
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

HERMİTE TABANLI APPELL POLİNOMLARI

Gülnihal SOYARSLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AĞUSTOS 2023

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Gülnihal SOYARSLAN

04/08/2023

HERMİTE TABANLI APPELL POLİNOMLARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Gülnihal SOYARSLAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ağustos 2023

ÖZET

Bu tez sekiz bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan lemma ve tanımları içeren önbilgiler verilmiştir. Üçüncü ve dördüncü bölümlerde sırasıyla Appell ve Hermite polinomlarının tanım ve özellikleri hatırlatılmıştır. Beşinci bölümde, Hermite tabanlı Appell polinomlarının tanımı verilmiş ve bazı yeni özellikler elde edilmiştir. Ayrıca bu polinomlarla Bernoulli, Euler ve Genocchi polinomları arasındaki ilişkilerden yararlanarak, bu polinomlar için de yeni sonuçlar incelenmiştir. Altıncı bölümde Hermite tabanlı Appell polinomlarını kapsayan daha genel bir polinom tanımlanmış ve bu polinom için yeni bağıntılar elde edilmiştir. Genelleştirilmiş Hermite tabanlı Appell polinomları yardımıyla Hermite tabanlı Bernoulli, Euler ve Genocchi polinomlarının genelleştirilmiş halleri tanımlanmış ve bu polinomların da özellikleri incelenmiştir. Yedinci bölümde yine Hermite tabanlı polinomlardan olan Hermite-Laguerre ve Hermite-Sister Celine’s polinomları için bilineer ve bilateral doğurucu fonksiyonlar veren teoremler elde edilmiş ve bunlara örnekler verilmiştir. Son bölüm sonuç ve önerilerden oluşmaktadır.

Bilim Kodu	:	20406
Anahtar Kelimeler	:	Appell polinomları, Hermite tabanlı Appell polinomları, doğurucu fonksiyon, rekürans bağıntısı.
Sayfa Adedi	:	67
Danışman	:	Prof. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN

HERMITE BASED APPELL POLYNOMIALS

(M. Sc. Thesis)

Gülnihal SOYARSLAN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

August 2023

ABSTRACT

This thesis consists of eight chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, preliminary information including the lemma and definitions that will be used in other chapters are given. In the third and fourth chapters, the definitions and properties of Appell and Hermite polynomials are reminded, respectively. In the fifth chapter, the definition of Hermite-based Appell polynomials is given and some new properties are obtained. In addition, by using the relationships between these polynomials and Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials, new results for these polynomials are also examined. In the sixth chapter, a more general polynomial including Hermite-based Appell polynomials is defined and new relations are obtained for this polynomial. With the help of the generalized Hermite-based Appell polynomials, the generalized versions of Hermite-based Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials are defined and the properties of these polynomials are investigated. In the seventh chapter, theorems giving bilinear and bilateral generating functions are obtained for Hermite-Laguerre and Hermite-Sister Celine's polynomials, which are also Hermite-based polynomials, and examples are given. The last section consists of conclusions and recommendations.

Science Code : 20406
Key Words : Appell polynomials, Hermite-based Appell polynomials, generating function, recurrence relation.
Page Number : 67
Supervisor : Prof. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans sürecimde bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, sürecin her aşamasında ilgi ve desteğini gördüğüm tez çalışmamın her satırında emeği olan danışmanım Prof. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Yanımda olduğunu her zaman hissettiren canıım annem Melek ESKİTÜRK' e çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

SİMGELER VE KISALTMALAR ix

1. GİRİŞ 1

2. LEMMA VE TANIMLAR 3

2.1. Doğurucu Fonksiyon 3

2.2. Bilineer ve Bilateral Doğurucu Fonksiyon 3

3. APPELL POLİNOMLARI 5

4. HERMİTE POLİNOMLARI 15

4.1. Hermite Polinomları 15

4.2. İki Değişkenli Hermite Polinomları 17

4.3. Üç Değişkenli Hermite Polinomları 17

5. HERMİTE TABANLI APPELL POLİNOMLARI 19

6. GENELLEŞTİRİLMİŞ HERMİTE TABANLI APPELL POLİNOMLARI 39

7. HERMİTE TABANLI DİĞER POLİNOMLAR 55

7.1. Hermite-Laguerre Polinomu 55

7.2. Hermite-Sister Celine’s Polinomu 58

8. SONUÇ VE ÖNERİLER 63

KAYNAKLAR 65

Sayfa

ÖZGEÇMİŞ 67

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{A_n(x)}$	Appell polinomları
$\boldsymbol{B_n(x)}$	Bernoulli polinomları
$\boldsymbol{E_n(x)}$	Euler polinomları
$\boldsymbol{G_n(x)}$	Genocchi polinomları
$\boldsymbol{H_n(x)}$	Hermite polinomları
$\boldsymbol{H_n(x,y)}$	İki değişkenli Hermite polinomları
$\boldsymbol{H_n(x,y,z)}$	Üç değişkenli Hermite polinomları
${}_H\boldsymbol{A_n(x,y,z)}$	Hermite tabanlı Appell polinomları
${}_H\boldsymbol{B_n(x,y,z)}$	Hermite tabanlı Bernoulli polinomları
${}_H\boldsymbol{E_n(x,y,z)}$	Hermite tabanlı Euler polinomları
${}_H\boldsymbol{G_n(x,y,z)}$	Hermite tabanlı Genocchi polinomları
$\boldsymbol{g_k^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)}$	Çok değişkenli Lagrange polinomları
${}_H\boldsymbol{A_n^{(\alpha)}(x,y,z)}$	Genelleştirilmiş Hermite tabanlı Appell polinomları
${}_H\boldsymbol{B_n^{(\alpha)}(x,y,z)}$	Genelleştirilmiş Hermite tabanlı Bernoulli polinomları
${}_H\boldsymbol{E_n^{(\alpha)}(x,y,z)}$	Genelleştirilmiş Hermite tabanlı Euler polinomları
${}_H\boldsymbol{G_n^{(\alpha)}(x,y,z)}$	Genelleştirilmiş Hermite tabanlı Genocchi polinomları
$\boldsymbol{L_k(x)}$	Laguerre polinomları
${}_H\boldsymbol{f}_n\boldsymbol{(x,y,z)}$	Hermite-Sister Celine's polinomları
${}_H\boldsymbol{L}_n\boldsymbol{(x,y,z)}$	Hermite-Laguerre polinomları
$\boldsymbol{h_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)}$	Lagrange-Hermite polinomları
$\boldsymbol{c_n(\beta,x)}$	Poisson-Charlier polinomları

1. GİRİŞ

Yüz yılı aşkın bir süre önce Appell, üstel tipten bir doğurucu fonksiyon ailesine sahip genel bir polinom sınıfı tanımlamıştır [1]. Literatürde Appell tipi polinomlar olarak bilinen bu sınıf, nümerik analiz, olasılık teorisi, yaklaşım teorisi, sayılar teorisi, özel fonksiyonlar, matematiksel fizik ve kimyanın çeşitli uygulama alanları gibi geniş bir yelpazede çalışılmaktadır. Appell polinomlar ailesi, bilinen bir çok klasik polinomu içermektedir. Bu çalışmada, bunlardan özellikle Bernoulli, Euler ve Genocchi polinomlarına yer verilmiştir.

Diğer taraftan klasik mekanik problemlerinde başlayan, elektromanyetik teori, kuantum mekaniği, kuantum fiziği ve termodinamik problemlerinde de karşımıza çıkan klasik ortogonal polinomlar ailesinden olan Hermite polinomları, cebir ve sayılar teorisindeki çalışmalarıyla tanınan Fransız matematikçi C. Hermite (1822-1901) tarafından tanımlanmıştır. Daha sonraki yıllarda iki değişkenli ve üç değişkenli Hermite polinomları tanımlanmış ve bunlarla ilgili birçok çalışma yapılmıştır [2,3].

Son zamanlarda, diferensiyel operatörleri içeren teknikler üzerinde çok fazla çalışmalar yapılmaktadır. Bu teknik kullanılarak, Khan ve arkadaşları üç değişkenli Hermite polinomları ile Appell polinomlarından yola çıkarak Hermite tabanlı Appell polinomlarını tanımlamışlar ve bu polinomların çeşitli özelliklerini incelemişlerdir [4].

Bu tezde, Hermite tabanlı Appell polinomları incelenmiş, bu polinomlar için bazı yeni özellikler elde edilmiştir. Ayrıca bu polinomlarla Bernoulli, Euler ve Genocchi polinomları arasındaki ilişkilerden yararlanarak, bu polinomlar için de yeni sonuçlara ulaşılmıştır. Daha sonra, Hermite tabanlı Appell polinomlarını kapsayan daha genel bir polinom tanımlanmış ve bu polinom için yeni bağıntılar elde edilmiştir. Genelleştirilmiş Hermite tabanlı Appell polinomları yardımıyla Hermite tabanlı Bernoulli, Euler ve Genocchi polinomlarının genelleştirilmiş halleri tanımlanmış ve bu polinomların da özellikleri incelenmiştir. Son olarak, yine Hermite tabanlı polinomlardan olan Hermite-Laguerre ve Hermite-Sister Celine’s polinomları için bilineer ve bilateral doğurucu fonksiyonlar veren teoremler elde edilmiş ve bunlara örnekler verilmiştir.

2. LEMMA VE TANIMLAR

2.1. Doğurucu Fonksiyon

İki değişkenli bir $H(x,t)$ fonksiyonu t nin kuvvetleri cinsinden

$$H(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} k_n f_n(x) t^n$$

şeklinde bir seriye açılabiliyorsa, $\{f_n(x)\}$ fonksiyonlar ailesi için $H(x,t)$ fonksiyonuna bir doğurucu fonksiyon denir. Burada k_n ler x ve t den bağımsız n nin fonksiyonu olup farklı parametreler içerebilirler.

2.2. Bilateral ve Bilineer Doğurucu Fonksiyon

2.2.1. Tanım

$\mathrm{F}(x_1,\dots,x_s,t)$ fonksiyonu, t nin kuvvetlerine göre

$$\mathrm{F}(x_1,\dots,x_s,t)=\sum_{r=0}^{\infty} \lambda_r f_r(x_1)\dots f_r(x_s) t^r$$

şeklinde bir seriye açılabiliyorsa $\mathrm{F}(x_1,\dots,x_s,t)$ fonksiyonuna $f_r(x_1),\dots,f_r(x_s)$ fonksiyonları için multilineer doğurucu fonksiyon denir. Burada λ_r ler $x_1,\dots,x_s$ ve t den bağımsız r nin bir fonksiyonudur. Eğer $s=2$ alınırsa $\mathrm{F}(x_1,x_2,t)$ fonksiyonuna bilineer doğurucu fonksiyon denir.

2.2.2. Tanım

$\mathrm{G}(x_1,\dots,x_s,t)$ fonksiyonu, t nin kuvvetlerine göre

$$\mathrm{G}(x_1, \dots, x_s, t) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r f_{r,1}(x_1) \dots f_{r,s}(x_s) t^r$$

şeklinde bir seriye açılabiliyorsa $\mathrm{G}(x_1, \dots, x_s, t)$ fonksiyonuna $f_{r,1}(x_1), \dots, f_{r,s}(x_s)$ fonksiyonları için multilateral doğurucu fonksiyon denir. Burada c_r ler $x_1, \dots, x_s$ ve t den bağımsız r nin bir fonksiyonudur. Eğer $s = 2$ alınırsa $\mathrm{G}(x_1, x_2, t)$ fonksiyonuna bilateral doğurucu fonksiyon denir.

2.3. Lemma

$A(k, n)$ k ve n ye bağlı dizi ve $p \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} A(k, n - pk)$$

$$(ii) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n + pk)$$

eşitlikleri sağlanır [5]. Burada $\left[\frac{n}{p}\right]$, $\frac{n}{p}$ ye eşit ya da $\frac{n}{p}$ den küçük olan en büyük tam sayıyı göstermektedir.

3. APPELL POLİNOMLARI

$A_n(x)$ Appell polinomları,

$$\frac{d}{dx}A_n(x) = nA_{n-1}(x), \qquad n \in \mathbb{N}$$

bağıntısını sağlar [1]. Bu polinomlar,

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n , \qquad a_0 \neq 0 \tag{3.1}$$

kuvvet serisi olmak üzere,

$$A(t)\exp(xt) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)\frac{t^n}{n!} \tag{3.2}$$

doğurucu fonksiyon bağıntısıyla tanımlanırlar [1].

$\{A_n(x)\}$ Appell polinomlar ailesi, bilinen birçok polinomu içerir. Bunlardan bazıları Eş. 3.2 bağıntısında $A(t)$ yerine farklı seçimler yapılarak aşağıda verilmiştir:

- Eş. 3.2 de $A(t) = \frac{t}{e^t-1}$ alınırsa, $B_n(x)$ Bernoulli polinomları için

$$\frac{t}{e^t-1}\exp(xt) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!}, \qquad |t| < 2\pi \tag{3.3}$$

doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilir [6].

Bernoulli polinomlarının ilk birkaç terimi,

$B_0(x) = 1$

$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$

$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$

$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$

şeklindedir. Şimdi bu polinomların bazı özelliklerini verelim.

3.1. Teorem

Bernoulli polinumu,

$B_n'(x) = nB_{n-1}(x)\,, \qquad n \geq 1$

bağıntısını sağlar [6].

İspat

Eş. 3.3 ile gösterilen doğurucu fonksiyon bağıntısında her iki tarafın x e göre türevi alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n'(x)\frac{t^n}{n!} = t\frac{t}{e^t - 1}\exp(xt)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^{n+1}}{n!}$$

olup, burada $B_0'(x) = 0$ olduğu göz önüne alındığında,

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n'(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} nB_{n-1}(x)\frac{t^n}{n!}$$

eşitliği yazılabilir. Burada $\frac{t^n}{n!}$ in katsayıları eşitlenirse,

$B_n'(x) = nB_{n-1}(x)\,, \qquad n \geq 1$

bağıntısı elde edilir.

Bernoulli polinomunun Eş. 3.3 ile gösterilen doğurucu fonksiyon bağıntısında $x = 0$ alınırsa Bernoulli sayıları elde edilir. Bernoulli sayılarının doğurucu fonksiyon bağıntısı

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}\,, \qquad |t| < 2\pi \tag{3.4}$$

şeklinde olup, Bernoulli sayılarının ilk birkaç terimi,

$B_0 = 1\,, \qquad B_1 = \frac{-1}{2}, \qquad B_2 = \frac{1}{6}, \qquad B_3 = 0, \qquad B_4 = \frac{-1}{30}$

şeklindedir.

3.2. Teorem

Bernoulli sayıları ve Bernoulli polinomları arasında,

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}$$

şeklinde bir ilişki vardır [6].

İspat

Eş. 3.3 ün sol tarafında Eş. 3.4 kullanılır ve Lemma 2.3 (i) $p = 1$ için uygulanırsa,

$$\frac{t}{e^t - 1}\exp(xt) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xt)^n}{n!}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} B_k \frac{t^k}{k!} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} x^{n-k} \right)$$

olup buradan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} B_k \frac{x^{n-k}}{k!\,(n-k)!} \right) t^n$$

yazılarak, t^n nin katsayıları eşitlenip düzenlendiğinde istenilen sonuç elde edilir.

Bernoulli polinomları $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere,

$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$,
$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$,
$(-1)^n B_n(-x) = B_n(x) + nx^{n-1}$,

rekürans bağıntılarını da sağlar [6].

- Eş. 3.2 de $A(t) = \frac{2}{e^t+1}$ alınırsa $E_n(x)$ Euler polinomları için

$$\frac{2}{e^t+1} \exp(xt) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad , \qquad |t| < \pi \tag{3.5}$$

doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilir [6].

Euler polinomlarının ilk birkaç terimi,

$E_0(x) = 1$
$E_1(x) = x - \frac{1}{2}$
$E_2(x) = x^2 - x$
$E_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}$

şeklindedir. Şimdi bu polinomların bazı özelliklerini verelim.

Eş. 3.5 ile gösterilen Euler polinomunun doğurucu fonksiyon bağıntısında $x = 0$ alınırsa Euler sayıları elde edilir. Euler sayılarının doğurucu fonksiyon bağıntısı

$$\frac{2}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{t^n}{n!} \ , \qquad |t| < \pi \tag{3.6}$$

şeklinde olup, Euler sayılarının ilk birkaç terimi,

$E_0 = 1 \, , E_1 = 0, E_2 = -1 \, , E_3 = 0, \ E_4 = 5$

şeklindedir.

Euler polinomları $n \in \mathbb{N}$ için,

$E'_n(x) = nE_{n-1}(x)$

ve $n \in \mathbb{N}_0$ için,

$E_n(x + 1) + E_n(x) = 2x^n$
$E_n(1 - x) = (-1)^n E_n(x)$
$(-1)^{n+1} E_n(-x) = E_n(x) - 2x^n$

bağıntılarını da sağlar [6].

3.3. Teorem

Euler sayıları ve Euler polinomları arasında,

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k x^{n-k}$$

şeklinde bir bağıntı vardır.

İspat

Eş. 3.5 in sol tarafında Eş. 3.6 kullanılır ve Lemma 2.3 (i) $p = 1$ için uygulanırsa,

$$\frac{2}{e^t + 1}\exp(xt) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} E_k \frac{t^k}{k!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xt)^n}{n!}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} E_k \frac{t^k}{k!}\frac{t^{n-k}}{(n-k)!}x^{n-k}\right)$$

olup buradan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} E_k \frac{x^{n-k}}{k!\,(n-k)!}\right)t^n$$

yazılarak, t^n nin katsayıları eşitlenip düzenlendiğinde istenilen sonuç elde edilir.

- Eş 3.2 de $A(t) = \frac{2t}{e^t+1}$ alınırsa $G_n(x)$ Genocchi polinomları için

$$\frac{2t}{e^t + 1}\exp(xt) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x)\frac{t^n}{n!} \quad , \qquad |t| < \pi \tag{3.7}$$

doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilir [7].

Genocchi polinomlarının ilk birkaç terimi,

$G_0(x) = 0$
$G_1(x) = 1$

$$G_2(x) = 2x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$$
$$G_3(x) = 3x^2 - 3x = 3x(x-1)$$

şeklindedir.

Eş. 3.7 ile gösterilen Genocchi polinomunun doğurucu fonksiyon bağıntısında $x = 0$ alınırsa Genocchi sayıları elde edilir. Genocchi sayılarının doğurucu fonksiyon bağıntısı

$$\frac{2t}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{t^n}{n!} \quad , \qquad |t| < \pi \tag{3.8}$$

şeklinde olup, Genocchi sayılarının ilk birkaç terimi,

$$G_0 = 0\,, G_1 = 1\,, G_2 = -1\,, G_4 = 1,\ G_6 = -3$$

$$\begin{cases} G_1 & = 1 \\ G_{2n+1} & = 0 \end{cases} \quad ;\ n \in \mathbb{N}$$

şeklindedir.

Genocchi polinomları $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$G'_n(x) = nG_{n-1}(x),$$
$$G_n(x+1) + G_n(x) = 2nx^{n-1}$$
$$G_n(1-x) = \begin{cases} G_n(x), & n\ tek\ ise \\ -G_n(x), & n\ çift\ ise \end{cases}$$
$$G_n(x) + (-1)^{n-1} G_n(-x) = 2nx^{n-1}$$

bağıntılarını da sağlar [7].

3.4. Teorem

Genocchi sayıları ve Genocchi polinomları arasında,

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} G_k x^{n-k}$$

şeklinde bir bağıntı vardır.

İspat

Eş. 3.7 in sol tarafında Eş. 3.8 kullanılır ve Lemma 2.3 (i) $p = 1$ için uygulanırsa,

$$\frac{2t}{e^t + 1}\exp(xt) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} G_k \frac{t^k}{k!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xt)^n}{n!}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} G_k \frac{t^k}{k!}\frac{t^{n-k}}{(n-k)!}x^{n-k}\right)$$

olup buradan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} G_k \frac{x^{n-k}}{k!\,(n-k)!}\right)t^n$$

yazılarak, t^n nin katsayıları eşitlenip düzenlendiğinde istenilen sonuç elde edilir.

Benzer şekilde Eş. 3.2 ile verilen Appell polinomlarının doğurucu fonksiyon bağıntısında,

- $A(t) = \frac{t^a}{e^t+1}$ alınırsa, $A_n(x) = B_n^{(\alpha)}(x)$ genelleştirilmiş Bernoulli polinomları [8],
- $A(t) = \frac{2^\alpha}{(e^t+1)^\alpha}$ alınırsa, $A_n(x) = E_n^{(\alpha)}(x)$ genelleştirilmiş Euler polinomları [8],
- $A(t) = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_m t^m[(e^{\alpha_1 t} - 1)(e^{\alpha_2 t} - 1) \dots (e^{\alpha_m t} - 1)]^{-1}$ alınırsa, $A_m(x) =$ m. dereceden Bernoulli polinomları [9],
- $A(t) = \frac{t^m}{e^t - \sum_{h=0}^{m-1}(\frac{t^h}{h!})}$ alınırsa, $A_n(x) = B_n^{[m-1]}(x),\ m \geq 1$ genelleştirilmiş Bernoulli polinomları [10],

- $A(t) = 2^m[(e^{\alpha_1 t} + 1)(e^{\alpha_2 t} + 1) \dots (e^{\alpha_m t} + 1)]^{-1}$ alınırsa, $A_m(x) =$ m. dereceden Euler polinomları [9],
- $A(t) = \exp(\xi_0 + \xi_1 t + \xi_2 t^2 + \xi_{r+1} t^{r+1})$, $\xi_{r+1} \neq 0$ alınırsa, $A_n(x) =$ Gould-Hopper polinomları [11],
- $A(t) = \frac{1}{(1-t)^{m+1}}$ alınırsa, $A_n(x) =$ n! $G_n^{(m)}(x)$ Miller-Lee polinomları [11],

elde edilir.

4. HERMİTE POLİNOMLARI

4.1. Hermite Polinomları

$H_n(x)$ Hermite polinomları,

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k n!}{k!\,(n-2k)!}(2x)^{n-2k} \tag{4.1}$$

şeklinde olup, burada

$$\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & ;\ n \quad çift\ ise \\ \dfrac{n-1}{2} & ;\ n \quad tek\ ise \end{cases}$$

olarak tanımlanır [5].

Eş. 4.1 den Hermite polinomunun ilk birkaç terimi,

$H_0(x) = 1$
$H_1(x) = 2x$
$H_2(x) = 4x^2 - 2$
$H_3(x) = 8x^3 - 12x$
$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$

şeklindedir.

$H_n(x)$ Hermite polinomları

$$\exp(2xr - r^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} r^n \tag{4.2}$$

şeklinde bir doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir [5].

$\omega(x) = e^{-x^2}$ ağırlık fonksiyonuna göre $H_n(x)$ Hermite polinomları

$$(H_m, H_n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 0 \quad ; \qquad m \neq n$$

ortogonallik özelliğini sağlar [5].

Hermite polinomu

$2xH_n(x) = 2nH_{n-1}(x) + H_{n+1}(x)$,
$xH''_n(x) + 2nH_n(x) = 2xH'_n(x)$,
$H'_n(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$

rekürans bağıntılarını da gerçekler.

Hermite polinomu için Rodrigues formülü

$$H_n(x) = (-1)^n e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

şeklindedir [5].

$He_n(x)$ Hermite polinomları $\omega(x) = e^{-x^2/2}$ ağırlık fonksiyonuna göre $(-\infty, \infty)$ aralığında ortogonal polinomlardır. Bu polinomlar ile $H_n(x)$ Hermite polinomları arasında

$$He_n(x) = 2^{-n/2} H_n(2^{-1/2} x)$$

şeklinde bir ilişki vardır [6].

4.2. İki Değişkenli Hermite Polinomları

İki değişkenli Hermite polinomları

$$H_n(x,y) = n!\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{x^{n-2r}y^r}{r!\,(n-2r)!}$$

açık ifadesi ile tanımlanır [12]. Bu ifadeden

$$H_n(x,0) = x^n$$

$$H_n(2x,-1) = H_n(x) = n!\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{2x^{n-2r}(-1)^r}{r!\,(n-2r)!},$$

$$H_n\left(x,-\frac{1}{2}\right) = He_n(x) = n!\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{x^{n-2r}(-1)^r}{2^r r!\,(n-2r)!}$$

bağıntıları elde edilebilir [13].

İki değişkenli $H_n(x,y)$ Hermite polinomlarının bir doğurucu fonksiyon bağıntısı

$$\exp(xt+yt^2) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x,y)\frac{t^n}{n!}$$

şeklindedir [14].

4.3. Üç Değişkenli Hermite Polinomları

Üç değişkenli $H_n(x,y,z)$ Hermite polinomları

$$H_n(x,y,z) = n! \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{z^r H_{n-3r}(x,y)}{r!\,(n-3r)!}$$

olarak tanımlanır ve

$$\exp\,(xt + yt^2 + zt^3) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x,y,z)\frac{t^n}{n!} \tag{4.3}$$

şeklinde bir doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir [15].

Bu polinomlar

$$\frac{\partial}{\partial y} H_n(x,y,z) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_n(x,y,z)$$
$$\frac{\partial}{\partial z} H_n(x,y,z) = \frac{\partial^3}{\partial x^3} H_n(x,y,z)$$
$$H_n(x,0,0) = x^n$$

bağıntılarını sağlar.

5. HERMİTE TABANLI APPELL POLİNOMLARI

${}_HA_n(x,y,z)$ ile gösterilen Hermite tabanlı Appell polinomları,

$$A(t)\exp(xt+yt^2+zt^3)=\sum_{n=0}^{\infty}{}_HA_n(x,y,z)\frac{t^n}{n!} \tag{5.1}$$

doğurucu fonksiyon bağıntısı yardımıyla tanımlanırlar [4].

Eş. 5.1 ile tanımlanan Hermite tabanlı Appell polinomlarının doğurucu fonksiyon bağıntısında $y=0$ ve $z=0$ alınırsa daha önce Eş. 3.1 ile verilen,

$$A(t)\exp(xt)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

şeklindeki Appell polinomlarının doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilir. Bu polinomlar

$${}_HA_n(x,y,z)=\exp\left(y\frac{\partial^2}{\partial x^2}+z\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\{A_n(x)\} \tag{5.2}$$

eşitliğini sağlar.

5.1. Teorem

Hermite tabanlı Appell polinomları,

$$(a)\ \frac{\partial}{\partial y}\,{}_HA_n(x,y,z)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,{}_HA_n(x,y,z)$$

$$(b)\ \frac{\partial}{\partial z}\,{}_HA_n(x,y,z)=\frac{\partial^3}{\partial x^3}\,{}_HA_n(x,y,z)$$

bağıntılarına sahiptir.

İspat

(a) Burada Eş. 5.1 ile gösterilen doğurucu fonksiyon bağıntısının her iki tarafının y ye göre türevi alınırsa,

$$A(t)\exp(xt+yt^2+zt^3)\,t^2=\frac{\partial}{\partial y}\sum_{n=0}^{\infty}{}_HA_n(x,y,z)\frac{t^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}_HA_n(x,y,z)\frac{t^{n+2}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial y}{}_HA_n(x,y,z)\frac{t^n}{n!}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}{}_HA_{n-2}(x,y,z)\frac{t^n}{(n-2)!}$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}{}_HA_0(x,y,z)+\frac{\partial}{\partial y}{}_HA_1(x,y,z)t+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\partial}{\partial y}{}_HA_n(x,y,z)\frac{t^n}{n!}$$

olup, Eş. 5.2 den $\frac{\partial\,{}_HA_0(x,y,z)}{\partial y}=0$ ve $\frac{\partial\,{}_HA_1(x,y,z)}{\partial y}=0$ oldukları göz önüne alındığında,

$$\sum_{n=2}^{\infty}{}_HA_{n-2}(x,y,z)\frac{t^n}{(n-2)!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\partial}{\partial y}{}_HA_n(x,y,z)\frac{t^n}{n!}$$

bulunur . Burada t^n nin katsayıları eşitlenip düzenlendiğinde $n\geq 2$ olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial y}{}_HA_n(x,y,z)=\ n(n-1)\,{}_HA_{n-2}(x,y,z) \tag{5.3}$$

elde edilir. Eş. 5.1 ile gösterilen doğurucu fonksiyon bağıntısının her iki tarafının x e göre ikinci basamaktan türevi alınırsa,

$$A(t)\exp(xt+yt^2+zt^3)\,t^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{n=0}^{\infty}{}_HA_n(x,y,z)\frac{t^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_{H}A_n(x,y,z)\frac{t^{n+2}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,{}_{H}A_n(x,y,z)\frac{t^n}{n!}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} {}_{H}A_{n-2}(x,y,z)\frac{t^n}{(n-2)!}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,{}_{H}A_0(x,y,z) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,{}_{H}A_1(x,y,z) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,{}_{H}A_n(x,y,z)\frac{t^n}{n!}$$

olup, Eş. 5.2 den $\frac{\partial^2\,{}_{H}A_0(x,y,z)}{\partial x^2} = 0$ ve $\frac{\partial^2\,{}_{H}A_1(x,y,z)}{\partial x^2} = 0$ oldukları göz önüne alındığında,

$$\sum_{n=2}^{\infty} {}_{H}A_{n-2}(x,y,z)\frac{t^n}{(n-2)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,{}_{H}A_n(x,y,z)\frac{t^n}{n!}$$

eşitliği yazılabilir. Burada t^n nin katsayıları eşitlenip düzenlendiğinde $n \geq 2$ olmak üzere

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,{}_{H}A_n(x,y,z) = n(n-1)\,{}_{H}A_{n-2}(x,y,z) \tag{5.4}$$

yazılabilir. Eş. 5.3 ve Eş. 5.4 bağıntılarının sağ tarafları eşit olduğundan sol tarafları birbirine eşit yazıldığında ispat tamamlanır.

(b) Eş. 5.1 ile gösterilen doğurucu fonksiyon bağıntısının her iki tarafının z ye göre türevi alınırsa,

$$A(t)\exp(xt + yt^2 + zt^3)\,t^3 = \frac{\partial}{\partial z}\sum_{n=0}^{\infty} {}_{H}A_n(x,y,z)\frac{t^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_{H}A_n(x,y,z)\frac{t^{n+3}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z}\,{}_{H}A_n(x,y,z)\frac{t^n}{n!}$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} {}_{H}A_{n-3}(x,y,z)\frac{t^n}{(n-3)!}$$
$$= \frac{\partial}{\partial z}\,{}_{H}A_0(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial z}\,{}_{H}A_1(x,y,z)t + \frac{\partial}{\partial z}\,{}_{H}A_2(x,y,z)\frac{t^2}{2!}$$
$$+ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z}\,{}_{H}A_n(x,y,z)\frac{t^n}{n!}$$

olup, Eş. 5.2 den $\frac{\partial\,{}_{H}A_0(x,y,z)}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial\,{}_{H}A_1(x,y,z)}{\partial z} = 0$ ve $\frac{\partial\,{}_{H}A_2(x,y,z)}{\partial z} = 0$ oldukları göz önüne alınırsa,

$$\sum_{n=3}^{\infty} {}_{H}A_{n-3}(x,y,z)\frac{t^n}{(n-3)!} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z}\,{}_{H}A_n(x,y,z)\frac{t^n}{n!}$$

eşitliği yazılabilir. Burada t^n nin katsayıları eşitlenip düzenlendiğinde

$$\frac{\partial}{\partial z}\,{}_{H}A_n(x,y,z) = n(n-1)(n-2)\,{}_{H}A_{n-3}(x,y,z) \tag{5.5}$$

elde edilir. Eş. 5.1 ile gösterilen doğurucu fonksiyon bağıntısının her iki tarafının x e göre üçüncü basamaktan türevi alınırsa,

$$A(t)\exp(xt + yt^2 + zt^3)\,t^3 = \frac{\partial^3}{\partial x^3}\sum_{n=0}^{\infty} {}_{H}A_n(x,y,z)\frac{t^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_{H}A_n(x,y,z)\frac{t^{n+3}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^3}{\partial x^3}\,{}_{H}A_n(x,y,z)\frac{t^n}{n!}$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} {}_H A_{n-3}(x,y,z)\frac{t^n}{(n-3)!}$$

$$= \frac{\partial^3}{\partial x^3}\,{}_H A_0(x,y,z) + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\,{}_H A_1(x,y,z) + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\,{}_H A_2(x,y,z)$$

$$+ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\partial^3}{\partial x^3}\,{}_H A_n(x,y,z)\frac{t^n}{n!}$$

olup, Eş. 5.2 den $\frac{\partial^3\,{}_H A_0(x,y,z)}{\partial x^3} = 0$, $\frac{\partial^3\,{}_H A_1(x,y,z)}{\partial x^3} = 0$ ve $\frac{\partial^3\,{}_H A_2(x,y,z)}{\partial x^3} = 0$ oldukları göz önüne alındığında,

$$\sum_{n=3}^{\infty} {}_H A_{n-3}(x,y,z)\frac{t^n}{(n-3)!} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\partial^3}{\partial x^3}\,{}_H A_n(x,y,z)\frac{t^n}{n!}$$

yazılabilir. Burada t^n nin katsayıları eşitlenip düzenlendiğinde

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}\,{}_H A_n(x,y,z) = n(n-1)(n-2)\,{}_H A_{n-3}(x,y,z) \tag{5.6}$$

elde edilir. Eş. 5.5 ve Eş. 5.6 bağıntılarının sağ tarafları eşit olduğundan ispat tamamlanır.

5.2. Teorem

Hermite tabanlı Appell polinomları aşağıdaki rekürans bağıntılarına sahiptir [4]:

$(i)\,\frac{\partial}{\partial x}\,{}_H A_n(x,y,z) = n\,{}_H A_{n-1}(x,y,z); \quad n \geq 1$

(ii) $\frac{\partial}{\partial y}\,{}_H A_n(x,y,z) = n(n-1)\,{}_H A_{n-2}(x,y,z); \quad n \geq 2$

(iii) $\frac{\partial}{\partial z}\,{}_H A_n(x,y,z) = n(n-1)(n-2)\,{}_H A_{n-3}(x,y,z); \quad n \geq 3.$

İspat

(i) Bu rekürans bağıntısını elde etmek için Eş. 5.1 ile gösterilen doğurucu fonksiyon bağıntısının her iki tarafının x e göre türevi alınırsa,

$$A(t)\exp(xt+yt^2+zt^3)\,t=\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=0}^{\infty}{}_HA_n(x,y,z)\frac{t^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}_HA_n(x,y,z)\frac{t^{n+1}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}\,{}_HA_n(x,y,z)\frac{t^n}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}_HA_{n-1}(x,y,z)\frac{t^n}{(n-1)!}=\frac{\partial}{\partial x}\,{}_HA_0(x,y,z)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}\,{}_HA_n(x,y,z)\frac{t^n}{n!}$$

olup, Eş. 5.2 den $\frac{\partial\,{}_HA_0(x,y,z)}{\partial z}=0$ olduğu göz önüne alındığında,

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}_HA_{n-1}(x,y,z)\frac{t^n}{(n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}\,{}_HA_n(x,y,z)\frac{t^n}{n!}$$

yazılabilir. Burada t^n nin katsayıları eşitlenip düzenlendiğinde istenilen rekürans bağıntısı elde edilir.

(ii) Buradaki rekürans bağıntısı Teorem 5.1 in (a) şıkkının ispatında Eş. 5.3 olarak elde edilmiştir.

(iii) Buradaki rekürans bağıntısı Teorem 5.1 in (b) şıkkının ispatında Eş. 5.5 olarak elde edilmiştir.

Şimdi Hermite tabanlı Appell polinomlarının bazı özel durumlarında karşımıza çıkan farklı polinom sınıflarını verelim:

- Hermite tabanlı Appell polinomları için verilen Eş. 5.1 bağıntısında özel olarak $A(t) = \frac{t}{e^t-1}$ alınırsa, ${}_HB_n(x,y,z)$ Hermite tabanlı Bernoulli polinomları,

$$\frac{t}{e^t-1}\exp(xt+yt^2+zt^3) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_HB_n(x,y,z)\frac{t^n}{n!}\ , \quad |t|<2\pi \tag{5.7}$$

doğurucu fonksiyon bağıntısı yardımıyla elde edilir [4].

Hermite tabanlı Bernoulli polinomunda $y=0$ ve $z=0$ alınırsa bu polinomlar,

$${}_HB_n(x,0,0) = B_n(x)$$

şeklinde Bernoulli polinomuna dönerler. Hermite tabanlı Bernoulli polinomu ile Bernoulli polinomu arasında

$${}_HB_n(x,y,z) = \exp\left(y\frac{\partial^2}{\partial x^2}+z\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\{B_n(x)\}$$

bağıntısı vardır [4].

- Hermite tabanlı Appell polinomları için verilen Eş. 5.1 bağıntısında özel olarak $A(t) = \frac{2}{e^t+1}$ alınırsa, ${}_HE_n(x,y,z)$ Hermite tabanlı Euler polinomları,

$$\frac{2}{e^t+1}\exp(xt+yt^2+zt^3) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_HE_n(x,y,z)\frac{t^n}{n!}\ , \quad |t|<\pi \tag{5.8}$$

doğurucu fonksiyon bağıntısı yardımıyla elde edilir [4].

Hermite tabanlı Euler polinomunda $y=0$ ve $z=0$ alınırsa bu polinomlar,

$${}_HE_n(x,0,0) = E_n(x)$$

şeklinde Euler polinomuna dönerler. Hermite tabanlı Euler polinomu ile Euler polinomu arasında

$$ {}_{H}E_n(x,y,z) = \exp\left(y\frac{\partial^2}{\partial x^2} + z\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\{E_n(x)\} $$

bağıntısı vardır [4].

- Hermite tabanlı Appell polinomları için verilen Eş. 5.1 bağıntısında özel olarak $A(t) = \frac{2t}{e^t+1}$ alınırsa, ${}_{H}G_n(x,y,z)$ Hermite tabanlı Genocchi polinomları,

$$ \frac{2t}{e^t+1}\exp(xt + yt^2 + zt^3) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_{H}G_n(x,y,z)\frac{t^n}{n!}\ , \quad |t| < \pi \tag{5.9} $$

doğurucu fonksiyon bağıntısı yardımıyla elde edilir [16].

Hermite tabanlı Genocchi polinomunda $y = 0$ ve $z = 0$ alınırsa,

$$ {}_{H}G_n(x,0,0) = G_n(x) $$

şeklinde Genocchi polinomuna dönerler. Hermite tabanlı Genocchi polinomu ile Genocchi polinomu arasında

$$ {}_{H}G_n(x,y,z) = \exp\left(y\frac{\partial^2}{\partial x^2} + z\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\{G_n(x)\} $$

bağıntısı vardır.

5.3. Teorem

Hermite tabanlı Appell polinomları ile üç değişkenli Hermite polinomları arasında

$$ {}_{H}A_n(x,y,z) = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{(n-k)!}H_{n-k}(x,y,z) $$

şeklinde bir bağıntı vardır.

İspat

Eş. 5.1 ile verilen Hermite tabanlı Appell polinomlarının doğurucu fonksiyon bağıntısında Eş. 3.1 ve Eş. 4.3 kullanılırsa,

$$ \sum_{k=0}^{\infty}a_k t^k \sum_{n=0}^{\infty}H_n(x,y,z)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}{}_{H}A_n(x,y,z)\frac{t^n}{n!} $$

olup burada Lemma 2.3 (i) $p = 1$ alınarak uygulanırsa,

$$ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_k t^k H_{n-k}(x,y,z)\frac{t^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty}{}_{H}A_n(x,y,z)\frac{t^n}{n!} $$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılıp t^n lerin katsayıları eşitlendiğinde istenilen sonuç elde edilir.

5.4. Teorem

Hermite tabanlı Bernoulli polinomları ile üç değişkenli Hermite polinomları arasında

$$ {}_{H}B_n(x,y,z) = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}B_r H_{n-r}(x,y,z) $$

şeklinde bir bağıntı vardır [4].

İspat

Eş. 5.7 ile verilen Hermite tabanlı Bernoulli polinomlarının doğurucu fonksiyon bağıntısında Eş. 3.4 ve Eş 4.3 kullanılırsa,

$$\sum_{r=0}^{\infty} B_r \frac{t^r}{r!} \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x,y,z) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H B_n(x,y,z) \frac{t^n}{n!}$$

olup burada Lemma 2.3 (i) $p = 1$ alınarak uygulanırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} B_r \frac{t^r}{r!} H_{n-r}(x,y,z) \frac{t^{n-r}}{(n-r)!} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H B_n(x,y,z) \frac{t^n}{n!}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılıp t^n lerin katsayıları eşitlendiğinde istenilen bağıntı elde edilir.

5.5. Teorem

Hermite tabanlı Euler polinomları ile üç değişkenli Hermite polinomları arasında

$${}_H E_n(x,y,z) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} E_r H_{n-r}(x,y,z)$$

şeklinde bir bağıntı vardır.

İspat

Eş. 5.8 ile verilen Hermite tabanlı Euler polinomlarının doğurucu fonksiyon bağıntısında Eş. 3.6 ve Eş 4.3 kullanılırsa,

$$\sum_{r=0}^{\infty} E_r \frac{t^r}{r!} \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x,y,z) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H E_n(x,y,z) \frac{t^n}{n!}$$

olup burada Lemma 2.3 (i) $p = 1$ alınarak uygulanırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n} E_r \frac{t^r}{r!} H_{n-r}(x,y,z) \frac{t^{n-r}}{(n-r)!} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H E_n(x,y,z) \frac{t^n}{n!}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılıp t^n lerin katsayıları eşitlendiğinde istenilen bağıntı elde edilir.

5.6. Teorem

Hermite tabanlı Genocchi polinomları ile üç değişkenli Hermite polinomları arasında

$${}_H G_n(x,y,z) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} G_r H_{n-r}(x,y,z)$$

şeklinde bir bağıntı vardır.

İspat

Eş. 5.9 ile verilen Hermite tabanlı Genocchi polinomlarının doğurucu fonksiyon bağıntısında Eş. 3.8 ve Eş. 4.3 kullanılırsa,

$$\sum_{r=0}^{\infty} G_r \frac{t^r}{r!} \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x,y,z) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H G_n(x,y,z) \frac{t^n}{n!}$$

olup burada Lemma 2.3 (i) $p = 1$ alınarak uygulanırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n} G_r \frac{t^r}{r!} H_{n-r}(x,y,z) \frac{t^{n-r}}{(n-r)!} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H G_n(x,y,z) \frac{t^n}{n!}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılıp t^n lerin katsayıları eşitlendiğinde istenilen bağıntı elde edilir.

5.7. Teorem

Hermite tabanlı Appell polinomları ve üç değişkenli Hermite polinomları için

$$ {}_HA_{n+m}(X,Y,Z) = \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{l}\binom{m}{k} H_{l+k}(X-x,Y-y,Z-z)\,{}_HA_{n+m-l-k}(x,y,z) $$

bağıntısı sağlanır.

İspat

Eş. 5.1 ile verilen Hermite tabanlı Appell polinomunun doğurucu fonksiyon bağıntısında t yerine $t+w$ yazılıp sonra Lemma 2.3 (ii) $p=1$ alınarak uygulanırsa,

$$ A(t+w)e^{x(t+w)+y(t+w)^2+z(t+w)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_HA_n(x,y,z)\frac{(t+w)^n}{n!} $$

$$ = \sum_{n=0}^{\infty} {}_HA_n(x,y,z)\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m} t^{n-m}w^m $$

$$ = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} {}_HA_{n+m}(x,y,z)\frac{t^n}{n!}\frac{w^m}{m!} \qquad (5.10) $$

bulunur. Buradan,

$$ A(t+w) = e^{-x(t+w)-y(t+w)^2-z(t+w)^3}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} {}_HA_{n+m}(x,y,z)\frac{t^n}{n!}\frac{w^m}{m!} $$

olup, her iki taraf $e^{X(t+w)+Y(t+w)^2+Z(t+w)^3}$ ifadesi ile çarpılırsa,

$$ A(t+w)e^{X(t+w)+Y(t+w)^2+Z(t+w)^3} $$

$$ = e^{(X-x)(t+w)+(Y-y)(t+w)^2+(Z-z)(t+w)^3}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} {}_HA_{n+m}(x,y,z)\frac{t^n}{n!}\frac{w^m}{m!} $$

elde edilir. Eş. 4.3 ve Eş. 5.10 bağıntıları kullanılarak Lemma 2.3 (i) $p = 1$ alınarak uygulanırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} {}_{H}A_{n+m}(X,Y,Z)\frac{t^n}{n!}\frac{w^m}{m!}$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} H_{l+k}\,(X-x,Y-y,Z-z)\frac{t^l}{l!}\frac{w^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} {}_{H}A_{n+m}(x,y,z)\frac{t^n}{n!}\frac{w^m}{m!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} H_{l+k}(X-x,Y-y,Z-z)\ {}_{H}A_{n+m}(x,y,z)\frac{t^{n+l}w^{m+k}}{n!\,m!\,l!\,k!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{l}\binom{m}{k} H_{l+k}(X-x,Y-y,Z-z)\ {}_{H}A_{n+m-l-k}(x,y,z)\frac{t^n}{n!}\frac{w^m}{m!}$$

bulunur. Burada her iki tarafta $\frac{t^n}{n!}\frac{w^m}{m!}$ in katsayıları eşitlenirse istenilen sonuç elde edilmiş olur.

5.8. Teorem

Hermite tabanlı Bernoulli polinomları ve üç değişkenli Hermite polinomları için

$${}_{H}B_{n+m}(X,Y,Z) = \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{l}\binom{m}{k} H_{l+k}(X-x,Y-y,Z-z)\ {}_{H}B_{n+m-l-k}(x,y,z)$$

bağıntısı sağlanır.

İspat

Eş. 5.7 kullanılarak Teorem 5.7 nin ispatına benzer şekilde elde edilir.

5.9. Teorem

Hermite tabanlı Euler polinomları ve üç değişkenli Hermite polinomları için

$$ {}_{H}E_{n+m}(X,Y,Z) = \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{l}\binom{m}{k} H_{l+k}(X-x,Y-y,Z-z)\,{}_{H}E_{n+m-l-k}(x,y,z) $$

bağıntısı sağlanır.

İspat

Eş. 5.8 kullanılarak Teorem 5.7 nin ispatına benzer şekilde elde edilir.

5.10. Teorem

Hermite tabanlı Genocchi polinomları ve üç değişkenli Hermite polinomları için

$$ {}_{H}G_{n+m}(X,Y,Z) = \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{l}\binom{m}{k} H_{l+k}(X-x,Y-y,Z-z)\,{}_{H}G_{n+m-l-k}(x,y,z) $$

bağıntısı sağlanır.

İspat

Eş. 5.9 kullanılarak Teorem 5.7 nin ispatına benzer şekilde elde edilir.

Son yıllarda doğurucu fonksiyona sahip polinomlar için multilineer, multilateral doğurucu fonksiyon bağıntıları veren bir yöntem oldukça gündemdedir [17,18,19]. Bu kısımda Hermite tabanlı Appell polinomlarının bilineer ve bilateral doğurucu fonksiyonlarının bir ailesini elde etmek için kullanılacak bir teorem elde edilecek ve bu teorem için örnek ve sonuçlar verilecektir.

5.11. Teorem

μ-üncü basamaktan s kompleks değişkenli ($s \in \mathbb{N}$), sıfıra denk olmayan $\Omega_{\mu}(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s)$ fonksiyonu için $a_k \neq 0$ olmak üzere,

$$\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s;\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\Omega_{\mu+\psi k}\,(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s)\tau^k \tag{5.11}$$

ve

$$\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,z;\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s;\varsigma) = \sum_{k=0}^{[n/p]}\frac{a_k}{(n-pk)!}\,{}_HA_{n-pk}\,(x,y,z)\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s)\varsigma^k \tag{5.12}$$

olsun. Burada $n,p\in\mathbb{N}$ dir. Bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,z;\xi_1,\dots,\xi_s;\frac{\eta}{t^p})t^n = A(t)\exp\,(xt+yt^2+zt^3)\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s;\eta) \tag{5.13}$$

bağıntısı gerçeklenir.

İspat:

Eş. 5.13 deki doğurucu fonksiyonun eşitini S ile gösterelim. $\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,z;\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s;\varsigma)$ polinomunun değeri Eş. 5.12 den alınıp Eş. 5.13 de yerine yazılırsa,

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]}a_k\;{}_HA_{n-pk}(x,y,z)\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\dots,\xi_s)\frac{\eta^k}{t^{pk}}\frac{t^n}{(n-pk)!}$$

olup burada Lemma 2.3 ün (ii) şıkkı kullanılarak,

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_k\;{}_HA_n(x,y,z)\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\dots,\xi_s)\eta^k\frac{t^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}{}_HA_n(x,y,z)\frac{t^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}a_k\,\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\dots,\xi_s)\eta^k$$

$$= A(t)\exp\,(xt + yt^2 + zt^3)\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s; \eta)$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek

Teorem 5.11 de $s = 3$ ve Ω fonksiyonu yerine Hermite tabanlı Appell polinomlarının kendisini alalım.

$$\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1, \xi_2, \xi_3; \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, {}_H A_{\mu+\psi k}\,(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\tau^k$$

ve

$$\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x, y, z; \xi_1, \xi_2, \xi_3; \varsigma) = \sum_{k=0}^{[n/p]} \frac{a_k}{(n-pk)!}\, {}_H A_{n-pk}\,(x, y, z)\, {}_H A_{\mu+\psi k}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\varsigma^k$$

olsun. Bu takdirde

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x, y, z; \xi_1, \xi_2, \xi_3; \frac{\eta}{t^p})t^n = A(t)\exp\,(xt + yt^2 + zt^3)\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1, \xi_2, \xi_s; \eta)$$

olur. Burada $a_k = \frac{1}{k!}, \mu = 0, \psi = 1$ alınırsa, Hermite tabanlı Appell polinomları için bilineer bir doğurucu fonksiyon bağıntısı

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} \frac{1}{k!\,(n-pk)!}\, {}_H A_{n-pk}(x.y.z)\, {}_H A_k\,(\xi_1, \xi_2, \xi_s)\eta^k t^{n-pk}$$
$$= A(t)A(\eta)\exp\,(xt + \xi_1\eta + yt^2 + \xi_2\eta^2 + zt^3 + \xi_3\eta^3)$$

olarak elde edilir.

Örnek

Teorem 5.11 de $s = r$ ve Ω yerine $g_k^{(\alpha_1,\dots,\alpha_r)}(x_1,\dots,x_r)$ çok değişkenli Lagrange polinomlarını alalım. Burada çok değişkenli Lagrange polinomları,

$$\prod_{i=1}^{r}\{(1-x_i t)^{-\alpha_i}\} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(\alpha_1,\dots,\alpha_r)}(x_1,\dots,x_r)t^k$$

doğurucu fonksiyon bağıntısıyla tanımlanırlar [20].

$$\Lambda_{\mu,\psi}(x_1,\dots,x_r;\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k g_{\mu+\psi k}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_r)}(x_1,\dots,x_r)\,\tau^k$$

ve

$$\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,z;x_1,\dots,x_r;\varsigma) = \sum_{k=0}^{[n/p]} \frac{a_k}{(n-pk)!}\,{}_H A_{n-pk}(x,y,z) g_{\mu+\psi k}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_r)}(x_1,\dots,x_r)\varsigma^k$$

olsun. Bu takdirde,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,z;x_1,\dots,x_r;\frac{\eta}{t^p})t^n = A(t)\exp(xt+yt^2+zt^3)\Lambda_{\mu,\psi}(x_1,\dots,x_r;\eta)$$

olur. Burada $a_k = 1\,, \mu = 0, \psi = 1$ alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]}\frac{1}{(n-pk)!}\,{}_H A_{n-pk}(x,y,z) g_k^{(\alpha_1,\dots,\alpha_r)}(x_1,\dots,x_r)\eta^k t^{n-pk}$$

$$= A(t)\exp(xt+yt^2+zt^3)\prod_{i=1}^{r}\{(1-x_i\eta)^{-\alpha_i}\}$$

elde edilir. Bu son bağıntı Hermite tabanlı Appell polinomları ile çok değişkenli Lagrange polinomları için bir bilateral doğurucu fonksiyon bağıntısıdır.

a_k $(k \in \mathbb{N}_0)$ katsayılarının uygun her bir seçimi için, eğer $\Omega_\mu(\xi_1, \dots, \xi_s)$ çok değişkenli fonksiyonu, daha basit bazı fonksiyonların uygun bir çarpımı olarak ifade edilebilirse, bu durumda Teorem 5.11 , Eş. 5.1 ile tanımlanan Hermite tabanlı Appell polinomlarının multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyonlarının çeşitli ailelerini elde etmek için kullanılabilir.

Şimdi Teorem 5.11 de $A(t)$ yerine özel seçimler yaparak teoremin bazı sonuçlarını verelim:

5.12. Sonuç

Teorem 5.11 de $A(t) = \frac{t}{e^t-1}$ alınırsa Hermite tabanlı Bernoulli polinomları için aşağıdaki sonuca ulaşabiliriz:

$$\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s; \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\psi k}\,(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s)\tau^k$$

ve

$$\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x, y, z; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s; \varsigma) = \sum_{k=0}^{[n/p]} \frac{a_k}{(n-pk)!}\, {}_H B_{n-pk}\,(x, y, z)\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s)\varsigma^k$$

ise bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x, y, z; \xi_1, \dots, \xi_s; \frac{\eta}{t^p})t^n = \frac{t}{e^t-1} \exp\,(xt + yt^2 + zt^3)\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s; \eta)$$

elde edilir. Burada Ω yerine farklı polinomlar alınarak Hermite tabanlı Bernoulli polinomları için bilineer ve bilateral doğurucu fonksiyonlar bulunabilir.

5.13. Sonuç

Teorem 5.11 de $A(t)=\frac{2}{e^t+1}$ alınırsa Hermite tabanlı Euler polinomları için aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s;\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\Omega_{\mu+\psi k}\,(\xi_1,\dots,\xi_s)\tau^k$$

ve

$$\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,z;\xi_1,\dots,\xi_s;\varsigma)=\sum_{k=0}^{[n/p]}\frac{a_k}{(n-pk)!}\,{}_HE_{n-pk}\,(x,y,z)\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s)\varsigma^k$$

ise bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,z;\xi_1,\dots,\xi_s;\frac{\eta}{t^p})t^n=\frac{2}{e^t+1}\exp\,(xt+yt^2+zt^3)\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s;\eta)$$

bulunur. Burada Ω yerine farklı polinomlar alınarak Hermite tabanlı Euler polinomları için bilineer ve bilateral doğurucu fonksiyonlar elde edilir.

5.14. Sonuç

Teorem 5.11 de $A(t)=\frac{2t}{e^t+1}$ alınırsa Hermite tabanlı Genocchi polinomları için aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s;\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\Omega_{\mu+\psi k}\,(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s)\tau^k$$

ve

$$\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,z;\xi_1,\dots,\xi_s;\varsigma)=\sum_{k=0}^{[n/p]}\frac{a_k}{(n-pk)!}\,{}_H G_{n-pk}\,(x,y,z)\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s)\varsigma^k$$

ise bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,z;\xi_1,\dots,\xi_s;\frac{\eta}{t^p})t^n=\frac{2t}{e^t+1}\exp\,(xt+yt^2+zt^3)\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s;\eta)$$

bulunur. Burada Ω yerine farklı polinomlar alınarak Hermite tabanlı Genocchi polinomları için bilineer ve bilateral doğurucu fonksiyonlar elde edilir.

6. GENELLEŞTİRİLMİŞ HERMİTE TABANLI APPELL POLİNOMLARI

Bu bölümde Hermite tabanlı Appell polinomlarının bir genelleştirilmesi tanımlanacaktır. Daha sonra buna benzer olarak Hermite tabanlı Bernoulli, Euler ve Genocchi polinomlarının birer genelleştirilmesi tanımlanıp, tüm bu polinomlar için bazı özellikler verilecektir.

6.1. Tanım

Genelleştirilmiş Hermite tabanlı Appell polinomları

$$f^{(\alpha)}(x,y,z;t) \coloneqq [A(t)]^{\alpha} e^{xt+yt^2+zt^3} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_{H}A_n^{(\alpha)}(x,y,z)\frac{t^n}{n!} \tag{6.1}$$

olarak tanımlanır.

Eş. 6.1 bağıntısında $\alpha = 1$ alındığında,

$$f^{(1)}(x,y,z;t) = A(t)e^{xt+yt^2+zt^3} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_{H}A_n(x,y,z)\frac{t^n}{n!} \tag{6.2}$$

elde edilir. Eş. 6.1 ve Eş. 6.2 bağıntılarından

$$\left[f^{(1)}\left(\frac{x}{\alpha},\frac{y}{\alpha},\frac{z}{\alpha};t\right)\right]^{\alpha} = [A(t)]^{\alpha}\left[e^{\frac{x}{\alpha}t+\frac{y}{\alpha}t^2+\frac{z}{\alpha}t^3}\right]^{\alpha}$$
$$= [A(t)]^{\alpha}\left[e^{xt+yt^2+zt^3}\right]$$

olup

$$\left[f^{(1)}\left(\frac{x}{\alpha},\frac{y}{\alpha},\frac{z}{\alpha};t\right)\right]^{\alpha} = f^{(\alpha)}(x,y,z;t) \tag{6.3}$$

eşitliği sağlanır.

6.2. Tanım

Eş. 6.1 de $A(t) = \frac{t}{e^t-1}$ alınırsa, genelleştirilmiş Hermite tabanlı Bernoulli polinomları

$$\Phi^{(\alpha)}(x,y,z;t) \coloneqq \left[\frac{t}{e^t-1}\right]^{\alpha} e^{xt+yt^2+zt^3} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H B_n^{(\alpha)}(x,y,z)\frac{t^n}{n!}$$

olarak tanımlanır. Burada $\alpha = 1$ alınırsa,

$$\Phi^{(1)}(x,y,z;t) = \frac{t}{e^t-1}e^{xt+yt^2+zt^3} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H B_n(x,y,z)\frac{t^n}{n!}$$

olur ve

$$\left[\Phi^{(1)}\left(\frac{x}{\alpha},\frac{y}{\alpha},\frac{z}{\alpha};t\right)\right]^{\alpha} = \Phi^{(\alpha)}(x,y,z;t)$$

eşitliği sağlanır.

6.3. Tanım

Eş. 6.1 de $A(t) = \frac{2}{e^t+1}$ alınırsa, genelleştirilmiş Hermite tabanlı Euler polinomları

$$\psi^{(\alpha)}(x,y,z;t) \coloneqq \left[\frac{2}{e^t+1}\right]^{\alpha} e^{xt+yt^2+zt^3} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H E_n^{(\alpha)}(x,y,z)\frac{t^n}{n!}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\alpha = 1$ alınırsa,

$$\psi^{(1)}(x,y,z;t) = \frac{2}{e^t+1}e^{xt+yt^2+zt^3} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H E_n(x,y,z)\frac{t^n}{n!}$$

olur ve

$$\left[\psi^{(1)}\left(\frac{x}{\alpha},\frac{y}{\alpha},\frac{z}{\alpha};t\right)\right]^{\alpha}=\psi^{(\alpha)}(x,y,z;t)$$

eşitliği sağlanır.

6.4. Tanım

Eş. 6.1 de $A(t)=\frac{2t}{e^{t}+1}$ alınırsa, genelleştirilmiş Hermite tabanlı Genocchi polinomları

$$\mathrm{H}^{(\alpha)}(x,y,z;t):=\left[\frac{2t}{e^{t}+1}\right]^{\alpha}e^{xt+yt^{2}+zt^{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}{}_{H}G_{n}^{(\alpha)}(x,y,z)\frac{t^{n}}{n!}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\alpha=1$ alınırsa,

$$\mathrm{H}^{(1)}(x,y,z;t)=\frac{2t}{e^{t}+1}e^{xt+yt^{2}+zt^{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}{}_{H}G_{n}(x,y,z)\frac{t^{n}}{n!}$$

olur ve

$$\left[\mathrm{H}^{(1)}\left(\frac{x}{\alpha},\frac{y}{\alpha},\frac{z}{\alpha};t\right)\right]^{\alpha}=\mathrm{H}^{(\alpha)}(x,y,z;t)$$

eşitliği sağlanır.

6.5. Teorem

Genelleştirilmiş Hermite tabanlı Appell polinomları

$$\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\left[{}_{H}A_{n-l+1}^{(\alpha)}(x,y,z)\,{}_{H}A_{l}\left(\frac{x}{\alpha},\frac{y}{\alpha},\frac{z}{\alpha}\right)-\alpha\,{}_{H}A_{n-l}^{(\alpha)}(x,y,z)\,{}_{H}A_{l+1}\left(\frac{x}{\alpha},\frac{y}{\alpha},\frac{z}{\alpha}\right)\right]=0$$

bağıntısına sahiptir.

İspat

Eş. 6.3 eşitliğinin her iki tarafının t ye göre türevi alınırsa,

$$\alpha f^{(\alpha)}(x,y,z;t)\frac{\partial f^{(1)}\left(\frac{x}{\alpha},\frac{y}{\alpha},\frac{z}{\alpha};t\right)}{\partial t}=\frac{\partial f^{(\alpha)}(x,y,z;t)}{\partial t}f^{(1)}\left(\frac{x}{\alpha},\frac{y}{\alpha},\frac{z}{\alpha};t\right)$$

olup, buradaki ifadelerin eşitlerini yazarsak,

$$\alpha\sum_{n=0}^{\infty}{}_{H}A_{n}^{(\alpha)}(x,y,z)\frac{t^{n}}{n!}\sum_{l=1}^{\infty}{}_{H}A_{l}\left(\frac{x}{\alpha},\frac{y}{\alpha},\frac{z}{\alpha}\right)\frac{t^{l-1}}{(l-1)!}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}{}_{H}A_{n}^{(\alpha)}(x,y,z)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{l=0}^{\infty}{}_{H}A_{l}\left(\frac{x}{\alpha},\frac{y}{\alpha},\frac{z}{\alpha}\right)\frac{t^{l}}{l!}$$

olur. Böylece

$$\alpha\sum_{n=0}^{\infty}{}_{H}A_{n}^{(\alpha)}(x,y,z)\frac{t^{n}}{n!}\sum_{l=0}^{\infty}{}_{H}A_{l+1}\left(\frac{x}{\alpha},\frac{y}{\alpha},\frac{z}{\alpha}\right)\frac{t^{l}}{l!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}{}_{H}A_{n+1}^{(\alpha)}(x,y,z)\frac{t^{n}}{n!}\sum_{l=0}^{\infty}{}_{H}A_{l}\left(\frac{x}{\alpha},\frac{y}{\alpha},\frac{z}{\alpha}\right)\frac{t^{l}}{l!}$$

elde edilir. Burada Lemma 2.3 (i) şıkkı $p=1$ alarak kullanılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\alpha\,{}_{H}A_{n-l}^{(\alpha)}(x,y,z)\;{}_{H}A_{l+1}\left(\frac{x}{\alpha},\frac{y}{\alpha},\frac{z}{\alpha}\right)\right]\frac{t^{n}}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\;{}_{H}A_{n-l+1}^{(\alpha)}(x,y,z)\;{}_{H}A_{l}\left(\frac{x}{\alpha},\frac{y}{\alpha},\frac{z}{\alpha}\right)\right]\frac{t^{n}}{n!}$$

bulunur. Bu son eşitlikte $\frac{t^n}{n!}$ nin katsayıları eşitlenip düzenlendiğinde istenilen sonuç elde edilir.

6.6. Teorem

Genelleştirilmiş Hermite tabanlı Bernoulli polinomları

$$\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\left[{}_{H}B_{n-l+1}^{(\alpha)}(x,y,z)\,{}_{H}B_{l}\left(\frac{x}{\alpha},\frac{y}{\alpha},\frac{z}{\alpha}\right)-\alpha\,{}_{H}B_{n-l}^{(\alpha)}(x,y,z)\,{}_{H}B_{l+1}\left(\frac{x}{\alpha},\frac{y}{\alpha},\frac{z}{\alpha}\right)\right]=0$$

bağıntısını sağlar.

İspat

Tanım 6.2 kullanılarak Teorem 6.5 in ispatına benzer şekilde elde edilir.

6.7. Teorem

Genelleştirilmiş Hermite tabanlı Euler polinomları

$$\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\left[{}_{H}E_{n-l+1}^{(\alpha)}(x,y,z)\,{}_{H}E_{l}\left(\frac{x}{\alpha},\frac{y}{\alpha},\frac{z}{\alpha}\right)-\alpha\,{}_{H}E_{n-l}^{(\alpha)}(x,y,z)\,{}_{H}E_{l+1}\left(\frac{x}{\alpha},\frac{y}{\alpha},\frac{z}{\alpha}\right)\right]=0$$

bağıntısını sağlar.

İspat

Tanım 6.3 kullanılarak Teorem 6.5 in ispatına benzer şekilde elde edilir.

6.8. Teorem

Genelleştirilmiş Hermite tabanlı Genocchi polinomları

$$\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\left[{}_{H}G_{n-l+1}^{(\alpha)}(x,y,z)\,{}_{H}G_{l}\left(\frac{x}{\alpha},\frac{y}{\alpha},\frac{z}{\alpha}\right)-\alpha\,{}_{H}G_{n-l}^{(\alpha)}(x,y,z)\,{}_{H}G_{l+1}\left(\frac{x}{\alpha},\frac{y}{\alpha},\frac{z}{\alpha}\right)\right]=0$$

bağıntısını sağlar.

İspat

Tanım 6.4 kullanılarak Teorem 6.5 in ispatına benzer şekilde elde edilir.

6.9. Teorem

Genelleştirilmiş Hermite tabanlı Appell polinomları ve üç değişkenli Hermite polinomları arasında

$${}_{H}A_{n+m}^{(\alpha)}(X,Y,Z)=\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{l}\binom{m}{k}H_{l+k}(X-x,Y-y,Z-z)\,{}_{H}A_{n+m-l-k}^{(\alpha)}(x,y,z)$$

bağıntısı vardır.

İspat

Eş. 6.1 ile verilen genelleştirilmiş Hermite tabanlı Appell polinomunun doğurucu fonksiyon bağıntısında t yerine $t+w$ yazılıp sonra Lemma 2.3 te (ii) şıkkının $p=1$ alınarak kullanılmasıyla,

$$[A(t+w)]^{\alpha}e^{x(t+w)+y(t+w)^{2}+z(t+w)^{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}{}_{H}A_{n}^{(\alpha)}(x,y,z)\frac{(t+w)^{n}}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}{}_{H}A_{n}^{(\alpha)}(x,y,z)\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}t^{n-m}w^{m}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}{}_{H}A_{n+m}^{(\alpha)}(x,y,z)\frac{t^{n}}{n!}\frac{w^{m}}{m!} \tag{6.4}$$

olur. Buradan,

$$[A(t+w)]^{\alpha} = e^{-x(t+w)-y(t+w)^2-z(t+w)^3} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} {}_{H}A_{n+m}^{(\alpha)}(x,y,z)\frac{t^n}{n!}\frac{w^m}{m!}$$

elde edilir. Burada her iki taraf $e^{X(t+w)+Y(t+w)^2+Z(t+w)^3}$ ifadesi ile çarpılırsa,

$$[A(t+w)]^{\alpha} e^{X(t+w)+Y(t+w)^2+Z(t+w)^3}$$
$$= e^{(X-x)(t+w)+(Y-y)(t+w)^2+(Z-z)(t+w)^3} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} {}_{H}A_{n+m}^{(\alpha)}(x,y,z)\frac{t^n}{n!}\frac{w^m}{m!}$$

elde edilir. Eş. 4.3 ve Eş. 6.4 bağıntıları kullanılarak Lemma 2.3 (i) $p=1$ alınarak uygulanırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} {}_{H}A_{n+m}^{(\alpha)}(X,Y,Z)\frac{t^n}{n!}\frac{w^m}{m!}$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} H_{l+k}(X-x,Y-y,Z-z)\frac{t^l}{l!}\frac{w^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} {}_{H}A_{n+m}^{(\alpha)}(x,y,z)\frac{t^n}{n!}\frac{w^m}{m!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} H_{l+k}(X-x,Y-y,Z-z)\ {}_{H}A_{n+m}^{(\alpha)}(x,y,z)\frac{t^{n+l}w^{m+k}}{n!\,m!\,l!\,k!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{l}\binom{m}{k} H_{l+k}(X-x,Y-y,Z-z)\ {}_{H}A_{n+m-l-k}^{(\alpha)}(x,y,z)\frac{t^n}{n!}\frac{w^m}{m!}$$

bulunur. Burada her iki tarafta $\frac{t^n}{n!}\frac{w^m}{m!}$ in katsayıları eşitlenirse istenilen sonuç elde edilmiş olur.

6.10. Teorem

Genelleştirilmiş Hermite tabanlı Bernoulli polinomları ve üç değişkenli Hermite polinomları arasında

$$ {}_{H}B_{n+m}^{(\alpha)}(X,Y,Z) = \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{l}\binom{m}{k} H_{l+k}(X-x,Y-y,Z-z)\, {}_{H}B_{n+m-l-k}^{(\alpha)}(x,y,z) $$

bağıntısı vardır.

İspat

Tanım 6.2 kullanılarak Teorem 6.9 un ispatına benzer şekilde elde edilir.

6.11. Teorem

Genelleştirilmiş Hermite tabanlı Euler polinomları ve üç değişkenli Hermite polinomları arasında

$$ {}_{H}E_{n+m}^{(\alpha)}(X,Y,Z) = \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{l}\binom{m}{k} H_{l+k}(X-x,Y-y,Z-z)\, {}_{H}E_{n+m-l-k}^{(\alpha)}(x,y,z) $$

bağıntısı vardır.

İspat

Tanım 6.3 kullanılarak Teorem 6.9 un ispatına benzer şekilde elde edilir.

6.12. Teorem

Genelleştirilmiş Hermite tabanlı Genocchi polinomları ve üç değişkenli Hermite polinomları arasında

$$ {}_{H}G_{n+m}^{(\alpha)}(X,Y,Z) = \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{l}\binom{m}{k} H_{l+k}(X-x,Y-y,Z-z)\, {}_{H}G_{n+m-l-k}^{(\alpha)}(x,y,z) $$

bağıntısı vardır.

İspat

Tanım 6.4 kullanılarak Teorem 6.9 un ispatına benzer şekilde elde edilir.

6.13. Teorem

μ-üncü basamaktan s kompleks değişkenli $(s \in \mathbb{N})$, sıfıra denk olmayan $\Omega_{\mu}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s)$ fonksiyonu için $a_k \neq 0$ olmak üzere,

$$\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s; \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s)\tau^k \tag{6.5}$$

ve

$$\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x, y, z; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s; \varsigma) = \sum_{k=0}^{[n/p]} \frac{a_k}{(n-pk)!} {}_H A_{n-pk}^{(\alpha)}(x, y, z)\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s)\varsigma^k \tag{6.6}$$

olsun. Burada $n, p \in \mathbb{N}$ dir. Bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x, y, z; \xi_1, \dots, \xi_s; \frac{\eta}{t^p})t^n = [A(t)]^{\alpha} \exp(xt + yt^2 + zt^3)\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s; \eta) \tag{6.7}$$

gerçeklenir.

İspat:

Eş. 6.7 deki doğurucu fonksiyonun eşitini T ile gösterelim. $\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x, y, z; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s; \varsigma)$ polinomunun değeri Eş. 6.6 dan alınıp Eş. 6.7 de yerine yazılırsa,

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k \, {}_H A_{n-pk}^{(\alpha)}(x, y, z)\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \dots, \xi_s) \frac{\eta^k}{t^{pk}} \frac{t^n}{(n-pk)!}$$

olup burada Lemma 2.3 ün (ii) şıkkını kullanarak,

$$T = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_k \, {}_H A_n^{(\alpha)}(x,y,z)\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\dots,\xi_s)\eta^k \frac{t^n}{n!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} {}_H A_n^{(\alpha)}(x,y,z)\frac{t^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty} a_k \, \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\dots,\xi_s)\eta^k$$
$$= [(A(t)]^{\alpha}\exp\,(xt+yt^2+zt^3)\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s;\eta)$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek

Teorem 6.13 de $s=3$ ve Ω fonksiyonu yerine genelleştirilmiş Hermite tabanlı Appell polinomlarının kendisini alalım.

$$\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1,\xi_2,\xi_3;\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, {}_H A_{\mu+\psi k}^{(\alpha)}\,(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\tau^k$$

ve $n,p \in \mathbb{N}$ için

$$\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,z;\xi_1,\xi_2,\xi_3;\varsigma) = \sum_{k=0}^{[n/p]} \frac{a_k}{(n-pk)!} \, {}_H A_{n-pk}^{(\alpha)}(x,y,z) \, {}_H A_{\mu+\psi k}^{(\alpha)}\,(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\varsigma^k$$

olsun. Bu takdirde

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,z;\xi_1,\xi_2,\xi_3;\frac{\eta}{t^p})t^n = [A(t)]^{\alpha}\exp\,(xt+yt^2+zt^3)\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1,\xi_2,\xi_s;\eta)$$

olur. Burada $a_k = \frac{1}{k!}, \mu = 0, \psi = 1$ alınırsa, genelleştirilmiş Hermite tabanlı Appell polinomları için bilineer bir doğurucu fonksiyon bağıntısı

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]}\frac{1}{k!\,(n-pk)!}\,{}_{H}A_{n-pk}^{(\alpha)}(x,y,z)\,{}_{H}A_{k}^{(\alpha)}(\xi_1,\xi_2,\xi_s)\eta^k t^{n-pk}$$
$$=[A(t)A(\eta)]^{\alpha}\exp\left(xt+\xi_1\eta+yt^2+\xi_2\eta^2+zt^3+\xi_3\eta^3\right)$$

olarak elde edilir.

Örnek

Teorem 6.13 de $s=1$ ve ve Ω fonksiyonu yerine $L_k(x)$ Laguerre polinomlarını alalım. Burada $L_k(x)$ polinomu

$$\frac{1}{1-t}exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}L_k(x)\,t^k$$

doğurucu fonksiyon bağıntısıyla tanımlanır [5].

$$\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1;\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\,L_{\mu+\psi k}(\xi_1)\,\tau^k$$

ve $n,p\in\mathbb{N}$ için

$$\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,z;\xi_1;\varsigma)=\sum_{k=0}^{[n/p]}\frac{a_k}{(n-pk)!}\,{}_{H}A_{n-pk}^{(\alpha)}(x,y,z)L_{\mu+\psi k}(\xi_1)\,\varsigma^k$$

olsun. Bu takdirde,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,z;\xi_1;\frac{\eta}{t^p})t^n=[A(t)]^{\alpha}\exp\left(xt+yt^2+zt^3\right)\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1;\eta)$$

olur. Burada $a_k=1$, $\mu=0,\psi=1$ alınırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]}\frac{1}{(n-pk)!}\,{}_{H}A_{n-pk}^{(\alpha)}(x,y,z)L_k(\xi_1)\eta^k t^{n-pk}$$

$$=[A(t)]^{\alpha}\exp\,(xt+yt^2+zt^3)\frac{1}{(1-\eta)}exp\left(-\frac{\xi_1\eta}{1-\eta}\right)$$

elde edilir. Bu son bağıntı genelleştirilmiş Hermite tabanlı Appell polinomları ile Laguerre polinomları için bir bilateral doğurucu fonksiyon bağıntısıdır.

a_k $(k\in\mathbb{N}_0)$ katsayılarının uygun her bir seçimi için, eğer $\Omega_{\mu}(\xi_1,\dots,\xi_s)$ çok değişkenli fonksiyonu, daha basit bazı fonksiyonların uygun bir çarpımı olarak ifade edilebilirse, bu durumda Teorem 6.13, Eş. 6.1 ile tanımlanan genelleştirilmiş Hermite tabanlı Appell polinomlarının multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyonlarının çeşitli ailelerini elde etmek için kullanılabilir.

Şimdi Teorem 6.13 de $A(t)$ yerine özel seçimler yaparak teoremin bazı sonuçlarını verelim:

6.14. Sonuç

Teorem 6.13 de $A(t)=\frac{t}{e^t-1}$ alınırsa $a_k\neq 0$ olmak üzere

$$\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s;\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\Omega_{\mu+\psi k}\,(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s)\tau^k$$

ve

$$\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,z;\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s;\varsigma)=\sum_{k=0}^{[n/p]}\frac{a_k}{(n-pk)!}\,{}_{H}B_{n-pk}^{(\alpha)}\,(x,y,z)\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s)\varsigma^k$$

olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,z;\xi_1,\dots,\xi_s;\frac{\eta}{t^p})t^n = \left[\frac{t}{e^t-1}\right]^{\alpha} \exp\,(xt+yt^2+zt^3)\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s;\eta)$$

elde edilir. Burada Ω yerine farklı polinomlar alınarak, genelleştirilmiş Hermite tabanlı Bernoulli polinomları için bilineer ve bilateral doğurucu fonksiyonlar bulunabilir.

6.15. Sonuç

Teorem 6.13 de $A(t) = \frac{2}{e^t+1}$ alınırsa, $a_k \neq 0$ olmak üzere

$$\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s;\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\psi k}\,(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s)\tau^k$$

ve

$$\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,z;\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s;\varsigma) = \sum_{k=0}^{[n/p]} \frac{a_k}{(n-pk)!}\, {}_H E_{n-pk}^{(\alpha)}\,(x,y,z)\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s)\varsigma^k$$

olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,z;\xi_1,\dots,\xi_s;\frac{\eta}{t^p})t^n = \left[\frac{2}{e^t+1}\right]^{\alpha} \exp\,(xt+yt^2+zt^3)\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s;\eta)$$

elde edilir. Burada Ω yerine farklı polinomlar alınarak, genelleştirilmiş Hermite tabanlı Euler polinomları için bilineer ve bilateral doğurucu fonksiyonlar bulunabilir.

6.16. Sonuç

Teorem 6.13 de $A(t) = \frac{2t}{e^t+1}$ alınırsa $a_k \neq 0$ olmak üzere

$$\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s;\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\Omega_{\mu+\psi k}\,(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s)\tau^k$$

ve

$$\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,z;\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s;\varsigma)=\sum_{k=0}^{[n/p]}\frac{a_k}{(n-pk)!}\,{}_HG_{n-pk}^{(\alpha)}\,(x,y,z)\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s)\varsigma^k$$

olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,z;\xi_1,\dots,\xi_s;\frac{\eta}{t^p})t^n=\left[\frac{2t}{e^t+1}\right]^{\alpha}\exp\,(xt+yt^2+zt^3)\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s;\eta)$$

elde edilir. Burada Ω yerine farklı polinomlar alınarak, genelleştirilmiş Hermite tabanlı Genocchi polinomları için bilineer ve bilateral doğurucu fonksiyonlar bulunabilir.

6.17. Sonuç

Teorem 6.5 te $\alpha=1$ alınırsa Hermite tabanlı Appell polinomları için

$$\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\left[{}_HA_{n-l+1}(x,y,z)\,{}_HA_l(x,y,z)-{}_HA_{n-l}(x,y,z)\,{}_HA_{l+1}(x,y,z)\right]=0$$

bağıntısı sağlanır.

6.18. Sonuç

Teorem 6.9 da $\alpha=1$ alınırsa, Hermite tabanlı Appell polinomları ve üç değişkenli Hermite polinomları arasında

$${}_HA_{n+m}(X,Y,Z)$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \sum_{m=0}^{m} \binom{n}{l} \binom{m}{k} H_{l+k}\,(X-x, Y-y, Z-z)\; {}_{H}A_{n+m-l-k}(x, y, z)$$

bağıntısına indirgenir ki bu bağıntı, 5. bölümde verilmiştir.

7. HERMİTE TABANLI DİĞER POLİNOMLAR

7.1. Hermite-Laguerre Polinomları

${}_HL_n(x,y,z)$ Hermite-Laguerre polinomları

$$\frac{1}{1-t}exp\left(-\frac{xt}{1-t}+\frac{yt^2}{(1-t)^2}-\frac{zt^3}{(1-t)^3}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}{}_HL_n(x,y,z)t^n \tag{7.1}$$

doğurucu fonksiyon bağıntısı ile tanımlanır [4].

7.1. Teorem

μ-üncü basamaktan s kompleks değişkenli ($s \in \mathbb{N}$), sıfıra denk olmayan $\Omega_\mu(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s)$ fonksiyonu için $a_k \neq 0$ olmak üzere,

$$\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s;\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\Omega_{\mu+\psi k}\,(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s)\tau^k \tag{7.2}$$

ve

$$\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,z;\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s;\varsigma)=\sum_{k=0}^{[n/p]}a_k\,{}_HL_{n-pk}\,(x,y,z)\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s)\varsigma^k \tag{7.3}$$

olsun. Burada $n,p \in \mathbb{N}$ dir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,z;\xi_1,\dots,\xi_s;\frac{\eta}{t^p})t^n\\&\quad=\frac{1}{1-t}exp\left(-\frac{xt}{1-t}+\frac{yt^2}{(1-t)^2}-\frac{zt^3}{(1-t)^3}\right)\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s;\eta)\end{aligned} \tag{7.4}$$

gerçeklenir.

İspat:

Eş. 7.4 deki doğurucu fonksiyonun eşitini W ile gösterelim. $\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,z;\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s;\varsigma)$ polinomunun değeri Eş. 7.3 den alınıp Eş. 7.4 te yerine yazılırsa,

$$W=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]} a_k\ {}_HL_{n-pk}(x,y,z)\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\dots,\xi_s)\frac{\eta^k}{t^{pk}}t^n$$

olup burada Lemma 2.3 ün (ii) şıkkı kullanılarak,

$$W=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_k\ {}_HL_n(x,y,z)\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\dots,\xi_s)\eta^k t^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}{}_HL_n(x,y,z)t^n\sum_{k=0}^{\infty}a_k\,\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\dots,\xi_s)\eta^k$$
$$=\frac{1}{1-t}exp\left(-\frac{xt}{1-t}+\frac{yt^2}{(1-t)^2}-\frac{zt^3}{(1-t)^3}\right)\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s;\eta)$$

elde ederiz. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek

Teorem 7.1 de $s=3$ ve Ω fonksiyonu yerine Hermite-Laguerre polinomunun kendisini alalım.

$$\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1,\xi_2,\xi_3;\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\,{}_HL_{\mu+\psi k}\,(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\tau^k$$

ve $n,p\in\mathbb{N}$ için

$$\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,z;\xi_1,\xi_2,\xi_3;\varsigma)=\sum_{k=0}^{[n/p]}a_k\,{}_HL_{n-pk}\,(x,y,z)\,{}_HL_{\mu+\psi k}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\varsigma^k$$

olsun. Bu takdirde

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,z;\xi_1,\xi_2,\xi_3;\frac{\eta}{t^p})t^n$$

$$= \frac{1}{1-t} exp\left(-\frac{xt}{1-t} + \frac{yt^2}{(1-t)^2} - \frac{zt^3}{(1-t)^3}\right) \Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1,\xi_2,\xi_s;\eta)$$

olur. Burada $a_k = 1\,, \mu = 0, \psi = 1$ alınırsa, Hermite-Laguerre polinomları için bilineer bir doğurucu fonksiyon bağıntısı

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} {}_H L_{n-pk}(x,y,z)\, {}_H L_k\,(\xi_1,\xi_2,\xi_s)\eta^k t^{n-pk}$$

$$= \frac{1}{(1-t)(1-\eta)} exp\left(-\frac{xt}{1-t} - \frac{\xi_1\eta}{1-\eta} + \frac{yt^2}{(1-t)^2} + \frac{\xi_2\eta^2}{(1-\eta)^2} - \frac{zt^3}{(1-t)^3} - \frac{\xi_3\eta^3}{(1-\eta)^3}\right)$$

olarak elde edilir.

Örnek

Teorem 7.1 de $s = 2$ ve Ω fonksiyonu yerine $h_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)$ Lagrange-Hermite polinomlarını alalım. Burada $h_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)$ polinomu,

$$\frac{1}{(1-xt)^{\alpha}(1-yt^2)^{\beta}} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)\frac{t^n}{n!}$$

doğurucu fonksiyon bağıntısıyla tanımlanır [21].

$$\Lambda_{\mu,\psi}(p_1,p_2;\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k h_{\mu+\psi k}^{(\alpha,\beta)}(p_1,p_2)\tau^k$$

ve

$\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,z;p_1,p_2;\varsigma)=\sum_{k=0}^{[n/p]}a_k\,{}_HL_{n-pk}(x,y,z)h_{\mu+\psi k}^{(\alpha,\beta)}(p_1,p_2)\varsigma^k$

ise bu takdirde,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,z;p_1,p_2;\frac{\eta}{t^p})t^n$$
$$=\frac{1}{1-t}exp\left(-\frac{xt}{1-t}+\frac{yt^2}{(1-t)^2}-\frac{zt^3}{(1-t)^3}\right)\Lambda_{\mu,\psi}(p_1,p_2;\eta)$$

olur. Burada $a_k=\frac{1}{k!}$, $\mu=0,\psi=1$ alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]}{}_HL_{n-pk}(x,y,z)h_k^{(\alpha,\beta)}(p_1,p_2)\frac{\eta^k t^{n-pk}}{k!}$$
$$=\frac{1}{1-t}exp\left(-\frac{xt}{1-t}+\frac{yt^2}{(1-t)^2}-\frac{zt^3}{(1-t)^3}\right)(1-p_1\eta)^{-\alpha}(1-p_2\eta^2)^{-\beta}$$

elde edilir. Bu son bağıntı Hermite-Laguerre polinomları ile Lagrange-Hermite polinomları için bir bilateral doğurucu fonksiyon bağıntısıdır.

7.2. Hermite-Sister Celine's Polinomları

${}_Hf_n(x,y,z)$ Hermite-Sister Celine's polinomları,

$$\frac{1}{1-t}exp\left(-\frac{4xt}{(1-t)^2}+\frac{16yt^2}{(1-t)^4}-\frac{64zt^3}{(1-t)^6}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}{}_Hf_n(x,y,z)t^n \qquad (7.5)$$

doğurucu fonksiyon bağıntısı ile tanımlanır [4].

7.2. Teorem

μ-üncü basamaktan s kompleks değişkenli ($s\in\mathbb{N}$), sıfıra denk olmayan $\Omega_\mu(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s)$ fonksiyonu için $a_k\neq 0$ olmak üzere

$$\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s;\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\Omega_{\mu+\psi k}\,(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s)\tau^k \tag{7.6}$$

ve

$$\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,z;\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s;\varsigma)=\sum_{k=0}^{[n/p]}a_{k\ H}f_{n-pk}\,(x,y,z)\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s)\varsigma^k \tag{7.7}$$

olsun. Burada $n,p\in\mathbb{N}$ dir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,z;\xi_1,\dots,\xi_s;\frac{\eta}{t^p})t^n\\&\qquad=\frac{1}{1-t}exp\left(-\frac{4xt}{(1-t)^2}+\frac{16yt^2}{(1-t)^4}-\frac{64zt^3}{(1-t)^6}\right)\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1,\dots,\xi_s;\eta)\end{aligned} \tag{7.8}$$

gerçeklenir.

İspat:

Eş. 7.8 deki doğurucu fonksiyonun eşitini L ile gösterelim. $\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,z;\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s;\varsigma)$ polinomunun değeri Eş. 7.7 den alınıp Eş. 7.8 de yerine yazılırsa,

$$L=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]}a_{k\ H}f_{n-pk}(x,y,z)\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\dots,\xi_s)\frac{\eta^k}{t^{pk}}t^n$$

olup burada Lemma 2.3 ün (ii) şıkkı kullanılarak,

$$L=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_{k\ H}f_n(x,y,z)\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\dots,\xi_s)\eta^k t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} {}_H f_n(x,y,z)t^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \dots, \xi_s)\eta^k$$

$$= \frac{1}{1-t} exp\left(-\frac{4xt}{(1-t)^2} + \frac{16yt^2}{(1-t)^4} - \frac{64zt^3}{(1-t)^6}\right) \Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1, \dots, \xi_s; \eta)$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek

Teorem 7.2 de $s = 3$ ve Ω fonksiyonu yerine Hermite-Sister Celine's polinomlarının kendisini alalım.

$$\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1, \xi_2, \xi_3; \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, {}_H f_{\mu+\psi k}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\tau^k$$

ve $n, p \in \mathbb{N}$ için

$$\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,z;\xi_1,\xi_2,\xi_3;\varsigma) = \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k \, {}_H f_{n-pk}(x,y,z) \, {}_H f_{\mu+\psi k}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\varsigma^k$$

olsun. Bu takdirde

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x,y,z;\xi_1,\xi_2,\xi_3;\frac{\eta}{t^p})t^n$$

$$= \frac{1}{1-t} exp\left(-\frac{4xt}{(1-t)^2} + \frac{16yt^2}{(1-t)^4} - \frac{64zt^3}{(1-t)^6}\right) \Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1, \xi_2, \xi_s; \eta)$$

olur. Burada $a_k = 1$, $\mu = 0, \psi = 1$ alınırsa, Hermite-Sister Celine's polinomları için bilineer bir doğurucu fonksiyon bağıntısı

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} {}_H f_{n-pk}(x,y,z) \, {}_H f_k(\xi_1, \xi_2, \xi_s)\eta^k t^{n-pk}$$

$$= \frac{1}{(1-t)(1-\eta)} exp\left(-\frac{4xt}{(1-t)^2} - \frac{4\xi_1\eta}{(1-\eta)^2} + \frac{16yt^2}{(1-t)^4} + \frac{16\xi_2\eta^2}{(1-\eta)^4} - \frac{64zt^3}{(1-t)^6} - \frac{64\xi_3\eta^3}{(1-\eta)^6}\right)$$

olarak elde edilir.

Örnek

Teorem 7.2 de $s = 1$ ve Ω fonksiyonu yerine $c_n(\beta, x)$ Poisson-Charlier polinomlarını alalım. Burada Poisson-Charlier polinomları,

$$\left(1 - \frac{t}{x}\right)^{\beta} \exp(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\beta, x) \frac{t^n}{n!}$$

doğurucu fonksiyon bağıntısıyla tanımlanırlar [8].

$$\Lambda_{\mu,\psi}(\beta, \xi_1; \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k c_{\mu+\psi k}\,(\beta, \xi_1)\tau^k$$

ve $n, p \in \mathbb{N}$ için

$$\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x, y, z; \beta, \xi_1; \varsigma) = \sum_{k=0}^{[n/p]} a_{k\ H} f_{n-pk}\,(x, y, z)\mathrm{c}_{\mu+\psi k}(\beta, \xi_1)\varsigma^k$$

ise bu takdirde

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x, y, z; \beta, \xi_1; \frac{\eta}{t^p})t^n = \frac{1}{1-t} exp\left(-\frac{4xt}{(1-t)^2} + \frac{16yt^2}{(1-t)^4} - \frac{64zt^3}{(1-t)^6}\right)\Lambda_{\mu,\psi}(\beta, \xi_1; \eta)$$

olur. Burada $a_k = \frac{1}{k!}$, $\mu = 0, \psi = 1$ alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} {}_H f_{n-pk}(x,y,z) c_k(\beta, \xi_1) \frac{\eta^k t^{n-pk}}{k!}$$
$$= \frac{1}{1-t}\left(1 - \frac{\eta}{\xi_1}\right)^{\beta} exp\left(-\frac{4xt}{(1-t)^2} + \frac{16yt^2}{(1-t)^4} - \frac{64zt^3}{(1-t)^6} + \eta\right)$$

elde edilir. Bu son bağıntı Hermite-Sister Celine's ile Poisson-Charlier polinomları için bir bilateral doğurucu fonksiyon bağıntısıdır.

a_k $(k \in \mathbb{N}_0)$ katsayılarının uygun her bir seçimi için, eğer $\Omega_\mu(\xi_1, \ldots, \xi_s)$ çok değişkenli fonksiyonu, daha basit bazı fonksiyonların uygun bir çarpımı olarak ifade edilebilirse, bu durumda Teorem 7.1 Hermite-Laguerre polinomlarının ve Teorem 7.2 Hermite-Sister Celine's polinomlarının multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyonlarının çeşitli ailelerini elde etmek için kullanılabilir.

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde Hermite-tabanlı Appell polinomları ve bu polinomlarla bağlantılı olan diğer bazı polinomlar üzerinde çalışılmıştır. Bunun için önce Appell ve Hermite polinomlarının tanım ve özellikleri hatırlatılmış, sonra Hermite-tabanlı Appell polinomları incelenerek, bu polinomlar için bilinen bazı bağıntılardan yararlanılarak yeni özellikler elde edilmiştir. Ayrıca, bu polinomların özel halleri olan Hermite-tabanlı Bernoulli, Euler ve Genocchi polinomları için de yeni özelliklere ulaşılmıştır. Daha sonra, Hermite-tabanlı Appell polinomlarının bir genel hali tanımlanarak, bu yeni polinomlar incelenmiştir. Buradan, genelleştirilmiş Hermite-tabanlı Bernoulli, Euler ve Genocchi polinomları tanımlanmış ve yeni özellikler sonuçlar olarak verilmiştir. Son olarak, Hermite-tabanlı polinomlardan olan Hermite-Laguerre ve Hermite-Sister Celine's polinomları incelenmiş ve bu polinomlar için bilineer ve bilateral doğurucu fonksiyon aileleri veren teoremler elde edilerek bu teoremlere örnekler verilmiştir.

Bu tezde üzerinde çalışılan polinomlarla daha birçok polinom arasında geçişler vardır. Elde edilen yeni özellikler yardımıyla, diğer polinomlar için de birçok yeni bağıntılar elde edilebilir. Ayrıca, bu tezde yapılan çalışmalar ve verilen metotlar kullanılarak, ileride farklı polinomlar için de yeni doğurucu fonksiyonlar veren sonuçlar çalışılabilir.

KAYNAKLAR

1. Appell, P. (1880). Sur une classe de polynômes. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure,* 9(2), 119-144.

2. Dattoli G., Chiccali C., Lorenzutta S., Maino G. and Torre A., (1994). Theory of generalized Hermite polynomials. *Computers & Mathematics with Applications,* 28(4), 71-83.

3. Dattoli G., Lorenzutta S., Maino G. and Torre A., (1997). Theory of multiindex multivariable Bessel functions and Hermite polynomials. *Le Matematiche.* vol LII. 177-195.

4. Khan, S., Yasmin, G., Khan, R. and Hassan, N.A.M. (2009). Hermite-based Appell polynomials: properties and applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 351,* 756-764.

5. Rainville E. D. (1960). *Special Functions*. New York:The Macmillan Company, 187-189.

6. Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (1964). *Handbook of Mathematical function with formulas, graphs and mathematical tables. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 55,* Cambridge: Government Printing Office, 803-804.

7. Horadam, A.F. (1991). Genocchi polynomials, *Applications of Fibonacci Numbers*, 145-166.

8. Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. and Tricomi, F.G., (1955). *Higher Transcendental Function* (volumes III). New York–Toronto– London, McGraw–Hill Book Company.

9. Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. and Tricomi, F.G., (1953). *Higher Transcendental Function* (volumes I and II). New York–Toronto– London, McGraw–Hill Book Company.

10. Bretti, G. , Natalini, P. and Ricci, P. E. (2004). Generalizations of the Bernoulli and Appell polynomials. *Abstract and Applied Analysis,* 7, 613-623.

11. Douak, K. (1996), The relation of the d-orthogonal polynomials to the Appell polynomials. *Journal of Computational and Applied Mathematics,* 70(2), 279-295.

12. Appell, P. and Kampé de Fériet, J. (1926). *Fonctions Hypergéométriques et Hypersphériques: Polynômes d' Hermite.* Paris: Gauthier–Villars.

13. Andrews, L. C. (1985). *Special Functions for Engineers and Applied Mathematicians.* New York: Macmillan Publishing Company, 278-282.

14. Dattoli, G., (2000). Hermite-Bessel and Laguerre-Bessel Functions: A by product of the Monomiality Principle. *Advanced Special Functions and Applications,* 1, 147-164.

15. Dattoli, G., (2000). Generalized polynomials operational identities and their applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 118, 111-123.

16. Ozarslan, M. A., (2013). Hermite-based unified Apostol-Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials. *Advances in Difference Equations*, 1,116.

17. Erkus-Duman E. and Ciftci H., (2022). A new family of two-variable polynomials based on Hermite polynomials. *Mathematica Slovaca*, 72(4), 885-898.

18. Korkmaz-Duzgun D. and Erkus-Duman E., (2019). Extended multivariable fourth type Horn functions. *Gazi University Journal of Science*, 32(1), 225-240.

19. Ozmen N. and Erkus-Duman E., (2015). On the Poisson-Charlier polynomials. *Serdica Mathematical Journal*, 41(4), 457-470.

20. Chan, W.-C.C., Chyan, C.-J. and Srivastava, H.M., 2001, The Lagrange polynomials in several variables. *Integral Transforms and Special Functions*, 12, 139-148.

21. Dattoli, G., Ricci, P.E. and Cesarano, C., 2003, The Lagrange polynomials, the associated generalizations, and the umbral calculus. *Integral Transforms and Special Functions*, 14, 181–186.



Gazili olmak ayrıcalıktır