
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

FAZ TİPİ DAĞILIMLAR VE GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE UYGULAMALARI

Mustafa TEKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
HAREKAT ARAŞTIRMASI ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EYLÜL 2018

Mustafa TEKİN tarafından hazırlanan "FAZ TİPİ DAĞILIMLAR VE GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE UYGULAMALARI" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Harekat Araştırması Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Serkan ERYILMAZ

Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı, Atılım Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. .....

Başkan: Prof. Dr. Fatih TANK

Sigortacılık ve Aktüerya Bilimleri Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. .....

Üye: Doç. Dr. Talip KELLEGÖZ

Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. .....

Tez Savunma Tarihi: 14/09/2018

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Mustafa TEKİN

14/09/2018

FAZ TİPİ DAĞILIMLAR VE GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE UYGULAMALARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Mustafa TEKİN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Eylül 2018

ÖZET

Bu çalışmada; faz tipi dağılımlar ve bazı özellikleri tanıtılmış, bu dağılımların güvenilirlik analizindeki uygulamaları ele alınmıştır. Faz tipi dağılımlara ilişkin istatistiksel karakteristiklerin matrislere dayalı olarak ifade edilebilmesi bu dağılımların güvenilirlik analizi hesaplamalarında etkin bir şekilde kullanılabilmesine olanak sağlamaktadır. Bazı güvenilirlik şok modellerinin, faz tipi dağılımların özelliklerinden yararlanarak nasıl analiz edilebileceği gösterilmiştir. Çalışmanın asıl kısmında yeni bir karma şok modeli tanımlanmış ve bu model faz tipi dağılımlar aracılığıyla analiz edilmiştir. Yeni karma şok modeli, uç ve tekrar şok modellerinin birleşiminden elde edilmiştir. Bu model altında sistemin güvenilirlik fonksiyonu ve ortalama yaşam süresi elde edilmiş olup optimal değiştirme zamanı problemi ele alınmıştır.

Bilim Kodu : 90620

Anahtar Kelimeler : Faz tipi dağılım, Güvenilirlik, Markov süreci, Optimal değiştirme zamanı, Şok modeli

Sayfa Adedi : 33

Danışman : Prof. Dr. Serkan ERYILMAZ

PHASE TYPE DISTRIBUTIONS AND THEIR APPLICATIONS IN RELIABILITY ANALYSIS
(M. Sc. Thesis)

Mustafa TEKİN

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
September 2018

ABSTRACT

In this study; phase type distributions and some their properties have been introduced and applications of these distributions in reliability analysis have been discussed. The matrix-based representations of phase type distributions enable us to use these distributions efficiently in reliability calculations. It has been shown how some reliability shock models can be analyzed using the properties of phase type distributions. In the main part of the study, a new mixed shock model is defined and evaluated through phase type distributions. The new mixed shock model appears as a combination of extreme and run shock models. Under this model, the reliability function and mean time to failure of the system are obtained and the optimal replacement time problem is studied.

Science Code : 90620
Key Words : Phase type distribution, Reliability, Markov process, Optimal replacement time, Shock models
Page Number : 33
Supervisor : Prof. Dr. Serkan ERYILMAZ

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca ilgisini ve destegini esirgemeyen değerli danışmanım Prof. Dr. Serkan ERYILMAZ'a, bu süreçte hep yanımda olan, maddi ve manevi destegini eksik etmeyen sevgili aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv
ABSTRACT v
TEŞEKKÜR vi
İÇİNDEKİLER vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ viii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ ix
SİMGELER VE KISALTMALAR x
1. GİRİŞ 1
2. FAZ TİPİ DAĞILIMLAR 3
2.1. Faz Tipi Dağılımlarının Özellikleri 4
3. FAZ TİPİ ETKİ - DAYANIKLILIK MODELİ 9
3.1. Sistem Güvenilirliği 9
4. GÜVENİLİRLİK ŞOK MODELLERİ 13
4.1. Birikimli Şok Modeli 13
4.2. Uç Şok Modeli 13
4.3. Tekrar Şok Modeli 14
4.4. Delta Şok Modeli 14
4.5. Karma Şok Modeli 15
5. KARMA MODEL ALTINDA OPTİMAL DEĞİŞİM ZAMANI . . 19
5.1. Optimal Değiştirme Zamanı 19
5.2. Karma Şok Modeli 19
5.3. Sayısal Sonuçlar 25
6. SONUÇ VE ÖNERİLER 29
KAYNAKLAR 31
ÖZGEÇMİŞ 33

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

Şekil 2.1. $n = 3$ ve $\lambda = 1$ için Erlang dağılımı ortalama geriye kalan yaşam fonksiyonu 7

Şekil 4.1. $k = 3$ ve $\lambda = 1$ için Erlang dağılımı ortalama geriye kalan yaşam fonksiyonu 17

Şekil 5.1. Karma şok modeline ilişkin bir realizasyon 20

Şekil 5.2. Geçiş durumlarına ilişkin diyagram. 21

Şekil 5.3. $\lambda = 1$, $k = 2$ ve $k = 3$ için $P\{T > t\}$ zamana bağlı grafiği 24

Şekil 5.4. Erlang dağılıma ait $\lambda = 2$, $c_1 = 1$ ve $c_2 = 10$ için $C(t)$'nin zamana bağlı grafiği 25

Şekil 5.5. Erlang dağılıma ait $\lambda = 1$, $c_1 = 1$ ve $c_2 = 10$ için $C(t)$'nin zamana bağlı grafiği 26

Şekil 5.6. Üstel dağılıma ait $\lambda = 1$, $c_1 = 1$ ve $c_2 = 10$ için $C(t)$'nin zamana bağlı grafiği 26

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

Çizelge 5.1. Ortalama yaşam süresi 24

Çizelge 5.2. Erlang Dağılıma ait optimal değiştirme zamanı ve ortalama maliyet 25

Çizelge 5.3. Üstel Dağılıma ait optimal değiştirme zamanı ve ortalama maliyet 27

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{N}$	Gelen şok sayısını ifade eden rassal değişken
$\boldsymbol{PH_c}$	Sürekli faz tipi dağılım
$\boldsymbol{PH_d}$	Kesikli faz tipi dağılım
$\boldsymbol{T}$	Sistemin yaşam süresi
$\boldsymbol{\{X_i, i \geq 1\}}$	Şoklar arası geçen süre
$\boldsymbol{\{Y_i, i \geq 1\}}$	Şokların büyüklükleri

1. GİRİŞ

Kesikli faz tipi dağılım, bir yutucu duruma sahip Markov zincirinde yutulma için geçen sürenin dağılımı olarak tanımlanabilir. Geometrik, Negatif Binom, k ncı dereceden geometrik dağılımlar kesikli faz tipi dağılımlardır. Benzer şekilde, bir yutucu duruma sahip Markov sürecinde yutulma için geçen sürenin dağılımı sürekli faz tipi dağılımdır. Üstel, Erlang, hiper üstel sürekli faz tipi dağılıma birer örnektir. İlerleyen bölümlerde detaylı bir şekilde belirtileceği üzere faz tipi dağılımların dağılım fonksiyonu ve momentleri matrisler aracılığıyla ifade edilebilmektedir. Faz tipi dağılımların istatistiksel karakteristiklerinin matris yapısında ifade edilebilmesi hesaplamalarda büyük bir kolaylık sağlamaktadır. Bunun yanında faz tipi dağılımların çeşitli kapanış özelliklerinin bulunması bu dağılımların uygulamada etkin bir şekilde kullanılmasını olanaklı kılmaktadır. Örneğin; iki bağımsız faz tipi dağılıma sahip rassal değişkenin toplamı, minimumu ve maksimumu da faz tipi dağılıma sahiptir.

Faz tipi dağılımlar kuyruk teorisi [1] ve güvenilirlik analizinde [2, 3] çeşitli rassal değişkenlerin modellenmesinde kullanılmıştır. Bir kuyruk sisteminde müşterilerin gelişleri arasında geçen süre ve/veya servis zamanı faz tipi dağılımlar ile modellenebilmektedir. Rassal şoklara maruz kalan bir sistemde şoklar arası geçen süreler de faz tipi dağılımlar aracılığıyla modellenebilir.

Şok modelleri uygulamalı olasılık ve güvenilirlik teorisinde en çok çalışılan konulardan birisi olup bu modeller gerçek yaşam sistemlerini modellemede kullanılabilmektedir. Bir şok modelinde şoklar arası geçen süreler ve şokların büyüklükleri rassal değişken olarak tanımlanmaktadır. Bir şok modelini tanımlamak için sistemin bozulmasına neden olan kuralın tanımlanması gerekmektedir. Örneğin, uç şok modelinde sistem belirli bir seviyenin üzerinde tek bir kritik şoka maruz kaldığında bozulmaktadır. Sistem bozuluncaya kadar sistemin maruz kaldığı şok sayısı ve şoklar arası geçen süreler rassal olduğundan sistemin yaşam süresi rassal sayıdaki rassal değişkenlerin toplamı şeklinde ifade edilebilir. Bu tür toplamlar literatürde birleşik rassal değişken olarak bilinmektedir. Faz tipi dağılımlar, belirli bazı koşullar altında birleşik rassal değişkenlerin karakteristiklerinin elde edilmesi sürecinde oldukça etkindir [4].

Bu çalışmada, faz tipi dağılımlar ve bu dağılımların güvenilirlik analizi uygulamaları üzerinde durulmuştur. Güvenilirlik şok modellerinin faz tipi dağılımların özelliklerini kullanarak nasıl analiz edilebileceği sunulmuş, tanımlanmış yeni bir şok modeli bu dağılımların kapanış özellikleri aracılığıyla incelenmiştir. Tanımlanan yeni şok modeli, uç ve tekrar şok modellerinin bileşimi olup karma yapıda bir modeldir. Bu modele göre, $d_1 < d_2$ olmak üzere sistem d_1 seviyesi üzerinde ardıl k adet şoka ya da d_2

seviyesi üzerinde tek bir şoka maruz kaldığında bozulmaktadır. Bu model altında sistemin güvenilirlik fonksiyonu ve ortalama yaşam süresi için matrislere dayalı formüller elde edilmiş olup optimal değiştirme zamanı problemi ele alınmıştır.

2. FAZ TİPİ DAĞILIMLAR

m sayıda geçişli ve 1 tane yutucu duruma sahip bir Markov zincirini göz önüne alalım. X rassal değişkeni ile sistem yutucu duruma geçinceye kadar geçen süre gösterilmek üzere, kesikli faz tipi dağılıma sahip X rassal değişkenin olasılık fonksiyonu

$$P(X = x) = \mathbf{a}\mathbf{Q}^{x-1}\mathbf{t}', x \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

olup, burada $\mathbf{Q}$, m geçişli durum arasındaki geçiş olasılıklarını içeren matris, $\mathbf{t}'$ geçiş durumlarından yutucu duruma geçiş olasılıklarını içeren kolon vektörü, ve $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_m)$ ilgili Markov zinciri için başlangıç olasılık dağılımını içeren vektördür [2]. X rassal değişkeninin güvenirlik fonksiyonu,

$$P(X > x) = \mathbf{a}\mathbf{Q}^{x}\mathbf{e}' \tag{2.2}$$

eşitliği yardımıyla hesaplanabilmekte olup, burada $\mathbf{e} = (1, 1, ..., 1)_{1\times m}$ dir. Kesikli faz tipi dağılıma sahip bir X rassal değişkeni $X \sim PH_d(\mathbf{a}, \mathbf{Q})$ ile ifade edilecektir. p ile başarı, $1-p$ olasılığı ile başarısızlığın elde edildiği denemeler dizisinde X rassal değişkeni ile bir başarı elde edilinceye kadar yapılan deneme sayısı gösterilmek üzere, "başarı" elde edilmesi yutucu durum olarak tanımlandığında $\mathbf{a} = 1$, $\mathbf{Q} = 1 - p$, $\mathbf{t}' = p$ ve dolayısıyla $P(X = x) = (1-p)^{x-1}p$ olup bu da geometrik dağılımın olasılık fonksiyonudur. Negatif binom ve k ncı dereceden geometrik dağılım diğer kesikli faz tipi dağılımlardır [5–7]. $X \sim PH_d(\mathbf{a}, \mathbf{Q})$ olmak üzere X rassal değişkenine ilişkin beklenen değer ve olasılık üreten fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki eşitlikler yardımıyla hesaplanır.

$$E(X) = \mathbf{a}(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{e}' \tag{2.3}$$

$$\phi_N(z) = 1 - \pi\mathbf{e}' + \pi z(\mathbf{I} - z\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{t}' \tag{2.4}$$

Örnek

X rassal değişkeni ile bağımsız Bernoulli denemeleri dizisinde r'inci "başarı" elde edilinceye kadar yapılan deneme sayısı gösterilsin. p ile her bir denemedeki başarı olasılığı gösterilmek üzere, X rassal değişkeni negatif binom dağılımına sahip ve $X \sim PH_d(\mathbf{a}, \mathbf{Q})$ olup $\mathbf{a} = (1, 0, ..., 0)$, $\mathbf{t} = (0, 0, ..., p)$ ve $r \times r$ boyutundaki $\mathbf{Q}$ matrisi

aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1-p & p & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1-p & p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 1-p \end{bmatrix}.$$

Benzer olarak, sürekli faz tipi dağılıma sahip bir X rassal değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$P(X \leq x) = 1 - \boldsymbol{\alpha} exp(\mathbf{A}x)\mathbf{e}' \tag{2.5}$$

yapısına sahip olup burada $\mathbf{A}$, $m \times m$ boyutlu, negatif köşegen elemanlarına sahip nonsigüler bir matris ve $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{e}' \leq 1$ dir. $\boldsymbol{\alpha} = 1, \mathbf{A} = -\lambda$ olarak alındığında en basit sürekli faz tipi dağılım olan üstel dağılım elde edilmektedir. Eş. 2.5 ile verilen dağılım fonksiyonuna ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonu ise,

$$\frac{d}{dx} P\{X \leq x\} = \boldsymbol{\alpha} exp(\mathbf{A}x)\mathbf{a}^0, \tag{2.6}$$

burada $a^0 = -\mathbf{A}\mathbf{e}'$ dır. Sürekli faz tipi dağılıma sahip X rassal değişkenin n'inci momenti;

$$E(X^n) = (-1)^n n! \boldsymbol{\alpha} \mathbf{A}^{-n} \mathbf{e}' \tag{2.7}$$

eşitliği yardımıyla hesaplanabilmektedir. Sürekli faz tipi dağılıma sahip bir X rassal değişkeni $X \sim PH_c(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{A})$ ile gösterilecektir.

Faz tipi dağılımlar, uygulamada oldukça yararlı olan kapanış özelliklerine sahiptir. Bu çalışmada kullanılacak bazı özellikler aşağıda verilmiştir. Faz tipi dağılımların bu ve başka özellikleri [8]'de ayrıntılı olarak sunulmuştur.

2.1. Faz Tipi Dağılımlarının Özellikleri

Aşağıda verilen önermelerin ispatları [8]'de mevcuttur.

2.1.1. Önerme

X_1 ve X_2 bağımsız ve $X_1 \sim PH_c(\boldsymbol{\alpha}_1, \mathbf{A})$ ve $X_2 \sim PH_c(\boldsymbol{\alpha}_2, \mathbf{B})$
olmak üzere $X_1 + X_2$ faz tipi dağılıma sahip olup,

$$X_1 + X_2 \sim PH_c\left((\boldsymbol{\alpha}_1, (1 - \boldsymbol{\alpha}_1\mathbf{e}')\boldsymbol{\alpha}_2), \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{a}^0\boldsymbol{\alpha}_2 \\ 0 & \mathbf{B} \end{bmatrix}\right) \tag{2.8}$$

burada $\mathbf{a}^0 = -\mathbf{A}\mathbf{e}'$ dır.

2.1.2. Önerme

$X_1, X_2, ...$ rassal değişkenleri bağımsız ve $X_i \sim PH_c(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{A})$, $i = 1, 2, ...$ olsun. N rassal değişkeni, $X_1, X_2, ...$ rassal değişkenlerinden bağımsız ve $N \sim PH_d(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{S})$ olmak üzere, $\sum_{i=1}^{N} X_i$ bileşik rassal değişkeni sürekli faz tipi dağılıma sahip olup,

$$\sum_{i=1}^{N} X_i \sim PH_c(\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta}, A \otimes \mathbf{I} + (\mathbf{a}^0\boldsymbol{\alpha}) \otimes \mathbf{S}) \tag{2.9}$$

dir. Burada $\mathbf{I}$ birim matris ve $\otimes$ kronecker çarpımını ifade etmektedir.

2.1.3. Önerme

$X \sim PH_c(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{A})$ olmak üzere $(X - t|X > t)$ şeklinde tanımlanan geriye kalan yaşam rassal değişkeni faz tipi dağılıma sahip olup,

$$(X - t|X > t) \sim PH_c(\frac{\boldsymbol{\alpha} exp(\mathbf{A}t)}{\boldsymbol{\alpha} exp(\mathbf{A}t)\mathbf{e}'}, \mathbf{A}) \tag{2.10}$$

Dolayısıyla X rassal değişkenine ilişkin ortalama geriye kalan yaşam fonksiyonu Eş. 2.7 kullanılarak aşağıdaki eşitlik yardımıyla hesaplanabilir.

$$E(X - t|X > t) = -\frac{\boldsymbol{\alpha} exp(\mathbf{A}t)}{\boldsymbol{\alpha} exp(\mathbf{A}t)\mathbf{e}'}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}' \tag{2.11}$$

2.1.4. Önerme

X_1 ve X_2 bağımsız, $X_1 \sim PH_c(\boldsymbol{\alpha}_1, \mathbf{A})$ ve $X_2 \sim PH_c(\boldsymbol{\alpha}_2, \mathbf{B})$ olmak üzere

$X = min\{X_1, X_2\}$ faz tipi dağılıma sahip olup,

$$X = min\{X_1, X_2\} \sim PH_c\left(\boldsymbol{\alpha}_1 \otimes \boldsymbol{\alpha}_2, \mathbf{A} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{B}\right) \tag{2.12}$$

şeklinde ifade edilebilir.

2.1.5. Önerme

X_1 ve X_2 bağımsız, $X_1 \sim PH_c(\boldsymbol{\alpha}_1, \mathbf{A})$ ve $X_2 \sim PH_c(\boldsymbol{\alpha}_2, \mathbf{B})$ olmak üzere, $X = max\{X_1, X_2\}$ rassal değişkeni de, faz tipi dağılıma sahip olup,

$$X \sim PH\left(\mathbf{u}, \begin{bmatrix} \mathbf{A} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{B} & \mathbf{A}^0 \otimes \mathbf{I} & \mathbf{I} \otimes \mathbf{B}^0 \\ 0 & \mathbf{B} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A} \end{bmatrix}\right) \tag{2.13}$$

$\mathbf{u} = (\boldsymbol{\alpha}_1 \otimes \boldsymbol{\alpha}_2, (1 - \boldsymbol{\alpha}_1\mathbf{e})\boldsymbol{\alpha}_2, (1 - \boldsymbol{\alpha}_2\mathbf{e})\boldsymbol{\alpha}_1)$.

Örnek

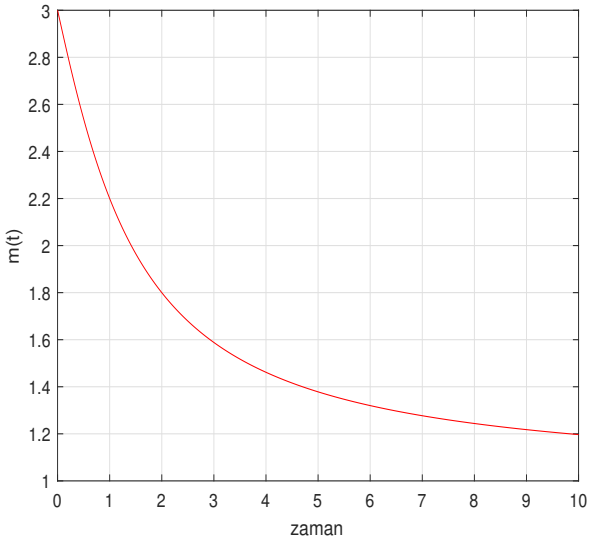
X rassal değişkeni n ve λ parametreleri ile Erlang dağılımına sahip olsun. Bu durumda $X \sim PH_c(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{A})$ olup, $\boldsymbol{\alpha} = (0, 0, ..., 1)_{1\times n}$ ve

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & -\lambda & \cdots & 0 \\ : & \ddots & \ddots & : \\ 0 & \cdots & \lambda & -\lambda \end{bmatrix}_{n\times n}$$

olmak üzere;

$$E(X - t|X > t) = -\frac{\boldsymbol{\alpha} exp(\mathbf{A}t)}{\boldsymbol{\alpha} exp(\mathbf{A}t)\mathbf{e}'}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}'$$

hesaplanabilir. Burada $n = 3$ ve $\lambda = 1$ alınırsa $m(t) = E(X - t|X > t)$ ifadesinin zamana bağlı grafiği Şekil 2.1 deki gibi olmaktadır.



Şekil 2.1. $n = 3$ ve $\lambda = 1$ için Erlang dağılımı ortalama geriye kalan yaşam fonksiyonu

Örnek

X_1 ve X_2 bağımsız rassal değişkenler olmak üzere sırasıyla $X_1 \sim PH(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{A})$ ve $X_2 \sim PH(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{B})$ olduğu varsayılsın. Burada $\boldsymbol{\alpha} = (0, 1)$, $\boldsymbol{\beta} = (0, 1)$ ve

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\theta & 0 \\ \theta & -\theta \end{bmatrix}$$

olmak üzere,
$X = X_1 + X_2$, $X_* = min\{X_1, X_2\}$ ve $X^* = max\{X_1, X_2\}$ rassal değişkenlerinin dağılımları da, birer faz tipi dağılımdır.

$$X \sim PH_c \left((\boldsymbol{\alpha}_1, (1 - \boldsymbol{\alpha}_1 \mathbf{e}')\boldsymbol{\alpha}_2), \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{A}^0\boldsymbol{\alpha}_2 \\ 0 & \mathbf{B} \end{bmatrix} \right)$$

olup, burada

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, (1 - \boldsymbol{\alpha}_1 \mathbf{e}')\boldsymbol{\alpha}_2) = (0, 1, 0, 0) \text{ ve } \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{A}^0\boldsymbol{\alpha}_2 \\ 0 & \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \lambda \\ \lambda & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta & 0 \\ 0 & 0 & \theta & -\theta \end{bmatrix}.$$

$$X_* \sim PH\left(\boldsymbol{\alpha}_1 \otimes \boldsymbol{\alpha}_2, \mathbf{A} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{B}\right)$$

olduğundan;

$(\boldsymbol{\alpha}_1 \otimes \boldsymbol{\alpha}_2) = (0,0,0,1)$ ve $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{B}) = \begin{bmatrix} -\lambda-\theta & 0 & 0 & 0 \\ \theta & -\lambda-\theta & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & -\lambda-\theta & 0 \\ 0 & \lambda & \theta & -\lambda-\theta \end{bmatrix}$

olmaktadır.

$X^* \sim PH(\boldsymbol{u}, \mathbf{M})$ olacak şekilde gösterilirse,

$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{\alpha}_1 \otimes \boldsymbol{\alpha}_2, (1 - \boldsymbol{\alpha}_1\mathbf{e})\boldsymbol{\alpha}_2, (1 - \boldsymbol{\alpha}_2\mathbf{e})\boldsymbol{\alpha}_1) = (0,0,0,1,0,0,0,0)$ ve

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -\lambda-\theta & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & \theta & 0 \\ \theta & -\lambda-\theta & 0 & 0 & 0 & \lambda & 2\theta & 0 \\ -\lambda & 0 & -\lambda-\theta & 0 & 2\lambda & 0 & 0 & \theta \\ 0 & -\lambda & \theta & -\lambda-\theta & 0 & 2\lambda & 0 & 2\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \theta & -\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -\lambda \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

3. FAZ TİPİ ETKİ - DAYANIKLILIK MODELİ

Etki - dayanıklılık modeli mühendislik uygulamalarında önemli bir yere sahiptir. Bir çok sistem ya da bileşen çalıştığı ortamda sıcaklık, basınç vb. çevresel koşullara maruz kalmaktadır. Bu tür çevresel koşulları belirli bir dağılıma sahip rassal değişken olarak tanımlamak mümkündür. Etki - dayanıklılık modeline göre sistem ya da bileşenin rassal değişken olarak tanımlanmış dayanıklılığı sisteme etki eden rassal etkiden küçük ise sistem/bileşen bozulmaktadır.

3.1. Sistem Güvenilirliği

X ve Y rassal değişkenleri sırasıyla bir sistemin ya da bileşenin maruz kaldığı rassal etkiyi ve rassal dayanıklılığı göstermek üzere, bu sistem ya da bileşenin etki - dayanıklılık modeli altında güvenililirliği $P(X < Y)$ olasılığı ile ifade edilebilir.

3.1.1. Teorem

X ve Y bağımsız rassal değişkenler, $X \sim PH_c(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{A})$ ve $Y \sim PH_c(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{B})$ ile $(\mathbf{A})_{k\times k}$ ve $(\mathbf{B})_{m\times m}$ olmak üzere

$$P\{X < Y\} = (\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta})(-(\mathbf{B} \otimes \mathbf{I}_k + \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}))^{-1}(\mathbf{e}' \otimes \mathbf{a}^0) \tag{3.1}$$

yazılabilir [9]. Burada $\mathbf{I}_k$, $k \times k$ tipinde birim matris ve $\mathbf{a}^0 = -\mathbf{A}\mathbf{e}'$ şeklindedir.

3.1.2. Teorem

$M = E(Y - X|Y > X)$ sistemin ortalama yaşam süresi olmak üzere;

$$M = \frac{(\boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\alpha})(B \otimes \mathbf{I}_k)^{-1}(\mathbf{B} \otimes \mathbf{I}_k + \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{e}' \otimes \mathbf{a}^0)}{(\boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\alpha})(-(\mathbf{B} \otimes \mathbf{I}_k + \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}))^{-1}(\mathbf{e}' \otimes \mathbf{a}^0)} \tag{3.2}$$

ile bulunabilir [9].

Bu yöntem, sadece tek bileşenden oluşan sistemler değil, aynı zamanda birden fazla bileşenden oluşan sistemlerin güvenirlik analizinde de kullanılabilir. Günlük yaşamda çoğu sistemler birden fazla bileşenin bir araya gelmesiyle oluşmaktadır. Şimdi n farklı bileşenden oluşan ve aynı etkiye maruz kalan bir sistemi göz önüne alalım. Burada, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ herbir bileşenin dayanıklılığını ifade etsin.

$X \sim PH_c(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{A})$ ve $Y_i \sim PH_c(\boldsymbol{\beta}_i, \mathbf{B}_i), i = 1, 2, ..., n$ ve $(\mathbf{A})_{k\times k}$ ve $(\mathbf{B_i})_{m\times m}$ şeklinde olsun. Seri bir sistem için güvenirliliği;

$$R_n = P\{X < min(Y_1, Y_2, ..., Y_n)\} = P\{X < Y_1, X < Y_2, ..., X < Y_n\} \tag{3.3}$$

şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca, burada

$$R_n = (\boldsymbol{\gamma}_n \otimes \boldsymbol{\alpha})(-(\mathbf{L}_n \otimes \mathbf{I}_k + \mathbf{I}_{m^n} \otimes \mathbf{A}))^{-1}(\mathbf{e}' \otimes \mathbf{a}^0) \tag{3.4}$$

olup,

$$\boldsymbol{\gamma_n} = \boldsymbol{\gamma_{n-1}} \otimes \boldsymbol{\beta_n} \tag{3.5}$$

ve $\boldsymbol{L_n}$, $m^n \times m^n$ tipinde bir matris,

$$\mathbf{L}_n = \mathbf{L}_{n-1} \otimes \mathbf{I}_m + \mathbf{I}_{m^{n-1}} \otimes \mathbf{B}_n \tag{3.6}$$

$\boldsymbol{\gamma_1} = \boldsymbol{\beta_1}; \mathbf{L}_1 = \mathbf{B}_1$ dir [6].

Etki - dayanıklılık modeli altında genel bir yapıya sahip sistem güvenilirliği hesaplamak da mümkündür.

$\phi : \{0, 1\}^n \longrightarrow \{0, 1\}$

ile uyumlu bir sistemin yapı fonksiyonunu göstersin. Eğer sistemin tüm bileşenleri özdeş ve bağımsız ise güvenirliği,

$$R_\phi = P\{X < \phi(Y_1, Y_2, ..., Y_n)\} = \sum_{i=1}^{n} a_i R_i \tag{3.7}$$

ifade edilebilir [7]. Burada, $(a_1, a_2, ..., a_n)$ vektörü sadece o sisteme ait olan ve $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ koşulunu sağlayan minimal imzadır. R_i, i adet bileşenden oluşan seri bir sistemin güvenirliğini ifade etmektedir.

R_ϕ aynı zamanda,

$$R_\phi = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \begin{bmatrix} (\boldsymbol{\gamma_1} \otimes \boldsymbol{\alpha})(-(\mathbf{L}_1 \otimes \mathbf{I}_k + \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}))^{-1}(\mathbf{e}' \otimes \mathbf{a}^0) \\ (\boldsymbol{\gamma_2} \otimes \boldsymbol{\alpha})(-(\mathbf{L}_2 \otimes \mathbf{I}_k + \mathbf{I}_{m^2} \otimes \mathbf{A}))^{-1}(\mathbf{e}' \otimes \mathbf{a}^0) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{\gamma_n} \otimes \boldsymbol{\alpha})(-(\mathbf{L}_n \otimes \mathbf{I}_k + \mathbf{I}_{m^n} \otimes \mathbf{A}))^{-1}(\mathbf{e}' \otimes \mathbf{a}^0) \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\boldsymbol{\gamma_i} = \underbrace{\boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\beta} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{\beta}}_{i\ defa}$
ve $m^i \times m^i$ tipindeki matris $\mathbf{L_i}$,

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{L}_{i-1} \otimes \mathbf{I}_m + \mathbf{I}_{m^{i-1}} \otimes \mathbf{B} \tag{3.9}$$

olup, $\mathbf{L}_1 = \mathbf{B}$ dir. Bu eşitliğe göre sistemin yapısını ifade eden imza vektörü ile sistem bileşenlerinin etki - dayanıklılık dağılımını ifade eden vektörün vektörel çarpımı bize bileşenin güvenirliğini vermektedir.

4. GÜVENİLİRLİK ŞOK MODELLERİ

Genel olarak bir şok modelinde, bir sistem veya bileşenin maruz kaldığı şoklar rassal zamanlarda ve rassal şiddetlerde gerçekleşmektedir. Sistem şoklar arası geçen süre veya şok büyüklüklerine bağlı olarak belirli bir olayın gerçekleşmesi durumunda bozulmakta olup, bozulmanın gerçekleştiği zamana kadar geçen süre de sistemin ömrünü ifade etmektedir. Sistemin bozulma prensiplerini tanımlayan olay veya olaylara göre şok grupları beş farklı şekilde ifade edilebilir.

4.1. Birikimli Şok Modeli

Birikimli şok modelinde sistemin maruz kaldığı şokların vermiş olduğu hasar toplamının c gibi belirli bir seviyenin üstüne çıkması ile bozulma gerçekleşmektedir. X_1 rassal değişkeni ile ilk şok gelinceye kadar geçen süre ifade edilmekte, $X_i, i > 1$ rassal değişkeni ile $(i-1)$'inci ve i'nci şoklar arası geçen süre belirtilmektedir. $Y_1, Y_2, ...$ rassal değişkenler ise gerçekleşen şokların şiddetini ifade etmeketedir. Bu durumda, birikimli şok modeli altında sistemin yaşam süresi;

$$T = \sum_{i=1}^{N_1} X_i$$

rassal değişkeni ila ifade edilebilir. Burada N_1 rassal değişken olup

$$N_1 = min(n : \sum_{i=1}^{n} Y_i \geq c)$$

şeklinde tanımlanmaktadır [11].

4.2. Uç Şok Modeli

Uç şok modelinde,sistem belirlenen bir seviyenin üzerinde şoka ilk kez maruz kalması durumunda bozulma gerçekleşmektedir. Bu model altında sistemin yaşam süresi

$$T_2 = \sum_{i=1}^{N_2} X_i$$

olarak tanımlanabilir. Burada N_2 rassal değişkeni

$$N_2 = min(n : Y_n \geq d)$$

veya

$$\{N_2 = n\} \Leftrightarrow \{Y_1 < d, ..., Y_{n-1} < d, Y_n \geq d\}$$

olarak tanımlanabilir [12].

4.3. Tekrar Şok Modeli

Tekrar şok modelinde sistemin bozulması için $k(k \geq 1)$ gibi belirli bir sayıda ardıl şok'un şiddetinin d gibi belirli bir seviyenin üzerinde olası gerekmektedir. N_3 rassal değişkeni ile ardıl olarak k adet d ve üzeri şiddete sahip sistemin maruz kaldığı şoklar ifade edilmek üzere, sistemin yaşam süresi;

$$T_3 = \sum_{i=1}^{N_3} X_i$$

şeklindedir [13].

4.4. Delta Şok Modeli

Delta şok modelinde sistemin bozulması yalnızca şoklar arası geçen süreye bağlı olup, ardıl iki şok arası geçen süre δ gibi bir değerden küçük olması durumunda gerçekleşmektedir.

Bu durumda sistemin yaşam süresi;

$$T_4 = \sum_{i=1}^{N_4} X_i$$

olup, N_4 rassal değişkeni

$$\{N_4 = n\} \Leftrightarrow \{X_1 > \delta, ..., X_{n-1} > \delta, X_n \leq \delta\}$$

şeklinde tanımlanmaktadır [14].

4.5. Karma Şok Modeli

Karma şok modelinde ise yukarıda tanımlanan şok modellerinin bir bileşimi olarak tanımlanabilir. Örneğin maruz kalınan şokların vermiş olduğu hasar toplamı c gibi belirli bir seviyenin üzerine geçmesi veya d gibi bir seviyenin üzerinde bir tek şok gelmesi durumunda sistemin bozulduğu varsayımda, birikimli ve uç şok modellerin bir bileşimi gerçekleşmektedir. Bu durumda oluşan karma şok modelin beklenen yaşam süresi;

$$T_5 = \sum_{i=1}^{min(N_1,N_2)} X_i$$

şeklinde tanımlanabilir [15].

Örnek

Tekrar şok modelini göz önüne alalım. Sistemin $d > 0$ gibi bir seviyenin üzerinde $k = 3$ ardıl şoka maruz kaldığında bozulduğunu varsayalım. Bu durumda ardıl $k = 3$ adet d ve üzeri büyüklüğe sahip şok gelinceye kadar sistemin maruz kaldığı toplam şok sayısı N rassal değişkeni ile gösterilecek olursa $N \sim PH_d(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{S})$ olup,

$$\boldsymbol{\beta} = (1, 0, 0), \qquad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ 1-p & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Burada p, d ve üzerinde şok gelme olasılığını ifade etmektedir.
Şoklar arası geçen süreler $X_1, X_2, ...$ ile gösterilmek üzere,

$X_i \sim PH_c(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{A})$

$\boldsymbol{\alpha} = (0, 1)$ ve

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix},$$

olduğu varsayılsın. Bu durumda $\lambda = 1$ ve $p = 0.1$ için Önerme 2.1.2 den

faydalanılarak sistemin yaşam süresinin faz tipi dağılıma sahip olduğunu gösterelim.

$$T = \sum_{i=1}^{N} X_i \sim PH_c(\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta}, A \otimes \mathbf{I} + (\mathbf{a}^0 \boldsymbol{\alpha}) \otimes \mathbf{S})$$

$\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta} = (0, 0, 0, 1, 0, 0)$ ve

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{I} + (\mathbf{a}^0 \alpha) \otimes \mathbf{S}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0.9 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & -1 & 0.9 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

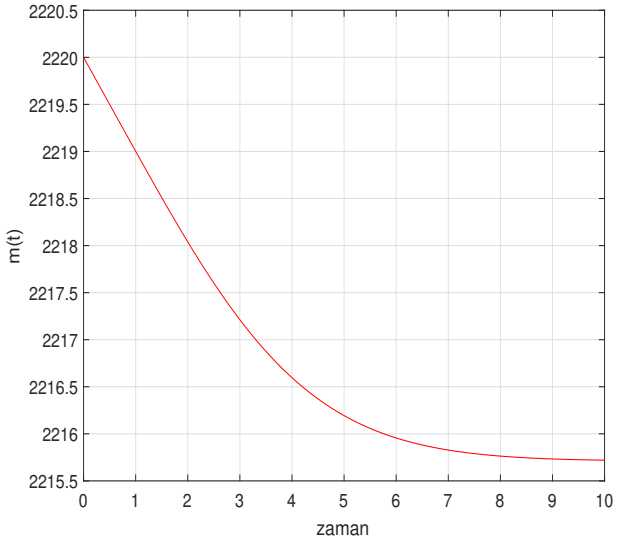
elde edilir. O halde T 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(t) = (0, 0, 0, 1, 0, 0) exp(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0.9 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & -1 & 0.9 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} t) \boldsymbol{a^0}$$

ve Eş. 2.11'den faydalanılarak,

$$m(t) = E(T - t | T > t) = -\frac{\boldsymbol{\alpha} exp(\mathbf{A}t)}{\boldsymbol{\alpha} exp(\mathbf{A}t)\mathbf{e}'} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{e}'$$

ifadesinin zamana bağlı grafiği Şekil 4.1 deki gibi olmaktadır.



Şekil 4.1. $k = 3$ ve $\lambda = 1$ için Erlang dağılımı ortalama geriye kalan yaşam fonksiyonu

5. KARMA MODEL ALTINDA OPTİMAL DEĞİŞİM ZAMANI

Bu bölümde yeni tanımlanacak olan karma şok modeli altında optimal değiştirme zamanı problemi ele alınacaktır.

5.1. Optimal Değiştirme Zamanı

Bir sistem ya da bileşenin bozulduğu anda ya da bozulmadan önce özdeş yeni bir sistem ya da bileşen ile değiştirildiği varsayılsın. Her bir değiştirmenin bir maliyeti olduğu ve sistem bozulduğunda ilave bir maliyet ortaya çıktığı varsayılsın. Bu durumda sistemi ya da bileşeni bozulmadan değiştirmek uygun olacaktır. Klasik değiştirme ilkesine göre sistem bozulmadan önce t anında yada bozulduğunda değiştirilecektir [16]. c_1 ile bozulmamış sistemin maliyeti ve c_2 ile de bozulmuş sistemin maliyeti gösterilsin(c_1<c_2). T rassal değişkeni ile sistemin yaşam süresi gösterilecek olursa sistemin değiştirilme zamanı $min(T,t)$ olup, belirtilen varsayımlar altında birim zaman başına maliyet;

$$C(t) = \frac{c_1 P(T > t) + c_2 P(T \leq t)}{E(min(T,t))} = \frac{c_2 + (c_1 - c_2)P(T > t)}{E(min(T,t))} \tag{5.1}$$

ifade edilir. Burada $E(min(T,t))$ ile ortalama değiştirilme süresi ifade edilmekte olup, Eş. 5.1'i minumum yapan t değerinin bulunması amaçlanmaktadır.

$T \sim PH_c(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{A})$ olduğu varsayılırsa, Eş. 5.1'de verilen $P(T > t)$ ve $E(min(T,t))$ değerleri sırasıyla

$$P(T > t) = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{A}^t\mathbf{e}' \tag{5.2}$$

ve

$$E(min(T,t)) = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{A}^{-1}exp(\mathbf{A}t)\mathbf{e}' - \boldsymbol{\alpha}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}' \tag{5.3}$$

ile hesaplanır [16].

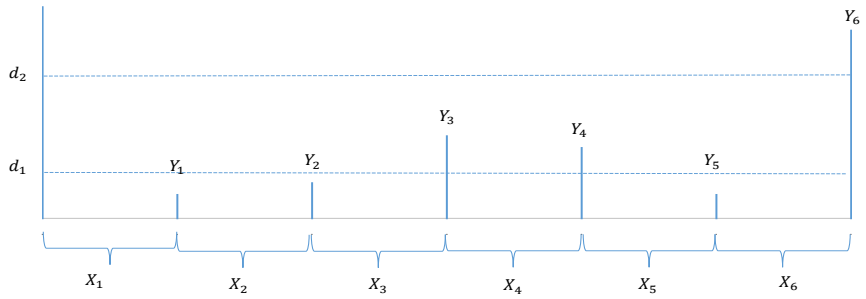
5.2. Karma Şok Modeli

Sistemin d_1 ve üzeri ardıl k adet şoka veya d_2 ve üzeri tek bir şoka maruz kaldığında bozulduğunu varsayalım($k > 1$). Burada tekrar şok modeli ve uç şok modelinin birlikte

uygulaması söz konusu olup, $d_1 < d_2$ olmaktadır. N rassal değişkeni ile d_1 seviyesi üzerinde ardıl k adet şok ya da d_2 seviyesi üzerinde tek şok gelinceye kadar gelen toplam şok sayısı gösterilmek üzere sistemin yaşam süresi

$$T = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

rassal değişkeni ile ifade edilebilir.



Şekil 5.1. Karma şok modeline ilişkin bir realizasyon

Şekil 5.1'deki örneğe göre $k = 2$ olması durumunda sistemin yaşam süresi $T = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$, $k = 3$ olması durumunda sistem yaşam süresi $T = X_1 + \ldots + X_6$ olacaktır.

$Y_1, Y_2, \ldots$ rassal değişkenleri ile ardıl şokların büyüklükleri gösterilmek üzere;

$$p_1 = P\{d_1 < Y_i < d_2\},$$
$$p_2 = P\{Y_i > d_2\},$$

$i = 1, 2, \ldots$ olarak tanımlansın. Bu durumda gelen şokun büyüklüğünün d_1 kritik seviyesinin altında olması olasılığı $1 - p_1 - p_2$ olacaktır. Aşağıdaki teoremde şokların birbirinden bağımsız olması durumunda N rassal değişkeninin dağılımı elde edilmiştir.

5.2.1. Teorem

N rassal değişkeni kesikli faz tipi dağılıma sahip olup, $k \geq 2$ ve $n \geq 1$ için N rassal

değişkeninin olasılık fonksiyonu

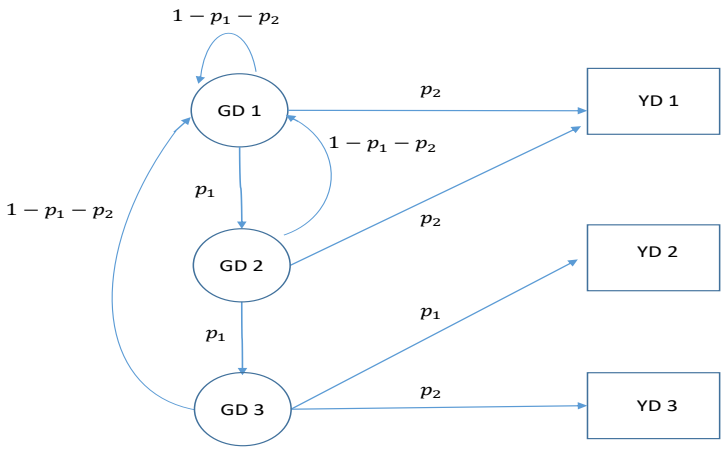
$$P\{N=n\}=(1,0,...,0)\begin{bmatrix} 1-p_1-p_2 & p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-p_1-p_2 & 0 & p_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1-p_1-p_2 & 0 & 0 & \cdots & p_1 \\ 1-p_1-p_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix} p_2 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_2 \\ p_1+p_2 \end{bmatrix}.$$

İspat

d_1 seviyesinin altında, (d_1,d_2) aralığında ve d_2 seviyesinin üzerinde şok gelmesi olayları sırasıyla 0, 1 ve 2 ile gösterilsin. N rassal değişkeni geçiş ve yutucu durumları aşağıda verilen bir Markov zincirinin yutulma zamanı olarak tanımlanabilir.

$$\left.\begin{array}{c} \text{GD 1: "0"} \\ \text{GD 2: "1"} \\ \text{GD 3: "11"} \\ \vdots \\ \text{GD } k\text{: "}\underbrace{11...1}_{k-1}\text{"} \end{array}\right\}\text{Geçiş durumları} \quad , \quad \left.\begin{array}{c} \text{YD 1: "2"} \\ \text{YD 2: "}\underbrace{11...1}_{k}\text{"} \\ \text{YD 3: "}\underbrace{11...1}_{k-1}\text{2"} \end{array}\right\}\text{Yutucu durumlar}$$

$N \sim PH_d(\boldsymbol{\beta},\mathbf{S})$ olup $\mathbf{S}$ matrisi k geçiş durumu arasındaki geçiş olasılıklarını içeren $k \times k$ boyutlu matrisi ifade etmektedir. $k=3$ için Şekil 5.2'de tüm durumlar arasındaki geçişler gösterilmiştir.



Şekil 5.2. Geçiş durumlarına ilişkin diyagram.

Bu durumda N rassal değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$P\{N=n\} = \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{S}^{n-1}\mathbf{t}',$$

olup burada $\mathbf{t}'$ geçiş durumlarından yutucu durumlara geçiş olasılıklarını içeren kolon vektörüdür. 0, 1 ve 2 ile ifade edilen olayların gerçekleşme olasılıkları sırasıyla $1-p_1-p_2$, p_1 ve p_2 olduğundan

$$\mathbf{S} = \begin{array}{c} \\ \text{GD } 1 \\ \text{GD } 2 \\ \vdots \\ \text{GD } k-1 \\ \text{GD } k \end{array} \begin{bmatrix} 1-p_1-p_2 & p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-p_1-p_2 & 0 & p_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1-p_1-p_2 & 0 & 0 & \cdots & p_1 \\ 1-p_1-p_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{k\times k}$$

elde edilir. GD 1, GD 2, ..., GD $k-1$ durumlarından yalnızca YD 1'e; GD k durumundan YD 2 veya YD 3 durumuna geçiş mümkün olduğundan ve GD 1, GD 2, ..., GD $k-1$ durumlarından YD 1'e geçiş olasılığı p_2 ve GD k durumundan YD 2 veya YD 3 durumuna geçiş olasılığı p_1+p_2 olduğundan

$$\mathbf{t}' = \begin{bmatrix} p_2 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_2 \\ p_1+p_2 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Sonuç

N rassal değişkenin beklenen değeri, $E(N) = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{I}-\mathbf{S})^{-1}\mathbf{e}'$ kullanılarak

$$E(N) = \frac{1-p_1^k}{(1-p_1)p_1^k + p_2(1-p_1^k)}$$

elde edilir.

Sonuç

Özel olarak $p_2 = 0$ olduğunda N rassal değişkeni k ncı dereceden geometrik dağılıma sahip olup

$$P\{N = n\} = (1, 0, ..., 0) \begin{bmatrix} 1-p_1 & p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-p_1 & 0 & p_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1-p_1 & 0 & 0 & \cdots & p_1 \\ 1-p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p_1 \end{bmatrix}, n = k, k+1, ...;$$

$$E(N) = \frac{1-p_1^k}{(1-p_1)p_1^k}$$

olarak elde edilir.

Önerme 2.1.2 ile verilen Eş. 2.9 kullanılarak T'nin faz tipi dağılımı;

$$T = \sum_{i=1}^{N} X_i \sim PH_c(\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta}, A \otimes \mathbf{I} + (\mathbf{A}^0\boldsymbol{\alpha}) \otimes \mathbf{S})$$

şeklinde ifade edilir. Bu durumda Eş. 2.6 kullanılarak

$$P(T > t) = (\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta}) exp((\mathbf{A} \otimes \mathbf{I} + (\mathbf{A}^0\boldsymbol{\alpha}) \otimes \mathbf{S})t)\mathbf{e}'$$

güvenilirlik fonksiyonu yazılabilir.

Sonuç

Wald eşitliği kullanılarak T rassal değişkeninin beklenen değeri ya da sisteme ilişkin ortalama yaşam süresi

$$E(T) = E(N)E(X) = \frac{1-p_1^k}{(1-p_1)p_1^k + p_2(1-p_1^k)} E(X)$$

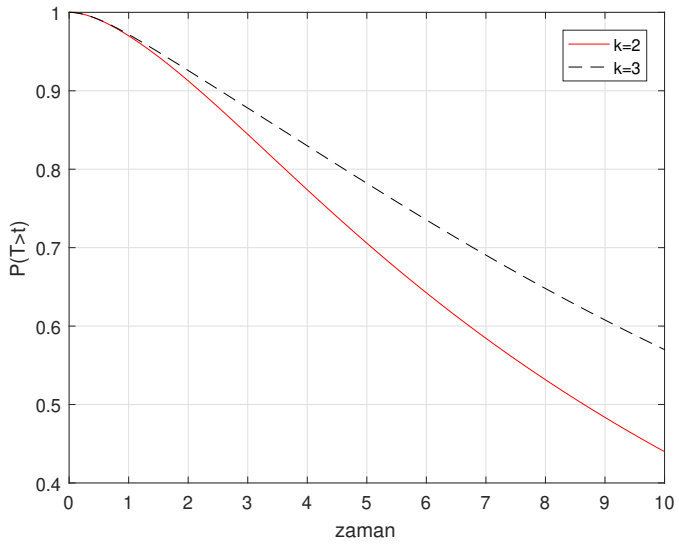
eşitliği yardımıyla hesaplanabilir.

Örnek

$X_i \sim PH_c(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{A})$ olmak üzere, $\boldsymbol{\alpha} = (0, 1)$ ve

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix},$$

olduğu varsayılsın. $p_1 = 0.3$ ve $p_2 = 0.1$ ile $k = 2$ ve $k = 3$ verilen değerleri için $P\{T > t\}$ nin zamana bağlı değişimi Şekil 5.3 verilmiştir. Beklendiği üzere k değerindeki artış ile birlikte güvenilirlik fonksiyonunun değeri artmaktadır.



Şekil 5.3. $\lambda = 1$, $k = 2$ ve $k = 3$ için $P\{T > t\}$ zamana bağlı grafiği

Ayrıca, $\lambda = 1$ için $E(X_i) = \frac{2}{\lambda} = 2$ olup, Çizelge 5.1'de sistemin ortalama yaşam süresi k, p_1 ve p_2'nin bazı değerleri için hesaplanmıştır. Çizelge 5.1'den görüldüğü üzere p_1 ve p_2 değerlerinin herhangi birinde bir artış olduğu zaman $E(T)$ değeri azalmaktadır.

Çizelge 5.1. Ortalama yaşam süresi

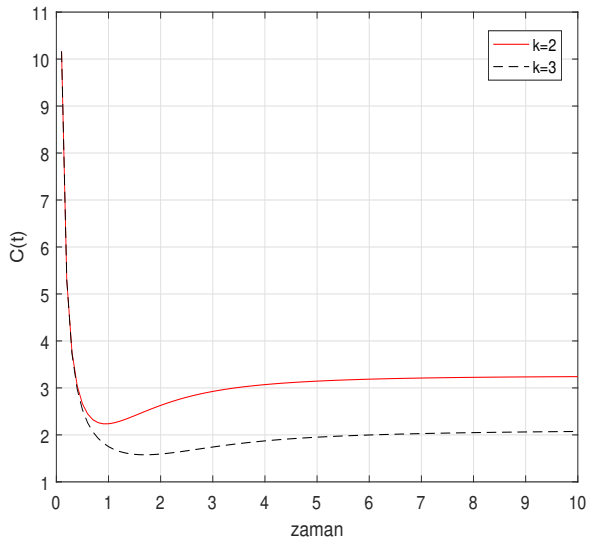
k	p_1	p_2	$E(T)$
2	0.3	0.1	11.818
	0.3	0.2	7.428
	0.4	0.1	9.334
3	0.3	0.1	16.746
	0.3	0.2	9.114
	0.4	0.1	14.182

5.3. Sayısal Sonuçlar

$X_i \sim PH_c(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{A})$ olmak üzere, $\boldsymbol{\alpha} = (0, 1)$ ve

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix},$$

olduğu varsayılsın. $p_1 = 0.6$, $p_2 = 0.1$ ve $\lambda = 2$ ile c_1 ve c_2'nin verilen bazı değerleri için Eş. 5.1 ile verilen $C(t)$'nin zamana bağlı değişimi Şekil 5.4'de verilmiştir.



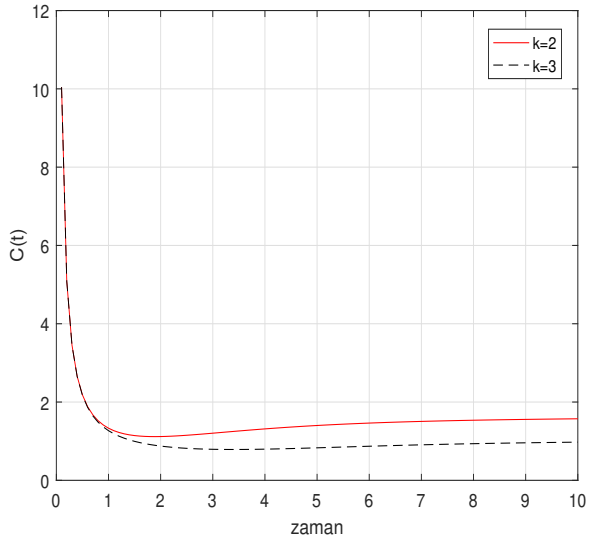
Şekil 5.4. Erlang dağılıma ait $\lambda = 2$, $c_1 = 1$ ve $c_2 = 10$ için $C(t)$'nin zamana bağlı grafiği

Çizelge 5.2. Erlang Dağılıma ait optimal değiştirme zamanı ve ortalama maliyet

k	c_1	c_2	t^*	$C(t)$
2	1	5	1.7	1.4779
		10	1.0	2.2359
		50	0.5	5.3904

k	c_1	c_2	t^*	$C(t)$
3	1	5	2.7	0.9902
		10	1.8	1.5763
		50	0.7	4.7758

Çizelge 5.2'den görüldüğü üzere, k değerindeki artış optimal değiştirme zamanının artmasına neden olmaktadır.

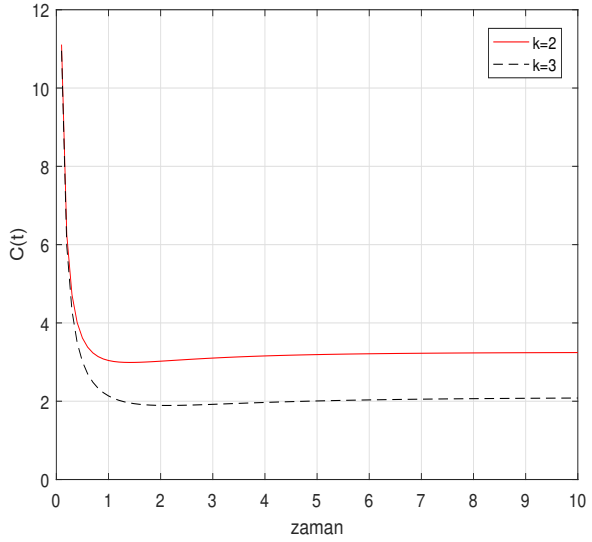


Şekil 5.5. Erlang dağılıma ait $\lambda = 1$, $c_1 = 1$ ve $c_2 = 10$ için $C(t)$'nin zamana bağlı grafiği

Benzer şekilde $X_i \sim PH_c(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{A})$ $\boldsymbol{\alpha} = (1)$ ve

$$\mathbf{A} = \left[-\lambda\right],$$

şeklinde üstel dağılıma sahip olduğu varsayılsın. Bu durumda, $\lambda = 1$, $p_1 = 0.6$ ve $p_2 = 0.1$ ile c_1 ve c_2'nin verilen bazı değerleri için Eş. 5.1 ile verilen $C(t)$'nin zamana bağlı değişimi Şekil 5.6'de verilmiştir.



Şekil 5.6. Üstel dağılıma ait $\lambda = 1$, $c_1 = 1$ ve $c_2 = 10$ için $C(t)$'nin zamana bağlı grafiği

Çizelge 5.3. Üstel Dağılıma ait optimal değiştirme zamanı ve ortalama maliyet

k	c_1	c_2	t^*	$C(t)$
2	1	5	∞	1.6255
		10	1.5	2.9903
		50	0.5	10.3812

k	c_1	c_2	t^*	$C(t)$
3	1	5	∞	1.0521
		10	2.2	1.8918
		50	1.0	6.9018

Çizelge 5.3'den görüldüğü üzere, k değerindeki artış optimal değiştirme zamanının artmasına ve maliyetin azalmasına neden olmaktadır.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında faz tipi dağılımlar ve bazı özellikleri üzerinde durulmuş, bu dağılım ailesinin güvenilirlik şok modellerinin analizinde nasıl kullanılabileceği gösterilmiştir. Tanımlanmış yeni bir karma şok modeli altında faz tipi dağılımların özellikleri kullanılarak sisteme ilişkin güvenilirlik karakteristikleri matrisler aracılığıyla ifade edilmiştir. MATLAB ortamında yazılmış kodlar ile hesaplamalar oldukça kolay bir şekilde yapılmıştır. Tanımlanmış şok modeli altında sistem bozuluncaya kadar sistemin maruz kaldığı toplam şok sayısına ilişkin faz tipi gösterim elde edildikten sonra faz tipi dağılımların birleşik toplamlar altındaki kapanış özelliği kullanılarak sistemin güvenilirlik fonksiyounu elde edilmiştir. Bu yöntemin yeni tanımlanacak şok modelleri için kullanılabileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

1. Yang, X., Alfa, A. S. (2009). A class of multi-server queueing system with server failures. *Computers & Industrial Engineering*, 56, 33-43.

2. Neuts, M. F., Meier, K. S. (1981). On the use of phase type distributions in reliability modelling of systems with two components. *OR Spektrum*, 2(4), 227-234.

3. Eryilmaz, S. (2015). Dynamic assessment of multi-state systems using phase-type modeling. *Reliability Engineering and System Safety*, 140, 71-77.

4. Eryilmaz, S. (2017). On compound sums under dependence. *Insurance: Mathematics and Economics*, 72, 228-234.

5. Maier, R.S. (1993). Phase-type distributions and the structure of finite Markov chains. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 46, 449-453.

6. Eryilmaz, S. (2014). Geometric distribution of order k with a reward. *Statistics & Probability Letters*, 92, 53-58.

7. Tank, F., Eryilmaz, S. (2014). The distributions of sum, minima and maxima of generalized geometric random variables. *Statistical Papers*, 56, 1191-1203.

8. He, Q. M. (2014). *Fundamentals of Matrix-Analytic Methods*. NewYork: Springer, 22-43.

9. Eryilmaz, S. (2017). Phase type stress-strength models with reliability applications. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 47, 954-963.

10. Eryilmaz, S. (2010). On system reliability in stress-strength setup. *Statistics & Probability Letters*, 80, 834-839.

11. Gut, A.(1990), Cumulative Shock Models. *Advances in Applied Probability*, 22(2), 504-507.

12. Shanthikumar, J. G., Sumita, U. (1983). General shock models associated with correlated renewal sequences. *Journal of Applied Probability*, 20, 600-614.

13. Mallor F., Omey E. (2001). Shocks, runs and random sum. *Journal of Applied Probability*, 38(2), 438-448.

14. Li, Z., Kong, X. (2007). Life behavior of [delta]-shock model. *Statistics & Probability Letters*, 77(6), 577-587.

15. Gut, A.(2001). Mixed shock models. *Bernoulli*, 7(3), 541–555.

16. Ahmad R., Kamarudin S. (2012). An overview of time-based and condition-based maintenance in industrial application. *Computers & Industrial Engineering*, 63(1), 135-149.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler



Soyadı, Adı	:	Mustafa TEKİN
Uyruğu	:	T.C.
Doğum tarihi ve yeri	:	01.01.1988 KIRŞEHİR
Medeni hali	:	Bekar
Telefon	:	0534 629 06 79
e-mail	:	mustafa.tekin@gazi.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi/Harekat Araştırması	Devam ediyor.
Lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik Bölümü	2010
Lise	Ankara Gazi Lisesi	2004

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2009 - Halen	Orman ve Su İşleri Bakanlığı	Programcı

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

-

Hobiler

Yüzme, Koşma, Ahşap yakma sanatı.



GAZİ GELECEKTİR...