FIBONACCI DİZİLERİ VE HESSENBERG MATRİSLERİ ÜZERİNE

Huriye AZMAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2009

ANKARA

Huriye AZMAN tarafından hazırlanan FIBONACCI DİZİLERİ VE HESSENBERG MATRİSLERİ ÜZERİNE adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Dursun TAŞÇI …………………………………
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Dursun TAŞÇI
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi ………………………………

Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU
Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi ………………………………

Yrd. Doç. Dr. Naim Tuğlu
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi …………………………………

Tarih: 17.06.09

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nail ÜNSAL ………………………………
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Huriye AZMAN

FIBONACCI DİZİLERİ VE HESSENBERG MATRİSLERİ ÜZERİNE

(Yüksek Lisans Tezi)

Huriye AZMAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2009

ÖZET

Bu çalışmada Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas dizilerinin karekteristik özellikleri incelenerek; bu dizilerin, bilinen rekürans bağıntıları yardımıyla Binet formülleri verildi. Ayrıca Fibonacci dizisinin matris üreteçlerinden bahsedildi. Fibonacci ve Lucas sayılarıyla ilgili bazı özdeşlikler ispatlandı. Daha sonra, determinantları Fibonacci sayılarını veren bazı $n \times n$ matrisler verildi. Fibonacci-Hessenberg matrislerinin beş yeni sınıfı tanıtılıp, iki-boyutlu Fibonacci dizisinin tanımı verildi. Son olarak da çözümleri Fibonacci kesirleri olan lineer denklem sistemlerinden söz edildi.

Bilim Kodu	**: 204.1.025**
Anahtar Kelimeler	**: Fibonacci dizileri, Hessenberg matrisleri**
Sayfa Adedi	**: 71**
Tez Yöneticisi	**: Prof. Dr. Dursun TAŞÇI**

ON THE FIBONACCI SEQUENCE AND HESSENBERG MATRICES

(M. Sc. Thesis)

Huriye AZMAN

GAZI UNIVERSITY

INSTUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

June 2009

ABSTRACT

In this study, by describing properties characteristic of Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas sequences; Binet formulas of these sequences are examined with the help of reccurence relations. Additionally, generating matrices of Fibonacci sequence are mentioned. Some identities about of Fibonacci and Lucas numbers are obtained. Some $n \times n$ matrices are given whose determinats obtain Fibonacci numbers. Five new classes of Fibonacci-Hessenberg matrices are introduced and the definition of two-dimensional Fibonacci arrays are given. Finally, linear equations are given whose solutions are Fibonacci fractions.

Science Code : 204.1.025
Key Words : Fiboacci sequences, Hessenberg matrices
Page Number: 71
Adviser : Prof. Dr. Dursun TAŞÇI

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren saygıdeğer Hocam Prof. Dr. Dursun TAŞÇI' ya; yine tecrübelerinden faydalandığım, bu süreçte her türlü yardımını esirgemeyen ve bana destek olan sevgili hocam Araş. Gör. Mustafa AŞÇI' ya; hayat boyu her türlü sıkıntımda yanımda olan ve bu süreçte bana anlayış gösteren sevgili aile fertlerime en içten saygı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
F_n	n -inci Fibonacci sayısı
L_n	n -inci Lucas sayısı
P_n	n -inci Pell sayısı
Q_n	n -inci Pell-Lucas sayısı
J_n	n -inci Jasobsthal sayısı
j_n	n -inci Jasobsthal-Lucas sayısı
$\det(A)$	A matrisinin determinantı
$\det R_{n,t}$	$R_{n,t}$ matrisinin determinantı
$\det C_{n,t}$	$C_{n,t}$ matrisinin determinantı
$\det B_{n,t}$	$B_{n,t}$ matrisinin determinantı
$\det K_{n,t}$	$K_{n,t}$ matrisinin determinantı
$\det L_{n,t}$	$L_{n,t}$ matrisinin determinantı
$\det \underline{K}_{n,t}$	$\underline{K}_{n,t}$ matrisinin determinantı
$\det \underline{L}_{n,t}$	$\underline{L}_{n,t}$ matrisinin determinantı
$\det \varepsilon_{n,t}$	$\varepsilon_{n,t}$ matrisinin determinantı
$\det H_{n,t}$	$H_{n,t}$ matrisinin determinantı
$\det R_{n,t}^{(i)}$	$R_{n,t}^{(i)}$ matrisinin determinantı
$\det C_{n,t}^{(i)}$	$C_{n,t}^{(i)}$ matrisinin determinantı
$\det \varepsilon_{n,t}^{(i)}$	$\varepsilon_{n,t}^{(i)}$ matrisinin determinantı

1. GİRİŞ

Bu bölümde Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas dizilerine ait bazı ön bilgiler verilecektir. Sonra Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas dizilerinin bilinen indirgeme bağıntıları göz önüne alınarak bu dizilerin Binet formülleri incelenecektir. Daha sonra da Fibonacci dizisinin matris üreteçlerinden bahsedilecektir.

$\forall n$ tamsayısı için,

$$U_n = AU_{n-1} + BU_{n-2}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{U_n\}$ dizisinin aşağıdaki özel durumlarını göz önüne alacağız. Burada A, B keyfi tamsayılar olmak üzere,

1. $\mathrm{A}=1, \mathrm{B}=1$ ve $\mathrm{U}_0=0, \mathrm{U}_1=1$ için; $\{\mathrm{F}_\mathrm{n}\}$ ile gösterilen Fibonacci dizisi,
2. $\mathrm{A}=1, \mathrm{B}=1$ ve $\mathrm{U}_0=2, \mathrm{U}_1=1$ için; $\{\mathrm{L}_\mathrm{n}\}$ ile gösterilen Lucas dizisi,
3. $\mathrm{A}=2, \mathrm{B}=1$ ve $\mathrm{U}_0=0, \mathrm{U}_1=1$ için; $\{\mathrm{P}_\mathrm{n}\}$ ile gösterilen Pell dizisi,
4. $\mathrm{A}=2, \mathrm{B}=1$ ve $\mathrm{U}_0=2, \mathrm{U}_1=2$ için; $\{Q_n\}$ ile gösterilen Pell-Lucas dizisi,
5. $\mathrm{A}=1, \mathrm{B}=2$ ve $\mathrm{U}_0=0, \mathrm{U}_1=1$ için; $\{J_n\}$ ile gösterilen Jacobsthal dizisi,
6. $\mathrm{A}=1, \mathrm{B}=2$ ve $\mathrm{U}_0=2, \mathrm{U}_1=1$ için; $\{j_n\}$ ile gösterilen Jacobsthal-Lucas dizisi

elde edilir. Bu diziler [9, 17] de çalışılmıştır.

1.1. Tanım

$\mathrm{F}_0=0, \mathrm{F}_1=1$ olmak üzere,

$$\mathrm{F}_\mathrm{n}=\mathrm{F}_{\mathrm{n}-1}+\mathrm{F}_{\mathrm{n}-2}\ , \mathrm{n}\geq 2 \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlanan rekürans bağıntısından elde edilen sayılara Fibonacci sayıları denir. Bu rekürans bağıntısının ürettiği tamsayılar dizisine Fibonacci dizisi denir. Burada F_n, n-inci Fibonacci sayısını gösterir.

1.2. Tanım

$L_0 = 2, L_1 = 1$ olmak üzere,

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}\ , n \geq 2 \tag{1.2}$$

şeklinde tanımlanan rekürans bağıntısından elde edilen sayılara Lucas sayıları denir. Bu rekürans bağıntısının ürettiği tamsayılar dizisine Lucas dizisi denir. Burada L_n, n-inci Lucas sayısını gösterir.

1.3. Tanım

$P_0 = 0, P_1 = 1$ olmak üzere,

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}\ , n \geq 2 \tag{1.3}$$

şeklinde tanımlanan rekürans bağıntısından elde edilen sayılara Pell sayıları denir. Bu rekürans bağıntısının ürettiği tamsayılar dizisine Pell dizisi denir. Burada P_n, n-inci Pell sayısını gösterir.

1.4. Tanım

$Q_0 = 2, Q_1 = 2$ olmak üzere,

$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}\ , n \geq 2 \tag{1.4}$$

şeklinde tanımlanan rekürans bağıntısından elde edilen sayılara Pell-Lucas sayıları denir. Bu rekürans bağıntısının ürettiği tamsayılar dizisine Pell-Lucas dizisi denir. Burada Q_n, n-inci Pell-Lucas sayısını gösterir.

1.5. Tanım

$J_0 = 0, J_1 = 1$ olmak üzere,

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2} \text{ , } n \geq 2 \tag{1.5}$$

şeklinde tanımlanan rekürans bağıntısından elde edilen sayılara Jacobsthal sayıları denir. Bu rekürans bağıntısının ürettiği tamsayılar dizisine Jacobsthal dizisi denir. Burada J_n, n-inci Jacobsthal sayısını gösterir.

1.6. Tanım

$j_0 = 2, j_1 = 1$ olmak üzere,

$$j_{n+2} = j_{n+1} + 2j_n, n \geq 2 \tag{1.6}$$

şeklinde tanımlanan rekürans bağıntısından elde edilen sayılara Jacobsthal-Lucas sayıları denir. Bu rekürans bağıntısının ürettiği tamsayılar dizisine Jacobsthal-Lucas dizisi denir. Burada j_n, n-inci Jacobsthal-Lucas sayısını gösterir.

$F_0 = 0, F_1 = 1$ olmak üzere $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$ şeklinde tanımlanan Fibonacci rekürans bağıntısını ele alalım. Bu rekürans bağıtısı için $F_n = x^n$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
x^n = x^{n-1} + x^{n-2} &\Rightarrow x^{n-2}x^2 = x^{n-2}x + x^{n-2} \\
&\Rightarrow x^{n-2}x^2 = x^{n-2}(x+1) \\
&\Rightarrow x^2 = x + 1 \\
&\Rightarrow x^2 - x - 1 = 0
\end{aligned}$$

karakteristik denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

dir.

1.1. Teorem

F_n, n -inci Fibonacci sayısı ve $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{1.7}$$

dır. Bu formüle Fibonacci sayıları için Binet formülü denir.

İspat

n üzerinden tümevarımla ispat yapalım.

$n = 1$ için;

$$F_1 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta} \Rightarrow 1 = 1$$

yazılır.

$n = 2$ için;

$$F_2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)}{(\alpha - \beta)} = \alpha + \beta \Rightarrow 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$

sağlanır.

İfade n için doğru, yani $F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ olsun. O halde $n+1$ için doğru olduğunu göstermeliyiz.

$$
\begin{aligned}
F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \\
&= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{\alpha^{n-1}\alpha - \beta^{n-1}\beta + \alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{\alpha^{n-1}(\alpha + 1) - \beta^{n-1}(\beta + 1)}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{\alpha^{n-1}\alpha^2 - \beta^2\beta}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}
\end{aligned}
$$

eşitliği sağlanmış olur. Burada α ve β, $x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan, $\alpha^2 = \alpha + 1$ ve $\beta^2 = \beta + 1$ eşitliklerinden yararlanılmıştır.

$L_0 = 2, L_1 = 1$ olmak üzere $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, n \geq 2$ şeklinde tanımlanan Lucas rekürans bağıntısının karakteristik denklemi de $x^2 - x - 1 = 0$ olup $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ köklerine sahiptir.

1.2. Teorem

L_n, n-inci Lucas sayısı ve $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere,

$$L_n = \alpha^n + \beta^n \tag{1.8}$$

dır. Bu formüle Lucas sayıları için Binet formülü denir.

İspat

n üzerinden tümevarımla ispat yapalım.

$n=1$ için;

$$L_1 = \alpha + \beta \Rightarrow 1 = 1$$

sağlanır.

$n=2$ için;

$$L_2 = \alpha^2 + \beta^2 \Rightarrow 3 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 3$$

olduğu görülür.

İfadenin n için doğru olduğunu, yani $L_n = \alpha^n + \beta^n$ olduğunu kabul edip $n+1$ için doğru olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
L_{n+1} &= L_n + L_{n-1} \\
&= \alpha^n + \beta^n + \alpha^{n-1} + \beta^{n-1} \\
&= \alpha^{n-1}\alpha + \beta^{n-1}\beta + \alpha^{n-1} + \beta^{n-1} \\
&= \alpha^{n-1}(\alpha+1) + \beta^{n-1}(\beta+1) \\
&= \alpha^{n-1}\alpha^2 + \beta^{n-1}\beta^2 \\
&= \alpha^{n+1} + \beta^{n+1}
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanmış olur. Burada α ve β, $x^2-x-1=0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan, $\alpha^2=\alpha+1$ ve $\beta^2=\beta+1$ eşitlikleri kullanılmıştır.

Benzer şekilde; P_n, n-inci Pell sayısı; Q_n, n-inci Pell-Lucas sayısı ve $\alpha=1+\sqrt{2}$, $\beta=1-\sqrt{2}$, $x^2-2x-1=0$ karakteristik denkleminin kökleri olmak üzere,

$$P_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} \text{ ve } Q_n=\alpha^n+\beta^n \qquad (1.9)$$

dır. Bu formüllere de sırasıyla Pell ve Pell-Lucas sayıları için Binet formülü denir.

Ayrıca; J_n, n-inci Jacobsthal sayısı; j_n, n-inci Jacobsthal-Lucas sayısı ve $\alpha=2$, $\beta=-1$ $x^2-x-2=0$ karakteristik denkleminin kökleri olmak üzere,

$$J_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{3} \text{ ve } j_n=\alpha^n+\beta^n \qquad (1.10)$$

dır. Bu formüllere de sırasıyla Jacobsthal ve Jacobsthal -Lucas sayıları için Binet formülü denir.

Eş. 1.1 kullanılarak ,

$$F_{n-2}=F_n-F_{n-1} \qquad (1.11)$$

eşitliği elde edilir. Bu son ifadede $n\le 1$ alınmasıyla elde edilen $\{F_n\}$ dizisine negatif indisli Fibonacci dizisi denir. Böylece,

$$F_{-1}=F_1-F_0=1, F_{-2}=F_0-F_{-1}=-1,...$$

şeklinde devam edilerek negatif indisli Fibonacci sayıları elde edilir. Bunu genelleştirerek aşağıdaki sonucu elde ederiz.

1.1 Sonuç

Her n pozitif tamsayısı için,

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n \tag{1.12}$$

dir.

İspat

Bu eşitliğin ispatı için Fibonacci sayılarının Binet formülünü göz önüne alalım. O halde;

$$F_{-n} = \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta} = \frac{\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n}}{\alpha - \beta} = \frac{\frac{\beta^n - \alpha^n}{(\alpha\beta)^n}}{\alpha - \beta}$$

yazarız. $\alpha\beta = -1$ olduğundan,

$$F_{-n} = \frac{\frac{\beta^n - \alpha^n}{(-1)^n}}{\alpha - \beta} = (-1)^{n+1}\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right) = (-1)^{n+1} F_n$$

bulunur.

Benzer şekilde, Eş. 1.2 kullanılarak ,

$$L_{n-2} = L_n + L_{n-1} \tag{1.13}$$

eşitliği elde edilir. Bu son ifadede $n \leq 1$ alınmasıyla elde edilen $\{L_n\}$ dizisine negatif indisli Lucas dizisi denir. Böylece,

$$L_{-1} = L_1 - L_0 = -1, L_{-2} = L_0 - L_{-1} = 3, \ldots$$

şeklinde devam edilerek negatif indisli Lucas sayıları elde edilir. Bunu genelleştirerek aşağıdaki sonucu elde ederiz.

1.2 Sonuç

Her n pozitif tamsayısı için

$$L_{-n} = (-1)^{n+1} L_n \tag{1.14}$$

dir.

İspat

Bu eşitliğin ispatı için Lucas sayılarının Binet formülünü göz önüne alalım. O halde;

$$L_{-n} = \alpha^{-n} - \beta^{-n} = \frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n} = \frac{\beta^n - \alpha^n}{(\alpha\beta)^n} = \frac{-(\alpha^n - \beta^n)}{(\alpha\beta)^n}$$

yazarız. $\alpha\beta = -1$ olduğundan,

$$\mathrm{L}_{-n} = L_{-n} = \frac{-(\alpha^n - \beta^n)}{(-1)^n} = (-1)^{n+1}(\alpha^n - \beta^n) = (-1)^{n+1} L_n$$

bulunur.

Eş. 1.3, Eş. 1.4, Eş. 1.5 ve Eş. 1.6 kullanılarak ,

$$P_{n-2} = P_n - P_{n-1}, Q_{n-2} = Q_n - Q_{n-1}, J_{n-2} = J_n - J_{n-1}, j_{n-2} = j_n - j_{n-1} \tag{1.15}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu son ifadede $n \le 1$ alınmasıyla elde edilen $\{P_n\}, \{Q_n\}, \{J_n\}, \{j_n\}$ dizilerine sırasıyla negatif indisli Pell, Pell-Lucas, Jasobsthal ve Jasobsthal-Lucas dizileri denir. Böylece,

$$P_{-1} = P_1 - P_0 = 1, P_{-2} = P_0 - P_{-1} = -2, ...$$
$$Q_{-1} = Q_1 - Q_0 = -2, Q_{-2} = Q_0 - Q_{-1} = 6, ...$$
$$J_{-1} = J_1 - J_0 = 1, J_{-2} = J_0 - J_{-1} = 1, ...$$
$$j_{-1} = j_1 - j_0 = -1, j_{-2} = j_0 - j_{-1} = 3, ...$$

şeklinde devam edilerek negatif indisli Pell, Pell-Lucas, Jasobsthal ve Jasobsthal-Lucas sayıları elde edilir.

Bunları genelleştirerek benzer şekilde, her n pozitif tamsayısı için

$$P_{-n} = (-1)^{n+1} P_n, Q_{-n} = (-1)^{n+1} Q_n, J_{-n} = (-1)^{n+1} J_n, j_{-n} = (-1)^{n+1} j_n \tag{1.16}$$

eşitliklerini yazarız.

Buradan, n tamsayısına değerler vererek aşağıdaki sayıları bulabiliriz.

$n:$	… -6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6 …
$F_n:$	… -8	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8 …
$L_n:$	… 18	-11	7	-4	3	-1	2	1	3	4	7	11	18 …
$P_n:$	…-70	29	-12	5	-2	1	0	1	2	5	12	29	70…
$Q_n:$	…198	-82	34	-14	6	-2	2	2	6	14	34	82	198…
$J_n:$	…$-\frac{21}{64}$	$\frac{11}{32}$	$-\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	1	1	3	5	11	21…

$$j_n : \ldots \frac{65}{64} \quad -\frac{31}{32} \quad \frac{17}{16} \quad -\frac{7}{8} \quad \frac{5}{4} \quad -\frac{1}{2} \quad 2 \quad 1 \quad 5 \quad 7 \quad 17 \quad 31 \quad 65 \ldots$$

Şimdi Fibonacci dizisinin matris üreteçleri ile ilgili aşağıdaki teoremi verelim.

1.3. Teorem

F_n, n-inci Fibonacci sayısı ve $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$A^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

dir.

İspat

İspatımızı n üzerinden tümevarımla yapalım.

$n = 1$ için;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix}$$

bulunur.

$n = 2$ için;

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_3 & F_2 \\ F_2 & F_1 \end{bmatrix}$$

olduğundan iddia doğrudur. Şimdi iddianın n için doğru olduğunu, yani $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$ olduğunu kabul ederek $n+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$A^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1} + F_n & F_{n+1} \\ F_n + F_{n-1} & F_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

2. BAZI FIBONACCI VE LUCAS ÖZDEŞLİKLERİ

Bu bölümde Fibonacci ve Lucas dizileri ile ilgili bazı özdeşlikleri kapsayan aşağıdaki teoremleri veriyoruz.

2.1. Teorem

F_n, n-inci Fibonacci sayısı olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1 \tag{2.1}$$

dir.

İspat

Fibonacci sayıları için rekürans bağıntısı kullanılırsa,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \Rightarrow F_{n-2} = F_n - F_{n-1}$$

olup,

$$\begin{aligned}
F_1 &= F_3 - F_2 \\
F_2 &= F_4 - F_3 \\
F_3 &= F_5 - F_4 \\
&\vdots \\
F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n \\
F_n &= F_{n+2} - F_{n+1}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadeleri taraf tarafa toplarsak,

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1$$

elde edilir.

2.2. Teorem

F_n, n-inci Fibonacci sayısı olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n} \tag{2.2}$$

dir.

İspat

Fibonacci sayıları için rekürans bağıntısı kullanılırsa,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \Rightarrow F_{n-1} = F_n - F_{n-2}$$

olup,

$$\begin{aligned}
F_1 &= F_2 - F_0 \\
F_3 &= F_4 - F_2 \\
F_5 &= F_6 - F_4 \\
&\vdots \\
F_{2n-3} &= F_{2n-2} - F_{2n-4} \\
F_{2n-1} &= F_{2n} - F_{2n-2}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadeleri taraf tarafa toplarsak,

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n} - F_0 = F_{2n}$$

elde edilir.

2.3. Teorem

F_n, n-inci Fibonacci sayısı olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1 \tag{2.3 }$$

dir.

İspat

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} F_{2i} &= \sum_{i=1}^{2n} F_i - \sum_{i=1}^{n} F_{2i-1}\\ &= (F_{2n+2} - 1) - (F_{2n})\\ &= (F_{2n+2} - F_{2n}) - 1\\ &= F_{2n+1} - 1\end{aligned}$$

olduğu görülür.

2.4. Teorem (Cassini Formülü)

F_n, n-inci Fibonacci sayısı olmak üzere,

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^{\ 2} = (-1)^n, n \geq 1 \tag{2.4 }$$

dir.

İspat

İspatımızı n üzerinden tümevarımla yapalım.

$n=1$ için;

$$F_0F_2 - F_1^{\;2} = (-1)^1 \Rightarrow 0.1 - 1^2 = -1 \Rightarrow -1 = -1$$

dir.

$n=2$ için;

$$F_1F_3 - F_2^{\;2} = (-1)^2 \Rightarrow 1.2 - 1^2 = 1 \Rightarrow 2 - 1 = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

bulunur.

İfadenin n için doğru olduğunu, yani; $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^{\;2} = (-1)^n$ olduğunu kabul ederek $n+1$ için iddianın doğru olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
F_nF_{n+2} - F_{n+1}^{\;2} &= (F_{n+1} - F_{n-1})(F_n + F_{n+1}) - F_{n+1}^{\;2} \\
&= F_{n+1}F_n + F_{n+1}^{\;2} - F_{n-1}F_n - F_{n-1}.F_{n+1} - F_{n+1}^{\;2} \\
&= F_{n+1}F_n - F_{n-1}F_n - F_n^{\;2} - (-1)^n \\
&= F_{n+1}F_n - F_n(F_{n-1} + F_n) + (-1)^{n+1} \\
&= F_{n+1}F_n - F_nF_{n+1} + (-1)^{n+1} \\
&= (-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

2.5. Teorem

F_n, n-inci Fibonacci sayısı olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^{\,2} = F_n F_{n+1} \qquad (2.5\ )$$

dir.

İspat

n üzerinden tümevarımla ispat yapalım.

$n = 1$ için;

$$F_1^{\,2} = F_1 F_2 \Rightarrow 1^2 = 1.1 \Rightarrow 1 = 1$$

bulunur.

$n = 2$ için;

$$F_1^{\,2} + F_2^{\,2} = F_2 F_3 \Rightarrow 1^2 + 1^2 = 1.2 \Rightarrow 2 = 2$$

yazılır.

İfade n için doğru, yani; $\sum_{i=1}^{n} F_i^{\,2} = F_n F_{n+1}$ olsun. Buna göre $n+1$ için iddianın doğru olduğunu göstermeliyiz.

$$\sum_{i=1}^{n+1} F_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} F_i^{\,2} + F_{n+1}^{\,2}$$

$$= F_n F_{n+1} + F_{n+1}^{\ 2}$$

$$= F_{n+1}(F_n + F_{n+1})$$

$$= F_{n+1} F_{n+2}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

2.6. Teorem

L_n, n-inci Lucas sayısı olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n} L_i^{\ 2} = L_n L_{n+1} - 2 \qquad (2.6\ )$$

dir.

İspat

n üzerinden tümevarımla ispat yapalım.

$n = 1$ için;

$$L_1^{\ 2} = L_1 L_2 - 2 \Rightarrow 1^2 = 1.3 - 2 \Rightarrow 1 = 1$$

bulunur.

$n = 2$ için;

$$L_1^{\ 2} + L_2^{\ 2} = L_2 L_3 - 2 \Rightarrow 1^2 + 3^2 = 3.4 - 2 \Rightarrow 1 + 9 = 12 - 2 \Rightarrow 10 = 10$$

yazılır.

İfade n için doğru, yani; $\sum_{i=1}^{n} L_i^{\,2} = L_n L_{n+1} - 2$ olsun. Buna göre $n+1$ için iddianın doğruluğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} L_i^{\,2} &= \sum_{i=1}^{n} L_i^{\,2} + L_{n+1}^{\,2} \\ &= L_n L_{n+1} - 2 + L_{n+1}^{\,2} \\ &= L_{n+1}(L_n + L_{n+1}) - 2 \\ &= L_{n+1} L_{n+2} - 2\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

2.7. Teorem

Her $n \geq 1$ tamsayısı için ardışık iki Fibonacci sayısı aralarında asaldır. Yani $(F_n, F_{n-1}) = 1$ 'dir.

İspat

Kabul edelim ki $(F_n, F_{n-1}) = d$ ve $d > 1$ olsun. En büyük ortak bölen tanımından dolayı, d/F_n ve d/F_{n-1} dir. Bölünebilmenin özelliği gereği,

$$\begin{aligned} d/F_n \text{ ve } d/F_{n-1} &\Rightarrow d/(F_n - F_{n-1}) \\ &\Rightarrow d/F_{n-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d/F_{n-1} \text{ ve } d/F_{n-2} &\Rightarrow d/(F_{n-1} - F_{n-2}) \\ &\Rightarrow d/F_{n-3} \end{aligned}$$

Benzer şekilde devam edilirse,

$$
\begin{aligned}
d/F_3 \ \text{ve}\ d/F_2 &\Rightarrow d/(F_3 - F_2) \\
&\Rightarrow d/F_1 \\
&\Rightarrow d/1 \\
&\Rightarrow d = 1
\end{aligned}
$$

elde edilir. Fakat bu $d > 1$ olması kabulüyle çelişir. O halde kabul yanlıştır. Yani; $(F_n, F_{n-1}) = 1$ 'dir.

3. DETERMİNANTLARI FIBONACCI SAYILARINI VEREN BAZI $n \times n$ MATRİSLER

Bu bölümde $\{F_n\} = \{1,1,2,...\}$ Fibonacci dizisinin, şaşırtıcı bir şekilde ortaya çıktığı bir örneği sunacağız.

T_n, esas köşegeni üzerindeki elemanları 1, üst köşegen ve alt köşegen üzerindeki elemanları $i = \sqrt{-1}$ olan $n \times n$ tipinde bir matris, yani;

$$T_n = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ i & 1 & i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & i & 1 & i & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & i & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & i \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & i & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda $\det T_n = F_{n+1}$ 'dir. [2]

Bir alt Hessenberg matris $k > j+1$ iken $a_{j,k} = 0$ ve bazı j 'ler için $a_{j,j+1} \neq 0$ olan, $n \times n$ tipinde bir matristir. Bu matris, üst köşegenin üstündeki tüm elemanları 0 olan, fakat alt üçgensel olmayan bir matristir.

Bu bölümün genelinde, aşağıdaki alt Hessenberg matrise atıfta bulunacağız.

$$M_n = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & \ddots & 0 \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & m_{n-1,n} \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,n-1} & m_{n,n} \end{bmatrix} \qquad (3.1)$$

$\{\det M_n, n \geq 1\}$ dizisini göz önüne alacağız. Esas sonucumuz, aşağıdaki teoremde ifade edilmektedir.

3.1. Teorem

M_n, her $n \geq 1$ için, Eşitlik 3.1' deki gibi verilsin ve $\det M_0 = 1$ olsun. $\{\det M_n, n \geq 0\}$, aşağıdakileri sağlar.

$\det M_0 = 1, \det M_1 = m_{1,1}$ ve

$$\det M_n = m_{n,n} \det M_{n-1} + \sum_{r=1}^{n-1} [(-1)^{n-r} m_{n,r} \prod_{j=r}^{n-1} m_{j,j+1} \det M_{r-1}], n \geq 2 .$$

dir.

İspat

İspatımızı n üzerinden tümevarımla yapalım.

$n = 2$ için;

$M_2 = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{bmatrix}$ olduğundan $\det M_2 = m_{1,1} m_{2,2} - m_{2,1} m_{1,2}$,

$$\begin{aligned} \det M_2 &= m_{2,2} \det M_1 + \sum_{r=1}^{1} [(-1)^{2-r} m_{2,r} \prod_{j=1}^{1} m_{j,j+1} \det M_{r-1}] \\ &= m_{2,2} \det M_1 + (-1)^{2-1} m_{2,1} m_{1,2} \det M_0 \\ &= m_{2,2} m_{1,1} + (-1) m_{2,1} m_{1,2} (1) \\ &= m_{2,2} m_{1,1} - m_{2,1} m_{1,2} \end{aligned}$$

bulunur.

$n = 3$ için;

$$M_3 = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix}$$ olduğundan,

$$\det M_3 = m_{1,1}[m_{2,2}m_{3,3} - m_{2,3}m_{3,2}] - m_{1,2}[m_{2,1}m_{3,3} - m_{3,1}m_{2,3}]$$

$$= m_{1,1}m_{2,2}m_{3,3} - m_{1,1}m_{2,3}m_{3,2} - m_{1,2}m_{2,1}m_{3,3} - m_{1,2}m_{3,1}m_{2,3},$$

$$\det M_3 = m_{3,3}\det M_2 + \sum_{r=1}^{2}[(-1)^{3-r} m_{3,r} \prod_{j=r}^{2} m_{j,j+1} \det M_{r-1}]$$

$$= m_{3,3}[m_{1,1}m_{2,2} - m_{2,1}m_{1,2}] + (-1)^2 m_{3,1} \prod_{j=1}^{2} m_{j,j+1} \det M_0$$

$$+ (-1)^1 m_{3,2} \prod_{j=2}^{2} m_{j,j+1} \det M_1$$

$$= m_{1,1}m_{2,2}m_{3,3} - m_{1,1}m_{2,3}m_{3,2} - m_{1,2}m_{2,1}m_{3,3} - m_{1,2}m_{3,1}m_{2,3}$$

elde edilir.

$n = k$ için;

$$\det M_k = m_{k,k}\det M_{k-1} + \sum_{r=1}^{k-1}[(-1)^{k-r} m_{k,r} \prod_{j=r}^{k-1} m_{j,j+1} \det M_{r-1}]$$

olsun.

$n = k+1$ için eşitliğin doğruluğunu göstermeliyiz.

$$\det M_{k,k+1} = m_{k+1,k+1}\det M_k + \sum_{r=1}^{k}[(-1)^{k-r+1} m_{k+1,r} \prod_{j=r}^{k} m_{j,j+1} \det M_k] \quad \text{mı?}$$

$$\det M_{k.k+1} = m_{k+1,k+1}\det M_k - m_{k,k+1}[m_{k+1,k}\det M_{k-1} + \sum_{r=1}^{k-1}[(-1)^{k-r} m_{k+1,r} \prod_{j=r}^{k-1} m_{j,j+1} \det M_{r-1}]]$$

$$= m_{k+1,k+1}\det M_k - m_{k,k+1}m_{k+1,k}\det M_{k-1}$$

$$+ m_{k,k+1} + \sum_{r=1}^{k-1}[(-1)^{k-r+1}m_{k+1,r}\prod_{j=r}^{k-1}m_{j,j+1}\det M_{r-1}]$$

$$= m_{k+1,k+1}\det M_k - m_{k,k+1}m_{k+1,k}\det M_{k-1}$$

$$+ \sum_{r=1}^{k-1}[(-1)^{k-r+1}m_{k+1,r}\prod_{j=r}^{k}m_{j,j+1}\det M_{r-1}]$$

$$= m_{k+1,k+1}\det M_k + \sum_{r=1}^{k}[(-1)^{k-r+1}m_{k+1,r}\prod_{j=r}^{k}m_{j,j+1}\det M_{r-1}]$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Yukarıdaki teoremde, $m_{j,j} = 1$ ve $1 \le j \le n-1$ için $m_{j,j+1} = m_{j+1,j} = i = \sqrt{-1}$ olmasıyla, matrislerinin bir ailesini elde edebiliriz. Böylece, Fibonacci reküransı, tam olarak,

$$\det M_1 = 1, \det M_2 = 2 \text{ ve } \det M_n = \det M_{n-1} + \det M_{n-2}$$

olur.

Bu bölümde, M_n'nin elemanlarının değiştirilmesiyle elde edilen Hessenberg ve tridiagonal matrisleri inceleyeceğiz. M_n 'nin elemanlarını değiştirerek yeni matrisler elde edeceğiz. Burada, $\{\det M_n, n \ge 1\}$ dizisi, Fibonacci dizilerinin alt dizisi içinde bulunan reküransın bir örneğini teşkil edecek.

3.1. Örnek

$B_n, n \ge 1$ için $b_{1,1} = 1$ ve esas köşegen üzerindeki diğer tüm elemanları 2, üst köşegen üzerindeki tüm elmanları -1 ve esas köşegen altındaki tüm elemanları 1 olan bir $n \times n$ kare matris olsun.

$$B_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & -1 & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

olsun.

C_n; esas köşegen üzerindeki tüm elemanları 2, üst köşegen üzerindeki tüm elemanları -1 ve esas köşegen altındaki tüm elemanları 1 olan bir $n \times n$ kare matris olsun. Yani;

$$C_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & -1 & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

olsun. O zaman;

$$\det B_1 = \det[1] = 1 \qquad \det C_1 = \det[2] = 2$$

$$\det B_2 = \det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 3 \qquad \det C_2 = \det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 5$$

$$\det B_3 = \det\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 8 \qquad \det C_3 = \det\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 13$$

dir. Burada, bu determinantların dizisinin, Fibonacci serisinin tüm elemanlarını verdiği görülmektedir. Gerekten,

$$\det B_n = F_{2n} \text{ ve } \det C_n = F_{2n+1}, \forall n \geq 1$$

dir. Bu kısa kanıt, matrislerin iki ailesi için bu gerçeği doğrular. Buradaki püf nokta, $\forall n \geq 1$ için C_n'in, B_{n+1} 'in $(1,1)-$kofaktörü ve B_n'in, C_{n+1} 'in $(1,2)-$kofaktörü olduğudur.

Şimdi, C_n'de üst köşegen üzerindeki -1'ler yerine 1 koyarak yeni bir matris olan D_n matrisini oluşturacağız.

3.2. Örnek

D_n, $n \geq 1$ için esas köşegen üzerindeki tüm elemanları 2, üst köşegen üzerindeki tüm elemanları 1 ve esas köşegen altındaki tüm elemanları 1 olan $n \times n$ tipinde bir kare matris olsun. Yani

$$D_n = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

olsun. O zaman;

$$\det D_1 = 2, \det D_2 = 3 \text{ ve } \det D_3 = 5$$

dir. Buradan, bu dizi, $n = 3$ ile başlayan $\{F_n\}$ dizisidir.

Tridiagonal Matrisler

Eğer; matrisin tüm sıfır olmayan elemanları, sadece esas köşegen, üst köşegen veya alt köşegen üzerinde ortaya çıkıyorsa; matris, tridiagonal olarak adlandırılır. Bu yüzden; her tridiagonal matris bir Hessenberg matristir. Bu bölümde, benzer diziler ve tridiagonal matrislerin determinantları arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

3.3. Örnek

E_n, $n \geq 1$ için esas köşegen üzerindeki tüm elemanları 3, üst köşegen ve alt köşegen üzerindeki tüm elemanları -1 olan $n \times n$ tipinde bir kare matris olsun. Yani

$$E_n = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

olsun.

Bu matrislerin ailesi ve onun Fibonacci dizisine uygunluğu [1] ’de gösterilmiştir.

$\det E_1 = 3, \det E_2 = 8$ ve $\det E_3 = 21$

dir. Buradan,

$$\det E_n = F_{2n+2}, \forall n \geq 1$$

olduğu görülür. Fibonacci dizisiyle yakından ilgili olan

$$\{L_n\} = \{1,3,4,7,...\}$$

dizisi, Lucas dizisidir. Küçük bir değişiklikle, determinantları Lucas dizisindeki sayılar olan matrislerin bir örneğini aşağıdaki gibi verebiliriz.

3.4. Örnek

L_n, $n \geq 1$ için $\ell_{2,2} = 2$, esas köşegen üzerindeki tüm elemanları 1 ve üst köşegen ile alt köşegen üzerindeki tüm elemanları $i=\sqrt{-1}$ olan $n \times n$ tipinde bir kare matris olsun. Yani;

$$L_n = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & \cdots & 0 \\ i & 2 & i & \ddots & 0 \\ 0 & i & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & i \\ 0 & 0 & \cdots & i & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. O zaman;

$$\det L_1 = 1, \det L_2 = 3, \det L_n = \det L_{n-1} + \det L_{n-2}, \forall n \geq 3$$

dir. Bu, 1 ve 3 ile başlayan Fibonacci reküransıdır ki, bu da Lucas dizisini oluşturur.

4. FIBONACCI DİZİLERİ VE HESSENBERG MATRİSLERİ, İKİ-BOYUTLU FIBONACCI DİZİLERİ VE ÇÖZÜMLERİ FIBONACCI KESİRLERİNİ VEREN BAZI LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

Fibonacci dizisi, $F_0 = 0, F_1 = 1$ ve $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2$ ile tanımlanır. Eğer, $n \times n$ tipinde bir matriste üst köşegenin yukarısındaki tüm elemanlar sıfırsa, bu matris alt Hessenberg matris olarak adlandırılır. Örneğin, $A_1 = [1]$ verilsin ve A_n ;

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. Bu A_n matrisi Hessenberg matristir ve determinantı *n*. Fibonacci sayısıdır. Determinantları Fibonacci sayıları olan bazı Hessenberg matrisleri [1], [2], [4] ve [5] 'de gösterilmiştir. [5] ' de, reel tridiagonal matrislerin determinantlarının Fibonacci sayıları olduğundan bahsedilirken; [2] ' de, aynı özellikteki kompleks Hessenberg matrislerini görürüz. [4] ' te ise, $n \times n$ $(0,1) -$ Hessenberg matrisleri ile elde edilen maksimum determinantın *n*. Fibonacci sayısı F_n olduğundan bahsedilir (burada $\varepsilon_{n,0}$ ile ifade edilen matrisler). Biz, bu kısımda, determinantları $tF_{n-1} + F_{n-2}$ veya $F_{n-1} + tF_{n-2}$ şeklinde olan bazı reel yada kompleks t sayıları için Hessenberg matrislerinin dizisini inceleyeceğiz. Bu şekildeki matrisler, Fibonacci-Hessenberg matrisler olarak ifade edilecektir.

İlk önce, Fibonacci-Hessenberg matrislerinin beş yeni sınıfından bahsedeceğiz. Daha sonra da, iki-boyutlu Fibonacci dizilerini vereceğiz.

Bazı Fibonacci-Hessenberg Matrisleri

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ Fibonacci rekürans bağıntısı, $a_1 = 1$ ve $a_2 = t$ ile başlamak üzere $1, t, t+1, 2t+1, 3t+2, 5t+3, \ldots$ dizisini üretir. Buradan, $a_n = tf_{n-1} + f_{n-2}; n \geq 1$ ve $t = 1$ için $a_n = f_n$ 'dir. Öte yandan, $a_1 = 1$ ve $a_2 = t$ ile başlayan $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ dizisi, $a_n = tf_{n-1} + f_{n-2}$ 'yi sağlar.

4.1. Tanım

t reel yada kompleks bir sayı ve n de bir tamsayı olsun. $(t,n)-$Fibonaci ile kısaca $t-$ Fibonacci sayıları ifade edilmek üzere,

$tf_{n-1} + f_{n-2}$ ve $f_{n-1} + tf_{n-2}$

sayılarıyla, sırasıyla,1. ve 2. çeşit Fibonacci sayıları kastedilmektedir. A_n, $n \times n$ tipinde bir kare matris olmak üzere, eğer $m > 0$ tamsayısı var ve $\forall n \geq m$ olacak şekilde bir t tamsayısı için A_n'lerin determinantları $t-$Fibonacci sayılarını veriyorsa, $A_1, A_2, \ldots$ Hessenberg matrislerinin bir dizisi, Fibonacci-Hessenberg matrisi olarak tanımlanır.

4.1. Örnek

t sayısı verilsin ve $R_{n,t}$, $n \times n$ matrisi aşağıdaki gibi olsun.

$$R_{n,t} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & t+1 \end{bmatrix}$$

$R_{n,t}$ 'nin determinantları $\det R_{n,t}$ ile ifade edilsin.

$$\det R_{n,t} = tF_{n+1} + F_n, n \geq 1$$

şeklinde tanımlanır (Teorem 4.2' nin ispatındaki Eş. 4.15' e bak.) ve böylece, $R_{n,t}$ bir Fibonacci-Hessenberg matrisidir. Örneğin; $\det R_{n,-1} = -F_{n+1} + F_n = F_{n-1}$ dir. Buradaki $\det R_{n,-1}$, Fibonacci dizisinin toplamsal tersini üretir.

Lucas sayıları,

$$L_1 = 1, L_2 = 3 \text{ ve } L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, n > 2$$

ile ifade edilir. Herhangi biri, $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ üzerinden tümevarımla ispatlanabilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
\det R_{n,3} &= 3F_{n+1} + F_n \\
&= F_{n+1} + F_{n+1} + F_{n+1} + F_n \\
&= F_{n+1} + F_{n+1} + F_{n+2} \\
&= F_{n+1} + F_{n+3} \\
&= L_{n+2}
\end{aligned}$$

elde edilmiş olur.

$t = 0$ için, $\det R_{n,0} = F_n$ 'dir.

4.1. Çizelge. $t = -1,0,1,2,3$ ve $1 \le n \le 5$ için $\det R_{n,t}$ değerleri.

t/n	1	2	3	4	5
3	4	7	11	18	29
2	3	5	8	13	21
1	2	3	5	8	13
0	1	1	2	3	5
-1	0	-1	-1	-2	-3

Bu çizelgeden kolayca,

$$\det R_{n,1} = F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$$

$$\det R_{n,2} = F_{n+1} + F_{n+1} + F_n = F_{n+1} + F_{n+2} = F_{n+3}$$

olduğu görülür.

n pozitif bir tamsayı ve C_n, $n.$sütün ve $n.$satırdaki elemanı $t+1$ olmak üzere esas köşegen üzerindeki diğer tüm elemanları 2, esas köşegen altındaki elemanları 1, üst köşegen üzerindeki elemanları -1 ve üst köşegenin üstündeki tüm elemanları 0 olan $n \times n$ tipinde bir kare matris olsun. $C_{n,t}$'nin 1.satır ve 1.sütunundaki elemanını 1 ile değiştirerek, bir diğer Hessenberg matris olan $B_{n,t}$ 'yi oluşturalım. $C_{5,t}$ ve $B_{5,t}$ aşağıda verilmiştir.

$$C_{5,t=}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & t+1 \end{bmatrix}, \qquad B_{5,t} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & t+1 \end{bmatrix}$$

4.1. Önerme

$\det C_{n,t}$ ile ifade edilen $C_{n,t}$ 'nin determinantları için $\det C_{n,t} = F_{2n} + tF_{2n-1}, n \geq 1$ ve $\det B_{n,t}$ ile ifade edilen $B_{n,t}$ 'nin determinantları için $\det B_{n,t} = F_{2n-1} + tF_{2n-2}, n \geq 1$ dir.

İspat

$\det C_{n,t} = F_{2n} + tF_{2n-1}, n \geq 1$ olduğunu göstermeliyiz. n üzerinden tümevarımla ispat yapalım.

$n = 1$ için;

$C_{1,t} = [t+1]$ olduğundan $\det C_{1,t} = t+1$,

$$\det C_{1,t} = F_2 + tF_1 = 1 + t.1 = t+1$$

bulunur.

$n = 2$ için;

$C_{2,t} = \begin{bmatrix} 2 & .\text{-}1 \\ 1 & t+1 \end{bmatrix}$ olduğundan $\det C_{2,t} = 2(t+1) - 1(-1) = 2t + 2 + 1 = 2t + 3$,

$$\det C_{n,t} = F_4 + tF_3 = 3 + t.2 = 2t + 3$$

yazılır.

$n-1$ için doğru, yani; $\det C_{n-1,t} = F_{2(n-1)} + tF_{2(n-1)-1} = F_{2n-2} + tF_{2n-3}$ olduğunu kabul ederek iddianın n için doğruluğunu göstermeliyiz.

Matrisi 1. satıra göre açarsak,

$$\det C_{n,t} = 2\det C_{n-1,t} + (-1)\det B_{n-1,t}$$
$$= 2\det C_{n-1,t} + \det B_{n-1,t} \qquad (4.1\ )$$

elde edilir.

Benzer işlemleri $B_{n,t}$ için de yapalım. $\det B_{n,t} = F_{2n-1} + tF_{2n-2}, n \geq 1$ eşitliğinin doğruluğunu n üzerinden tümevarım yöntemiyle gösterelim.

$n = 1$ için;

$B_{1,t} = [1]$ olduğundan $\det B_{1,t} = 1$,
$\det B_{1,t} = F_1 + tF_0 = 1 + t.0 = 1$

yazılır.

$n = 2$ için;

$B_{2,t} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & t+1 \end{bmatrix}$ olduğundan $\det B_{2,t} = 1(t+1) - 1(-1) = t+1+1 = t+2$,
$\det B_{n,t} = F_3 + tF_2 = 2 + t.1 = t+2$

bulunur.

$n-1$ için doğru, yani; $\det B_{n-1,t} = F_{2(n-1)-1} + tF_{2(n-1)-2} = F_{2n-3} + tF_{2n-4}$ olsun. İdianın n için doğruluğunu göstermeliyiz.

Matrisi 1. satıra göre açarsak,

$$\det B_{n,t} = 1\det C_{n-1,t} - (-1)\det B_{n-1,t}$$
$$= \det C_{n-1,t} + \det B_{n-1,t} \tag{4.2 }$$

yazılır.

Eş. 4.1' den; $\det C_{n,t} = 2\det C_{n-1,t} + \det B_{n-1,t} \Rightarrow \det B_{n-1,t} = \det C_{n,t} - 2\det C_{n-1,t}$ elde edilir.

Bu ifade Eş. 4.2' de yerine konulursa,

$$\det B_{n,t} = \det C_{n-1,t} + \det B_{n-1,t}$$
$$= \det C_{n-1,t} + (\det C_{n,t} - 2\det C_{n-1,t})$$
$$= \det C_{n-1,t} + \det C_{n,t} - 2\det C_{n-1,t}$$
$$= \det C_{n,t} - \det C_{n-1,t} \tag{4.3 }$$

elde edilir.

Eş. 4.3' ü Eş. 4.1' de yerine koyup, tümevarım hipotezi gereğince, önermedeki ifadenin n 'den küçük değerler için doğru olduğu göz önüne alınırsa,

$$\det C_{n,t} = 2\det C_{n-1,t} + \det B_{n-1,t}$$
$$= 2\det C_{n-1,t} + (\det C_{n-1,t} - \det C_{n-2,t})$$
$$= 2\det C_{n-1,t} + \det C_{n-1,t} - \det C_{n-2,t}$$
$$= 3\det C_{n-1,t} - \det C_{n-2,t}$$
$$= 3(F_{2n-2} + tF_{2n-3}) - (F_{2n-4} + tF_{2n-5})$$
$$= 3F_{2n-2} + tF_{2n-3} - F_{2n-4} - tF_{2n-5}$$
$$= (3F_{2n-2} - F_{2n-4}) + t(3F_{2n-3} - F_{2n-5})$$
$$= (F_{2n-2} + F_{2n-2} + F_{2n-2} - F_{2n-4}) + t(F_{2n-3} + F_{2n-3} + F_{2n-3} - F_{2n-5})$$

$$
\begin{aligned}
&= (F_{2n-2} + F_{2n-2} + F_{2n-3} + F_{2n-4} - F_{2n-4}) + t(F_{2n-3} + F_{2n-3} + F_{2n-4} + F_{2n-5} - F_{2n-5}) \\
&= (F_{2n-2} + F_{2n-2} + F_{2n-3}) + t(F_{2n-3} + F_{2n-3} + F_{2n-4}) \\
&= (F_{2n-2} + F_{2n-1}) + t(F_{2n-3} + F_{2n-2}) \\
&= F_{2n} + tF_{2n-1}
\end{aligned}
$$

bulunur.

Eş. 4.3' den,

$$
\begin{aligned}
\det B_{n,t} &= \det C_{n,t} - \det C_{n-1,t} \\
&= (F_{2n} + tF_{2n-1}) - (F_{2n-2} + tF_{2n-3}) \\
&= F_{2n} + tF_{2n-1} - F_{2n-2} - tF_{2n-3} \\
&= (F_{2n} - F_{2n-2}) + t(F_{2n-1} - F_{2n-3}) \\
&= (F_{2n-1} + F_{2n-2} - F_{2n-2}) + t(F_{2n-2} + F_{2n-3} - F_{2n-3}) \\
&= F_{2n-1} + tF_{2n-2}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece ispatımız tamamlanmış olur.

Yukarıda verilen Fibonacci-Hessenberg matrislerinin üç sınıfı, [1]'de gösterilen D_n, C_n ve B_n matrislerinin genelleştirilmişidir. Aslında, [1]'de verilen D_n, C_n ve B_n matrisleri, sırasıyla, $R_{n,1}$, $C_{n,1}$ ve $B_{n,1}$'dir.

Şimdi, Fibonacci-Hessenberg matrislerinin beş yeni sınıfını tanıtacağız. t bir tamsayı olmak üzere, $K_{n,t}$; $n.$sütün ve $n.$satırdaki eleman $t+1$ olmak üzere esas köşegen üzerindeki diğer tüm elemanları 2, esas köşegen altındaki elemanları -1 ile başlayıp dönüşümlü olarak -1 ve 1 şeklinde değişen, üst köşegen üzerindeki elemanları -1, ve üst köşegen üstündeki tüm elemanları 0 olan $n \times n$ tipinde bir matris olsun. $K_{5,t}$ matrisi aşağıda verilmiştir.

$K_{n,t}$'nin 1.satır ve 1.sütunundaki elemanını 1 ile değiştirerek, $L_{n,t}$ ile ifade edilen diğer bir Hessenberg matrisini tanımlayalım. $K_{n,t}$ ve $L_{n,t}$'de, üst köşegen üzerindeki elemanların -1 ile değiştirilmesiyle, sırasıyla, $\underline{K}_{5,t}$ ve $\underline{L}_{5,t}$ ile ifade edilen iki yeni Hessenberg matrisi daha elde edilir.

$$K_{5,t} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & t+1 \end{bmatrix} \qquad L_{5,t} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & t+1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_{5,t} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & t+1 \end{bmatrix} \qquad \underline{L}_{5,t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

4.1.Teorem

$\det K_{n,t}$, $\det L_{n,t}$, $\det \underline{K}_{n,t}$ ve $\det \underline{L}_{n,t}$, sırasıyla, $K_{n,t}$, $L_{n,t}$, $\underline{K}_{5,t}$ ve $\underline{L}_{5,t}$ matrislerinin determinantları olmak üzere,

$$\det K_{n,t} = F_n + tF_{n+1}, n \geq 1$$

$$\det L_{1,t} = t+1,$$

$$\det L_{n,t} = \det K_{n-2,t} = F_{n-2} + tF_{n-1}, n \geq 2$$

$$\det \underline{K}_{n,t} = F_{2n} + tF_{2n-1}, n \geq 1$$

$$\det \underline{L}_{1,t} = t+1,$$

$$\det \underline{L}_{n,t} = \det \underline{K}_{n-1,t} + \det \underline{L}_{n-1,t} = F_{2n-1} + tF_{2n-2}, n \geq 2$$

dir. Böylece, yukarıda verilen bu dört Hessenberg matrislerinin sınıfı, Fibonacci-Hessenberg matrisleridir.

İspat

$\det K_{n,t} = F_n + tF_{n+1}, n \geq 1$ olduğunu n üzerinden tümevarım yöntemini kullanarak gösterelim.

$n = 1$ için;

$K_{1,t} = [t+1]$ olduğundan $\det K_{1,t} = t+1$,
$\det K_{1,t} = F_1 + tF_2 = 1 + t.1 = t+1$

yazılır.

$n = 2$ için;

$K_{2,t} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & t+1 \end{bmatrix}$ olduğundan $\det K_{2,t} = 2(t+1) - (-1)(-1) = 2t + 2 - 1 = 2t + 1$,
$\det K_{2,t} = F_2 + tF_3 = 1 + t.2 = 2t + 1$

bulunur.

$n-1$ için doğru, yani; $\det K_{n-1,t} = F_{n-1} + tF_n$ olsun. Buna göre n için iddianın doğruluğunu göstermeliyiz.

Matrisi 1. satırına göre açarsak,

$$\det K_{n,t} = 2\det K_{n-1,t} - (-1)(-\det L_{n-1,t})$$
$$= 2\det K_{n-1,t} - \det L_{n-1,t} \qquad (4.4\ )$$

elde edilir.

$\det L_{1,t} = t+1$,

$\det L_{n,t} = \det K_{n-2,t} = F_{n-2} + tF_{n-1}, n \geq 2$ olduğunu gösterelim.

$L_{1,t} = \left[t+1\right]$ olduğundan $\det L_{1,t} = t+1$ 'dir.

İspatımızı n üzerinden tümevarımla yapalım.

$n = 2$ için;

$L_{2,t} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & t+1 \end{bmatrix}$ olduğundan $\det L_{2,t} = 1(t+1) - (-1)(-1) = t+1-1 = t$,

$\det L_{2,t} = F_0 + tF_1 = 0 + t.1 = t$

bulunur.

$n = 3$ için;

$L_{3,t} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & t+1 \end{bmatrix}$ olduğundan,

$$\det L_{3,t} = 1[2(t+1) - (-1)(-1)] - (-1)[(-1)(t+1) - 1(-1)] + 0$$
$$= 1[2t+2-1] - (-1)[-t-1+1]$$
$$= 1(2t+1) - t$$
$$= t+1$$

$$\det L_{3,t} = F_{3-2} + tF_{3-1} = F_1 + tF_2 = 1 + t.1 = t + 1$$

yazılır.

$n-1$ için doğru, yani; $\det L_{n-1,t} = F_{n-3} + tF_{n-2}$ olsun. Buna göre iddianın n iin doğru olduğunu göstermeliyiz.

Matrisi ilk satırına göre açarsak,

$$\begin{aligned} \det L_{n,t} &= 1\det K_{n-1,t} - (-1)(-\det L_{n-1,t}) \\ &= \det K_{n-1,t} - \det L_{n-1,t} \end{aligned} \tag{4.5 }$$

olduğu görülür.

Eş. 4.4' deki ifade Eş. 4.5' de yerine yazılıp, tümevarım hipotezi gereğince, önermedeki ifadenin n 'den küçük değerler için doğru olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \det L_{n,t} &= \det K_{n-1,t} - \det L_{n-1,t} \\ &= (2\det K_{n-2,t} - \det L_{n-2,t}) - (\det K_{n-2,t} - \det L_{n-2,t}) \\ &= 2\det K_{n-2,t} - \det L_{n-2,t} - \det K_{n-2,t} + \det L_{n-2,t} \\ &= \det K_{n-2,t} \end{aligned} \tag{4.6 }$$

elde edilir.

Eş. 4.6' daki eşitlik Eş. 4.4' de yerine yazılıp, tümevarım hipotezi gereğince, önermedeki ifadenin n 'den küçük değerler için doğru olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \det K_{n,t} &= 2\det K_{n-1,t} - \det L_{n-1,t} \\ &= 2\det K_{n-1,t} - \det K_{n-3,t} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2(F_{n-1} + tF_n) - (F_{n-3} + tF_{n-2}) \\
&= 2F_{n-1} + 2tF_n - F_{n-3} - tF_{n-2} \\
&= (2F_{n-1} - F_{n-3}) + t(2F_n - F_{n-2}) \\
&= (F_{n-1} + F_{n-1} - F_{n-3}) + t(F_n + F_n - F_{n-2}) \\
&= (F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n-3} - F_{n-3}) + t(F_n + F_{n-1} + F_{n-2} - F_{n-2}) \\
&= (F_{n-1} + F_{n-2}) + t(F_n + F_{n-1}) \\
&= F_n + tF_{n+1}
\end{aligned}
$$

olur.

Eş. 4.6' dan,

$$
\begin{aligned}
\det L_{n,t} &= \det K_{n-2,t} \\
&= F_{n-2} + tF_{n-1}
\end{aligned}
$$

elde edilmiş olur.

$\det \underline{K}_{n,t} = F_{2n} + tF_{2n-1}, n \geq 1$ olduğunu n üzerinden tümevarım yöntemini kullanarak gösterelim.

$n = 1$ için;

$\underline{K}_{1,t} = [t+1]$ olduğundan $\det \underline{K}_{1,t} = t+1$,
$\det \underline{K}_{1,t} = F_2 + tF_1 = 1 + t.1 = t+1$

bulunur.

$n = 2$ için;

$\underline{K}_{2,t} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & t+1 \end{bmatrix}$ olduğundan $\det \underline{K}_{2,t} = 2(t+1) - (-1)1 = 2t + 2 + 1 = 2t + 3$,

$\det \underline{K}_{2,t} = f_4 + tf_3 = 3 + t.2 = 2t + 3$

yazılır.

$n-1$ için doğru, yani; $\det \underline{K}_{n-2,t} = F_{2n-2} + tF_{2n-3}$ olsun. Buna göre iddianın n için doğruluğunu, yani; $\det \underline{K}_{n,t} = F_{2n} + tF_{2n-1}$ eşitliğinin sağlandığını göstermeliyiz.

Matrisi 1. satırına göre açarsak,

$$\begin{aligned} \det \underline{K}_{n,t} &= 2\det \underline{K}_{n-1,t} - 1(-\det \underline{L}_{n-1,t}) \\ &= 2\det \underline{K}_{n-1,t} + \det \underline{L}_{n-1,t} \end{aligned} \tag{4.7 }$$

elde edilir.

$\det \underline{L}_{1,t} = t + 1$,

$\det \underline{L}_{n,t} = \det \underline{K}_{n-1,t} + \det \underline{L}_{n-1,t} = F_{2n-1} + tF_{2n-2}, n \geq 2$ olduğunu gösterelim.

$\underline{L}_{1,t} = [t+1]$ olduğundan $\det \underline{L}_{1,t} = t + 1$ dir.

İspatımızı n üzerinden tümevarımla yapalım.

$n = 2$ için;

$\underline{L}_{2,t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & t+1 \end{bmatrix}$ olduğundan $\det \underline{L}_{2,t} = 1(t+1) - (-1)1 = t + 1 + 1 = t + 2$,

$\det \underline{L}_{2,t} = F_3 + tF_2 = 2 + t.1 = t + 2$

bulunur.

$n = 3$ için;

$$\underline{L}_{3,t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & t+1 \end{bmatrix}$$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \det \underline{L}_{3,t} &= 1[2(t+1)-(-1)1] - 1[(-1)(t+1)-1.1] + 0 \\ &= 1[2t+2+1]-[-t-1-1] \\ &= 1(2t+3)-(-t-2) \\ &= 2t+3+t+2 \\ &= 3t+5 \end{aligned}$$

$$\det \underline{L}_{3,t} = F_{6-1} + tF_{6-2} = F_5 + tF_4 = 5 + t.3 = 3t+5$$

yazılır.

İddia $n-1$ için doğru, yani; $\det \underline{L}_{n-1,t} = F_{2(n-1)-1} + tF_{2(n-1)-2} = F_{2n-3} + tF_{2n-4}$ olsun. Buna göre n için doğruluğunu, yani; $\det \underline{L}_{n,t} = \det \underline{K}_{n-1,t} + \det \underline{L}_{n-1,t} = F_{2n-1} + tF_{2n-2}$ olduğunu göstermeliyiz.

Matrisi 1. satırına göre açarsak,

$$\begin{aligned} \det \underline{L}_{n,t} &= 1 \det \underline{K}_{n-1,t} - 1(-\det \underline{L}_{n-1,t}) \\ &= \det \underline{K}_{n-1,t} + \det \underline{L}_{n-1,t} \end{aligned} \tag{4.8 }$$

elde edilir.

Eş. 4.8 , Eş. 4.7' de yerine yazılıp, tümevarım hipotezi gereğince, önermedeki ifadenin n 'den küçük değerler için doğru olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
\det \underline{K}_{n,t} &= 2\det \underline{K}_{n-1,t} + \det \underline{L}_{n-1,t} \\
&= 2\det \underline{K}_{n-1,t} + (\det \underline{K}_{n-2,t} + \det \underline{L}_{n-2,t}) \\
&= 2(F_{2n-2} + tF_{2n-3}) + (F_{2n-4} + tF_{2n-5} + F_{2n-5} + tF_{2n-6}) \\
&= 2F_{2n-2} + 2tF_{2n-3} + F_{2n-4} + tF_{2n-5} + F_{2n-5} + tF_{2n-6} \\
&= (2F_{2n-2} + F_{2n-4} + F_{2n-5}) + t(2F_{2n-3} + F_{2n-5} + F_{2n-6}) \\
&= (F_{2n-2} + F_{2n-2} + F_{2n-4} + F_{2n-5}) + t(F_{2n-3} + F_{2n-3} + F_{2n-5} + F_{2n-6}) \\
&= (F_{2n-2} + F_{2n-2} + F_{2n-3}) + t(F_{2n-3} + F_{2n-3} + F_{2n-4}) \\
&= (F_{2n-2} + F_{2n-1}) + t(F_{2n-3} + F_{2n-2}) \\
&= F_{2n} + tF_{2n-1}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$\varepsilon_{1,t} = [t+1]$ ve $\varepsilon_{2,t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & t+1 \end{bmatrix}$ olsun ve $n \times n$ tipinden $\varepsilon_{n,t}$ matrisi verilsin. Verilen $\varepsilon_{n,t}$ matrisinin üstüne 1 ile başlayıp 0 ile devam eden bir satır ve alterne olarak 1 ve 0 'lardan oluşan yeni bir sütun eklenmesiyle $\varepsilon_{n+1,t}$ matrisi elde edilir. $\varepsilon_{5,t}$ matrisi aşağıda verilmiştir.

[4]'te, $\varepsilon_{n,0}$, $n \geq 1$ matrislerinin determinantının F_n olduğu gösterilmişti. i, $i^2 = -1$ olan genel kompleks sayı olsun. $1 \leq k \leq n$ olmak üzere, $\varepsilon_{n,t}$'nin k.satır ve (k+1). sütunundaki elemanı $(-1)^{k+n}\, i$ ile değiştirilerek, $H_{n,t}$ ile ifade edilen bir diğer Hessenberg matrisi elde ederiz. $H_{5,t}$ matrisi aşağıda gösterilmiştir.

$$\varepsilon_{5,t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & t+1 \end{bmatrix}, \quad H_{5,t} = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -i \\ 1 & 0 & 1 & 0 & t+1 \end{bmatrix}$$

4.2. Önerme

$\det \varepsilon_{n,t}$ ve $\det H_{n,t}$ sırasıyla, $\varepsilon_{n,t}$ ve $H_{n,t}$ matrislerinin determinantları olmak üzere,

$\det \varepsilon_{1,t} = \det H_{1,t} = t+1$ ve $\det \varepsilon_{n,t} = \det H_{n,t} = tF_{n-1} + F_n, n \geq 2$

dir. Böylece, $\varepsilon_{n,t}$ ve $H_{n,t}$, Fibonacci-Hessenberg matrisleridir.

İspat

$\varepsilon_{1,t} = [t+1]$ olduğundan $\det \varepsilon_{1,t} = t+1$,
$H_{1,t} = [t+1]$ olduğundan $\det H_{1,t} = t+1$

olur. Dolayısıyla; $\det \varepsilon_{1,t} = \det H_{1,t} = t+1$ 'dir.

$\det \varepsilon_{n,t} = \det H_{n,t} = tF_{n-1} + F_n, n \geq 2$ olduğunu n üzerinden tümevarım yöntemini kullanarak gösterelim.

$n = 2$ için;

$\varepsilon_{2,t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & t+1 \end{bmatrix}$ olduğundan $\det \varepsilon_{2,t} = 1(t+1) - 0.1 = t+1$,
$\det \varepsilon_{2,t} = tF_1 + F_2 = t.1 + = t+1$

yazılır.

$H_{2,t} = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & t+1 \end{bmatrix}$ olduğundan $\det H_{2,t} = 1(t+1) - 0(-i) = t+1$,
$\det H_{2,t} = tF_1 + F_2 = t.1 + = t+1$

olur. Dolayısıyla $\det \varepsilon_{2,t} = \det H_{2,t} = tF_1 + F_2$ 'dir.

$n = 3$ için;

$$\varepsilon_{3,t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & t+1 \end{bmatrix}$$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \det \varepsilon_{3,t} &= 1[1(t+1) - 0.1] - [0(t+1) - 1.1] \\ &= t + 1 + 1 \\ &= t + 2, \end{aligned}$$

$$\det \varepsilon_{3,t} = tF_2 + F_3 = t.1 + 2 = t + 2$$

bulunur.

$$H_{3,t} = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 1 & 0 & t+1 \end{bmatrix}$$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \det H_{3,t} &= 1[1(t+1) - 0(-i)] - i[0(t+1) - 1(-i)] \\ &= t + 1 - i^2 \\ &= t + 1 + 1 \\ &= t + 2, \end{aligned}$$

$$\det H_{3,t} = tF_2 + F_3 = t.1 + 2 = t + 2$$

bulunur. O halde; $\det \varepsilon_{3,t} = \det H_{3,t} = tF_2 + F_3$ 'dür.

İddia $n-1$ için doğru, yani; $\det \varepsilon_{n-1,t} = \det H_{n-1,t} = tF_{n-2} + F_{n-1}$ olsun. O halde; n için doğruluğunu, yani; $\det \varepsilon_{n,t} = \det H_{n,t} = tF_{n-1} + F_n$ olduğunu göstermeliyiz.

$\varepsilon_{n,t}$ matrisini 1.satırına göre açarsak,

$$\det \varepsilon_{n,t} = 1\det \varepsilon_{n-1,t} - 1[0 - 1\det \varepsilon_{n-2,t}]$$
$$= \det \varepsilon_{n-1,t} + \det \varepsilon_{n-2,t} \quad (4.9\ )$$

bulunur.

$H_{n,t}$ 'yi 1.satırına göre açacak olursak,

$$\det H_{n,t} = 1\det H_{n-1,t} - i[0 - (-i)\det H_{n-2,t}]$$
$$= \det H_{n-1,t} + \det H_{n-2,t} \quad (4.10\ )$$

olduğu görülür.

Tümevarım hipotezi gereğince, önermedeki ifadenin n 'den küçük değerler için doğru olduğu göz önüne alınırsa, Eş. 4.9' dan,

$$\det \varepsilon_{n,t} = \det \varepsilon_{n-1,t} + \det \varepsilon_{n-2,t}$$
$$= (tF_{n-2} + F_{n-1}) + (tF_{n-3} + F_{n-2})$$
$$= tF_{n-2} + F_{n-1} + tF_{n-3} + F_{n-2}$$
$$= t(F_{n-2} + F_{n-3}) + (F_{n-1} + F_{n-2})$$
$$= t(F_{n-2} + F_{n-3}) + (F_{n-1} + F_{n-2})$$
$$= tF_{n-1} + F_{n}$$

bulunur.

Bener şekilde, Eş. 4.10' dan,

$$\det H_{n,t} = \det H_{n-1,t} + \det H_{n-2,t}$$
$$= (tF_{n-2} + F_{n-1}) + (tF_{n-3} + F_{n-2})$$
$$= tF_{n-2} + F_{n-1} + tF_{n-3} + F_{n-2}$$

$$= t(F_{n-2} + F_{n-3}) + (F_{n-1} + F_{n-2})$$

$$= t(F_{n-2} + F_{n-3}) + (F_{n-1} + F_{n-2})$$

$$= tF_{n-1} + F_n$$

yazılır. O halde; $\det \varepsilon_{n,t} = \det H_{n,t} = tF_{n-1} + F_n, n \geq 2$ olduğu gösterilmiş ve ispat tamamlanmış olur.

İki-Boyutlu Fibonacci Dizileri

Şimdi, $R_{n,t}, C_{n,t}$ ve $\varepsilon_{n,t}$ matrislerinin ilginç bir özelliğinden bahsedeceğiz. $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, bu $n \times n$ matrislerin i. sütununun 1 sütun vektörüyle değiştirilmesiyle elde edilen matrisler, sırasıyla, $R_{n,t}{}^{(i)}, C_{n,t}{}^{(i)}$ ve $\varepsilon_{n,t}{}^{(i)}$ olsun. Bu yeni matrislerin determiantlarının $t-$Fibonacci sayılarını verdiğini aşağıdaki teoremle sunalım.

4.2. Teorem

$\det R_{n,t}{}^{(i)}, \det C_{n,t}{}^{(i)}$ ve $\det \varepsilon_{n,t}{}^{(i)}$, sırasıyla, $R_{n,t}{}^{(i)}, C_{n,t}{}^{(i)}$ ve $\varepsilon_{n,t}{}^{(i)}$ matrislerinin determinantları olmak üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$\det R_{n,t}{}^{(i)} = tF_{n-i} + F_{n-i-1}, n \geq i \geq 1;$$

$$\det R_{n,t} = t + \sum_{i=1}^{n} \det R_{n,t}{}^{(i)};$$

$$\det C_{n,t}{}^{(i)} = F_{2(n-i)+1} + tF_{2(n-i)}, n \geq i \geq 1;$$

$$\det C_{n,t} = t + \sum_{i=1}^{n} \det C_{n,t}{}^{(i)};$$

$$\det \varepsilon_{1,t}{}^{(1)} = 1; \ \det \varepsilon_{n,t}{}^{(1)} = tf_{n-3} + f_{n-2}, n \geq 2;$$

$$\det \varepsilon_{n,t}{}^{(i)} = tF_{n-i} + F_{n-i+1}, n \geq i \geq 2;$$

$$2\det\varepsilon_{n,t} = (t+1) + \sum_{i=1}^{n}\det\varepsilon_{n,t}{}^{(i)}, n \geq 2 .$$

İspat

$\det R_{n,t}{}^{(i)} = tF_{n-i} + F_{n-i-1}, n \geq i \geq 1$;

$\det R_{n,t} = t + \sum_{i=1}^{n}\det R_{n,t}{}^{(i)}$ olduğunu gösterelim.

$$R_{n,t} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & t+1 \end{bmatrix}, \quad R_{n,t}{}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & t+1 \end{bmatrix}$$

İspatımızı n üzerinden tümevarımla yapalım.

$n = 1$ için;

$R_{1,t} = [t+1]$ olduğundan $\det R_{1,t} = t+1$,

$R_{1,t}{}^{(1)} = [1]$ olduğundan $\det R_{1,t}{}^{(1)} = 1$

$$\begin{aligned} \det R_{1,t}{}^{(1)} &= tF_0 + F_{-1} \\ &= t.0 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\det R_{1,t} = t + \det R_{1,t}{}^{(1)} = t+1$

bulunur.

$n = 2$ için;

$R_{2,t} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & t+1 \end{bmatrix}$ olduğundan $\det R_{2,t} = 2(t+1) - 1.1 = 2t + 2 - 1 = 2t + 1$,

$R_{2,t}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t+1 \end{bmatrix}$ olduğundan $\det R_{2,t}^{(1)} = 1(t+1) - 1.1 = t + 1 - 1 = t$

$$\begin{aligned}\det R_{2,t}^{(1)} &= tF_1 + F_0 \\ &= t.1 + 0 \\ &= t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det R_{2,t} &= t + \det R_{2,t}^{(1)} + \det R_{2,t}^{(2)} \\ &= t + t + \det R_{2,t}^{(2)}\end{aligned}$$

$R_{2,t}^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ olduğundan $\det R_{2,t}^{(2)} = 2.1 - 1.1 = 2 - 1 = 1$ 'dir. O halde;

$\det R_{2,t} = t + t + 1 = 2t + 1$ bulunur.

$n-1$ için doğru, yani;

$$\det R_{n-1,t}^{(1)} = tF_{n-2} + F_{n-3},$$

$$\det R_{n-1,t} = t + \det R_{n-1,t}^{(1)} + \det R_{n-1,t}^{(2)} + \ldots + \det R_{n-1,t}^{(n-1)}$$

olsun. Buna göre iddianın n için doğru olduğunu, yani;

$$\det R_{n,t}^{(i)} = tF_{n-i} + F_{n-i-1}, n \geq i \geq 1;$$

$\det R_{n,t} = t + \sum_{i=1}^{n} \det R_{n,t}^{(i)}$ eşitliklerinin sağlandığını göstermeliyiz.

$R_{n,t}^{(1)}$ matrisini 1.satırına göre açarsak,

$$\begin{aligned}\det R_{n,t}^{(1)} &= 1\det R_{n-1,t} - 1\det R_{n-1,t}^{(1)} \\ &= \det R_{n-1,t} - \det R_{n-1,t}^{(1)} \qquad (4.11)\end{aligned}$$

bulunur.

Benzer şekilde $R_{n-1,t}$ ’ yi 1.satırına göre açarsak,

$$\det R_{n-1,t} = 2\det R_{n-2,t} - 1\det R_{n-2,t}{}^{(1)}$$
$$= 2\det R_{n-2,t} - \det R_{n-2,t}{}^{(1)} \tag{4.12}$$

yazılır.

Eş. 4.12’ yi Eş. 4.11’ de yerine yazıp, tümevarım hipotezi gereğince, önermedeki ifadenin n ’den küçük değerler için doğru olduğu göz önüne alınırsa, 4.11’ den,

$$\det R_{n,t}{}^{(1)} = \det R_{n-1,t} - \det R_{n-1,t}{}^{(1)}$$
$$= (2\det R_{n-2,t} - \det R_{n-2,t}{}^{(1)}) - (\det R_{n-2,t} - \det R_{n-2,t}{}^{(1)})$$
$$= 2\det R_{n-2,t} - \det R_{n-2,t}{}^{(1)} - \det R_{n-2,t} + \det R_{n-2,t}{}^{(1)}$$
$$= \det R_{n-2,t} \tag{4.13}$$

bulunur.

$R_{n,t}$ matrisini ilk satırına göre açarsak,

$$\det R_{n,t} = 2\det R_{n-1,t} - \det R_{n-1,t}{}^{(1)} \tag{4.14}$$

elde edilmiş olur.

Eş.4.14’ ü Eş. 4.13’ te yerine yanzıp, tümevarım hipotezi gereğince, Örnek 4.1’ deki $\det R_{n,t} = tF_{n+1} + F_n, n \geq 1$ eşitliğinin n ’den küçük değerler için doğru olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
\det R_{n,t} &= 2\det R_{n-1,t} - \det R_{n-1,t}{}^{(1)} \\
&= 2\det R_{n-1,t} - \det R_{n-3,t} \\
&= 2(tF_n + F_{n-1}) - (tF_{n-2} + F_{n-3}) \\
&= 2tF_n + 2F_{n-1} - tF_{n-2} - F_{n-3} \\
&= t(2F_n - F_{n-2}) + (2F_{n-1} - F_{n-3}) \\
&= t(F_n + F_n - F_{n-2}) + (F_{n-1} + F_{n-1} - F_{n-3}) \\
&= t(F_n + F_{n-1} + F_{n-2} - F_{n-2}) + (F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n-3} - F_{n-3}) \\
&= t(F_n + F_{n-1}) + (F_{n-1} + F_{n-2}) \\
&= tF_{n+1} + F_n \qquad (4.15\ )
\end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan,

$$\begin{aligned}
\det R_{n,t}{}^{(1)} &= \det R_{n-2,t} \\
&= tF_{n-1} + F_{n-2} \qquad (4.16\ )
\end{aligned}$$

yazılır.

$R_{n,t}{}^{(i)}$ matrisini ilk satırına göre açarsak,

$$\begin{aligned}
\det R_{n,t}{}^{(i)} &= 2\det R_{n-1,t} - \det R_{n-1,t}{}^{(i)} \\
&= \det R_{n-1,t}{}^{(i)} \qquad (4.17\ )
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Böylece, ifade $n-1$ için doğru olduğundan,

$$\begin{aligned}\det R_{n,t}{}^{(i)} &= \det R_{n-1,t}{}^{(i)} \\ &= \det R_{n-i-1,t} \\ &= tF_{n-1-(i-1)} + F_{n-1(i-1)-1} \\ &= tF_{n-1-i+1} + F_{n-1-i+1-1} \\ &= tF_{n-i} + F_{n-i-1} \end{aligned} \tag{4.18 }$$

eşitliği elde edilir.

Verilen bir M matrisine soldan ve sağdan bir sütun eklenerek sırasıyla $1M$ ve $M1$ matrisleri elde edilir.

İlk satıra göre matrisi açarsak,

$$\det R_{n,t}{}^{(n)} = 2\det R_{n-1,t}{}^{(n-1)} + (-1)^{n+1}\det(1M)\,;\; M1 = R_{n-1,t}{}^{(n-1)}$$

bulunur. Böylece,

$$\det R_{n,t}{}^{(n)} = 2\det R_{n-1,t}{}^{(n-1)} + (-1)^{2n-1} R_{n-1,t}{}^{(n-1)} = R_{n-1,t}{}^{(n-1)} = 1 = tF_0 + F_{-1}$$

eşitliği elde edilir.

n üzerinden tümevarımla kolayca gösterilebilir ki, $\sum_{j=1}^{n} F_j = F_{n+2}$ ’dir. Bu ise, $\det R_{n,t} = tF_{n+1} + F_n$ ve $\det R_{n,t}{}^{(i)} = tF_{n-i} + F_{n-i-1}$ denklemleriyle birlikte $\det R_{n,t} = t + \sum_{i=1}^{n} \det R_{n,t}{}^{(i)}$ olduğunu gösterir.

$$\det C_{n,t}{}^{(i)} = F_{2(n-i)+1} + tF_{2(n-i)}, n \ge i \ge 1\,;$$

$\det C_{n,t} = t + \sum_{i=1}^{n} \det C_{n,t}^{(i)}$ olduğunu gösterelim.

$$C_{n,t} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & -1 & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & t+1 \end{bmatrix}, \quad C_{n,t}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & -1 & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & t+1 \end{bmatrix}$$

n üzerinden tümevarımla ispat yapalım.

$n = 1$ için;

$C_{1,t} = [t+1]$ olduğundan $\det C_{1,t} = t+1$,

$C_{1,t}^{(1)} = [1]$ olduğundan $\det C_{1,t}^{(1)} = 1$,

$$\begin{aligned} \det C_{1,t}^{(1)} &= F_1 + tF_0 \\ &= 1 + t.0 \\ &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det C_{1,t} &= t + \det C_{1,t}^{(1)} \\ &= t + 1 \end{aligned}$$

bulunur.

$n = 2$ için;

$C_{2,t} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & t+1 \end{bmatrix}$ olduğundan $\det C_{2,t} = 2(t+1) - (-1)1 = 2t + 2 + 1 = 2t + 3$,

$C_{2,t}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & t+1 \end{bmatrix}$ olduğundan $\det C_{2,t}^{(1)} = 1(t+1) - (-1)1 = t + 1 + 1 = t + 2$,

$$\det C_{2,t}^{(1)} = F_3 + tF_2$$
$$= 2 + t.1$$
$$= t + 2$$
$$\det C_{2,t} = t + \det C_{2,t}^{(1)} + \det C_{2,t}^{(2)}$$
$$= t + t + 2 + \det C_{2,t}^{(2)}$$

$C_{2,t}^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ olduğundan $\det C_{2,t}^{(2)} = 2.1 - 1.1 = 2 - 1 = 1$ olur. O halde;

$\det C_{2,t} = t + t + 2 = 2t + 3$ bulunur.

$n-1$ için doğru, yani;

$$\det C_{n-1,t}^{(1)} = F_{2(n-2)+1} + tF_{2(n-2)}$$
$$\det C_{n-1,t} = t + \det C_{n-1,t}^{(1)} + \det C_{n-1,t}^{(2)} + ... + \det C_{n-1,t}^{(n-1)}$$

olsun. O halde; iddianın n için doğruluğunu göstermeliyiz.

$C_{n,t}^{(1)}$' yi 1. satırına göre açacak olursak,

$$\det C_{n,t}^{(1)} = 1 \det C_{n-1,t} - (-1) \det C_{n-1,t}^{(1)}$$
$$= \det C_{n-1,t} + \det C_{n-1,t}^{(1)} \qquad (4.19\ )$$

elde edilir.

Yine, $C_{n-1,t}^{(1)}$ matrisini ilk satırına göre açarsak,

$$\det C_{n-1,t}^{(1)} = 2 \det C_{n-2,t} - (-1) \det C_{n-2,t}^{(1)}$$
$$= 2 \det C_{n-2,t} + \det C_{n-2,t}^{(1)} \qquad (4.20\ )$$

bulunur.

Eş. 4.20' yi Eş. 4.19' da yerine yazıp, tümevarım hipotezi gereğince, önermedeki ifadenin n 'den küçük değerler için doğru olduğu göz önüne alınırsa, Eş. 4.19' dan,

$$\begin{aligned} \det C_{n,t}{}^{(1)} &= \det C_{n-1,t} + \det C_{n-1,t}{}^{(1)} \\ &= (2\det C_{n-2,t} + \det C_{n-2,t}{}^{(1)}) + (\det C_{n-2,t} + \det C_{n-2,t}{}^{(1)}) \\ &= 2\det C_{n-2,t} + \det C_{n-2,t}{}^{(1)} + \det C_{n-2,t} + \det C_{n-2,t}{}^{(1)} \\ &= 3\det C_{n-2,t} + 2\det C_{n-2,t}{}^{(1)} \end{aligned} \tag{4.21 }$$

yazılır.

$C_{n,t}$ ' yi 1. satırına göre açarsak,

$$\begin{aligned} \det C_{n,t} &= 2\det C_{n-1,t} - (-1)\det C_{n-1,t}{}^{(1)} \\ &= 2\det C_{n-1,t} + \det C_{n-1,t}{}^{(1)} \end{aligned} \tag{4.22 }$$

elde edilir.

Eş. 4.21' i Eş. 4.22' de yerine yazıp, tümevarım hipotezi gereğince, Önerme 4.1' deki $\det C_{n,t} = F_{2n} + tF_{2n-1}, n \geq 1$ eşitliğinin n 'den küçük değerler için doğru olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \det C_{n,t} &= 2\det C_{n,t} + \det C_{n,t}{}^{(1)} \\ &= 2\det C_{n-1,t} + (3\det C_{n-3,t} + 2\det C_{n-3,t}{}^{(1)}) \\ &= 2(F_{2(n-1)} + tF_{2(n-1)-1}) + 3(F_{2(n-3)} + tF_{2(n-3)-1}) + 2(F_{2(n-3-1)+1} + tF_{2(n-3-1)}) \\ &= 2(F_{2n-2} + tF_{2n-3}) + 3(F_{2n-6} + tF_{2n-7}) + 2(F_{2n-7} + tF_{2n-8}) \\ &= 2F_{2n-2} + 2tF_{2n-3} + 3F_{2n-6} + 3tF_{2n-7} + 2F_{2n-7} + 2tF_{2n-8} \end{aligned}$$

$$= t(2F_{2n-3} + 3F_{2n-7} + 2F_{2n-8}) + (2F_{2n-2} + 3F_{2n-6} + 2F_{2n-7})$$

$$= t(F_{2n-3} + F_{2n-3} + F_{2n-7} + F_{2n-7} + F_{2n-7} + F_{2n-8} + F_{2n-8})$$

$$+(F_{2n-2} + F_{2n-2} + F_{2n-6} + F_{2n-6} + f_{2n-6} + f_{2n-7} + f_{2n-7})$$

$$= t(F_{2n-3} + F_{2n-3} + F_{2n-7} + F_{2n-6} + F_{2n-6}) + (F_{2n-2} + F_{2n-2} + F_{2n-6} + F_{2n-5} + F_{2n-5})$$

$$= t(F_{2n-3} + F_{2n-3} + F_{2n-5} + F_{2n-6}) + (F_{2n-2} + F_{2n-2} + F_{2n-4} + F_{2n-5})$$

$$= t(F_{2n-3} + F_{2n-3} + F_{2n-4}) + (F_{2n-2} + F_{2n-2} + F_{2n-3})$$

$$= t(F_{2n-3} + F_{2n-2}) + (F_{2n-2} + F_{2n-1})$$

$$= t(F_{2n-1}) + (F_{2n})$$

$$= tF_{2n-1} + F_{2n} \qquad (4.23\ )$$

olduğu görülür.

Buradan,

$$\det C_{n,t}{}^{(1)} = 3\det C_{n-2,t} + 2\det C_{n-2,t}{}^{(1)}$$

$$= 3(tF_{2(n-2)-1} + F_{2(n-2)}) + 2(F_{2(n-2-1)+1} + tF_{2(n-2-1)})$$

$$= 3(tF_{2n-5} + F_{2n-4}) + 2(F_{2n-5} + tF_{2n-6})$$

$$= 3tF_{2n-5} + 3F_{2n-4} + 2F_{2n-5} + 2tF_{2n-6}$$

$$= t(3F_{2n-5} + 2F_{2n-6}) + (3F_{2n-4} + 2F_{2n-5})$$

$$= t(F_{2n-5} + F_{2n-5} + F_{2n-5} + F_{2n-6} + F_{2n-6}) + (F_{2n-4} + F_{2n-4} + F_{2n-4} + F_{2n-5} + F_{2n-5})$$

$$= t(F_{2n-5} + F_{2n-4} + F_{2n-4}) + (F_{2n-4} + F_{2n-3} + F_{2n-3})$$

$$= t(F_{2n-3} + F_{2n-4}) + (F_{2n-2} + F_{2n-3})$$

$$= t(F_{2n-2}) + (F_{2n-1})$$

$$= tF_{2n-2} + F_{2n-1} \qquad (4.24\ )$$

bulunur.

$C_{n,t}{}^{(i)}$ matrisini ilk satırına göre açarsak,

$$\det C_{n,t}{}^{(i)} = \det C_{n-1,t} + \det C_{n-1,t}{}^{(i)}, n \geq i \geq 1 \tag{4.25 }$$

eşitlği elde edilir.

Benzer şekilde, $M1 = C_{n-1,t}{}^{(n-1)}$ olmak üzere, $C_{n,t}{}^{(n)}$ matrisini 1. satırına göre açacak olursak $\det C_{n,t} = t + \sum_{i=1}^{n} \det C_{n,t}{}^{(i)}$ olduğu görülür.

$\det \varepsilon_{1,t}{}^{(1)} = 1$; $\det \varepsilon_{n,t}{}^{(1)} = tf_{n-3} + f_{n-2}, n \geq 2$;

$\det \varepsilon_{n,t}{}^{(i)} = tF_{n-i} + F_{n-i+1}, n \geq i \geq 2$;

$2\det \varepsilon_{n,t} = (t+1) + \sum_{i=1}^{n} \det \varepsilon_{n,t}{}^{(i)}, n \geq 2$ olduğunu gösterelim.

$\varepsilon_{1,t}{}^{(1)} = [1]$ olduğundan $\det \varepsilon_{1,t}{}^{(1)} = 1$ olur.

$$\varepsilon_{n,t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & t+1 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{n,t}{}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & t+1 \end{bmatrix}$$

İspatımızı n üzerinden tümevarımla yapalım.

$n = 2$ için;

$\varepsilon_{2,t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & t+1 \end{bmatrix}$ olduğundan $\det \varepsilon_{2,t} = 1(t+1) - 0.1 = t+1$,

$\varepsilon_{2,t}{}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t+1 \end{bmatrix}$ olduğundan $\det \varepsilon_{2,t}{}^{(1)} = 1(t+1) - 1.1 = t+1-1 = t$,

$$\begin{aligned}\det \varepsilon_{2,t}{}^{(1)} &= tF_{-1} + F_0 \\ &= t.1 + 0 \\ &= t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\det \varepsilon_{2,t} &= (t+1) + \det \varepsilon_{2,t}{}^{(1)} + \det \varepsilon_{2,t}{}^{(2)} \\ &= (t+1) + t + \det \varepsilon_{2,t}{}^{(2)}\end{aligned}$$

$\varepsilon_{2,t}{}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olduğundan $\det \varepsilon_{2,t}{}^{(2)} = 1.1 - 0.1 = 1 - 0 = 1$ olur. O halde;

$$\begin{aligned}2\det \varepsilon_{2,t} = (t+1) + t + \det \varepsilon_{2,t}{}^{(2)} \\ = t+1+t+1 \\ = 2t+2\end{aligned}$$

den, $\det \varepsilon_{2,t} = t+1$ bulunur.

$n = 3$ için;

$\varepsilon_{3,t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & t+1 \end{bmatrix}$ olduğundan

$\det \varepsilon_{3,t} = 1[1(t+1) - 0.1] - 1[0(t+1) - 1.1] = t+1+1 = t+2$,

$\varepsilon_{3,t}{}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & t+1 \end{bmatrix}$ olduğundan,

$\det \varepsilon_{3,t}{}^{(1)} = [1(t+1) - 0.1] - 1[1(t+1) - 1.1] = t+1-t = 1$,

$\det \varepsilon_{3,t}{}^{(1)} = tF_0 + F_1 = t.0 + 1 = 1$,

$2\det \varepsilon_{3,t} = (t+1) + \det \varepsilon_{3,t}{}^{(1)} + \det \varepsilon_{3,t}{}^{(2)} + \det \varepsilon_{3,t}{}^{(3)}$

$$= (t+1) + 1 + \det \varepsilon_{3,t}{}^{(2)} + \det \varepsilon_{3,t}{}^{(3)}$$

$\varepsilon_{3,t}{}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t+1 \end{bmatrix}$ olduğundan,

$$\det \varepsilon_{3,t}{}^{(2)} = 1[1(t+1) - 1.1] - 1[0(t+1) - 1.1] = t+1-1+1 = t+1$$

$\varepsilon_{3,t}{}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ olduğundan,

$\det \varepsilon_{3,t}{}^{(3)} = 1[1.1 - 0.1] - 1[0.1 - 1.1] + 1[0.1 - 1.1] = 1+1-1 = 1$ olur. O halde;

$$\begin{aligned} 2\det \varepsilon_{3,t} &= (t+1) + 1 + \det \varepsilon_{3,t}{}^{(2)} + \det \varepsilon_{3,t}{}^{(3)} \\ &= (t+1) + 1 + (t+1) + 1 \\ &= 2t + 4 \end{aligned}$$

den, $\det \varepsilon_{3,t} = t + 2$ bulunur.

$\varepsilon_{n,t}{}^{(1)}$' yi ilk satırına göre açarsak,

$$\begin{aligned} \det \varepsilon_{n,t}{}^{(1)} &= 1\det \varepsilon_{n-1,t} - 1\det \varepsilon_{n-1,t}{}^{(1)} \\ &= \det \varepsilon_{n-1,t} - \det \varepsilon_{n-1,t}{}^{(1)} \qquad (4.26\ ) \end{aligned}$$

elde edilir.

Yine, $\varepsilon_{n-1,t}{}^{(1)}$ matrisini 1. satırına göre açacak olursak,

$$\begin{aligned} \det \varepsilon_{n-1,t} &= 1\det \varepsilon_{n-2,t} - 1[(-1)\det \varepsilon_{n-3,t}] \\ &= \det \varepsilon_{n-2,t} + \det \varepsilon_{n-3,t} \qquad (4.27\ ) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Eş. 4.27' yi Eş. 4.26' da yerine yazıp, tümevarım hipotezi gereğince, önermedeki ifadenin n 'den küçük değerler için doğru olduğu göz önüne alınırsa, Eş. 4.26' dan,

$$\begin{aligned}\det \varepsilon_{n,t}^{(1)} &= \det \varepsilon_{n-1,t} - \det \varepsilon_{n-1,t}^{(1)} \\ &= (\det \varepsilon_{n-2,t} + \det \varepsilon_{n-3,t}) - (\det \varepsilon_{n-2,t} - \det \varepsilon_{n-2,t}^{(1)}) \\ &= \det \varepsilon_{n-2,t} + \det \varepsilon_{n-3,t} - \det \varepsilon_{n-2,t} + \det \varepsilon_{n-2,t}^{(1)} \\ &= \det \varepsilon_{n-3,t} + \det \varepsilon_{n-2,t}^{(1)} \qquad (4.28\ )\end{aligned}$$

yazılır.

$\varepsilon_{n,t}$ matrisini 1. satırına göre açıp, tümevarım hipotezi gereğince, Önerme 4.2' deki $\det \varepsilon_{n,t} = tF_{n-1} + F_n, n \geq 2$ eşitliğinin n 'den küçük değerler için doğru olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\det \varepsilon_{n,t} &= \det \varepsilon_{n-1,t} + \det \varepsilon_{n-2,t} \\ &= (tF_{n-2} + F_{n-1}) + (tF_{n-3} + F_{n-2}) \\ &= tF_{n-2} + F_{n-1} + tF_{n-3} + F_{n-2} \\ &= t(F_{n-2} + F_{n-3}) + (F_{n-1} + F_{n-2}) \\ &= t(F_{n-1}) + (F_n) \\ &= tF_{n-1} + F_n \qquad (4.29\ )\end{aligned}$$

eşitliği yazılır.

Buradan;

$$\det \varepsilon_{n,t}^{(1)} = \det \varepsilon_{n-3,t} + \det \varepsilon_{n-2,t}^{(1)}$$

$$= (tF_{n-4} + F_{n-3}) + (tF_{n-5} + F_{n-4})$$
$$= tF_{n-4} + F_{n-3} + tF_{n-5} + F_{n-4}$$
$$= t(F_{n-4} + F_{n-5}) + (F_{n-3} + F_{n-4})$$
$$= t(F_{n-3}) + (F_{n-2})$$
$$= tF_{n-3} + F_{n-2} \qquad (4.30\ )$$

elde edilmiş olur.

${\varepsilon_{n,t}}^{(i)}$ matrisini ilk satırına göre açarsak,

$$\det {\varepsilon_{n,t}}^{(i)} = \det {\varepsilon_{n-1,t}}^{(i-1)} + \det \varepsilon_{n-2,t}, n \geq i \geq 2 \qquad (4.31\ )$$

olduğu görülmüş olur.

Benzer şekilde, $M1 = {\varepsilon_{n-1,t}}^{(n-1)}$ olmak üzere, ${\varepsilon_{n,t}}^{(n)}$'yi ilk satırına göre açacak olursak $2\det \varepsilon_{n,t} = (t+1) + \sum_{i=1}^{n} \det {\varepsilon_{n,t}}^{(i)}, n \geq 2$ eşitliğinin varlığı görülür ve ispat tamamlanmış olur.

4.1. Sonuç (Fibonacci Kesirleri ve Hessenberg Matrisleri)

$R_{n,t}x = 1$ denklem sistemi,

$$x_i = \frac{F_{n-i-1} + tF_{n-i}}{F_n + tF_{n+1}}, 1 \leq i \leq n\ ; \qquad (4.32\ )$$

çözümüne sahiptir, ve bu çözüm tektir. Burada $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$ ve $1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ şeklinde $n \times 1$ sütun matrisleridir.

Benzer şekilde; $C_{n,t}x = 1$ denklem sistemi,

$$x_i = \frac{F_{2(n-i)+1} + tF_{2(n-i)}}{F_{2n} + tF_{2n-1}}, 1 \le i \le n \,; \qquad (4.33\ )$$

çözümüne sahiptir.

Ayrıca, $\varepsilon_{n,t}x = 1$ denklem sitemi de,

$$x_1 = \frac{tF_{n-3} + F_{n-2}}{tF_{n-1} + F_n} \text{ ve } x_i = \frac{tF_{n-i} + F_{n-i+1}}{tF_{n-1} + F_n}, 2 \le i \le n \,;$$

tek çözümüne sahiptir.

İspat

Teorem 4.2’ deki eşitlikler ve Örnek 4.1’ deki $\det R_{n,t} = tF_{n+1} + F_n, n \ge 1$ eşitliğinden yararlanılarak, $R_{n,t}x = 1$ denklem sisteminin Cramer Metoduyla çözülmesiyle istenilen elde edilir.

$R_{n,t}x = 1$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & t+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & t+1 \end{vmatrix} = \det R_{n,t} \,;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & t+1 \end{vmatrix} = \det R_{n,t}{}^{(1)} \,; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & t+1 \end{vmatrix} = \det R_{n,t}{}^{(2)} \,; \ldots;$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \det R_{n,t}{}^{(n)} \text{ dersek;}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\det R_{n,t}{}^{(1)}}{\det R_{n,t}} \,;\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\det R_{n,t}{}^{(2)}}{\det R_{n,t}} \,;\ \ldots\,;\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} = \frac{\det R_{n,t}{}^{(n)}}{\det R_{n,t}}$$

çözümleri elde edilir. Yani ; $x_i = \dfrac{\det R_{n,t}{}^{(i)}}{\det R_{n,t}} = \dfrac{F_{n-i-1} + tF_{n-i}}{F_n + tF_{n+1}}, 1 \le i \le n$ elde edilmiş olur. Ayrıca $R_{n,t}$ ile ilaveli matris olan $R_{n,t}{}^{(i)}, 1 \le i \le n$ matrislerinin rankları aynı ve bilinmeyen sayasına eşit olduğundan, bu çözümler tektir deriz.

Teorem 4.2' deki eşitlikler ve Önerme 4.1' deki $\det C_{n,t} = F_{2n} + tF_{2n-2}, n \ge 1$ eşitliğinden yararlanılarak benzer işlemleri $C_{n,t}x = 1$ denklem sistemi için yaparsak,

$C_{n,t}x = 1$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & t+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & t+1 \end{bmatrix} = \det C_{n,t};$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & t+1 \end{bmatrix} = \det C_{n,t}{}^{(1)}; \Delta_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & t+1 \end{bmatrix} = \det C_{n,t}{}^{(2)}; \ldots;$$

$$\Delta_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} = \det C_{n,t}{}^{(n)} \text{ dersek;}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\det C_{n,t}{}^{(1)}}{\det C_{n,t}};\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\det C_{n,t}{}^{(2)}}{\det C_{n,t}};\ \ldots;\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} = \frac{\det C_{n,t}{}^{(n)}}{\det C_{n,t}}$$

çözümleri elde edilir. Yani; $x_i = \dfrac{\det C_{n,t}{}^{(i)}}{\det C_{n,t}} = \dfrac{F_{2(n-i)+1} + tF_{2(n-i)}}{F_{2n} + tF_{2n-1}}, 1 \le i \le n$ elde edilmiş olur.

Teorem 4.2' deki eşitlikler ve Önerme 4.2' deki $\det\varepsilon_{1,t}=\det H_{1,t}=t+1$ ve $\det\varepsilon_{n,t}=\det H_{n,t}=tF_{n-1}+F_n, n\geq 2$ eşitliğinden yararlanarak benzer işlemleri $\varepsilon_{n,t}x=1$ denklem sistemi için yaparsak,

$$\varepsilon_{n,t}x=1$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&\cdots&0\\0&1&1&\ddots&\vdots\\1&0&1&\ddots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&1\\1&0&\cdots&0&t+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{n-1}\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\Delta=\begin{bmatrix}1&1&0&\cdots&0\\0&1&1&\ddots&\vdots\\1&0&1&\ddots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&1\\1&0&\cdots&0&t+1\end{bmatrix}=\det\varepsilon_{n,t};$$

$$\Delta_1=\begin{bmatrix}1&1&0&\cdots&0\\1&1&1&\ddots&\vdots\\1&1&1&\ddots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&1\\1&0&\cdots&0&t+1\end{bmatrix}=\det\varepsilon_{n,t}^{(1)};\Delta_2=\begin{bmatrix}1&1&0&\cdots&0\\0&1&1&\ddots&\vdots\\1&1&1&\ddots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&1\\1&1&\cdots&0&t+1\end{bmatrix}=\det\varepsilon_{n,t}^{(2)};\ \ldots;$$

$$\Delta_n=\begin{bmatrix}1&1&0&\cdots&1\\0&1&1&\ddots&\vdots\\1&0&1&\ddots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&1\\1&1&\cdots&0&1\end{bmatrix}=\det\varepsilon_{n,t}^{(n)}\text{ dersek;}$$

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{\det\varepsilon_{n,t}^{(1)}}{\det\varepsilon_{n,t}};\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{\det\varepsilon_{n,t}^{(2)}}{\det\varepsilon_{n,t}};\ \ldots;\ x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}=\frac{\det\varepsilon_{n,t}^{(n)}}{\det\varepsilon_{n,t}}$$

çözümleri elde edilir. Yani; $x_1=\dfrac{tF_{n-3}+F_{n-2}}{tF_{n-1}+F_n},\quad x_i=\dfrac{\det\varepsilon_{n,t}^{(i)}}{\det\varepsilon_{n,t}}=\dfrac{F_{n-i+1}+tF_{n-i}}{F_n+tF_{n-1}}, 2\leq i\leq n$

eşitlikleri elde edilmiş olur. Yine $\varepsilon_{n,t}$ matrisi ile $\varepsilon_{n,t}^{(i)}, 1 \le i \le n$ ilaveli matriserinin ranklarının aynı ve bilinmeyen sayısına eşit olduğundan, bu çözümler tektir deriz.

Özel olarak, Eş. 4.32' ye göre, $t = 0,1,2$ için $R_{n,t}x = 1$ sistemi şu çözümlere sahiptir.

$$x_i = \frac{F_{n-i-1}}{F_n}, t = 0;$$

$$x_i = \frac{F_{n-i-1} + F_{n-i}}{F_n + F_{n+1}} = \frac{F_{n-i+1}}{F_{n+2}}, t = 1;$$

$$x_i = \frac{F_{n-i-1} + 2F_{n-i}}{F_n + 2F_{n+1}} = \frac{F_{n-i-1} + F_{n-i} + F_{n-i}}{F_n + F_{n+1} + F_{n+1}} = \frac{F_{n-i+2}}{F_{n+3}}, t = 2;$$

Ayrıca, Eş. 4.33' den, $t = 0,1,2$ için $C_{n,t}x = 1$ sistemi de şu çözümlere sahiptir.

$$x_i = \frac{F_{2(n-i)+1}}{F_{2n}}, t = 0;$$

$$x_i = \frac{F_{2(n-i)+1} + F_{2(n-i)}}{F_{2n} + F_{2n-1}} = \frac{F_{2(n-i+2)}}{F_{2n+1}}, t = 1;$$

$$x_i = \frac{F_{2(n-i)+1} + 2F_{2(n-i)}}{F_{2n} + 2F_{2n-1}} = \frac{F_{2(n-i)+1} + F_{2(n-i)} + F_{2(n-i)}}{F_{2n} + F_{2n-1} + F_{2n-1}} = \frac{F_{2(n-i)+2} + F_{2(n-i)}}{F_{2n+1} + F_{2n-1}}, t = 2.$$

$n \times n$ Fibonacci-Hessenberg matrisi olan $R_{n,t}$'yi göz önüne alalım. $1 \le i \le n$ için $\det R_{n,t}^{(i)} = tF_{n-i} + F_{n-i-1}$ 'dir. Bu t-Fibonacci sayısı n ve i'ye bağlıdır ve böylece Fibonaci sayılarının $2-$boyutlu dizisi olan $r(n,i;t)$ 'yi elde ederiz.

4.2. Çizelge. $1 \le n, i \le 6$ için $\det R_{n,t}^{(i)}$ değerleri.

n/i	1	2	3	4	5	6
1	tF_0+F_{-1}					
2	tF_1+F_0	tF_0+F_{-1}				
3	tF_2+F_1	tF_1+F_0	tF_0+F_{-1}			
4	tF_3+F_2	tF_2+F_1	tF_1+F_0	tF_0+F_{-1}		
5	tF_4+F_3	tF_3+F_2	tF_2+F_1	tF_1+F_0	tF_0+F_{-1}	
6	tF_5+F_4	tF_4+F_3	tF_3+F_2	tF_2+F_1	tF_1+F_0	tF_0+F_{-1}

4.3. Çizelge. $1 \le n, i \le 6$ için $\det R_{n,1}^{(i)}$ değerleri.

n/i	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	2	1	1			
4	3	2	1	1		
5	5	3	2	1	1	
6	8	5	3	2	1	1

Çizelge 4.2 , $1 \le n, i \le 6$ için $r(n,i;t)$ değerlerini göstermektedir. $r(n,i;t)$ dizisinin tüm satır ve sütunları aynıdır. Çizelge 4.3 , $1 \le n, i \le 6$ için $r(n,i;1)$ değerlerini göstermektedir. Bir n sabiti için, dizinin $n.$satırı, ilk n Fibonacci sayısını vermektedir ve her i için, $i.$ eleman ile başlayan $i.$sütun, Fibonacci dizisidir.

KAYNAKLAR

1. Ching L. , “The maximum determinants of an $n \times n$ lower hessenberg (0,1) matrix”, ***Linear Algebra and Its Aplications***, 183: 147-153 (1993).

2. G. Strang, ***Introduction to Linear Algebra***, 2nd Edition, Wellesley-Cambridge, (1998).

3. K. B. Data and B. M. Mohan, ***Orthogonal Functions in Systems and Control***, IIT, Kharagpur, India, (1995).

4. Morteza Esmaeilli, “More on the fibonacci sequence and hessenberg matrices”, ***Integers***, 6, A32: 8 (2006).

5. N. D. Cahil, J. R. D’Errico, D. A. Narayan, “Fibonacci deteminants”, ***The College Math. Journal of The Math. Association of America***, 33 (3): 221-225 (2002).

6. N. D. Cahil, J. R. D’Errico, J. Spence, “Complex factorizations of the fibonacci and lucas numbers”, ***Fibonacci Quarterly***, 41 (1): 13-19 (2003).

7. A. A. Öcal, N. Tuğlu, E. Altınışık, “On the representation of k-generalized fibonacci and lucas numbers”, ***Applied Math. Comp.*** , 170: 584-596 (2005).

8. E. P. Miles Jr, “Generalized fibonacci numbers and associated matrices”, ***Amer. Math. Monthly***, 745-752 (1960).

9. Horadam, A. F. , “Pell identities”, ***The Fibonacci Quarterly***, 9 (3): 245-252, 263 (1971).

10. Horadam, A. F. and Mahon, Bro. J. M. , “Pell and pell-lucas polynomials”, ***The Fibonacci Quarterly***, 23 (1): 7-20 (1985).

11. Vorob’yev, N. N. , “Fibonacci numbers”, ***Blaisdell***, New York, 1-176 (1961).

12. Horadam, A. F. , “A generalized fibonacci sequence”, ***Americ. Math. Monthly***, 68: 455- 459 (1961).

13. Vajda, S. , “Fibonacci & lucas numbers, and the golden section. Theory and applications” ***John Wiley & Sons***, New York, 24-61 (1989).

14. Miles, E. P. , “Generalized fibonacci numbers and associated matrices”, ***Amer. Math. Monthly***, 67: 745-752 (1960).

15. Lee, G. -Y. , "*k*-Lucas numbers and associated bipartite graphs", ***Linear Algebra Appl***. , 320 (1-3): 51-61 (2000).

16. Bong, N. H. , "Fibonacci matrices and matrix representation of fibonacci numbers", ***Southeast Asian Bull. Math***. , 23: 357-374 (1999).

17. Ercolano, J. , "Matrix generators of pell sequences", ***Fibonacci Quart***. , 17 (1): 71-77 (1979).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : AZMAN, Huriye

Uyruğu : T.C.

Doğum tarihi ve yeri : 29.04.1985 Ankara

Medeni hali : Bekar

Telefon : 0 505 709 28 85

e-mail : azmanhuriye@hotmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik Bölümü	2007
Lise	Rize Anadolu Lisesi	2002

Yabancı Dil

İngilizce