
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Vildan ÖZTÜRK

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EKİM 2015

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Vildan ÖZTÜRK

20.10.2015

GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

(Doktora Tezi)

Vildan ÖZTÜRK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ekim 2015

ÖZET

Bu çalışmada son yıllarda tanımlanan bazı genelleştirilmiş metrik uzaylar ele alındı ve bu uzaylarda bazı yeni sabit nokta teoremleri verildi. İlk olarak kısmi metrik uzaylarda $(\delta, L)-$zayıf büzülme (hemen hemen büzülme) dönüşümünü sağlayan dönüşümler için sabit nokta teoremleri ispatlandı. Daha sonra $b-$metrik uzaylarda $(E, A)-$özelliğini sağlayan iki dönüşüm çifti için sabit nokta teoremleri elde edildi. Düzgün uzaylarda $E-$uzaklık dönüşümü ve bazı özellikleri verildi. $E-$uzaklık dönüşümü kullanılarak kısmi sıralı düzgün uzaylarda $(\psi-\varphi)-$zayıf büzülme dönüşümü verildi. Son olarak, kısmi sıralı gauge (yarı metrik) uzaylarda $(\psi-\varphi)-$zayıf büzülme dönüşümü sağlayan dört dönüşüm için ortak sabit nokta teoremleri ispatlandı.

Bilim Kodu : 204.1.132

Anahtar Kelimeler : Sabit nokta, büzülme dönüşümü, kısmi metrik uzay, $b-$metrik uzay, düzgün uzay, gauge uzay

Sayfa Adedi : 80

Danışman : Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

FIXED POINT THEOREMS IN GENERALIZED METRIC SPACES

(Ph. D. Thesis)

Vildan ÖZTÜRK

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

October 2015

ABSTRACT

In this study, some generalized metric spaces which have been defined recently were considered and in these spaces some new fixed point theorems were given. Firstly, some fixed point theorems for mappings satisfying $(\delta, L)-$weak contraction (almost contaction) was proved in partial metric spaces. After fixed point theorems for two pairs of mappings satisfying $(E, A)-$property were obtained in $b-$metric spaces. In uniform spaces, definition and some properties of $E-$distance mapping were gived. Using $E-$distance mapping in partially ordered uniform spaces $(\psi-\varphi)-$weak contraction mapping was gived. Lastly, some common fixed point results for four mappings satisfying $(\psi-\varphi)-$weak contraction were proved in partially ordered gauge (pseudometric) spaces.

Science Code : 204.1.132

Key Words : Fixed point, contraction mapping, partial metric space, $b-$metric space, uniform space, gauge space

Page Number : 80

Supervisor : Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

TEŞEKKÜR

Bu çalışma boyunca yardımlarını esirgemeyen hocam Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU' na en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen aileme ve doktora çalışmalarım boyunca her türlü kolaylığı gösteren Artvin Çoruh Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Dekanlığı'na teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

SİMGELER VE KISALTMALAR viii

1. GİRİŞ 1

2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR 3

2.1. Bağıntılar, Metrik ve Topolojik Uzaylar 3

2.2. Düzgün Uzaylar 12

2.3. Banach Büzülme Dönüşüm Prensibi ve Sabit Nokta Kavramı 17

2.4. Dönüşüm Çiftlerinin Özellikleri 22

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ 29

3.1. Kısmi Metrik Uzaylarda (δ, L) – Zayıf Büzülme Dönüşümü ve Sabit Nokta Teoremleri 29

3.2. b-Metrik Uzaylarda (E.A)-Özelliğini Sağlayan Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremleri 44

3.3. Düzgün Uzaylarda (ψ, φ) – Zayıf Büzülme Dönüşümü ve Sabit Nokta Teoremleri 53

3.4. Sıralı Gauge Uzaylarda (ψ, φ) – Zayıf Büzülme Dönüşümü ve Sabit Nokta Teoremleri 60

4. SONUÇ VE ÖNERİLER 73

KAYNAKLAR 75

ÖZGEÇMİŞ 79

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
N	Doğal sayılar kümesi
P	Reel sayılar kümesi
$\{x_n\}$	Dizi
$x_n \to x$	$\{x_n\}$ dizisi x e yakınsar
$\circ$	Kısmi sıralama bağıntısı
d_λ	Yarı metrik (pseudometrik)
(X,d)	Metrik uzay
(X,p)	Kısmi metrik uzay
(X,σ)	b-metrik uzay
(X,τ)	Topolojik uzay
(X,τ(F))	Gauge uzay
Δ	XxX in köşegeni
(X, ϑ)	Düzgün uzay
V[x]	x noktasının düzgün komşuluğu
V[A]	A kümesinin düzgün komşuluğu

1. GİRİŞ

Sabit nokta teori topoloji, diferansiyel denklemler, fonksiyonel analiz, iktisat, ekonomi gibi alanlarda kullanılan önemli bir araçtır. Tarihsel olarak, sabit nokta teorisindeki çalışmalar 1910 yılında Brouwer ile başlamıştır. Brouwer Υ^n nin kapalı birim yuvarından kendi üzerine tanımlanan sürekli dönüşümün sabit noktasının varlığını ispatlamıştır [11]. Ardından 1930 da Schauder, Brouwer'in teoremini Υ^n yerine herhangi bir normlu lineer uzay alarak genişletmiştir [40]. Tam metrik uzaylar üzerinde tanımlı büzülme tipli dönüşümler için sabit nokta teori çalışmaları ise 1922 yılında Banach ile başlamıştır [8].

X boş olmayan bir küme ve $f : X \to X$ bir dönüşüm olsun. $fx = x$ olacak şekildeki bir $x \in X$ noktasına f dönüşümünün sabit noktası denir.

Bir dönüşümün sabit noktası olmayabileceği gibi birden fazla sabit noktası da olabilir. Sabit noktanın olup olmadığı dönüşümün tanımına veya tanım kümesinin yapısına bağlıdır. Bu nedenle sabit nokta teori çalışmaları bir dönüşümün sabit noktasının hangi koşullar altında var olduğu, varsa tek olup olmadığı, tek ise nasıl bulunabileceği ve tek değilse hangi koşullar altında sabit noktanın tek olabileceği sorularına cevap aramaktadır.

Metrik uzaylarda tanımlı dönüşümlerin sabit noktasının varlığı ve tekliği üzerine çalışmaların temeli "Banach Büzülme Prensibi" ile ilişkilendirilir.

(X, d) bir metrik uzay ve $T : X \to X$ herhangi dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$ eşitsizliğini sağlayan bir $\alpha \in [0,1)$ reel sayısı varsa T dönüşümüne bir *büzülme dönüşümü* denir.

Matematik ve diğer bilimlerde çalışılan problemlerin çoğu yalnızca klasik Banach büzülme prensibi kullanılarak çözülememiştir. Bu nedenle daha genel olan sabit nokta teoremlerine ihtiyaç duyulmuştur. Ćirić, Chatterja ve daha bir çok bilim adamı gerek uzay gerekse dönüşüm üzerine yeni birtakım koşullar koyarak sabit nokta teoremleri ve uygulamaları üzerine çalışmalar yapmışlardır [12,15,25].

Ayrıca metrik ve lineer uzaylardan başka olarak düzgün uzaylar, fuzzy metrik uzaylar gibi uzaylarda da sabit nokta teoremleri araştırılmış, tek ve küme değerli dönüşümlerin sabit noktasının varlığı ve tekliği ile ilgili çalışmalar yapılmıştır.

Son yıllarda sabit nokta teorisinin uygulanabileceği bazı genelleştirilmiş metrik uzaylar araştırılmıştır. Bakhtin 1989 yılında yaptığı çalışmada $b-$metrik uzayları tanımlamış ve Banach sabit nokta teoremini bu uzaylarda ispatlamıştır [7]. Czerwick, Aydi, Roshan gibi bazı araştırmacılar da $b-$metrik uzaylarda bazı yeni sabit nokta teoremleri ispatlamıştır [6,16,36,39,42].

Diğer bir genelleştirilmiş metrik uzay olarak kısmi metrik uzaylar ise Matthews tarafından 1992 yılında genel topoloji ve uygulamaları 8. yaz konferansında tanıtılmıştır [29]. Pek çok matematikçinin ilgisini çeken bu uzaylarda Banach sabit nokta teoreminin çeşitli uygulamaları yapılmıştır [26,27,32,44]. Ayrıca kısmi metrik uzaylar bilgisayar bilimlerinde de son zamanlarda sıkça kullanılmaktadır.

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünden sonra ikinci bölümde bazı temel kavramlar, Banach sabit nokta teoremi ile bazı genelleştirmeleri ve kullanacağımız dönüşüm çiftlerinin özelliklerine yer verilmiştir.

Bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturan üçüncü bölümde Türkoğlu ve Öztürk tarafından yayınlanan makalelere yer verilmiştir. İlk olarak kısmi metrik uzaylarda Berinde tipinde $(\delta, L)-$zayıf büzülme (hemen hemen büzülme) dönüşümünün bir genelleştirmesi verilmiştir. İkinci kısımda Aamri ve El-Moutawakil tarafından metrik uzaylarda tanımlanan $(E.A)-$özelliği $b-$metrik uzaylara aktarılmış ve bu özelliği sağlayan dönüşümler için sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır. Üçüncü kısımda Aamri ve El-Moutawakil tarafından düzgün uzaylarda tanımlanan $E-$uzaklık dönüşümü yardımıyla bir dönüşüm için $(\psi-\varphi)$-zayıf büzülme dönüşümü verilerek dönüşümün sabit noktasının varlığı ve tekliği ispatlanmıştır. Üçüncü bölümün son kısmında yarı metrik ailesi tarafından üretilen düzgün uzaylarda $(\psi-\varphi)$-zayıf büzülme dönüşümü ve bazı sabit nokta teoremlerine yer verilmiştir.

2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Bağıntılar, Metrik ve Topolojik uzaylar

2.1.1. Tanım

X ve Y boş olmayan iki küme olsun. $X \times Y$ nin boş olmayan altkümesine X den Y ye bir bağıntı denir. $X = Y$ ise X üzerinde bağıntı denir [18].

2.1.2. Tanım

X ve Y boş olmayan iki küme ve

$f = \{(x, y) : x \in X \text{ ve } y \in Y\}$

$X \times Y$ de bir bağıntı olsun.

(i) Her $x \in X$ için en az bir $y \in Y$ var öyle ki $(x, y) \in f$,

(ii) $(x, y_1), (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$

şartları sağlanırsa f ye X den Y ye bir dönüşüm denir [18].

2.1.3. Tanım

$X \subset \square$, $f : X \to$ P dönüşümü verilsin. Her $x, y \in X$ ve $x \leq y$ için $f(x) \leq f(y)$ ise f ye monoton artan (veya azalmayan), $x < y$ için $f(x) < f(y)$ ise f ye kesin artan dönüşüm denir. Benzer şekilde her $x, y \in X$ ve $x < y$ için $f(x) \geq f(y)$ ise f ye monoton azalan (veya artmayan), $x < y$ için $f(x) > f(y)$ ise f ye kesin azalan dönüşüm denir [30].

2.1.4. Tanım

X boş olmayan bir küme olsun. X üzerinde aşağıdaki özelliklere sahip bir α bağıntısına kısmi sıralama bağıntısı ve (X,α) ikilisine de kısmi sıralı küme denir.

i) α yansımalıdır, yani her $x \in X$ için $x\alpha x$ dir.
ii) α ters simetriktir, yani her $x, y \in X$ için $x\alpha y$ ve $y\alpha x$ ise $x = y$ dir.
iii) α geçişlidir, yani her $x, y, z \in X$ için $x\alpha y$ ve $y\alpha z$ ise $x\alpha z$ dir [18].

Not

Kısmi sıralama bağıntısını $\preceq$ ile göstereceğiz. $x\alpha y$ yerine $x \preceq y$ yazıp "x, y den önce gelir" ya da "x küçük eşit y" olarak okuyacağız.

Örnek

P reel sayılar kümesi üzerinde bilinen $\leq$ bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

2.1.5. Tanım

$(X,\preceq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. $x, y \in X$ için $x \preceq y$ veya $y \preceq x$ ise x ve y karşılaştırılabilir elemanlardır denir [18].

2.1.6. Tanım

$(X,\preceq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. X in bütün elemanları birbirleri ile karşılaştırılabiliyorsa $\preceq$ bağıntısına bir tam sıralama bağıntısı, $(X,\preceq)$ ikilisine de tam sıralı küme denir [18].

2.1.7. Tanım

$(X,\preceq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Her $x \in X$ için $x \preceq a$ olacak biçimdeki $a \in X$ elemanına X in en büyük elemanı, her $x \in X$ için $b \preceq x$ olacak biçimdeki $b \in X$ elemanına X in en küçük elemanı denir [18].

2.1.8. Tanım

$(X,\preceq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. X in boş olmayan her alt kümesinin en küçük elemanı varsa X e iyi sıralı küme ve bağıntıya da iyi sıralama bağıntısı denir [18].

2.1.9. Tanım

X boş olmayan bir küme olsun. $d : X \times X \to [0,\infty)$ dönüşümü her $x, y, z \in X$ için

(m1) $0 \le d(x,y)$
(m2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(m3) $d(x,y) = d(y,x)$
(m4) $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$

şartlarını sağlıyorsa, d ye X üzerinde bir metrik ve (X,d) ikilisine de metrik uzay denir [30].

Örnek

$d : \mathrm{P} \times \mathrm{P} \to [0,\infty)$, her $x, y, z \in$ □ için $d(x,y) = |x-y|$ olarak tanımlanan dönüşüm P üzerinde bir metriktir. Bu metriğe □ nin alışılmış metriği veya mutlak değer metriği denir [30].

2.1.10. Tanım

(X,d) herhangi bir metrik uzay olmak üzere bir $x_0 \in X$ ve $r>0$ reel sayısı verildiğinde

$$B(x_0,r)=\{x\in X : d(x_0,x)<r\}$$

kümesine, x_0 merkezli, r yarıçaplı açık yuvar,

$$B[x_0,r]=\{x\in X : d(x_0,x)\le r\}$$

kümesine, x_0 merkezli, r yarıçaplı kapalı yuvar,

$$S[x_0,r]=\{x\in X : d(x_0,x)=r\}$$

kümesine, küre (yuvar yüzeyi) denir [30].

2.1.11. Tanım

(X,d) bir metrik uzay ve U, X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Her $x\in U$ için $B(x,r)\subset U$ olacak şekilde bir $r>0$ sayısı varsa U kümesine d -açıktır denir [30].

2.1.12. Tanım

Bir (X,d) metrik uzayında bir A alt kümesi için $A^c = X - A$ d -açık ise, A ya d -kapalı küme denir [30].

2.1.13. Tanım

(X,d) bir metrik uzay ve $A,B\subset X$, $x\in X$ olsun.

$$d(A,B)=\inf\{d(a,b) : a\in A, b\in B\}$$

sayısına A ve B kümeleri arasındaki uzaklık,

$$d(x,A)=\inf\{d(x,a):a\in A\}$$

sayısına x noktasının A kümesine olan uzaklığı,

$$d(A)=\sup\{d(a,b):a,b\in A\}$$

sayısına A kümesinin çapı denir. $d(A)<\infty$ ise A kümesine sınırlı küme, $d(A)=\infty$ ise A kümesine sınırsız küme denir [30].

2.1.14. Tanım

(X,d) bir metrik uzay olsun. Her $n\in\mathrm{N}$ için $f:\mathrm{N}\to X$, $f(n)=x_n\in X$ olarak tanımlanan dönüşüme X de bir dizi denir ve $\{x_n\}$ ile gösterilir [30].

2.1.15. Tanım

Bir (X,d) metrik uzayında $\{x_n\}$ bir dizi olsun. Her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık $n\geq n(\varepsilon)$ için $x_n\in B(x,\varepsilon)$ olacak şekilde bir $n(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsar denir. Kısaca $x_n\to x$ ile gösterilir [30].

2.1.16. Önerme

Metrik uzaylarda yakınsak bir dizinin limiti tektir [30].

2.1.17. Önerme

(X,d) metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. A nın d-kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul her $\{x_n\} \subset A$ için $x_n \to x$ olduğunda $x \in A$ olmasıdır [30].

2.1.18. Tanım

(X,d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n,m \geq n(\varepsilon)$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

Eğer (X,d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi bu uzayda bir noktaya yakınsıyor ise, (X,d) ikilisine tam metrik uzay denir [30].

2.1.19. Tanım

(X,d_1) ve (Y,d_2) metrik uzaylar, $f: X \to Y$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısı var öyle ki her $x \in X$ için $d_1(x, x_0) < \delta$ olduğunda $d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ oluyorsa, f dönüşümü x_0 noktasında süreklidir denir [30].

2.1.20. Teorem

(X,d_1) ve (Y,d_2) metrik uzaylar, $f: X \to Y$ bir dönüşüm olsun. f dönüşümünün $x_0 \in X$ noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul $n = 1,2,...$ için $x_n \in X$ ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ koşullarını sağlayan her $\{x_n\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ olmasıdır [30].

2.1.21. Tanım

(X,d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. $n_k \le n_{k+1}$ ($k \in \mathrm{N}$) olmak üzere $\{x_{n_k}\}$ dizisine $\{x_n\}$ dizisinin bir alt dizisi denir [18].

2.1.22. Önerme

(X,d) bir metrik uzay olsun. $\{x_n\}$ dizisi yakınsak ise her $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi de aynı noktaya yakınsar [30].

2.1.23. Tanım

X boş olmayan bir küme ve τ, X in kuvvet kümesi olan $P(X)$ in bir alt kümesi olsun.

i) $\varnothing, X \in \tau$

ii) τ ya ait sonlu sayıdaki elemanların arakesiti yine τ ya aittir; yani $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \tau$ için $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$,

(iii) τ ya ait keyfi sayıdaki elemanların birleşimi yine τ ya aittir; yani her $\{A_i\}_{i\in I} \subset \tau$ için $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$ dır

şartları sağlanırsa τ ailesine X üzerinde bir topoloji, (X,τ) ikilisine topolojik uzay ve τ nun elemanlarına X in açık alt kümeleri denir [18].

2.1.24. Tanım

(X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesini kapsayan bir U açık kümesinin her N üst kümesine, A kümesinin komşuluğu denir, yani,

N, $A \subset X$ kümesinin bir komşuluğu $\Leftrightarrow$ en az bir $U \subset X$ açığı var öyle ki $A \subset U \subset N$.

$A = \{x\}$ ise,

N , $x \in X$ noktasının bir komşuluğu $\Leftrightarrow$ en az bir $U \subset X$ açığı var öyle ki $x \in U \subset N$.
Herhangi bir $x \in X$ noktasının bütün komşuluklar ailesini $N(x)$ ile göstereceğiz, yani

$N(x) = \{N \in P(X) :\ N$, x in komşuluğu$\}$ [18].

2.1.25. Teorem

(X, τ) bir topolojik uzay ve $N(x)$, $x \in X$ noktasının komşuluklar ailesi olsun. Bu durumda $N(x)$ komşuluk aksiyomları denilen aşağıdaki özellikleri sağlar:

N1) her $N \in N(x)$ için $x \in N$,

N2) $N \in N(x)$ ve $N \subset M$ ise $M \in N(x)$,

N3) $N_1, N_2, ..., N_n \in N(x)$ için $\bigcap_{i=1}^{n} N_i \in N(x)$,

N4) her $N \in N(x)$ için $U \subset N$ olacak şekilde öyle bir $U \in N(x)$ vardır ki her $y \in U$ için $N \in N(y)$ dır [18].

2.1.26. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay ve $\beta \subset \tau$ olsun. τ topolojisinin her elemanı β nın elemanlarının herhangi bir birleşimi olarak yazılabiliyorsa β ya τ topolojisinin bir tabanı denir, yani

β , τ için bir taban $\Leftrightarrow$ her $A \in \tau$ için en az bir $\theta \subset \beta$ alt ailesi var öyle ki $A = \bigcup_{B \in \theta} B$ dır [18].

2.1.27. Teorem

(X,τ) bir topolojik uzay ve β, τ nun bir tabanı olsun. β ailesi aşağıdaki şartları sağlar:

i) X uzayı, β nın elemanlarının birleşimine eşittir, yani $X=\bigcup_{B\in\beta} B$,

ii) β nın herhangi iki elemanının kesişimi, β nın elemanlarının bir birleşimine eşittir, yani herhangi $B_1, B_2 \in \beta$ ve her $p \in B_1 \cap B_2$ için en az bir $B_p \in \beta$ var öyle ki $p \in B_p \subset B_1 \cap B_2$ dır. Veya $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{p\in B_1\cap B_2} B_p$, $B_p \in \beta$ dır [18].

2.1.28. Teorem

(X,d) metrik uzayının bütün açık yuvarlarının $\beta=\{B(x,r): x\in X, r>0\}$ ailesi, d metriğinin X üzerinde oluşturduğu topoloji için bir tabandır [18].

Not

Her metrik uzay tabanı açık yuvarlardan oluşan bir topolojik uzaydır. Bu tabandan üretilen topolojiye d metriğinden üretilen topoloji denir ve τ_d ile gösterilir.

2.1.29. Tanım

X bir topolojik uzay ve $f: X \to \mathrm{P}$ bir dönüşüm olsun. Her $t \in$ için, $f^{-1}(-\infty,t)$ kümesi X de açık ise, f dönüşümüne X üzerinde üstten yarı sürekli ve $f^{-1}(t,\infty)$ kümesi X de açık ise f dönüşümüne X üzerinde alttan yarı süreklidir denir [45].

2.1.30. Önerme

X bir topolojik uzay olsun. $f: X \to \mathrm{P}$ dönüşümü bir $x_0 \in X$ noktasında alttan yarı sürekli ise

$f(x_0) \le \liminf_{x\to x_0} f(x) = \sup_{V\in N(x)} \inf_{x\in V} f(x)$,

$f : X \to \mathrm{P}$ dönüşümü bir $x_0 \in X$ noktasında üstten yarı sürekli ise

$$f(x_0) \geq \limsup_{x \to x_0} f(x) = \inf_{V \in N(x)} \sup_{x \in V} f(x)$$

yazılır [18].

2.2. Düzgün Uzaylar

2.2.1. Tanım

X herhangi bir küme olmak üzere,

$$\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$$

kümesine $X \times X$ in köşegeni denir.

$A \subset X \times X$ bir alt küme olsun.

$$A^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in A\}$$

olmak üzere $A = A^{-1}$ ise A kümesine simetrik denir.

$A, B \subset X \times X$ ise

$A \circ B = \{(x, y) : (x, z) \in B, (z, y) \in A$ olacak şekilde $z \in X$ var $\}$

şeklinde tanımlanır [45].

2.2.2. Tanım

X boş olmayan bir küme ve ϑ, $X \times X$ in alt kümelerinin bir ailesi olsun. ϑ ailesi,

i) Her $V \in \vartheta$ için $\Delta \subset V$,

ii) Herhangi $V_1, V_2 \in \vartheta$ için $V_1 \cap V_2 \in \vartheta$

iii) Her $V \in \vartheta$ için $Y \circ Y \subset V$ olacak şekilde $Y \in \vartheta$ vardır,

iv) Her $V \in \vartheta$ için $V^{-1} \in \vartheta$

v) Her $V \in \vartheta$ için $V \subset Y$ ise $Y \in \vartheta$

koşullarını sağlarsa bu aileye X kümesi üzerinde bir düzgün yapı ve (X, ϑ) ikilisine düzgün uzay denir [45].

Örnek

$X = \{x, y\}$ olmak üzere $X \times X = \{(x,x),(y,y),(x,y),(y,x)\}$ olur.

1) $\vartheta = \{\Delta, \{(x,x),(x,y),(y,y)\}, \{(x,x),(y,y),(y,x)\}, X^2\}$ ailesi X kümesi üzerinde bir düzgün yapıdır.

2) $\vartheta = \{\{(x,x),(x,y),(y,y)\}, X^2\}$ alınırsa Tanım 2.2.2 (iv) sağlanmayacağından ϑ, X kümesi üzerinde bir düzgün yapı değildir.

2.2.3. Tanım

(X, ϑ) bir düzgün uzay olsun.

$$\bigcap \{ V : V \in \vartheta \} = \Delta$$

ise (X, ϑ) düzgün uzayına Hausdorff düzgün uzay denir [45].

Not

Bazı kaynaklarda, düzgün uzay tanımı, Tanım 2.2.2 ve Tanım 2.2.3 birleştirilerek verilmektedir.

Örnek

X boş olmayan bir küme ve $d: X \times X \to [0,\infty)$ metrik olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için $D_\varepsilon = \{(x,y) \in X \times X : d(x,y) < \varepsilon\}$ olsun. $\vartheta_d = \{D_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ bir düzgün yapıdır ve (X, ϑ_d) Hausdorff düzgün uzaydır. Gerçekten;

(i) $D_\varepsilon \in \vartheta_d$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için $d(x,x) = 0 < \varepsilon$ olduğundan $(x,x) \in D_\varepsilon$ olup $\Delta \subset D_\varepsilon$ elde edilir.

(ii) $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ olmak üzere $D_{\varepsilon_1}, D_{\varepsilon_2} \in \vartheta_d$ verilsin. Bu durumda $d(x,y) < \varepsilon_1$ ve $d(x,y) < \varepsilon_2$ olur. $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ alınırsa $d(x,y) < \varepsilon$ olup $D_{\varepsilon_1} \cap D_{\varepsilon_2} \in \vartheta_d$ elde edilir.

(iii) $D_\varepsilon \in \vartheta_d$ olsun. $E = D_{\frac{\varepsilon}{3}}$ alınırsa,

$E \circ E = \{(x,y) : \exists z \in X$ için $(x,z) \in E$ ve $(z,y) \in E\}$ olmak üzere $E \circ E \subset D_\varepsilon$ olduğunu gösterelim.

$$
\begin{aligned}
(x,y) E \circ E &\Rightarrow (x,z) \in E \text{ ve } (z,y) \in E \\
&\Rightarrow d(x,z) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ ve } d(z,y) < \frac{\varepsilon}{3} \\
&\Rightarrow d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) \\
&\le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3} \\
&\Rightarrow d(x,y) < \varepsilon
\end{aligned}
$$

olup $(x,y) \in E \circ E \subset D_\varepsilon$ bulunur.

(iv) Her $D_\varepsilon \in \vartheta_d$ için, $D_\varepsilon = \{(x,y): d(x,y) < \varepsilon\} = \{(y,x): d(y,x) < \varepsilon\} = D_\varepsilon^{-1}$ bulunur.

(v) $D_\varepsilon \in \vartheta_d$ ve $D_\varepsilon \subset E$ olsun. Her $(x,y) \in D_\varepsilon \subset E$ olduğundan $E \in \vartheta_d$ dir.

Şimdi (X, ϑ_d) düzgün uzayının Hausdorff olduğunu gösterelim. Düzgün uzay tanımından,

$$\Delta \subset \bigcap \{D_\varepsilon : D_\varepsilon \in \vartheta_d\} \tag{2.1}$$

sağlanır. $(x,y) \in \bigcap \{D_\varepsilon : D_\varepsilon \in \vartheta_d\}$ olsun. Bu durumda her $D_\varepsilon \in \vartheta_d$ için $(x,y) \in D_\varepsilon$ olur. Böylece her $\varepsilon > 0$ için $d(x,y) < \varepsilon$ olup bu da $x = y$ olması durumunda mümkündür. Buradan $(x,y) \in \Delta$ dır. Yani,

$$\bigcap \{D_\varepsilon : D_\varepsilon \in \vartheta_d\} \subset \Delta \tag{2.2}$$

olup Eş. 2.1 ve Eş 2.2 den $\Delta = \bigcap \{D_\varepsilon : D_\varepsilon \in \vartheta_d\}$ elde edilir [45].

2.2.4. Tanım

(X, ϑ) bir düzgün uzay ve $\beta \subset \vartheta$ olsun. Her $V \in \vartheta$ için $U \subset V$ olacak şekilde bir $U \in \beta$ varsa β alt ailesine ϑ düzgün yapısı için bir tabandır denir [45].

2.2.5. Teorem

(X, ϑ) bir düzgün uzay olsun. $\beta \subset X \times X$ ailesi

i) $U \in \beta$ ise $\Delta \subset U$,

ii) $U \in \beta$ ise en az bir $W \in \beta$ vardır öyle ki $W \subset U^{-1}$,

iii) $U \in \beta$ ise en az bir $W \in \beta$ vardır öyle ki $W \circ W \subset U$,

iv) $U, W \in \beta$ ise en az bir $Y \in \beta$ vardır öyle ki $Y \subset U \bigcap W$

şartlarını sağlarsa β ailesi $\mathcal{G}$ düzgün yapısı için bir tabandır [45].

2.2.6. Tanım

$(X,\mathcal{G})$ bir düzgün uzay ve $\theta \subset \mathcal{G}$ olsun. θ nın elemanlarının bütün sonlu arakesitlerinin ailesi $\mathcal{G}$ düzgün yapısı için bir taban oluşturuyorsa θ alt ailesine $\mathcal{G}$ düzgün yapısı için bir alt taban denir [45].

2.2.7. Tanım

$(X,\mathcal{G})$ bir düzgün uzay olsun. Bir $x \in X$ ve $V \in \mathcal{G}$ için

$$V[x] = \{y \in X : (x,y) \in V\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye x in düzgün komşuluğu denir. Bu küme, $A \subset X$ alt kümesine genişletilirse

$$V[A] = \bigcup_{x \in A} V[x] = \{y \in X : (x,y) \in V, x \in A\}$$

yazılır [45].

2.2.8. Teorem

$(X,\mathcal{G})$ bir düzgün uzay ve her $x \in X$ için

$$\mathcal{U}_x = \{V[x] : V \in \mathcal{G}\}$$

olsun. $\mathcal{U}_x$ komşuluk aksiyomlarını sağlar. Bu durumda X kümesi üzerinde öyle bir τ topolojisi vardır ki, bu topolojiye göre $x \in X$ noktasının komşuluklar ailesi $\mathcal{U}_x$ dir.

(X,ϑ) bir düzgün uzay olsun. Yukarıdaki biçimde oluşturulan τ topolojisine ϑ düzgün yapısı ile üretilen düzgün uzay topolojisi veya kısaca düzgün topoloji denir [45].

2.3. Banach Büzülme Dönüşüm Prensibi ve Sabit Nokta Kavramı

Bu bölümde metrik uzaylarda tanımlanan Banach sabit nokta teoremi ve bazı genelleştirmeleri verilecektir. Banach sabit nokta teoremi, tamlık kavramının $fx = x$ denkleminin çözümünün varlığındaki önemini gösterir. Ayrıca bu teorem çözümün varlığını garanti eden bir metot sağlar.

2.3.1. Tanım

X boş olmayan bir küme ve $f : X \to X$ bir dönüşüm olsun. $f(x) = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, x noktasına f dönüşümünün sabit noktası denir. Başka bir ifadeyle $f(x) = x$ $(x \in X)$ denkleminin çözümü f nin bir sabit noktasıdır [20].

Not

$f(x)$ ifadesi yerine daha sade olarak fx kullanılacaktır.

Örnek

$f : \Upsilon^{+} \to \mathrm{P}^{+}$, $fx = x^2$ dönüşümü için $x = 0$ ve $x = 1$ noktaları sabit noktalardır.

Örnek

$X = [0,\infty)$ ve $c > 0$ olmak üzere $f : X \to X$, $fx = x + c$ olsun. Bu durumda, bu dönüşümün hiçbir sabit noktası yoktur.

Örnek

$X=[0,\infty)$ ve $f:X\to X$, $fx=\frac{x}{4}$ olsun. Bu durumda, $x=0$ noktası bu dönüşümün tek sabit noktasıdır.

2.3.2. Tanım

(X,d) bir metrik uzay ve $f:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y\in X$ için,

$$d(fx,fy)\le kd(x,y)$$

koşulunu sağlayan bir $k\ge 0$ reel sayısı varsa, f ye Lipschitz koşulunu sağlar denir. Burada $k<1$ ise, f ye büzülme dönüşümü veya daralma dönüşümü; $k=1$ ise f ye genişlemeyen dönüşüm denir. Her $x,y\in X$ için ($x\neq y$)

$$d(fx,fy)<d(x,y)$$

ise, f ye kesin büzülebilir dönüşüm denir [20].

Not

f büzülme $\Rightarrow$ f kesin büzülme $\Rightarrow$ f genişlemeyen $\Rightarrow$ f Lipschitz.

Fakat ters gerektirmeler her zaman doğru değildir.

Örnek

$X=\mathrm{P}$, $d:X\times X\to[0,\infty)$, $d(x,y)=|x-y|$ olsun. $f:X\to X$, $f(x)=\frac{3x}{2}$ dönüşümü $k\ge\frac{3}{2}$ için Lipschitz koşulunu sağlar.

2.3.3. Teorem (Banach Sabit Nokta Teoremi)

(X,d) bir tam metrik uzay ve $f:X\to X$ bir büzülme dönüşümü ise, f nin X de bir tek sabit noktası vardır [21].

Not

Her büzülme dönüşümünün sabit noktası olması gerekmez.

Örnek

$X=(0,1]$, $d:X\times X\to[0,\infty)$, $d(x,y)=|x-y|$ ve $f:X\to X$, $f(x)=\frac{x}{2}$ dönüşümü verilsin.

$$d(fx,fy)\le kd(x,y)\quad (k\ge\frac{1}{2})$$

olduğundan f bir büzülme dönüşümüdür. Fakat hiçbir sabit noktası yoktur [21].

2.3.4. Tanım

(X,d) bir metrik uzay ve $f:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y\in X$ için

$$d(fx,fy)\le\delta d(x,y)+Ld(y,fx)$$

olacak şekilde bir $\delta\in[0,1)$ ve $L\ge 0$ sayısı varsa f ye $(\delta,L)-$zayıf büzülme (veya hemen hemen büzülme) dönüşümü denir.

d metriğinin simetri özelliğinden

$$d(fx,fy)\le\delta d(x,y)+Ld(x,fy)$$

de sağlanmalıdır [9].

2.3.5. Teorem

(X,d) bir tam metrik uzay ve $f:X\to X$ $(\delta,L)-$zayıf büzülme dönüşümü ise f dönüşümünün X de bir tek sabit noktası vardır [9].

Khan, Swaleh ve Sessa, uzaklıkları değiştiren fonksiyon yardımıyla Banach sabit nokta teoreminin bir genelleştirmesini vermişlerdir [28]. Daha sonra Rhoades, Dutta ve Choudhury gibi yazarlar da bu fonksiyonu kullanarak zayıf büzülebilir dönüşümler için sabit nokta teoremleri ispatlamıştır [19,38].

2.3.6. Tanım

$\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ dönüşümü

(i) sürekli ve azalmayan,
(ii) $\varphi(t)=0\Leftrightarrow t=0$

özelliklerini sağlarsa φ ye uzaklıkları değiştiren fonksiyon (altering distance function) denir [28].

2.3.7. Teorem

(X,d) bir tam metrik uzay, $f:X\to X$ bir dönüşüm ve φ uzaklıkları değiştiren fonksiyon olsun. Her $x,y\in X$ ve $k\in[0,1)$ için

$$\varphi(d(fx,fy))\le k\varphi(d(x,y))$$

sağlanırsa f dönüşümünün X de bir tek sabit noktası vardır [28].

2.3.8. Tanım

(X,d) bir metrik uzay, $f:X\to X$ bir dönüşüm ve φ uzaklıkları değiştiren fonksiyon olsun. Her $x,y\in X$ için

$$d(fx,fy)\le d(x,y)-\varphi(d(x,y))$$

sağlanırsa f ye zayıf büzülebilir dönüşüm denir [38].

2.3.9. Teorem

(X,d) bir tam metrik uzay, $f:X\to X$ zayıf büzülebilir dönüşüm ise f nin X de bir tek sabit noktası vardır [38].

2.3.10. Teorem

(X,d) bir tam metrik uzay, $f:X\to X$ bir dönüşüm ve ψ,φ uzaklıkları değiştiren fonksiyonlar olsun. Her $x,y\in X$ için

$$\psi(d(fx,fy))\le\psi(d(x,y))-\varphi(d(x,y))$$

sağlanırsa f nin X de bir tek sabit noktası vardır [19].

Ran ve Reurings 2004 yılında, Banach sabit nokta teoremini kısmi sıralı metrik uzaylara uygulamıştır [37]. 2005 yılında Nieto ve Rodriguez-Lopez bu teoremi genelleştirerek aşağıdaki gibi vermiştir [31].

2.3.11.Teorem

$(X,\preceq,d)$ sıralı tam metrik uzay ve $f:X\to X$ azalmayan bir dönüşüm olsun. Karşılaştırılabilir her $x,y\in X$ için

$$d(fx,fy)\le kd(x,y)$$

olacak şekilde bir $k \in [0,1)$ sayısı ve $x_0 \preceq fx_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ noktası var olsun.

(i) f sürekli, veya

(ii) $\{x_n\}$, X de azalmayan ve $x_n \to z \in X$ olacak şekilde bir dizi ve her $n \in \mathrm{N}$ için $x_n \preceq z$

ise f dönüşümünün X de bir tek sabit noktası vardır.

2.4. Dönüşüm Çiftlerinin Özellikleri

2.4.1. Tanım

(X,d) bir metrik uzay ve $f,g: X \to X$ iki dönüşüm olsun. $fx = gx = y$ olacak şekilde $x, y \in X$ noktaları varsa x noktasına f ve g dönüşümlerinin çakışma (coincidence) noktası denir [24].

2.4.2. Tanım

(X,d) bir metrik uzay ve $f,g: X \to X$ iki dönüşüm olsun. Her $x \in X$ için $d(fgx, gfx) = 0$ ise f ve g dönüşümleri değişmelidir (commuting) denir [22].

2.4.3. Tanım

(X,d) bir metrik uzay ve $f,g: X \to X$ iki dönüşüm olsun. Her $x \in X$ için $d(fgx, gfx) \le d(gx, fx)$ ise f ve g dönüşümleri zayıf değişmelidir (weakly commuting) denir [41].

2.4.4. Tanım

(X,d) bir metrik uzay, $f,g:X\to X$ iki dönüşüm ve $\{x_n\}$, X uzayında bir dizi olsun. Herhangi bir $t\in X$ noktası için $\lim_{n\to\infty} fx_n=\lim_{n\to\infty} gx_n=t$ iken $\lim_{n\to\infty} d(fgx_n,gfx_n)=0$ sağlanırsa f ve g dönüşümleri uyumlu (compatible) denir [24].

2.4.5. Tanım

(X,d) bir metrik uzay ve $f,g:X\to X$ iki dönüşüm olsun. f ve g dönüşümleri çakışık noktalarında değişmeli ise yani herhangi bir $x\in X$ için $fx=gx$ iken $fgx=gfx$ oluyorsa f ve g zayıf uyumludur (weakly compatible) denir [25].

2.4.6. Tanım

(X,d) bir metrik uzay, $f,g:X\to X$ iki dönüşüm ve $\{x_n\}$, X uzayında bir dizi olsun. Herhangi bir $t\in X$ noktası için $\lim_{n\to\infty} fx_n=\lim_{n\to\infty} gx_n=t$ iken $\lim_{n\to\infty} d(fgx_n,gfx_n)$ limiti sıfırdan farklı ya da bu limit yoksa f ve g uyumlu olmayan dönüşümlerdir (noncompatible) denir [1].

2.4.7. Tanım

(X,d) bir metrik uzay, $f,g:X\to X$ iki dönüşüm ve $\{x_n\}$, X uzayında bir dizi olsun. Herhangi bir $t\in X$ için $\lim_{n\to\infty} fx_n=\lim_{n\to\infty} gx_n=t$ ise f ve g dönüşümleri $(E.A)-$özelliğini sağlar denir [1].

Not

Değişmeli dönüşüm $\Rightarrow$ Zayıf değişmeli dönüşüm $\Rightarrow$ Uyumlu dönüşüm.

Örnek

$X=[0,1]$, $d: X\times X\to[0,\infty)$, $d(x,y)=|x-y|$ olsun. Her $x\in X$ için $f,g: X\to X$ dönüşümleri

$$fx=\frac{x}{2} \text{ ve } gx=\frac{x}{2+x}$$

olarak verilsin. Her $x\in X$ için

$$d(fgx,gfx)=\left|\frac{x}{x+4}-\frac{x}{4+2x}\right|=\frac{x^2}{(x+4)(4+2x)}\le\frac{x^2}{4+2x}=\frac{x}{2}-\frac{x}{2+x}=d(fx,gx)$$

olup f ve g dönüşümleri zayıf değişmelidir. Fakat $gfx=\frac{x}{4+x}>\frac{x}{4+2x}=fgx$ olduğundan f ve g değişmeli dönüşüm değildir [41].

Örnek

$X=[0,20]$, $d: X\times X\to[0,\infty)$, $d(x,y)=|x-y|$ olsun. Her $x\in X$ için $f,g: X\to X$ dönüşümleri

$$fx=\begin{cases}0, & x=0\\ x+16, & 0<x\le 4\\ x-4, & 4<x\le 20\end{cases},\quad gx=\begin{cases}0, & x\in\{0\}\cup(4,20]\\ 3, & 0<x\le 4\end{cases}$$

olarak verilsin. $x=0$ noktası f ve g dönüşümlerinin çakışma noktasıdır.

$$fg0=gf0=0$$

olduğundan f ve g dönüşümleri $x=0$ noktasında değişmelidir ve bu noktada zayıf uyumludur.

$x_n=4+\frac{1}{n}$ $(n\in\mathrm{N})$ dizisi için $fx_n=x_n-4\to 0$ ve $gx_n=0\to 0$ $(n\to\infty)$ olur. Fakat

$$\lim_{n\to\infty} d\left(fgx_n, gfx_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left|f(0) - g(4+\frac{1}{n}-4)\right| = \lim_{n\to\infty}|0-3| = 3$$

olup f ve g dönüşümleri uyumlu olmayan dönüşümlerdir [10].

Örnek

$X=[0,\infty)$, $d: X\times X\to[0,\infty)$, $d(x,y)=|x-y|$ olsun. Her $x\in X$ için $f,g: X\to X$ dönüşümleri

$$fx=\frac{x}{4} \text{ ve } gx=\frac{3x}{4}$$

olarak verilsin. $x_n=\frac{1}{n}$ $(n\in \mathrm{N})$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} fx_n = \lim_{n\to\infty} gx_n = 0$ olduğundan f ve g dönüşümleri (E.A)-özelliğini sağlar [1].

Örnek

$X=[2,\infty)$, $d: X\times X\to[0,\infty)$, $d(x,y)=|x-y|$ olsun. Her $x\in X$ için $f,g: X\to X$ dönüşümleri

$$fx=x+1 \text{ ve } gx=2x+1$$

olarak verilsin. f ve g dönüşümleri (E.A)-özelliğine sahip değildir. Gerçekten;

X de bir $\{x_n\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} fx_n = \lim_{n\to\infty} gx_n = t$ olacak şekilde bir $t\in X$ vardır. Böylece

$\lim_{n\to\infty} x_n = t-1$ ve $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{t-1}{2}$ olup $t=1$ bulunur. Fakat $1\notin X$ olduğundan f ve g dönüşümleri (E.A)-özelliğine sahip değildir [1].

2.4.8. Tanım

$(X,\preceq)$ kısmi sıralı bir küme ve $f,g:X\to X$ dönüşümler olsun. Her $x\in X$ için $fx\preceq gfx$ ve $gx\preceq fgx$ oluyorsa (f,g) ikilisine zayıf artan (weakly increasing) denir [5].

Örnek

$X=[0,\infty)$ ve bu küme üzerinde reel sayıların bilinen sıralaması $\leq$ verilsin. $f,g:X\to X$ dönüşümleri

$$fx=\begin{cases}x, & 0\leq x\leq 1\\ 0, & 1<x\end{cases} \text{ ve } gx=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\leq x\leq 1\\ 0, & 1<x\end{cases}$$

olsun. Bu durumda her $x\in X$ için $fx\leq gfx$ ve $gx\leq fgx$ olur ve (f,g) ikilisi zayıf artandır [5].

2.4.9. Tanım

$(X,\preceq)$ kısmi sıralı bir küme ve $f,g:X\to X$ dönüşümler olsun. Her $x\in X$ için $fx\preceq gfx$ oluyorsa (f,g) sıralı ikilisine kısmi zayıf artan (partially weakly increasing) denir [3].

Örnek

$X=[0,1]$ ve bu küme üzerinde reel sayıların bilinen sıralaması $\leq$ verilsin. $f,g:X\to X$ dönüşümleri $fx=x^2$ ve $gx=\sqrt{x}$ olsun. Bu durumda (f,g) sıralı ikilisi kısmi zayıf artandır. Fakat $x\in(0,1)$ için $gx=\sqrt{x}>x=fgx$ olduğundan (g,f) kısmi zayıf artan değildir [3].

2.4.10. Tanım

$(X,\preceq)$ bir kısmi sıralı küme ve $f,g:X\to X$ dönüşümler olsun. Her $x\in X$ için $fgx\preceq x$ oluyorsa f dönüşümüne g nin zayıf sıfırlayıcısı (weak annihilator) denir [3].

Örnek

$X=[0,1]$ ve bu küme üzerinde reel sayıların bilinen sıralaması $\leq$ verilsin. $f,g:X\to X$ dönüşümleri $fx=x^2$ ve $gx=x^3$ olsun. Her $x\in X$ için $fgx=x^6\leq x$ olduğundan f dönüşümü g nin zayıf sıfırlayıcısıdır [3].

2.4.11. Tanım

$(X,\preceq)$ kısmi sıralı küme ve $f:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x\in X$ için $x\preceq fx$ oluyorsa f dönüşümüne baskındır (dominating) denir [3].

Örnek

$X=[0,1]$ ve bu küme üzerinde reel sayıların bilinen sıralaması $\leq$ verilsin. $f:X\to X$ dönüşümü $fx=x^{\frac{1}{3}}$ olsun. Her $x\in X$ için $x\leq x^{\frac{1}{3}}=fx$ olduğundan f dönüşümü baskındır [3].

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

3.1. Kısmi Metrik Uzaylarda $(\delta, L)-$Zayıf Büzülme Dönüşümü ve Sabit Nokta Teoremleri

Bu bölümde kısmi metrik uzay tanımı, bazı özellikleri ve bu uzaylarda $(\delta, L)-$zayıf büzülme (veya hemen hemen (almost) büzülme) dönüşümünü sağlayan dönüşümler için bazı ortak sabit nokta teoremleri verilecektir. Kısmi metrik uzay kavramı 1992 yılında Matthews tarafından tanımlanmıştır [29].

3.1.1. Tanım

X boş olmayan bir küme ve $p: X \times X \to [0,\infty)$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y, z \in X$ için

(p1) $x = y \Leftrightarrow p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$,

(p2) $p(x,x) \le p(x,y)$,

(p3) $p(x,y) = p(y,x)$,

(p4) $p(x,y) \le p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)$

şartları sağlanırsa (X, p) ikilisine kısmi metrik uzay denir [29].

Örnek

$p:[0,\infty)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$, $p(x,y) = \max\{x,y\}$ olarak tanımlanan dönüşüm bir kısmi metriktir. Fakat metrik değildir. Gerçekten;

(p1) $x = y$ ise $p(x,x) = x = y = p(y,y) = p(x,y)$ dir.

$p(x,x) = p(y,y) = p(x,y)$ ise $x = y$ bulunur ve (p1) sağlanır.

(p2) $p(x,x) = x \le maks\{x,y\} = p(y,x)$ bulunur ve (p2) sağlanır.

(p3) $p(x,y)=maks\{x,y\}=maks\{y,x\}=p(y,x)$ olduğundan (p3) sağlanır.

(p4) $z<x<y$ ise $p(x,y)=y\le y+x-z=p(x,z)+p(z,y)-p(z,z)$,

$x<z<y$ ise $p(x,y)=y\le z+y-z=p(x,z)+p(z,y)-p(z,z)$,

$x<y<z$ ise $p(x,y)=y\le y+z-z=p(x,z)+p(z,y)-p(z,z)$

olur ve (p4) sağlanır. Böylece p, $X=[0,\infty)$ üzerinde kısmi metriktir.

Fakat $x=y$ iken $p(x,x)=x=0$ olmak zorunda değildir. p, $X=[0,\infty)$ üzerinde metrik değildir.

Örnek

$a,b\in \mathrm{P}$ ve $a\le b$ olmak üzere I tüm $[a,b]$ aralıklarının bir kümesi olsun. $p:I\times I\to[0,\infty)$, $p([a,b],[c,d])=maks\{b,d\}-\min\{a,c\}$ ile tanımlanan dönüşüm I üzerinde bir kısmi metriktir.

3.1.2. Tanım

(X,p) bir kısmi metrik uzay, $x\in X$ ve $\varepsilon>0$ bir reel sayı olsun. Bu durumda

$$B_p(x,\varepsilon)=\{y\in X: p(x,y)<p(x,x)+\varepsilon\}$$

kümesine x merkezli ε yarıçaplı açık yuvar,

$$\overline{B_p}(x,\varepsilon)=\{y\in X: p(x,y)\le p(x,x)+\varepsilon\}$$

kümesine de x merkezli ε yarıçaplı kapalı yuvar denir [29].

3.1.3. Önerme

(X, p) kısmi metrik uzay olsun. $p^s, p^w : X \times X \to [0, \infty)$

$$p^s(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$$
$$p^w(x,y) = p(x,y) - \min\{p(x,x), p(y,y)\}$$

olarak tanımlanan dönüşümler X üzerinde birer metriktir [29].

İspat

(m1) Her $x, y \in X$ için

$p(x,y) \geq p(x,x)$ ve $p(x,y) \geq p(y,y)$ olduğundan $p^s(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \geq 0$ elde edilir.

(m2) Her $x, y \in X$ için

$$p^s(x,y) = 0 \Rightarrow 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) = 0$$
$$\Rightarrow 2p(x,y) = p(x,x) + p(y,y)$$
$$\Rightarrow 2p(x,y) \leq p(x,y) + p(y,y) \text{ ve } 2p(x,y) \leq p(x,x) + p(x,y)$$
$$\Rightarrow p(x,y) \leq p(y,y) \leq p(x,y) \text{ ve } p(x,y) \leq p(x,x) \leq p(x,y)$$
$$\Rightarrow p(x,x) = p(y,y) = p(x,y)$$
$$\Rightarrow x = y.$$

Tersine, $x = y$ olsun.

$$p^s(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$$
$$= 2p(x,y) - p(x,y) - p(x,y)$$

$= 0$

bulunur.

(m3) $p^s(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$

$= 2p(y,x) - p(y,y) - p(x,x)$

$= p^s(y,x)$

elde edilir.

(m4) $p^s(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$

$\leq 2\left[p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)\right] - p(x,x) - p(y,y)$

$= 2p(x,z) - p(x,x) - p(z,z) + 2p(z,y) - p(z,z) - p(y,y)$

$= p^s(x,z) + p^s(z,y)$

olup p^s, X üzerinde bir metriktir.

Benzer olarak $p^w(x,y) = p(x,y) - \min\{p(x,x), p(y,y)\}$ dönüşümü de X üzerinde metriktir.

3.1.4. Önerme

p^s ile p^w metrikleri denk metriklerdir [4].

İspat

p^s metriğinin tanımından

$$p^s(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$$

$$= p(x,y) - p(x,x) + p(x,y) - p(y,y)$$

$$\leq 2p^w(x,y)$$

yazılır. p^w metriğinin tanımından

$$p^w(x,y) = p(x,y) - \min\{p(x,x), p(y,y)\}$$

$$\leq p(x,y) - \min\{p(x,x), p(y,y)\} + p(x,y) - maks\{p(x,x), p(y,y)\}$$

$$= 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$$

$$= p^s(x,y)$$

yazılır. Böylece

$$\frac{1}{2} p^s(x,y) \leq p^w(x,y) \leq p^s(x,y)$$

elde edilir.

3.1.5. Tanım

(X, p) bir kısmi metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun.

(i) $\{x_n\}$ dizisinin bir $x \in X$ noktasına yakınsaması için gerek ve yeter şart $\lim_{n\to\infty} p(x, x_n) = p(x,x)$ olmasıdır.

(ii) $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$ limiti var ve sonlu ise $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

(iii) X deki her $\{x_n\}$ Cauchy dizisi X de yakınsak ise yani $x \in X$ için $p(x,x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$ oluyorsa X tamdır denir.

(iv) Her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ var öyle ki $f\left(B(x_0, \delta)\right) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$ oluyorsa $f : X \to X$ dönüşümüne süreklidir denir [29,32].

3.1.6. Lemma

(X, p) kısmi metrik uzay olsun.

(i) (X, p) de bir $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olması için gerek yeter şart $\{x_n\}$ dizisinin (X, p^s) metrik uzayında Cauchy dizisi olmasıdır.
(ii) (X, p) kısmi metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter koşul (X, p^s) metrik uzayının tam olmasıdır.

Ayrıca, $\lim_{n\to\infty} p^s(x_n, x) = 0 \Leftrightarrow p(x, x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = \lim_{m,n\to\infty} p(x_m, x_n)$ [29].

3.1.7. Lemma

(X, p) kısmi metrik uzay olsun. $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = p(x, x) = 0$ ise her $y \in X$ için, $\lim_{n\to\infty} p(x_n, y) = p(x, y)$ dir [4].

$(\delta, L)-$zayıf büzülme dönüşümü metrik uzaylarda Berinde tarafından verilmiştir [9]. Daha sonra bazı yazarlar tarafından bu tip dönüşümlerin gerek metrik uzaylarda gerekse genelleştirilmiş metrik uzaylarda birçok genelleştirmesi yapılmıştır. Altun ve Acar Berinde tipindeki $(\delta, L)-$zayıf büzülme dönüşümünü kısmi metrik uzaylara aşağıdaki gibi taşımıştır [4]:

3.1.8. Tanım

(X, p) kısmi metrik uzay ve $f : X \to X$ dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$p(fx, fy) \le \delta p(x, y) + Lp^{w}(y, fx)$$

olacak şekilde bir $\delta \in [0,1)$ ve $L \ge 0$ sayısı varsa f dönüşümüne $(\delta, L)-$zayıf büzülme dönüşümü denir.

Ayrıca, simetri özelliğinden

$$p(fx, fy) \le \delta p(x, y) + Lp^{w}(x, fy)$$

yazılabilir.

3.1.9. Teorem

(X, p) bir tam kısmi metrik uzay, $f, g, S, T : X \to X$ dönüşümleri için $f(X) \subseteq T(X)$ ve $g(X) \subseteq S(X)$ olsun. Her $x, y \in X$ için bir $\delta \in [0,1)$ ve $L \ge 0$ sayısı var öyle ki

$$p(fx, gy) \le \delta M(x, y) + LN(x, y) \tag{3.1}$$

sağlansın. $\{f, S\}$ ve $\{g, T\}$ zayıf uyumlu ve $f(X)$, $g(X)$, $S(X)$ veya $T(X)$ tam ise f, g, S ve T dönüşümlerinin tek bir ortak sabit noktası vardır. Burada,

$$M(x, y) = \max\left\{ p(Sx, Ty), p(fx, Sx), p(gy, Ty), \frac{p(Sx, gy) + p(fx, Ty)}{2} \right\},$$

$$N(x, y) = \min\left\{ p^{w}(fx, Sx), p^{w}(gy, Ty), p^{w}(Sx, gy), p^{w}(fx, Ty) \right\}$$ [43].

İspat

$x_0 \in X$ olsun. $f(X) \subseteq T(X)$ olduğundan $fx_0 = Tx_1$ olacak şekilde bir $x_1 \in X$ vardır. Benzer olarak, $gx_1 \in S(X)$ için $gx_1 = Sx_2$ olacak şekilde bir $x_2 \in X$ vardır. İterasyona devam ederek, her $n \geq 0$ için $\{y_n\}$ dizisini $y_{2n} = fx_{2n} = Tx_{2n+1}$ ve $y_{2n+1} = gx_{2n+1} = Sx_{2n+2}$ olarak oluşturalım.

İlk olarak, her $m \geq 0$ için $y_{2m} = y_{2m+1}$ olsun. Bu durumda, g ve T dönüşümlerinin çakışma noktası vardır. Eş. 3.1 den

$$p(y_{2m+2}, y_{2m+1}) = p(fx_{2m+2}, gx_{2m+1}) \leq \delta M(x_{2m+2}, x_{2m+1}) + LN(x_{2m+2}, x_{2m+1})$$

olup burada

$$\begin{aligned} N(x_{2m+2}, x_{2m+1}) &= \min \begin{Bmatrix} p^w(fx_{2m+2}, Sx_{2m+2}), p^w(gx_{2m+1}, Tx_{2m+1}), \\ p^w(Sx_{2m+2}, gx_{2m+1}), p^w(fx_{2m+2}, Tx_{2m+1}) \end{Bmatrix} \\ &= \min \begin{Bmatrix} p^w(y_{2m+2}, y_{2m+1}), p^w(y_{2m+1}, y_{2m}), \\ p^w(y_{2m+1}, y_{2m+1}), p^w(y_{2m+2}, y_{2m}) \end{Bmatrix} \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(x_{2m+2}, x_{2m+1}) &= \max \begin{Bmatrix} p(Sx_{2m+2}, Tx_{2m+1}), p(fx_{2m+2}, Sx_{2m+2}), \\ p(gx_{2m+1}, Tx_{2m+1}), \dfrac{p(Sx_{2m+2}, gx_{2m+1}) + p(fx_{2m+2}, Tx_{2m+1})}{2} \end{Bmatrix} \\ &= \max \begin{Bmatrix} p(y_{2m+1}, y_{2m}), p(y_{2m+2}, y_{2m+1}), \\ p(y_{2m+1}, y_{2m}), \dfrac{p(y_{2m+1}, y_{2m+1}) + p(y_{2m+2}, y_{2m})}{2} \end{Bmatrix} \\ &= p(y_{2m+2}, y_{2m+1}). \end{aligned}$$

Böylece,

$$p(y_{2m+2}, y_{2m+1}) \leq \delta p(y_{2m+2}, y_{2m+1})$$

olur ve $\delta \in [0,1)$ olduğundan $p(y_{2m+2}, y_{2m+1}) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $y_{2m+2} = y_{2m+1}$ olur. Sonuç olarak f ve S dönüşümlerinin çakışma noktası vardır.

Şimdi, her $n \geq 0$ için $y_n \neq y_{n+1}$ alalım. Eş. 3.1 den

$$p(y_{2n}, y_{2n+1}) = p(fx_{2n}, gx_{2n+1}) \leq \delta M(x_{2n}, x_{2n+1}) + LN(x_{2n}, x_{2n+1}) \tag{3.2}$$

yazılır ve burada

$$\begin{aligned} N(x_{2n}, x_{2n+1}) &= \min \begin{Bmatrix} p^w(fx_{2n}, Sx_{2n}), p^w(gx_{2n+1}, Tx_{2n+1}), \\ p^w(Sx_{2n}, gx_{2n+1}), p^w(fx_{2n}, Tx_{2n+1}) \end{Bmatrix} \\ &= \min \begin{Bmatrix} p^w(y_{2n}, y_{2n-1}), p^w(y_{2n+1}, y_{2n}), \\ p^w(y_{2n-1}, y_{2n+1}), p^w(y_{2n}, y_{2n}) \end{Bmatrix} \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(x_{2n}, x_{2n+1}) &= \max \begin{Bmatrix} p(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}), p(fx_{2n}, Sx_{2n}), \\ p(gx_{2n+1}, Tx_{2n+1}), \dfrac{p(Sx_{2n}, gx_{2n+1}) + p(fx_{2n}, Tx_{2n+1})}{2} \end{Bmatrix} \\ &= \max \begin{Bmatrix} p(y_{2n-1}, y_{2n}), p(y_{2n}, y_{2n-1}), \\ p(y_{2n+1}, y_{2n}), \dfrac{p(y_{2n-1}, y_{2n+1}) + p(y_{2n}, y_{2n})}{2} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

olup Eş. 3.2 den

$$p(y_{2n}, y_{2n+1}) \leq \delta M(y_{2n}, y_{2n+1}) \tag{3.3}$$

elde edilir. (p4) kullanılarak,

$$p(y_{2n-1}, y_{2n+1}) \leq p(y_{2n-1}, y_{2n}) + p(y_{2n}, y_{2n+1}) - p(y_{2n}, y_{2n})$$

ve

$$p(y_{2n-1}, y_{2n+1}) + p(y_{2n}, y_{2n}) \le p(y_{2n-1}, y_{2n}) + p(y_{2n}, y_{2n+1})$$

yazılır ve $M(x_{2n}, x_{2n+1}) = \max\{p(y_{2n}, y_{2n-1}), p(y_{2n+1}, y_{2n})\}$ bulunur.

Eğer $M(x_{2n}, x_{2n+1}) = p(y_{2n+1}, y_{2n})$ ise Eş. 3.3 den $p(y_{2n+1}, y_{2n}) \le \delta p(y_{2n+1}, y_{2n})$ olup $\delta \in [0,1)$ olduğundan $y_{2n} = y_{2n+1}$ elde edilir. Bu ise her $n \ge 0$ için $y_n \ne y_{n+1}$ kabul edilmesiyle çelişir. Böylece $M(x_{2n}, x_{2n+1}) = p(y_{2n}, y_{2n-1})$ dir. Bu durumda, Eş. 3.3 den $p(y_{2n+1}, y_{2n}) \le \delta p(y_{2n}, y_{2n-1})$ dir. İterasyona devam ederek, her $n \ge 0$ için

$$p(y_{n+1}, y_n) \le \delta^n p(y_0, y_1) \tag{3.4}$$

yazılır.

$$\begin{aligned} p^s(y_{n+2}, y_{n+1}) &= 2p(y_{n+2}, y_{n+1}) - p(y_{n+2}, y_{n+2}) - p(y_{n+1}, y_{n+1}) \\ &\le 2p(y_{n+2}, y_{n+1}) \\ &\le \delta^{n+1} p(y_0, y_1) \end{aligned}$$

ve $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} p^s(y_{n+2}, y_{n+1}) = 0 \tag{3.5}$$

olup, üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} p^s(y_{n+k}, y_{n+1}) &\le p^s(y_{n+k}, y_{n+k-1}) + \cdots + p^s(y_{n+2}, y_{n+1}) \\ &\le 2\delta^{n+k-1} p(y_0, y_1) + \cdots + 2\delta^{n+1} p(y_0, y_1) \end{aligned}$$

yazılır. Eş. 3.5 gözönüne alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} p^s(y_{n+k}, y_{n+1}) = 0$$

olur ve $\{y_n\}$, (X, p^s) uzayında Cauchy dizisidir. (X, p) tam olduğundan (X, p^s) tamdır ve $\{y_n\}$ dizisi (X, p^s) uzayında bir $z \in X$ noktasına yakınsaktır. Böylece

$$p(z,z) = \lim_{n\to\infty} p(y_n, z) = \lim_{m,n\to\infty} p(y_m, y_n)$$

yazılır.

Şimdi $\lim_{n,m\to\infty} p(y_n, y_m) = 0$ olduğunu gösterelim. $n > m$ olmak üzere

$$\begin{aligned} p(y_{n+2}, y_n) &\le p(y_{n+2}, y_{n+1}) + p(y_{n+1}, y_n) - p(y_{n+1}, y_{n+1}) \\ &\le p(y_{n+2}, y_{n+1}) + p(y_{n+1}, y_n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(y_{n+3}, y_n) &\le p(y_{n+3}, y_{n+2}) + p(y_{n+2}, y_n) - p(y_{n+2}, y_{n+2}) \\ &\le p(y_{n+3}, y_{n+2}) + p(y_{n+2}, y_n). \end{aligned}$$

olup

$$p(y_{n+3}, y_n) \le p(y_{n+3}, y_{n+2}) + p(y_{n+2}, y_{n+1}) + p(y_{n+1}, y_n)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} p(y_m, y_n) &\le p(y_m, y_{m+1}) + \cdots + p(y_{n-2}, y_{n-1}) + p(y_{n-1}, y_n) \\ &\le \delta^m p(y_0, y_1) + \cdots + \delta^{n-2} p(y_0, y_1) + \delta^{n-1} p(y_0, y_1) \\ &\le \delta^m \left(1 + \delta + \cdots \delta^{n-m-1}\right) p(y_0, y_1) \end{aligned}$$

elde edilir. $\delta \in [0,1)$ olduğundan

$$\lim_{n,m\to\infty} p(y_n, y_m) = 0$$

bulunur. $y_n \to z$ olduğundan $fx_{2n}, Tx_{2n+1}, gx_{2n+1}, Sx_{2n+2} \to z$ elde edilir.

Şimdi, z noktasının g ve T dönüşümlerinin sabit noktası olduğunu gösterelim. $T(X)$ tam olsun. $z = Tu$ olacak şekilde bir $u \in X$ vardır. $gu = z$ olduğunu gösterelim. Aksini kabul edelim. $gu \neq z$ olsun. Eş. 3.1 den

$$p(fx_{2n}, gu) \leq \delta M(x_{2n}, u) + LN(x_{2n}, u).$$

Burada

$$\begin{aligned} N(x_{2n}, u) &= \min\left\{ p^w(fx_{2n}, Sx_{2n}), p^w(gu, Tu), p^w(Sx_{2n}, gu), p^w(fx_{2n}, Tu) \right\} \\ &= \min\left\{ p^w(fx_{2n}, Sx_{2n}), p^w(gu, z), p^w(Sx_{2n}, gu), p^w(fx_{2n}, z) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(x_{2n}, u) &= \max\left\{ \begin{array}{l} p(Sx_{2n}, Tu), p(fx_{2n}, Sx_{2n}), \\ p(gu, Tu), \dfrac{p(Sx_{2n}, gu) + p(fx_{2n}, Tu)}{2} \end{array} \right\} \\ &= \max\left\{ p(Sx_{2n}, z), p(fx_{2n}, Sx_{2n}), p(gu, z), \frac{p(Sx_{2n}, gu) + p(fx_{2n}, z)}{2} \right\} \end{aligned}$$

olduğundan $\lim_{n\to\infty} M(x_{2n}, u) = p(gu, z)$ ve $\lim_{n\to\infty} N(x_{2n}, u) = 0$ bulunur. Sonuç olarak,

$$p(z, gu) \leq \delta p(gu, z)$$

ve $\delta \in [0,1)$ için $p(z, gu) = 0$ dir. Böylece $gu = Tu = z$ elde edilir. g ve T zayıf uyumlu olduğundan $gz = gTu = Tgu = Tz$ dir.

Şimdi, $gz = z$ olduğunu gösterelim. Eş. 3.1 den

$$p(fx_{2n}, gz) \leq \delta M(x_{2n}, z) + LN(x_{2n}, z)$$

ve burada

$$N(x_{2n},z)=\min\left\{p^w(fx_{2n},Sx_{2n}),p^w(gz,Tz),p^w(Sx_{2n},gz),p^w(fx_{2n},Tz)\right\},$$

$$M(x_{2n},z)=\max\left\{p(Sx_{2n},Tz),p(fx_{2n},Sx_{2n}),p(gz,Tz),\frac{p(Sx_{2n},gz)+p(fx_{2n},Tz)}{2}\right\}$$

$$=\max\left\{p(Sx_{2n},gz),p(fx_{2n},Sx_{2n}),p(gz,gz),\frac{p(Sx_{2n},gz)+p(fx_{2n},Tz)}{2}\right\}$$

olup $\lim_{n\to\infty}M(x_{2n},u)=p(z,gz)$ ve $\lim_{n\to\infty}N(x_{2n},u)=0$ bulunur. Sonuç olarak,

$$p(z,gz)=\lim_{n\to\infty}p(fx_{2n},gz)\le\delta p(z,gz)$$

ve $gz=z$ elde edilir.

Benzer olarak z noktası f ve S dönüşümlerinin de sabit noktasıdır.

$S(X)$, $f(X)$ veya $g(X)$ tam olduğunda da ispat benzer olarak yapılır.

Son olarak, z noktasının tek sabit nokta olduğunu gösterelim. Aksini kabul ederek, f,g,S ve T dönüşümlerinin z noktasından farklı bir sabit noktası t olsun. Bu durumda Eş. 3.1 den

$$p(z,t)=p(fz,gt)\le\delta M(z,t)+LN(z,t)$$

yazılır ve burada

$$N(z,t)=\min\left\{p^w(fz,Sz),p^w(gt,Tt),p^w(Sz,gt),p^w(fz,Tt)\right\}$$
$$=0,$$

$$M(z,t)=\max\left\{p(Sz,Tt),p(fz,Sz),p(gt,Tt),\frac{p(Sz,gt),p(fz,Tt)}{2}\right\}$$

$$=p(Sz,Tt)$$

$$=p(z,t).$$

Sonuç olarak,

$$p(z,t)\le\delta p(z,t)$$

ve $p(z,t)=0$ olup $z=t$ bulunur. z noktası f,g,S ve T dönüşümlerinin tek ortak sabit noktasıdır.

Örnek

$X=\{0,1,2\}$ olmak üzere $p:X\times X\to \mathrm{P}^{+}$ $p(x,y)=\max\{x,y\}$ ve $f,g,S,T:X\to X$ $f=g$, $S=T$, $f0=f2=0$, $f1=1$, $T0=0$, $T1=2$, $T2=1$ olarak tanımlansın. Bu durumda (X,p) tam kısmi metrik uzay ve $f(X)\subseteq T(X)=X$ dir.

$\delta=\frac{1}{2}$, $L=1$ seçilirse,

$$p(f0,f1)=1\le\delta.2+L.1,$$
$$p(f2,f1)=1\le\delta.2+L.0,$$
$$p(f2,f2)=p(f0,f0)=0\le\delta.0+L.1,$$
$$p(f1,f1)=1\le\delta.2+L.0$$

olur. Her $x,y\in X$ için, Eş. 3.1 büzülme şartı sağlanır. $\{f,T\}$ zayıf uyumludur. $0\in X$ noktası f ve T dönüşümlerinin tek ortak sabit noktasıdır [43].

3.1.10. Sonuç

(X, p) bir tam kısmi metrik uzay, $f, T : X \to X$ dönüşümleri için $f(X) \subseteq T(X)$ olsun. Her $x, y \in X$ için bir $\delta \in [0,1)$ ve $L \geq 0$ sayısı var öyle ki

$$p(fx, fy) \leq \delta M(x, y) + LN(x, y)$$

sağlansın. $\{f, T\}$ zayıf uyumlu ve $f(X)$ veya $T(X)$ tam ise f ve T dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktası vardır. Burada

$$M(x, y) = \max\left\{ p(Tx, Ty), p(fx, Tx), p(fy, Ty), \frac{p(Tx, fy) + p(fx, Ty)}{2} \right\},$$

$$N(x, y) = \min\left\{ p^w(fx, Tx), p^w(fy, Ty), p^w(Tx, fy), p^w(fx, Ty) \right\}$$ [43].

3.1.11. Sonuç

(X, p) bir tam kısmi metrik uzay ve $S, T : X \to X$ dönüşümler olsun. Her $x, y \in X$ için bir $\delta \in [0,1)$ ve $L \geq 0$ sayısı var öyle ki

$$p(x, y) \leq \delta M(x, y) + LN(x, y)$$

sağlansın. Bu durumda S ve T dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktası vardır. Burada

$$M(x, y) = \max\left\{ p(Sx, Ty), p(x, Sx), p(y, Ty), \frac{p(Sx, y) + p(x, Ty)}{2} \right\},$$

$$N(x, y) = \min\left\{ p^w(x, Sx), p^w(y, Ty), p^w(Sx, y), p^w(x, Ty) \right\}$$ [43].

3.2. b-metrik Uzaylarda $(E.A)-$Özelliğini Sağlayan Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremleri

$b-$metrik uzay tanımı 1989 yılında Bakhtin tarafından yapılmıştır [7]. Bu bölümde, 2002 yılında Aamri ve El-Moutawakil [1] tarafından metrik uzaylarda tanımlanan (E.A)-özelliği $b-$metrik uzaylara aktarılacak ve bu özelliği sağlayan dönüşümler için sabit nokta teoremleri ispatlanacaktır.

3.2.1. Tanım

X boş olmayan bir küme, $s \geq 1$ bir reel sayı ve $\sigma : X \times X \to [0,\infty)$ bir dönüşüm olsun.

Her $x, y, z \in X$ için,

(b1) $\sigma(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(b2) $\sigma(x,y) = \sigma(y,x)$,

(b3) $\sigma(x,y) \leq s\left[\sigma(x,z) + \sigma(z,y)\right]$.

şartları sağlanırsa (X,σ) ikilisine b-metrik uzay denir [7].

$s = 1$ olması durumunda (X,σ) metrik uzaydır.

Örnek

$X = [0,\infty)$ ve $p > 1$ bir reel sayı olmak üzere $\sigma : X \times X \to [0,\infty)$ dönüşümü $\sigma(x,y) = |x-y|^p$ olarak verilsin. σ, $s = 2^p$ sabiti ile bir $b-$ metriktir. Gerçekten;

(b1) $\sigma(x,y) = 0 \Rightarrow |x-y|^p = 0$

$\Rightarrow |x-y| = 0$

$\Rightarrow x = y$.

Tersine,

$$x = y \Rightarrow |x-y| = 0$$

$$\Rightarrow |x-y|^p = \sigma(x,y) = 0 .$$

(b2) $\sigma(x,y) = |x-y|^p = |y-x|^p = \sigma(y,x)$.

(b3) $\sigma(x,y) = |x-y|^p = |x-z+z-y|^p \le \left(|x-z|+|z-y|\right)^p$

$$\le \left(2\max\left\{|x-z|,|z-y|\right\}\right)^p$$

$$\le 2^p \left(|x-z|^p + |z-y|^p\right)$$

$$\le 2^p \left(\sigma(x,z)+\sigma(z,y)\right).$$

Sonuç olarak σ, X üzerinde $b-$ metriktir. Fakat metrik değildir;

$x > z > y$ için,

$$\sigma(x,y) = |x-y|^p = |x-z+z-y|^p = (x-z+z-y)^p > (x-z)^p + (z-y)^p = |x-z|^p + |z-y|^p$$

olup (m4) şartı sağlanmaz.

3.2.2. Tanım

(X,σ) bir $b-$ metrik uzay, $\{x_n\}$ X de bir dizi olsun.

(i) $\{x_n\}$ dizisinin bir $x \in X$ noktasına $b-$yakınsaması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(x_n, x) = 0$$

olmasıdır.

(ii) $\{x_n\}$ dizisinin bir $b-$ Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n,m\to\infty} \sigma(x_m, x_n) = 0$$

olmasıdır.

(iii) (X,σ) $b-$metrik uzayındaki her $b-$Cauchy dizisi $b-$yakınsak ise (X,σ) tamdır denir [7].

3.2.3. Lemma

(X,σ) $b-$metrik uzay olsun.

(i) $b-$yakınsak bir dizinin limiti tektir.
(ii) $b-$yakınsak her dizi $b-$Cauchy dizisidir [7].

3.2.4. Tanım

(X,σ) $b-$metrik uzay ve $f,g: X \to X$ dönüşümler olsun. X de bir $\{x_n\}$ dizisi ve herhangi bir $t \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} fx_n = \lim_{n\to\infty} gx_n = t$$

ise f ve g dönüşümleri $b-(E.A)$ özelliğini sağlar denir [35].

Bu bölümde uzaklığı değiştiren fonksiyonlar aşağıdaki gibi kabul edilecektir:

(i) $\varphi, \psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ sürekli, azalmayan
(ii) $\varphi(t) = \psi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

3.2.5. Teorem

(X,σ) bir $b-$metrik uzay, $f,g,S,T:X\to X$ dönüşümleri için $f(X)\subseteq T(X)$ ve $g(X)\subseteq S(X)$ olsun. Her $x,y\in X$ için,

$$\psi\left(s^2\sigma(fx,gy)\right)\le\psi\left(M(x,y)\right)-\varphi\left(M(x,y)\right) \tag{3.6}$$

sağlansın.

(i) $\{f,S\}$ veya $\{g,T\}$ ikilisi $b-(E.A)-$özelliğini sağlar

(ii) $f(X), g(X), S(X)$ ve $T(X)$ kümelerinden biri kapalı

ise $\{f,S\}$ veya $\{g,T\}$ ikililerinin çakışma noktası vardır. Ayrıca, $\{f,S\}$ ve $\{g,T\}$ zayıf uyumlu ise f, g, S ve T dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktası vardır. Burada

$$M(x,y)=\max\left\{\sigma(Sx,Ty),\sigma(fx,Sx),\sigma(gy,Ty),\frac{\sigma(Sx,gy)+\sigma(fx,Ty)}{2s}\right\}$$ [35].

İspat

$\{f,S\}$ $b-(E.A)-$özelliğini sağlasın. Bu durumda X de bir $\{x_n\}$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} fx_n=\lim_{n\to\infty} Sx_n=q$$

olacak şekilde $q\in X$ vardır. $f(X)\subseteq T(X)$ olduğundan $fx_n=Ty_n$ olacak şekilde X de bir $\{y_n\}$ dizisi vardır. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} Ty_n=q$$

elde edilir.

Şimdi $\lim_{n\to\infty} gy_n = q$ olduğunu gösterelim. Eş. 3.6 kullanılarak

$$\psi\left(\sigma\left(fx_n, gy_n\right)\right) \le \psi\left(s^2\sigma\left(fx_n, gy_n\right)\right) \le \psi\left(M\left(x_n, y_n\right)\right) - \varphi\left(M\left(x_n, y_n\right)\right) \qquad (3.7)$$
$$\le \psi\left(M\left(x_n, y_n\right)\right)$$

olup burada,

$$M\left(x_n, y_n\right) = \max\left\{\begin{matrix}\sigma\left(Sx_n, Ty_n\right), \sigma\left(fx_n, Sx_n\right), \\ \sigma\left(Ty_n, gy_n\right), \dfrac{\sigma\left(Sx_n, gy_n\right) + \sigma\left(fx_n, Ty_n\right)}{2s}\end{matrix}\right\}$$

$$= \max\left\{\begin{matrix}\sigma\left(Sx_n, fx_n\right), \sigma\left(fx_n, Sx_n\right), \\ \sigma\left(fx_n, gy_n\right), \dfrac{\sigma\left(Sx_n, gy_n\right) + \sigma\left(fx_n, fx_n\right)}{2s}\end{matrix}\right\}$$

$$= \max\left\{\sigma\left(Sx_n, fx_n\right), \sigma\left(fx_n, gy_n\right), \frac{s\left[\sigma\left(Sx_n, fx_n\right) + \sigma\left(fx_n, gy_n\right)\right]}{2s}\right\}.$$

Eş. 3.7 den

$$\psi\left(\lim_{n\to\infty}\sigma\left(q, gy_n\right)\right) \le \frac{1}{s^2}\psi\left(\lim_{n\to\infty}\sigma\left(q, gy_n\right)\right)$$

elde dilir. Sonuç olarak $\sigma\left(q, gy_n\right) = 0$ olup $\lim_{n\to\infty} gy_n = q$ bulunur.

$T\left(X\right) \subseteq X$ kapalı olsun. Bu durumda $Tr = q$ olacak şekilde bir $r \in X$ vardır. Eş.3.6 kullanılarak

$$\psi\left(s^2\sigma\left(fx_n, gr\right)\right) \le \psi\left(M\left(x_n, r\right)\right) - \varphi\left(M\left(x_n, r\right)\right) \qquad (3.8)$$

burada

$$M(x_n, r) = \max\left\{\sigma(Sx_n, Tr), \sigma(fx_n, Sx_n), \sigma(Tr, gr), \frac{\sigma(Sx_n, gr) + \sigma(fx_n, Tr)}{2s}\right\}$$

$$= \max\left\{\sigma(Sx_n, q), \sigma(fx_n, Sx_n), \sigma(q, gr), \frac{\sigma(Sx_n, gr) + \sigma(fx_n, q)}{2s}\right\}$$

olup

$$\lim_{n\to\infty} M(x_n, r) = \max\left\{\sigma(q,q), \sigma(q,q), \sigma(q, gr), \frac{\sigma(q,q) + \sigma(q, gr)}{2s}\right\}$$

$$= \sigma(q, gr) \text{ dir.}$$

Eş. 3.8 de $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\psi(\sigma(q, gr)) \le \psi(s^2\sigma(q, gr)) \le \psi(\sigma(q, gr)) - \varphi(\sigma(q, gr))$$

ve $\varphi(\sigma(q, gr)) \le 0$ elde edilir. φ fonksiyonunun tanımından $\sigma(q, gr) = 0$ ve $gr = q$ bulunur. Böylece r noktası g ve T dönüşümlerinin çakışma noktasıdır.

Şimdi f ve S dönüşümlerinin çakışma noktası olduğunu gösterelim. $g(X) \subseteq S(X)$ olduğundan $q = Sz$ olacak şekilde bir $z \in X$ noktası vardır. Eş. 3.6 kullanılarak

$$\psi(s^2\sigma(fz, gr)) \le \psi(M(z, r)) - \varphi(M(z, r))$$

yazılır ve burada

$$M(z, r) = \max\left\{\sigma(Sz, Tr), \sigma(fz, Sz), \sigma(Tr, gr), \frac{\sigma(Sz, gr) + \sigma(fz, Tr)}{2s}\right\}$$

$$= \max\left\{\sigma(q,q), \sigma(fz, q), \sigma(q,q), \frac{\sigma(fz, q) + \sigma(q,q)}{2s}\right\}$$

$$\le \max\left\{\sigma(fz, q), \frac{\sigma(fz, q)}{2s}\right\}$$

$$= \sigma(\, fz, q)$$

olur. Sonuç olarak,

$$\psi\left(s^2\sigma(\, fz, gr)\right) = \psi\left(s^2\sigma(\, fz, q)\right) \le \psi\left(\sigma(\, fz, q)\right) - \varphi\left(\sigma(\, fz, q)\right)$$

elde edilir. Böylece $\varphi\left(\sigma(\, fz, q)\right) \le 0$ olup φ fonksiyonunun tanımından $\sigma(q, gr) = 0$ ve $Sz = fz = q$ bulunur. z noktası f ve S dönüşümlerinin çakışma noktasıdır. $fz = Sz = gr = Tr = q$ dir. $\{f, S\}$ ve $\{g, T\}$ zayıf uyumlu olduğundan $fq = Sq$ ve $gq = Tq$ dir. Şimdi q noktasının f, g, S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktası olduğunu gösterelim. Eş.3.6 kullanılarak

$$\psi\left(\sigma(\, fq, q)\right) \le \psi\left(s^2\sigma(\, fq, q)\right) = \psi\left(\sigma(\, fq, gr)\right) \le \psi\left(M(q, r)\right) - \varphi\left(M(q, r)\right)$$

olup

$$M(q, r) = \max\left\{\sigma(Sq, Tr), \sigma(\, fq, Sq), \sigma(Tr, gr), \frac{\sigma(Sq, gr) + \sigma(\, fq, Tr)}{2s}\right\}$$

$$= \max\left\{\sigma(\, fq, q), \sigma(\, fq, \, fq), \sigma(q, q), \frac{\sigma(\, fq, q) + \sigma(\, fq, q)}{2s}\right\}$$

$$= \sigma(\, fq, q)$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\psi\left(\sigma(\, fq, q)\right) \le \psi\left(\sigma(\, fq, q)\right) - \varphi\left(\sigma(\, fq, q)\right)$$

olur. Böylece $fq = Sq = q$ ve benzer olarak $gq = Tq = q$ elde edilir.

Şimdi q noktasının tek sabit nokta olduğunu gösterelim. p noktası f, g, S ve T dönüşümlerinin başka bir sabit noktası olsun. Eş. 3.6 kullanılarak

$$\psi\left(\sigma(q,p)\right)=\psi\left(\sigma(\,fq,gp)\right)\le\psi\left(s^2\sigma(\,fq,gp)\right)\le\psi\left(M(q,p)\right)-\varphi\left(M(q,p)\right)$$
$$=\psi\left(\sigma(q,p)\right)-\varphi\left(\sigma(q,p)\right)$$

ve burada

$$M(q,p)=\max\left\{\sigma(Sq,Tp),\sigma(\,fq,Sq),\sigma(gp,Tp),\frac{\sigma(Sq,gp)+\sigma(\,fq,Tp)}{2s}\right\}$$
$$=\max\left\{\sigma(q,p),\sigma(q,q),\sigma(p,p),\frac{\sigma(q,p)+\sigma(q,p)}{2s}\right\}$$
$$=\sigma(q,p)$$

dir. φ fonksiyonunun tanımından $\sigma(q,p)=0$ ve $q=p$ elde edilir. f , g , S ve T dönüşümlerinin tek ortak sabit noktası vardır.

3.2.6. Sonuç

(X,σ) bir $b-$metrik uzay ve $f,T:X\to X$ dönüşümleri için $f(X)\subseteq T(X)$ olsun. Her $x,y\in X$ için,

$$\psi\left(s^2\sigma(\,fx,\,fy)\right)\le\psi\left(M(x,y)\right)-\varphi\left(M(x,y)\right)$$

sağlansın. $\{f,T\}$ $b-(E.A)-$özelliğini sağlasın ve $T(X)$ kapalı olsun. Bu durumda $\{f,T\}$ ikilisinin bir çakışma noktası vardır. Ayrıca, $\{f,T\}$ zayıf uyumlu ise f ve T dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktası vardır. Burada

$$M(x,y)=\max\left\{\sigma(Tx,Ty),\sigma(\,fx,Tx),\sigma(\,fy,Ty),\frac{\sigma(\,fx,Ty)+\sigma(Tx,\,fy)}{2s}\right\}$$ [35].

3.2.7. Sonuç

(X,σ) $b-$metrik uzay, $f,g,S,T:X\to X$ dönüşümleri için $f(X)\subseteq T(X)$ ve $g(X)\subseteq S(X)$ olsun. Her $x,y\in X$ için,

$$\sigma(fx,gy)\le M(x,y)-\varphi(M(x,y))$$

sağlansın.

(i) $\{f,S\}$ veya $\{g,T\}$ ikilisi $b-(E.A)-$özelliğini sağlar,

(ii) $f(X), g(X), S(X)$ ve $T(X)$ kümesinden biri kapalı

ise $\{f,S\}$ veya $\{g,T\}$ ikililerinin çakışık noktası vardır. Ayrıca, $\{f,S\}$ ve $\{g,T\}$ zayıf uyumlu ise f, g, S ve T dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktası vardır. Burada

$$M(x,y)=\max\left\{\sigma(Sx,Ty),\sigma(fx,Sx),\sigma(gy,Ty),\frac{\sigma(Sx,gy)+\sigma(fx,Ty)}{2s}\right\}$$ [35].

Örnek

$X=\{0,1,2\}$ olmak üzere $\sigma:X\times X\to[0,\infty)$, $\sigma(x,y)=\begin{cases}0, & x=y\\ (x+y)^2, & x\neq y\end{cases}$

ve $f,g,S,T:X\to X$

$$f(x)=0,\quad g(x)=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix},\quad S(x)=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}\text{ ve }T(x)=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&2&2\end{pmatrix}$$

olarak verilsin. Bu durumda (X,σ), $s=\frac{9}{5}$ sabiti ile $b-$metrik uzaydır. $f(X)\subseteq T(X)$, $g(X)\subseteq S(X)$ dir. $x_n=0$ dizisi için $\{f,S\}$ çifti $b-(E.A)-$özelliğini sağlar.

$\psi, \varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\psi(t) = \sqrt{t}$ ve $\varphi(t) = \frac{t}{10^3}$ olarak tanımlansın.

Her $x, y \in X$ için,

$y = 0$ ve $y = 1$ ise

$$\psi\left(s^2\sigma(fx, gy)\right) = 0 \le \psi\left(M(x,y)\right) - \varphi\left(M(x,y)\right)$$

ve $y = 2$ ise,

$$\psi\left(s^2\sigma(fx, gy)\right) = \frac{9}{5} \le \frac{2991}{10^3} = \psi\left(\sigma(gy, Ty)\right) - \varphi\left(\sigma(gy, Ty)\right)$$
$$\le \psi\left(M(x,y)\right) - \varphi\left(M(x,y)\right).$$

Böylece her $x, y \in X$ için Eş. 3.6 sağlanır. Ayrıca, $\{f, S\}$ ve $\{g, T\}$ zayıf uyumludur ve $0 \in X$ noktası f, g, S ve T dönüşümlerinin tek ortak sabit noktasıdır [35].

3.3. Düzgün Uzaylarda $(\psi - \varphi)$-Zayıf Büzülme Dönüşümü ve Sabit Nokta Teoremleri

Bu bölümde düzgün uzaylar üzerinde, E-uzaklık dönüşümü tanımı, bazı özellikleri ve bu fonksiyon yardımıyla bir sabit nokta teoremi verilecektir. E-uzaklık dönüşümü Aamri ve El-Moutawakil tarafından tanımlanmıştır [2]. Ayrıca bu yazarlar karşılaştırma fonksiyonu yardımıyla bazı büzülme dönüşümleri için sabit nokta teoremleri ispatlamıştır.

3.3.1. Tanım

(X, ϑ) bir düzgün uzay ve $\rho : X \times X \to [0,\infty)$ bir dönüşüm olsun. Bir $V \in \vartheta$ ve $z \in X$ için $\rho(z,x) \le \delta$ ve $\rho(z,y) \le \delta$ iken $(x,y) \in V$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa ρ dönüşümüne A-uzaklık dönüşümü denir [2].

3.3.2. Tanım

(X,ϑ) bir düzgün uzay ve $\rho: X\times X\to[0,\infty)$ bir dönüşüm olsun.

(ρ 1) ρ A-uzaklık dönüşümü,

(ρ 2) Her $x,y,z\in X$ için $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)$

şartları sağlanırsa ρ ya E-uzaklık dönüşümü denir [2].

Örnek

$X=[0,\infty)$ ve $d: X\times X\to[0,\infty)$ $d(x,y)=|x-y|$ metriği ve $\rho: X\times X\to[0,\infty)$

$\rho(x,y)=\begin{cases} y, & y\in[0,1) \\ 2y, & y\in[1,\infty) \end{cases}$ dönüşümü verilsin. Bu durumda ρ dönüşümü (X,ϑ_d) uzayında E-uzaklık dönüşümüdür. Gerçekten;

(ρ 1) $x,y,z\in X$ ve $V\in\vartheta_d$ için,

(i) $x,y\in[0,1)$ ise $\rho(z,x)=x\le\delta$ ve $\rho(z,y)=y\le\delta$ dir. Her $\varepsilon>0$ için $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ alınırsa

$$d(x,y)=|x-y|\le|x|+|y|\le 2\delta=\varepsilon$$

olup $(x,y)\in V$ elde edilir.

(ii) $x,y\in[1,\infty)$ ise $\rho(z,x)=2x\le\delta$ ve $\rho(z,y)=2y\le\delta$ dir. Her $\varepsilon>0$ için $\delta=\varepsilon$ alınırsa

$$d(x,y)=|x-y|\le|x|+|y|\le\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\varepsilon$$

olup $(x,y)\in V$ elde edilir.

(iii) $x \in [0,1)$ ve $y \in [1,\infty)$ ise $\rho(z,x) = x \le \delta$ ve $\rho(z,y) = 2y \le \delta$ dir. Her $\varepsilon > 0$ için $\delta = \frac{2\varepsilon}{3}$ alınırsa

$$d(x,y) = |x-y| \le |x| + |y| \le \delta + \frac{\delta}{2} = \varepsilon$$

olup $(x,y) \in V$ elde edilir.

$x \in [1,\infty)$ ve $y \in [0,1)$ ise ispat benzerdir.

(ρ 2) Her $x, y, z \in X$ için

(i) $y, z \in [0,1)$ ise

$$\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$$
$$y \le z + y,$$

(ii) $y, z \in [1,\infty)$ ise

$$\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$$
$$2y \le 2z + 2y,$$

(iii) $y \in [0,1)$ ve $z \in [1,\infty)$ ise

$$\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$$
$$y \le 2z + y,$$

(iv) $z \in [0,1)$ ve $y \in [1,\infty)$ ise

$$\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$$
$$2y \le z + 2y$$

olup ($\rho 2$) sağlanır.

Böylece ρ dönüşümü (X, ϑ_d) uzayında $E-$uzaklık dönüşümüdür.

3.3.3. Tanım

(X, ϑ) bir düzgün uzay ve ρ, X üzerinde $A-$uzaklık dönüşümü olsun. $\{x_n\}$, X de bir dizi olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n, m \ge n_0$ için $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ oluyorsa $\{x_n\}$, $\rho-$Cauchy dizisidir denir [2].

3.3.4. Lemma

(X, ϑ) Hausdorff düzgün uzay ve ρ, X üzerinde A-uzaklık dönüşümü olsun. $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ X de iki dizi ve $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ P^+ de sıfıra yakınsayan diziler olsun. Bu durumda, $x, y, z \in X$ için,

(i) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\rho(x_n, y) \le \alpha_n$ ve $\rho(x_n, z) \le \beta_n$ ise $y = z$ dir. Özel olarak, $\rho(x,y) = 0$ ve $\rho(x,z) = 0$ ise $y = z$ dir.

(ii) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\rho(x_n, y_n) \le \alpha_n$ ve $\rho(x_n, z) \le \beta_n$ ise $\lim_{n\to\infty} \rho(y_n, z) = 0$ dir.

(iii) Her $m > n$ için $\rho(x_n, x_m) \le \alpha_n$ ise $\{x_n\}$, (X, ϑ) uzayında bir Cauchy dizisidir [2].

3.3.5. Tanım

(X, ϑ) bir düzgün uzay ρ, X üzerinde A-uzaklık dönüşümü ve $f : X \to X$ bir dönüşüm olsun.

(i) Her $\{x_n\}$ ρ-Cauchy dizisi ve $x \in X$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$ ise X e S-tam denir.

(ii) Her $\{x_n\}$ ρ-Cauchy dizisi ve $x \in X$ için $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ($\tau(\vartheta)$ ye göre yakınsak) ise X e ρ-Cauchy tam denir.

(iii) $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$ koşulunu sağlayan her $\{x_n\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} \rho(f(x_n), f(x)) = 0$ oluyorsa f ye ρ-sürekli denir.

(iv) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ koşulunu sağlayan her $\{x_n\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ oluyorsa f ye $\tau(\vartheta)$-sürekli denir.

(v) $\delta_\rho(X) = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in X\} < \infty$ ise X e ρ-sınırlı denir [2].

Not

(X, ϑ) Hausdorff düzgün uzay ve $\{x_n\}$ X de ρ-Cauchy dizisi olsun. X S-tam ise ρ-Cauchy tamdır.

Bu bölümde uzaklığı değiştiren fonksiyonlar aşağıdaki gibi kabul edilecektir:

(i) $\psi, \varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ sürekli, azalmayan

(ii) $\psi(t) = \varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

3.3.6. Teorem

$(X, \vartheta, \preceq)$ bir sıralı Hausdorff düzgün uzay ve ρ dönüşümü, S-tam X kümesi üzerinde E-uzaklık dönüşümü olsun. $f : X \to X$ ρ-sürekli veya $\tau(\vartheta)$-sürekli ve azalmayan dönüşüm olmak üzere $x \preceq y$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için

$$\psi(\rho(fx, fy)) \le \psi(\rho(x, y)) - \varphi(\rho(x, y)) \tag{3.9}$$

sağlansın. $x_0 \preceq f(x_0)$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ varsa f dönüşümünün bir sabit noktası vardır [33].

İspat

$f(x_0) = x_0$ ise ispat açıktır. $f(x_0) \neq x_0$ olsun. $x_0 \preceq f(x_0)$ ve f azalmayan olduğundan

$$x_0 \preceq f(x_0) \preceq f^2(x_0) \preceq f^3(x_0) \preceq \cdots \preceq f^n(x_0) \preceq f^{n+1}(x_0) \preceq \cdots$$

yazılır. Her $n \geq 1$ için $x_{n+1} = fx_n$ alalım. Herhangi bir $n_0 \geq 1$ sayısı için $x_{n_0} = x_{n_0+1}$ ise x_{n_0}, f dönüşümünün sabit noktasıdır. Bu durumda her $n \geq 0$ için $x_n \neq x_{n+1}$ alalım. Eş. 3.9 dan

$$\psi\left(\rho\left(x_{n+2,}x_{n+1}\right)\right) = \psi\left(\rho\left(fx_{n+1,}fx_n\right)\right)$$

$$= \psi\left(\rho\left(x_{n+1,}x_n\right)\right) - \varphi\left(\rho\left(x_{n+1,}x_n\right)\right) \tag{3.10}$$

olup ψ azalmayan olduğundan $\left\{\rho\left(x_{n+1,}x_n\right)\right\}$ dizisi monoton azalandır. Böylece bir $r \geq 0$ sayısı vardır öyle ki

$\lim_{n\to\infty} \rho\left(x_{n+1,}x_n\right) = r$ dir.

$n \to \infty$ için Eş. 3.10 da limit alınırsa, ψ ve φ sürekli olduğundan

$$\psi(r) \leq \psi(r) - \varphi(r)$$

olup $r = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $\lim_{n\to\infty} \rho\left(x_{n+1,}x_n\right) = 0$ dır. Benzer olarak, $\lim_{n\to\infty} \rho\left(x_{n,}x_{n+1}\right) = 0$ gösterilebilir.

Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin ρ-Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Aksini kabul edelim ve $\{x_n\}$ dizisi ρ-Cauchy dizisi olmasın. Bu durumda bir $\varepsilon > 0$ sayısı var öyle ki her $k \in \mathrm{N}$ için $m(k) > n(k) > k$ ve $\rho\left(x_{n(k)}, x_{m(k)}\right) \geq \varepsilon$ olacak şekilde $\{x_n\}$ dizisinin $\left\{x_{n(k)}\right\}$ ve $\left\{x_{m(k)}\right\}$ alt dizileri vardır. Burada $m(k)$, $m(k) > n(k)$ olacak şekilde en küçük sayı olsun. Bu durumda $\rho\left(x_{n(k)}, x_{m(k)-1}\right) < \varepsilon$ dir. Böylece

$$\varepsilon \leq \rho\left(x_{n(k)}, x_{m(k)}\right) \leq \rho\left(x_{n(k)}, x_{m(k)-1}\right) + \rho\left(x_{m(k)-1}, x_{m(k)}\right),$$

$$\varepsilon \leq \rho\left(x_{n(k)}, x_{m(k)}\right) < \varepsilon + \rho\left(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}\right)$$

yazılır. Buradan

$$\lim_{k\to\infty} \rho\left(x_{n(k)}, x_{m(k)}\right) = \varepsilon$$

elde edilir. $(\rho 2)$ özelliğinden

$$\rho\left(x_{n(k)}, x_{m(k)}\right) \leq \rho\left(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}\right) + \rho\left(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1}\right) + \rho\left(x_{m(k)+1}, x_{m(k)}\right) \text{ ve}$$

$$\rho\left(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1}\right) \leq \rho\left(x_{n(k)+1}, x_{n(k)}\right) + \rho\left(x_{n(k)}, x_{m(k)}\right) + \rho\left(x_{m(k)}, x_{m(k)+1}\right)$$

yazılır. Sonuç olarak

$$\lim_{k\to\infty} \rho\left(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1}\right) = \varepsilon$$

elde edilir. Eş 3.9 dan

$$\psi\left(\rho\left(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1}\right)\right) \leq \psi\left(\rho\left(x_{n(k),} x_{m(k)}\right)\right) - \varphi\left(\rho\left(x_{n(k),} x_{m(k)}\right)\right)$$

yazılır. $k \to \infty$ için limit alınırsa

$$\psi(\varepsilon) \leq \psi(\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)$$

olup φ fonksiyonunun tanımından $\varepsilon = 0$ bulunur. Sonuç olarak, $\{x_n\}$ dizisi ρ-Cauchy dizisidir. X, S-tam olduğundan bir $z \in X$ vardır ve

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, z) = 0$$

dir. f dönüşümü ρ-sürekli olduğundan $\lim_{n\to\infty} \rho(fx_n, fz) = 0$ yazılır ve $z = fz$ bulunur.

Örnek

$X = [0,1]$, $d : X \times X \to [0,\infty)$, $d(x,y) = |x-y|$ metriği ve X üzerinde kısmi sıralama bağıntısı $x \preceq y \Leftrightarrow y \leq x$ verilsin. $\rho : X \times X \to [0,\infty)$, her $x, y \in X$ için $\rho(x,y) = y$ ve $f : X \to X$, $f(t) = \dfrac{t^2}{t+1}$ olarak verilsin. ρ dönüşümü (X, ϑ_d) Hausdorff düzgün uzayında E-uzaklık dönüşümüdür. Ayrıca X, S-tamdır.

$\psi, \varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ uzaklık değiştiren fonksiyonları $\psi(t) = t$ ve $\varphi(t) = \dfrac{t}{t+1}$ olmak üzere, Teorem 3.3.6 nın şartları sağlanır. $0 \in X$, f dönüşümünün sabit noktasıdır [33].

3.4. Sıralı Gauge Uzaylarda $(\psi - \varphi)$ − Zayıf Büzülme Dönüşümü ve Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda Chifu ve Petruşel [14], Cherichi ve Samet [13] gibi yazarların çalışmaları düşünülerek sıralı Gauge uzaylarda $(\psi - \varphi)$ − zayıf büzülme dönüşümünü sağlayan dört dönüşüm için ortak sabit nokta teoremleri verilecektir.

3.4.1. Tanım

X boş olmayan bir küme ve $d : X \times X \to [0,\infty)$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y, z \in X$ için

(d1) $d(x,x)=0$,

(d2) $d(x,y)=d(y,x)$,

(d3) $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği),

şartları sağlanırsa d ye X üzerinde bir yarı metrik (pseudometrik) ve (X,d) ikilisine de yarı metrik uzay denir [18].

3.4.2. Tanım

X boş olmayan bir küme ve d , X üzerinde yarı metrik olsun.

$$B_d(x,\varepsilon)=\{y\in X : d(x,y)<\varepsilon\}$$

kümesine $x\in X$ merkezli $\varepsilon>0$ yarıçaplı d - açık yuvar denir [18].

3.4.3. Tanım

$F=\{d_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$, yarı metriklerin ailesi olsun. Her $x\neq y$ için bir $d_\lambda\in F$ var öyle ki $d_\lambda(x,y)\neq 0$ ise F ailesine ayrılmış denir [18].

3.4.4. Tanım

X boş olmayan bir küme ve $F=\{d_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ yarı metriklerin bir ailesi olsun. Açık yuvarların $B(F)=\{B_{d_\lambda}(x,\varepsilon): x\in X, d_\lambda\in F, \varepsilon>0\}$ ailesini alt taban kabul eden $\tau(F)$ topolojisi X üzerinde F ailesi tarafından üretilen topolojidir ve $(X,\tau(F))$ ikilisine Gauge uzayı denir [18].

Not

Bazı yazarlar, Gauge uzay tanımını Tanım 3.4.3 ve Tanım 3.4.4 ü birleştirerek vermektedir.

3.4.5. Tanım

$(X,\tau(F))$ bir Gauge uzay ve $\{x_n\}$ X de bir dizi olsun.

(i) her $\lambda\in\Lambda$ ve her $\varepsilon>0$ için en az bir $n_0\in\mathrm{N}$ sayısı var öyle ki her $n\geq n_0$ iken $d_\lambda(x_n,x)<\varepsilon$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisi $x\in X$ noktasına yakınsaktır denir ve $x_n\xrightarrow{F}x$ ile gösterilir.

(ii) her $\lambda\in\Lambda$ ve her $\varepsilon>0$ için en az bir $n_0\in\mathrm{N}$ sayısı var öyle ki her $n,m\geq n_0$ iken $d_\lambda(x_m,x_n)<\varepsilon$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

(iii) her $\{x_n\}$ Cauchy dizisi $(X,\tau(F))$ uzayında yakınsak ise $(X,\tau(F))$ uzayına tamdır denir [13].

3.4.6. Tanım

X boş olmayan bir küme ve X üzerinde tanımlanan yarı metriklerin bir ailesi $F=\{d_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ olsun. $(X,\tau(F))$ bir Gauge uzay ve $(X,\preceq)$ bir kısmi sıralı küme olmak üzere $(X,F,\preceq)$ ye sıralı Gauge uzaydır denir.

Bu bölümde uzaklığı değiştiren fonksiyonlar aşağıdaki gibi kabul edilecektir:

(i) $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ alttan yarı sürekli, her $t>0$ için $\varphi(t)>0$ ve $\varphi(0)=0$,

(ii) $\psi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ sürekli, azalmayan ve $\psi(t)=0\Leftrightarrow t=0$.

3.4.7. Teorem

$(X,F,\preceq)$ sıralı tam ayrılmış Gauge uzay ve $f,g,S,T:X\to X$ dönüşümleri için $f(X)\subseteq T(X)$ ve $g(X)\subseteq S(X)$ olsun. $\{T,f\}$ ve $\{S,g\}$ kısmi zayıf artan, f ve g baskın dönüşümleri sırasıyla T ve S dönüşümlerinin zayıf sıfırlayıcısı olsun. Karşılaştırılabilir her $x,y\in X$ ve her $\lambda\in\Lambda$ için,

$$\psi\left(d_\lambda(fx,gy)\right)\le\psi\left(M(x,y)\right)-\varphi\left(M(x,y)\right) \tag{3.11}$$

sağlansın.

(i) $\{f,S\}$ uyumlu ve f veya S dönüşümlerinden biri sürekli ve $\{g,T\}$ zayıf uyumlu, veya

(ii) $\{g,T\}$ uyumlu g veya T dönüşümlerinden biri sürekli ve $\{f,S\}$ zayıf uyumlu

olsun. Azalmayan bir $\{x_n\}$ dizisi için $x_n\preceq y_n$ ve $y_n\to u$ iken $x_n\preceq u$ ise f, g, S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktası vardır. Ayrıca f, g, S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi iyi sıralı ise f, g, S ve T dönüşümlerinin tek ortak sabit noktası vardır. Burada

$$M(x,y)=\max\left\{d_\lambda(Sx,Ty),d_\lambda(fx,Sx),d_\lambda(gy,Ty),\frac{d_\lambda(Sx,gy)+d_\lambda(fx,Ty)}{2}\right\}$$ [33].

İspat

$x_0\in X$ olsun. $f(X)\subseteq T(X)$ olduğundan $fx_0=Tx_1$ olacak şekilde bir $x_1\in X$ vardır. Benzer olarak, $gx_1\in S(X)$ için $gx_1=Sx_2$ olacak şekilde bir $x_2\in X$ vardır. İterasyona devam ederek, her $n\ge 0$ için $\{y_n\}$ dizisini $y_{2n-1}=fx_{2n-2}=Tx_{2n-1}$ ve $y_{2n}=gx_{2n-1}=Sx_{2n}$ olarak oluşturalım. $x_n\preceq y_n$ olduğundan

$$x_{2n-2}\preceq fx_{2n-2}=Tx_{2n-1}\preceq fTx_{2n-1}\preceq x_{2n-1} \text{ ve } x_{2n-1}\preceq gx_{2n-1}=Sx_{2n}\preceq Sgx_{2n}\preceq x_{2n}$$

olup her $n \geq 1$ için $x_n \preceq x_{n+1}$ elde edilir.

İlk olarak her $\lambda \in \Lambda$ için $\lim_{n\to\infty} d_\lambda(y_{n+1}, y_n) = 0$ olduğunu gösterelim.

Bir $n \in \mathrm{N}$ için $d_\lambda(y_{2n}, y_{2n+1}) = 0$ ise Eş. 3.11 kullanılarak,

$$\begin{aligned}\psi\left(d_\lambda(y_{2n+1}, y_{2n+2})\right) &= \psi\left(d_\lambda(fx_{2n}, gx_{2n+1})\right) \\ &\leq \psi\left(M(x_{2n}, x_{2n+1})\right) - \varphi\left(M(x_{2n}, x_{2n+1})\right) \qquad (3.12)\end{aligned}$$

ve burada

$$M(x_{2n}, x_{2n+1}) = \max\left\{d_\lambda(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}), d_\lambda(fx_{2n}, Sx_{2n}), d_\lambda(gx_{2n+1}, Tx_{2n+1}), \frac{d_\lambda(Sx_{2n}, gx_{2n+1}) + d_\lambda(fx_{2n}, Tx_{2n+1})}{2}\right\}$$

$$= \max\left\{\begin{matrix} d_\lambda(y_{2n}, y_{2n+1}), d_\lambda(y_{2n+1}, y_{2n}), d_\lambda(y_{2n+2}, y_{2n+1}), \\ \dfrac{d_\lambda(y_{2n}, y_{2n+2}) + d_\lambda(y_{2n+1}, y_{2n+1})}{2}\end{matrix}\right\}$$

$$= \max\left\{d_\lambda(y_{2n+2}, y_{2n+1}), \frac{d_\lambda(y_{2n+2}, y_{2n+1})}{2}\right\}$$

$$= d_\lambda(y_{2n+2}, y_{2n+1}).$$

olup Eş 3.12 de yerine yazılırsa,

$$\psi\left(d_\lambda(y_{2n+1}, y_{2n+2})\right) \leq \psi\left(d_\lambda(y_{2n+1}, y_{2n+2})\right) - \varphi\left(d_\lambda(y_{2n+1}, y_{2n+2})\right)$$

elde edilir. Buradan $\varphi\left(d_\lambda(y_{2n+1}, y_{2n+2})\right) \leq 0$ olup φ nin tanımından $\varphi\left(d_\lambda(y_{2n+1}, y_{2n+2})\right) = 0$ ve böylece $d_\lambda(y_{2n+1}, y_{2n+2}) = 0$ bulunur. Benzer olarak, $d_\lambda(y_{2n+2}, y_{2n+3}) = 0$ bulunur.

Sonuç olarak her $\lambda \in \Lambda$ için $\lim_{n\to\infty} d_\lambda(y_{n+1}, y_n) = 0$ elde edilir.

Her $n \in \mathrm{N}$ için $d_\lambda(y_{2n}, y_{2n+1}) > 0$ ve x_{2n} ile x_{2n+1} karşılaştırılabilir ise Eş 3.11 den

$$\begin{aligned}\psi\left(d_\lambda\left(y_{2n+1},y_{2n+2}\right)\right)&=\psi\left(d_\lambda\left(fx_{2n},gx_{2n+1}\right)\right)\\&\le\psi\left(M\left(x_{2n},x_{2n+1}\right)\right)-\varphi\left(M\left(x_{2n},x_{2n+1}\right)\right)\\&<\psi\left(M\left(x_{2n},x_{2n+1}\right)\right)\end{aligned}$$

olup ψ nin tanımı gereği

$$d_\lambda\left(y_{2n+1},y_{2n+2}\right)<M\left(x_{2n},x_{2n+1}\right) \tag{3.13}$$

elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}M\left(x_{2n},x_{2n+1}\right)&=\max\left\{d_\lambda\left(Sx_{2n},Tx_{2n+1}\right),d_\lambda\left(fx_{2n},Sx_{2n}\right),d_\lambda\left(gx_{2n+1},Tx_{2n+1}\right),\frac{d_\lambda\left(Sx_{2n},gx_{2n+1}\right)+d_\lambda\left(fx_{2n},Tx_{2n+1}\right)}{2}\right\}\\&=\max\left\{\begin{matrix}d_\lambda\left(y_{2n},y_{2n+1}\right),d_\lambda\left(y_{2n+1},y_{2n}\right),d_\lambda\left(y_{2n+2},y_{2n+1}\right),\\\dfrac{d_\lambda\left(y_{2n},y_{2n+2}\right)+d_\lambda\left(y_{2n+1},y_{2n+1}\right)}{2}\end{matrix}\right\}\\&\le\max\left\{d_\lambda\left(y_{2n},y_{2n+1}\right),d_\lambda\left(y_{2n+2},y_{2n+1}\right),\frac{d_\lambda\left(y_{2n},y_{2n+1}\right)+d_\lambda\left(y_{2n+1},y_{2n+2}\right)}{2}\right\}\\&=\max\left\{d_\lambda\left(y_{2n},y_{2n+1}\right),d_\lambda\left(y_{2n+2},y_{2n+1}\right)\right\}.\end{aligned}$$

$M\left(x_{2n},x_{2n+1}\right)=d_\lambda\left(x_{2n+2},x_{2n+1}\right)$ ise bu Eş. 3.13 ile çelişir. Böylece $M\left(x_{2n},x_{2n+1}\right)=d_\lambda\left(x_{2n},x_{2n+1}\right)$ dir. Eş. 3.13 kullanılarak $d_\lambda\left(y_{2n+1},y_{2n+2}\right)<d_\lambda\left(y_{2n},y_{2n+1}\right)$ ve $d_\lambda\left(y_{2n},y_{2n+1}\right)<d_\lambda\left(y_{2n-1},y_{2n}\right)$ olup $\left\{d_\lambda\left(y_{2n+1},y_{2n}\right)\right\}$ monoton azalan ve sınırlı olduğundan $\lim_{n\to\infty}d_\lambda\left(y_{n+1},y_n\right)=r$ olacak şekilde bir $r\ge0$ sayısı vardır. φ alttan yarı sürekli olduğundan Eş. 3.12 kullanılarak,

$$\limsup_{n\to\infty}\psi\left(d_\lambda\left(y_{n+1},y_n\right)\right)\le\limsup_{n\to\infty}\psi\left(M\left(x_{n+1},x_n\right)\right)-\liminf_{n\to\infty}\varphi\left(M\left(x_{n+1},x_n\right)\right)$$

ve buradan $\psi\left(r\right)\le\psi\left(r\right)-\varphi\left(r\right)$ olup $r=0$ elde edilir.

Şimdi $\{y_n\}$ dizisinin $(X,\tau(F))$ Gauge uzayında Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Aksini kabul edelim; bir $\lambda\in\Lambda$ ve $\varepsilon>0$ için $2m(k)>2n(k)>k$ olmak üzere $d_\lambda\left(x_{2m(k)},x_{2n(k)}\right)\geq\varepsilon$ olacak şekilde $\{x_n\}$ dizisinin $\left\{x_{2n(k)}\right\}$ ve $\left\{x_{2m(k)}\right\}$ alt dizileri vardır. Burada $m(k)$, $2m(k)>2n(k)$ olacak şekilde en küçük sayı olsun. Bu durumda $d_\lambda\left(x_{2m(k)-2},x_{2n(k)}\right)<\varepsilon$ dir. Böylece

$$\varepsilon\leq d_\lambda\left(x_{2m(k)},x_{2n(k)}\right)$$

$$\leq d_\lambda\left(y_{2m(k)},y_{2m(k)-1}\right)+d_\lambda\left(y_{2m(k)-1},y_{2m(k)-2}\right)+d_\lambda\left(y_{2m(k)-2},y_{2n(k)}\right)$$

olduğundan

$$\lim_{k\to\infty}d_\lambda\left(x_{2m(k)},x_{2n(k)}\right)=\varepsilon$$

elde edilir. Üçgen eşitsizliğinden

$$d_\lambda\left(y_{2m(k)},y_{2n(k)}\right)\leq d_\lambda\left(y_{2m(k)},y_{2m(k)-1}\right)+d_\lambda\left(y_{2m(k)-1},y_{2n(k)}\right)$$
$$d_\lambda\left(y_{2m(k)-1},y_{2n(k)}\right)\leq d_\lambda\left(y_{2m(k)-1},y_{2m(k)}\right)+d_\lambda\left(y_{2m(k)},y_{2n(k)}\right)$$

olup

$$\lim_{k\to\infty}d_\lambda\left(x_{2m(k)-1},x_{2n(k)}\right)=\varepsilon$$

elde edilir. Eş. 3.12 den

$$\psi\left(d_\lambda\left(y_{2n(k)+1},y_{2m(k)}\right)\right)=\psi\left(d_\lambda\left(fx_{2n(k)},gx_{2m(k)-1}\right)\right)$$

$$\leq\psi\left(M\left(y_{2n(k)},y_{2m(k)-1}\right)\right)-\varphi\left(M\left(y_{2n(k)},y_{2m(k)-1}\right)\right) \qquad (3.14)$$

yazılır. Burada

$$M\left(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}\right) = \max\left\{\begin{array}{l} d_\lambda\left(Sx_{2n(k)}, Tx_{2m(k)-1}\right), d_\lambda\left(fx_{2n(k)}, Sx_{2n(k)}\right), d_\lambda\left(gx_{2m(k)-1}, Tx_{2m(k)-1}\right), \\ \dfrac{d_\lambda\left(Sx_{2n(k)}, gx_{2m(k)-1}\right) + d_\lambda\left(fx_{2n(k)}, Tx_{2m(k)-1}\right)}{2} \end{array}\right\}$$

$$= \max\left\{\begin{array}{l} d_\lambda\left(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-1}\right), d_\lambda\left(y_{2n(k)+1}, y_{2n(k)}\right), d_\lambda\left(y_{2m(k)}, y_{2m(k)-1}\right), \\ \dfrac{d_\lambda\left(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}\right) + d_\lambda\left(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)-1}\right)}{2} \end{array}\right\}$$

olup $\lim_{k\to\infty} M\left(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}\right) = \varepsilon$ elde edilir. Eş.3.14 de limit alınırsa $\psi(\varepsilon) \le \psi(\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)$ bulunur. φ fonksiyonunun tanımından $\varepsilon = 0$ elde edilir. Bu da $\varepsilon > 0$ kabul edilmesiyle çelişir. Sonuç olarak $\{y_{2n}\}$ ve dolayısıyla $\{y_n\}$ Cauchy dizisidir. $\left(X, \tau(F)\right)$ tam Gauge uzay olduğundan $y_{2n} \xrightarrow{F} z$ $(n \to \infty)$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Ayrıca

$fx_{2n}, Tx_{2n+1}, gx_{2n+1}, Sx_{2n+2} \xrightarrow{F} z$ olur.

Şimdi, z noktasının f, g, S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktası olduğunu gösterelim. S dönüşümü sürekli olsun. $\{f, S\}$ uyumlu olduğundan

$$fSx_{2n+2} \xrightarrow{F} Sz = Sfx_{2n+2} \xrightarrow{F} Sz \qquad (n \to \infty) \quad \text{ve} \quad x_{2n+1} \preceq gx_{2n+1} = Sx_{2n+2}$$

elde edilir. Böylece

$$\psi\left(d_\lambda\left(fSx_{2n+2}, gx_{2n+1}\right)\right) \le \psi\left(M\left(Sx_{2n+2}, x_{2n+1}\right)\right) - \varphi\left(M\left(Sx_{2n+2}, x_{2n+1}\right)\right) \tag{3.15}$$

olup

$$M\left(Sx_{2n+2},x_{2n+1}\right)=\max\left\{\begin{array}{l} d_\lambda\left(SSx_{2n+2},Tx_{2n+1}\right),d_\lambda\left(fSx_{2n+2},SSx_{2n+2}\right),d_\lambda\left(gx_{2n+1},Tx_{2n+1}\right), \\ \dfrac{d_\lambda\left(SSx_{2n+2},gx_{2n+1}\right)+d_\lambda\left(fSx_{2n+2},Tx_{2n+1}\right)}{2} \end{array}\right\}$$

bulunur. Eş.3.15 de limit alınırsa

$$\psi\left(d_\lambda\left(Sz,z\right)\right)\le\psi\left(d_\lambda\left(Sz,z\right)\right)-\varphi\left(d_\lambda\left(Sz,z\right)\right)$$

bulunur. Sonuç olarak F ayrılmış olduğundan $Sz=z$ elde edilir.

$x_{2n+1}\preceq gx_{2n+1}$ ve $gx_{2n+1}\xrightarrow{F}z$ $(n\to\infty)$ ve $x_{2n+1}\preceq z$ olduğundan Eş. 3.11 büzülme dönüşümünde

$$\psi\left(d_\lambda\left(fz,gx_{2n+1}\right)\right)\le\psi\left(M\left(z,x_{2n+1}\right)\right)-\varphi\left(M\left(z,x_{2n+1}\right)\right) \tag{3.16}$$

olup burada

$$M\left(z,x_{2n+1}\right)=\max\left\{d_\lambda\left(Sz,Tx_{2n+1}\right),d_\lambda\left(fz,Sz\right),d_\lambda\left(gx_{2n+1},Tx_{2n+1}\right),\frac{d_\lambda\left(Sz,gx_{2n+1}\right)+d_\lambda\left(fz,Tx_{2n+1}\right)}{2}\right\}$$

dir ve Eş. 3.16 da limit alınırsa

$$\psi\left(d_\lambda\left(fz,z\right)\right)\le\psi\left(d_\lambda\left(fz,z\right)\right)-\varphi\left(d_\lambda\left(fz,z\right)\right)$$

bulunur. F ayrılmış olduğundan $fz=z$ elde edilir.

$f\left(X\right)\subseteq T\left(X\right)$ olduğundan, $fz=Tu$ olacak şekilde bir $u\in X$ vardır. $gu\neq Tu$ olduğunu kabul edelim. $z\preceq fz=Tu\preceq fTu\preceq u$ ve Eş.3.11 kullanılarak

$$\psi\left(d_\lambda\left(Tu,gu\right)\right)=\psi\left(d_\lambda\left(fz,gu\right)\right)\le\psi\left(M\left(z,u\right)\right)-\varphi\left(M\left(z,u\right)\right)$$

ve burada

$$M(z,u)=\max\left\{d_\lambda(Sz,Tu),d_\lambda(fz,Sz),d_\lambda(gu,Tu),\frac{d_\lambda(Sz,gu)+d_\lambda(fz,Tu)}{2}\right\}$$

$$=\max\left\{d_\lambda(z,z),d_\lambda(z,z),d_\lambda(gu,Tu),\frac{d_\lambda(gu,Tu)+d_\lambda(Tu,Tu)}{2}\right\}$$

$$=d_\lambda(gu,Tu)$$

olur. Sonuç olarak

$$\psi\left(d_\lambda(Tu,gu)\right)\le\psi\left(d_\lambda(Tu,gu)\right)-\varphi\left(d_\lambda(Tu,gu)\right)$$

olup $d_\lambda(Tu,gu)=0$ ve F ayrılmış olduğundan $Tu=gu$ elde edilir. g ve T zayıf uyumlu olduğundan $gz=gfz=gTu=Tgu=Tfz=Tz$ dir. Böylece z noktası g ve T dönüşümlerinin çakışma noktasıdır.

$x_{2n}\preceq fx_{2n}$ ve $fx_{2n}\xrightarrow{F}z$ $(n\to\infty)$ ve $x_{2n}\preceq z$ olduğundan

$$\psi\left(d_\lambda(fx_{2n},gz)\right)\le\psi\left(M(x_{2n},z)\right)-\varphi\left(M(x_{2n},z)\right) \tag{3.17}$$

ve burada

$$M(x_{2n},z)=\max\left\{d_\lambda(Sx_{2n},Tz),d_\lambda(fx_{2n},Sx_{2n}),d_\lambda(gz,Tz),\frac{d_\lambda(Sx_{2n},gz)+d_\lambda(fx_{2n},Tz)}{2}\right\}$$

dir. Eş. 3.17 de limit alınırsa

$$\psi\left(d_\lambda(z,gz)\right)\le\psi\left(d_\lambda(z,gz)\right)-\varphi\left(d_\lambda(z,gz)\right)$$

bulunur. Böylece $d_\lambda(z,gz)=0$ ve F ayrılmış olduğundan $gz=z$ elde edilir. Sonuç olarak $fz=gz=Sz=Tz=z$ dir.

f dönüşümü sürekli olduğunda da benzer ispat yapılır.

$z \in X$ sabit noktasının tek olduğunu gösterelim. Aksini kabul ederek, $z \neq v$ olacak şekilde $v \in X$ noktası f, g, S ve T dönüşümlerinin sabit noktası olsun. f, g, S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi iyi sıralı olsun. Eş. 3.9 dan

$$\psi\left(d_\lambda(z,v)\right) = \psi\left(d_\lambda(fz, gv)\right) \leq \psi\left(M(z,v)\right) - \varphi\left(M(z,v)\right)$$

ve burada

$$M(z,v) = \max\left\{d_\lambda(Sz,Tv), d_\lambda(fz,Sz), d_\lambda(gv,Tv), \frac{d_\lambda(Sz,gv) + d_\lambda(fz,Tv)}{2}\right\}.$$

$$= \max\left\{d_\lambda(z,v), 0, 0, \frac{d_\lambda(z,v) + d_\lambda(z,v)}{2}\right\}$$

$$= d_\lambda(z,v)$$

olup

$$\psi\left(d_\lambda(z,v)\right) \leq \psi\left(d_\lambda(z,v)\right) - \varphi\left(d_\lambda(z,v)\right)$$

bulunur. Böylece $d_\lambda(z,v) = 0$ ve F ayrılmış olduğundan $z = v$ elde edilir. Sonuç olarak f, g, S ve T dönüşümlerinin tek ortak sabit noktası vardır.

3.4.8. Sonuç

$(X, F, \preceq)$ sıralı tam ayrılmış Gauge uzay ve $f, S, T : X \to X$ dönüşümleri için $f(X) \subseteq T(X)$ ve $f(X) \subseteq S(X)$ olsun. $\{T, f\}$ ve $\{S, f\}$ kısmi zayıf artan ve f baskın dönüşümü T ve S dönüşümlerinin zayıf sıfırlayıcısı olsun. Karşılaştırılabilir her $x, y \in X$ ve her $\lambda \in \Lambda$ için,

$$\psi\left(d_\lambda(fx, fy)\right) \leq \psi\left(M(x,y)\right) - \varphi\left(M(x,y)\right)$$

sağlansın.

(i) $\{f,S\}$ uyumlu ve f veya S dönüşümlerinden biri sürekli ve $\{f,T\}$ zayıf uyumlu, veya

(ii) $\{f,T\}$ uyumlu f veya T dönüşümlerinden biri sürekli ve $\{f,S\}$ zayıf uyumlu

olsun. Azalmayan bir $\{x_n\}$ dizisi için $x_n \preceq y_n$ ve $y_n \to u$ iken $x_n \preceq u$ ise f, S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktası vardır. Ayrıca f, S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi iyi sıralı ise f, S ve T dönüşümlerinin tek ortak sabit noktası vardır. Burada

$$M(x,y)=\max\left\{d_\lambda(Sx,Ty),d_\lambda(fx,Sx),d_\lambda(fy,Ty),\frac{d_\lambda(Sx,fy)+d_\lambda(fx,Ty)}{2}\right\}$$ [34].

3.4.9. Sonuç

$(X,F,\preceq)$ sıralı tam ayrılmış Gauge uzay ve $f,g,T:X\to X$ dönüşümler olmak üzere $f(X)\subseteq T(X)$ ve $g(X)\subseteq T(X)$ olsun. $\{T,f\}$ ve $\{T,g\}$ kısmi zayıf artan ve f ve g baskın dönüşümleri T dönüşümünün zayıf sıfırlayıcısı olsun. Karşılaştırılabilir her $x,y\in X$ ve her $\lambda\in\Lambda$ için,

$$\psi\left(d_\lambda(fx,gy)\right)\le\psi\left(M(x,y)\right)-\varphi\left(M(x,y)\right)$$

sağlansın.

(i) $\{f,T\}$ uyumlu ve f veya T dönüşümlerinden biri sürekli ve $\{g,T\}$ zayıf uyumlu, veya

(ii) $\{g,T\}$ uyumlu g veya T dönüşümlerinden biri sürekli ve $\{f,T\}$ zayıf uyumlu

olsun. Azalmayan bir $\{x_n\}$ dizisi için $x_n \preceq y_n$ ve $y_n \to u$ iken $x_n \preceq u$ ise f , g ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktası vardır. Ayrıca f, g ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi iyi sıralı ise f, g ve T dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktası vardır. Burada

$$M(x,y)=\max\left\{d_{\lambda}(Tx,Ty),d_{\lambda}(fx,Tx),d_{\lambda}(gy,Ty),\frac{d_{\lambda}(Tx,gy)+d_{\lambda}(fx,Ty)}{2}\right\}$$ [34].

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Matematikte özellikle diferansiyel denklemler, integral denklemler gibi pek çok problemin çözümünde kimi zaman tam sonucu bulmak mümkün değildir. Bu bakımdan varlık ve teklik problemlerinin çözümünde Banach sabit nokta teoremi önemli bir rol oynamaktadır. Bilindiği gibi Banach sabit nokta teoreminde uzayın tam uzay olması ve dönüşümün sürekli olması sabit noktanın varlığını göstermek açısından önemlidir. Banach sabit nokta teoreminin literatürde pek çok genelleştirmesi vardır. Bu genelleştirmeler gerek uzay gerekse dönüşümün özelliklerinin değiştirilmesi yoluyla ve birden fazla dönüşüm için ortak sabit nokta teoremleri olarak genişletilerek verilmiştir. Bu çalışmada metrik uzaylardan daha genel olan kısmi metrik uzaylar, *b*-metrik uzaylar, düzgün uzaylar ve gauge uzaylarda klasik yöntemlerden farklı yeni sabit nokta teoremleri elde etmek amaçlanmıştır. Kısmi metrik uzaylarda Berinde tipindeki *(δ-L)*-zayıf büzülme (hemen hemen büzülme (almost contraction)) dönüşümü ile dönüşümlerin sürekliliği gerekmeksizin ortak sabit noktanın var ve tek olabileceği gösterilmiştir. *b*-metrik uzaylarda, dönüşüm çiftleri için *b-(E.A)*-özelliği tanımı literatüre kazandırılmış ve bu özellik sayesinde uzayın tam olmasına ihtiyaç duyulmadan yeni sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır. Düzgün uzaylarda ve gauge uzaylarda kısmi sıralama şartı eklenmesiyle karşılaştırılabilir elemanlar için de büzülme dönüşümleri verilmiştir. Ayrıca burada elde edilen sonuçların önceki bilgilerden daha genel olduğunu gösteren açıklayıcı örneklere yer verilmiştir.

Bu çalışmanın devamında son yıllarda metrik uzaylar üzerinde verilen farklı büzülme dönüşümleri (*F*-büzülme, α-büzülme gibi) kısmi metrik, *b*-metrik, düzgün ve gauge uzaylarda düşünülebilir. Bu çalışmada verilen büzülme dönüşümleri literatürdeki başka genelleştirilmiş metrik uzaylara (dörtgensel metrik, dörtgensel *b*-metrik, *G*-metrik uzaylar gibi) ve bu tip uzayların kombinasyonu ile tanımlanan yeni genelleştirilmiş metrik uzaylara genişletilebilir.

Ayrıca, bu çalışmada elde edilen sonuçların, matematiğin yanı sıra bilgisayar bilimleri, mühendislik, iktisat gibi alanlara genişletilmesi ve bu alanlarda kullanılması amaçlanmaktadır.

KAYNAKLAR

1. Aamri, M., El-Moutawakil, D. (2002). Some new common fixed point theorems under strict contractive conditions, ***Journal Of Mathematical Analysis And Applications***, 270, 181-188

2. Aamri, M., El-Moutawakil, D. (2005). Weak compatibility and common fixed point theorems for A-contractive and E-expansive maps in uniform spaces, ***Serdica Mathematical Journal***, 31, 75-86.

3. Abbas, M., Nazir, T., Radenović, S. (2011). Common fixed points of four maps in partially ordered metric spaces, ***Applied Mathematics Letters***, 24, 1520-1526.

4. Altun, I., Acar, O. (2012). Fixed point theorems for weak contractions in the sense of Berinde on partial metric spaces, ***Topology And Its Applications***, 159, 2642-2648.

5. Altun, I., Damjanović, B., Djorić, D. (2010). Fixed point and common fixed point theorems on ordered cone metric spaces, ***Applied Mathematics Letters***, 23 (3), 310–316.

6. Aydi, H., Bota, M.F., Karapinar, E., Moradi, S. (2012). A common fixed point for weak contractions on b-metric spaces, ***Fixed Point Theory***, 13(2), 337-346.

7. Bakhtin, I.A. (1989). The contraction principle in almost metric spaces, ***In: Functional Analysis***, 30, 26-37.

8. Banach, S. (1922). Sur les oprations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrales, ***Fundemental Mathematics***, 3, 133-181.

9. Berinde, V. (2004). Approximating fixed points of weak contractions using the picard iteration, ***Nonlinear Analysis Forum***, 9(1) , 43-53.

10. Bouhadjera, H., Djoudi, A. (2008). General common fixed point theorems for weakly compatible maps, ***General Mathematics***, 16(2), 95-107.

11. Brouwer, L.E.J. (1910). Uber Abbildung von Mannigfaltigkeiten, ***Mathematische Annalen***, 71, 97-115.

12. Chatterjea, S.K. (1987). Application of an extension of a theorem of Fisher on common fixed point, ***Pure Mathematics Manuscript***, 6, 35-38.

13. Cherichi, M., Samet, B.(2012). Fixed point theorems on ordered gauge spaces with applications to nonlinear integral equations, ***Fixed Point Theory and Appication***., 13, 2012.

14. Chifu, C., Petruşel, G. (2011). Fixed point results for generalized contractions on ordered gauge spaces with applications, ***Fixed Point Theory and Appications***, 2011, 979586.

15. Ćirić, Lj.B. (1971). Generalized contractions and fixed-point theorems, ***Publications Of The Institue Of Mathematics***, 12(26), 19-26.

16. Czerwik, S. (1993). Contraction mappings in b-metric spaces, ***Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis***, 1, 5-11.

17. Doric, D. (2009). Common fixed point for generalized $(\psi,\varphi)-$weak contractions, ***Applied Mathematics Letters***, 22, 1896-1900.

18. Dugundji, J. (1966). Topology, ***Allyn and Bacon***.

19. Dutta, P.N., Choudhury, B.S. (2008). A generalization of contraction principle in metric spaces, ***Fixed Point Theory and Applications***, 8, Article ID 406368.

20. Granas, A., Dugundji, J. (2002). Fixed point theory, ***Springer Monographs in Mathematics.***

21. Istratescu, V. I. (1981). Fixed Point Theory : An Introduction, ***D. Riedel Publishing Company***, Dordrecht, 295-325.

22. Jungck, G. (1976). Commuting mappings and fixed points, ***The American Mathematical Monthly***, 83, 261-263.

23. Jungck, G. (1986). Compatible mappings and common fixed points, ***International Journal of Mathematics Sciences***, 9(4), 771-779.

24. Jungck, G., Rhoades, B.E. (1998). Fixed point for set valued functions without continuity, ***Indian Journal Of Pure Applied Mathematics***, 29(3), 227-238.

25. Kannan, R. (1969). Some results on fixed points II, ***American Mathematical Monthly***, 76, 405-408.

26. Karapınar, E. (2011). Generalizations of Caristi Kirk's Theorem On Partial Metric Spaces, ***Fixed Point Theory and Applications***, 2011, Article ID 4.

27. Karapınar, E., Yüksel, U. (2011). Some common fixed point theorems in partial metric spaces, ***Journal Of Applied Mathematics***, 2011 Article ID 263621.

28. Khan, M.S., Swaleh, M., Sessa, S. (1984). Fixed point theorems by altering distances between the points, ***Bulletin of the Australian Mathematical Society***, 30(1), 1–9.

29. Matthews, S.G. (1992). Partial Metric Topology, ***Research Report 212***, Department Of Computer Science University Of Warwick.

30. Musayev, B., Alp, M. (2000). Fonksiyonel Analiz, ***Balcı Yayınları***.

31. Nieto, J. J., Rodriguez-Lopez, R. (2005). Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations, ***Order,*** 22, 223-239.

32. Oltra, S., Valero, O. (2004). Banach's fixed point theorem for partial metric spaces, ***Rendiconti Dell''Instituto di Mathematica Dell'' Universita Trieste***, 36, 17-26.

33. Ozturk, V., Turkoglu, D. (2014). $(\psi,\varphi)-$weak contraction on ordered uniform spaces, ***Filomat***, 28(6), 1265-1269.

34. Ozturk, V., Turkoglu, D. (2015). Common fixed point for (ψ,φ)-weak contractions on ordered gauge spaces and applications, ***Journal Of Nonlinear and Convex Analysis***, 16(3), 473-483.

35. Ozturk, V., Turkoglu, D. (2015). Common fixed point for mappings satisfying $(E.A)$-property in $b-$metric spaces, ***Journal Of Nonlinear Sciences and Applications***, 8(6), 1127-1133.

36. Plebaniak, R. (2013). New generalized pseudodistance and coincidence point theorem in a $b-$metric space, ***Fixed Point Theory and Applications***, 2013, Article ID 270.

37. Ran, A.C.M., Reurings, M.C.B. (2004). A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations, ***Prooceedings of The American Mathematical Society***, 132, 1435-1443.

38. Rhoades, B.E. (2001). Some theorems on weakly contractive maps, ***Nonlinear Analysis***, 47, 2683-2693.

39. Roshan, J.R., Shobkolaei, N., Sedghi, S., Abbas, M. (2014). Common fixed point of four maps in $b-$metric spaces, ***Hacettepe Journal Of Mathematics And Statistics***, 43(4), 613-624.

40. Schauder, J. (1930). Der fixpunktsatz in funktionalramen, ***Studia Mathematica***, 2: 171-180.

41. Sessa, S. (1982). On a weak commutativity condition of mappings in fixed point considerations, ***Publications De L'Institut Mathematique***, 32, 149-153.

42. Shatanawi, W., Pitea, A., Lazovic, R. (2014). Contraction conditions using comparison functions on $b-$metric spaces, ***Fixed Point Theory and Applications***, 2014, Article ID 135.

43. Turkoglu, D., Ozturk, V. (2012). Common fixed point results for four mappings on partial metric spaces, ***Abstract And Applied Analysis***, 190862.

44. Valero, O. (2005). On Banach fixed point theorems for partial metric spaces, ***Applied General Topology***, 6 (2), 229-240.

45. Willard, S. (1970). General Topology, ***Addison-Wesley***.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler



Soyadı, adı : ÖZTÜRK, Vildan

Uyruğu : T.C.

Doğum tarihi ve yeri : 03.09.1984, Ankara

Medeni hali : Bekâr

Telefon : 0543 484 20 61

e-mail : vildan_ozturk@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi / Fen Bilimleri Enstitüsü	2011
Lisans	Gazi üniversitesi / Fen-Edebiyat Fakültesi	2008
Lise	Ankara Seyranbağları Lisesi	2002

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2009-	Artvin Çoruh Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Turkoglu, D., Ozturk, V. (2012). Common fixed point results for four mappings on partial metric spaces, Abstract And Applied Analysis, 190862.

2. Ozturk, V., Turkoglu, D. (2014). $(\psi,\varphi)-$ weak contraction on ordered uniform spaces, Filomat, 28(6), 1265-1269.

3. Ozturk, V., Turkoglu, D. (2015). Common fixed point for (ψ,φ)-weak contractions on ordered gauge spaces and applications, Journal Of Nonlinear and Convex Analysis, 16(3), 473-483.

4. Ozturk, V., Turkoglu, D. (2015). Common fixed point for mappings satisfying $(E.A)$-property in $b-$metric spaces, Journal Of Nonlinear Sciences and Applications, 8(6), 1127-1133.

5. Ding, H.S., Ozturk, V., Radenovic, S. (2015). On some fixed point results in b-rectangular metric spaces, Journal Of Nonlinear Sciences and Applications, 8, 378-386.

6. Ozturk, V., Turkoglu, D. (2015). Fixed points for generalized $(\alpha-\psi)-$ contractions in $b-$metric spaces, Baskıda.



GAZİ GELECEKTİR..