
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

BAZI ÖZEL FONKSİYONLARIN
q- ANALOGLARI

Yakup AVCI

YÜKSEK LİSANS
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAYIS 2019

Yakup AVCI tarafından hazırlanan "BAZI ÖZEL FONKSİYONLARIN q- ANALOGLARI" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ / OY ÇOKLUĞU ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ...……

Başkan: Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ TUNCA

Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ……...

Üye: Doç. Dr. Bayram ÇEKİM

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ……...

Tez Savunma Tarihi: 31/05/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

…….…….

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Yakup AVCI

31/05/2019

BAZI ÖZEL FONKSİYONLARIN
q- ANALOGLARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Yakup AVCI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Mayıs 2019

ÖZET

Bu tezde, Gottlieb polinomları incelenmiştir. Önce tezde kullanılan temel kavramlar verildikten sonra Gottlieb polinomlarının tanımı, doğurucu fonksiyonları, bilineer ve bilateral doğurucu fonksiyonları ve bunların uygulamaları elde edilmiştir. Daha sonra bu polinomlar için rekürans bağıntıları bulunmuştur. Sonraki bölümlerde, q-analizinden bahsedilerek q-Gottlieb polinomları tanıtılmıştır. Gottlieb polinomları için bilenen özellikler, tek ve iki değişkenli q-Gottlieb polinomları için de elde edilmiştir.

Bilim Kodu : 20406
Anahtar Kelimeler : Gottlieb polinomları, doğurucu fonksiyon, bilineer doğurucu fonksiyon, bilateral doğurucu fonksiyon, rekürans bağıntısı
Sayfa Adedi : 51
Danışman : Prof. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN

q-ANALOGUES OF SOME SPECIAL FUNCTIONS

(M. Sc. Thesis)

Yakup AVCI

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

May 2019

ABSTRACT

In this thesis, the Gottlieb polynomials are investigated. After some basic concepts used in this thesis are firstly given, the definition of the Gottlieb polynomials, their generating functions, bilinear and bilateral generating functions and their applications are obtained. And then recurrence relations for these polynomials are found. In the next sections, by giving information about *q*-analysis, the *q*-Gottlieb polynomials are introduced. Properties known for the Gottlieb polynomials are obtained for one and two-variable *q*-Gottlieb polynomials.

Science Code : 20406

Key Words : Gottlieb polynomials, generating function, bilinear generating function, bilateral generating function, reccurence relation

Page Number : 51

Supervisor : Prof. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN

TEŞEKKÜR

Bu yüksek lisans tezini hazırlarken, her ihtiyaç duyduğumda zengin ve engin bilgileriyle bana yol gösteren, beni motive edici tarzı ve tüm içtenliği ile destekleyen tez danışmanım kıymetli ve saygıdeğer Prof. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yine tez çalışması boyunca maddi manevi desteklerini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET ……. iv

ABSTRACT …….. v

TEŞEKKÜR …….. vi

İÇİNDEKİLER ……. vii

SİMGELER VE KISALTMALAR……... ix

1. GİRİŞ…….. 1

2. TEMEL KAVRAMLAR…… 3

2.1. Pochhammer Sembolü ……... 3

2.2. Hipergeometrik Fonksiyon …….. 3

2.3. Doğurucu Fonksiyon ……. 3

2.4. Bilineer Doğurucu Fonksiyon…… 4

2.5. Bilateral Doğurucu Fonksiyon……... 4

2.6. Bazı Temel Lemmalar…… 4

2.6. Bazı Önemli Eşitlikler…… 5

3. GOTTLIEB POLİNOMLARI ……. 7

3.1. Gottlieb Polinomları....…… 7

3.2. Gottlieb Polinomları İçin Bilineer ve Bilateral Doğurucu Fonksiyonlar…… 9

3.3. Özel Durumlar……. 11

3.4. Gottlieb Polinomları İçin Rekürans Bağıntısı……. 13

4. *q*- GOTTLIEB POLİNOMLARI ……. 15

4.1. *q*- Analiz ile İlgili Temel Kavramlar……. 15

4.2. *q*- Gottlieb Polinomları…… 17

Sayfa

4.3. *q*- Gottlieb Polinomlarının Doğurucu Fonksiyonları ..…….. 18

5. BİLİNEER VE BİLATERAL DOĞURUCU FONKSİYONLAR ..….... 23

5.1. Özel Durumlar…… 27

5.2. *q*- Gottlieb Polinomları İçin Rekürans Bağıntıları…….. 31

6. İKİ DEĞİŞKENLİ *q*- GOTTLIEB POLİNOMLARI ..……..... 35

6.1. İki Değişkenli *q*- Gottlieb Polinomlarının Doğurucu Fonksiyonları...…… 35

6.2. Bilateral ve Bilineer Doğurucu Fonksiyon……..…….. 38

6.3. Özel Durumlar…… 43

7. SONUÇ VE ÖNERİLER……... 47

KAYNAKLAR…….. 49

ÖZGEÇMİŞ……... 51

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$(\boldsymbol{\lambda})_{\boldsymbol{n}}$	Pochhammer sembolü
$(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q})_{\boldsymbol{n}}$	q- Pochhammer sembolü
$[\boldsymbol{a}]_{\boldsymbol{q}}$	q- Tamsayı
$\boldsymbol{e_q(z)}$	q- Üstel sayı fonksiyonu
$\boldsymbol{E_q(z)}$	q- Üstel sayı fonksiyonu
${}_2\boldsymbol{F_1}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\gamma};\boldsymbol{x})$	Hipergeometrik fonksiyon
$\boldsymbol{r\emptyset s}\ (\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\dots,\boldsymbol{a_r};\boldsymbol{b_1},\boldsymbol{b_2},\dots,\boldsymbol{b_s};\boldsymbol{q},\boldsymbol{z})$	q-Hipergeometrik seri
$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{l:m;n}}^{\boldsymbol{p:h;u}}[.]$	Genelleştirilmiş temel çift seri
$\boldsymbol{\varphi_n(x;\lambda)}$	Gottlieb polinomları
$\boldsymbol{\varphi_{n;q}(x;\lambda)}$	q-Gottlieb polinomları
$\boldsymbol{\varphi^2_{\mu+\nu k;q}(x_1,x_2;\lambda_1,\lambda_2)}$	İki değişkenli q-Gottlieb polinomları
$\mathbf{P}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{(x)}$	Legendre polinomları
$\boldsymbol{u_{n;q}^{(\alpha_1,\alpha_2\dots,\alpha_r)}(x_1,x_2,\dots,x_r)}$	Çok değişkenli q-Erkus-Srivastava polinomları
$\boldsymbol{g_{n;q}^{(s)}(x)}$	q-Cesàro polinomları
$\boldsymbol{g_{n;q}^{(\alpha,\beta)}(x,y)}$	q-Lagrange polinomları

1. GİRİŞ

Kuantum analiz ya da q-analiz genellikle limitsiz analiz olarak da bilinir ve q-analizinin geçmişi Leonhard Euler'e kadar uzanmaktadır. Aslında q-serileri ilk olarak sayılar teorisi, eliptik ve modüler fonksiyonlarda örnekler olarak ortaya çıktı. Modern anlamda q-analizinin başlangıcı Jackson tarafından yayınlanan, ilk olarak q- integrallerin sistematik olarak tanımlanıp geliştirildiği çalışmasıyla başlatılabilir [1]. 1910 yılında F.H. Jackson, q-türevini ve q-integralini tanımladı [2]. Bu, q-analizinin başlangıcı oldu. Daha sonra q-gamma ve q-beta fonksiyonlarının integral gösterimleri Sole ve Kac tarafından verilmiştir [3].

q-analizinin kullanıldığı yerlerden bazıları, matematikte özel fonksiyonlar, ortogonal polinomlar ile Lie cebirleri, fizikte genel rölativite, sicim teorisi, kuantum kromodinamiği, moleküler ve nükleer spektoskopi gibi alanlardır. q-Analizi, bilgisayar bilimleri, kuantum mekaniği ve kuantum fiziği gibi bazı uygulamalı alanlarda bilimsel problemler için ve matematiğin çeşitli alanlarında, örneğin dinamik sistemler, sayılar teorisi, kombinasyon özel fonksiyonlar ve sayısız birçok uygulama alanına da sahiptir.

Uygulamalı Matematikte özel fonksiyonlarla ilgili çalışmalarda, doğurucu fonksiyonlar oldukça önemli yer tutmaktadır. Bu konuda birçok araştırmacının çalışmaları vardır. Özellikle de son yıllarda etkin bir araştırma sahası haline gelmiştir. [4-9, 20]

Bu tezde, Gottlieb polinomları ile bu polinomların q- anologları incelenmiş ve yeni bazı özellikleri elde edilmiş, uygulamalarına değinilmiştir.

Gottlieb polinomları ilk olarak 1938 yılında tanımlanmış ve bu zamana kadar bir çok çalışmada bu polinomlara yer verilmiştir [10]. Bu polinomlar önce iki değişenli olarak genişletilmiş ve 2012 yılında da çok değişkenlisi tanımlanmış, doğurucu fonksiyonu verilmiş fakat başka özellikleri üzerinde durulmamıştır [11].

Son yıllarda Khan ve Asıf, Gottlieb polinomlarının q-genellemelerini tanımlamışlar ve doğurucu fonksiyonlarını incelemişlerdir [12, 24]. Diğer taraftan, Khan ve Akhlaq, Gottlieb polinomlarının iki ve üç değişkenlisini tanımlamış ve bunların doğurucu fonksiyonlarını vermişlerdir [11]. Choi ise, bu polinomların üç değişkenlisinin q-genellemelerini yapmış ve özelliklerini incelemiştir [13]. Ayrıca Choi başka bir çalışmasında, Khan and Akhlaq'ın yöntemlerine benzer bir yöntem kullanarak Gottlieb polinomlarını çok değişkenli olarak genişletmiş, bu polinomlar için iki farklı doğurucu fonksiyon vermiştir [14].

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Pochhammer Sembolü

$(\lambda)_n$ Pochhammer sembolü, λ reel ya da kompleks bir sayı, n sıfır ya da pozitif bir tamsayı olmak üzere,

$$(\lambda)_n = \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+n-1), \qquad n \geq 1$$

$$(\lambda)_0 = 1 \qquad , \qquad \lambda \neq 0$$

olarak tanımlanır.

2.2. Hipergeometrik Fonksiyon

α, β ve γ reel ya da kompleks sabitler olmak üzere

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{x^n}{n!} \qquad (2.1)$$

şeklinde tanımlanan seri literatürde $F(\alpha,\beta;\gamma;x)$ ile gösterilir ve bu seriye hipergeometrik fonksiyon denir. Genelleştirilmiş hipergeometrik seri,

$$ {}_pF_q\left(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p;\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_q;x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n(\alpha_2)_n\dots(\alpha_p)_n}{(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n\dots(\gamma_q)_n}\frac{x^n}{n!}$$

ile tanımlanır.

2.3. Doğurucu Fonksiyon

İki değişkenli bir $F(x,t)$ fonksiyonu t nin kuvvetleri cinsinden

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x) t^n$$

şeklinde bir seriye açılabiliyorsa $F(x,t)$ fonksiyonuna $\{f_n(x)\}$ fonksiyonlar ailesinin bir doğurucu fonksiyonu denir. Burada c_n ler x ve t den bağımsız n nin bir fonksiyonu olup değişik parametreler içerebilirler.

2.4. Bilineer Doğurucu Fonksiyon

Eğer üç değişkenli $D(x,y,t)$ fonksiyonu, t nin kuvvetlerine göre

$$D(x,y,t)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k h_k(x) h_k(y) t^k$$

şeklinde bir seriye açılabiliyorsa $D(x,y,t)$ fonksiyonuna $h_k(x)$ fonksiyonları için bilineer doğurucu fonksiyon denir.

2.5. Bilateral Doğurucu Fonksiyon

Eğer üç değişkenli $D(x,y,t)$ fonksiyonu, t nin kuvvetlerine göre

$$D(x,y,t)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k h_k(x) g_k(y) t^k$$

şeklinde bir seriye açılabiliyorsa $D(x,y,t)$ fonksiyonuna $h_k(x)$ ve $g_k(y)$ fonksiyonları için bilateral doğurucu fonksiyon denir.

2.6. Bazı Temel Lemmalar

2.1. Lemma

$$a)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]} A(k,n-pk)$$

$$b)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]} A(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A(k,n+pk)$$

İspat

Uygunluk için sonradan $t = 1$ seçilecek şekilde

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A(k,n)t^{n+pk} \tag{2.2}$$

serisi göz önüne alınsın. $n + pk$ yerine *m* yazılacağından Eş. 2.2 deki *k* ve *n* indisleri,

$$k = j, \qquad n = m - pj \tag{2.3}$$

olmak üzere yeni *j* ve *m* indisleri tanımlansın. Eş. 2.2 de $n \geq 0 \;\; ve \;\; k \geq 0$ olup, Eş. 2.3 sebebiyle

$$m - pj \geq 0, \qquad j \geq 0$$

veya

$$0 \leq pj \leq m, \qquad m \geq 0$$

yazılır. Böylece $0 \leq j \leq \frac{m}{p}$ ye kadar değişen tamsayılardır. Bu nedenle

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A(k,n)t^{n+pk} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{[m/p]} A(j, m-pj) \tag{2.4}$$

bağıntısına ulaşılır.

Eş. 2.4 de *t=1* ve sağ taraftaki *j* ve *m* indisleri yerine *k* ve *n* alınarak ispat tamamlanır. ■

2.2. Lemma

$$a)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} A(k,n-k)$$

$$b)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} A(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A(k,n+k)$$

İspat

Lemma 2.1 de $p = 1$ alınırsa istenilen sonuca ulaşılır. ■

2.7. Bazı Önemli Eşitlikler

Bu kısımda, ileriki bölümlerde kullanılacak olan bazı eşitlikler ispatsız olarak verilecektir.

$$1)\ (a)_{n+k} = (a)_n (a+n)_k \tag{2.5}$$

$$2)\ (1-z)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} z^n \quad , \quad |z| < 1 \tag{2.6}$$

$$3)\ (-n)_k = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k n!}{(n-k)!} & , \ 0 \le k \le n \\ 0 & , \ k > n \end{cases} \tag{2.7}$$

3. GOTTLIEB POLİNOMLARI

Bu kısımda Gottlieb polinomları tanıtıldıktan sonra bazı doğurucu fonksiyonları verilmiştir.

3.1. Gottlieb Polinomları

Gottlieb polinomları $\varphi_n(x;\lambda)$ ile gösterilir ve

$$\varphi_n(x;\lambda) = e^{-n\lambda}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{x}{k}\left(1-e^{\lambda}\right)^k$$

$$= e^{-n\lambda}{}_2F_1\left(-n,-x;1;1-e^{\lambda}\right) \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır [12].

3.1. Teorem

$\varphi_n(x;\lambda)$ Gottlieb poinomları,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x;\lambda)t^n = (1-t)^x(1-te^{-\lambda})^{-x-1} \quad ,|t|<1 \tag{3.2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x;\lambda)\frac{t^n}{n!} = e^t{}_1F_1\left(x+1;1;-\left(1-e^{-\lambda}\right)t\right) \tag{3.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c)_n}{n!}\varphi_n(x;\lambda)t^n = \left(1-te^{-\lambda}\right)^{-c}{}_2F_1\left(c,-x;1;\frac{\left(1-e^{-\lambda}\right)t}{1-te^{-\lambda}}\right) \tag{3.4}$$

şeklindeki doğurucu fonksiyon bağıntılarına sahiptir [12].

İspat

Eş. 3.2 nin sol tarafına *T* denilsin. $\varphi_n(x;\lambda)$ fonksiyonunun açık hali yazılırsa,

$$T = \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x;\lambda)t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k (-x)_k}{(1)_k} \frac{(1-e^{\lambda})^k}{k!} t^n$$

olup, $(1)_k = k!$ olduğu dikkate alınır ve Eş. 2.7 uygulanırsa

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!\,(-1)^k x!}{k!\,(n-k)!\,(x-k)!} \frac{(1-e^{\lambda})^k}{k!} t^n$$

bulunur. Burada Lemma 2.1 uygulanırsa,

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n+k)!\,(-1)^k x!}{k!\,n!\,(x-k)!} \frac{(1-e^{\lambda})^k}{k!} t^{n+k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x!}{(x-n)!} t^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+1)_k}{k!} (te^{-\lambda})^k$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)_n}{n!} t^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+1)_k}{k!} (te^{-\lambda})^k$$

olup, Eş. 2.6 dikkate alındığında,

$$T = (1-t)^x \left(1 - te^{-\lambda}\right)^{-x-1} \qquad |t| < 1$$

elde edilir. Eş. 3.3 ve Eş. 3.4 ün ispatları aynı yolla yapılabilir. ■

Khan ve Akhlaq, Gottlieb polinomların iki ve üç değişkenlisini tanımlamışlardır [11]. Bunlardan Gottlieb polinomlarının iki değişkenli olanı,

$$\varphi_n(x,y;\lambda,\mu) = e^{-n(\lambda+\mu)} F\left[\begin{matrix} -n: & -x; & -y; \\ 1 & -; & -; \end{matrix}; 1-e^{\lambda}, 1-e^{\mu}\right] \tag{3.5}$$

şeklindedir. Diğer gösterimi ise

$$\varphi_n(x,y;\lambda,\mu) = e^{-n(\lambda+\mu)} \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-r} \frac{(-n)_{r+s} (-x)_r (-y)_s \left(1-e^{\lambda}\right)^r (1-e^{\mu})^s}{r!\,s!\,(1)_{r+s}} \tag{3.6}$$

dir. Bu polinomların üç değişkenlisi ise aşağıdaki gibidir:

$$\varphi_n(x,y,z;\lambda,\mu,\eta)$$
$$= e^{-n(\lambda+\mu+\eta)} F\left[\begin{matrix}-n :: -;-;-;-x;-y;-z;\\ 1 :: -;-;-;\ -;\ -;\ -;\end{matrix}; 1-e^{\lambda}, 1-e^{\mu}, 1-e^{\eta}\right] \qquad (3.7)$$

veya

$$\varphi_n(x,y,z;\lambda,\mu,\eta)$$
$$= e^{-n(\lambda+\mu+\eta)} \sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{n-r}\sum_{k=0}^{n-r-s} \frac{(-n)_{r+s+k}(-x)_r(-y)_s(-z)_k\left(1-e^{\lambda}\right)^r(1-e^{\mu})^s(1-e^{\eta})^k}{r!\,s!\,k!\,(1)_{r+s+k}}$$

(3.8)

İki değişkenli Gottlieb polinomları için aşağıdaki doğurucu fonksiyon bağıntıları,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x,y;\lambda,\mu)t^n = (1-te^{-\mu})^x\left(1-te^{-\lambda}\right)^y\left(1-te^{-\lambda-\mu}\right)^{x-y-1} \quad ,|t|<1 \qquad (3.9)$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c)_n \varphi_n(x,y;\lambda,\mu)\frac{t^n}{n!}$$

$$= \left(1-te^{-\lambda-\mu}\right)^{-c} F\left[\begin{matrix}c: & -x; & -y;\\ 1: & -; & -;\end{matrix}; \frac{t\left(e^{\lambda}-1\right)e^{-(\lambda+\mu)}}{1-te^{-(\lambda+\mu)}}, \frac{t(e^{\mu}-1)e^{-(\lambda+\mu)}}{1-te^{-(\lambda+\mu)}}\right] \qquad (3.10)$$

şeklindedir [12]. Üç değişkenli Gottlieb polinomları ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x,y,z;\lambda,\mu,\eta)t^n$$

$$= (1-te^{-(\mu+\eta)})^x(1-te^{-(\lambda+\eta)})^y(1-te^{-(\lambda+\mu)})^z(1-te^{-(\lambda+\mu+\eta)})^{x-y-z-1} \quad |t|<1$$

(3.11)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c)_n \varphi_n(x,y,z;\lambda,\mu,\eta)\frac{t^n}{n!}$$

$$= \left(1-te^{-(\lambda+\mu+\eta)}\right)^{-c} F\left[\begin{matrix}c :: -;-;-;-x;-y;-z;\\ 1 :: -;-;-;\ -;\ -;\ -;\end{matrix}\right.$$

$$; \frac{t(e^{\lambda}-1)e^{-(\lambda+\mu+\eta)}}{1-te^{-(\lambda+\mu+\eta)}}, \frac{t(e^{\mu}-1)e^{-(\lambda+\mu+\eta)}}{1-te^{-(\lambda+\mu+\eta)}}, \frac{t(e^{\eta}-1)e^{-(\lambda+\mu+\eta)}}{1-te^{-(\lambda+\mu+\eta)}}\Big] \tag{3.12}$$

şeklindeki doğurucu fonksiyon bağıntılarına sahiptir.

3.2. Gottlieb Polinomları İçin Bilineer Bilateral Doğurucu Fonksiyonlar

Bu kısımda, Gottlieb polinomları için bilineer ve bilateral doğurucu fonksiyonlar veren bir teorem elde edilmiştir.

3.2. Teorem

μ yüncü basamaktan ve s kompleks değişkenli $(s \in \mathbb{N})$, sıfıra denk olmayan $\Omega_{\mu}(y_1, \dots, y_s)$ fonksiyonu için,

$$\Lambda_{\mu,\nu}(y_1, \dots, y_s; z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, \Omega_{\mu+\nu k}(y_1, \dots, y_s) z^k \quad , \quad (a_k \neq 0, \quad \mu, \nu \in \mathbb{C}) \ ve$$

$$\Theta_{n,1,p}^{\mu,\nu}(x; \lambda; y_1, \dots, y_s; \tau) := \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k \varphi_{n-pk}(x; \lambda) \Omega_{\mu+\nu k}(y_1, y_2, \dots, y_s) \tau^k \tag{3.13}$$

olsun. Burada $n, p \in \mathbb{N}$ dir. Bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,1,p}^{\mu,\nu}\left(x; \lambda; y_1, \dots, y_s; \frac{\eta}{t^p}\right) t^n$$

$$= (1-t)^x \left(1 - te^{-\lambda}\right)^{-x-1} \Lambda_{\mu,\nu}(y_1, \dots, y_s; \eta) \tag{3.14}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 3.14 ün sol yanına *S* denir ve Eş. 3.13 yerine yazılırsa,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,1,p}^{\mu,\nu}\left(x; \lambda; y_1, \dots, y_s; \frac{\eta}{t^p}\right) t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k \varphi_{n-pk}(x;\lambda) \Omega_{\mu+\nu k}(y_1, \dots, y_s) \left(\frac{\eta}{t^p}\right)^k t^n$$

olur. Burada Lemma 2.1 uygulanırsa,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_n(x;\lambda) \Omega_{\mu+\nu k}(y_1, \dots, y_s) \eta^k \, t^{n+pk-pk}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x;\lambda) t^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\nu k}(y_1, \dots, y_s) \eta^k$$

$$= (1-t)^x \left(1 - te^{-\lambda}\right)^{-x-1} \Lambda_{\mu,\nu}(y_1, \dots, y_s; \eta)$$

elde edilir. ■

3.3. Özel Durumlar

Teorem 3.2 de $\Omega_{\mu+\nu k}(y_1, y_2, \dots, y_s)$ $k \in \mathbb{N}_0, s \in \mathbb{N}$ çok değişkenli fonksiyonu bir ya da çok değişkenli basit fonksiyonlar tarafından ifade edilerek, elde edilen farklı uygulamalar aşağıdaki gibi verilebilir.

İlk olarak Teorem 3.2 de

$s = 1, \quad y_1 = w, \quad \Omega_{\mu+\nu k}(w) = \mathrm{P}_{\mu+\nu k}(w)$

alalım. Burada $\mathrm{P}_n(x)$, Legendre polinomlarıdır ve

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}_n(x) t^n \qquad (3.15)$$

şeklindeki bir doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir [23]. Böylece Eş. 3.1 ile tanımlanan Gottlieb polinomları ve Legendre polinomları için bilateral doğurucu fonksiyonların bir ailesi aşağıdaki şekilde verilebilir.

3.1. Sonuç

Eğer

$$\Lambda_{\mu,\nu}(w;z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k \mathrm{P}_{\mu+\nu k}(w)z^k \quad ; \ a_k\neq 0\,, \qquad \mu,\nu\in\mathbb{C}$$

ise bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]} a_k\varphi_{n-pk}(x;\lambda)\mathrm{P}_{\mu+\nu k}(w)\left(\frac{z}{t^p}\right)^k t^n$$

$$=(1-t)^x\left(1-te^{-\lambda}\right)^{-x-1}\Lambda_{\mu,\nu}(w;z) \qquad (3.16)$$

bağıntısı elde edilir.

Legendre polinomları için Eş. 3.15 deki doğurucu fonksiyon bağıntısı kullanılır ve Eş. 3.16 da

$$a_k=1, \qquad \mu=0, \qquad \nu=1$$

alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]} \varphi_{n-pk}(x;\lambda)\mathrm{P}_k(w)\left(\frac{z}{t^p}\right)^k t^n=(1-t)^x\left(1-te^{-\lambda}\right)^{-x-1}\left(1-2wz+z^2\right)^{-1/2}$$

elde edilir.

Diğer bir uygulama için Teorem 3.2 deki $\Omega_{\mu+\nu k}(y_1,\dots,y_s)$ fonksiyonunda s=1 $y_1=y$ ve $\Omega_{\mu+\nu k}(y)=\varphi_{\mu+\nu k}(y;\lambda)$ alalım. Burada $\varphi_n(x;\lambda)$ Gottlieb polinomlarıdır ve Eş. 3.2 ile verilen doğurucu fonksiyon bağıntısı yardımıyla tanımlanmıştır. Böylece Gottlieb polinomları için bilineer doğrucu fonksiyonların bir sınıfını veren aşağıdaki sonuca ulaşılır.

3.2. Sonuç

Eğer

$$\Lambda_{\mu,\nu}(y;\lambda;z):=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\,\varphi_{\mu+\nu k}(y;\lambda)z^k \qquad , \qquad (a_k\neq 0, \quad \mu,\nu\in\mathbb{C})$$

ise bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} a_k \varphi_{n-pk}(x;\lambda)\varphi_{\mu+\nu k}(y;\lambda)\left(\frac{z}{t^p}\right)^k t^n$$

$$= (1-t)^x\left(1-te^{-\lambda}\right)^{-x-1}\Lambda_{\mu,\nu}(y;\lambda;z) \qquad (3.17)$$

dir. Gottlieb polinomları için Eş. 3.2 doğurucu fonksiyonu kullanılır ve Eş. 3.17 de

$a_k = 1,\ \mu = 0,\ \nu = 1$

alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} \varphi_{n-pk}(x;\lambda)\varphi_k(y;\lambda)\left(\frac{z}{t^p}\right)^k t^n$$

$$= (1-t)^x\left(1-te^{-\lambda}\right)^{-x-1}\ (1-z)^y\left(1-ze^{-\lambda}\right)^{-y-1}$$

bulunur.

3.4. Gottlieb Polinomları İçin Rekürans Bağıntısı

Bu kısımda, Gottlieb polinomları için bir rekürans bağıntısı elde edilmiştir.

3.3. Teorem

$\varphi_n(x;\lambda)$ Gottlieb polinomları,

$$(n+1)\varphi_{n+1} + 2e^{-\lambda}n\varphi_{n-1} = (n - x + xe^{-\lambda} + e^{-\lambda} + e^{\lambda})\varphi_n \qquad n \geq 2 \qquad (3.18)$$

şeklinde bir rekürans bağıntısına sahiptir.

İspat

Eş. 3.2 ile verilen Gottlieb polinomlarının doğurucu fonksiyon bağıntısının her iki yanının *t* ye göre türevi alınırsa,

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x;\lambda)t^n = \frac{\partial}{\partial t}[(1-t)^x(1-te^{-\lambda})^{-x-1}]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}\left[\varphi_n(x;\lambda)t^n\right] = \frac{\partial}{\partial t}[(1-t)^x(1-te^{-\lambda})^{-x-1}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\varphi_n(x;\lambda)t^{n-1}$$

$$= [(-x)(1-t)^{x-1}(1-te^{-\lambda})^{-x-1} + (1-t)^x(-e^{-\lambda})(-x-1)(1-te^{-\lambda})^{-x-2}]$$

$$= [\frac{-x}{(1-t)}\ (1-t)^x(1-te^{-\lambda})^{-x-1} + \frac{(e^{-\lambda})(x+1)}{(1-te^{-\lambda})}](1-t)^x(1-te^{-\lambda})^{-x-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\varphi_{n+1}(x;\lambda)t^n = \frac{-x}{(1-t)}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x;\lambda)t^n + \frac{(e^{-\lambda})(x+1)}{(1-te^{-\lambda})}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x;\lambda)t^n$$

olup, elde edilen bu son eşitliğin her iki yanı $(1-t)(1-te^{-\lambda})$ ile çarpılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$e^{-\lambda}\varphi_0(x;\lambda)t + 2\varphi_2(x;\lambda)t + \varphi_1(x;\lambda) + \sum_{n=2}^{\infty}[(n+1)\varphi_{n+1}(x;\lambda) + 2e^{-\lambda}\varphi_{n-1}(x;\lambda)]t^n$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty}[(n-x+xe^{-\lambda}+e^{-\lambda}+e^{\lambda})\varphi_n(x;\lambda)]t^n$$

$$+ \left(n-x+xe^{-\lambda}+e^{-\lambda}+e^{\lambda}\right)[\ \varphi_0(x;\lambda) + \varphi_1(x;\lambda)\ t]$$

bulunur. Elde edilen son eşitlikte $n \geq 2$ şartı için ,

$$(n+1)\varphi_{n+1} + 2e^{-\lambda}n\varphi_{n-1} = (n-x+xe^{-\lambda}+e^{-\lambda}+e^{\lambda})\varphi_n. \qquad n \geq 2$$

bağıntısı elde edilir.■

4. q- GOTTLIEB POLİNOMLARI

4.1. q- Analiz İle İlgili Temel Kavramlar

Bu kısımda q-teorisinin önemli bazı tanımları ve notasyonları verilecektir. q-analizinde ${}_r\emptyset_s$ hipergeometrik serileri,

$${}_r\emptyset_s\,(a_1, a_2, \dots, a_r; b_1, b_2, \dots, b_s; q, z)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1;q)_n (a_2;q)_n \dots (a_r;q)_n}{(q;q)_n (b_1;q)_n (b_2;q)_n \dots (b_s;q)_n} [(-1)^n q^{\binom{n}{2}}]^{1+s-r} z^n \tag{4.1}$$

olarak tanımlanır. Burada $r > s+1$, $b_1, b_2, \dots, b_s$ parametreler hiçbir zaman sıfır değildir ve

$$(a;q)_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ (1-a)(1-aq)\dots(1-aq^{n-1}), & n = 1,2,\dots \end{cases} \tag{4.2}$$

şeklindedir. Diğer taraftan,

$$[a]_q = \frac{1-q^a}{1-q}\ , \quad q \neq 1$$

$$[n]_q! = \prod_{k=1}^{n} [k]_q,$$

$$[a]_{q;n} = \prod_{k=0}^{n-1} [a+k]_q$$

olarak tanımlanır. Açıkça,

$$\lim_{q\to 1} [n]_q! = n!\ , \quad \lim_{q\to 1} [a]_q = a$$

$$[a]_{q;n} = \frac{(q^a;q)_n}{(1-q)^n}\ , \quad \lim_{q\to 1} [a]_{q;n} = (a)_n$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_m; q)_n = (a_1;q)_n (a_2;q)_n \dots (a_m;q)_n$$

dir. Son ifadenin başka bir gösterimi de

$$[a_1, a_2, \dots, a_m]_{q;n} = [a_1]_{q;n}[a_2]_{q;n} \dots [a_m]_{q;n}$$

dir. Benzer şekilde, Eş. 4.1 in farklı bir gösterimi,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[a_1, a_2, \dots, a_m]_{q;n}}{[n]_q!\,[b_1, b_2, \dots, b_s]_{q;n}} \left[(-1)^n q^{\binom{n}{2}}\right]^{1+s-r} z^n$$

$$= {}_r\emptyset_s(q^{a_1}, q^{a_2}, \dots, q^{a_m}; q^{b_1}, q^{b_2}, \dots, q^{b_s}; q, z)$$

şeklindedir. q-analizdeki binom teoremi

$${}_1\emptyset_0(a; -; q, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} z^n = \frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty}, \qquad |z| < 1, \qquad |q| < 1 \tag{4.3}$$

olarak verilir.

$$(a;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - aq^k)$$

şeklinde tanımlanır [19]. Ayrıca Gasper ve Rahman'ın tanımladığı q- analizdeki iki üstel fonksiyonu

$$e_q(z) = {}_1\emptyset_0(0; -; q, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(q;q)_n} = \frac{1}{(z;q)_\infty}, \quad |z| < 1 \tag{4.4}$$

$$E_q(z) = {}_0\emptyset_0(-; -; q, -z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(q;q)_n} z^n = (-z;q)_\infty \tag{4.5}$$

şeklindedir [18]. Buradan,

$$e_q(z)E_q(z) = 1\,, \; e_{q^{-1}}(z) = E_q(-qz) \tag{4.6}$$

olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

q- binom katsayısı,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[n-k]_q!\,[k]_q!} \qquad (n, k \in \mathbb{N}_0; 0 \le k \le n) \tag{4.7}$$

şeklinde tanımlanır. q- binom katsayısının genelleştirilmiş hali,

$$\begin{bmatrix} a \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[a]_{q;k}}{[k]_q!} \qquad (a \in \mathbb{C}, \qquad k \in \mathbb{N}_0)$$

ve

$$\begin{bmatrix} a \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q^{-\alpha};q)_k}{(q;q)_k}(-q^{\alpha})^k \, q^{-\binom{k}{2}} \quad (a \in \mathbb{C}, \qquad k \in \mathbb{N}_0) \tag{4.8}$$

şeklindedir.

İleriki kısımlarda kullanılacak olan bazı eşitlikler ispatsız şekilde aşağıda verilmiştir.

$$(a;q)_n = \frac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty} \quad (n \in \mathbb{Z}) \tag{4.9}$$

$$(a;q)_{n+k} = (a;q)_n (aq^n;q)_k \qquad n,k \in \mathbb{Z} \tag{4.10}$$

$$(a;q)_{n+1} = (a;q)_n \, (aq^n;q)_1$$

4.2. q- Gottlieb Polinomları

q- Gottlieb polinomları,

$$\varphi_{n;q}(x;\lambda) = \{E_q(-\lambda)\}^n \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-1)-xk}(1-e_q(\lambda))^k \tag{4.11}$$

$$= \{E_q(-\lambda)\}^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}} \frac{(q;q)_x}{(q;q)_k(q;q)_{x-k}} q^{k(k-1)-xk}(1-e_q(\lambda))^k$$

(4.12)

olarak tanımlanır [12]. Burada,

$$(q^{-n};q)_n = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_{n-k}}(-1)^k q^{\binom{k}{2}-nk} \tag{4.13}$$

bağıntısı kullanılırsa

$$\varphi_{n;q}(x;\lambda) = \{E_q(-\lambda)\}^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k(q^{-n};q)_k q^{-\binom{k}{2}+nk}}{(q;q)_k} \frac{(-1)^k(q^{-x};q)_k q^{-\binom{k}{2}+xk}}{(q;q)_k} q^{k(k-1)-xk}\left(1-e_q(\lambda)\right)^k$$

$$= \{E_q(-\lambda)\}^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^{-n};q)_k}{(q;q)_k} \frac{(q^{-x};q)_k}{(q;q)_k} q^{nk}(1-e_q(\lambda))^k$$

$$= \{E_q(-\lambda)\}^n {}_2\phi_1[q^{-n}, q^{-x}; q; q, q^n(1-e_q(\lambda))] \tag{4.14}$$

olarak yazılabilir.

4.3. q- Gottlieb Polinomlarının Doğurucu Fonksiyonları

q- Gottlieb polinomlarının doğurucu fonksiyon bağıntıları aşağıdaki teoremle verilmiştir:

4.1. Teorem

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n;q}(x;\lambda)t^n = (1-tE_q(\lambda))^{-1}{}_1\phi_1[q^{-x}; qtE_q(-\lambda); q, -\Big(1-E_q(-\lambda)\Big)t] \tag{4.15}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n;q}(x;\lambda)\frac{t^n}{(q;q)_n} = e_q(tE_q(-\lambda))_1\phi_1[q^{-x}; q; q, -\Big(1-E_q(-\lambda)\Big)t] \tag{4.16}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^c;q)_n}{(q;q)_n} \varphi_{n;q}(x;\lambda)t^n = \frac{(1-tq^cE_q(-\lambda))_\infty}{(1-tE_q(-\lambda))_\infty}$$

$$\mathrm{x}_2\phi_2[q^c, q^{-x}; q, tq^cE_q(-\lambda); q, -\Big(1-E_q(-\lambda)\Big)t] \tag{4.17}$$

İspat (4.15)

Eş. 4.15 de $\varphi_{n;q}(x;\lambda)$ ifadesinin yerine Eş. 4.14 yazılır ve Eş. 4.13 kullanılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n;q}(x;\lambda)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \{E_q(-\lambda)\}^n t^n {}_2\phi_1[q^{-n}, q^{-x}; q; q, q^n(1-e_q(\lambda))]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \{E_q(-\lambda)\}^n t^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^{-n};q)_k}{(q;q)_k} \frac{(q^{-x};q)_k}{(q;q)_k} q^{nk}(1-e_q(\lambda))^k$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \{E_q(-\lambda)\}^n t^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^n;q)_k (-1)^k}{(q;q)_{n-k}(q;q)_k} \frac{(q^{-x};q)_k}{(q;q)_k} q^{nk} q^{\binom{k}{2}-nk} (1-e_q(\lambda))^k$$

olur. Burada, Lemma 2.1 i uygulanır ve Eş. 4.10 kullanılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n;q}(x;\lambda) t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^n;q)_{n+k} \{E_q(-\lambda)\}^{n+k} t^{n+k} (-1)^k q^{\binom{k}{2}} (q^{-x};q)_k}{(q;q)_n (q;q)_k (q;q)_k} (1-e_q(\lambda))^k$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^{k+1};q)_n (q^{-x};q)_k (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \{tE_q(-\lambda)\}^k (1-e_q(\lambda))^k \{tE_q(-\lambda)\}^n}{(q;q)_n (q;q)_k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^{-x};q)_k (-1)^k q^{\binom{k}{2}} (E_q(-\lambda)-1)^k t^k}{(q;q)_k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^{k+1};q)_n \{tE_q(-\lambda)\}^n}{(q;q)_n}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^{-x};q)_k (-1)^k q^{\binom{k}{2}} (E_q(-\lambda)-1)^k t^k}{(q;q)_k} \frac{(tq^{k+1}E_q(-\lambda);q)_\infty}{(tE_q(-\lambda);q)_\infty}$$

bulunur. Burada kompakt notasyon uygulanırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n;q}(x;\lambda) t^n$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^{-x};q)_k (-1)^k q^{\binom{k}{2}} (E_q(-\lambda)-1)^k t^k}{(q;q)_k} \frac{[1-tq^{k+1}E_q(-\lambda)]_\infty}{[1-tE_q(-\lambda)]_\infty}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^{-x};q)_k (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \left(E_q(-\lambda)-1\right)^k t^k}{(q;q)_k} \frac{1}{\left[1-tE_q(-\lambda)\right]_{k+1}}$$

$$= [1-tE_q(-\lambda)]^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^{-x};q)_k (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \left(E_q(-\lambda)-1\right)^k t^k}{(q;q)_k} \frac{1}{\left[1-tE_q(-\lambda)\right]_k}$$

$$= (1-tE_q(\lambda))^{-1} {}_1\phi_1 \left[q^{-x}; qtE_q(-\lambda); q, -\left(1-E_q(-\lambda)\right)t\right]$$

elde edilir. ■

İspat (4.16)

Eş. 4.16 da $\varphi_{n;q}(x;\lambda)$ ifadesinin yerine Eş. 4.14 yazılır ve sırasıyla Eş. 4.13 ve Lemma 2.1 kullanılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{n;q}(x;\lambda)\frac{t^n}{(q;q)_n}=\sum_{n=0}^{\infty}\{E_q(-\lambda)\}^n\frac{t^n}{(q;q)_n}\,{}_2\phi_1[q^{-n},q^{-x};q;q,q^n(1-e_q(\lambda))]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\{E_q(-\lambda)\}^n\frac{t^n}{(q;q)_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{-n};q)_k}{(q;q)_k}\frac{(q^{-x};q)_k}{(q;q)_k}q^{nk}(1-e_q(\lambda))^k$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\{E_q(-\lambda)\}^n\frac{t^n}{(q;q)_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{n};q)_k(-1)^k}{(q;q)_{n-k}(q;q)_k}\frac{(q^{-x};q)_k}{(q;q)_k}q^{nk}q^{\binom{k}{2}-nk}(1-e_q(\lambda))^k$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\{tE_q(-\lambda)\}^{n+k}(-1)^kq^{\binom{k}{2}}(q^{-x};q)_k}{(q;q)_n(q;q)_k(q;q)_k}(1-e_q(\lambda))^k$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{tE_q(-\lambda)\}^n}{(q;q)_n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kq^{\binom{k}{2}}(q^{-x};q)_k}{(q;q)_k(q;q)_k}\{t(E_q(-\lambda)-1)\}^k$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{n;q}(x;\lambda)\frac{t^n}{(q;q)_n}=e_q(tE_q(-\lambda))\,{}_1\phi_1[q^{-x};q;q,-\left(1-E_q(-\lambda)\right)t]$$

elde edilir.■

İspat (4.17)

Eş. 4.17 de $\varphi_{n;q}(x;\lambda)$ yerine Eş. 4.14 yazılır ve sırasıyla Eş. 4.8, Lemma 2.1 ve Eş. 4.10 kullanılırsa,.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^c;q)_n}{(q;q)_n}\,\varphi_{n;q}(x;\lambda)t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^c;q)_n t^n}{(q;q)_n} \{E_q(-\lambda)\}^n {}_2\phi_1[q^{-n}, q^{-x}; q; q, q^n \left(1 - e_q(\lambda)\right)]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^c;q)_n t^n}{(q;q)_n} \{E_q(-\lambda)\}^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^{-n};q)_k}{(q;q)_k} \frac{(q^{-x};q)_k}{(q;q)_k} q^{nk} (1 - e_q(\lambda))^k$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^c;q)_n t^n}{(q;q)_n} \{E_q(-\lambda)\}^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^n;q)_k (-1)^k}{(q;q)_{n-k}(q;q)_k} \frac{(q^{-x};q)_k}{(q;q)_k} q^{nk} q^{\binom{k}{2}-nk} \left(1 - e_q(\lambda)\right)^k$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^c;q)_{n+k} \{E_q(-\lambda)\}^{n+k} t^{n+k} (-1)^k q^{\binom{k}{2}} (q^{-x};q)_k}{(q;q)_n (q;q)_k (q;q)_k} (1 - e_q(\lambda))^k$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^c;q)_k (q^{c+k};q)_n (q^{-x};q)_k (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \{tE_q(-\lambda)\}^k (1 - e_q(\lambda))^k \{tE_q(-\lambda)\}^n}{(q;q)_n (q;q)_k (q;q)_k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^c;q)_k (q^{-x};q)_k (-1)^k q^{\binom{k}{2}} (E_q(-\lambda) - 1)^k t^k}{(q;q)_k (q;q)_k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^{c+k};q)_n \{tE_q(-\lambda)\}^n}{(q;q)_n}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^c;q)_k (q^{-x};q)_k (-1)^k q^{\binom{k}{2}} (E_q(-\lambda) - 1)^k t^k}{(q;q)_k (q;q)_k} \frac{(tq^{c+k} E_q(-\lambda);q)_\infty}{(tE_q(-\lambda);q)_\infty}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^c;q)_k (q^{-x};q)_k \left(E_q(-\lambda) - 1\right)^k t^k}{(q;q)_k (q;q)_k} (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \frac{\left[1 - tq^{c+k} E_q(-\lambda)\right]_\infty}{\left[1 - tE_q(-\lambda)\right]_\infty}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^c;q)_k (q^{-x};q)_k (E_q(-\lambda) - 1)^k t^k}{(q;q)_k (q;q)_k} (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \frac{\left[1 - tq^c E_q(-\lambda)\right]_k [1 - tq^{c+k} E_q(-\lambda)]_\infty}{\left[1 - tq^c E_q(-\lambda)\right]_k [1 - tE_q(-\lambda)]_\infty}$$

$$= \frac{\left[1 - tq^c E_q(-\lambda)\right]_k}{\left[1 - tE_q(-\lambda)\right]_k} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^c;q)_k (q^{-x};q)_k (E_q(-\lambda) - 1)^k t^k}{(q;q)_k (q;q)_k} (-1)^k q^{\binom{k}{2}}$$

$$= \frac{(1 - tq^c E_q(-\lambda))_\infty}{(1 - tE_q(-\lambda))_\infty} \; {}_2\phi_2[q^c, q^{-x}; q, tq^c E_q(-\lambda); q, -\left(1 - E_q(-\lambda)\right) t]$$

elde edilir. ■

5. q- GOTTLIEB POLİNOMUNUN BİLATERAL VE BİLİNEER DOĞURUCU FONKSİYONLARI

Bu kısımda q-Gottlieb polinomunun bilateral ve bilineer doğurucu fonksiyonlarını veren teoremler verilecektir.

5.1. Teorem

μ yüncü basamaktan ve s kompleks değişkenli $(s\epsilon\mathbb{N})$, sıfıra denk olmayan $\Omega_\mu(y_1,\dots,y_s)$ fonksiyonu için,

$$\Lambda_{\mu,\nu}(y_1,\dots,y_s;z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,\Omega_{\mu+\nu k}(y_1,\dots,y_s)z^k$$

$$(a_k \neq 0, \quad \mu,\nu \epsilon \mathbb{C})$$

ve

$${}_q\Theta_{n,p}^{\mu,\nu}(x;\lambda;y_1,\dots,y_s;\tau) := \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k \varphi_{n-pk;q}(x;\lambda)\Omega_{\mu+\nu k}(y_1,\dots,y_s)\tau^k \qquad (5.1)$$

olsun. Burada $n,p\epsilon\ \mathbb{N}$ dir. Bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_q\Theta_{n,p}^{\mu,\nu}\left(x;\lambda;y_1,\dots,y_s;\frac{\eta}{t^p}\right)t^n$$

$$= (1-tE_q(\lambda))^{-1}{}_1\phi_1[q^{-x};qtE_q(-\lambda);q,-\left(1-E_q(-\lambda)\right)t]\Lambda_{\mu,\nu}(y_1,\dots,y_s;\eta) \qquad (5.2)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 5.2 nin sol tarafına *S* denir ve Eş. 5.1 yerine yazılırsa,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} {}_q\Theta_{n,p}^{\mu,\nu}\left(x;\lambda;y_1,\dots,y_s;\frac{\eta}{t^p}\right)t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k \varphi_{n-pk;q}(x;\lambda)\Omega_{\mu+\nu k}(y_1,\dots,y_s)\left(\frac{\eta}{t^p}\right)^k t^n$$

olur. Burada Lemma 2.1 uygulanırsa,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_{n;q}(x;\lambda)\Omega_{\mu+\nu k}(y_1,\dots,y_s)\eta^k\, t^{n+pk-pk}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n;q}(x;\lambda)t^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\nu k}(y_1,\dots,y_s)\eta^k$$

$$= (1-tE_q(\lambda))^{-1}{}_1\phi_1[q^{-x};qtE_q(-\lambda);q,-\left(1-E_q(-\lambda)\right)t]\Lambda_{\mu,\nu}(y_1,y_2,\dots,y_s;\eta)$$

bulunur.■

5.2. Teorem

μ yüncü basamaktan ve s kompleks değişkenli $(s\epsilon\mathbb{N})$, sıfıra denk olmayan $\Omega_\mu(y_1,\dots,y_s)$ fonksiyonu için

$$\Lambda_{\mu,\nu}(y_1,y_2,\dots,y_s;z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, \Omega_{\mu+\nu k}(y_1,\dots,y_s)z^k$$

$$(a_k \neq 0, \quad \mu,\nu \epsilon \mathbb{C})$$

ve

$${}_q\Theta_{n,p}^{\mu,\nu}(x;\lambda;y_1,\dots,y_s;\tau)$$

$$= \sum_{k=0}^{[n/p]} \frac{a_k}{(q;q)_{n-pk}} \varphi_{n-pk;q}(x;\lambda)\Omega_{\mu+\nu k}(y_1,\dots,y_s)\tau^k \qquad (5.3)$$

olsun. Burada $n,p\epsilon\ \mathbb{N}$ dir. Bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_q\Theta_{n,p}^{\mu,\nu}\left(x;\lambda;y_1,\dots,y_s;\frac{\eta}{t^p}\right)t^n$$

$$= e_q(tE_q(-\lambda))_1\phi_1[q^{-x};q;q,-\left(1-E_q(-\lambda)\right)t]\Lambda_{\mu,\nu}(y_1,\dots,y_s;\eta) \qquad (5.4)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 5.4 ün sol tarafına S denir ve Eş. 5.3 yerine yazılırsa,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} {}_q\Theta_{n,p}^{\mu,\nu}\left(x;\lambda;y_1,\dots,y_s;\frac{\eta}{t^p}\right)t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]} \frac{a_k}{(q;q)_{n-pk}}\varphi_{n-pk;q}(x;\lambda)\Omega_{\mu+\nu k}(y_1,\dots,y_s)\left(\frac{\eta}{t^p}\right)^k t^n$$

olur. Burada Lemma 2.1 uygulanırsa,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{(q;q)_n}\varphi_{n;q}(x;\lambda)\Omega_{\mu+\nu k}(y_1,\dots,y_s)\eta^k\, t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n;q}(x;\lambda)\frac{t^n}{(q;q)_n}\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Omega_{\mu+\nu k}(y_1,\dots,y_s)\eta^k$$

$$= e_q(tE_q(-\lambda))_1\phi_1[q^{-x};q;q,-\left(1-E_q(-\lambda)\right)t]\Lambda_{\mu,\nu}(y_1,\dots,y_s;\eta)$$

bulunur. ■

5.3. Teorem

μ yüncü basamaktan ve s kompleks değişkenli $(s\epsilon\mathbb{N})$, sıfıra denk olmayan $\Omega_\mu(y_1,\dots,y_s)$ fonksiyonu için,

$$\Lambda_{\mu,\nu}(y_1,\dots,y_s;z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,\Omega_{\mu+\nu k}(y_1,\dots,y_s)z^k$$

$$(a_k \neq 0, \quad \mu,\nu \epsilon \mathbb{C})$$

ve

$$ {}_q\Theta_{n,p}^{\mu,\nu}(x;\lambda;y_1,\dots,y_s;\tau) $$

$$ = \sum_{k=0}^{[n/p]} \frac{(q^c;q)_{n-pk}a_k}{(q;q)_{n-pk}} \varphi_{n-pk;q}(x;\lambda)\Omega_{\mu+\nu k}(y_1,y_2,\dots,y_s)\tau^k \qquad (5.5) $$

olsun. Burada $n, p\epsilon\ \mathbb{N}$ dir. Bu durumda,

$$ \sum_{n=0}^{\infty} {}_q\Theta_{n,p}^{\mu,\nu}\left(x;\lambda;y_1,y_2,\dots,y_s;\frac{\eta}{t^p}\right)t^n = \frac{(1-tq^cE_q(-\lambda))_\infty}{(1-tE_q(-\lambda))_\infty} $$

$$ {}_x\phi_2[q^c,q^{-x};q,tq^cE_q(-\lambda);q,-\left(1-E_q(-\lambda)\right)t]\Lambda_{\mu,\nu}(y_1,\dots,y_s;\eta) \qquad (5.6) $$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 5.6 nın sol tarafına *S* denir ve Eş. 5.5 yerine yazılırsa,

$$ S = \sum_{n=0}^{\infty} {}_q\Theta_{n,p}^{\mu,\nu}\left(x;\lambda;y_1,\dots,y_s;\frac{\eta}{t^p}\right)t^n $$

$$ = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]} \frac{(q^c;q)_{n-pk}a_k}{(q;q)_{n-pk}} \varphi_{n-pk;q}(x;\lambda)\Omega_{\mu+\nu k}(y_1,y_2,\dots,y_s)\left(\frac{\eta}{t^p}\right)^k t^n $$

olur. Burada Lemma 2.1 uygulanırsa

$$ S = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^c;q)_n a_k}{(q;q)_n} \varphi_{n;q}(x;\lambda)\Omega_{\mu+\nu k}(y_1,\dots,y_s)\eta^k\, t^n $$

$$ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^c;q)_n}{(q;q)_n} \varphi_{n;q}(x;\lambda)t^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k\Omega_{\mu+\nu k}(y_1,y_2,\dots,y_s)\eta^k = \frac{(1-tq^cE_q(-\lambda))_\infty}{(1-tE_q(-\lambda))_\infty} $$

$$ {}_x\phi_2[q^c,q^{-x};q,tq^cE_q(-\lambda);q,-\left(1-E_q(-\lambda)\right)t]\Lambda_{\mu,\nu}(y_1,y_2,\dots,y_s;\eta) $$

bulunur.■

5.1. Özel Durumlar

Teorem 5.1, Teorem 5.2 ve Teorem 5.3 de $\Omega_{\mu+\nu k}(y_1,\dots,y_s)\quad k\in\mathbb{N}_0,\ s\in\mathbb{N}$ çok değişkenli fonksiyonu bir ya da çok değişkenli basit fonksiyonlar tarafından ifade edilerek, q-Gottlieb polinomları için multilineer ya da multilateral doğurucu fonksiyon bağıntıları elde edilir. İlk olarak Teorem 5.1 de

$$\Omega_{\mu+\nu k}(y_1,\dots,y_s)=\ u_{\mu+\nu k;q}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}(y_1,\dots,y_s)$$

alınmıştır. Burada $u_{n;q}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_r)}(x_1,\dots,x_r)$ q-Erkus-Srivastava polinomlarıdır ve

$$\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{(x_i t^{m_i};q)_{\alpha_i}}=\sum_{n=0}^{\infty}u_{n;q}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_r)}(x_1,\dots,x_r)t^n \tag{5.7}$$

şeklinde doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir [15]. Böylece Eş. 4.11 ile tanımlanan q-Gottlieb polinomları ve q- Erkus-Srivastava polinomları için bilateral doğurucu fonksiyon bağıntısı aşağıdaki şekilde verilebilir:

5.1. Sonuç

Eğer

$$\Lambda_{\mu,\nu}(y_1,\dots,y_s;z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k u_{\mu+\nu k;q}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}(y_1,\dots,y_s)z^k\quad ;\ a_k\neq 0\,,\qquad \mu,\nu\in\mathbb{C}$$

ise bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]}a_k\varphi_{n-pk}(x;\lambda)u_{\mu+\nu k;q}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}(y_1,\dots,y_s)\quad\left(\frac{z}{t^p}\right)^k t^n$$

$$=\ (1-tE_q(\lambda))^{-1}{}_1\phi_1[q^{-x};qtE_q(-\lambda);q,-\left(1-E_q(-\lambda)\right)t]\Lambda_{\mu,\nu}(w;z) \tag{5.8}$$

bağıntısı elde edilir.

q-Erkus- Srivastava polinomları için Eş. 5.7 deki doğurucu fonksiyon bağıntısı kullanılır ve Eş. 5.8 de

$$a_k=1,\qquad \mu=0,\qquad \nu=1$$

alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]}\varphi_{n-pk;q}(x;\lambda)u_{k;q}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}(y_1,\dots,y_s)\left(\frac{z}{t^p}\right)^k t^n$$

$$= (1-tE_q(\lambda))^{-1}{}_1\phi_1[q^{-x};qtE_q(-\lambda);q,-\left(1-E_q(-\lambda)\right)t]\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{(y_i z^{m_i};q)_{\alpha_i}}$$

elde edilir.

Diğer bir örnek için Teorem 5.1 deki $\Omega_{\mu+\nu k}(y_1,\dots,y_s)$ ifadesinde *s*=1, $y_1 = y$ ve $\Omega_{\mu+\nu k}(y) = \varphi_{\mu+\nu k;q}(y;\lambda)$ alınmıştır. Burada $\varphi_{n;q}(x;\lambda)$ q- Gottlieb polinomlarıdır ve Eş. 4.15 ile verilen doğurucu fonksiyon bağıntısı yardımıyla tanımlanmıştır. Böylece q-Gottlieb polinomları için bilineer doğrucu fonksiyonların bir sınıfını veren aşağıdaki sonuca ulaşılır.

5.2. Sonuç

Eğer,

$$\Lambda_{\mu,\nu}(y;\lambda;z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,\varphi_{\mu+\nu k}(y;\lambda)z^k$$

$$(a_k \neq 0, \quad \mu,\nu \in \mathbb{C})$$

ise bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} a_k\varphi_{n-pk;q}(x;\lambda)\varphi_{\mu+\nu k}(y;\lambda)\left(\frac{z}{t^p}\right)^k t^n$$

$$= (1-tE_q(\lambda))^{-1}{}_1\phi_1[q^{-x};qtE_q(-\lambda);q,-\left(1-E_q(-\lambda)\right)t]\Lambda_{\mu,\nu}(y_1,\dots,y_s;z) \qquad (5.9)$$

dir. q- Gottlieb polinomları için Eş. 4.15 doğurucu fonksiyon bağıntısı kullanılır ve

Eş. 5.9 da

$$a_k = 1,\ \mu = 0,\ \nu = 1$$

alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} \varphi_{n-pk;q}(x;\lambda)\varphi_k(y;\lambda)\left(\frac{z}{t^p}\right)^k t^n$$

$$= (1-tE_q(\lambda))^{-1}{}_1\phi_1[q^{-x};qtE_q(-\lambda);q,-\left(1-E_q(-\lambda)\right)t]$$

$$\text{x}\,(1-zE_q(\lambda))^{-1}{}_1\phi_1[q^{-y};qzE_q(-\lambda);q,-\left(1-E_q(-\lambda)\right)z]$$

bulunur.

Diğer bir örnek için Teorem 5.2 de $s=1,\ \ y_1=w,\ \ \Omega_{\mu+\nu k}(w)=g^{(m)}_{\mu+\nu k;q}(w)$ alınmıştır. Burada $g^{(m)}_{n;q}(x)$, q-Cesàro polinomlarıdır ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} g^{(m)}_{n;q}(x)t^n=\frac{(1-q^m xt)^{-1}}{(1-t)_{m+1}} \tag{5.10}$$

şeklindeki doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir [19]. Böylece q- Gottlieb polinomları ile q- Cesàro polinomları arasında aşağıdaki bilateral doğurucu fonksiyon bağıntısı yazılabilir:

5.3. Sonuç

Eğer,

$$\Lambda_{\mu,\nu}(w;z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, g^{(m)}_{k;q}(w)\tau^k, \qquad (a_k\neq 0, \qquad \mu,\nu\,\epsilon\,\mathbb{C})$$

ise bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]}\frac{a_k}{(q;q)_{n-pk}}\varphi_{n-pk;q}(x;\lambda)g^{(m)}_{\mu+\nu k;q}(w)\tau^k\, t^n$$

$$= e_q(tE_q(-\lambda))_1\phi_1[q^{-x};q;q,-\left(1-E_q(-\lambda)\right)t]\Lambda_{\mu,\nu}(w;\tau) \tag{5.11}$$

eşitliği sağlanır.

q- Cesàro polinomları için Eş. 5.10 da verilen doğurucu fonksiyonu kullanılır ve Eş. 5.11 de

$$a_k = 1,\ \mu = 0,\ \nu = 1$$

alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]} \frac{1}{(q;q)_{n-pk}} \varphi_{n-pk;q}(x;\lambda) g_{k;q}^{(m)}(w) \left(\frac{\tau}{t^p}\right)^k t^n$$

$$= e_q(tE_q(-\lambda))\,{}_1\phi_1[q^{-x};q;q,-\left(1-E_q(-\lambda)\right)t]\frac{(1-q^m w\tau)^{-1}}{(1-\tau)_{m+1}}$$

elde edilir.

Diğer taraftan, Teorem 5.2 deki $\Omega_{\mu+\nu k}(y_1,\dots,y_s)$ fonksiyonunda s=1, $y_1 = y$ ve $\Omega_{\mu+\nu k}(y) = \varphi_{\mu+\nu k;q}(y;\lambda)$ alalım. Burada $\varphi_{n;q}(x;\lambda)$ q- Gottlieb polinomlarıdır ve Eş. 4.16 ile verilen doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptirr. Böylece q- Gottlieb polinomları için bilineer doğrucu fonksiyonların bir sınıfını veren aşağıdaki sonuca ulaşılır.

5.3. Sonuç

Eğer,

$$\Lambda_{\mu,\nu}(y;\lambda;z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, \varphi_{\mu+\nu k}(y;\lambda) z^k$$

$$(a_k \neq 0, \quad \mu,\nu \in \mathbb{C})$$

ise bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} a_k \varphi_{n-pk;q}(x;\lambda)\varphi_{\mu+\nu k}(y;\lambda)\left(\frac{z}{t^p}\right)^k \frac{t^n}{(q;q)_{n-pk}}$$

$$= e_q(tE_q(-\lambda))\,{}_1\phi_1[q^{-x};q;q,-\left(1-E_q(-\lambda)\right)t]\,\Lambda_{\mu,\nu}(y_1,\dots,y_s;z) \qquad (5.11)$$

dir. q- Gottlieb polinomları için Eş. 4.16 doğurucu fonksiyon bağıntısı kullanılır ve Eş. 5.11 de

$$a_k = \frac{1}{(q;q)_k}\,, \qquad \mu = 0,\ \ \nu = 1$$

alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} \frac{1}{(q;q)_k}\varphi_{n-pk;q}(x;\lambda)\varphi_k(y;\lambda)\left(\frac{z}{t^p}\right)^k \frac{t^n}{(q;q)_{n-pk}}$$

$$= e_q(tE_q(-\lambda))_1\phi_1[q^{-x};q;q,-\left(1-E_q(-\lambda)\right)t]$$

$$\text{x}e_q(zE_q(-\lambda))_1\phi_1[q^{-y};q;q,-\left(1-E_q(-\lambda)\right)z]$$

bulunur.

5.2. q- Gottlieb Polinomları İçin Rekürans Bağıntıları

Bu kısımda q- Gottlieb polinomları için türev içeren ve içermeyen rekürans bağıntıları elde edilecektir.

5.4. Teorem

$\varphi_{n;q}(x;\lambda)$ q-Gottlieb polinomları aşağıdaki rekürans bağıntısına sahiptir:

$$\varphi_{n+1;q}(x;\lambda) = \left[E_q(-\lambda) + \frac{-q^n(q^{-x+n};q)_1}{(q^{n+1};q)_1}\left\{-\left(1-E_q(-\lambda)\right)\right\}\right]\varphi_{n;q}(x;\lambda). \qquad (5.12)$$

İspat

Eş. 5.12 nin ispatı için Eş. 4.16 ile verilen q- Gottlieb polinomunun doğurucu fonksiyon bağıntısının iki tarafının t değişkenine göre türevini alalım.

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{n;q}(x;\lambda)\frac{t^n}{(q;q)_n} = \frac{\partial}{\partial t}e_q(tE_q(-\lambda))_1\phi_1[q^{-x};q;q,-\left(1-E_q(-\lambda)\right)t]$$

Burada Eş. 4.12 ve Eş. 4.1 kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{n;q}(x;\lambda)\frac{t^n}{(q;q)_n}$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{tE_q(-\lambda)\}^n}{(q;q)_n}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^{-x};q)_n}{(q;q)_n(q;q)_n}\,(-1)^n q^{\binom{n}{2}}\left\{-\left(1-E_q(-\lambda)\right)t\right\}^n\right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\varphi_{n;q}(x;\lambda)\frac{t^{n-1}}{(q;q)_n}$$

$$=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\{E_q(-\lambda)\}^n t^{n-1}}{(q;q)_n}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^{-x};q)_n}{(q;q)_n(q;q)_n}\,(-1)^n q^{\binom{n}{2}}\left\{-\left(1-E_q(-\lambda)\right)t\right\}^n\right]$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{tE_q(-\lambda)\}^n}{(q;q)_n}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(q^{-x};q)_n}{(q;q)_n(q;q)_n}\,(-1)^n q^{\binom{n}{2}}\left\{-\left(1-E_q(-\lambda)\right)\right\}^n t^{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\varphi_{n+1;q}(x;\lambda)\frac{t^n}{(q;q)_{n+1}}$$

$$=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)\{E_q(-\lambda)\}^{n+1}t^n}{(q;q)_{n+1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^{-x};q)_n}{(q;q)_n(q;q)_n}(-1)^n q^{\binom{n}{2}}\left\{-\left(1-E_q(-\lambda)\right)t\right\}^n\right]$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{tE_q(-\lambda)\}^n}{(q;q)_n}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(q^{-x};q)_{n+1}}{(q;q)_{n+1}(q;q)_{n+1}}(-1)^{n+1}q^{\binom{n+1}{2}}\left\{-\left(1-E_q(-\lambda)\right)\right\}^{n+1}t^n$$

olup, Eş. 4.10 dan,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{(q^{n+1};q)_1}\,\varphi_{n+1;q}(x;\lambda)\frac{t^n}{(q;q)_n}$$

$$=\left[\frac{(n+1)E_q(-\lambda)}{(q^{n+1};q)_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{E_q(-\lambda)\}^n t^n}{(q;q)_n}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^{-x};q)_n}{(q;q)_n(q;q)_n}\,(-1)^n q^{\binom{n}{2}}\left\{-\left(1-E_q(-\lambda)\right)t\right\}^n\right]$$

$$+\frac{-q^n(n+1)(q^{-x+n};q)_1}{(q^{n+1};q)_1(q^{n+1};q)_1}\left\{-\left(1-E_q(-\lambda)\right)\right\}$$

$$\text{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{tE_q(-\lambda)\}^n}{(q;q)_n}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^{-x};q)_n}{(q;q)_n(q;q)_n}(-1)^n q^{\binom{n}{2}}\left\{-\left(1-E_q(-\lambda)\right)\right\}^n t^n$$

bulunur. Bu son eşitliğin her iki yanı

$$\frac{(n+1)}{(q^{n+1};q)_1}$$

parantezine alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n+1;q}(x;\lambda)\frac{t^n}{(q;q)_n}$$

$$= \left[E_q(-\lambda)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{E_q(-\lambda)\}^n t^n}{(q;q)_n}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^{-x};q)_n}{(q;q)_n(q;q)_n}\,(-1)^n q^{\binom{n}{2}}\left\{-\left(1-E_q(-\lambda)\right)t\right\}^n\right]$$

$$+\frac{-q^n(q^{-x+n};q)_1}{(q^{n+1};q)_1}\left\{-\left(1-E_q(-\lambda)\right)\right\}$$

$$\mathrm{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{tE_q(-\lambda)\}^n}{(q;q)_n}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^{-x};q)_n}{(q;q)_n(q;q)_n}(-1)^n q^{\binom{n}{2}}\left\{-\left(1-E_q(-\lambda)\right)\right\}^n t^n$$

olarak bulunur. Böylece,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n+1;q}(x;\lambda)\frac{t^n}{(q;q)_n}$$

$$= \left[E_q(-\lambda)+\frac{-q^n(q^{-x+n};q)_1}{(q^{n+1};q)_1}\left\{-\left(1-E_q(-\lambda)\right)\right\}\right] e_q\left(tE_q(-\lambda)\right)$$

$$\mathrm{x}_1\phi_1[q^{-x};q;q,-\left(1-E_q(-\lambda)\right)t]$$

elde edilir. Polinom eşitliğinden

$$\varphi_{n+1;q}(x;\lambda) = \left[E_q(-\lambda)+\frac{-q^n(q^{-x+n};q)_1}{(q^{n+1};q)_1}\left\{-\left(1-E_q(-\lambda)\right)\right\}\right]\varphi_{n;q}(x;\lambda)$$

bağıntısı sağlanır. ■

5.5. Teorem

$\varphi_{n;q}(x;\lambda)$ q-Gottlieb polinomları aşağıdaki türev içeren rekürans bağıntısına sahiptir:

$$\varphi'_{n+1}(x;q) = (lnq)\sum_{k=1}^{n}\frac{q^k}{q^x - q^k}\varphi_{n+1}(x;q) \tag{5.13}$$

İspat

Eş. 5.13 ün ispatı için Eş. 4.16 ile verilen q- Gottlieb polinomunun doğurucu fonksiyon bağıntısının her iki tarafın x değişkenine göre türevi alınıp, Eş. 4.4 ve Eş. 4.1 kullanılırsa,

$$\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{n;q}(x;\lambda)\frac{t^n}{(q;q)_n} = \frac{\partial}{\partial x}e_q(tE_q(-\lambda))_1\phi_1[q^{-x};q;q,-\left(1-E_q(-\lambda)\right)t]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{n;q}(x;\lambda)\frac{t^n}{(q;q)_n}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{tE_q(-\lambda)\}^n}{(q;q)_n}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^{-x};q)_n}{(q;q)_n(q;q)_n}(-1)^n q^{\binom{n}{2}}\left\{-\left(1-E_q(-\lambda)\right)t\right\}^n\right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi'_{n;q}(x;\lambda)\frac{t^n}{(q;q)_n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{tE_q(-\lambda)\}^n}{(q;q)_n}(lnq)$$

$$\text{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\frac{q}{q^x-q}+\cdots+\frac{q}{q^x-q^n}](q^{-x};q)_n}{(q;q)_n(q;q)_n}(-1)^n q^{\binom{n}{2}}\left\{-\left(1-E_q(-\lambda)\right)t\right\}^n]$$

olup, indis düzenlemeleri yapılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\varphi'_{n+1;q}(x;\lambda)\frac{t^{n+1}}{(q;q)_{n+1}} = e_q\left(tE_q(-\lambda)\right)(lnq)$$

$$\text{x}\sum_{k=1}^{n}\frac{q}{q^x-q^k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^{-x};q)_{n+1}}{(q;q)_{n+1}(q;q)_{n+1}}(-1)^{n+1}q^{\binom{n+1}{2}}\left\{-\left(1-E_q(-\lambda)\right)t\right\}^{n+1}]$$

bulunur. Polinom eşitliğinden her iki tarafta $\frac{t^{n+1}}{(q;q)_{n+1}}$ ifadesinin katsayıları eşitlenirse,

$$\varphi'_{n+1}(x;q) = (lnq)\sum_{k=1}^{n}\frac{q^k}{q^x-q^k}\varphi_{n+1}(x;q)$$

bağıntısı elde edilir. ■

6. İKİ DEĞİŞKENLİ q- GOTTLIEB POLİNOMLARI

Bu bölümde iki değişkenli q- Gottlieb polinomları, doğurucu fonksiyonları, bilateral ve bilineer doğurucu fonksiyonlarını veren teoremler verildikten sonra özel durumlar incelenmiştir.

İki değişkenli q- Gottlieb polinomları,

$$\varphi_{n;q}^{2}(x_1,x_2;\lambda_1,\lambda_2)$$

$$:=\{E_q(-\lambda_1)\}^n\{E_q(-\lambda_2)\}^n\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\begin{bmatrix}n\\k+j\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}x_1\\k\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}x_2\\j\end{bmatrix}_q$$

$$\text{x}\,q^{\binom{k+j}{2}+\binom{k}{2}+\binom{j}{2}-x_1k-x_2j}.(1-e_q(\lambda_1))^k(1-e_q(\lambda_2))^j \tag{6.1}$$

şeklinde tanımlanır [16]. Burada Eş. 4.10, Eş. 4.7 ve Eş. 4.8 kullanılırsa,

$$\varphi_{n;q}^{2}(x_1,x_2;\lambda_1,\lambda_2)=\{E_q(-\lambda_1)\}^n\{E_q(-\lambda_2)\}^n\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\frac{(q^{-n};q)_{k+j}(q^{-x_1};q)_k(q^{-x_2};q)_j}{(q;q)_{k+j}(q;q)_k(q;q)_j}$$

$$\text{x}\{q^n\left(1-e_q(\lambda_1)\right)\}^k\{q^n(1-e_q(\lambda_2))\}^j \tag{6.2}$$

olarak da ifade edilir.

6.1. İki Değişkenli q- Gottlieb Polinomlarının Doğurucu Fonksiyonları

6.1. Teorem

İki değişkenli q- Gottlieb polinomlarının doğurucu fonksiyonları,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^c;q)_n}{(q;q)_n}\varphi_{n;q}^{2}(x_1,x_2;\lambda_1,\lambda_2)t^n=\frac{(tq^cE_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2);q)_\infty}{(tE_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2);q)_\infty}$$

$$\text{x}\Phi_{2:0;0}^{1:1;1}\left[\begin{matrix}q^c:q^{-x_1}\\q,tq^cE_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2):--;--\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix};\,q^{-x_2};q\\;tE_q(-\lambda_2)\left(1-E_q(-\lambda_1)\right),tE_q(-\lambda_1)\left(1-E_q(-\lambda_2)\right)\end{matrix}\quad 1,1,2\right] \tag{6.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n;q}^{2}(x_1, x_2; \lambda_1, \lambda_2) \frac{t^n}{(q;q)_n} = e_q\{t\, E_q(-\lambda_1) E_q(-\lambda_2)\}$$

$$\text{x}\Phi_{1:0;0}^{0:1;1}\left[\begin{matrix} -- : q^{-x_1};\ q^{-x_2}; q; t\left(1 - E_q(-\lambda_1)\right), t\left(1 - E_q(-\lambda_2)\right) \\ q: --;\ --; 1,1,2 \end{matrix}\right] \tag{6.4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n;q}^{2}(x_1, x_2; \lambda_1, \lambda_2) t^n = \{1 - tE_q(-\lambda_1) E_q(-\lambda_2)\}^{-1}$$

$$\text{x}\Phi_{1:0;0}^{1:1;1}\left[\begin{matrix} -- : q^{-x_1} \\ tqE_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2);\ --;\ -- \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} ;\ q^{-x_2}; q \\ ;\ tE_q(-\lambda_2)\left(1 - E_q(-\lambda_1)\right), tE_q(-\lambda_1)\left(1 - E_q(-\lambda_2)\right) \quad 1,1,2 \end{matrix}\right] \tag{6.5}$$

şeklindedir. Burada $\Phi_{l:m;n}^{p:h;u}[.]$ genelleştirilmiş temel çift seridir ve

$$\Phi_{l:m;n}^{p:h;u}\left[\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_p :\ \beta_1, \dots, \beta_h;\ \gamma_1, \dots, \gamma_u;\ \ q; x, y \\ \lambda_1, \dots, \lambda_l :\ \mu_1, \dots, \mu_m;\ \nu_1, \dots, \nu_n;\ \ i, j, k \end{matrix}\right] = \sum_{r,s=0}^{\infty} q^{\frac{1}{2}ir(r-1)+\frac{1}{2}js(s-1)+krs}$$

$$\text{x}\frac{\prod_{\tau=1}^{p}(\alpha_\tau; q)_{r+s} \prod_{\tau=1}^{h}(\beta_\tau; q)_r \prod_{\tau=1}^{u}(\gamma_\tau; q)_s}{\prod_{\tau=1}^{l}(\lambda_\tau; q)_{r+s} \prod_{\tau=1}^{m}(\mu_\tau; q)_r \prod_{\tau=1}^{n}(\nu_\tau; q)_s} \frac{x^r}{(q;q)_r} \frac{y^s}{(q;q)_s} \tag{6.6}$$

şeklinde tanımlanır [16].

İspat

Eş. 6.3 ile verilen doğurucu fonksiyon bağıntısının ispatını verelim:

Eş. 6.3 ün sol tarafına $\mathcal{L}_{c;q}(x_1, x_2; \lambda_1, \lambda_2)$ denir ve Eş. 6.2 ve Eş. 4.10 uygulanırsa,

$$\mathcal{L}_{c;q}(x_1, x_2; \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{n=0}^{\infty} (q^c; q)_n \left\{tE_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2)\right\}^n$$

$$\text{x}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^{k+j} q^{\binom{k+j}{2}} (q^{-x_1}; q)_k (q^{-x_2}; q)_j}{(q;q)_{n-k-j}(q;q)_{k+j}(q;q)_k(q;q)_j} \{1 - e_q(\lambda_1)\}^k \{1 - e_q(\lambda_2)\}^j$$

olur. İki kez arka arkaya Lemma 2. 1 uygulanırsa,

$$\mathcal{L}_{c;q}(x_1, x_2; \lambda_1, \lambda_2)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}(q^c;q)_{n+k}\left\{tE_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2)\right\}^{n+k}$$

$$\text{x}\frac{(-1)^{k+j}q^{\binom{k+j}{2}}(q^{-x_1};q)_k(q^{-x_2};q)_j}{(q;q)_{n-j}(q;q)_{k+j}(q;q)_k(q;q)_j}\left\{1-e_q(\lambda_1)\right\}^k\{1-e_q(\lambda_2)\}^j$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(q^c;q)_{n+k+j}\left\{tE_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2)\right\}^{n+k+j}$$

$$\text{x}\frac{(-1)^{k+j}q^{\binom{k+j}{2}}(q^{-x_1};q)_k(q^{-x_2};q)_j}{(q;q)_n(q;q)_{k+j}(q;q)_k(q;q)_j}.\left\{1-e_q(\lambda_1)\right\}^k\{1-e_q(\lambda_2)\}^j$$

bulunur. Burada Eş. 4.10 ve Eş. 4.6 kullanılır ve üçlü seri yeniden düzenlenirse,

$$\mathcal{L}_{c;q}(x_1, x_2; \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(q^c;q)_{k+j}q^{\binom{k+j}{2}}(q^{-x_1};q)_k(q^{-x_2};q)_j}{(q;q)_{k+j}(q;q)_k(q;q)_j}$$

$$\text{x}\left\{tE_q(-\lambda_2)\left(1-E_q(-\lambda_1)\right)\right\}^k\left\{tE_q(-\lambda_1)\left(1-E_q(-\lambda_2)\right)\right\}^j$$

$$\text{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(q^{c+k+j};q\right)_n}{(q;q)_n}\left\{tE_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2)\right\}^n$$

olup, en içteki seri için Eş. 4.3 kullanıldıktan sonra elde edilen eşitlikte Eş. 4.9 göz önüne alınırsa,

$$\mathcal{L}_{c;q}(x_1, x_2; \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(q^c;q)_{k+j}q^{\binom{k+j}{2}}(q^{-x_1};q)_k(q^{-x_2};q)_j}{(q;q)_{k+j}(q;q)_k(q;q)_j}$$

$$\text{x}\left\{tE_q(-\lambda_2)\left(1-E_q(-\lambda_1)\right)\right\}^k\left\{tE_q(-\lambda_1)\left(1-E_q(-\lambda_2)\right)\right\}^j$$

$$\text{x}\frac{\left(q^{c+k+j}tE_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2);q\right)_\infty}{\left(tE_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2);q\right)_\infty}$$

$$= \frac{\left(tq^{c}E_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2);q\right)_{\infty}}{\left(tE_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2);q\right)_{\infty}}$$

$$\text{x}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(q^{c};q)_{k+j}q^{\binom{k+j}{2}}(q^{-x_1};q)_k(q^{-x_2};q)_j}{(q;q)_{k+j}\left(tq^{c}E_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2);q;q\right)_{k+j}}$$

$$\text{x}\frac{\left\{tE_q(-\lambda_2)\left(1-E_q(-\lambda_1)\right)\right\}^{k}}{(q;q)_k}\frac{\left\{tE_q(-\lambda_1)\left(1-E_q(-\lambda_2)\right)\right\}^{j}}{(q;q)_j}$$

bulunur. Son olarak Eş. 6.6 dan istenilen sonuca ulaşılır.

Benzer yöntem kullanılarak Eş. 6.4 ve Eş. 6.5 ile verilen iki değişkenli q- Gottlieb polinomunun doğurucu fonksiyon bağıntılarının ispatı da yapılabilir. ■

6.2. İki Değişkenli q- Gottlieb Polinomlarının Bilateral ve Bilineer Doğurucu Fonksiyonları

Bu kısımda iki değişkenli q-Gottlieb polinomunun bilateral ve bilineer doğurucu fonksiyonlarını veren teoremler verilecektir.

6.2. Teorem

μ yüncü basamaktan ve s kompleks değişkenli $(s\epsilon\mathbb{N})$, sıfıra denk olmayan $\Omega_{\mu}(y_1,\dots,y_s)$ fonksiyonu için,

$$\Lambda_{\mu,\nu}(y_1,\dots,y_s;z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\,\Omega_{\mu+\nu k}(y_1,\dots,y_s)z^{k}$$

$$(a_k\neq 0,\quad \mu,\nu\,\epsilon\,\mathbb{C})$$

ve

$${}_q\Theta_{n,p}^{\mu,\nu}(x_1,x_2;\lambda;y_1,\dots,y_s;\tau)=\sum_{k=0}^{[n/p]}a_k\varphi_{n-pk;q}^{2}(x_1,x_2;\lambda_1,\lambda_2)\Omega_{\mu+\nu k}(y_1,\dots,y_s)\tau^{k} \qquad (6.7)$$

olsun. Burada $n,p\epsilon\,\mathbb{N}$ dir. Bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_q\Theta_{n,p}^{\mu,\nu}\left(x_1, x_2; \lambda; y_1, \dots, y_s; \frac{\eta}{t^p}\right) t^n$$

$$= \left\{1 - tE_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2)\right\}^{-1}$$

$$\text{x}\Phi_{1:0;0}^{1:1;1}\left[\begin{matrix} --: q^{-x_1} \\ tqE_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2);\ --;\ -- \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} ;\ q^{-x_2}; q \\ ;\ tE_q(-\lambda_2)\left(1 - E_q(-\lambda_1)\right), tE_q(-\lambda_1)\left(1 - E_q(-\lambda_2)\right) \end{matrix}\quad 1,1,2\right]\Lambda_{\mu,\nu}(y_1, \dots, y_s; \eta) \qquad (6.8)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 6.8 in sol tarafına *R* denir ve Eş. 6.7 yerine yazılırsa,

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} {}_q\Theta_{n,p}^{\mu,\nu}\left(x; \lambda; y_1, \dots, y_s; \frac{\eta}{t^p}\right) t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k \varphi_{n-pk;q}^2(x_1, x_2; \lambda_1, \lambda_2)\Omega_{\mu+\nu k}(y_1, \dots, y_s)\left(\frac{\eta}{t^p}\right)^k t^n$$

olur. Burada Lemma 2.1 uygulanırsa,

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_{n;q}^2(x_1, x_2; \lambda_1, \lambda_2)\Omega_{\mu+\nu k}(y_1, \dots, y_s)\eta^k\, t^{n+pk-pk}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n;q}^2(x_1, x_2; \lambda_1, \lambda_2) t^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\nu k}(y_1, \dots, y_s)\eta^k$$

$$= \left\{1 - tE_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2)\right\}^{-1}$$

$$\text{x}\Phi_{1:0;0}^{1:1;1}\left[\begin{matrix} --: q^{-x_1} \\ tqE_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2);\ --;\ -- \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} ;\ q^{-x_2}; q \\ ;\ tE_q(-\lambda_2)\left(1 - E_q(-\lambda_1)\right), tE_q(-\lambda_1)\left(1 - E_q(-\lambda_2)\right) \end{matrix}\quad 1,1,2\right]\Lambda_{\mu,\nu}(y_1, \dots, y_s; \eta)$$

elde edilir.■

6.3. Teorem

μ yüncü basamaktan ve s kompleks değişkenli $(s\epsilon\mathbb{N})$, sıfıra denk olmayan $\Omega_\mu(y_1,\dots,y_s)$ fonksiyonu için,

$$\Lambda_{\mu,\nu}(y_1,\dots,y_s;z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\,\Omega_{\mu+\nu k}(y_1,\dots,y_s)z^k$$

$$(a_k\neq 0,\quad \mu,\nu\,\epsilon\,\mathbb{C})$$

ve

$${}_q\Theta_{n,p}^{\mu,\nu}(x_1,x_2;\lambda;y_1,\dots,y_s;\tau)$$

$$=\sum_{k=0}^{[n/p]}\frac{a_k}{(q;q)_{n-pk}}\varphi_{n-pk;q}^{2}(x_1,x_2;\lambda_1,\lambda_2)\Omega_{\mu+\nu k}(y_1,\dots,y_s)\tau^k \qquad (6.9)$$

olsun. Burada $n,p\epsilon\,\mathbb{N}$ dir. Bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}_q\Theta_{n,p}^{\mu,\nu}\left(x_1,x_2;\lambda;y_1,\dots,y_s;\frac{\eta}{t^p}\right)t^n$$

$$=e_q\{tE_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2)\}$$

$$\mathrm{x}\Phi_{1:0;0}^{0:1;1}\left[\begin{matrix}--:\ q^{-x_1};\ q^{-x_2};q;t\left(1-E_q(-\lambda_1)\right),t\left(1-E_q(-\lambda_2)\right)\\ q:\ --;\ --;1,1,2\end{matrix}\right]$$

$$\mathrm{x}\Lambda_{\mu,\nu}(y_1,\dots,y_s;\eta) \qquad (6.10)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 6.10 un sol tarafına *T* denir ve Eş. 6.9 yerine yazılırsa,

$$T=\sum_{n=0}^{\infty}{}_q\Theta_{n,p}^{\mu,\nu}\left(x;\lambda;y_1,\dots,y_s;\frac{\eta}{t^p}\right)t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} \frac{a_k}{(q;q)_{n-pk}} \varphi^2_{n-pk;q}(x_1, x_2; \lambda_1, \lambda_2) \Omega_{\mu+\nu k}(y_1, \dots, y_s) \left(\frac{\eta}{t^p}\right)^k t^n$$

olur. Burada Lemma 2.1 uygulanırsa,

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{(q;q)_n} \varphi^2_{n;q}(x_1, x_2; \lambda_1, \lambda_2) \Omega_{\mu+\nu k}(y_1, \dots, y_s) \eta^k \, t^{n+pk-pk}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^2_{n;q}(x_1, x_2; \lambda_1, \lambda_2) \frac{t^n}{(q;q)_n} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\nu k}(y_1, \dots, y_s) \eta^k$$

$$= e_q\{tE_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2)\}$$

$$\text{x}\Phi^{0:1;1}_{1:0;0}\left[\begin{matrix} --: q^{-x_1};\ q^{-x_2}; q; t\left(1 - E_q(-\lambda_1)\right), t\left(1 - E_q(-\lambda_2)\right) \\ q: --;\ --; 1,1,2 \end{matrix}\right]$$

$$\text{x}\Lambda_{\mu,\nu}(y_1, \dots, y_s; \eta)$$

elde edilir.■

6.4. Teorem

μ yüncü basamaktan ve s kompleks değişkenli $(s\epsilon\mathbb{N})$, sıfıra denk olmayan $\Omega_\mu(y_1, \dots, y_s)$ fonksiyonu için,

$$\Lambda_{\mu,\nu}(y_1, \dots, y_s; z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, \Omega_{\mu+\nu k}(y_1, \dots, y_s) z^k$$

$$(a_k \neq 0, \quad \mu, \nu \, \epsilon \, \mathbb{C})$$

ve

$${}_q\Theta^{\mu,\nu}_{n,p}(x_1, x_2; \lambda; y_1, \dots, y_s; \tau)$$

$$= \sum_{k=0}^{[n/p]} \frac{a_k (q^c; q)_{n-pk}}{(q;q)_{n-pk}} \varphi^2_{n-pk;q}(x_1, x_2; \lambda_1, \lambda_2) \Omega_{\mu+\nu k}(y_1, \dots, y_s) \tau^k \qquad (6.11)$$

olsun. Burada $n, p\epsilon \, \mathbb{N}$ dir. Bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_q\Theta_{n,p}^{\mu,\nu}\left(x_1, x_2; \lambda; y_1, \dots, y_s; \frac{\eta}{t^p}\right) t^n$$

$$= \frac{(tq^c E_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2); q)_\infty}{(tE_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2); q)_\infty}$$

$$\mathrm{x}\Phi_{2:0;0}^{1:1;1}\left[\begin{matrix} q^c : q^{-x_1} \\ q, tq^c E_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2) : --; -- \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} ; q^{-x_2}; q \\ ; tE_q(-\lambda_2)\left(1 - E_q(-\lambda_1)\right), tE_q(-\lambda_1)\left(1 - E_q(-\lambda_2)\right) \end{matrix} \quad 1,1,2\right] \Lambda_{\mu,\nu}(y_1, \dots, y_s; \eta) \quad (6.12)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 6.12 nin sol tarafına *S* denir ve Eş. 6.11 yerine yazılırsa,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} {}_q\Theta_{n,p}^{\mu,\nu}\left(x_1, x_2; \lambda; y_1, \dots, y_s; \frac{\eta}{t^p}\right) t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} \frac{a_k (q^c; q)_{n-pk}}{(q; q)_{n-pk}} \varphi_{n-pk;q}^2(x_1, x_2; \lambda_1, \lambda_2) \Omega_{\mu+\nu k}(y_1, \dots, y_s) \left(\frac{\eta}{t^p}\right)^k t^n$$

olur. Burada Lemma 2.1 uygulanırsa,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k (q^c; q)_n}{(q; q)_n} \varphi_{n;q}^2(x_1, x_2; \lambda_1, \lambda_2) \Omega_{\mu+\nu k}(y_1, \dots, y_s) \eta^k \, t^{n+pk-pk}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^c; q)_n}{(q; q)_n} \varphi_{n;q}^2(x_1, x_2; \lambda_1, \lambda_2) t^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\nu k}(y_1, \dots, y_s) \eta^k$$

$$= \frac{(tq^c E_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2); q)_\infty}{(tE_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2); q)_\infty}$$

$$\mathrm{x}\Phi_{2:0;0}^{1:1;1}\left[\begin{matrix} q^c : q^{-x_1} \\ q, tq^c E_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2) : --; -- \end{matrix}\right.$$

$$; q^{-x_2}; q$$
$$; tE_q(-\lambda_2)\left(1-E_q(-\lambda_1)\right), tE_q(-\lambda_1)\left(1-E_q(-\lambda_2)\right) \quad 1,1,2\Big]\Lambda_{\mu,\nu}(y_1,\dots,y_s;\eta)$$

elde edilir.■

6.3. Özel Durumlar

Teorem 6.2, Teorem 6.3 ve Teorem 6.4 de $\Omega_{\mu+\nu k}(y_1,\dots,y_s) \quad k \in \mathbb{N}_0, s \in \mathbb{N}$ çok değişkenli fonksiyonu bir ya da çok değişkenli basit fonksiyonlar tarafından ifade edilerek, iki değişkenli q-Gottlieb polinomları için multilineer ya da multilateral doğurucu fonksiyon bağıntıları elde edilir.

İlk olarak Teorem 6.2 de s=2 ve

$$\Omega_{\mu+\nu k}(y_1,y_2) = g^{(\alpha,\beta)}_{\mu+\nu k;q}(y_1,y_2)$$

alınmıştır. Burada $g^{(\alpha,\beta)}_{n;q}(x,y)$, q- Lagrange polinomlarıdır ve

$$\frac{1}{(xt;q)_\alpha}\frac{1}{(yt;q)_\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} g^{(\alpha,\beta)}_{n;q}(x,y)t^n \quad (|t| < \min\{|x|^{-1},|y|^{-1}\} \tag{6.13}$$

şeklindeki doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir [19, 23]. Böylece Eş. 6.1 ile tanımlanan iki değişkenli q-Gottlieb polinomları ve q- Lagrange polinomları için bilateral bir doğurucu fonksiyon bağıntısı aşağıdaki şekilde verilebilir:

6.1. Sonuç

Eğer,

$$\Lambda_{\mu,\nu}(y_1,y_2;z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k g^{(\alpha,\beta)}_{\mu+\nu k;q}(y_1,y_2)\eta^k \quad ; \quad a_k \neq 0\,, \qquad \mu,\nu \in \mathbb{C}$$

ise bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]} a_k \varphi^2_{n-pk;q}(x_1,x_2;\lambda_1,\lambda_2) g^{(\alpha,\beta)}_{\mu+\nu k;q}(y_1,y_2)\left(\frac{\eta}{t^p}\right)^k t^n$$

$$= \{1 - tE_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2)\}^{-1}$$

$$\mathrm{x}\Phi_{1:0;0}^{1:1;1}\left[\begin{matrix} --: q^{-x_1} \\ tqE_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2);\ --;\ -- \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} ;\ q^{-x_2}; q \\ ;\ tE_q(-\lambda_2)\left(1 - E_q(-\lambda_1)\right), tE_q(-\lambda_1)\left(1 - E_q(-\lambda_2)\right) \end{matrix}\quad 1,1,2\right]\Lambda_{\mu,\nu}(y_1, y_2; \eta) \qquad (6.14)$$

bağıntısı elde edilir.

q- Lagrange polinomları için Eş. 6.13 ile verilen doğurucu fonksiyon bağıntısı kullanılır ve Eş. 6.14 de

$$a_k = 1, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = 1$$

alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]} \varphi_{n-pk;q}^{2}(x_1, x_2; \lambda_1, \lambda_2) g_{k;q}^{(\alpha,\beta)}(y_1, y_2)\left(\frac{\eta}{t^p}\right)^k t^n$$

$$= \{1 - tE_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2)\}^{-1}$$

$$\mathrm{x}\Phi_{1:0;0}^{1:1;1}\left[\begin{matrix} --: q^{-x_1} \\ tqE_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2);\ --;\ -- \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} ;\ q^{-x_2}; q \\ ;\ tE_q(-\lambda_2)\left(1 - E_q(-\lambda_1)\right), tE_q(-\lambda_1)\left(1 - E_q(-\lambda_2)\right) \end{matrix}\quad 1,1,2\right]\frac{1}{(y_1\eta; q)_\alpha (y_2\eta; q)_\beta}$$

elde edilir.

Diğer bir örnek için Teorem 6.2 deki $\Omega_{\mu+\nu k}(y_1, \ldots, y_s)$ fonksiyonunda s=2 ve $\Omega_{\mu+\nu k}(y_1, y_2) = \varphi_{\mu+\nu k;q}^{2}(y_1, y_2; \lambda_1, \lambda_2)$ alınmıştır. Burada $\varphi_{n;q}^{2}(x_1, x_2; \lambda_1, \lambda_2)$ iki değişkenli q- Gottlieb polinomlarıdır ve Eş. 6.3 ile verilen doğurucu fonksiyon bağıntısına sahitir. Böylece iki değişkenli q- Gottlieb polinomları için bilineer doğrucu fonksiyonların bir sınıfını veren aşağıdaki sonuca ulaşılır.

6.2. Sonuç

Eğer,

$$\Lambda_{\mu,\nu}(y_1,y_2;\lambda;z) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, \varphi^2_{\mu+\nu k;q}(y_1,y_2;\lambda_1,\lambda_2)\, z^k$$

$$(a_k \neq 0, \quad \mu,\nu \in \mathbb{C})$$

ise bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} a_k \varphi^2_{n-pk;q}(y_1,y_2;\lambda_1,\lambda_2)\, \varphi^2_{\mu+\nu k;q}(y_1,y_2;\lambda_1,\lambda_2)\, (\frac{z}{t^p})^k\, t^n$$

$$= \left\{1 - tE_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2)\right\}^{-1}$$

$$\text{x}\Phi^{1:1;1}_{1:0;0}\left[\begin{matrix} --:\ q^{-x_1} \\ tqE_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2);\ --;\ -- \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} ;\ q^{-x_2};q \\ ;\ tE_q(-\lambda_2)\left(1-E_q(-\lambda_1)\right), tE_q(-\lambda_1)\left(1-E_q(-\lambda_2)\right) \end{matrix}\quad 1,1,2\right]\Lambda_{\mu,\nu}(y_1,y_2;z) \qquad (6.15)$$

dir. İki değişkenli q- Gottlieb polinomları için Eş. 6.3 doğurucu fonksiyon bağıntısı kullanılır ve Eş. 6.15 de

$$a_k = \frac{(q^c;q)_k}{(q;q)_k}, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = 1$$

alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} \frac{(q^c;q)_k}{(q;q)_k} \varphi^2_{n-pk;q}(y_1,y_2;\lambda_1,\lambda_2)\, \varphi^2_{k;q}(y_1,y_2;\lambda_1,\lambda_2)\, (\frac{z}{t^p})^k\, t^n$$

$$= \left\{1 - tE_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2)\right\}^{-1}$$

$$\text{x}\Phi^{1:1;1}_{1:0;0}\left[\begin{matrix} --:\ q^{-x_1} \\ tqE_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2);\ --;\ -- \end{matrix}\right.$$

$$; \; q^{-x_2}; q$$
$$; \; tE_q(-\lambda_2)\left(1-E_q(-\lambda_1)\right), tE_q(-\lambda_1)\left(1-E_q(-\lambda_2)\right) \quad 1,1,2\Big]$$

$$\mathrm{x}\left\{1-zE_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2)\right\}^{-1}$$

$$\mathrm{x}\Phi^{1:1;1}_{1:0;0}\Big[\begin{matrix} --: \; q^{-y_1} \\ zqE_q(-\lambda_1)E_q(-\lambda_2); \; --; \; -- \end{matrix}$$

$$; \; q^{-y_2}; q$$
$$; \; zE_q(-\lambda_2)\left(1-E_q(-\lambda_1)\right), zE_q(-\lambda_1)\left(1-E_q(-\lambda_2)\right) \quad 1,1,2\Big]$$

bulunur.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde Gottlieb ve q- Gottlieb polinomları tanıtılmış, bunların bilinen özellikleri verildikten sonra, bu polinomlar için multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyonları veren teoremler elde edilmiştir. Ayrıca bu teoremlerin özel durumları incelendikten sonra, bu polinomlar için yeni rekürans bağıntıları bulunmuştur.

Bu tezde yapılan çalışmalar ve verilen metodlar kullanılarak ileride farklı polinomlar için de yeni multilineer, multilateral doğurucu fonksiyonlar veren sonuçlar ve rekürans bağıntıları elde edilebilir.

KAYNAKLAR

1. Jackson, F. H. (1910). On a *q*-definite integrals, *Q. J. Pure Appl. Math.*, 41, 191-203.

2. Kac, V. and Cheung, P. (2002). *Quantum Calculus*, Universitext, Springer-Verlag, New York.

3. Sole, A. and Kac, V. (2003). *On integral representations of q-gamma and q-beta functions*, Department of Mathematics, MIT, Cambridge, USA.

4. Altın, A., Aktaş, R. and Erkus-Duman, E. (2009). On a multivariable extension for the extended Jacobi polynomials, *J. Math. Anal. Appl*. 353, 121-133.

5. Erkuş-Duman, E., Altın, A. and Aktaş, R. (2011). Miscellaneous properties of some multivariable polynomials, *Math. Comput. Modelling* 54, 1875-1885.

6. Özmen, N. and Erkus-Duman, E. (2018). Some families of generating functions for the generalized Cesàro polynomials, *J. Comput. Anal. Appl*. 25, 670-683.

7. Korkmaz-Duzgun, D. and Erkus-Duman, E. (2018). The Laguerre type *d*-orthogonal polynomials, *J. Sci. Arts* 42, 95-106.

8. Altin, A. and Erkuş, E. (2006). On a multivariable extension of the Lagrange-Hermite polynomials, Integral Transform. *Spec. Funct*. 17, 239–244.

9. Srivastava, H. M. and Manocha, H. L. (1984). *A Treatise on Generating Functions*, Halsted Press (Ellis Horwood Limited)/John Wiley and Sons, Chichester/New York. 569.

10. Ernst, T. (2001). *The history of q-calculus and a new method*, Licenciate Thesis-Uppsala

11. Khan, M. A. and Akhlaq, M. (2009). Some new generating functions for gottlieb polynomials of several variables, *Int. Trans. Appl. Sci*. 1(4), 567-570.

12. Khan, M. A. and Asif, M. (2012). A note on generating functions of *q*-Gottlieb polynomials, *Commun. Korean Math. Soc*. 27, 159-166.

13. Choi, J. (2012). *q*-Extension of a generalization of Gottlieb polynomials in three variables, *Honam Math. J*. 34, 327-340.

14. Choi, J. (2012). A generalization of Gottlieb polynomials in several variables, *Appl. Math. Lett.* 25(1), 43-46.

15. Gottlieb, M.J. (1938). Concerning some polynomials orthogonal on a finite or enumerable set of points, *Amer. J. Math*. 60, 453-458.

16. Choi, J. (2012). *q*-Extension of a generalization of Gottlieb polynomials in two variables, *J. Chungcheong Math. Soc*. 25, 253-265.

17. Choi, J. and Srivastava, H. M. (2014). *q*-Extension of a multivariable and multiparameter generalization of the Gottlieb polynomials in several variables. *Tokyo J. Math.* 37(1), 111-125.

18. Gasper, G. and Rahman, M. (1990). *Basic hypergeometric series.* Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Cambridge University Press. Cambridge, 35

19. Exton, H. (1983). *q-Hypergeometric Functions and Applications.* Ellis Horwood Series in Mathematics and Its Applications, Halsted Press, Chichester.

20. Al-Salam, W.A. (1966/1967). Some fractional *q*-integrals and *q*-derivatives. *Proc. Edinb. Math. Soc.*, 15, 135-140.

21. Erkuş-Duman, E. (2008). A note *q*- extension of the Erkus-Shrivastava polynomials in several variables. *Taiwanese Journal of Mathematics* 12(2), 539-543.

22. Rainville, E. D. (1960). *Special Functions*. The Macmillan Company, New York.

23. Szegö, G. (1975). *Orthogonal Polynomials* (fourth ed.), Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 23.

24. Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. and Tricomi, F. G. (1955). *Higher transcendental functions*, McGraw-Hill Book Company, New York-Toronto-London. 3.

ÖZGEÇMİŞ



Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : AVCI, Yakup
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 11.05.1991, Mersin
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0 5322701544
e-mail : yakupavci2133@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik Bölümü	Devam Ediyor
Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi / OÖ. Matematik Öğrt.	2015
Lise	Abdulkerim Bengi Anadolu Lisesi	2010

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2015-Halen	Milli Eğitim Bakanlığı	Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

Erkuş Duman, E. ve Avcı, Y. (2018, Nisan). Gottlieb Polinomlarının q- Analoğu. *13. Ankara Matematik Günleri TOBB ETU.* 77.

Hobiler

Kitap okumak, Bilimsel araştırmalar yapmak



GAZİ GELECEKTİR..