
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

NİLPOTENT OLMAYAN HER ALTGRUPLARI ALTNORMAL OLAN GRUPLAR

Tuğçe KÜÇÜKOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

EYLÜL 2018

Tuğçe KÜÇÜKOĞLU tarafından hazırlanan ''NİLPOTENT OLMAYAN HER ALTGRUPLARI ALTNORMAL OLAN GRUPLAR'' adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Aynur ARIKAN

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. .....

Başkan: Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU

Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. .....

Üye: Doç. Dr. Sevgi ATLIHAN

Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. .....

Tez Savunma Tarihi: 19/09/2018

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğimi onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Tuğçe KÜÇÜKOĞLU

19/09/2018

NİLPOTENT OLMAYAN HER ALTGRUPLARI ALTNORMAL OLAN GRUPLAR

(Yüksek Lisans Tezi)

Tuğçe KÜÇÜKOĞLU

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Eylül 2018

ÖZET

Bu tezde Howard SMITH'in ''Groups with all non-nilpotent subgroups subnormal'' adlı makalesi çalışılmıştır. Bu makalede her nilpotent olmayan altgrubu altnormal olan lokal sonlu gruplar incelenmiştir. Bu özelliğe sahip G grubunun hemen hemen lokal nilpotent ve ek olarak hipermerkez olması halinde nilpotent-by-sonlu olduğu, Baer grup olması halinde ise de her altgrubunun altnormal olduğu ayrıntılı bir şekilde gösterilmiştir.

Bilim Kodu : 20401
Anahtar Kelimeler : Lokal sonlu grup, altnormal altgrup, nilpotent grup, Baer grup
Sayfa Adedi : 71
Danışman : Doç. Dr. Aynur ARIKAN

GROUPS WITH ALL NON-NILPOTENT SUBGROUPS SUBNORMAL

(M. Sc. Thesis)

Tuğçe KÜÇÜKOĞLU

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

September 2018

ABSTRACT

In this thesis, the article written by Howard SMITH titled ‘‘Groups with all non-nilpotent subgroups subnormal’’ is studied. In this work, locally finite group in which every non-nilpotent subgroups subnormal have been studied. It is shown that a group with this property is almost locally nilpotent and in addition that G is a hypercentral group, that is, nilpotent-by-finite which and in addition G is a Baer group, every subgroup of G is subnormal.

Science Code : 20401
Key Words : Locally finite group, subnormal subgroup, nilpotent group, Baer group
Page Number : 71
Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Aynur ARIKAN

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında ve tamamlanmasında yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, tecrübelerinden yararlandığım sayın hocam Doç. Dr. Aynur ARIKAN'a, verdiğim her kararda beni her zaman destekleyen aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET……. iv

ABSTRACT…….. v

TEŞEKKÜR…….. vi

İÇİNDEKİLER……. vii

SİMGELER VE KISALTMALAR……... viii

1. GİRİŞ…….. 1

2. BAZI HAZIRLIK TANIM VE SONUÇLARI…… 5

3. ÇÖZÜLEBİLİRLİK…… 29

4. ÖNERME 1.3 ÜN İSPATI…….. 43

5. BAER GRUPLAR…….. 53

6. SONUÇ……... 59

KAYNAKLAR……. 69

ÖZGEÇMİŞ…….. 71

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur. G ve K birer grup, X ile Y, G nin boştan farklı altkümeleri, $x, y \in G$, n bir tamsayı, p bir asal sayı ve π de asal sayıların bir kümesi olsun.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\mathbb{Z} = \{\dots, -\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots\}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{N} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots\}$	Doğal sayılar kümesi
$\boldsymbol{H \leq G, H < G, H \lhd G}$	H, G nin altgrubu, öz altgrubu, normal altgrubu
$\boldsymbol{G/H}$	G nin H ile bölüm grubu
$\boldsymbol{G \cong K}$	G grubu ile H grubu izomorf
$\boldsymbol{\lvert G: H \rvert}$	H nın G içindeki indeksi
$\boldsymbol{o(x)}$	x in G içindeki mertebesi
$\boldsymbol{\langle x \rangle}$	x elemanı tarafından üretilen devirli grup
$\boldsymbol{\langle X, Y \rangle}$	X ve Y tarafından üretilen grup
$\boldsymbol{G^n}$	$\langle g^n : g \in G, n \in \mathbb{Z} \rangle$
$\boldsymbol{x^y}$	$y^{-1}xy$, x in y ile eşleniği
$\boldsymbol{H^x}$	$x^{-1}Hx$
$\boldsymbol{G \times H}$	G ile H nın direkt çarpımı
$\boldsymbol{G \rtimes H}$	G nin H ile yarı direkt çarpımı
$\boldsymbol{[x, y]}$	$x^{-1}y^{-1}xy$, x ile y nin komütatör çarpımı
$\boldsymbol{[X, Y]}$	$\langle [x, y] : x \in X, y \in Y \rangle$, X ile Y nin komütatör altgrubu
$\boldsymbol{G'}$	$[G, G]$, G nin komütatör altgrubu
$\boldsymbol{C_G(X)}$	X in G içindeki merkezleyeni
$\boldsymbol{C_G(K/L)}$	$\{g \in G \mid her\ k \in K\ için\ [g, k] \in L\}$
$\boldsymbol{N_G(H)}$	H nın G içindeki normalleyeni
$\boldsymbol{Z(G)}$	G grubunun merkezi
$\boldsymbol{X^G}$	X in G içindeki normal kapanışı
$\boldsymbol{H\ sn\ G}$	H altgrubu G grubunun altnormal altgrubu
$\boldsymbol{G_p}$	G nin p-asal komponenti
$\boldsymbol{C_{p^\infty}}$	quasidevirli grup, Prüfer p-grup

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{H\ char\ G}$	*H*, *G* nin karakteristik altgrubu
$\boldsymbol{Aut(G)}$	*G* nin tüm otomorfizmalarının kümesi
$\boldsymbol{End(G)}$	*G* nin tüm endomorfizmalarının kümesi
$\boldsymbol{[n]}$	*n* den küçük en büyük tamsayı
$\boldsymbol{c = c(r)}$	*r* ye bağlı olarak değişen nilpotentlik sınıfı
$\boldsymbol{O_{\pi}(G)}$	*G* nin π-radikali

1. GİRİŞ

Her nilpotent olmayan altgrubu altnormal olan torsiyonsuz lokal (çözülebilir bir grubun sonlu genişlemesi) ise grubun nilpotent olduğu [13] de gösterilmiştir. Heineken-Mohamed tarafından [6] da inşa edilen gruplar lokal sonlu gruplar için böyle bir sonucun olmadığını gösterir. Heineken-Mohamed tarafından inşa edilen bu gruplar her öz altgrubu altnormal ve nilpotent olan fakat kendisi nilpotent olmayan lokal sonlu, sonsuz *p*-gruplarıdır. Lokal sonlu gruplar için böyle bir grubun olmadığına en kolay örneklerden biri; $G = A \rtimes \langle x \rangle$ grubudur. Burada A, C_{2^∞} ile izomorf bir grup ve x ise A nın elemanlarını terslerine götüren bir otomorfizmadır. Böylece G grubu her öz altgrubu nilpotent olan fakat kendisi nilpotent olmayan bir grup örneğidir. Nilpotent olmayan altgrupları altnormal olan lokal sonlu gruplar hakkında birçok sonuç verilebilir. Fakat bu makalede bu grupların sınıflandırılması amaçlanmıştır. Verilen sonuçlar bir sınıflandırma yapmak için yeterli olmadığını gösterir. Bunun nedeni her altgrubu altnormal olan lokal sonlu *p*-grupları bilgilerin tam olmamasıdır.

MÖHRES, her altgrubu altnormal olan bir grubun çözülebilir [10], ASAR ise her öz altgrubu nilpotent olan lokal sonlu grupların çözülebilir [5] olduğunu göstermiştir. Bu çalışmada ise bu sonuçlar kullanılarak her altgrubu nilpotent ya da altnormal olan lokal sonlu grupların çözülebilir olduğu gösterilecektir. Verilecek bazı sonuçlarla bu konu hakkında daha fazla şey söylenebilir.

Teorem 1.1.

G, lokal (çözülebilir bir grubun sonlu genişlemesi) olan bir grup ve *G* nin her nilpotent olmayan altgrubu altnormal altgrup olsun. O zaman *G* çözülebilirdir. Eğer L, *G* nin lokal sonlu radikali ise o zaman G/L torsiyonsuz nilpotent bir gruptur.

Teorem 1.1 in hipotezi, her nilpotent olmayan altgrubu altnormal olan lokal genelleştirilmiş radikal grup olarak zayıflatıldığında *G* bir lokal çözülebilir gruptur. Buradaki bazı detaylar [13] deki Sonuç 1 in ispatında nasıl yapıldığı verildiği için bu detaylar bu çalışmada ihmal edilecektir. Hipotezi daha da zayıflatabilmek için sadece *G* nin lokal dereceli olması yeterlidir. Fakat bu problemin ele alınması yakında çok zor ve iyi bilinen bir problemin ortaya çıkmasına yol açar; her altgrubu sonlu veya sonlu indeksli olan sonlu üreteçli, rezidually sonlu *p*-grubun sonlu olması gerekir. Buna göre burada daha genel bir soru

üzerine söyleyecek bir şey yoktur. Bununla birlikte aşağıdakileri belirtebiliriz.

Teorem 1.2.

G bir lokal dereceli grup ve bir *n* pozitif tamsayısı için *G* nin her nilpotent olmayan altgrubunun *G* deki altnormallik indeksi en fazla *n* olsun. O zaman *G* bir çözülebilir gruptur.

Kabul edelim ki *G*, Teorem 1.1 in hipotezini sağlayan bir sonlu grup ve *H*, *G* nin kompozisyon faktörü olsun. O zaman *H* nın her öz altgrubu nilpotenttir ve dolayısıyla SCHMİDT'den *H* çözülebilirdir. Bundan dolayı *G* çözülebilirdir ve böylece Teorem 1.1 lokal çözülebilir gruplar için temel teşkil eder. Lokal sonlu gruplara dönüldüğünde aşağıdaki sonuç Teorem 1.5 için gereklidir.

Önerme 1.3.

G bir lokal sonlu grup ve *G* nin her nilpotent olmayan altgrubu altnormal altgrup olsun. O zaman *G* bir hemen hemen lokal nilpotent gruptur.

Sonsuz grup da bile Önerme 1.3 sağlanır. *G* hemen hemen lokal nilpotenttir ve *G* lokal nilpotent grup değildir. G, S_3 ün bir kopyası ve sonsuz elementer abelyan *p*-grubu olan bir *A* grubunun direkt çarpımı olarak yazabilir.

G, Önerme 1.3 ün hipotezini sağlayan bir grup ve ek olarak Baer grup yani; *G* nin her sonlu üreteçli altgrubu *G* de altnormal olsun. *G* nin her altgrubunun altnormal olup olmadığını sormak doğru olur ve aşağıdaki sonuç bu durumu ifade eder.

Teorem 1.4.

G bir lokal sonlu grup ve *G* nin her nilpotent olmayan altgrubu altnormal altgrup olsun. Eğer *G* bir Baer grup ise o zaman *G* nin her altgrubu altnormal altgruptur.

Lokal sonlu gruplara geri dönersek esas soru grubun sonlu indeksli Baer radikaline sahip olup olmadığıdır. Bu soruya şöyle bir cevap verilir:

Teorem 1.5.

G bir lokal sonlu grup ve *G* nin her nilpotent olmayan altgrubu altnormal altgrup olsun. O zaman *G*, her altgrubu altnormal altgrup olan sonlu indeksli normal bir *K* altgrubuna sahiptir.

Bir sonraki sonuç Teorem 1.5 teki *G* grubunun yapısı hakkında daha fazla şey söyler. MÖHRES [9] her altgrubu altnormal olan hipermerkez torsiyon bir grubun nilpotent olduğu kanıtlamıştır ve böylece Teorem 1.5 in sonucu aşağıdaki gibidir.

Teorem 1.6.

G bir lokal sonlu hipermerkez grup ve *G* nin her nilpotent olmayan altgrubu altnormal altgrup olsun. O zaman *G*, bir nilpotent grubun sonlu genişlemesidir.

$C_{2^\infty} \rtimes \langle x \rangle$ grubu hipermerkezdir ve her öz altgrubu nilpotent olmasına rağmen kendisi nilpotent değildir.

Bu bölümü birkaç sonuç sıralayarak sonuçlandıracağız.

ROSEBLADE [11] in en bilinen teoremine göre eğer *X*, her altgrubu en çok *r* sınıfından altnormal olan grup ise *X* en çok $c = c(r)$ sınıfından nilpotent bir gruptur. SMİTH in [12] Lemma 4 ten yararlanarak eğer *G*, her altgrubu altnormal ve her asal komponenti nilpotent olan lokal sonlu bir grup ise o zaman *G* nilpotenttir.

2. BAZI HAZIRLIK TANIM VE SONUÇLARI

2.1. Tanım

G bir grup ve *X*, *G* nin boş kümeden farklı altkümesi olsun. *G* nin *X* i kapsayan altgruplarının arakesitine *X tarafından üretilen bir grup* denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir. *X*, *G* nin bir altgrubu ise $X = \langle X \rangle$ olur. Eğer *n* bir pozitif tamsayısı için $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$ olmak üzere *G* grubu $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesi tarafından üretiliyorsa *G* ye *n-üreteçli bir grup* denir. Bir *n* tamsayısı için eğer bir grup *n*-üreteçli ise bu gruba *sonlu üreteçli grup* denir. 1-üreteçli $\langle x \rangle = \langle \{x\} \rangle$ grubuna ise *devirli grup* denir [2].

2.2. Tanım

G bir grup ve $H \leq G$ olsun. *H* nın *G* içindeki sağ (sol) kosetlerinin kardinalitesine *H nın G içindeki indeksi* denir ve $|G: H|$ biçiminde yazılır [2].

2.3. Tanım

G aşikar olmayan bir grup olsun. *G* nin aşikar olmayan bir öz normal altgrubu yoksa *G* ye *basit grup* denir [2].

2.4. Tanım

G bir grup olsun. *G* nin altgruplarının faktör grubuna *G* nin *kesimi* denir [3].

2.5. Tanım

G bir abelyan grup ve *p* bir asal sayı olsun. Her $x \in G$ için $x^p = 1$ ise *G* ye bir *elementer abelyan p-grup* denir. Bu gruplar *p*-mertebeli devirli grupların direkt çarpımı olarak yazılabilir [2].

2.6. Tanım

G bir grup olsun. $N \lhd G$ ve $G = HN$ ve $H \cap N = 1$ olacak şekilde *G* nin bir *H* altgrubu var olsun. O zaman *G* ye *N* ve *H* nın iç yarı direkt çarpımı denir ve $G = N \rtimes H$ ya da $G = H \ltimes N$ biçiminde gösterilir [2].

2.7. Tanım

G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Eğer her $\alpha \in End(G)$ için $\alpha(H) \leq H$ oluyorsa *H* ya *G* nin *fully-invariant altgrup* denir. Eğer her $\alpha \in Aut(G)$ için $\alpha(H) \leq H$ oluyorsa H ya G nin *karakteristik altgrubu* denir ve $H\ char\ G$ biçiminde gösterilir [2].

2.8. Tanım

G bir grup ve $x, g \in G$ olsun. $x^g = g^{-1}xg$ elemanına *x in g ile konjügesi* ya da *eşleniği* denir. *X* ve *Y*, *G* grubunun boş kümeden farklı altkümeleri olsun. $X^Y = \langle x^y | \ x \in X, y \in Y \rangle$ olarak tanımlanır. *H*, *G* grubunun altgrubu olmak üzere $H^G = \langle H^g | \ g \in G \rangle$ grubuna *H* nın *G* içindeki *normal kapanışı* denir. Bu grup *G* nin *H* yı içeren en küçük normal altgrubudur[2].

2.9. Tanım

G bir grup ve $x, y \in G$ olsun. $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x^y$ biçiminde tanımlanan elemana *x ve y nin komütatörü* denir. $[x]=[x, \ {}_0y]= x$ ve $[x, \ {}_1y]= [x, y]$ olarak kabul edilirse $n \geq 2$ olmak üzere *n* ağırlıklı basit bir komütatör

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] = [[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}], x_n]$$

olarak tanımlanır. X_1 ve X_2, *G* grubunun boş kümeden farklı altkümeleri olmak üzere $[X_1, X_2] = \langle [x, y] : x \in X_1, y \in X_2 \rangle$ kümesine X_1 *ve* X_2 *nin komütatör altgrubu* denir. Genel olarak $[X_1] = \langle X_1 \rangle$ ve $n \geq 2$ olmak üzere

$$[X_1, X_2, \dots, X_n] = [[X_1, X_2, \dots, X_{n-1}], X_n]$$

olarak tanımlanır. Özel olarak $X_1 = X_2 = G$ ise $[G, G] = G'$ komütatör grubuna G *nin komütatör (derived) altgrubu* denir. Eğer $G = G'$ ise G grubuna *mükemmel grup* adı verilir [2].

2.10. Tanım

G bir grup ve Ω boştan farklı bir küme olsun. Kabul edelim ki

$G \times \Omega \to \Omega$
$(x\ ,\ a) \to a^x$

bir fonksiyon olsun. Eğer

(a) $1 \in G$ nin birimi $a^1 = a$,
(b) Her $x, y \in G$ için $a^{xy} = (a^x)^y$

oluyorsa *Ω üzerinde G nin etkisi* veya *G, Ω üzerine etki eder* denir [2].

2.11. Tanm

G bir grup ve S boştan farklı bir küme olsun. G, S üzerine etki etsin. Her $x \in S$ için $G_x = \{g \in G | x^g = x\}$ kümesine *x in dengeleyeni* denir.

Her $x, x' \in S$ için $x' = gx \ \Rightarrow\ x' \approx x$ biçiminde tanımlı bağıntı S de bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntıya göre x in denklik sınıfı $\bar{x} = \{x^g | g \in G\}$ kümesine *G nin bir yörüngesi* denir[2].

2.12. Tanım

G bir grup ve $a \in G$ olsun. $C_G(a) = \{x \in G | xa = ax\}$ kümesine *a elemanının G içindeki merkezleyeni* denir. $C_G(a)$, G nin altgrubudur. Aynı zamanda

$\bigcap_{z \in G} C_G(z) = \{z \in G | her\ x \in G\ için\ zx = xz\}$

grubu G nin karakteristik bir altgrubudur ve *G nin merkezi* olarak adlandırılır ve $Z(G)$ ile gösterilir.

$H \leq G$ olmak üzere H nın G içindeki merkezleyeni

$$C_G(H) = \{g \in G | her\ h \in H\ için\ gh = hg\}$$

olarak tanımlanır. O zaman $Z(G) \leq C_G(H) \leq G$ dir.

S, G nin altgruplarından oluşan bir küme ve $H \leq G$ olsun. H, S üzerine eşlenikleme şeklinde etkisi $h \in H$ ve $K \in S$ olmak üzere $(h, K) = h^{-1}Kh$ biçiminde tanımlanır. $K \in S$ nin H içindeki $\{h \in H | h^{-1}Kh = K\}$ dengeleyenine *K nın H içindeki normalleyeni* denir ve $N_H(K)$ ile gösterilir. $H = G$ ise $N_G(K)$ ya *K nın normalleyeni* denir. Eğer H, G nin altgrubu ise $N_G(H)$, H nın normal olduğu G nin en büyük altgrubudur [2,14].

2.13.Tanım

G bir grup ve $K \lhd G$, $K \leq H \leq G$ olsun. $K \leq J$ ve $J/K = C_{G/K}(H/K)$ olmak üzere G içinde H/K nın merkezleyeni G nin J altgrubu olarak tanımlanır. $J = C_G(H/K)$ yazılır. O zaman

$$C_G(H/K) = \{g \in G | her\ h \in H\ için\ [g, h] \in K\}$$

dır. Bununla birlikte $H \lhd G$ ise o zaman $C_G(H/K) \lhd G$ dir [14].

2.14. Tanım

Bir G grubu Ω kümesi üzerine etki etsin ve $\Gamma \subseteq \Omega$ olsun. Eğer her $x \in G$ için $\Gamma^x = \Gamma$ ise Γ kümesine Ω kümesinin *G-invariyant altkümesi* denir. Kısaca Γ nın G-invariant olması için gerek ve yeter şart Γ nın G nin yörüngelerinin birleşimi olmasıdır [14].

2.15. Tanım

G bir grup ve p bir asal sayı olsun. Eğer her $g \in G$ için $o(g) = p^k$ olacak şekilde $k \geq 0$ tamsayısı varsa *G* ye *p-grup* denir. Eğer $H \leq G$ olmak üzere *H* altgrubu bir *p*-grup ise *H* ya *G* nin *p-altgrubu* denir. *P*, *G* nin altgrubu olmak üzere eğer *P*, *G* nin bir maksimal *p*-altgrubu ise *P* ye *G* nin Sylow *p*-altgrubu denir [2].

2.16. Tanım

G bir grup ve π asal sayıların boştan farklı bir kümesi olsun. $n \geq 1$ bir tamsayı olmak üzere *n* nin her asal çarpanı π ye ait ise *n* tamsayısına π-sayısı denir. $g \in G$ ve $o(g) = n$ olmak üzere eğer *n* bir π-sayısı ise g ye π-elemanı denir. *G* nin her elemanı π-elemanı ise *G* ye bir π-grubu denir. $\pi = \{p\}$ ise o zaman mertebesi π-sayısı olan elemana *p*-eleman ve her elemanı *p*-eleman olan gruba *p*-grup denir.

π kümesinde olmayan asal sayıların kümesi π' ile gösterilir. π tek bir *p* asalından oluşuyorsa $\pi' = \{p\}'$ yerine p' notasyonu kullanılır. n_π ve $n_{\pi'}$ sırasıyla π-sayısı ve π'-sayısı olmak üzere her *n* tam sayısı n_π ve $n_{\pi'}$ nin tek türlü çarpımı olarak yazılabilir. n_π ye *n* nin π-komponenti denir [14].

2.17. Tanım

F bir abelyan grup olsun. Eğer *F* grubu sonsuz devirli altgruplarının direkt çarpımı biçiminde yazılabiliyorsa *F* ye *serbest abelyan grup* denir [18].

2.18. Tanım

Bir grubun her elemanın mertebesi sonlu ise bu gruba *torsiyon (periyodik) grup* denir. Eğer bir grubun her elemanının mertebesi sonlu ve bir pozitif tamsayı ile sınırlı ise o zaman bu gruba *üssü sonlu olan grup* denir. Bir grubun üssü grubun her elemanının en küçük ortak katıdır. Birim elemanı dışındaki her elemanının mertebesi sonsuz olan gruba *torsiyonsuz (aperiyodik) grup* denir [2].

2.19. Tanım

G bir abelyan torsiyon grup ve *p* bir asal sayı olsun. G_p kümesi *G* nin mertebesi *p* nin kuvveti olan elemanlarının oluşturduğu bir küme olsun. G_p, *G* nin bir altgrubudur ve G_p ye *G* nin *p-asal komponenti* denir. Ayrıca *G*, *p*-asal komponentlerinin direkt toplamıdır. [2].

2.20. Tanım

G bir toplamsal grup ve $g \in G$ olsun. Eğer $g_1 \in G$ olmak üzere $g = mg_1$ olacak şekilde bir *m* pozitif tamsayısı varsa *g* elemanına *G* içinde *bölümlü (divisible)* denir. Eğer *G* grubunun her elemanı her pozitif tamsayı için bölümlü ise *G* ye *bölümlü grup* denir. Bölümlü grupların bölüm grupları da bir bölümlü gruptur. Fakat altgrupları bölümlü olmak zorunda değildir[2].

Eğer bir abelyan grubun aşikar olmayan bir bölümlü altgrubu yoksa bu gruba *indirgenmiş (reduced) grup* denir[2].

2.21. Tanım

$G = \langle u_i | u_0 = 1,\ {u_{i+1}}^p = u_i,\quad i \in \mathbb{N} \rangle$ biçiminde tanımlanan *G* grubuna Prüfer *p*-grup ya da quasidevirli *p*-grup ya da C_{p^∞} tipinden grup denir.

C_{p^∞} tipinden bir grup, abelyan sonsuz *p*-grubudur ve her öz altgrubu bir devirli *p*-gruptur[2].

2.22. Tanım

$\mathfrak{X}$, elemanları gruplar olan bir küme olsun. Eğer $\mathfrak{X}$

i. $\mathfrak{X}$, mertebesi 1 olan grubu içerir,
ii. $G_1 \cong G \in \mathfrak{X}$ daima $G_1 \in \mathfrak{X}$

özelliklerinin ikisine de sahipse $\mathfrak{X}$ e *grup-teorik sınıf* ya da *grupların sınıfı* denir. Örneğin her sonlu gruplar ve her abelyan gruplar bir grup-teorik sınıf oluştururlar [2].

2.23. Tanım

$\mathfrak{X}$ ve $\mathfrak{Y}$ iki grup sınıfı olsun. $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ *genişlemesi* veya *sınıf çarpımı* şöyle tanımlıdır: Bir G grubunun $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart G nin öyle bir N normal altgrubu vardır ki $N \in \mathfrak{X}$ ve $G/N \in \mathfrak{Y}$ dir. Burada G grubuna $\mathfrak{X}$ *tipindeki bir grubun* $\mathfrak{Y}$ *tipindeki bir gruba genişlemesi* ($\mathfrak{X}$-*by*-$\mathfrak{Y}$) grup denir [2].

2.24. Tanım

G, N ve Q birer grup olmak üzere eğer $M \cong N$ ve $G/M \cong Q$ olacak şekilde bir $M \lhd G$ varsa G grubuna N grubunun Q grubu ile bir *genişlemesi* denir [2].

2.25. Tanım

$\mathfrak{X}$, grupların bir sınıfı ve G bir grup olsun. $N \lhd G$ olmak üzere G/N bir $\mathfrak{X}$-grup ise bu şekilde her N normal altgrubunun kesişimine G nin $\mathfrak{X}$-*reziduali* denir [2].

2.26. Tanım

G bir grup ve $\mathfrak{X}$ bir grup sınıfı olsun. Her $1 \neq x \in G$ için $x \notin N_x$ ve $G/N_x \in \mathfrak{X}$ olacak şekilde G nin bir normal N_x altgrubu varsa G ye *residually* $\mathfrak{X}$-*grup* denir. Bu şartlar altında $\bigcap_{1 \neq x \in G} N_x = 1$ dir [2].

2.27. Tanım

$\mathfrak{X}$ bir grup sınıfı olsun. Eğer bir G grubunun her sonlu alt kümesi bir $\mathfrak{X}$-altgrubu tarafından kapsanıyorsa G ye *lokal* $\mathfrak{X}$-*grup* denir. Eğer $\mathfrak{X}$, G nin altgruplarının bir özelliği ise G nin lokal $\mathfrak{X}$-grup olması için sonlu üreteçli her altgrubunun bir $\mathfrak{X}$-grup olması gerekir. Dolayısıyla bir grubun lokal sonlu veya lokal nilpotent olması demek sırasıyla her sonlu üreteçli altgruplarının sonlu veya nilpotent olması demektir [2].

2.28. Tanım

$\mathfrak{X}$ grupların bir sınıfı ve *G* bir grup olsun. *G* nin normal $\mathfrak{X}$-altgruplarının çarpımına *G* nin $\mathfrak{X}$-*radikali* denir. Özel olarak bir grubun her normal lokal nilpotent altgrubunun çarpımına *Hirsch-Plotkin radikali* denir. Dolayısıyla Hirsch-Plotkin radikali tek en büyük maksimal normal lokal nilpotent altgruptur [2].

2.29. Tanım

G bir grup olsun. $S = \{1 = G_0,\ G_1, \dots, G_n = G\}$, *G* nin altgruplarının bir dizisi olsun. Eğer

$$1 = G_0 \lhd\ G_1\ \lhd \cdots \lhd G_n = G$$

ise *S* ye *G* nin bir *sonlu serisi* denir. G_i gruplarına *serinin terimleri* ve G_{i+1}/G_i bölüm gruplarına *serinin faktörleri* denir. Her G_i birbirinden farklı olacak şekilde en küçük *n* pozitif tamsayısına *serinin uzunluğu* denir.

$T = \{H_\alpha : \alpha \leq \beta\}$, G nin bir β ordinaline eşit veya küçük ordinallerle indekslenen *G* nin altgruplarının bir kümesi olsun. Eğer *T* kümesi

(a) $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ise $H_{\alpha_1} \leq\ H_{\alpha_2}$
(b) $H_0 = 1$ ve $H_\beta = G$
(c) $H_\alpha \lhd H_{\alpha+1}$
(d) Eğer λ bir limit ordinali ise $H_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} H_\alpha$ dir.

şartlarını sağlıyorsa *T* ye *artan seri* denir ve $1 = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots H_\beta = G$ biçiminde gösterilir.

Eğer *T* kümesi

(a') $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ise $H_{\alpha_2} \leq\ H_{\alpha_1}$
(b') $H_0 = G$ ve $H_\beta = 1$
(c') $H_{\alpha+1} \lhd H_\alpha$
(d') Eğer λ bir limit ordinali ise $H_\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} H_\alpha$

şartlarını sağlıyorsa T ye *azalan seri* denir ve $1 = H_\beta \ldots \lhd H_1 \lhd H_0 = G$ biçiminde gösterilir[2].

2.30. Tanım

G bir grup olsun. *G* nin bir sonlu serisi

$$1 = H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_n = G$$

G nin artan bir zinciri olsun. Eğer her $0 \leq i < n$ için H_i, H_{i+1} içinde normal yani

$$H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_n = G$$

ise bu zincire *G* nin *altnormal serisi* denir.

G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Bir $d \in \mathbb{N}$ için

$$H = H_d \lhd H_{d-1} \lhd \ldots \lhd H_1 \lhd H_0 = G$$

olacak şekilde *G* nin altgruplarının bir serisi varsa *H* ya *G* nin *altnormal altgrubu* ve *H* nın *altnormallik indeksi n* dir denir ve $H\ sn\ G$ biçiminde gösterilir. Bu altgrup serisinindeki terimler birbirinden farklı olacak şekilde en kısa serinin uzunluğuna *H* nın *G* deki *altnormallik indeksi (defect)* denir [2].

2.31. Tanım

G bir grup ve *X*, *G* nin boştan farklı bir altkümesi olsun. $X^{G,0} = G$ ve her $i \geq 0$ için $X^{G,i+1} = X^{X^{G,i}}$ olarak tanımlansın. O zaman *G* nin

$$\ldots \lhd X^{G,2} \lhd X^{G,1} \lhd X^{G,0} = G$$

serisi elde edilir. Bu seriye *X* in *G* içindeki *normal kapanış serisi* denir. $H \leq G$ ve her $i \geq 0$ için $H_i = H^{G,i}$ olsun. *H* nın *G* içindeki altnormallik uzunluğunun *n* olduğunu kabul edelim.

O zaman *n*, *H* nın *G* içindeki normal kapanış serisinin uzunluğuna eşittir [2].

2.32. Tanım

G bir grup ve *G* nin artan bir

$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots G_\beta = G$

serisi var ve her $\alpha < \beta$ için $G_{\alpha+1}/G_\alpha$ faktörleri abelyan ve λ limit ordinal olmak üzere $G_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} N_\alpha$ oluyorsa *G* ye *hiperabelyan grup* denir. Bir *n* tamsayısı için eğer *G* nin bir

$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G$

serisi olmak üzere her $i = 0,1, \dots, n-1$ için G_{i+1}/G_i faktörleri abelyan ise *G* nin bu serisine *abelyan seri* denir. Abelyan seriye sahip gruplara *çözülebilir grup* denir. Çözülebilir bir grubun en kısa abelyan serisinin uzunluğuna grubun *çözülebilirlik uzunluğu (derived uzunluğu)* denir [2].

2.33. Tanım

G bir grup ve $G^{(0)} = G$ olsun. $i \geq 0$ olmak üzere

$G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$

biçiminde tanımlansın. O zaman

$G = G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq \ \dots$

dir. Bu seriye *G* nin *komütatör serisi* ve her $k \geq 0$ için $G^{(k)}$ ya *G* nın *k yıncı komütatörü* denir. $G^{(1)} = G'$ biçiminde yazılır. Her $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ bölüm grupları abelyandır ve G/G' bölüm grubu *G* nin en büyük abelyan bölüm grubudur. Bu serinin 1 e ulaşmasına gerek yoktur. Eğer bir *n* doğal sayısı için $G^{(n)} = 1$ ise *G* bir çözülebilir gruptur [2].

2.34. Tanım

G bir grup ve *G* nin bir

$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots G_\beta = G$

serisi ve her $\alpha \leq \beta$ için $G_\alpha \lhd G$ ve her $\alpha < \beta$ için $G_{\alpha+1}/G_\alpha \leq Z(G/G_\alpha)$ ise G nin bu serisine *artan merkez seri* denir. Artan merkez seriye sahip gruplara *hipermerkez grup* denir. Eğer $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere her $j \leq n$ için $G_j \lhd G$ ve her $0 \leq j < n$ için $G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i)$ ise *G* nin bu serisine *merkez seri* denir. Merkez seriye sahip gruplara *nilpotent grup* denir. Nilpotent grubun en kısa merkez seri uzunluğuna grubun *nilpotentlik sınıfı* denir [2].

Nilpotent gruplar aşağıda tanımlanan aşağı ve yukarı merkez serileri ile de karakterize edilebilirler [2].

2.35. Tanım

G bir grup ve $Z_0(G) = 1$, $Z_1(G) = Z(G)$ olsun. Eğer α limit ordinal ise

$Z_\alpha(G) = \cup_{\beta<\alpha} Z_\beta(G)$

ve eğer α limit ordinal değil ise

$Z_\alpha(G)/Z_{\alpha-1}(G) = Z(G/Z_{\alpha-1}(G))$

biçiminde tanımlansın. *G* nin kardinalitesi aşılamayacağından $Z_\lambda(G) = Z_{\lambda+1}(G) = \cdots$ olacak şekilde bir en küçük λ ordinali vardır. $Z_\lambda(G)$ ye *G* nin *hipermerkezi* denir ve $Z_\infty(G)$ ile gösterilir. Böylece

$1 = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \cdots$

serisine *G* nin *genelleştirilmiş yukarı merkez serisi* denir.

Eğer $Z_\infty(G) = G$ ise G bir hipermerkez gruptur. Eğer bir n doğal sayısı için $Z_n(G) = G$ ise G nilpotent gruptur. Bu şekilde n tamsayılarının en küçüğü G nin nilpotentlik sınıfına eşittir[2].

2.36. Tanım

G bir grup ve $\gamma_1(G) = G$ olsun. Eğer α limit ordinal ise

$$\gamma_\alpha(G) = \bigcap_{\beta<\alpha} \gamma_\beta(G)$$

ve eğer α limit ordinal değil ise

$$\gamma_\alpha(G) = [\gamma_{\alpha-1}(G), G]$$

biçiminde tanımlansın.

$$\ldots \leq \gamma_2(G) \leq \gamma_1(G) = G$$

serisine G nin *genelleştirilmiş aşağı merkez serisi* denir.

Eğer bir n tamsayısı için $\gamma_{n+1}(G) = 1$ ise G nilpotenttir. Bu şekildeki doğal sayıların en küçüğü n ise G nin nilpotentlik sınıfı n dir [2].

2.37. Tanım

G bir grup ve H, G nin altnormal altgrubu olsun. $K \lhd H$ olmak üzere H/K basit grup ise H/K ya G nin *kompozisyon faktörü* denir [2].

2.38. Tanım

G bir grup ve π asal sayıların boş olmayan bir kümesi olsun. G nin Sylow π-altgrubu maksimal π-altgrubu olarak tanımlanır. Sylow π-altgrup her zaman var olduğundan eğer π birden fazla asal sayı bulunduruyorsa Sylow π-altgruplar genelde eşlenik değildirler.

Eğer G sonlu bir grup ve H, G nin π-altgrubu ise H ya G nin *Hall π-altgrubu* denir. Böylece her Hall π-altgrubu bir Sylow π-altgruptur. Sonlu gruplardaki Sylow Teorem'lerinden Hall p-altgrup ve Sylow p-altgrup eş anlamlıdır.

H ve K, G nin π-altgrupları ve $K \lhd G$ olsun. O zaman $H \cap K$ ve HK/K da π-gruptur. Buradan HK da bir π-gruptur. Sonuç olarak G nin normal π-altgruplarının ürettiği grup bir π-gruptur. Bu grup G nin tek maksimal normal π-altgrubudur. Bu gruba G nin *π-radikali* denir ve $O_\pi(G)$ ile gösterilir [2,16].

2.39. Tanım

Her devirli altgrubu altnormal olan bir gruba *Baer grup* denir. Baer grubun her altgrubu ve homomorfik görüntüleri de Baer gruptur. Bir grubun tek maksimal normal Baer grubuna *Baer radikali* denir [2].

2.40. Tanım

G bir grup olsun. G nin her normal nilpotent altgrubunun ürettiği gruba G grubunun *Fitting altgrubu* denir ve $Fit(G)$ ile gösterilir. Eğer G sonlu ise $Fit(G)$ nilpotenttir. Fitting Teoremi'nden $Fit(G)$, G nin her normal nilpotent altgrubunu içerir. Dolayısıyla $Fit(G)$, G nin tek maksimal normal nilpotent altgrubudur. Eğer $G = Fit(G)$ ise G ye *Fitting grup* denir. Ayrıca G nin Fitting grup olması için gerek ve yeter şart her $x \in G$ için $\langle x \rangle^G = \langle \{x^g \mid g \in G\} \rangle$ normal kapanışının nilpotent olmasıdır[17]. Fitting gruplar, Baer grupların altsınıfıdır ve Fitting grubun her altgrubu ve her homomorfik görüntüsü de Fitting gruptur [2].

2.41. Tanım

Bir G grubunun her sonlu üreteçli altgrubu r tane eleman tarafından üretilebiliyor ve r bu şekildeki en küçük pozitif tamsayı ise G grubuna *sonlu r ranklı* denir [14].

2.42. Tanım

G bir grup olsun. Eğer *G* nin altgruplarının boş olmayan her kümesi bir minimal eleman bulunduruyorsa *G ye altgrupları üzerinde minimal şartını sağlar* denir.

2.43. Tanım

G bir grup olsun. Eğer *G*, minimal şartını sağlayan bir abelyan grubun sonlu genişlemesi ise *G* ye *Chernikov grup* denir. Minimal şartını sağlayan abelyan grup, sonlu devirli grupların ve quasidevirli grupların sonlu direkt çarpımına izomorf olduğundan, bir Chernikov grup, quasidevirli grupların sonlu sayıdaki direkt çarpımının bir sonlu genişlemesi biçiminde tanımlanabilir. Böylece Chernikov grubu sonlu sayıda quasidevirli grubun direkt çarpımı olan sonlu indeksli bir N altgrubuna sahiptir. Bu grup Chernikov grubun sonlu indeksli minimal altgrubudur dolayısıyla karakteristiktir [4].

2.44. Tanım

Eğer bir grubun sonlu indeksli bir $\mathfrak{X}$-altgrubu varsa bu gruba *hemen hemen* $\mathfrak{X}$*-grup* denir[3].

2.45. Tanım

G bir grup olsun. Eğer *G* nin aşikar olmayan her sonlu üreteçli altgrubunun sonlu indeksli bir öz altgrubu varsa *G* ye *lokal dereceli (graded) grup* denir [2].

Bu tanım Tarski grubu olarak bilinen grupları saf dışı bırakmak için yapılmıştır. Bilindiği gibi *p* bir asal sayı olmak üzere aşikar olmayan her öz altgrubunun mertebesi *p* ye eşit olan gruba *Tarski grubu* denir [2].

2.46. Tanım

G bir grup olsun. Eğer G nin faktörleri lokal nilpotent olan azalan bir serisi varsa G ye *radikal grup* denir. Eğer G nin faktörleri lokal nilpotent ya da lokal sonlu olan azalan bir G-invariant serisi varsa G ye *genelleştirilmiş radikal grup* denir [2].

2.47. Tanım

G ve *H* iki grup olsun ve *H*, *G* üzerine etki etsin. Bir *c* pozitif tamsayısı için $[G,\ {}_cH] = 1$ ve $[G, {}_{c-1}H] \neq 1$ ise *H* nın *G* üzerine etkisine *c sınıfından nilpotent etki* denir.

$G = H$ ve G kendi üzerine eşlenikleme şeklinde etki ediyorsa *c* sınıfından nilpotent etkisi *G* nin *c* sınıfından nilpotent olması demektir [22].

2.48. Lemma

G sonlu *p*-grup ve *H* sonlu p'-grup olmak üzere *H*, *G* üzerine nilpotent etki ediyorsa *H* nın *G* ye bu etkisine *aşikar etki* denir yani $[G, H] = 1$ dir [22].

2.49. Tanım

Her öz altgrubu altnormal ve nilpotent olan fakat kendisi nilpotent olmayan gruplara Heineken-Mohamed tipi gruplar denir [2].

2.50. Lemma

G bir grup ve $x, y, u \in G$ olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler vardır.

(a) $[x, y]^{-1} = [y, x]$
(b) $[xy, u] = [x, u]^y [y, u] = [x, u][x, u, y][y, u]$
(c) $[u, xy] = [u, y][u, x]^y = [u, y][u, x][u, x, y]$ [17].

2.51. Lemma

G bir grup ve *H* ve *K*, *G* nin altgrupları olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler vardır.

(a) $[H, K] = [K, H]$
(b) *G* nin her α homomorfizması için $\alpha([H, K]) = [\alpha(H), \alpha(K)]$ dır.
(c) $[H, K] \leq H \iff K \leq N_G(H)$

(d) $H_1 \subseteq H$ ve $K_1 \subseteq K$ ise $[H_1, K_1] \leq [H, K]$ dır.

(e) $[H, K] = 1$ olması için gerek ve yeter şart *H* nın *K* ile komütatif olmasıdır [15].

2.52. Lemma

G bir grup ve $H, K \leq G$ olsun. O zaman $[H, K] \lhd \langle H, K \rangle$ olur. Eğer *H* ve *K*, *G* nin normal altgrupları ise $[H, K]$ komütatör altgrubu da *G* nin normal altgrubudur. Ayrıca $[H, K] \subset H \cap K$ dır [17].

2.53. Teorem

G bir grup ve $N \lhd G$ olsun. $H, K \leq G$ için $[H/N, K/N] = [H, K]N/N$ dir [15].

2.54. Lemma

G bir grup ve $K \leq G$ ve $X \subseteq G$ olsun.

(a) $X^K = \langle X, [X, K] \rangle$

(b) $[X, K]^K = [X, K]$

(c) $K = \langle Y \rangle$ ise $[X, K] = [X, Y]^K$ [2].

2.55. Lemma

G bir grup, $H_1, H_2, \ldots, H_n \leq G$, $N \lhd G$ ve $Y = \langle H_1, H_2, \ldots, H_n \rangle$ olsun. O zaman

$$[N, Y] = [N, H_1][N, H_2] \ldots [N, H_n]$$

dır. [17]

2.56. Lemma

G bir grup ve *A*, *G* nin $G/C_G(A)$ abelyan olacak şekilde normal abelyan altgrubu olsun. O zaman her $X, Y \leq G$ için $[A, X, Y] = [A, Y, X]$ dir [17].

2.57. Lemma

G bir grup ve $H, K, L \lhd G$ olsun. O zaman $[HK, L] = [H, L][K, L]$ ve $[H, KL] = [H, K][H, L]$ dir [15].

2.58. Teorem

G bir grup olsun. O zaman $G' \lhd G$ ve G/G' abelyan gruptur. $N \lhd G$ olmak üzere G/N abelyan olması için gerek ve yeter şart $G' \leq N$ olmasıdır [18].

2.59. Lemma

(a) Fully-invariant altgruplar karakteristik ve karakteristik altgruplar normal altgruplardır.
(b) Fully-invariant ve karakteristik geçişme özelliğine sahiptir.
(c) $H\ char\ K$ ve $K \lhd G$ ise $H \lhd G$ dir [2].

2.60. Lemma

G bir sonlu üreteçli grup ve H, G nin sonlu indeksli altgrubu olsun. O zaman H altgrubu da sonlu üreteçlidir [14].

2.61. Lemma

G bir grup ve $H \leq G$ olsun. O zaman $C_G(H) \lhd N_G(H)$ ve $N_G(H)/C_G(H)$, $Aut(H)$ nın bir altgrubuna izomorftur [2].

2.62. Teorem

G bir grup ve G nin mertebesi bir n pozitif tamsayısı olsun. O zaman $a = [\log_2 n]$ olmak üzere $|Aut(G)| < n^a$ dir [14].

2.63. Teorem

Çözülebilir bir grubun her altgrubu ve her homomorfik görüntüsü de çözülebilirdir. *G* bir grup ve $N \lhd G$ olsun. *N* ve G/N çözülebilir ise *G* de çözülebilirdir [2].

2.64. Teorem

Her Sonlu *p*-grubu bir nilpotent grup ve her nilpotent grup bir çözülebilir gruptur [2].

2.65. Teorem

Nilpotent grubun her altgrubu, her homomorfik görüntüsü ve sonlu direkt çarpımları nilpotenttir [2].

2.66. Lemma

G bir nilpotent grup ve merkez serisi $1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n = G$ olsun. O zaman

(a) $\gamma_i(G) \leq G_{n-i+1}$ ve böylece $\gamma_{n+1}(G) = 1$
(b) $G_i \leq Z_i(G)$ ve böylece $Z_n(G) = G$
(c) *G* nin nilpotentlik sınıfı ve *G* nin yukarı merkez serisinin uzunluğu ve *G* nin aşağı merkez serisinin uzunluğu eşittir [2].

2.67. Lemma

G bir grup ve *i, j* birer pozitif tam sayı olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(a) $[\gamma_i(G), \gamma_j(G)] \leq \gamma_{i+j}(G)$
(b) $\gamma_i(\gamma_j(G)) \leq \gamma_{ij}(G)$
(c) Eğer $j \geq i$ ise $[\gamma_i(G), Z_j(G)] \leq Z_{j-1}(G)$
(d) $Z_i(G/Z_j(G)) = Z_{i+j}(G)/Z_j(G)$ [2].

2.68. Lemma

G bir sonlu grup olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) *G* nilpotenttir.
(b) *G* nin her altgrubu altnormaldir.
(c) *G*, normalleyen şartını sağlar.
(d) *G* nin her maksimal altgrubu normaldir.
(e) *G*, Sylow altgruplarının direkt çarpımıdır [2].

2.69. Teorem

G bir grup ve $N \lhd G$ olsun. Eğer *N* ve G/N' nilpotent ise *G* nilpotenttir [2].

2.70. Teorem

G bir grup, *M* ve *N*, *G* nin normal altgrupları olsun. Bu durumda

(a) G/M ve G/N nilpotent grup ise $G/M \cap N$ grubu da nilpotent gruptur.
(b) G/M ve G/N çözülebilir grup ise $G/M \cap N$ grubu da çözülebilir gruptur [16].

2.71. Lemma

G bir lokal nilpotent grup ve *G* nin mertebeleri sonlu elemanlarından oluşan bir altküme *T* olsun. Yani *T*, *G* nin torsiyon altgrubu olsun. O zaman *T* altgrubu G/T torsiyonsuz olacak şekilde *G* nin fully-invariant altgrubudur ve *T*, *p*-altgruplarının direkt çarpımıdır [2].

2.72. Teorem(Fitting Teoremi)

G bir grup, *M* ve *N*, *G* nin normal nilpotent altgrupları olsun. Eğer *c* ve *d* tamsayıları *M* ve *N* nin nilpotentlik sınıfları ise $L = MN$ nin nilpotentlik sınıfı en fazla $c + d$ dir [2].

2.73. Teorem

G bir çözülebilir grup ve $F = Fit(G)$ olsun.

(a) Eğer $1 \neq N \lhd G$ ise o zaman *N*, *G* nin aşikar olmayan bir normal abelyan altgrubunu içerir ve $N \cap F \neq 1$ dir.
(b) $C_G(F) = Z(F)$ [2].

2.74. Teorem (O.J.Schmidt)

Sonlu bir *G* grubunun her maksimal altgrubu nilpotent fakat *G* nin kendisi nilpotent olmasın. O zaman

(a) *G* çözülebilirdir.
(b) *p*, *q* asal ve $p \neq q$ olmak üzere *G* nin mertebesi $p^m q^n$ dir.
(c) *G* nin tek Sylow *p*-altgrubu *P* var ve bir Sylow *q*-altgrubu devirlidir. Böylece $G = QP$ ve $P \lhd G$ dir [2].

2.75. Teorem (Hirsch-Plotkin Teoremi)

G bir grup ve *H* ve *K*, *G* nin normal lokal nilpotent altgrupları olsun. O zaman $J = HK$ çarpımı da lokal nilpotenttir [2]

2.76. Lemma

Her lokal (çözülebilir bir grubun sonlu genişlemesi) olan grup bir lokal genelleştirilmiş radikal grup ve her lokal genelleştirilmiş radikal grup ise bir lokal dereceli gruptur.

2.77. Lemma

G bir grup ve $H \leq G$ olsun.

(a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $H^{G,n} = H[G, {}_nH]$

(b) $d \geq 1$ olmak üzere H nın altnormallik uzunluğu d olması için gerek ve yeter şart $[G, {}_dH] \leq H$ olmasıdır [17].

2.78. Tereom

G bir grup ve *H*, *G* nin altnormal altgrubu olsun. O zaman

(a) $K \leq G$ ise $H \cap K \; sn \; K$
(b) $H \leq K$ ise $H \; sn \; K$
(c) $K \; sn \; H$ ise $K \; sn \; G$
(d) $K \; sn \; G$ ise $H \cap K \; sn \; G$
(e) f bir homomorfizma olmak üzere $f(H) \; sn \; f(G)$ dir. [14].
(f) $K \lhd G$ ise $HK \; sn \; G$ dir [16].

2.79. Lemma

G bir sonlu üreteçli abelyan grup olsun. Eğer *G* bir torsiyon grup ise *G* sonlu gruptur [2].

2.80. Teorem

Her hipermerkez grup normalleyen şartını sağlar ve böylece bir hipermerkez grup lokal nilpotent bir gruptur [2].

2.81. Teorem

Eğer bir grubun her devirli altgrubu altnormal ise her sonlu üreteçli altgrubu altnormal ve nilpotent gruptur [2].

2.82. Lemma

G bir grup olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(a) *G* nin her sonlu üreteçli altgrubu altnormaldir.

(b) *G* nin her devirli altgrubu altnormaldir.
(c) *G* Baer gruptur [3].

2.83. Lemma

G torsiyonsuz nilpotent bir grup ve *H*, *G* nin sonlu indeksli bir altgrubu olsun. O zaman *G* ve *H* nın nilpotentlik sınıfları aynıdır [2].

İspat

G, *n* nilpotentlik sınıfından ve *G* nin merkez serisi $1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n = G$ biçiminde normal seri olsun. Her $0 \leq i \leq n$ için $S_i = S \cap G_i$ olsun. $1 = S_0 \leq S_1 \leq \cdots \leq S_n = S$ serisinin *S* nin merkez serisi olduğunu gösterelim. Her i için $G_i \lhd G$ ve $S \leq G$ olduğundan $G_i \cap S \lhd G$ ve $G_i \cap S \leq S$ olur. Buradan da $G_i \cap S \lhd G \cap S$ ve böylece $S_i \lhd S$ olur. Ayrıca $S_{i-1} \leq G_{i-1}$ ve $S \leq G$ olduğundan $[S_{i-1}, S] \leq [G_{i-1}, G]$ ve G nilpotent olduğundan $[G_{i-1}, G] \leq G_i$ dir. Dolayısıyla $[S_{i-1}, S] \leq G$ dir. $S_i \leq S$ olduğundan $[S_{i-1}, S] \leq S$ dir. Bu son iki eşitsizlikten $[S_{i-1}, S] \leq G_i \cap S = S_i$ olur. Böylece *S*, *n* uzunluklu merkez seriye sahiptir. O zaman *S*, *n* sınıfından nilpotenttir ve *G* ile *H* nın nilpotentlik sınıfları aynıdır.

2.84. Teorem

Bir *G* abelyan grubunun bölümlü bir grup olması için gerek ve yeter şart *G* nin $\mathbb{Q}$ nun kopyalarının ve quasidevirli grupların direkt toplamı olmasıdır [2].

2.85. Teorem

Her sonsuz lokal sonlu grup bir sonsuz abelyan altgruba sahiptir [2].

2.86. Teorem

G sonlu üreteçli çözülebilir bir grup olsun. Eğer *G* nilpotent bir grup değilse nilpotent olmayan sonlu bir görüntüye sahiptir [2].

2.87. Lemma

G ve *H* birer grup ve *A*, *G* nin normal bölümlü abelyan bir altgrubu ve bir *r* pozitif tamsayısı için $[A,\ {}_rH] = 1$ olan altgrubu olsun. Eğer H/H' periyodik ise $[A, H] = 1$ dir [4].

2.88. Teorem

Hirsch-Plotkin radikali abelyan grupları üzerinde minimal şartını sağlayan bir radikal grup çözülebilir ve Chernikov bir gruptur [4].

2.89. Lemma

G grubu sonlu r ranklı abelyan bir *p*-grup olsun. O zaman $Aut(G)$ nin Sylow *p*-altgrupları sonlu ve en fazla $r(5r-1)/2$ rankındandır [4].

2.90. Teorem

G sonlu üreteçli hiperabelyan ya da hipersonlu bir grup olsun ve *G* nin nilpotent olmadığını farzedelim. O zaman *G* nin nilpotent olmayan sonlu bir homomorfik görüntüsü vardır [4].

2.91. Lemma

G bir grup olsun. *N*, *G* nin nilpotent normal altgrubu ve *U* da nilpotent altnormal altgrubu ise UN, *G* nin nilpotent altgrubu olur [8].

2.92. Lemma

G her nilpotent olmayan altgrubu altnormal altgrup olan bir grup olsun. O zaman *G* nin her sonlu kesimi çözülebilirdir.

İspat

$N \lhd G$ olmak üzere G/N sonlu bir grup olsun. G/N nin çözülebilir olmadığını kabul edelim.

G/N sonlu ama çözülebilir değil ise G/N nin V/N gibi sonlu abelyan olmayan basit bir altgrubu vardır. Fakat V nin her öz altgrubu nilpotenttir. Dolayısıyla her maksimal altgrubu da nilpotenttir. O.J.Schmidt'in Teoremi'nden V çözülebilirdir. Dolayısıyla V/N çözülebilirdir. V/N basit grup olduğundan bu bir çelişkidir. O zaman G/N çözülebilirdir. Bu durumda G nin her sonlu kesimi çözülebilirdir.

2.93. Teorem (Sonlu Üreteçli Abelyan Gruplar İçin Teklik Teoremi)

Sonlu üreteçli abelyan bir G grubu, negatif olmayan tamsayılarla aşağıdaki şekilde belirlenir. T, G nin bir torsiyon altgrubu, $s > 0$ bir tamsayısı için $p_1, \dots, p_s$ birbirinden farklı asal sayılar ve $t_1, \dots, t_s$ pozitif tamsayılar $(i = 1, \dots, s,\ j = 1, \dots, t_i)$ ve m_{ij} pozitif tamsayılar olmak üzere $G = T \times K$ dır. Burada K rankı r olan serbest abelyan bir altgrup, eğer $s = 0$ ise $T = 1$ ve eğer $s > 0$ ise T, mertebesi ${p_i}^{m_{ij}}$ olan $\sum_{i=1}^{s} t_i$ devirli gruplarının direkt toplamıdır. Ayrıca iki üreteçli abelyan grupların izomorf olması için gerek ve yeter şart tam sayılarla böyle bir sistem oluşturmasıdır [16].

2.94. Lemma

$\mathfrak{X}$ homomorfik görüntülerine kapalı olan bir grup teorik sınıfın bir altgrubu olsun. O zaman bir G grubunun hiper-$\mathfrak{X}$ grup olması için gerek ve yeter şart G nin her aşikar olmayan H homomorfik görüntüsünün aşikar olmayan normal bir K altgrubuna sahip olmasıdır [3].

2.95. Teorem

G sonlu bir grup olsun. G nin nilpotent olması için gerek ve yeter şart mertebeleri aralarında asal olan elemanlarının birbirini merkezlemesidir [15].

2.96. Teorem (Rosablade'in Teoremi)

Öyle $f, \rho: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonları vardır ki her $f(n)$ üreteçli altgrupları en fazla n altnormallik uzunluğuna sahip olan grup en fazla $\rho(n)$ nilpotentlik sınıfından nilpotenttir [11].

3. ÇÖZÜLEBİLİRLİK

Bu bölümde Teorem 1.1 ve Teorem 1.2 nin ispatı verilecektir. Her nilpotent olmayan altgrubu altnormal olan sonlu grubun çözülebilir olduğu giriş kısmında Teorem 1.2 nin ifadesinden sonra belirtilmiştir. Burada verilen dördüncü sonuç bu özellikteki sonlu üreteçli gruplar üzerinedir.

3.1. Lemma

G bir lokal nilpotent, lokal sonlu grup ve G nin her nilpotent olmayan altgrubu altnormal altgrup olsun. Her p asal sayısı için G_p, G nin p-asal komponenti olsun. H (K), nilpotent (çözülebilir) olan G_p lerin direkt çarpımı olsun. O zaman H bir nilpotent (K çözülebilir) gruptur.

İspat

H, nilpotent G_p lerin direkt çarpımı olan fakat nilpotent olmayan bir altgrup olsun. $H = H_1 \times H_2$ olacak şekilde sonsuz tane G_p nin altgruplarının direkt çarpımı olan H_1 ve H_2 altgrupları vardır. H_1 ve H_2 nilpotent ise Teorem 2.72 den H nilpotenttir. Bu ise bir çelişki dolayı H_1 ve H_2 nilpotent değildir. H_1, H nın karakteristik altgrubu ve $H_1 \cap H_2 = 1$ olduğundan $H_2 \cong H/H_1$ dir. H nın H_1 i içeren altgrupları nilpotent olmadığından H nın altnormal altgruplarıdırlar. Dolayısıyla H/H_1 in her altgrubu altnormal altgruptur. Böylece H_2 nin her altgrubu altnormal altgruptur ve H_2 her asal komponenti nilpotent olan lokal sonlu grup olduğundan H_2 bir nilpotent gruptur. Bu çelişkiden dolayı H nilpotent gruptur. G_p grupları çözülebilir gruplar olmak üzere $G_p \cap \prod_{q \neq p} G_q = 1$ ve K, G_p lerin direkt çarpımı olduğundan

$K = \langle G_p : p \in \pi , G_p \text{ çözü}lebilir \rangle$

olarak yazılabilir. Kabul edelim ki K çözülebilir olmasın. O zaman K nilpotent olmadığından [11] den K nın $p \in \pi$ olmak üzere altnormallik uzunluğu sınırlı olmayan sonlu U_p altgruplarının direkt çarpımı olan bir U altgrubu vardır. U_p grupları sonlu p-grup olduklarından Teorem 2.64 den nilpotent grupturlar. Böylece U nun her asal bileşeni

nilpotent olan lokal sonlu bir gruptur ve yukarıda yapılanlardan dolayı U nun her altgrubu altnormal altgrup olduğundan U bir nilpotent gruptur. U nun altnormallik uzunluğu sınırlı olmadığından bu bir çelişkidir. O zaman K çözülebilirdir. ■

Aşağıdaki Lemma da faydalı bir sonuçtur ve [13] Lemma 3 ve [8] Lemma 2 ile karşılaştırılmalıdır.

3.2. Lemma

G çözülebilir olmayan bir grup olsun. Eğer G nin her çözülebilir olmayan altgrubu altnormal altgrup ise öyle bir r pozitif tamsayısı vardır ki G nin her çözülebilir olmayan K altgrubunun sonlu üreteçli bir F altgrubu için K nın F i içeren her çözülebilir olmayan U altgrubunun K daki altnormallik indeksi en fazla r dir.

İspat

Kabul edelim ki U nun K daki altnormallik indeksi r den büyük olsun. K çözülebilir olmadığı için hipotezden G de altnormaldir. $K_0 = G$ ve $H_0 = 1$ olsun. Bir $i \in \mathbb{N}$ için H_{i-1}, çözülebilir olmayan K_{i-1} in sonlu üreteçli altgrubu olacak şekilde G nin H_{i-1} ve K_{i-1} altgruplarının olduğunu kabul edelim. Hipotezden K_{i-1} in öyle bir çözülebilir olmayan K_i altgrubu vardır ki $H_{i-1} \leq K_i$ ve K_i nin K_{i-1} deki altnormallik indeksi i den büyüktür. O zaman Lemma 2.77 den $K_i^{K_{i-1},i} = K_i[K_{i-1}, {}_iK_i] \neq K_i$ olduğundan bir $x_i \in [K_{i-1}, {}_iK_i] \setminus K_i$ elemanı vardır. K_i nin çözülebilirlik sınıfı i olmayan sonlu üreteçli L_i altgrubu için $x_i \in [K_{i-1}, {}_iL_i]$ dir. $H_i = \langle H_{i-1}, L_i \rangle$ olduğunu kabul edelim. H_{i-1} ve L_i sonlu üreteçli gruplar olduklarından H_i grubu da sonlu üreteçlidir. Böylece $H_1 = L_1 \leq \cdots \leq H_i \leq \cdots$ serisi H_i lerin sonlu üreteçli artan serisi elde edilir. $H = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$ dir. H çözülebilir ise her i için H_i çözülebilir gruptur dolayısıyla L_i grubu da çözülebilir grup olur. L_i çözülebilir olmadığından bu kabul yanlıştır. Dolayısıyla H çözülebilir grup değildir. H nın G deki altnormallik indeksi d olsun. O zaman $x_d \in [K_{d-1}, {}_dK_d] \setminus K_d$ elemanını bulabiliriz. Böylece

$$x_d \in [K_{d-1}, {}_dL_d] \leq [K_{d-1}, {}_dH_d] \leq [G, {}_dH] \leq H$$

olur. d den daha büyük bir i için $x_d \in H_i$ dir. O zaman $x_d \in H_i \leq K_i \leq K_d$ olur. Bu ise bir

çelişkidir. Dolayısıyla U nun K daki altnormallik indeksi en fazla r dir. ■

3.3. Lemma

G nilpotent olmayan bir grup olsun. Eğer G nin her nilpotent olmayan altgrubu altnormal altgrup ise öyle bir r pozitif tamsayısı vardır ki G nin her nilpotent olmayan K altgrubunun sonlu üreteçli bir F altgrubu için K nın F i içeren her nilpotent olmayan U altgrubunun K daki altnormallik indeksi en fazla r dir.

İspat

Kabul edelim ki U nun K daki altnormallik indeksi r den büyük olsun. K nilpotent olmadığı için hipotezden G de altnormaldir. $K_0 = G$ ve $H_0 = 1$ olsun. Bir $i \in \mathbb{N}$ için H_{i-1}, nilpotent olmayan K_{i-1} in sonlu üreteçli altgrubu olacak şekilde G nin H_{i-1} ve K_{i-1} altgruplarının olduğunu kabul edelim. Hipotezden K_{i-1} in öyle bir nilpotent olmayan K_i altgrubu vardır ki $H_{i-1} \leq K_i$ ve K_i nin K_{i-1} deki altnormallik indeksi i den büyüktür. O zaman Lemma 2.77 den $K_i^{K_{i-1},^i} = K_i[K_{i-1}, {}_iK_i] \neq K_i$ olduğundan bir $x_i \in [K_{i-1}, {}_iK_i] \setminus K_i$ elemanı vardır. K_i nin nilpotentlik sınıfı i olmayan sonlu üreteçli L_i altgrubu için $x_i \in [K_{i-1}, {}_iL_i]$ dir. $H_i = \langle H_{i-1}, L_i \rangle$ olduğunu kabul edelim. H_{i-1} ve L_i sonlu üreteçli gruplar olduklarından H_i grubu da sonlu üreteçlidir. Böylece H_i lerin $H_1 = L_1 \leq \cdots \leq H_i \leq \cdots$ sonlu üreteçli artan serisi elde edilir. $H = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$ dir. H nilpotent ise her i için H_i nilpotent gruptur dolayısıyla L_i grubu da nilpotent grup olur. L_i nilpotent olmadığından bu kabul yanlıştır. Dolayısıyla H nilpotent grup değildir. H nın G deki altnormallik indeksi d olsun. O zaman $x_d \in [K_{d-1}, {}_dK_d] \setminus K_d$ elemanını bulabiliriz. Böylece

$$x_d \in [K_{d-1}, {}_dL_d] \leq [K_{d-1}, {}_dH_d] \leq [G, {}_dH] \leq H$$

olur. d den daha büyük bir i için $x_d \in H_i$ dir. O zaman $x_d \in H_i \leq K_i \leq K_d$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla U nun K daki altnormallik indeksi en fazla r dir. ■

3.4. Lemma

G bir sonlu üreteçli çözülebilir grup olsun. Eğer G nin her nilpotent olmayan altgrubu altnormal altgrup ise G bir sonlu grubun nilpotent genişlemesidir.

İspat

Eğer G nin her sonlu görüntüsü nilpotent ise Lemma 2.92 den G nilpotent grup olur. Böylece hipotez sağlanır. Kabul edelim ki G, bir sonlu grubun nilpotent genişlemesi olmasın. G sonlu üreteçli çözülebilir bir grup olduğundan Teorem 2.86 dan G nin öyle bir N normal altgrubu vardır ki G/N sonlu fakat nilpotent grup değildir. O zaman Lemma 2.68 den G/N nin her altgrubu altnormal altgrup değildir. Kabul edelim ki N nilpotent grup olmasın. Hipotezden N, G de altnormal altgruptur. G nin N yi içeren altgrupları nilpotent olmadığından G nin altnormal altgruplarıdır. Dolayısıyla G/N in her altgrubu altnormal altgruptur. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla N nilpotent gruptur. Buradan G bir sonlu grubun nilpotent genişlemesidir. G sonlu üreteçli olduğundan G nin bir maksimal normal sonlu bir T altgrubu vardır. $N \leq T$ ise T sonlu olduğundan N sonlu ve G/N sonlu olduğundan G sonlu gruptur. Fakat G sonlu olmadığından bu kabul yanlıştır. O zaman $T \leq N$ olduğunu kabul edebiliriz. Böylece genelliği bozmadan $T = 1$ alabiliriz. T, G nin maksimal sonlu altgrubu ve $1 = T \leq N$ olduğundan eğer N nin bir torsiyon elemanı x varsa $\langle x \rangle$ sonlu olduğundan $T = 1$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla N torsiyonsuzdur. N nilpotent olduğundan çözülebilir gruptur. Bundan dolayı N den G ye faktörleri asal mertebeli devirli grup olan sonlu uzunlukta bir altnormal seri vardır. K grubu bu zincirdeki nilpotent olmayan ilk altgrup ve seride K dan önceki terim M olsun. Burada M nilpotenttir. O zaman $|K/M| = p$ olacak şekilde bir p asal sayısı vardır. K/M devirli grup olduğundan $x \in K$ olacak şekilde $K/M = \langle xM \rangle$ dir. Dolayısıyla K nın K-invariant nilpotent M altgrubu için $K = M\langle x \rangle$ dir. M nin torsiyon altgrubu T_M, M nin normal altgrubu ve $M\ sn\ G$ olduğundan T_M, G de altnormal altgruptur. Eğer M nin torsiyon altgrubu $T_M \neq 1$ ise T_M, G nin nilpotent ve altnormal altgrubudur. $T = 1$ olduğundan bu bir çelişkidir. Dolayısıyla M torsiyonsuzdur. Bundan dolayı $G = M\langle x \rangle$ olduğunu kabul edebiliriz. Ayrıca G/M sonlu olduğundan Lemma 2.60 dan M, G nin sonlu üreteçli altgrubudur.

M nin nilpotentlik sınıfı n olmak üzere $U = Z_{n-1}(M)$ olsun ve U nun 1 den farklı olduğunu kabul edelim. n üzerinden tümevarım uygulayarak $U\langle x\rangle$ ve G/U nun bir sonlu grubun nilpotent genişlemesi olduğunu gösterelim. $n = 2$ için $U = Z(M)$ dir. O zaman $\langle x\rangle \lhd U\langle x\rangle$ olduğundan

$$U\langle x\rangle/\langle x\rangle \cong U/U \cap \langle x\rangle \cong U$$

dir. Ayrıca U nilpotent ve $\langle x\rangle$ sonlu olduğundan $U\langle x\rangle$ bir sonlu grubun nilpotent genişlemesidir. İzomorfizma Teoremi'ne göre

$$U\langle x\rangle/U \cong \langle x\rangle/U \cap \langle x\rangle \cong \langle x\rangle$$

olduğundan $U\langle x\rangle/U$ sonludur. O zaman

$$\begin{aligned}(G/U)/(U\langle x\rangle/U) &= (M\langle x\rangle/U)/(U\langle x\rangle/U)\\ &\cong M\langle x\rangle/U\langle x\rangle\\ &\cong M(U\langle x\rangle)/(U\langle x\rangle)\\ &\cong M/M \cap (U\langle x\rangle)\\ &\cong M/U\end{aligned}$$

ve M/U abelyan olduğundan G/U bir sonlu grubun nilpotent genişlemesidir. Şimdi $n > 2$ ve iddia n den küçükler için doğru olsun. n için de doğru olduğunu gösterelim. $B = Z_{n-2}(M)$ olsun. O zaman tümevarım hipotezinden $B\langle x\rangle$ ve G/B bir sonlu grubun nilpotent genişlemesidir. $B\langle x\rangle$ bir sonlu grubun nilpotent genişlemesi olduğundan öyle bir sonlu F altgrubu vardır ki $B\langle x\rangle/F$ nilpotenttir. O zaman $(UB\langle x\rangle)/F = U\langle x\rangle/F$ nilpotent dolayısıyla $U\langle x\rangle$ bir sonlu grubun nilpotent genişlemesidir. Ayrıca $B \leq U$ olduğundan G/B den G/U ya bir φ epimorfizması vardır. $\varphi(G/B) = G/U$ olduğundan G/U da bir sonlu grubun nilpotent genişlemesidir. Böylece tümevarım tamamlanır. $U\langle x\rangle/U$ sonlu olduğundan G/U nun sonlu radikali $U\langle x\rangle/U$ ve $G/U\langle x\rangle$ abelyan gruptur. Teorem 2.58 den $G' = (M\langle x\rangle)' \leq U\langle x\rangle$ olur. M normal altgrup olduğundan $[M\langle x\rangle, M] \leq M$ ve $\langle x\rangle$ abelyan grup olduğundan $[M\langle x\rangle, \langle x\rangle] = [M, \langle x\rangle]$ dir. Lemma 2.55 uygulanırsa

$$G' = [M\langle x\rangle, M\langle x\rangle]$$
$$= [M\langle x\rangle, M][M\langle x\rangle, \langle x\rangle]$$
$$= [M, \langle x\rangle]$$

olur. Dolayısıyla $G' = [M, \langle x\rangle] \leq M \cap U\langle x\rangle = U$ dur. Böylece G/U abelyandır. Ayrıca M nilpotent olduğundan U/B abelyan ve

$$U\langle x\rangle/B\langle x\rangle \cong U/U \cap B\langle x\rangle \cong U/B$$

olduğundan $U\langle x\rangle/B\langle x\rangle$ abelyandır. O zaman $(U\langle x\rangle)' \leq B\langle x\rangle = Z_{n-2}(M)\langle x\rangle$ dir. Burada yukarıdaki yapılanlardan benzer şekilde U normal olduğundan $[U\langle x\rangle, U] \leq U$ ve $\langle x\rangle$ abelyan olduğundan $[U\langle x\rangle, \langle x\rangle] = [U, \langle x\rangle]$ ve

$$(U\langle x\rangle)' = [U\langle x\rangle, U\langle x\rangle]$$
$$= [U\langle x\rangle, U][U\langle x\rangle, \langle x\rangle]$$
$$= [U, \langle x\rangle]$$

olur. Böylece $(U\langle x\rangle)' \leq U \cap B\langle x\rangle = B = Z_{n-2}(M)$ dir. Ayrıca

$$[M\langle x\rangle, \langle x\rangle] = [M, \langle x\rangle] \leq U \leq U\langle x\rangle$$

ve

$$[U\langle x\rangle, \langle x\rangle] = [U, \langle x\rangle] \leq B \leq B\langle x\rangle$$

dir. Buradan da

$$[G, {}_{n-1}\langle x\rangle] = [M\langle x\rangle, {}_{n-1}\langle x\rangle]$$
$$= [[M\langle x\rangle, \langle x\rangle], {}_{n-2}\langle x\rangle]$$
$$\leq [U\langle x\rangle, {}_{n-2}\langle x\rangle]$$
$$= [[U\langle x\rangle, \langle x\rangle], {}_{n-3}\langle x\rangle]$$
$$\leq [B\langle x\rangle, {}_{n-3}\langle x\rangle]$$
$$= [[B\langle x\rangle, \langle x\rangle], {}_{n-4}\langle x\rangle]$$

$$
\begin{aligned}
&\dots \\
&\leq [Z_1(M)\langle x\rangle, \langle x\rangle] \\
&\leq\ Z_0(M)\langle x\rangle \\
&= \langle x\rangle \\
&\neq 1
\end{aligned}
$$

dir. $\langle x\rangle$ abelyan olduğundan

$$[G,\ {}_n\langle x\rangle] = [[G, {}_{n-1}\langle x\rangle], \langle x\rangle] \leq [\langle x\rangle, \langle x\rangle] = 1$$

dir. Böylece $\langle x\rangle$, G üzerine nilpotent etki eder. O zaman bir m pozitif tamsayısı için

$$
\begin{aligned}
[G, {}_mG] &= [M\langle x\rangle\ , {}_mM\langle x\rangle] \\
&= [[M\langle x\rangle\ , M\langle x\rangle], {}_{m-1}M\langle x\rangle]] \\
&\leq [U,\ {}_{m-1}M\langle x\rangle] \\
&= [[U\ , M\langle x\rangle], {}_{m-2}M\langle x\rangle]] \\
&= [[U\ , \langle x\rangle], {}_{m-2}M\langle x\rangle]] \\
&\leq [B,\ {}_{m-2}M\langle x\rangle] \\
&\dots \\
&\leq [1, M\langle x\rangle] = 1
\end{aligned}
$$

olduğundan G nilpotenttir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $U = 1$ dir. Böylece M sonlu üreteçli abelyan gruptur. Teorem 2.93 den M, torsiyon altgrubu ve bir serbest abelyan altgrubunun direkt toplamına izomorftur. M torsiyonsuz olduğundan M serbest abelyan gruptur.

$M^{q_1}\langle x\rangle$ ve $M^{q_2}\langle x\rangle$ nilpotent grup olacak şekilde p ye eşit olmayan q_1 ve q_2 farklı asal sayılar olsun. O zaman $M^{q_1}\langle x\rangle M^{q_2}\langle x\rangle\ =\ M^{q_1}M^{q_2}\langle x\rangle$ de nilpotent gruptur. $M^{q_1}M^{q_2}\langle x\rangle$ nilpotent ve $U = 1$ olduğundan yeterince büyük bir c tamsayısı için

$$[M,\ {}_c\langle x\rangle] = [M^{q_1}M^{q_2},\ {}_c\langle x\rangle] = 1$$

dir. $\langle x\rangle$ ve M abelyan olduğundan

$$[G,\ {}_cG] = [M\langle x\rangle,\ {}_cM\langle x\rangle] = [M,\ {}_c\langle x\rangle] = 1$$

dir. Böylece $[G,\ {}_cG] = 1$ ve G nilpotenttir. Bu ise bir çelişkidir. O zaman sonlu sayıda asal sayı hariç her q asal sayıları için $M^q\langle x\rangle$, G de nilpotent değildir. Hipotezden sonlu sayıda asal sayı hariç her q asal sayıları için $M^q\langle x\rangle$, G nin altnormal altgrubudur. $M^q\langle x\rangle/M^q$, G/M^q da altnormal ve abelyandır. Ayrıca M/M^q , G/M^q nun normal abelyan altgrubudur. $(M/M^q)(M^q\langle x\rangle/M^q) = G/M^q$ olduğundan ve Lemma 2.91 den G/M^q nilpotenttir. M/M^q q-mertebeli ve $M^q\langle x\rangle/M^q$ p-mertebeli olduğundan $[M/M^q, M^q\langle x\rangle/M^q] = 1$ dir. Dolayısıyla G/M^q abelyan gruptur. M^q ların kesişimi aşikar olduğundan

$$\bigcap_q (G/M^q) = G/\left(\bigcap_q M^q\right) = G/1 \cong G$$

dir. Teorem 2.71 den G nilpotent ve abelyan bir gruptur. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla G bir sonlu grubun nilpotent genişlemesidir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sıradaki lemma Teorem 1.1 in ispatındaki başlıca adımdır.

3.5. Lemma

G bir lokal nilpotent grup olsun. Eğer G nin her nilpotent olmayan altgrubu altnormal altgrup ise o zaman G bir çözülebilir gruptur.

İspat

Kabul edelim ki G çözülebilir grup olmasın. Eğer T, G nin torsiyon altgrubu ise G/T torsiyonsuz gruptur. G lokal çözülebilir olduğundan G/T lokal (çözülebilir bir grubun sonlu genişlemesi) olan bir gruptur. Böylece [13] Teorem 2 den G/T nilpotent gruptur. G/T çözülebilir olduğundan eğer T çözülebilir ise Tereom 2.63 den G de çözülebilir gruptur. Bu ise ispatı tamamlar. O zaman G nin periyodik kısmının çözülebilir olduğunu göstermek yeterlidir. Dolayısıyla G yi periyodik kabul edebiliriz. G, p-altgrupların direkt çarpımı olduğundan eğer G nin her p-altgrubu çözülebilir ise Lemma 3.1 den G çözülebilir gruptur. Bu durumda G yi p-grup olarak kabul edebiliriz. R, G nin çözülebilir reziduali olsun ve kabul edelim ki G/R çözülebilir olsun. $R'\ char\ R \lhd G$ olduğundan Lemma 2.59 dan $R' \lhd G$ dir. O zaman R/R' abelyan ve $(G/R')/(R/R') \cong G/R$ olduğundan Teorem 2.63 den G/R'

çözülebilir gruptur. R, G nin çözülebilir rezidual altgrubu olduğundan $R \leq R'$ dir. O zaman $R' = R$ dir. Dolayısıyla R mükemmel gruptur. Eğer $R = 1$ ise kabulden G çözülebilir gruptur. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla R aşikar grup değildir. [5] den R nin nilpotent olmayan bir K öz altgrubu vardır. Hipotezden K, R de altnormal altgruptur. Dolayısıyla $K^R < R$ dir. Eğer K^R nilpotent ise K da nilpotent grup olur. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla K^R nilpotent değildir. Hipotezden K^R, R de altnormal altgruptur. R nin K^R yi içeren altgrupları nilpotent olmadığından R nin altnormal altgruplarıdır. Dolayısıyla R/K^R nin her altgrubu altnormal altgruptur. [10] Lemma 2 den R çözülebilir gruptur. G/R çözülebilir grup olduğundan Teorem 2.63 den G çözülebilir gruptur. Bu bir çelişkiden dolayı G/R nin çözülebilir grup olduğu kabulü yanlıştır. Dolayısıyla G yi rezidually çözülebilir kabul edebiliriz.

Lemma 3.3 den r pozitif tamsayı olmak üzere G nin öyle bir sonlu üreteçli F altgrubu vardır ki G nin F yi kapsayan her nilpotent olmayan altgrubunun G deki altnormallik indeksi en fazla r dir. Lemma 2.79 dan F sonludur. U, F yi kapsayan G nin sonlu bir altgrubu olsun. U nun G de altnormal olduğunu gösterelim. U sonlu ve G rezidually çözülebilir olduğundan $i = 1, \dots, n$ olmak üzere her $1 \neq g_i \in U$ için $g_i \notin N_{g_i}$ ve $N_{g_i} \lhd G$ olacak şekilde G/N_{g_i} çözülebilirdir. $N = \bigcap_{i=1}^{n} N_{g_i}$ olsun. O zaman N, G nin normal altgrubu olur. Böylece $U \cap N = 1$ dir. Teorem 2.70 den G/N çözülebilir gruptur. Eğer N nilpotent ise G çözülebilir gruptur. O zaman N nilpotent grup değildir. Dolayısıyla UN nilpotent değildir ve hipotezden UN, G de altnormal altgruptur. Eğer U nun UN de altnormal altgrup olduğunu gösterirsek UN de G de altnormal olduğundan U, G de altnormal altgruptur. Burada $G = UN$ olarak kabul edebiliriz. $G/N \cong U$ ve U sonlu olduğundan G/N bir nilpotent gruptur. O zaman bir k pozitif tamsayısı için $\gamma_k(G) \leq N$ dir. G rezidually çözülebilir grup olduğundan her $1 \neq x \in G$ için G nin öyle bir N_x normal altgrubu vardır ki $x \notin N_x$ ve G/N_x çözülebilir gruptur. O zaman $1 \neq x \in N$ için N nin öyle bir $N_x \cap N$ normal altgrubu vardır ki $x \notin N_x \cap N$ dir. G/N ve G/N_x çözülebilir grup olduklarından $G/(N_x \cap N)$ çözülebilir gruptur. Böylece $N/(N_x \cap N)$ çözülebilir olduğundan N rezidually çözülebilir gruptur. Dolayısıyla $\bigcap(N_x \cap N) = 1$ dir. $N_x \cap N$ gruplarını $i \geq 0$ olmak üzere $N_x \cap N = N_i$ olarak belirlersek N_i lerin kesişimleri aşikar ve G/N_i ler çözülebilir grup olacak şekilde N nin G-invariant altgruplarının bir $N_1 > N_2 > \cdots$ serisi vardır. Eğer bir tane i için N_i nilpotent grup ise G de çözülebilir grup olur. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla her i için N_i grupları nilpotent değildir. O zaman UN_i de nilpotent değildir. Her i için $F \leq UN_i$ olduğundan UN_i nin G deki

altnormal indeksi en fazla r dir. Dolayısıyla $[G,\ {}_rUN_i] \leq UN_i$ ve $[G,\ {}_rU] \leq [G,\ {}_rUN_i]$ olduğundan $[G,\ {}_rU] \leq UN_i$ dir. $[G, {}_{r+1}U] \leq [UN_i, U] \leq UN_i$ olduğundan $[G, {}_{r+k}U] \leq UN_i$ dir. $\gamma_k(G) \leq N$ olduğundan $[G,\ {}_kG] \leq N$ ve $[G,\ {}_kU] \leq N$ dir. N normal altgrup olduğundan $[G, {}_{k+1}U] \leq [N, U] \leq N$ dir. Dolayısıyla $[G, {}_{r+k}U] \leq N$ dir. Böylece $[G, {}_{r+k}U] \leq UN_i$ ve $[G, {}_{r+k}U] \leq N$ dir. O zaman $U \cap N = 1$ ve $\bigcap_{i=1}^{\infty} N_i = 1$ olduğundan

$[G, {}_{r+k}U] \leq \bigcap_{i=1}^{\infty}(UN_i \cap N) = \bigcap_{i=1}^{\infty} N_i(U \cap N) = \bigcap_{i=1}^{\infty} N_i = 1$

dir. Lemma 2.77 den U, G de altnormal altgruptur. Böylece G nin her sonlu altgrubu, sonlu ve altnormal bir altgrup tarafından kapsandığından G bir Baer gruptur.

[7] Lemma 5 den çözülebilir olmayan hiperabelyan bir grubun çözülebilir olmayan normal bir altgrubu vardır ve bu altgrubun hiperabelyanlık uzunluğu ω dır. Burada H, G nin çözülebilir olmayan ω hiperabelyanlık uzunluğuna sahip altgrubu olsun. Lemma 3.2 den r pozitif tamsayı olmak üzere H nın öyle bir sonlu üreteçli F altgrubu vardır ki H nın F yi kapsayan her çözülebilir olmayan altgrubunun H daki altnormallik indeksi en fazla r dir. Burada H hiperabelyan fakat çözülebilir olmadığından $G = H$ kabul edebiliriz. F, G nin bir normal çözülebilir H_0 altgrubu tarafından kapsanır. Bir d pozitif tamsayısı için H_0 ı çözülebilirlik uzunluğu d olacak şekilde maksimal normal seçebiliriz. Hipotezden H_0, G de altnormaldir ve G nin H_0 ı kapsayan her altgrubu nilpotent olmadığından altnormal altgruptur. Dolayısıyla G/H_0 nın her altgrubu altnormal altgruptur. $x \notin H_0$ olmak üzere $1 \neq xH_0 \in G/H_0$ dır. G rezidually çözülebilir olduğundan bir $K_x \lhd G$ için $x \notin K_x$ ve G/K_x çözülebilirdir. $xH_0 \notin K_x/H_0$ ve $H_0 \lhd K_x$ olduğundan $(G/H_0)/(K_x/H_0) \cong G/K_x$ ve G/K_x çözülebilirdir. Dolayısıyla G/H_0 rezidually çözülebilirdir. G/V, G/H_0 ın keyfi çözülebilir bir görüntüsü olsun. Eğer V bir nilpotent grup ise G çözülebilirdir. Bu çelişkiden dolayı V nilpotent grup değildir ve G nin altnormal altgrubudur. V, F yi kapsadığından V nin G deki altnormallik indeksi en fazla r dir. Dolayısıyla G/V nin her altgrubu altnormaldir ve altnormallik indeksleri en fazla r dir. [11] den G/V nin nilpotentlik sınıfı $c = c(r)$ dir. O zaman G/H_0 nilpotent gruptur. H_0 çözülebilir olduğundan G çözülebilir gruptur. Bu ise bir çelişkidir. O zaman G nin her hiperabelyan altgrubu çözülebilir bir gruptur.

x, G nin herhangi bir elemanı olsun. G bir Baer grup olduğundan $\langle x \rangle$, G nin altnormal altgrubudur. Kabul edelim ki $\langle x \rangle^G$ çözülebilir grup olmasın. $\langle x \rangle$ in G deki normal kapanış serisi göz önüne alınarak $A \lhd B \lhd C$, $B = A^C$ ve B çözülebilir olmayan ilk terim olacak

şekilde G nin çözülebilir A altgrubu ve B, C altgrupları vardır (burada $A = \langle x \rangle$, $B = \langle x \rangle^G$, $C = G$ olarak kabul edilebilir). Fakat B, A nın eşleniklerinin bir normal çarpımıdır. Böylece B hiperabelyandır ve dolayısıyla B çözülebilirdir. Bu çelişkiden dolayı G nin her x elemanı için $\langle x \rangle^G$ çözülebilirdir. G, $\langle x \rangle$ in eşleniklerinin normal çarpımı olduğundan G hiperabelyandır ve dolayısıyla G çözülebilir gruptur. Bu ise bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanır. ■

3.6. Sonuç

G, lokal (çözülebilir bir grubun sonlu genişlemesi) olan grup olsun. Eğer G nin her nilpotent olmayan altgrubu altnormal altgrup ise G bir çözülebilir gruptur.

İspat

M, G nin sonlu üreteçli altgrubu olsun. G lokal (çözülebilir bir grubun sonlu genişlemesi) olduğundan M çözülebilir bir grubun sonlu genişlemesidir. O zaman M nin öyle çözülebilir normal N altgrubu vardır ki M/N sonludur. Lemma 2.92 den G nin her sonlu kesimi çözülebilir olduğundan M/N çözülebilirdir. O zaman Lemma 2.63 den M çözülebilirdir. Dolayısıyla G lokal çözülebilir gruptur. Kabul edelim ki G çözülebilir grup olmasın. H ve K/H sırasıyla G ve G/H nın lokal nilpotent radikalleri olsun. Lemma 3.5 den H ve K/H çözülebilir gruptur. Lemma 2.63 den K çözülebilir gruptur ve G çözülebilir olmadığından G/K çözülebilir grup olamaz. Eğer G/K nın her altgrubu altnormal ise Möhres [10] den G/K çözülebilir grup olur. Dolayısıyla G/K nın altnormal olmayan bir altgrubu vardır. Bu grup T/K olsun. Eğer T, G de altnormal altgrup ise T/K, G/K da altnormal altgrubu olur. O zaman T, G de altnormal altgrup değildir. Dolayısıyla T nilpotent gruptur. H ve K, T nin altgrupları olduğundan Teorem 2.65 den H ve K nilpotenttir. O zaman HK nilpotent gruptur ve $H \leq HK$ dır. Fakat H, G nin lokal nilpotent radikali olduğundan $H = HK$ dır. Buradan da $K \leq H$ olur. Ayrıca $H \leq K$ olduğundan $H = K$ dır. Dolayısıyla G/H aşikar lokal nilpotent radikale sahiptir. H çözülebilir bir grup olduğundan G nin çözülebilir olduğunu göstermek için G/H nın çözülebilir olduğunu göstermek yeterlidir. G/H nın lokal nilpotent radikali aşikar olduğundan G nin lokal nilpotent radikalini aşikar kabul edebiliriz. G, lokal nilpotent olmadığından G nin sonlu üreteçli olan fakat nilpotent olmayan bir F altgrubu vardır. Hipotezden F, G de altnormal ve G lokal çözülebilir olduğundan F de çözülebilir

gruptur. F çözülebilir olduğundan Teorem 2.73 den F nin bir aşikar olmayan normal abelyan A altgrubu vardır. Buradan A, G nin altnormal altgrubudur. G nin lokal nilpotent radikali aşikar olduğundan A da aşikar gruptur. Fakat A aşikar olmayan bir grup olduğundan bu bir çelişkidir. O zaman kabul yanlış olduğundan G çözülebilir bir gruptur. ■

Teorem 1.1 in İspatı

G bir lokal (çözülebilir bir grubun sonlu genişlemesi) olan grup ve G nin her nilpotent olmayan altgrubu altnormal altgrup ve L, G nin lokal sonlu radikali olsun. Sonuç 3.6 dan G çözülebilir gruptur. Eğer G/L torsiyonsuz grup ise [13] Teorem 2 den G/L nilpotent gruptur. O zaman $L = 1$ olarak alınırsa G nin torsiyonsuz olduğunu göstermek yeterlidir. Çünkü G torsiyonsuz ise [13] Teorem 2 den G nilpotent gruptur. Böylece ispat tamamlanır. G nin çözülebilirlik uzunluğu üzerinden tümevarım uygulayarak G nin torsiyonsuz olduğunu gösterelim. Eğer G nin çözülebilirlik uzunluğu 1 ise G abelyandır. Dolayısıyla G nilpotent gruptur. O zaman çözülebilirlik uzunluğu G nin çözülebilirlik uzunluğundan küçük olan gruplar torsiyonsuz olsun. Kabul edelim ki G' nün çözülebilirlik uzunluğu c olsun. c, G nin çözülebilirlik uzunluğundan küçük olduğundan G' torsiyonsuzdur. (G' nün lokal sonlu radikali H olsun. $H\ char\ G'\ char\ G$ olduğundan Lemma 2.59 den $H \lhd G$ dir. G nin lokal sonlu radikali 1 olduğundan $H = 1$ dir.) T/G' , G/G' nün torsiyon altgrubu olsun. O zaman

$$(G/G')/(T/G') \cong G/T$$

ve Lemma 2.71 den G/T torsiyonsuzdur. G çözülebilir olduğundan Teorem 2.63 den T çözülebilirdir. Lemma 3.4 den T nin sonlu üreteçli her altgrubu sonlu bir grubun nilpotent genişlemesidir. Torsiyonsuz nilpotent olan bir grup eğer (c sınıfından nilpotent) bir grubun sonlu genişlemesi ise Lemma 2.83 den bu grup c sınıfından nilpotenttir. Böylece T nin her sonlu üreteçli altgrubu sonlu bir grubun (torsiyonsuz ve en fazla c sınıfından nilpotent) genişlemesidir. M, T nin sonlu üreteçli altgrubu ve F de M nin sonlu normal altgrubu ise M/F nilpotenttir. Bir c tamsayısı için

$$\gamma_{c+1}(M/F) = 1$$
$$\Rightarrow [M/F\ ,\ {}_cM/F] = 1$$
$$\Rightarrow [M,\ {}_cM]/F = 1$$

$\Rightarrow \gamma_{c+1}(M) \leq F$

dir. F sonlu olduğundan $\gamma_{c+1}(M)$ sonlu ve $\gamma_{c+1}(T)$ lokal sonludur. G nin lokal sonlu radikali aşikar olduğundan $\gamma_{c+1}(T)$ aşikardır. Böylece T torsiyonsuz gruptur. G/T torsiyonsuz olduğundan G torsiyonsuz gruptur. Dolayısıyla ispat tamamlanır. ■

Teorem 1.2 nin İspatı

G bir lokal dereceli grup ve kabul edelim ki bir n pozitif tamsayısı için G nin her nilpotent olmayan altgrubunun G deki altnormallik indeksi en fazla n olsun. Eğer G lokal (çözülebilir bir grubun sonlu genişlemesi) ise Lemma 2.76 dan G lokal dereceli bir gruptur. Eğer G nin lokal çözülebilir olduğu gösterilirse Sonuç 3.6 dan G nin çözülebilir olduğu gösterilmiş olur. Dolayısıyla G yi sonlu üreteçli kabul edebiliriz. O zaman G nin çözülebilir olduğunu göstermek yeterlidir. R, G nin sonlu rezidual altgrubu olsun. Kabul edelim ki G çözülebilir grup olmasın. Eğer G çözülebilir bir grubun sonlu genişlemesi ise Sonuç 3.6 dan G çözülebilir olur. Bu ise bir çelişkidir. Bundan dolayı G çözülebilir bir grubun sonlu genişlemesi değildir. G lokal dereceli ve sonlu üreteçli bir grup olduğundan G nin sonlu homomorfik görüntüsü vardır. O zaman G nin sonlu indeksli bir N altgrubu vardır. G çözülebilir bir grubun sonlu genişlemesi olmadığından N çözülebilir, dolayısıyla nilpotent grup olamaz. Hipotezden N, G nin altnormal altgrubudur ve N nin G deki altnormallik indeksi en fazla n dir. Dolayısıyla G nin her sonlu görüntüsünün her altgrubu altnormal altgruptur ve altnormallik indeksleri en fazla n dir. [11] Teorem 1 den G nin her sonlu görüntüsünün nilpotentlik sınıfı sınırlıdır. Böylece R, G nin sonlu reziduali olduğundan G/R nilpotenttir. Kabul edelim ki R, G nin sonlu üreteçli altgrubu olsun. R de sonlu indeksli ve G-invariant olacak şekilde R nin bir K öz altgrubu vardır. R/K sonlu, G/R nilpotent ve

$(G/K)/(R/K) \cong G/R$

olduğundan G/K sonlu üreteçli ve sonlu bir grubun nilpotent genişlemesidir. Böylece G/K sonlu bir grubun (residually sonlu) genişlemesi ve dolayısıyla G/K residually sonludur. O zaman $g \notin K$ olmak üzere her $1 \neq gK \in G/K$ için $gK \notin N_g/K$ olacak şekilde G/K nın N_g/K normal altgrubu vardır. Buradan $\bigcap_{g\notin K} N_g/K = 1$ dir. O zaman $(\bigcap_{g\notin K} N_g K)/K = 1$ olacağından $\bigcap_{g\notin K} N_g = K$ dır. G nin sonlu reziduali R olduğundan $R \leq K$ dır. Dolayısıyla

$K = R$ olur. Bu çelişkiden dolayı R sonlu üreteçli değildir. Ayrıca eğer R lokal nilpotent ise Teorem 1.1 den R çözülebilirdir. G/R çözülebilir olduğundan G çözülebilirdir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece R lokal nilpotent grup olamaz. O zaman R nin nilpotent olmayan sonlu üreteçli bir F öz altgrubu vardır. Hipotezden F, R nin altnormal altgrubudur. O zaman F^R, R nin öz altgrubudur. Dolayısıyla R/F^R aşikar değildir. R nin F^R yi içeren altgrupları nilpotent olmadığından R nin altnormal altgruplarıdır. Dolayısıyla R/F^R nin her altgrubu altnormal altgruptur ve altnormallik indeksleri en fazla n dir. Böylece [11] Teorem 1 den R/F^R nilpotenttir. $R' \, char \, R \lhd G$ olduğundan Lemma 2.59 dan $R' \lhd G$ olur. G/R çözülebilir, R/R' abelyan ve

$$(G/R')/(R/R') \cong G/R$$

olduğundan G/R' çözülebilirdir. G sonlu üreteçli olduğundan G/R' de sonlu üreteçlidir. Lemma 3.4 den G/R' sonlu bir grubun nilpotent genişlemesidir. Yukarıda yapılanlardan G/R' residually sonludur ve R, G nin sonlu reziduali olduğundan $R \leq R'$ dir. O zaman $R' = R$ dir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır. Böylece ispat tamamlanır. ■

4. ÖNERME 1.3 ÜN İSPATI

Bu bölümde G bir lokal sonlu grup ve G nin her nilpotent olmayan altgrubunun altnormal altgrup olduğu kabul edilecektir.

4.1. Lemma

p bir asal sayı olmak üzere G/A abelyan p-grup olacak şekilde G nin bir normal abelyan A altgrubu olsun. O zaman G hemen hemen lokal nilpotent gruptur.

İspat

Kabul edelim ki G hemen hemen lokal nilpotent grup olmasın ve N de G nin lokal nilpotent radikali olsun. N nin p-radikali M ve p'-radikali ise B olsun. O zaman G periyodik ve N lokal nilpotent olduğundan $N = M \times B$ dir. Kabul edelim ki M, G nin p-radikali olmasın. O zaman $x \in G \backslash M$ olacak şekilde $\langle x \rangle$ p-grubu vardır. G lokal sonlu olduğundan $\langle x \rangle$ sonludur ve $o(x) = p^k$ olacak şekilde bir $k \geq 0$ tamsayısı vardır. Eğer $k = 0$ ise $x = 1$ olduğundan x, M nin elemanı olur ki bu bir çelişkidir. O zaman $k \geq 1$ dir. $\langle x \rangle$ sonlu p-grup olduğundan Lemma 2.68 den nilpotenttir. Ayrıca $\langle x \rangle \leq N$ dir ve M, N nin p-radikali olduğundan $\langle x \rangle \leq M$ dir. Bu ise bir çelişkidir. O zaman M, G nin p-radikali ve benzer şekilde N de G nin p'-radikalidir. G/A bir p-grup olduğundan BA/A da bir p-gruptur. İkinci izomorfizma Teoremi'nden $BA/A \cong B/B \cap A$ olduğundan $B/B \cap A$ da bir p-gruptur. B, p'-radikali olduğundan p, $B/B \cap A$ mertebesini bölmez. O zaman $BA/A = 1$ ve böylece $B \leq A$ dır. O zaman N nin p'-radikali B, A tarafından içerilir. Kabul edelim ki $M \leq K$ ve K/M lokal nilpotent olacak şekilde G nin sonlu indeksli K normal altgrubu olsun. O zaman

$$BM/M = B/B \cap M \cong B$$

ve B bir p'-grup olduğundan G nin bir L, p-altgrubu için

$$K/M \cong L/M \times BM/M \cong (L \times BM)/M$$

dir. Böylece $K \cong L \times BM$ dir. Burada K/M nin p'-radikali BM/M ve L/M ise p-radikalidir.

B ve M lokal nilpotent olduğundan Teorem 2.75 den BM lokal nilpotenttir. G lokal sonlu grup olduğundan L nin her sonlu üreteçli altgrubu sonlu p-grubu olduğundan L lokal nilpotenttir. Dolayısıyla K lokal nilpotent gruptur. K, G nin sonlu indeksli lokal nilpotent altgrubu olduğundan G hemen hemen lokal nilpotent gruptur. Bu ise kabulümüzle çelişir. O zaman M yi kapsayan bir lokal nilpotent grup yoktur ve G/M aşikar p-radikale sahiptir. Böylece G nin p-radikalini aşikar kabul edebiliriz. O zaman $B = N$ olur. G nin p-radikali aşikar olduğundan A bir p'-gruptur. A abelyan grup olduğundan nilpotenttir. $B \leq A$ olduğundan A, G nin lokal nilpotent radikalidir.

Eğer G/A sonlu grup ise A nilpotent olduğundan G hemen hemen nilpotent gruptur. Bu ise bir çelişkidir. O zaman G/A sonsuz bir gruptur. Sylow Teoremi'nden G nin her sonlu p-altgrubu daha büyük bir p-altgrubu tarafından kapsanır. Böylece H yı G nin sonsuz p-altgrubu olarak alabiliriz. $H \cap A = 1$ ve $A \lhd G$ olduğundan $A \lhd HA$ dır. A, G nin lokal nilpotent radikali olduğundan A, HA nın da lokal nilpotent radikalidir. O zaman $G = HA$ olduğunu kabul edebiliriz. G/A abelyan ve

$$G/A = HA/A \cong H/H \cap A \cong H/1 \cong H$$

olduğundan H abelyandır. $h \in H$ olsun. G abelyan olmadığından $U\langle h\rangle$ abelyan olmayacak şekilde A nın sonlu $\langle h\rangle$-invariant bir U altgrubunu seçelim. Eğer $U\langle h\rangle$ nilpotent ise $\langle h\rangle$, $U\langle h\rangle$ nın altnormal altgrubu olur. $U \cap \langle h\rangle = 1$ olduğundan U ile $\langle h\rangle$ nın her elemanı değişmeli dolayısıyla $U\langle h\rangle$ abelyan olur. Bu ise çelişkidir. Bu nedenle $U\langle h\rangle$ nilpotent grup olamaz. Hipotezden $U\langle h\rangle$, G nin altnormal altgrubudur. Lemma 2.77 den bir $r \in \mathbb{Z}^+$ için $[G, {}_rU\langle h\rangle] \leq U\langle h\rangle$ dır. Ayrıca $[G, {}_r\langle h\rangle] \leq [G, {}_rU\langle h\rangle]$ dir. Dolayısıyla $[G, {}_r\langle h\rangle] \leq U\langle h\rangle$ dır. H abelyan ve A normal altgrup olduğundan

$$[G, \langle h\rangle] = [HA, \langle h\rangle] = [A, \langle h\rangle] \leq A$$

dir. Böylece her $r \in \mathbb{Z}^+$ için $[G, {}_r\langle h\rangle] \leq A$ dır. Böylece $[G, {}_r\langle h\rangle] \leq A \cap U\langle h\rangle = U$ dur. A, G nin abelyan altgrubu olduğundan $[A, {}_r\langle h\rangle] \lhd A$ dır. O zaman

$$[A/[A, {}_r\langle h\rangle], {}_r\langle h\rangle] = [A, {}_r\langle h\rangle]/[A, {}_r\langle h\rangle] = 1$$

dir. Böylece $\langle h\rangle$, $A/[A,\ {}_r\langle h\rangle]$ üzerine nilpotent etki eder. H bir p-grup ve A bir p'-grup olduğundan $\langle h\rangle$ bir p-grup ve $A/[A,\ {}_r\langle h\rangle]$ bir p'-gruptur. Dolayısıyla Lemma 2.48 den $\langle h\rangle$, $A/[A,\ {}_r\langle h\rangle]$ üzerine aşikar etki eder. O zaman $[A/[A,\ {}_r\langle h\rangle]\ ,\langle h\rangle] = 1$ dir. Böylece $[A,\langle h\rangle] \leq [A,\ {}_r\langle h\rangle]$ dir. Dolayısıyla $[A,\langle h\rangle] = [A,\ {}_r\langle h\rangle]$ dir. Yukarıdan $[G,\ {}_r\langle h\rangle] \leq U$ ve $[A,\ {}_r\langle h\rangle] \leq [G,\ {}_r\langle h\rangle]$ olduğundan $[A,\langle h\rangle] \leq U$ olur. H abelyan olduğundan

$$\langle h\rangle^G = \langle h\rangle^{HA} = \langle h\rangle^A$$

dır. Böylece $\langle h\rangle^A = \langle h\rangle[A,\langle h\rangle] \leq U\langle h\rangle$ olur. $\langle h\rangle$ ve U sonlu olduğundan $\langle h\rangle^G = \langle h\rangle^A$ sonludur. $[U,\langle h\rangle] \leq [A,\langle h\rangle] \leq \langle h\rangle^G$ olduğundan $\langle h\rangle^G$, $\langle h\rangle$ ve $[U,\langle h\rangle]$ içerir. Kabul edelim ki $\langle h\rangle$, $[U,\langle h\rangle]$ üzerine nilpotent etki etsin. O zaman bir r için

$$[[U,\langle h\rangle],\ {}_r\langle h\rangle] = [U,{}_{r+1}\langle h\rangle] = 1$$

dir. O zaman $\langle h\rangle$, U üzerine nilpotent etki eder. $\langle h\rangle$ bir p-grup ve U bir p'-grup olduğundan Lemma 2.48 den $[U,\langle h\rangle] = 1$ dir. Dolayısıyla $U\langle h\rangle$ abelyan gruptur. Bu ise bir çelişkidir. O zaman $\langle h\rangle$, $[U,\langle h\rangle]$ üzerine nilpotent etki etmez. O zaman her $r \in \mathbb{Z}^+$ için $[[U,\langle h\rangle],\ {}_r\langle h\rangle] \neq 1$ olduğundan $[\langle h\rangle^G,\ {}_r\langle h\rangle^G] \neq 1$ dir. Buradan $\langle h\rangle^G$, G nin nilpotent altgrubu değildir. $\langle h\rangle^G$ yi içeren G nin her altgrubu nilpotent olmadığından G de altnormal altgrupturlar. O zaman $G/\langle h\rangle^G$ nin her altgrubu altnormaldir. G lokal sonlu olduğundan $G/\langle h\rangle^G$ nın her sonlu üreteçli altgrubu sonludur. Ayrıca bu sonlu grubun her altgrubu altnormal olduğundan nilpotent gruptur. Böylece Teorem 2.64 den $G/\langle h\rangle^G$ lokal nilpotent gruptur. $\langle h\rangle^G$, G nin normal altgrubu olduğundan $N_G(\langle h\rangle^G) = G$ dir. $\langle h\rangle^G$ sonlu olduğundan Teorem 2.62 den $Aut(\langle h\rangle^G)$ sonludur. Dolayısıyla Lemma 2.61 den $G/C_G(\langle h\rangle^G)$ sonludur. $G/\langle h\rangle^G$ lokal nilpotent olduğundan $C_G(\langle h\rangle^G)/\langle h\rangle^G$ lokal nilpotenttir. O zaman $x_1, x_2, \cdots, x_n \in C_G(\langle h\rangle^G)$ için $\langle x_1, \cdots, x_n\rangle\langle h\rangle^G/\langle h\rangle^G$ nilpotent gruptur. O zaman bir $r \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\gamma_r(\langle x_1, \cdots, x_n\rangle\langle h\rangle^G/\langle h\rangle^G) = 1$$

$$\Rightarrow [\langle x_1, \cdots, x_n\rangle\langle h\rangle^G/\langle h\rangle^G\ ,\ {}_r\langle x_1, \cdots, x_n\rangle\langle h\rangle^G/\langle h\rangle^G] = 1$$

$\Rightarrow ([\langle x_1, \cdots, x_n \rangle,\ {}_r\langle x_1, \cdots, x_n \rangle]\langle h \rangle^G)/\langle h \rangle^G = 1$

$\Rightarrow \gamma_r(\langle x_1, \cdots, x_n \rangle) \leq \langle h \rangle^G$

dir. $x_1, x_2, \cdots, x_n \in C_G(\langle h \rangle^G)$ olduğundan

$\gamma_{r+1}(\langle x_1, \cdots, x_n \rangle) \leq [\langle h \rangle^G, \langle x_1, \cdots, x_n \rangle] = 1$

dir. O zaman $\gamma_{r+1}(\langle x_1, \cdots, x_n \rangle) = 1$ dir. Böylece $C_G(\langle h \rangle^G)$ lokal nilpotenttir ve G hemen hemen lokal nilpotent gruptur. Bu çelişkiden dolayı ispat tamamlanır. ■

4.2. Sonuç

p bir asal sayı olmak üzere G/X abelyan p-grup olacak şekilde G nin bir normal lokal nilpotent X altgrubu olsun. O zaman G hemen hemen lokal nilpotent gruptur.

İspat

Kabul edelim ki G hemen hemen lokal nilpotent grup olmasın. Lemma 4.1 in ispatında olduğu gibi G nin aşikar p-radikale sahip olduğunu ve G nin bir p-altgrubu H için $G = XH$ olduğunu kabul edebiliriz. G lokal sonlu grup olduğundan Sonuç 3.6 dan G çözülebilirdir. Dolayısıyla Teorem 2.63 den X çözülebilir gruptur. X in çözülebilirlik uzunluğu üzerine tümevarım yapalım. X in çözülebilirlik uzunluğu n olsun. $X^{(n-1)} = A$ olsun. O zaman A, X in G-invariant abelyan altgrubudur. Tümevarımdan G/A ve HA nın çözülebilirlik uzunlukları n den küçük olduğu için hemen hemen lokal nilpotent grup olarak kabul edebiliriz. (Burada X i p'-grup olarak kısıtlıyoruz.) O zaman H nın sonlu indeksli bir K altgrubu için XK/A ve KA lokal nilpotent grupturlar. KA lokal nilpotent, A bir p'-grup ve K p-grup olduğundan Teorem 2.95 den $[K, A] = 1$ dir. XK/A lokal nilpotent olduğundan

$[XA/A\,, KA/A] = 1$

$\Rightarrow ([XA, KA]A)/A = 1$

$\Rightarrow [X, KA] \leq A$

dır. O zaman

$[X, KA] = [X, A][X, K]^A \leq A$

$\Rightarrow [X, A] \leq A$

olduğundan $[X, K] \leq A$ dır. $[X, K, K] \leq [A, K] = 1$ olduğundan K, X üzerine nilpotent etki eder. Lemma 2.48 den bu etki aşikar etkidir. O zaman $[X, K] = 1$ olur. Böylece K, X-invariant gruptur. Dolayısıyla K, G nin normal altgrubudur. KA lokal nilpotent olduğundan K da lokal nilpotent gruptur. O zaman Teorem 2.75 den XK lokal nilpotenttir. $G/XK \cong H/K$ ve H/K sonlu olduğundan XK, G de sonlu indekslidir. O zaman G hemen hemen lokal nilpotent bir gruptur. Bu çelişki ile ispat tamamlanır. ■

4.3. Lemma

Birbirinden farklı p_i asal sayıları için G/X devirli p_i-gruplarının direkt çarpımı olacak şekilde G nin bir normal lokal nilpotent X altgrubu olsun. O zaman G hemen hemen lokal nilpotent gruptur.

İspat

Kabul edelim ki G hemen hemen lokal nilpotent grup olmasın. p_i ler farklı asal sayılar olmak üzere her $i = 1,2 \ldots$ için g_i nin mertebesi p_i nin bir kuvveti olsun. G/X grubu devirli p_i-gruplarının direkt çarpımı olduğundan $\langle g_i \rangle X = \langle g_i X \rangle$ devirli grupların direkt çarpımı olarak yazabiliriz. $H = \langle g_i | i = 1,2, \cdots \rangle$ olsun. Böylece $G = XH$ dır. Önce X in abelyan olduğunu durumu inceleyelim. O zaman G, $X\langle g_i \rangle$ normal altgruplarının çarpımıdır. Eğer her i için $X\langle g_i \rangle$ lokal nilpotent ise Teorem 2.75 den G bir lokal nilpotent gruptur. Bu ise bir çelişkidir. O zaman G hemen hemen lokal nilpotent olmadığından bir j asal sayısı için $X\langle g_j \rangle$ nin lokal nilpotent olmadığını kabul edebiliriz. $g = g_j$, $p = p_j$ olsun. X in p-radikalini aşikar kabul edebiliriz. O zaman G nin bir X normal p'-altgrubu için $G = X\langle g \rangle$ dir. $U\langle g \rangle$ nilpotent olmayacak şekilde X in sonlu $\langle g \rangle$-invariant altgrubu U olsun. Hipotezden $U\langle g \rangle$, G nin

altnormal altgrubudur. O zaman bir $r \in \mathbb{Z}^+$ için $[G,\ {}_rU\langle g\rangle] \leq U\langle g\rangle$ dir. Ayrıca $[G,\ {}_r\langle g\rangle] \leq [G,\ {}_rU\langle g\rangle]$ olduğundan $[G,\ {}_r\langle g\rangle] \leq U\langle g\rangle$ dir. $\langle g\rangle$ abelyan ve X normal altgrup olduğundan

$$[G,\langle g\rangle] = [X\langle g\rangle,\langle g\rangle] = [X,\langle g\rangle] \leq X$$

dir. O zaman her $r \geq 1$ tamsayısı için r üzerine tümevarım uygulanırsa

$$[G,\ {}_r\langle g\rangle] = [[G,\langle g\rangle],\ {}_{r-1}\langle g\rangle] \leq [X,\ {}_{r-1}\langle g\rangle] \leq X$$

dir. Böylece $[G,\ {}_r\langle g\rangle] \leq X \cap U\langle g\rangle = U$ dur. $[X,\ {}_r\langle g\rangle] \lhd X$ olduğundan

$$[X/[X,\ {}_r\langle g\rangle],\ {}_r\langle g\rangle] = [X,\ {}_r\langle g\rangle]/[X,\ {}_r\langle g\rangle] = 1$$

dir. O zaman $\langle g\rangle$, $X/[X,\ {}_r\langle g\rangle]$ üzerine nilpotent etki eder. $\langle g\rangle$ bir p-grup ve $X/[X,\ {}_r\langle g\rangle]$ bir p'-grup olduğundan Lemma 2.48 den bu etki aşikar etkidir. O zaman

$$[X/[X,\ {}_r\langle g\rangle]\,,\langle g\rangle] = 1$$

$$\Rightarrow [X,\langle g\rangle]/[X,\ {}_r\langle g\rangle] = 1$$

dir. Böylece $[X,\langle g\rangle] \leq [X,\ {}_r\langle g\rangle]$ olur. Buradan da $[X,\langle g\rangle] = [X,\ {}_r\langle g\rangle]$ dir. $[G,\ {}_r\langle g\rangle] \leq U$ olduğundan $[X,\langle g\rangle] \leq U$ ve U sonlu olduğundan $[X,\langle g\rangle]$ sonlu gruptur. $\langle g\rangle$ abelyan grup olduğundan $\langle g\rangle^G = \langle g\rangle^{X\langle g\rangle} = \langle g\rangle^X$ dır. Böylece

$$\langle g\rangle^G = \langle g\rangle^X = \langle g\rangle[X,\langle g\rangle] \leq U\langle g\rangle$$

dir. U ve $\langle g\rangle$ sonlu grup olduğundan $\langle g\rangle^G$ sonludur. O zaman Lemma 4.1 den G hemen hemen lokal nilpotent gruptur.

X abelyan ise yukarıda yazılanlardan aşağıdakiler elde edilir: Eğer bir p_i asal sayısı için $X\langle g_i\rangle$ lokal nilpotent değil ise X in p_i-radikali P_i olmak üzere $X\langle g_i\rangle/P_i$ lokal nilpotent ise bu bir çelişkidir. O zaman $X\langle g_i\rangle/P_i$ lokal nilpotent değildir. İlk durumda olduğu gibi G/P_i,

devirli $X\langle g_i\rangle/P_i$ lerin direkt çarpımı ve $X\langle g_i\rangle/P_i$ ler lokal nilpotent olmadığı için G/P_i hemen hemen lokal nilpotent gruptur. Birbirinden farklı p_i, p_j asal sayıları için G/P_i ve G/P_j hemen hemen lokal nilpotent grup olsun. $P_i \cap P_j = 1$ ve buradan

$$G/P_i \cap G/P_j \cong G/P_i \cap P_j \cong G$$

dir. Teorem 2.70 den G hemen hemen lokal nilpotent gruptur. O zaman en fazla bir p_j asal sayısı hariç her p_i asal sayısı için $X\langle g_i\rangle$ lokal nilpotent olsun. $B = \prod_{i\neq j} X\langle g_i\rangle$ olsun. Her i için $X\langle g_i\rangle \lhd G$ olduğundan Teorem 2.75 den B lokal nilpotent gruptur. $G/B \cong \langle g_j\rangle$ sonlu olduğundan G hemen hemen lokal nilpotent gruptur. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır. O zaman X i abelyan grup olarak alabiliriz.

G bir lokal sonlu grup olduğundan Lemma 3.5 den G çözülebilir gruptur. G nin çözülebilirlik uzunluğu üzerine tümevarım uygulayalım. G nin çözülebilirlik uzunluğu n olsun. G de sonlu indeksli olacak şekilde X in G-invariant abelyan A altgrubu için. G/A nın çözülebilirlik uzunluğu n den küçük olduğundan tümevarım hipotezinden G/A yı lokal nilpotent bir grup olarak kabul edebiliriz. H grubu g_i ler tarafından üretildiği için HA grubu $A\langle g_i\rangle$ altgruplarının direkt çarpımıdır. Böylece $A\langle g_i\rangle$ hemen hemen lokal nilpotent olduğundan HA hemen hemen lokal nilpotenttir. Sonlu indeksli altgruplara geçilirse HA yı lokal nilpotent alabiliriz. O zaman G nin lokal nilpotent olduğunu göstermek yeterlidir. Bir i için V, X in keyfi sonlu $\langle g_i\rangle$-invariant altgrubu olsun. $[V,\langle g_i\rangle] \leq V$ olduğundan tümevarımla bir r tamsayısı için $[V, {}_r\langle g_i\rangle] \leq V$ dir. G/A lokal nilpotent olduğundan özel olarak sonlu tane g_i için $\langle g_i\rangle A/A$ nilpotenttir. Bir r tamsayısı için

$$\gamma_r(\langle g_i\rangle A/A) = 1$$

$$\Rightarrow [\langle g_i\rangle A/A\,, {}_{r-1}\langle g_i\rangle A/A] = 1$$

$$\Rightarrow ([\langle g_i\rangle, {}_{r-1}\langle g_i\rangle]A)/A = 1$$

$$\Rightarrow [\langle g_i\rangle, {}_{r-1}\langle g_i\rangle] \leq A$$

$\Rightarrow \gamma_r(\langle g_i \rangle) \leq A$

olur. Buradan $[V,\ {}_r\langle g_i \rangle] \leq V \cap A$ dır. V, $\langle g_i \rangle$-invariant olduğundan ve

$[V, {}_{r+s}\langle g_i \rangle] = [V,\ {}_r\langle g_i \rangle,\ {}_s\langle g_i \rangle] \leq [V \cap A,\ {}_s\langle g_i \rangle] = 1$ dir.

O zaman $X\langle g_i \rangle$ lokal nilpotent olur. i keyfi olduğundan G hemen hemen lokal nilpotent gruptur. Bu çelişkiden dolayı ispat tamamlanır. ■

Önerme 1.3 ün İspatı

G bir lokal sonlu grup ve G nin her nilpotent olmayan altgrubu altnormal altgrup olsun. Kabul edelim ki G hemen hemen lokal nilpotent olmasın. G lokal sonlu olduğundan Sonuç 3.6 dan dolayı G çözülebilir gruptur. G nin çözülebilirlik uzunluğu n olsun ve n üzerinden tümevarım uygulayarak G nin hemen hemen lokal nilpotent olduğunu söyleyelim. G' nün çözülebilirlik uzunluğu n den küçük olduğundan G' nün hemen hemen lokal nilpotent olduğunu kabul edebiliriz. O zaman G' nin öyle normal lokal nilpotent M altgrubu vardır ki G'/M sonludur. $M^G \leq G'$ ve $M^G = N$ olsun. O zaman G'/N sonlu ve $N \lhd G$ dir.

$(G/N)/(G'/N) \cong G/G'$

ve G/G' abelyan olduğundan G/N sonlu bir grubun abelyan genişlemesidir. Burada N yi G nin lokal nilpotent radikali olarak seçebiliriz. $(G/N)/(F/N)$ abelyan olacak şekilde F/N sonlu altgrubu vardır. O zaman $\gamma_2((G/N)/(F/N)) = 1$ olduğundan $\gamma_2(G/N) \leq F/N$ dir. [3] Teorem 4.25 den G/N nin $K/N = Z_2(G/N)$ olacak şekilde sonlu indeksli altgrup vardır. $Z_2(G/N) \lhd G/N$ olduğundan $(G/N)/(K/N) \cong G/K$ sonlu olur. $N \leq K$ olacak şekilde K, G nin sonlu indeksli normal altgrubu olur. $K/N \lhd G/N$ ve $Z_2(G/N) \leq Z_2(K/N)$ olduğundan $Z_2(K/N) = K/N$ dir. Dolayısıyla K/N en fazla 2 sınıfından nilpotenttir. $N \leq K$ olduğundan K nın N yi içeren her altgrubunun lokal nilpotent radikali N dir. Kabul edelim ki K/N sonlu olsun. O zaman G/K da sonlu olduğundan G/N sonlu ve N sonlu olduğundan G sonludur. Bu çelişkiden dolayı K/N sonsuz gruptur. K/N sonsuz grup olduğundan Teorem 2.85 den K/N nın sonsuz abelyan altgrubu vardır. G/N sonlu bir grubun abelyan genişlemesi olduğundan G/N abelyan olması durumunda hemen hemen lokal nilpotent

olduğunu göstermek yeterlidir. O zaman G/N yi abelyan kabul edebiliriz. O zaman G/N nin bir sonsuz J/N altgrubu vardır. Öyle ki bu J/N sonsuz altgrubu p bir asal sayı olmak üzere bir p-grup ya da p_i ler birbirinden farklı asal sayılar olmak üzere devirli p_i-grupların direkt çarpımıdır. Böylece Sonuç 4.2 ve Lemma 4.3 den J/N sonludur. Bu ise bir çelişkidir. Bundan dolayı ispat tamamlanır. ■

5. BAER GRUPLAR

Teorem 1.4 ün büyük bir kısmı Lemma 5.1 de gösterilmiştir. Her Baer grup lokal nilpotent grup olduğundan lokal nilpotent gruplar için yapılanlar burada kullanılabilir.

5.1. Lemma

p bir asal sayı ve G bir lokal sonlu p-grup olsun. Kabul edelim ki G bir Baer gruptur ve G nin her nilpotent olmayan altgrubu altnormal altgrup olsun. G/A abelyan olacak şekilde A, G nin bir normal abelyan altgrubu olsun. O zaman G nin her altgrubu altnormaldir.

İspat

Kabul edelim ki G nin her altgrubu altnormal altgrup olmasın. G bir Baer grup olduğundan G lokal nilpotent gruptur. Önce G yi hipermerkez grup ve G nin hipermerkezlik uzunluğunun ω olduğunu kabul edelim. r pozitif tamsayı olmak üzere Lemma 3.3 den G nin öyle bir sonlu üreteçli F altgrubu vardır ki G nin F yi kapsayan her nilpotent olmayan altgrubunun G deki altnormallik indeksi en fazla r dir. G lokal sonlu olduğundan F sonlu gruptur. G hipermerkez grup olduğundan bir m pozitif tamsayısı için $F \leq Z_m(G)$ dir. G nin her H altgrubu $HZ_m(G)$ nin altnormal altgrubudur. F^G, F yi kapsadığından F^G nin G deki altnormallik indeksi en fazla r dir. Buradan G/F^G faktör grubunun her altgrubu altnormal olduğundan G nin her nilpotent olmayan altgrubunun altnormallik indeksinin en fazla r olduğunu kabul edebiliriz. H, G nin altnormal olmayan altgrubu olsun. G/A abelyan olduğundan HA/A, G/A da normaldir. Dolayısıyla $HA \lhd G$ dir. Eğer HA nın her altgrubu altnormal altgrup ise G nin de her altgrubu altnormal altgrup olacaktır. O zaman $G = HA$ olduğunu kabul edebiliriz. Böylece

$$(H/H \cap A) \cap (A/H \cap A) = 1$$

olduğundan gerekirse faktör grubuna geçerek $H \cap A = 1$ olduğunu kabul edebiliriz. O zaman G/A abelyan ve

$$G/A \cong HA/A \cong H/H \cap A \cong H$$

olduğundan H abelyandır. $L = [A, {}_{r+1}H]$ ve $K = [A, {}_{r}H]$ olsun. O zaman Lemma 2.77 den

$$HL = H[A, {}_{r+1}H] = H[AH, {}_{r+1}H] = H[G, {}_{r+1}H] = H^{G,r+1}$$

dir. $HL = H^{G,r+1} \lhd H^{G,r} \lhd \cdots \lhd H^{G,0} = G$ olduğundan HL, G de altnormal altgruptur. Eğer HL nilpotent ise H, HL nin altnormal altgrubu olur. Dolayısıyla Teorem 2.78 den H, G nin de altnormal altgrubudur. Bu ise bir çelişkidir. O zaman HL, G nin nilpotent altgrubu değildir ve G deki altnormallik indeksi en fazla r dir. Dolayısıyla $[G, {}_{r}HL] \leq HL$ dır. $A \lhd G$ olduğundan $K = [A, {}_{r}H] \leq A$ dır. H abelyan olduğundan

$$[A, {}_{r}H] = [HA, {}_{r}H] = [G, {}_{r}H] \leq [G, {}_{r}HL] \leq HL$$

dir. $L \leq A$ ve $A \cap H = 1$ olduğundan Dedekind Modüler Kuralı'ndan

$$[A, {}_{r}H] \leq HL \cap A = (H \cap A)L = L$$

dır. Böylece $K = [A, {}_{r}H] \leq L$ olur. $L = [A, {}_{r+1}H] \leq [A, {}_{r}H] = K$ olduğundan $K = L$ dir. A ve H abelyan olduğundan her i için

$$[A, {}_{i}H] = [HA, {}_{i}HA] = [G, {}_{i}G]$$

dir. G nin hipermerkezlik indeksi ω olduğundan $\gamma_{\omega+1}(G) = 1$ dir. Dolayısıyla

$$[\gamma_{\omega}(G), G] = 1$$

$$\Rightarrow \gamma_{\omega}(G) \leq Z(G)$$

dir. Böylece $\gamma_{\omega}(G)$, G nin merkezindedir. Ayrıca $K = L$ olduğundan

$$K = [A, {}_{r}H] = [A, {}_{r+1}H] = [A, {}_{w}H] \leq \gamma_{\omega}(G)$$

dir ve K, G nin merkezindedir. O zaman

$1 = [K, G] = [[A,\ {}_rH], G] = [[G,\ {}_rG], G] = [G, {}_{r+1}G]$

olduğundan G nilpotent gruptur. Dolayısıyla H, G nin altnormal altgruptur. Bu çelişkiden dolayı G hipermerkez bir grup olamaz.

Genel durumda H, G nin altnormal olmayan bir altgrubu olsun. Böylece yukarıda olduğu gibi $G = HA$ ve $H \cap A = 1$ olduğunu kabul edebiliriz. $A \lhd G$ olduğundan bir $h \in H$ için $[A, \langle h\rangle] < A$ dır. G/A abelyan ve $A \leq C_G(A) \lhd G$ olduğundan $G/C_G(A)$ abelyandır. Lemma 2.56 dan

$[[A, \langle h\rangle], G] = [[A, G], \langle h\rangle] \leq [A, \langle h\rangle]$

dır. $[G, [A, \langle h\rangle]] \leq [A, \langle h\rangle]$ olduğundan $[A, \langle h\rangle] \lhd G$ dir. Kabul edelim ki $G/[A, \langle h\rangle]$ nilpotent ve nilpotentlik sınıfı s olsun. O zaman

$\gamma_{s+1}(G/[A, \langle h\rangle]) = [G/[A, \langle h\rangle]\ ,\ {}_sG/[A, \langle h\rangle]\ ] = 1$

dir. Teorem 2.53 den

$([G,\ {}_sG][A, \langle h\rangle])/[A, \langle h\rangle] = 1$

$\Rightarrow [G,\ {}_sG] \leq [A, \langle h\rangle]$

dir. Dolayısıyla $[A,\ {}_sG] \leq [A, \langle h\rangle]$ dır. Eğer t tamsayı olmak üzere B, A nın G/B faktör grubu t sınıfından nilpotent olacak şekilde bir keyfi G-invariant altgrubu ise o zaman benzer şekilde $[A,\ {}_tG] \leq [G,\ {}_tG] \leq B$ dir. B abelyan normal olduğundan Lemma 2.56 dan

$[G, [B, \langle h\rangle]] = [[B, \langle h\rangle], G] = [[B, G], \langle h\rangle] \leq [B, \langle h\rangle]$

dir. Dolayısıyla $[B, \langle h\rangle] \lhd G$ dir. A ve B normal altgrup olduğundan

$[A, {}_{s+1}G] = [[A,\ {}_sG], G] \leq [[A, \langle h\rangle], G] = [[A, G], \langle h\rangle] \leq [A, \langle h\rangle]$

ve

$$[A, {}_{t+1}G] = [[A, {}_{t}G], G] \leq [B, G] \leq B$$

dir. Böylece

$$[A, {}_{s+1}G, {}_{t+1}G] \leq [A, \langle h\rangle, {}_{t+1}G] = [A, {}_{t+1}G, \langle h\rangle] \leq [B, \langle h\rangle]$$

dır. G, Baer grup olduğundan $\langle h\rangle$, G de altnormal altgruptur. O zaman bir $m \in \mathbb{Z}^{+}$ için $[G, {}_{m}\langle h\rangle] \leq \langle h\rangle$ dır. $\langle h\rangle$ abelyan olduğundan

$$[A, {}_{m+1}\langle h\rangle] \leq [G, {}_{m+1}\langle h\rangle] = [[G, {}_{m}\langle h\rangle], \langle h\rangle] \leq [\langle h\rangle, \langle h\rangle] = 1$$

dir. Buradan her $h \in H$ için öyle bir m pozitif tamsayısı vardır ki $[A, {}_{m}\langle h\rangle] = 1$ dir. m pozitif tamsayısı üzerinden tümevarım uygulayarak bir n tamsayısı için $[A, {}_{n}G] = 1$ olduğunu gösterelim. $m = 1$ ve her $h \in H$ için $[A, \langle h\rangle] = 1$ olsun.

$$[A, {}_{s+1}G, {}_{t+1}G] \leq [A, \langle h\rangle, {}_{t+1}G] = [A, {}_{t+1}G, \langle h\rangle] \leq [B, \langle h\rangle] \leq [A, \langle h\rangle] = 1$$

ise o zaman bir n tamsayısı için $[A, {}_{n}G] = 1$ dir. O zaman $m > 1$ ve iddia $m - 1$ için doğru olsun. $[A, {}_{m-1}\langle h\rangle] = 1$ ise bir n tamsayısı için $[A, {}_{n}G] = 1$ dir.

$$[A, {}_{m}\langle h\rangle] \leq [A, {}_{m-1}\langle h\rangle] = 1$$

olduğundan iddia sağlanır. Böylece $[G, {}_{n}G] = [A, {}_{n}G] = 1$ dir. Buradan G nilpotent gruptur. Bu ise bir çelişkidir. O zaman her $h \in H$ için $G/[A, \langle h\rangle]$ nilpotent grup olamaz. Eğer $H[A, \langle h\rangle]\ sn\ G$ ise $H[A, \langle h\rangle]/[A, \langle h\rangle]\ sn\ G/[A, \langle h\rangle]$ ve A abelyan olduğundan Lemma 2.91 den $G/[A, \langle h\rangle]$ nilpotent olur. Bu ise bir çelişkidir. O zaman $H[A, \langle h\rangle]$, G de altnormal altgrup değildir. Hipotezden $H[A, \langle h\rangle]$, G de nilpotent gruptur. O zaman $h \in H$ için öyle bir $c = c(\langle h\rangle)$ vardır ki

$$[H[A, \langle h\rangle], {}_{c}H[A, \langle h\rangle]] = 1$$

$\Rightarrow [[A,\langle h\rangle],\ {}_cH[A,\langle h\rangle]] = 1$

$\Rightarrow [[A,\langle h\rangle],\ {}_cHA[A,\langle h\rangle]] = 1$

$\Rightarrow [[A,\langle h\rangle],\ {}_cG] = 1$

$\Rightarrow [A,\langle h\rangle] \leq Z_c(G)$

dir. H abelyan olduğundan

$[G,\langle h\rangle] = [HA,\langle h\rangle] = [A,\langle h\rangle] \leq Z_c(G)$

dir. $[\langle h\rangle, G] \leq Z_c(G)$ ise

$[(\langle h\rangle Z_c\ (G))/Z_c\ (G), G/Z_c\ (G)] = 1$

$\Leftrightarrow \langle h\rangle Z_c\ (G)/Z_c\ (G) \leq Z(G/Z_c\ (G)) = Z_{c+1}(G)/Z_c\ (G)$

dir. Böylece $h \in Z_{c+1}(G)$ dir ve h keyfi olduğundan bir ω için $H \leq Z_\omega(G)$ dir. $h \in H$ olmak üzere $[A,H]$, $[A,\langle h\rangle]$ altgrupları tarafından üretildiğinden $[A,H] \leq Z_\omega(G)$ dir. Yukarıda söylenenlerden $H\ sn\ H[A,H]$ dır. O zaman $H^G = H[H,G] = H[A,H]$ olduğundan $H[A,H]$, G de normaldir. Buradan H, G nin altnormal altgrubudur ve bu çelişki ispatı tamamlar. ■

Teorem 1.4 ün İspatı

G bir lokal sonlu Baer grup ve G nin her nilpotent olmayan altgrubu altnormal altgrup olsun. O zaman Sonuç 3.6 dan G çözülebilir gruptur. H, G nin keyfi bir altgrubu ve n, G nin çözülebilirlik uzunluğu olsun. n üzerinden tümevarım uygulayarak H nın G de altnormal altgrup olduğunu gösterelim. G nin çözülebilirlik uzunluğu 1 ise G abelyan gruptur. Dolayısıyla G nin her altgrubu normal altgruptur. n den küçük olanlar için iddia doğru olsun. G' nün çözülebilirlik uzunluğu $n-1$ olduğundan H', G' de altnormal altgruptur. Böylece $H'\ sn\ G' \lhd G$ olduğundan $H'\ sn\ G$ dir. $A = G^{(n-1)}$ olsun. O zaman A abelyandır. $G/A = G/G^{(n-1)}$ in çözülebilirlik uzunluğu $n-1$ olduğundan $HA/A\ sn\ G/A$ dir.

Dolayısıyla $HA\ sn\ G$ dir. Eğer HA nın her altgrubu altnormal ise G nin de her altgrubu altnormal olacağından $G = HA$ seçebiliriz. Lemma 5.1 in ispatında olduğu gibi $H \cap A = 1$ olduğunu kabul edebiliriz. $A_0 = A$ olmak üzere her $i \geq 0$ için $A_i = [A,\ {}_iH']$ olsun. $H'\ sn\ G$ olduğundan Lemma 2.77 den bir $c \in \mathbb{Z}^+$ için $[G,\ {}_cH'] \leq H'$ dir.

$$A_c = [A,\ {}_cH'] \leq [G,\ {}_cH'] \leq H'$$

dır. A normal altgrup olduğundan $A_c \leq A \cap H'$ dir. $A \cap H = 1$ olduğundan $A_c = 1$ dir. Böylece herhangi bir i için $HA_{i+1}\ sn\ HA_i$ olduğunu göstermek yeterlidir. A abelyan olduğundan $A_{i+1} \lhd A_i$ dir. Buradan da A_{i+1} ile faktöre geçersek

$$\begin{aligned}[A_i/A_{i+1}\,, (H'A_{i+1})/A_{i+1}] &= ([A_i, H']A_{i+1})/A_{i+1} \\ &= [[A,\ {}_iH'], H']A_{i+1}/A_{i+1} \\ &= A_{i+1}/A_{i+1} \\ &= 1\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $[A_i, H'] = 1$ olarak kabul edebiliriz. A_i ile A yı yer değiştirilirse $[A, H'] = 1$ olur. Buradan H', A-invarianttır. Dolayısıyla $H' \lhd G$ dır. H' ile bölüm grubuna geçilirse H/H', G/H' nın abelyan altgrubu olduğundan H yı abelyan kabul edebiliriz.

G nin her asal p-komponenti Lemma 5.1 in hipotezini sağladığı için asal komponentlerinin her altgrubu altnormaldir. $G = HA$ olduğundan G nin her p asal-komponenti nilpotenttir. Böylece Lemma 3.1 den G nilpotenttir. Dolayısıyla H, G nin altnormal altgrubudur. Böylece G nin her altgrubu altnormal altgrubudur. ■

6. SONUÇ

Teorem 1.5 i ispatlamak için Teorem 1.4 ün hipotezini sağlayan G grubunun Baer radikalinin G de sonlu indeksli olduğunu göstermek yeterlidir.

6.1. Lemma

p bir asal sayı olmak üzere G bir lokal sonlu p-grup ve G nin her nilpotent olmayan altgrubu altnormal altgrup olsun. Kabul edelim ki G nin bir x elemanı ve G nin bir indirgenmiş abelyan normal A altgrubu için $G = A\langle x\rangle$ olsun. O zaman G bir nilpotent gruptur.

İspat

Kabul edelim ki G nilpotent grup olmasın. Lemma 3.3 den r pozitif tamsayı olmak üzere G nin öyle bir sonlu üreteçli F altgrubu vardır ki G nin F yi kapsayan her nilpotent olmayan altgrubunun G deki altnormallik indeksi en fazla r olduğunu kabul edebiliriz. G lokal sonlu olduğundan F sonlu gruptur. Eğer $x \in A$ ise $G = A$ olduğundan G nilpotent gruptur. Bu ise bir çelişkidir. O zaman $x \in F$ olduğunu kabul edebiliriz. Dolayısıyla $G = A\langle x\rangle = AF$ dir. $F \cap A$ sonlu ve G lokal sonlu p-grup olduğundan $\langle F \cap A, \langle x\rangle\rangle$ sonlu p-gruptur. Teorem 2.64 den $\langle F \cap A, \langle x\rangle\rangle$ nilpotent gruptur. Böylece bir $c \in \mathbb{Z}^+$ için $\gamma_{c+1}(\langle F \cap A, x\rangle) = 1$ dir. O zaman

$$[\langle F \cap A, x\rangle,\ {}_c\langle F \cap A, x\rangle] = 1$$

$$\Rightarrow [F \cap A,\ {}_c\langle x\rangle] = 1$$

$$\Rightarrow [F \cap A,\ {}_c\langle x\rangle] = [F \cap A,\ {}_cA\langle x\rangle] = 1$$

dır. Dolayısıyla $F \cap A \leq Z_c(G)$ dir. A normal abelyan grup olduğundan $F \cap A \lhd G$ dir.

$$(A/F \cap A) \cap (F/F \cap A) = 1$$

olduğundan $G/F \cap A$ faktör grubuna geçilirse $F \cap A = 1$ olduğundan $F = \langle x \rangle$ olarak alabiliriz. $\langle x \rangle$ abelyan ve

$$G/A = A\langle x \rangle/A \cong \langle x \rangle/(A \cap \langle x \rangle) \cong \langle x \rangle$$

olduğundan G/A abelyandır. A nın bir G-invariant N altgrubu için $N\langle x \rangle$ nilpotent grup olmasın. $F \leq N\langle x \rangle$ olduğundan kabulden $N\langle x \rangle$ in G deki altnormallik indeksi en fazla r dir. O zaman $[G, {}_rN\langle x \rangle] \leq N\langle x \rangle$ dir. Böylece $[A, {}_rN\langle x \rangle] \leq N\langle x \rangle$ dır. A normal altgrup olduğundan $[A, {}_r\langle x \rangle] \leq N\langle x \rangle \cap A \leq N$ dir. $B = [A, {}_r\langle x \rangle]$ olsun. $B \leq A$ ve $G = A\langle x \rangle$ olduğundan

$$B^G = [A, {}_r\langle x \rangle]^{A\langle x \rangle} = [A, {}_r\langle x \rangle]^{\langle x \rangle} = [A^{\langle x \rangle}, {}_r\langle x \rangle^{\langle x \rangle}] = [A, {}_r\langle x \rangle] = B$$

dir. O zaman $B \lhd G$ dir. M, B nin G-invariant öz altgrubu olsun. $M\langle x \rangle$ nilpotent değilse F yi kapsadığından G deki altnormallik indeksi en fazla r dir ve

$$[A, {}_r\langle x \rangle] \leq [G, {}_rM\langle x \rangle] \leq M\langle x \rangle$$

dir. A normal altgrup olduğundan $B = [A, {}_r\langle x \rangle] \leq A \cap M\langle x \rangle = M$ dir. M, B nin öz altgrubu olduğundan bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $M\langle x \rangle$ nilpotent gruptur. A indirgenmiş grup olduğundan B bölümlü grup değildir. O zaman $B \neq B^p$ dir. Dolayısıyla B^p, B nin öz altgrubudur. Yukarıda elde edilen sonuçlardan $B^p\langle x \rangle$ nilpotent gruptur. Ayrıca

$$(B/B^p)^p = B^p/B^p = 1$$

olduğundan B/B^p üssü sonlu olan bir gruptur. Bundan dolayı $\langle x \rangle$, B/B^p üzerine nilpotent etki eder. $B^p\langle x \rangle$ nilpotent grup olduğundan bir $c \in \mathbb{Z}^+$ için

$$[B^p\langle x \rangle, {}_cB^p\langle x \rangle] = 1$$

$$\Rightarrow [B^p, {}_c\langle x \rangle] = 1$$

dir. $\langle x \rangle$, B/B^p üzerine nilpotent etki ettiğinden bir $d \in \mathbb{Z}^+$ için

$[B/B^p\ ,\ {}_d\langle x\rangle] = 1$

$\Rightarrow [B,\ {}_d\langle x\rangle] \leq B^p$

dir. O zaman

$[B, {}_{c+d}\langle x\rangle] = [B,\ {}_d\langle x\rangle,\ {}_c\langle x\rangle] \leq [B^p,\ {}_c\langle x\rangle] = 1$

olduğundan bir n tamsayısı için $[B,\ {}_n\langle x\rangle] = 1$ dir. B ve $\langle x\rangle$ abelyan olduğundan

$[B\langle x\rangle,\ {}_nB\langle x\rangle] = 1$

dir ve $B\langle x\rangle$ nilpotenttir. Dolayısıyla G nilpotenttir. Bu çelişkiden dolayı ispat tamamlanır.■

Lemma 3.1 de görüldüğü gibi çoğu durumda G nin bir p-grup olarak alınmasına ihtiyaç duyulur. Aşağıdaki lemma ve bu lemmanın sonucu için G yi lokal sonlu p-grup, G nin her nilpotent olmayan altgrubu altnormal ve B, G nin Baer radikali olarak kabul edilecektir.

6.2. Lemma

Kabul edelim ki K, B nin G-invariant altgrubu öyle ki G/K abelyan ve ya Chernikov ya da üssü p olan bir grup olsun. O zaman G/B sonlu gruptur.

İspat

G her nilpotent olmayan altgrubu altnormal altgrup olan lokal sonlu p-grup ve B, G nin Baer radikali olsun. B, G nin Baer radikali olduğundan K da bir Baer gruptur. Sonuç 3.6 dan G çözülebilir olduğundan K da çözülebilirdir. K nın sonlu G-invariant serisinin faktörlerinin abelyan ve ya bölümlü ya da indirgenmiş olduğunu kabul edebiliriz. A yı bu serinin aşikar olmayan ilk terimi olarak alırsak A, K nın G-invariant abelyan altgrubudur. Ayrıca A altgrubu bölümlü ya da indirgenmiş gruptur. G/A nın Baer radikali L/A yı sonlu indeksli olarak kabul edebiliriz. B, G nin Baer radikali olduğundan B/A bir Baer gruptur. L/A, G/A nın Baer radikali olduğundan $B/A \leq L/A$ ve dolayısıyla $B \leq L$ dir. Böylece B, L nin de

Baer radikali olduğundan G/A yi Baer grup olarak kabul edebiliriz. A indirgenmiş grup olsun. Keyfi bir $x \in G$ için Lemma 6.1 den $A\langle x\rangle$ nilpotent gruptur. Dolayısıyla $\langle x\rangle \; sn \; A\langle x\rangle = G$ dir. O zaman G bir Baer gruptur. B, G nin Baer radikali olduğundan $G = B$ dir.

Kabul edelim ki A bölümlü grup ve $g \in B$ olsun. B, Baer grup olduğundan Teorem 2.81 den $\langle g\rangle$, B de altnormal ve nilpotent gruptur. Dolayısıyla $B \lhd G$ olduğundan $\langle g\rangle$, G de altnormal ve nilpotenttir ve Lemma 2.91 den $A\langle g\rangle$ nilpotent gruptur. Buradan bir $r \in \mathbb{Z}^+$ için $[A\langle g\rangle, \; {}_rA\langle g\rangle] = 1$ olacağından $[A, \; {}_r\langle g\rangle] = 1$ dir. $\langle g\rangle$ abelyan ve G periyodik olduğundan Lemma 2.87 den $[A, \langle g\rangle] = 1$ dir. Her $g \in B$ için $[A, \langle g\rangle] = 1$ olduğundan $[A, B] = 1$ dir. Dolayısıyla A, B nin merkezindedir. Kabul edelim ki G Baer grup olmasın. $A\langle x\rangle$ nilpotent olmayacak şekilde G nin bir x elemanını seçebiliriz. Hipotezden $A\langle x\rangle$, G nin altnormal altgrubudur. A nın her Prüfer p-altgrubu U için $U^{\langle x\rangle}$ Chernikov ve dolayısıyla bölümlü olduğu için $[E, \langle x\rangle] \neq 1$ olacak şekilde A nın minimal $\langle x\rangle$-invariant bölümlü E altgrubu vardır. Eğer $E\langle x\rangle$ nilpotent grup ise önceki söylenenlerden $[E, \langle x\rangle] = 1$ dir. O zaman $E\langle x\rangle$ nilpotent grup değildir ve G nin altnormal altgrubudur. A abelyan olduğundan

$$E^{A\langle x\rangle} = E^{\langle x\rangle} = E$$

dir. O zaman $E \lhd A\langle x\rangle$ dir. A/E, $A\langle x\rangle/E$ in abelyan normal altgrubudur. $E\langle x\rangle/E \cong \langle x\rangle/E \cap \langle x\rangle$ nilpotent grup ve $E\langle x\rangle/E \; sn \; A\langle x\rangle/E$ olduğundan Teorem 2.65 den

$$(A/E)(E\langle x\rangle/E) \cong A\langle x\rangle/E$$

nilpotent gruptur. A bölümlü olduğundan A/E bölümlü gruptur. A/E bölümlü olduğundan $A\langle x\rangle/E$ abelyandır. O zaman

$$[A\langle x\rangle/E \; , A\langle x\rangle/E] = 1$$

$$\Rightarrow [A\langle x\rangle \, , A\langle x\rangle]E/E = 1$$

$$\Rightarrow [A\langle x\rangle \, , A\langle x\rangle] \leq E$$

$\Rightarrow [A,x] \leq E$

dir. Ayrıca $[A,x]$ bölümlü grup ve

$[A,x,x] = [[A,x],x] \leq [E,x] \neq 1$

olduğundan $[A,x,x] \neq 1$ dir. $[E,x] \neq 1$ olacak şekilde A nın minimal $\langle x \rangle$-invariant bölümlü altgrubu E olduğundan $[A,x] = E$ dir. $y \in G$ olsun.

$E^y = [A,x]^y = [A^y, x^y] = [A, x^y] = [A, x[x,y]]$

dir. A, B nin merkezinde olduğundan $[A,B] = 1$ ve dolayısıyla $[A,K] = 1$ dir. Ayrıca hipotezden G/K abelyan olduğundan Teorem 2.58 den $G' \leq K$ dir. O zaman Lemma 2.50 den

$E^y = [A, x[x,y]] = [A,[x,y]][A,x]^{[x,y]} \leq [A,K]E^{[x,y]} = E$

dir. Böylece $E^y \leq E$ dir. $E \leq E^y$ olduğundan $E^y = E$ dir. Dolayısıyla E, G nin normal altgrubudur. $C = C_G(E)$ olsun. O zaman $[B,E] \leq [B,A] = 1$ olduğundan $B \leq C$ dir. E, G de normal olduğundan $G = N_G(E)$ dir. Lemma 2.89 dan G/C sonludur. $g \in G$ ve $F = \langle E, x, g \rangle$ olsun. F nilpotent bir grup ise $E\langle x \rangle$ nilpotent olur. Bu ise bir çelişkidir. O zaman F nilpotent değildir. Teoremin hipotezinden F, G de altnormaldir. Lemma 2.77 dan $r \in \mathbb{Z}^+$ için $[G, {}_rF] \leq F$ dir. A normal altgrup olduğundan

$[A, {}_r\langle x,g \rangle] \leq [A, {}_r\langle E,x,g \rangle] \leq \langle E,x,g \rangle \cap A = E$

$\Rightarrow [A, {}_r\langle x,g \rangle] \leq E$

dir. A/E bölümlü olduğundan $[A, \langle x,g \rangle] \leq E$ dir. Keyfi $g, x \in G$ için $[A, \langle x,g \rangle] \leq E$ olduğundan $[A,G] \leq E$ dir. G/A bir Baer grup olduğundan G/E Baer gruptur. Böylece C/E Baer grup olduğundan C, central grubun bir Baer genişlemesidir. O zaman C de Baer gruptur. $B \leq C$ ve B, Baer radikal olduğundan $B = C$ dir. G/B sonlu olduğundan ispat tamamlanır. ■

6.3. Sonuç

G/B sonludur.

İspat

G bir lokal sonlu p-grup ve G nin her nilpotent olmayan altgrubu altnormal altgrup ve B, G nin Baer radikali olsun. Eğer G/B sonlu ranklı ise o zaman G/B bir Chernikov gruptur. G/B nin sonlu tane quasidevirli grubun direkt çarpımı olan H/B altgrubu karakteristik altgruptur ve G/B de sonlu indekslidir.

$$(G/B)/(H/B) \cong G/H$$

olduğundan H, G de sonlu indekslidir. Burada $B \leq H$ ve Teorem 2.84 den H/B bölümlü abelyan gruptur. Ayrıca B, G nin Baer radikali olduğundan H nın da Baer radikalidir ve Lemma 6.2 den H/B sonlu gruptur. H/B quasidevirli grupların çarpımı olduğundan sonlu bir grup olamaz. Böylece $H = B$ dir. G/B nin sonlu ranklı olduğu durum için ispat tamamlanır. O zaman G/B nin sonsuz ranklı olduğunu kabul ederek bir çelişkiye varılacaktır.

U/B, G/B nin Baer radikali olsun. Sonuç 3.6 dan G/B çözülebilir gruptur ve U/B boştan farklıdır. Kabul edelim ki U/B Chernikov grup ve $C = C_G(U/B)$ olsun. U/B Chernikov grup ise D/B, sonlu sayıda quasidevirli grubun çarpımı olmak üzere

$$U/B = (F/B)(D/B)$$

olacak şekilde U/B nin sonlu F/B altgrubu vardır.

$$C = C_G(U/B) = C_G(D/B) \cap C_G(F/B)$$

$$\Rightarrow G/C = G/(C_G(D/B) \cap C_G(F/B)) \hookrightarrow G/C_G(D/B) \times G/C_G(F/B)$$

dir. F sonlu olduğundan $G/C_G(F/B)$ sonludur. Lemma 2.89 dan $G/C_G(D/B)$ sonludur.

Dolayısıyla G/C sonludur. Böylece C/B sonsuz ranklıdır. Eğer U bir nilpotent grup ise U/B, G/B nin Baer radikali olduğundan $U \lhd G$, $B \leq U$ ve U nun her altgrubu altnormal olduğundan $U = B$ ve U/B aşikardır. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla U nilpotent grup olamaz. Böylece G nin U yu içeren her altgrup nilpotent olmadığı için G de altnormaldir ve dolayısıyla G/U nun her altgrubu altnormal altgruptur. Dolayısıyla G/U Baer gruptur. G/U Baer grup olduğundan $x \in C$ için

$$\langle x\rangle U/U \ sn \ G/U$$

$$\Rightarrow \langle x\rangle U \ sn \ G$$

dir. $B \lhd G$ olduğundan

$$\langle x\rangle B/B \ \lhd \ \langle x\rangle U/B \ sn \ G/B$$

$$\Rightarrow \langle x\rangle B/B \ sn \ C/B$$

dir. Böylece C/B Baer gruptur ve $C/B \leq U/B$ dir. U/B Chernikov grup olduğundan sonlu ranklı, $C/B \leq U/B$ ve C/B sonsuz ranklı olduğundan bu bir çelişkidir. O zaman U/B Chernikov grup değil sonsuz ranklıdır. B, U nun da Baer radikali olduğundan $G = U$ olduğunu kabul edebiliriz. Böylece G/B Baer gruptur. Teorem 2.88 den G/B nin sonsuz ranklı V/B abelyan altgrubu vardır. V yi V/B nin üssü p olacak şekilde seçebiliriz. Teorem 1.3 den V/B, G/B de altnormal altgruptur. Böylece B, V nin Baer radikalidir. Lemma 6.2 den V/B sonludur. Bu ise V/B nin sonsuz ranklı olmasıyla çelişir. Böylece G/B sonsuz ranklı olamaz. O zaman ispat tamamlanır. ■

Teorem 1.5 in İspatı

G bir lokal sonlu grup ve G nin her nilpotent olmayan altgrubu altnormal altgrup olsun. Önerme 1.3 den G hemen hemen lokal nilpotent gruptur. G nin öyle bir N normal altgrubu için G/N sonlu ve N lokal nilpotenttir. Burada G yi lokal nilpotent kabul edebiliriz. Eğer G nin her p-asal komponenti nilpotent ise Lemma 3.1 den G de nilpotent gruptur. G bir torsiyon grup olduğundan nilpotent olmayan p-altgrubu P ve nilpotent olmayan p'-altgrubu Q için

$G = P \times Q$ biçiminde yazılabilir. Hipotezden Q nun her altgrubu altnormal altgruptur. Sonuç 6.3 den P nin Baer radikali B, P de sonlu indekslidir. Teorem 1.4 den B nin her altgrubu B de altnormal altgruptur. Buradan da $B \times Q$ nun her altgrubu altnormaldir. $B \lhd P$ olduğundan $B \times Q \lhd G$ dir. Ayrıca

$$G/(B \times Q) = (P \times Q)/(B \times Q) \cong P/B \times Q/Q \cong P/B$$

sonlu olduğundan ispat tamamlanır. ■

Teorem 1.6 nın İspatı

G bir lokal sonlu hipermerkez grup ve G nin her nilpotent olmayan altgrubu altnormal altgrup olsun. Teorem 1.5 den G nin her altgrubu altnormal olan sonlu indeksli normal K altgrubu vardır. K bir hipermerkez grup olduğundan [9] dan K nilpotent gruptur. Dolayısıyla G nilpotent bir grubun sonlu genişlemesidir. ■

Giriş kısmında da bahsedildiği gibi Teorem 1.5, her nilpotent olmayan altgrubu altnormal olan lokal sonlu grupların bir sınıflamasını oluşturmaz. Fakat böyle grupların yapısına ilişkin birkaç şey daha eklenebilir. Öncelikle kabul edelim ki G nin her altgrubu altnormal olan bir lokal sonlu grup ve π asal sayıların sonlu bir kümesi (burada $\pi = \emptyset$ olabilir) olsun. G lokal sonlu ve her altgrubu altnormal olduğundan G nin her sonlu üreteçli altgrubu sonlu ve bu altgrubun her altgrubu altnormal olduğundan sonlu üreteçli altgrubu nilpotenttir. Böylece G lokal nilpotent grup olduğundan G nin nilpotent olan p-asal komponentlerinin direkt çarpımı olan K altgrubu Lemma 3.1 den nilpotent gruptur. Dolayısıyla G, bir nilpotent π'-altgrubu K ve π-altgrubu H nın direkt çarpımıdır. Eğer G, Teorem 1.5 in hipotezini sağlıyor ve lokal nilpotent grup fakat her altgrubu altnormal olmayan bir grup ise o zaman Teorem 1.5 ve Lemma 3.1 den π sonlu küme olmak üzere G nilpotent π'-altgrubu K ve π-altgrubu H nın direkt çarpımıdır. Eğer π bir tek p asal sayısından oluşuyor ise H nın p-asal komponentinin her altgrubunun altnormal değildir. Son olarak kabul edelim ki G, Teorem 1.5 in hipotezindeki gibi olsun fakat lokal nilpotent olmasın. O zaman N, G nin lokal nilpotent radikali olmak üzere $G = NF$ olacak şekilde G nin bir sonlu fakat nilpotent olmayan F altgrubu vardır. π asal sayıların sonlu bir kümesi olmak üzere eğer F bir π-grup ise F, N nin π'-komponenti K üzerine nilpotent etki ettiğinden aslında bu etki aşikar etkidir. Bu ifade G

nin F yi kapsayan her sonlu π-altgrubu için de geçerlidir. Buradan K, G nin bir direkt faktörüdür ve π nin sonlu sayıda uygun asal sayılarla genişletilmesi ile K nilpotent π'-altgrubu ve L bir π-altgrubu olmak üzere $G = K \times L$ biçiminde yazabiliriz.

Burada yapılan bazı ispatlar özellikle Bölüm 4 deki ispatlar R. E. Phillips and J. S. Wilson (*On certain minimal conditions for infinite groups,* J. Algebra 51(1978), 41-68)'ın sonuçları kısaltılabilir. Bu çalışmadaki hipotezler daha güçlü olduğu için ispatları buradaki haliyle sunmasında karar kılınmıştır. Böylece daha fazla argüman kullanılmış olur.

Howard Smith (*Groups with all subgroups subnormal or nilpotent-by-Chernikov,* Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova 126(2011), 245-253)'in Lemma 3.5 in ispatında Lemma 3.3 ün ikinci kez kullanıldığı paragrafta nilpotentliğin çözülebilirlik ile yer değiştirmesi için yaptığı düzeltmeye istinaden Lemma 3.2 eklenmiştir.

KAYNAKLAR

1. Smith, H. (2001). Groups with all non-nilpotent subgroups subnormal. *Topics in infinite groups, Quaderni di Mathematica,* 8, 309-326.

2. Robinson, D. J. S. (1991). *A course in the theory of groups*. *New York: Springer-Verlag*, 1-516.

3. Robinson, D. J. S. (1972). *Finiteness conditions and generalized soluble groups,* Part 1. Berlin: Springer-Verlag, 1-225.

4. Robinson, D. J. S. (1972). *Finiteness conditions and generalized soluble groups,* Part 2. Berlin: Springer-Verlag, 1-269.

5. Asar, A. O. (2000). Locally nilpotent p-groups whose proper subgroups are hypercentral or nilpotent-by-Chernikov. *Journal of London Mathematical Society*, 2, 412-422.

6. Heineken, H. and Mohamed, I. J. (1968). A group with trivial centre satisfying the normalizer condition. *Journal of Algebra*, 10, 368-376.

7. Möhres, W. (1989). Torsion freie Gruppen, deren Untergruppen alle subnormal sind. *Mathemtische Annalen*, 84, 254-259.

8. Möhres, W. (1989). Torsionsgruppen, deren Untergruppen alle subnormal sind. *Geometriae Dedicata***,** 31, 237-244.

9. Möhres, W. (1991). Hyperzentrale Torsionsgruppen, deren Untergruppen alle subnormal sind. *Illinois Journal of Mathematics*, 35(1), 147-157.

10. Möhres, W. (1990). Auflösbarkeit von Gruppen, deren Untergruppen alle subnormal sind. *Archive der Mathematik*, 54, 232-235.

11. Roseblade, J. E. (1965). On groups in which every subgroup is subnormal. *Journal of Algebra*, 2, 402-412.

12. Smith, H. (1983). Hypercentral groups with all subgroups subnormal. *Bulletin of the London Mathematical Society,* 15, 229-234.

13. Smith, H. (2001). Torsion-free groups with all non-nilpotent subgroups subnormal. *Topics in infinite groups, Quaderni di Mathematica,* 8, 297-308.

14. Suzuki, M. (1982). *Group Theory 1.* New York: Springer-Verlag, 1-446.

15. Suzuki, M. (1982). *Group Theory 2.* New York: Springer-Verlag, 1-629.

16. Rose, J. (1978). *A Course on Group Theory.* Cambridge: Cambridge University Press, 1-310.

17. Casolo, C. (2008). Groups with all subgroups subnormal. *Note di Matematica*, 2, 1-149.

18. Hungerford, W.T. (1974). *Graduate Text in Mathematics.* New York: Springer-Verlag, 1-502.

19. Kegel, O. H. and Wehrfritz B. A. F. (1973). *Locally Finite Groups.* Amsterdam: North-Holland, 1-218.

20. Lennox, J. C. and Stonehewer, S. E. (1987). *Subnormal Subgroups of Groups.* Oxford: Clarendon Press, 1-253.

21. Lennox, J. C. and Robinson, D. J. S. (2004). *The Theory of Infinite Soluble Groups.* Oxford: Clarendon Press, 1-342.

22. Nakaoka I. N. and Rocco N. R. (2001). Nilpotent actions on non-abelian tensor products of groups. *Matematica Contemporanea*, 21, 221-238.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : KÜÇÜKOĞLU, Tuğçe
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 17.02.1993, Tekirdağ
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0536 934 0242
email : tugcekucukoglu.860@gmail.com



Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek Lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik Bölümü	Devam ediyor
Lisans	Hacettepe Üniversitesi/Matematik Bölümü	2015
Lise	Çorlu Mimar Sinan Anadolu Lisesi	2011

İş Deneyimi

-

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Küçükoğlu, T., (2018, 28-29 Nisan). *Nilpotent olmayan her altgrubu altnormal olan gruplar*. 13. Ankara Matematik Günleri, TOBB Üniversitesi, Ankara

Hobiler

Amatör balıkçılık



GAZİ GELECEKTİR …