira de Ciencias*, 28, 41-69.

7. Brainerd, B. (1962). On the Structure of Averaging Operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 5(3), 347-377.

8. Conway, J. B. (1985). *A Course in Functional Analysis*. New York: Springer, 149.

9. Huijsmans, C. B., Pagter, B. D. (1984a). Subalgebras and Riesz Subspaces of an f-Algebras. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 48(1), 161-174.

10. Huijsmans, C. B., Pagter, B. D. (1984b). The Order Bidual of Lattice Ordered Algebras. *Journal of Functional Analysis*, 59(1), 41-64.

11. Huijsmans, C. B., Pagter, B. D. (1986). Averaging Operators and Positive Contractive Projections. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 113(1), 163-184.

12. Kelley, J. L. (1958). Averaging Operators on $C_\infty(X)$. *Illinois Journal of Mathematics*, 2(2), 214-223.

13. Koçak, M. (2011). *Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar (Üçüncü Baskı)*. Eskişehir: Kampüs Yayıncılık, 298-303.

14. Lipecki, Z., Thomsen, W. (1982). Extension of Positive Operators and Extreme Points IV. *Colloquium Mathematicum*, 46, 269-273.

15. Luxemburg, W. A. J., Zaanen, A. C. (1971). *Riesz Spaces I*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.

16. McDonald, J. N., Weiss, N. A. (1999). *A Course in Real Analysis*. San Diego: Academic Press, 475.

17. Orhon, M. (1972). A Note on Averaging Operators. *Journal of the London Mathematical Society*, 6(1), 139-142.

18. Pagter, B. D. (1984). A Note on Disjointness Preserving Operators. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 90(4), 543-549.

19. Rota, G. C. (1960). On the Representation of Averaging Operators. *Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova*, 30, 52-64.

20. Rota, G. C. (1963). *Reynolds Operators, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics 16*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 70-83.

21. Schaefer, H. H. (1974). *Banach Lattices and Positive Operators, Grundlehren 215*. Berlin: Springer.

22. Seever, G. L. (1966). Nonnegative Projections on $C_0(X)$. *Pacific Journal of Mathematics*, 17(1), 159-166.

23. Vincent-Smith, G. (1967). On the Hahn-Banach Theorem for Modules. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 17, 72-90.

24. Zaanen, A. C. (1975). Examples of Orthomorphisms. *Journal of Approximation Theory*, 13(2), 192-204.

25. Zaanen, A. C. (1983). *Riesz Spaces II*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 650.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler



Soyadı, adı : ÖZCAN, Kazım

Uyruğu : T.C.

Doğum tarihi ve yeri : 14.09.1980, Ordu

Medeni hali : Evli

Telefon : 0 (505) 296 11 85

e-mail : kzmzcn@hotmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek Lisans	Gazi Üniversitesi/F.B.E.M.A.B.D.	Devam Ediyor
Lisans	Marmara Üniversitesi/A.E.F.M.Ö.	2003
Lise	Ordu Atatürk Lisesi	1998

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2009-…	Altındağ Gazi A.L.	Matematik Öğretmeni
2007-2009	Samsun Canik A.L.	Matematik Öğretmeni
2003-2007	Sultanahmet E.M.L.	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

-

Hobiler

Yüzme, Tiyatro, Müzik