
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

FUZZY METRİK UZAYLAR VE SEZGİSEL FUZZY METRİK UZAYLAR ÜZERİNE

Ebru YİĞİT

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ŞUBAT 2018

Ebru YİĞİT tarafından hazırlanan "FUZZY METRİK UZAYLAR VE SEZGİSEL FUZZY METRİK UZAYLAR ÜZERİNE" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Hakan EFE

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. .....

Başkan: Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. .....

Üye: Prof. Dr. Cemil YILDIZ

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. .....

Üye: Prof. Dr. Erdal GÜNER

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. .....

Üye: Prof. Dr. Çetin VURAL

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. .....

Tez Savunma Tarihi: 14/02/2018

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Ebru YİĞİT

14/02/2018

FUZZY METRİK UZAYLAR VE SEZGİSEL FUZZY METRİK UZAYLAR ÜZERİNE

(Doktora Tezi)

Ebru YİĞİT

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Şubat 2018

ÖZET

Bu tez çalışmasında ilk olarak, fuzzy metrik uzaylarda konvekslik kavramı farklı bir yol ile tanımlanmış ve örneklendirilmiştir. Aynı zamanda fuzzy metrik uzaylarda hiperkonvekslik kavramı literatürde ilk defa tanımlanmış ve hiperkonveks fuzzy metrik uzayın bazı temel özellikleri verilmiştir. Ayrıca fuzzy metrik uzaylar için m-ayrılabilirlik kavramı ile hiperkonvekslikten daha zayıf bir özellik olan m-hiperkonvekslik kavramları verilmiş olup, herhangi bir fuzzy metrik uzay için hangi şart altında, m-hiperkonveksliğin hiperkonveksliğe eşdeğer olduğu ispatlanmıştır. Son olarak, sezgisel fuzzy metriğin alt sınıfları olan sabit sezgisel fuzzy metrik ve kuvvetli sezgisel fuzzy metrik kavramları verilmiş ve bu alt sınıflar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Bilim Kodu : 20405

Anahtar Kelimeler : Konvekslik, hiperkonvekslik, fuzzy metrik uzay, sezgisel fuzzy metrik uzay.

Sayfa Adedi : 78

Danışman : Doç. Dr. Hakan EFE

ON FUZZY METRIC SPACES AND INTUITIONISTIC FUZZY METRIC SPACES
(Ph. D. Thesis)

Ebru YİĞİT

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
February 2018

ABSTRACT

In this thesis, firstly, the notion of convexity in fuzzy metric spaces was defined in a different way and it was exemplified . At the same time, the notion of hyperconvexity in fuzzy metric spaces was introduced for the first time in the literature, and the basic properties of hyperconvex fuzzy metric spaces were given. Also, the definitions of m-seperability and m-hyperconvexity which is a weaker property than hyperconvexity were given and it was proved that under which condition m-hyperconvexity is equivalent to the hyperconvexity in fuzzy metric spaces. Finally, stationary intuitionistic fuzzy metric and strong intuitionistic fuzzy metric which are the subclasses of intuitionistic fuzzy metric were defined and the relationships between them were investigated.

Science Code : 20405
Key Words : Convexity, hyperconvexity, fuzzy metric space, intuitionistic fuzzy metric space.
Page Number : 78
Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Hakan EFE

TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitim dönemlerimin her aşamasında bilgisi, desteği ve zamanını benden hiç bir zaman esirgemeyen, karşılaştığım her türlü zorlukta hoşgörüsü ve sabrıyla beni cesaretlendiren danışman hocam Sayın Doç. Dr. Hakan EFE'ye sonsuz teşekkür ederim. Tez izleme sürecinde ve bu sürecin dışında bana birlikte çalışma fırsatı veren hocam Sayın Prof. Dr. Cemil YILDIZ'a ve her türlü yapıcı yaklaşım, öneri ve yönlendirmeleri için hocam Sayın Prof. Dr. Erdal GÜNER'e çok teşekkür ederim. Anlayış, sabır ve desteklerinden sonsuz güç aldığım, en değerli varlıklarım babam Hüseyin YİĞİT, annem Nermin YİĞİT ve kardeşlerim Duygu ve Çağrı'ya sonsuz teşekkür ederim. Yazım aşamasında karşılaştığım sıkıntılarda yardımını esirgemeyen hocam Sayın Doç. Dr. Mustafa Özkan'a ve yardımları için Fen Bilimleri Enstitüsü personeli Sayın Doğan KARA'ya teşekkür ederim. Kurum olarak doktora bursu adı altında vermiş olduğu maddi destekten dolayı Gençlik ve Spor Bakanlığı'na, yurt dışı staj programı kapsamında vermiş olduğu staj bursu için Gazi Üniversitesi ve Erasmus Kurum Koordinatörlüğü'ne teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

SİMGELER VE KISALTMALAR viii

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR 5

2.1. Konvekslik, Hiperkonvekslik ve Metrik Uzaylar 5

2.2. Fuzzy Metrik Uzaylar 12

2.3. Sezgisel Fuzzy Metrik Uzaylar 15

3. FUZZY METRİK UZAYLARDA KONVEKSLİK 21

3.1. Konveks Fuzzy Metrik Uzaylar 21

4. FUZZY METRİK UZAYLARDA HİPERKONVEKSLİK 31

4.1. Hiperkonveks Fuzzy Metrik Uzaylar 31

4.2. Fuzzy Metrik Uzaylarda m-Hiperkonvekslik ve m-Ayrılabilirlik 36

5. SEZGİSEL FUZZY METRİKLERİN BAZI ALT SINIFLARI . . . 43

5.1. Kuvvetli Sezgisel Fuzzy Metrikler ve Sabit Sezgisel Fuzzy Metrikler . . . 43

5.2. Sabit Sezgisel Fuzzy Metrik ve Kuvvetli Sezgisel Fuzzy Metrik Arasındaki İlişkiler 63

6. SONUÇ VE ÖNERİLER 71

KAYNAKLAR 73

ÖZGEÇMİŞ 77

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$*$	Sürekli t-norm
$\diamondsuit$	Sürekli t-conorm
$\boldsymbol{\Gamma}$	İndis kümesi
$\boldsymbol{card(\Gamma)}$	Γ kümesinin kardinalitesi
$\boldsymbol{(X,d)}$	Metrik uzay
$\boldsymbol{\bar{B}(x,r)}$	Metrik uzayda kapalı yuvar
$\boldsymbol{(X,M,*)}$	Fuzzy metrik uzay
$\boldsymbol{(M,*)}$	Fuzzy metrik
$\boldsymbol{B_M(x,r,t)}$	Fuzzy metrik uzayda açık yuvar
$\boldsymbol{\bar{B}_M(x,r,t)}$	Fuzzy metrik uzayda kapalı yuvar
$\boldsymbol{\tau_M}$	$(M,*)$ fuzzy metriğinin ürettiği topoloji
$\boldsymbol{(X,M,N*,\diamondsuit)}$	Sezgisel fuzzy metrik uzay
$\boldsymbol{(M,N,*,\diamondsuit)}$	Sezgisel fuzzy metrik
$\boldsymbol{B_{(M,N)}(x,r,t)}$	Sezgisel fuzzy metrik uzayda açık yuvar
$\boldsymbol{\tau_{(M,N)}}$	$(M,N,*,\diamondsuit)$ sezgisel fuzzy metriğinin ürettiği topoloji
(FM)	Fuzzy metrik
(IFM)	Intuitionistic (sezgisel) fuzzy metrik

1. GİRİŞ

Tarih boyunca, günlük hayatta karşılaşılan ve belirsizlik içeren problemlerin çözümlenmesi için bir takım teori ve modellemelere ihtiyaç duyulmuştur. Örneğin, yaklaşık 2000 yıllık geçmişi olan ve neredeyse bütün tasarımlarda kullanılan Öklid geometri anlayışında var olan 0 boyutlu nokta, 1 boyutlu doğru, 2 boyutlu yüzey ve 3 boyutlu hacim genellemelerinin, doğada var olan gerçek şekilerin güçlü bir soyutlamasından ibaret olduğu düşünülmüş ve 1970'li yıllarda öklid geometrisi yerini daha doğal şekillerin geometrisini yapabilen, başka bir ifadeyle şekillerin $1,32$ gibi boyutları olabileceğini gösteren ve doğadaki belirsizlik ilkelerinden doğan fractal geometriye bırakmıştır. Yine, 17. yüzyılda şans oyunlarının hesaplanabileceğinin düşünülmesinden sonra, bu türden matematiksel hesaplamaların sadece belirgin (deterministik) yöntemlerle yapılmasının yetersiz olduğu anlaşılmış ve sonraki yıllarda bilimsel çalışmalarda belirsizlik ilkelerine dayanan olasılık teorisi, istatistiksel yöntemlerle birlikte kullanılmıştır.

Olasılık teorisinde kullanılan belirsizlik türünün rastgele (random) karaktere sahip olduğu ve rastgeleliğin en önemli özelliğinin, "sonuçların ortaya çıkmasında şans faktörünün varlığı " olduğu düşünüldüğünde, günlük hayatta karşılaşılan her belirsizliğin rastgele karaktere sahip olmadığı görülür. Rastgele olma özelliği taşımayan veya yaklaşıklık-bulanıklık içeren belirsizlikler için en uygun metedolojinin küme elemanlarına değişik üyelik derecelerinin verilmesi ile olacağı Azeri bilim insanı Zadeh [48] tarafından belirtilmiştir. Örneğin, Aristo mantığına göre, insanlar boy bakımından uzundur veya değildir. Zadeh' in geliştirdiği fuzzy mantığa göre, uzun boyluluğun değişik dereceleri vardır. Başka bir ifadeyle Aristo mantığına göre çalışan klasik küme kavramında, bir öğenin kümeye ait olması durumunda üyelik derecesi 1, ait olmaması durumunda 0 iken; fuzzy mantığa göre çalışan "fuzzy küme" kavramında bir öğenin kümeye aitlik derecesi 0 ile 1 arasında değişen değerler alabilir [41].

Fuzzy küme kavramının literatüre girmesiyle birlikte, temel matematik anlayışı genişlemiş ve klasik kümeler üzerinde yapılan klasik matematik teorileri, fuzzy kümeler üzerinde yapılan fuzzy matematiğe genellenmiştir.

Fuzzy topolojik uzay kavramı ilk kez Chang [7] tarafından 1968 yılında tanımlanmış ve genel topolojiye ait temel tanım ve teoremler fuzzy topolojik uzaylara genellenmiştir. Kramosil ve Michalek [25], $*$ sürekli t-normu yardımıyla "fuzzy metrik uzaylar" ı tanımlamış ardından George ve Veeramani [12] bu uzay üzerinde bir Hausdorff topolojisi elde edebilmek amacıyla tanımda değişiklik yaptıklarını belirtmiş ve bu tanımı yeniden vermişlerdir. George ve Veeramani anlamında fuzzy metrik uzay kavramının literatüre kazandırılmasından sonra, konuyla ilgilenen çok sayıda

araştırmacı konunun gelişimine büyük katkı sağlamıştır [16–22, 31, 35, 37].

Klasik metrik uzaylardaki teori ve uygulamaların fuzzy metrik uzaylarda nasıl yorumlanacağı veya çalışıp çalışmayacağı konusu üzerine yapılan çalışmalardan biri de "konvekslik" kavramıdır. Fuzzy metrik uzaylarda yapılan çalışmalara değinmeden önce metrik uzayda yapılan çalışmalardan kısaca bahsedelim. Klasik metrik uzaylarda konvekslik ile ilgili ilk çalışmalar 1928 yılında Menger [27] tarafından yapılmıştır. 1970 yılında ise Takahashi [42], lineer konveksliğe benzeyen ve lineer konveksliğin bir çok temel özelliğini sağlayan farklı bir konvekslik tanımı vermiştir. Her iki konvekslik tanımı da, metrik uzaylarda özellikle sabit nokta teori ve uygulamalarında yapılan çalışmalarda geniş yer almıştır [23, 39, 40]. 1956 yılında Aronszajn ve Panitchpakdi [4] metrik uzaylarda Menger anlamındaki konvekslikten faydalanarak " hiperkonvekslik " kavramını ve hiperkonveks uzayın topolojik özelliklerini incelemiştir. 2001 yılında Espinola ve Khamsi [11], hiperkonveks bir uzayın hiperkonveks alt kümelerinin bazı önemli alt sınıfları arasındaki ilişkileri incelemiş ve sabit nokta teoremleri ile ilgili bazı sonuçlar vermiş ve 2016 yılında Miesch ve Pavon [28] bu uzayları geometrik anlamda incelemiştir. Öte yandan, 2012 yılında Vosoughi ve Hosseini [46], "metriksel konveks fuzzy metrik uzay" tanımını vermiş ve bu uzayda bazı büzülme dönüşümleri üzerine çalışmıştır. 2014 yılında Thanithamil [43], fuzzy metrik uzayda konveks yapıyı tanımlamış, konveks yapı ile birlikte uzaya "fuzzy konveks metrik uzay" adını vermiş ve bazı sabit nokta teoremlerini ispatlamıştır. Bu tanım lineer konveksliğe benzemekle birlikte, Takahashi anlamında konveks metrik uzayın, fuzzy metrik uzaylarda yorumlanması olarak düşünülebilir.

Fuzzy kümelerde $\mu_A : X \to [0,1]$ biçiminde karakterize edilen μ_A fonksiyonuna A fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu denir. X deki her bir elemanın üyelik dereceleriyle birlikte oluşturdukları ikililerin kümesine yani $A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\} \subset X \times I$ ya fuzzy küme denir. Herhangi bir $x \in A$ için $\mu_A(x) \in [0,1]$ değeri x in A ya ait olma derecesidir. 1986 yılında Atanassov [5] herhangi bir x elemanının kümeye ait olmama derecesi olan $\upsilon_A(x) \in [0,1]$ değerini ve $\mu_A(x) + \upsilon_A(x) \leq 1$ şartını da kullanarak $A^* = \{(x, \mu_A(x), \upsilon_A(x)) : x \in X\} \subset X \times I \times I$ biçiminde tanımlı "sezgisel fuzzy küme" kavramını vermiştir. Ardından 1997 yılında Çoker [8], "sezgisel fuzzy topolojik uzay" kavramını tanıtmış ve 2004 yılında Park [30], George ve Veeramani [12] nin vermiş olduğu fuzzy metrik uzay kavramını $*$ sürekli t-normu ve $\diamondsuit$ sürekli t-conormu yardımıyla "sezgisel fuzzy metrik uzay" a genelleştirmiş ve bu uzayın temel özelliklerini vermiştir. Bu çalışma, başta sabit nokta teorisi olmak üzere bir çok konuda uygulama alanı bulmuştur [1, 2, 9, 15, 44, 45].

Bu tezin ikinci bölümünde, klasik metrik uzaylarda tanımlanan konvekslik ve hiperkonvekslik kavramları verilmiştir. Aynı zamanda George ve Veeramani [12]

anlamında “fuzzy metrik uzay” ile Park [30] ın vermiş olduğu “sezgisel fuzzy metrik uzay” tanımları ve bu iki uzayın bazı temel özellikleri verilmiştir.

Üçüncü bölümünde, öncelikle fuzzy metrik uzaylar için verilmiş diğer konvekslik tanımlarından farklı olan ve kapalı yuvarlar yardımıyla tanımlamış olduğumuz “konveks fuzzy metrik uzay” kavramı verilmiş ve örneklendirilmiştir. Ardından, Tahnithamil [43] ile Vosoughi ve Hosseini [46] tarafından fuzzy metrik uzayların konveksliği üzerine verilmiş olan diğer iki tanım ile kapalı yuvarlar yardımıyla yeniden tanımlamış olduğumuz “konveks fuzzy metrik uzay” tanımı arasındaki farklar incelenmiştir.

Dördüncü bölümünde, Espinola ve Khamsi [11] nin, metrik uzaylar için tanımlamış olduğu “yuvar kesişim özelliği ile hiperkonvekslik” tanımları fuzzy metrik uzaylara taşınmıştır. Herhangi bir (X, d) metrik uzayının hiperkonveks olması durumunda, $(X, M_d, *)$ standart fuzzy metrik uzayının da hiperkonveks olduğu ispatlanmış ve hiperkonveks fuzzy metrik uzayın bazı topolojik özellikleri verilmiştir. Ayrıca, fuzzy metrik uzaylar için hiperkonvekslikten daha zayıf bir kavram olan m-hiperkonvekslik ile klasik ayrılabilirlikten daha kuvvetli bir kavram olan m-ayrılabilirlik tanımları verilmiş, herhangi bir m-ayrılabilir fuzzy metrik uzay için m-hiperkonveksliğin, uzayın hiperkonveksliğine denk olduğu ispatlanmıştır.

Beşinci bölümünde, Park [30] ın vermiş olduğu “ sezgisel fuzzy metrik uzay” tanımından faydalanılarak, bu uzayın alt sınıfları olan “ sabit sezgisel fuzzy metrik uzay ve kuvvetli sezgisel fuzzy metrik uzay ” kavramları tanımlanmış ve örneklendirilmiştir. Ayrıca, bu iki alt uzay arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Altıncı bölümünde ise, çalışılan konularla ilgili sonuç ve öneriler verilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde öncelikle, tezin üçüncü bölümünü oluşturan konveks fuzzy metrik uzay kavramı ve tezin dördüncü bölümünü oluşturan hiperkonveks fuzzy metrik uzay kavramının bir bakıma temelini oluşturan, konveks fonksiyon, konveks küme, konveks metrik uzay ve hiperkonveks metrik uzay tanımları ile örnekleri verilmiştir. Daha sonra George ve Veeramani [12] tarafından sürekli t-norm yardımıyla tanımlanan fuzzy metrik uzay kavramı ile Park [30] tarafından sürekli t-norm ve t-conorm yardımıyla tanımlanan sezgisel fuzzy metrik uzay kavramı verilmiş olup her iki uzayın da bazı temel özelliklerinden bahsedilmiştir.

2.1. Konvekslik, Hiperkonvekslik ve Metrik Uzaylar

2.1.1. Tanım

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi, $I \subset \mathbb{R}$ herhangi alt aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ olmak üzere, $\forall x, y \in I$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için,

$$f\left[\lambda x + (1-\lambda)y\right] \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

ise, f fonksiyonuna konvekstir denir [33].

Örnek

$(-\infty, \infty)$ üzerinde tanımlı $f(x) = x^2$, $[-\pi, 0]$ üzerinde tanımlı $g(x) = \sin x$ ve $(-\infty, \infty)$ üzerinde tanımlı $h(x) = |x|$ fonksiyonları konvekstir.

2.1.2. Tanım

E bir vektör uzayı ve $A \subseteq E$ olsun. Eğer her $\lambda \in [0, 1]$ ve her $x, y \in A$ için $z = [\lambda x + (1-\lambda)y] \in A$ ise, A ya konveks küme denir [33].

Örnek

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ve $[a, b] \subset \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $[a, b]$ konveks bir kümedir.

Çözüm

$c, d \in [a, b]$ olmak üzere $c < d$ alınırsa, $\lambda \in [0, 1]$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} a \leq c &= (1-\lambda)c + \lambda c \\ &< (1-\lambda)c + \lambda d \\ &< (1-\lambda)d + \lambda d = d \leq b \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\forall c, d \in [a, b]$ için $(1-\lambda)c + \lambda d \in [a, b]$ olduğundan, $[a, b]$ konveks bir kümedir.

2.1.3. Tanım

(X, d) bir metrik uzay olsun. $d(x_1, x_2) \leq \alpha + \beta$ şartını sağlayan herhangi $x_1, x_2 \in X$ ve $\alpha, \beta > 0$ için, $d(x_1, z) \leq \alpha$ ve $d(x_2, z) \leq \beta$ (veya buna denk olarak $z \in \bar{B}(x_1, \alpha) \cap \bar{B}(x_2, \beta)$) olacak şekilde $z \in X$ varsa, (X, d) metrik uzayına metriksel konvekstir denir [11].

2.1.4. Önerme

Her normlu lineer uzay konveks bir metrik uzaydır [6].

Not

Herhangi bir metrik uzay için yukarıdaki önerme doğru olmayabilir.

Örnek

$\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^n$ in alışılmış metriğini alalım. K, $\mathbb{R}^n$ in konveks olmayan kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda K, $\mathbb{R}^n$ den indirgenen metrik ile konveks olmayan bir metrik uzaydır [6].

Not

Her konveks metrik uzay normlu lineer uzay olmayabilir. Aşağıdaki örnek bu durumu açıklamaktadır.

Örnek

U, $\mathbb{R}^2$ de birim kapalı yuvar yani

$$U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

olsun. Bu durumda, U, öklid metriği ile birlikte bir konveks metrik uzaydır fakat normlu uzay değildir [6].

Gerçekten, $(1, 0), (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \in U$ noktaları alındığında $(1, 0) + (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$ ve $(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}) \notin U$ olduğundan, yani U birim kapalı yuvarı, vektörel toplama işlemine göre kapalı olmadığından dolayı bir vektör uzay değidir ve dolayısıyla normlu uzay değildir.

2.1.5. Tanım

$\mathcal{F}$, elemanlarının herhangi n-erli sinin kesişimi boştan farklı olan kümelerin bir koleksiyonu olsun. Eğer $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \varnothing$ ise, $\mathcal{F}$ koleksiyonuna n-li kesişim özelliğine sahiptir denir. Özel olarak $n = 2$ alınması durumunda, $\mathcal{F}$, elemanlarının 2-şerli kesişimleri boştan farklı olan kümelerin bir kolleksiyonu olur. Bu şart altında $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \varnothing$ ise, $\mathcal{F}$ koleksiyonuna 2-li kesişim özelliğine sahiptir denir [4].

2.1.6. Tanım

(X, d) bir metrik uzay ve Γ indis kümesi olsun. Herhangi $\Gamma_f \subset \Gamma$ sonlu alt kümesi için $\bigcap_{\alpha\in\Gamma_f} \bar{B}_\alpha \neq \varnothing$ iken, kapalı yuvarların herhangi $(\bar{B}_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ koleksiyonu için $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} \bar{B}_\alpha \neq \varnothing$ ise, X e yuvar kesişim özelliğini (ball intersection property) sağlıyor denir [11].

2.1.7. Tanım

(X, d) bir metrik uzay ve Γ indis kümesi olsun. $(\bar{B}_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ herhangi ikisi kesişen kapalı yuvarların bir koleksiyonu olmak üzere, $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} \bar{B}_\alpha \neq \varnothing$ ise, X e 2-li yuvar kesişim özelliğini (binary ball intersection property) sağlıyor denir [4].

2.1.8. Tanım

(X, d) bir metrik uzay ve Γ indis kümesi olsun. Herhangi $\alpha, \beta \in \Gamma$ ve $r_\alpha, r_\beta > 0$ için, $d(x_\alpha, x_\beta) \leq r_\alpha + r_\beta$ şartını sağlayan $\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ sayılarının ve $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ noktalarının (veya

X deki $\bar{B}(x_\alpha, r_\alpha)$ kapalı yuvarların) herhangi koleksiyonu için $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} \bar{B}(x_\alpha, r_\alpha) \neq \varnothing$ ise, (X, d) metrik uzayına hiperkonvekstir denir [11].

Hiperkonveks metrik uzayların bazı örneklerini vermeden önce aşağıdaki açıklama, önerme ve teoremlerin incelenmesi faydalı olacaktır.

2.1.9. Teorem

$C_1, C_2, ..., C_d \subset \mathbb{R}^n$, $n, d \in \mathbb{N}$ ve $d > n$ olmak üzere, $\{C_i\}_{i=1}^{d}$, $\mathbb{R}^n$ nin konveks alt kümelerinin sonlu bir koleksiyonu olsun. Bu koleksiyona ait kümelerden herhangi $(n+1)$ tanesi boştan farklı kesişime sahip ise, koleksiyona ait bütün kümeler boştan farklı kesişime sahiptir, yani $\bigcap_{i=1}^{d} C_i \neq \varnothing$ tur.

2.1.10. Teorem

$C_1, C_2, ..., C_n, ... \subset \mathbb{R}^n$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\mathbb{R}^n$ nin konveks ve kompakt alt kümelerinin sonsuz koleksiyonu olsun. Bu koleksiyona ait kümelerden herhangi $(n+1)$ tanesi boştan farklı kesişime sahip ise, koleksiyona ait bütün kümeler boştan farklı kesişime sahiptir, yani $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i \neq \varnothing$ tur.

Teorem 2.1.9 ve Teorem 2.1.10 literatürde sırasıyla Helly teoreminin sonlu versiyonu ve Helly teoreminin sonsuz versiyonu olarak geçmektedir. Helly teoreminin sonsuz versiyonunda $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ ailesine ait her bir kümenin konveks olmasının yanında kapalı ve sınırlı (kompakt) olması gerektiğine dikkat edilmelidir.

Not

Espinola ve Khamsi [11] Hahn-Banach teoreminin ispatlanmasında da kullanılan, Aronszajn ve Panitpacdi [4] nin literatüre kazandırdığı "hiperkonveks metrik uzay " kavramının da temelini oluşturan $\mathbb{R}$ reel doğrunun Önerme 2.1.11 deki özelliğini vermiştir. Açıktır ki, Önerme 2.1.11 Helly teoreminin sonsuz versiyonunun (bkz.Teorem 2.1.10) özel bir halidir.

2.1.11. Önerme

$\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$, $\mathbb{R}$ nin herhangi ikisi kesişen, kapalı ve sınırlı aralıklarının bir ailesi olsun. Bu durumda, $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha \neq \varnothing$ dir [24].

İspat

Kabul edelim ki $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha = \varnothing$ olsun. Kompaktlıktan,

$$\bigcap_{i=1}^{N+1} I_i = \varnothing \text{ iken } I = \bigcap_{i=1}^{N} I_i \neq \varnothing$$

olacak şekilde

$$\{I_1, I_2, \ .., \ I_{N+1}\} \subseteq \{I_\alpha\}$$

vardır. Böylece I ve I_{N+1}, $\mathbb{R}$ de iki ayrık, kapalı aralıktır. I ve I_{N+1} aralıkları arasından bir x noktası seçilsin. ($I\cup\ I_{N+1}$ kümesinin tümleyeni açık bir küme olduğundan, bahsedilen x noktası vardır.) Kabulden, orjinal ailenin herhangi iki üyesi kesiştiği için

$$x \in I_i \cap I_{N+1}, i = 1, 2, ..., N.$$

Bu durumda $x \in \bigcap_{i=1}^{N+1} I_i$ dir ve bu bir çelişkidir.

Not

$\mathbb{R}$ reel doğruda kapalı bir aralık aynı zamanda kapalı bir yuvardır. Gerçekten, $[a, b]$ aralığı, $\frac{a+b}{2}$ merkezli ve $\frac{b-a}{2}$ yarıçaplı bir kapalı yuvar yani, $[a, b] = \bar{B}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$ dir. O halde Önerme 2.1.11 den faydalanarak sırasıyla aşağıdaki iki özellik ve sonuç elde edilir.

(i) Γ indis kümesi olmak üzere, $\forall\alpha \in \Gamma$ için $I_\alpha = [a_\alpha, a_\beta] = \bar{B}(\frac{a_\alpha+a_\beta}{2}, \frac{a_\alpha-a_\beta}{2})$ olarak yazılabilir. $\frac{a_\alpha+a_\beta}{2}$ ve $\frac{a_\alpha-a_\beta}{2}$ sayılarısırasıyla x_α ve r_α olarak isimlendirilirse, Önerme 2.1.11 den, kapalı yuvarların herhangi ikisi kesişen bir $\left\{\bar{B}(x_\alpha, r_\alpha)\right\}_{\alpha\in\Gamma}$ ailesi için $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} \bar{B}(x_\alpha, r_\alpha) \neq \varnothing$ olur.

(ii) $\bar{B}(x_\alpha, r_\alpha)$ ve $\bar{B}(x_\beta, r_\beta)$, $\mathbb{R}$ de iki kapalı yuvar olsun. Bu durumda $\bar{B}(x_\alpha, r_\alpha) \cap \bar{B}(x_\beta, r_\beta) \neq \varnothing$ ancak ve ancak $d(x_\alpha, x_\beta) \leq r_\alpha + r_\beta$ dır. Gerçekten, $\alpha, \beta \in \Gamma$ olsun. $\bar{B}(x_\alpha, r_\alpha) \cap \bar{B}(x_\beta, r_\beta) \neq \varnothing$ ise $z \in \bar{B}(x_\alpha, r_\alpha) \cap \bar{B}(x_\beta, r_\beta)$ olacak şekilde $z \in X$ vardır. Bu durumda $d(x_\alpha, z) \leq r_\alpha$ ve $d(x_\beta, z) \leq r_\beta$ dir ve üçgen eşitsizliğinden $d(x_\alpha, x_\beta) \leq r_\alpha + r_\beta$ dır. Tersine keyfi $\alpha, \beta \in \Gamma$ için $d(x_\alpha, x_\beta) \leq r_\alpha + r_\beta$ iken, özel

olarak $z = \frac{x_\alpha . r_\beta + x_\beta . r_\alpha}{r_\alpha + r_\beta}$ seçilirse, $d(x_\alpha, z) \leq r_\alpha$ ve $d(x_\beta, z) \leq r_\beta$, yani $z \in \bar{B}(x_\alpha, r_\alpha) \cap \bar{B}(x_\beta, r_\beta)$ ve böylece $\bar{B}(x_\alpha, r_\alpha) \cap \bar{B}(x_\beta, r_\beta) \neq \varnothing$ elde edilir.

(iii) Sonuç olarak (i)-(ii) den $\left\{\bar{B}(x_\alpha, r_\alpha)\right\}_{\alpha \in \Gamma}$, $(\mathbb{R}, d)$ uzayında herhangi ikisi

$d(x_\alpha, x_\beta) \leq r_\alpha + r_\beta$

şartını sağlayan kapalı yuvarların herhangi bir ailesi iken $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} \bar{B}(x_\alpha, r_\alpha) \neq \varnothing$ elde edilir.

Önerme 2.1.11 deki çıkarımlar l_∞ uzayına genişletilebilir.

2.1.12. Teorem

$\left\{\bar{B}_\alpha\right\}_{\alpha \in \Gamma}$ ailesi l_∞ da herhangi ikisi kesişen kapalı yuvarların bir ailesi olsun. Bu durumda $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} \bar{B}_\alpha \neq \varnothing$ olur [24].

İspat

$L_n = \{x = (x_1, x_2, ...) \in l_\infty : i \neq n \text{ iken } x_i = 0\}$ olsun. Bu durumda, L_n kümesi $\mathbb{R}$ nin izometrik bir kopyasıdır ve $\left\{\bar{B}_\alpha \cap L_n\right\}$ ailesi, L_n nin herhangi ikisi kesişen kapalı aralıklarının bir ailesidir. Böylece her bir $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\bigcap_{\alpha \in \Gamma} (L_n \cap \bar{B}_\alpha) \neq \varnothing$$

dir.

$$x_n \in \bigcap_{\alpha \in \Gamma} (L_n \cap \bar{B}_\alpha), \ n = 1, 2, ...$$

olacak şekilde x_n seçelim. $x = (x_1, x_2, ...)$ olduğundan $x \in \bigcap_{\alpha \in \Gamma} \bar{B}_\alpha$ elde edilir.

2.1.13. Önerme

l_∞ uzayında herhangi iki kapalı yuvar $\bar{B}(x_\alpha, r_\alpha)$ ve $\bar{B}(x_\beta, r_\beta)$ olsun. Bu durumda, $\bar{B}(x_\alpha, r_\alpha) \cap \bar{B}(x_\beta, r_\beta) \neq \varnothing$ dır ancak ve ancak $d_\infty(x_\alpha, x_\beta) \leq r_\alpha + r_\beta$ dır [24].

İspat

$\bar{B}(x_\alpha, r_\alpha) \cap \bar{B}(x_\beta, r_\beta) \neq \varnothing$ olsun. Bu durumda, $z \in \bar{B}(x_\alpha, r_\alpha) \cap \bar{B}(x_\beta, r_\beta)$ yani $d_\infty(x_\alpha, z) \leq r_\alpha$ ve $d_\infty(x_\beta, z) \leq r_\beta$ olacak şekilde bir z elemanı vardır. Metrik uzaylar için üçgen eşitsizliğinden, $d_\infty(x_\alpha, x_\beta) \leq d_\infty(x_\alpha, z) + d_\infty(x_\beta, z) \leq r_\alpha + r_\beta$ elde edilir.

Tersine $d_\infty(x_\alpha, x_\beta) \leq r_\alpha + r_\beta$ olduğunu kabul edelim. $x_\alpha = (x_1, x_2, ...)$ ve $x_\beta = (y_1, y_2, ...)$ ise $i = 1, 2, ...$ için

$$|x_i - y_i| \leq r_\alpha + r_\beta$$

dır. $i = 1, 2, ...$ için $z_i = \frac{r_\beta x_i + r_\alpha y_i}{r_\alpha + r_\beta}$ alınırsa, $d_\infty(x_\alpha, z) \leq r_\alpha$ ve $d_\infty(x_\beta, z) \leq r_\beta$ (veya $z \in \bar{B}(x_\alpha, r_\alpha) \cap \bar{B}(x_\beta, r_\beta)$) olmak üzere, $|x_i - z_i| \leq r_\alpha$ ve $|z_i - y_i| \leq r_\beta$ dir.

Teorem 2.1.12 ve Önerme 2.1.13 birleştirildiğinde Teorem 2.1.14 elde edilir.

2.1.14. Teorem

$\left\{\bar{B}(x_\alpha, r_\alpha)\right\}_{\alpha \in \Gamma}$, l_∞ uzayında herhangi ikisi

$$d_\infty(x_\alpha, x_\beta) \leq r_\alpha + r_\beta$$

şartını sağlayan kapalı yuvarların herhangi bir ailesi olsun. Bu durumda, $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} \bar{B}(x_\alpha, r_\alpha) \neq \varnothing$ dır [11].

Örnek

Alışılmış metrikle birlikte $\mathbb{R}$ hiperkonvekstir [11].

Örnek

Sonsuz boyutlu l_∞ Banach uzayı hiperkonvekstir [11].

2.1.15. Tanım

(X, d) bir metrik uzay, Γ indis kümesi ve $K \subset \Gamma$ olsun. Eğer X, $card(K) < m$ olacak şekilde yoğun bir alt kümeye sahipse, X e m- ayrılabilirdir denir [4].

2.1.16. Tanım

(X, d) bir metrik uzay olsun. $\forall x_1, x_2, x_3 \in X$ için,

$d(x_1, x_3) \leq \text{maks}\{d(x_1, x_2), d(x_2, x_3)\}$

şartı sağlanıyorsa, (X, d) ye ultrametrik (non-Archimedean) uzay denir [24].

2.2. Fuzzy Metrik Uzaylar

2.2.1. Tanım

$* : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ ikili işlemi, $\forall a, b, c, d \in [0,1]$ için,
(i) $*$ birleşmeli ve değişmeli,
(ii) $*$ sürekli,
(iii) $\forall a \in [0,1]$ için $a * 1 = a$,
(iv) $a \leq b$ ve $c \leq d$ iken $a * c \leq b * d$
şartlarını sağlıyorsa, $*$ işlemine sürekli t-norm denir [38].

Örnek

$\forall a, b \in [0,1]$ için, $a * b = \min\{a, b\}$, $a * b = ab$ ve $a * b = \text{maks}\{a + b - 1, 0\}$ biçiminde tanımlı ikili işlemler sürekli t-normdur.

Not

$*$ sürekli t-normu aşağıdaki şartları sağlar:
$i)$ Herhangi $r_1, r_2 \in (0,1)$, $r_1 > r_2$ için $\exists r_3 \in (0,1)$ var $\ni r_1 * r_3 \geq r_2$.
$ii)$ Herhangi $r_4 \in (0,1)$ için $\exists r_5 \in (0,1)$ var $\ni r_5 * r_5 \geq r_4$ [12].

2.2.2. Tanım

$X \neq \varnothing$ herhangi bir küme, $*$ sürekli t-norm olsun ve $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde tanımlı M fuzzy kümesi $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall t, s \in (0, \infty)$ için aşağıdaki şartları sağlasın:
$(FM\text{-}1)$ $M(x, y, t) > 0$,
$(FM\text{-}2)$ $M(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y$,
$(FM\text{-}3)$ $M(x, y, t) = M(y, x, t)$,
$(FM\text{-}4)$ $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$,

$(FM\text{-}5)$ $M(x,y,.):(0,\infty)\to[0,1]$ sürekli.
Bu durumda $(M,*)$ ikilisine X üzerinde fuzzy metrik ve $(X,M,*)$ üçlüsüne fuzzy metrik uzay denir [12].

Burada $M(x,y,t)$ dönüşümü x ile y nin t ye göre birbirine yakın olma derecesidir.

2.2.3. Önerme

$(X,M,*)$ bir fuzzy metrik uzay olsun. Bu durumda, M fonksiyonu $X\times X\times(0,\infty)$ üzerinde sürekli bir fonksiyondur [34].

2.2.4. Tanım

$(X,M,*)$ bir fuzzy metrik uzay, $r\in(0,1)$, $t>0$ ve $x\in X$ olsun. Bu durumda

$B_M(x,r,t)=\{y\in X: M(x,y,t)>1-r\}$
$\bar{B}_M(x,r,t)=\{y\in X: M(x,y,t)\geq 1-r\}$

kümelerine sırasıyla x merkezli, r yarıçaplı t ye bağlı açık yuvar ve kapalı yuvar denir [12].

2.2.5. Teorem

$(X,M,*)$ fuzzy metrik uzayında her açık yuvar açık bir küme ve her kapalı yuvar kapalı bir kümedir [12].

Not

$(X,M,*)$ bir fuzzy metrik uzay olsun. Bu durumda,

$\tau_M=\{A\subset X:\forall x\in A,\exists t>0$ ve $r\in(0,1)$ var $\ni B_M(x,r,t)\subset A\}$

olarak tanımlı aile X üzerinde bir topolojidir [12].

Not

(i) X üzerindeki her $(M,*)$ fuzzy metriği, $\{B_M(x,r,t): x\in X,\ r\in(0,1),\ t\in(0,\infty)\}$

formundaki açık kümelerin ailesini taban kabul eden bir τ_M topolojisi üretir.

(ii) $\left\{B_M(x, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) : n = 1, 2, ...\right\}$ ailesi x in yerel tabanı olduğu için τ_M topolojisi birinci sayılabilirdir [12].

2.2.6. Tanım

$(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olsun.

(i) Her $\varepsilon > 0$ ve her $t > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ var $\ni \forall m, n \geq n_0$ için $M(x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon$ ise, $\{x_n\} \subset X$ dizisine Cauchy dizisi denir.

(ii) Her Cauchy dizisi τ_M topolojisine göre yakınsak ise, $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayına tamdır denir [12].

2.2.7. Tanım

$(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olsun. $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kümelerinin bir koleksiyonuna fuzzy sıfır çapa sahiptir denir ancak ve ancak $r \in (0, 1)$, $t > 0$ olmak üzere her bir $r, t > 0$ çifti için, $\forall x, y \in F_n$ için $M(x, y, t) > 1 - r$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ vardır [14].

Not

$(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayının boştan farklı bir F alt kümesi fuzzy sıfır çapa sahiptir ancak ve ancak F tek elemanlı bir kümedir [14].

2.2.8. Teorem

$(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayı tamdır ancak ve ancak fuzzy sıfır çapla birlikte boştan farklı kapalı kümelerin iç içe azalan her $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi boştan farklı kesişime sahiptir yani; $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$ dir. Ayrıca $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ şartını sağlayan tek bir $x \in X$ vardır [14].

2.2.9. Tanım

$(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olsun. A, X in boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere $\delta_A(t) : (0, \infty) \to [0, 1]$ dönüşümü $\delta_A(t) = \inf_{x,y\in A} \sup_{\varepsilon<t} M(x, y, \varepsilon)$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda, $\delta_A = \sup_{t>0} \delta_A(t)$ sabitine A kümesinin fuzzy çapı denir [21].

2.3. Sezgisel Fuzzy Metrik Uzaylar

2.3.1. Tanım

$\diamondsuit : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ ikili işlemi, $\forall a, b, c, d \in [0,1]$ için,
(i) $\diamondsuit$ birleşmeli ve değişmeli,
(ii) $\diamondsuit$ sürekli,
(iii) $\forall a \in [0,1]$ için $a \diamondsuit 0 = a$,
(iv) $a \leq b$ ve $c \leq d$ iken $a \diamondsuit c \leq b \diamondsuit d$
şartlarını sağlıyorsa, $\diamondsuit$ işlemine sürekli t-conorm denir [38].

Not

$\forall a, b \in [0,1]$ için, $a \diamondsuit b = \text{maks}\{a, b\}$, $a \diamondsuit b = a + b - ab$, $a \diamondsuit b = \min\{a + b, 1\}$ biçiminde tanımlı ikili işlemler sürekli t-conormdur.

Not

$\diamondsuit$ ikili işlemi aşağıdaki şartları sağlar:
(i) Herhangi $r_1, r_2 \in (0,1)$, $r_1 > r_2$ için $\exists r_3 \in (0,1)$ var $\ni r_1 \geq r_2 \diamondsuit r_3$.
(ii) Herhangi $r_4 \in (0,1)$ için $\exists r_5 \in (0,1)$ var $\ni r_5 \diamondsuit r_5 \leq r_4$ [30].

2.3.2. Tanım

$X \neq \varnothing$ herhangi bir küme, $*$ sürekli t-norm, $\diamondsuit$ sürekli t-conorm olsun ve $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde tanımlı M ve N fuzzy kümeleri $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall t, s \in (0, \infty)$ için aşağıdaki şartları sağlasın:
$(IFM\text{-}1)$ $M(x, y, t) + N(x, y, t) \leq 1$,
$(IFM\text{-}2)$ $M(x, y, t) > 0$,
$(IFM\text{-}3)$ $M(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y$,
$(IFM\text{-}4)$ $M(x, y, t) = M(y, x, t)$,
$(IFM\text{-}5)$ $M(x, z, t + s) \geq M(x, y, t) * M(y, z, s)$,
$(IFM\text{-}6)$ $M(x, y, .) : (0, \infty) \to [0,1]$ sürekli,
$(IFM\text{-}7)$ $N(x, y, t) > 0$,
$(IFM\text{-}8)$ $N(x, y, t) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
$(IFM\text{-}9)$ $N(x, y, t) = N(y, x, t)$,
$(IFM\text{-}10)$ $N(x, z, t + s) \leq N(x, y, t) \diamondsuit N(y, z, s)$,
$(IFM\text{-}11)$ $N(x, y, .) : (0, \infty) \to [0,1]$ sürekli.
Bu durumda $(M, N, *, \diamondsuit)$ dörtlüsüne X üzerinde sezgisel fuzzy metrik ve

$(X, M, N, *, \diamondsuit)$ beşlisine sezgisel fuzzy metrik uzay denir [30].

Burada $M(x, y, t)$ ve $N(x, y, t)$ fonksiyonları sırasıyla x ile y nin t ye göre birbirine yakın olma ve yakın olmama derecesidir.

Örnek

(X, d) bir metrik uzay olsun. $\forall a, b \in [0, 1]$ için $a * b = ab$, $a \diamondsuit b = \min\{1, a + b\}$ ve $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde tanımlı M_d, N_d fuzzy kümeleri $\forall h, k, m, n \in \mathbb{R}^+$ için

$$M_d(x, y, t) = \frac{ht^n}{ht^n + md(x, y)} \text{ ve } N_d(x, y, t) = \frac{d(x, y)}{kt^n + md(x, y)}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $(X, M, N, *, \diamondsuit)$ bir sezgisel fuzzy metrik uzaydır.

Bu örnekte bahsedilen M_d, N_d fuzzy kümeleri aynı zamanda $a * b = \min\{a, b\}$ sürekli t-normu ve $a \diamondsuit b = \text{maks}\{a, b\}$ sürekli t-conormu ile de X üzerinde bir sezgisel fuzzy metrik olur. Ayrıca özel olarak $h, k, m, n = 1$ alınırsa

$$M_d(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)} \text{ ve } N_d(x, y, t) = \frac{d(x, y)}{t + d(x, y)}$$

elde edilir. Bu durumda $(M_d, N_d, *, \diamondsuit)$ ye bir d metriği tarafından üretilen standart sezgisel fuzzy metrik denir [12].

Not

Her $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayı $(X, M, 1 - M, *, \diamondsuit)$ formunda sezgisel fuzzy metrik uzaydır.Burada $\forall a, b \in [0, 1]$ için $a \diamondsuit b = 1 - ((1 - a) * (1 - b))$ olarak tanımlanır [26]. Yani $*$ sürekli t-normundan $a \diamondsuit b = 1 - ((1 - a) * (1 - b))$ eşitliği yardımıyla bir sürekli $\diamondsuit$ t-conormu tanımlamak mümkündür. Bunun için $a \diamondsuit b = 1 - [(1 - a) * (1 - b)]$ ifadesinin t-conorm şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir.

(i) $*$ değişmeli ve birleşmeli olduğundan sırasıyla,

$$\begin{aligned} a \diamondsuit b &= 1 - [(1 - a) * (1 - b)] \\ &= 1 - [(1 - b) * (1 - a)] \\ &= b \diamondsuit a \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(a\diamondsuit b)\diamondsuit c &= 1-[(1-(a\diamondsuit b))*(1-c)]\\ &= 1-[1-[1-[(1-a)*(1-b)]]]\\ &= 1-[(1-a)*(1-b)*(1-c)]\\ &= 1-((1-a)*[(1-b)*(1-c)])\\ &= 1-((1-a)*[1-b\diamondsuit c])\\ &= a\diamondsuit(b\diamondsuit c).\end{aligned}$$

(ii) $*$ sürekli olduğundan $a\diamondsuit b = 1-[(1-a)*(1-b)]$ biçiminde tanımlı $\diamondsuit$ dönüşümü de süreklidir.

(iii) $\forall a \in [0,1]$ için $a*1=a$ olduğundan,

$$\begin{aligned}a\diamondsuit 0 &= 1-[(1-a)*(1-0)]\\ &= 1-[(1-a)*1]\\ &= 1-(1-a)=a.\end{aligned}$$

(iv) $a,b,c,d \in [0,1]$ ve $a\leq b$ ve $c\leq d$ olsun. Bu durumda, $1-b\leq 1-a$ ve $1-d\leq 1-c$ dir. $*$ t-normunun özelliğinden $(1-b)*(1-d)\leq(1-a)*(1-c)$ dir. O halde, her $a,b,c,d\in[0,1]$ için $a\leq b$ ve $c\leq d$ iken

$$\begin{aligned}a\diamondsuit c &= 1-[(1-a)*(1-c)]\\ &\leq 1-[(1-b)*(1-d)]\\ &= b\diamondsuit d.\end{aligned}$$

Teorem 2.3.4 ve beşinci bölümde kullanılan fonksiyonlar için Tanım 2.3.3 dikkate alınacaktır.

2.3.3. Tanım

$I\subset\mathbb{R}$ bir aralık ve $f: I\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer,

$\forall x_1,x_2\in I$ için $x_1\leq x_2 \implies f(x_1)\leq f(x_2)$ ise, f fonksiyonuna I üzerinde artan (azalmayan veya monoton artan);

$\forall x_1, x_2 \in I$ için $x_1 \leq x_2 \implies f(x_2) \leq f(x_1)$ ise, f fonksiyonuna I üzerinde azalan (artmayan veya monoton azalan);

$\forall x_1, x_2 \in I$ için $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$ ise, f fonksiyonuna I üzerinde kesin artan;

$\forall x_1, x_2 \in I$ için $x_1 < x_2 \implies f(x_2) < f(x_1)$ ise, f fonksiyonuna I üzerinde kesin azalan fonksiyon denir [3].

2.3.4. Teorem

$M(x, y, .)$ artan ve $N(x, y, .)$ azalandır [30].

İspat

$M(x, y, .)$ artan ise $t, s \in (0, \infty)$ olmak üzere, $t < s$ için $M(x, y, t) \leq M(x, y, s)$ dir. Kabul edelim ki $M(x, y, .)$ kesin azalan yani; $t < s$ için $M(x, y, t) > M(x, y, s)$ olsun. Bu durumda (IFM-5) şartından,

$$M(x, y, t) * M(y, y, s - t) \leq M(x, y, s) < M(x, y, t)$$

olur. $M(y, y, s-t) = 1$ ve $M(x, y, t)*1 = M(x, y, t)$ olduğundan, $M(x, y, t) < M(x, y, t)$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde $M(x, y, .)$ artandır.

$N(x, y, .)$ azalan ise $t, s \in (0, \infty)$ olmak üzere, $t < s$ için $N(x, y, s) \leq N(x, y, t)$ dir. Kabul edelim ki $N(x, y, .)$ kesin artan yani; $t < s$ için $N(x, y, t) < N(x, y, s)$ olsun. Bu durumda (IFM-10) şartından,

$$N(x, y, t) \diamondsuit N(y, y, s - t) \geq N(x, y, s) > N(x, y, t)$$

olur. $N(y, y, s - t) = 0$ ve $N(x, y, t) \diamondsuit 0 = N(x, y, t)$ olduğundan, $N(x, y, t) > N(x, y, t)$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde $N(x, y, .)$ azalandır.

2.3.5. Tanım

$(X, M, N, *, \diamondsuit)$ sezgisel fuzzy metrik uzay, $r \in (0, 1)$, $t > 0$ ve $x \in X$ olsun. Bu durumda

$$B_{(M,N)}(x, r, t) = \{y \in X : M(x, y, t) > 1 - r, N(x, y, t) < r\}$$

kümesine x merkezli, r yarıçaplı, t ye bağlı açık yuvar denir [30].

2.3.6. Tanım

$(X, M, N, *, \diamondsuit)$ sezgisel fuzzy metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer her $x \in A$ için $x \in B_{(M,N)}(x, r, t) \subset A$ olacak şekilde $B_{(M,N)}(x, r, t)$ açık yuvarı varsa, A ya $(M, N, *, \diamondsuit)$ ye göre açıktır denir [30].

2.3.7. Teorem

$(X, M, N, *, \diamondsuit)$ sezgisel fuzzy metrik uzayında her $B_{(M,N)}(x, r, t)$ açık yuvarı açık kümedir [30].

Not

$(X, M, N, *, \diamondsuit)$ sezgisel fuzzy metrik uzay olsun. Bu durumda,

$$\tau_{(M,N)} = \left\{A \subset X : \forall x \in A, \exists t > 0 \text{ ve } r \in (0,1) \text{ var } \ni B_{(M,N)}(x, r, t) \subset A\right\}$$

olarak tanımlı aile X üzerinde bir topolojidir [30].

Not

$(X, M, N, *, \diamondsuit)$ sezgisel fuzzy metrik uzay ve $(X, \tau_{(M,N)})$ topolojik uzay olmak üzere,

(i) $\left\{B_{(M,N)}(x, r, t) : x \in X, r \in (0,1), t > 0\right\}$ ailesi $\tau_{(M,N)}$ için bir tabandır.

(ii) $\left\{B_{(M,N)}(x, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) : n = 1, 2, ...\right\}$ ailesi $\forall x \in X$ noktası için yerel taban olduğundan $(X, \tau_{(M,N)})$ uzayı birinci sayılabilirdir [30].

2.3.8. Teorem

Her sezgisel fuzzy metrik uzay Hausdorff uzaydır [30].

2.3.9. Tanım

$(X, M, N, *, \diamondsuit)$ bir sezgisel fuzzy metrik uzay olsun.

(i) Her $\varepsilon > 0$ ve her $t > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ var $\ni \forall m, n \geq n_0$ için $M(x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon$ ve $N(x_n, x_m, t) < \varepsilon$ ise, $\{x_n\} \subset X$ dizisine Cauchy dizisi denir.

(ii) Her Cauchy dizisi $\tau_{(M,N)}$ topolojisine göre yakınsak ise, $(X, M, N, *, \diamondsuit)$ sezgisel fuzzy metrik uzayına tamdır denir [30].

Örnek

$X = (0, 1]$ ve X üzerinde bir d metriği $\forall x, y \in (0, 1]$ için $d(x, y) = |x - y|$ olsun. $\forall a, b \in [0, 1]$ için $a * b = \min\{a, b\}$ t-normu ve $a \diamondsuit b = \text{maks}\{a, b\}$ t-conormu ile birlikte, X üzerinde

$$M(x, y, t) = \frac{t}{t + |x - y|}, \quad N(x, y, t) = \frac{|x - y|}{t + |x - y|}$$

biçiminde tanımlı standart sezgisel fuzzy metriğini dikkate alalım. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $(X, M, N, *, \diamondsuit)$ sezgisel fuzzy metrik uzayında bir Cauchy dizisi olmasına rağmen, bu uzayda yakınsak olmadığından $(X, M, N, *, \diamondsuit)$ tam olmayan bir sezgisel fuzzy metrik uzaydır [36].

3. FUZZY METRİK UZAYLARDA KONVEKSLİK

Menger [27] ve Takahashi [42] nin konveks metrik uzay kavramlarını farklı yollarla tanımlamalarından sonra, başta sabit nokta teorisi çalışmaları olmak üzere, metrik uzaylarda yapılan bir çok çalışma fuzzy metrik uzaylara taşınmıştır [43, 46]. Bu bölümde, Thanithamil [43] ile Vosoughi ve Hosseini [46] tarafından, fuzzy metrik uzayların konveksliği üzerine verilmiş olan tanımlardan farklı olarak, kapalı yuvarlar yardımıyla, George ve Veeremani [12] anlamında fuzzy metrik uzay tanımı kullanılarak "konveks fuzzy metrik uzay" tanımı verilmiş, uzayın bazı özellikleri incelenmiş ve uzay örneklendirilmiştir. Ayrıca, fuzzy metrik uzaylarda vermiş olduğumuz bu yeni tanımın daha önce verilmiş olan [43, 46] diğer tanımlardan farkı incelenmiştir.
Bu bölüm boyunca, aksi belirtilmediği sürece (konveks küme veya konveks yapı), konveks fuzzy metrik uzay ve uzayın konveks alt kümesi kavramlarında geçen "konvekslik" ile uzayın veya alt kümenin fuzzy metriksel olarak konveksliği kastedilecektir. Ayrıca bu bölümde, Thanithamil [43] ile Vosoughi ve Hosseini [46] nin sırasıyla "fuzzy konveks metrik uzay" ve "metriksel konveks fuzzy metrik uzay" olarak tanımladıkları ve literatürde bahsedilen isimlerle geçen kavramların her ikisi için de "konveks fuzzy metrik uzay" ifadesi kullanılacaktır. Çünkü her iki tanım da birbirinden farklı olmalarına rağmen, bir fuzzy metrik uzayın fuzzy metriksel anlamda konveksliği ile ilgilidir.

3.1. Konveks Fuzzy Metrik Uzaylar

Kapalı yuvarlar yardımıyla tanımladığımız konveks fuzzy metrik uzay tanımını vermeden önce tanımın daha anlaşılabilir olması için Önerme 3.1.1 i verelim.

3.1.1. Önerme

$(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay, $r_1, r_2 \in (0,1)$, $t_1, t_2 \in (0, \infty)$ ve $x_1, x_2 \in X$ olmak üzere; $\bar{B}_M(x_1, r_1, t_1) \cap \bar{B}_M(x_2, r_2, t_2) \neq \varnothing$ şartını sağlayan $x_1, x_2 \in X$ ve her bir $r_1, t_1 > 0$, $r_2, t_2 > 0$ çifti için $M(x_1, x_2, t_1 + t_2) \geq (1 - r_1) * (1 - r_2)$ eşitsizliği sağlanır.

İspat

$x_1, x_2 \in X$, $r_1, r_2 \in (0,1)$ ve $t_1, t_2 \in (0, \infty)$ olmak üzere, $r_1, t_1 > 0$ ve $r_2, t_2 > 0$ çifti için

$\bar{B}_M(x_1, r_1, t_1) \cap \bar{B}_M(x_2, r_2, t_2) \neq \varnothing$

olsun. Bu durumda $z \in X$ var öyle ki;

$$
\begin{aligned}
& z \in \bar{B}_M(x_1, r_1, t_1) \cap \bar{B}_M(x_2, r_2, t_2) \\
& \quad \Longrightarrow \; z \in \bar{B}_M(x_1, r_1, t_1) \text{ ve } z \in \bar{B}_M(x_2, r_2, t_2) \\
& \quad \Longrightarrow \; M(x_1, z, t_1) \geq (1 - r_1) \text{ ve } M(x_2, z, t_2) \geq (1 - r_2)
\end{aligned}
$$

dir. Tanım 2.2.1-(iv) den $M(x_1, z, t_1) * M(x_2, z, t_2) \geq (1 - r_1) * (1 - r_2)$ ve (FM-4) şartından $M(x_1, x_2, t_1 + t_2) \geq (1 - r_1) * (1 - r_2)$ elde edilir.

Önerme 3.1.1 in tersi doğru olmayabilir. Aşağıdaki örnek, bir $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayında $M(x_1, x_2, t_1 + t_2) \geq (1 - r_1) * (1 - r_2)$ eşitsizliği varken $\bar{B}_M(x_1, r_1, t_1) \cap \bar{B}_M(x_2, r_2, t_2) \neq \varnothing$ eşitsizliğinin doğru olmayabileceğini gösteren bir örnektir.

Örnek

$X = \mathbb{N}$ olsun. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times (0, \infty)$ üzerinde

$$M(x, y, t) = \frac{\min\{x, y\} + t}{\text{maks}\{x, y\} + t}$$

olarak tanımlı M dönüşümü, $a * b = a.b$ sürekli t-normu ile bir fuzzy metrik uzaydır. Eğer $t_1 = 1$, $t_2 = 1$, $r_1 = 0.3$, $r_2 = 0.5$, $x_1 = 3$ ve $x_2 = 10$ olarak seçilirse $M(x_1, x_2, t_1 + t_2) \geq (1 - r_1) * (1 - r_2)$ eşitsizliği sağlanır fakat $\bar{B}_M(3, 0.3, 1) \cap \bar{B}_M(10, 0.5, 1) = \varnothing$ elde edilir yani $M(x_1, z, t_1) \geq (1 - r_1)$ ve $M(x_2, z, t_2) \geq (1 - r_2)$ olacak şekilde herhangi $z \in X$ noktası mevcut değildir.

Sonuç olarak ; Önerme 3.1.1 in tersinin de doğru olduğu durumlar için Tanım 3.1.2 yi verebiliriz.

3.1.2. Tanım

$(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay ve $r_1, r_2 \in (0, 1)$, $t_1, t_2 \in (0, \infty)$ olsun. $M(x_1, x_2, t_1 + t_2) \geq (1 - r_1) * (1 - r_2)$ şartını sağlayan herhangi $x_1, x_2 \in X$ ve $r_1, t_1 > 0$, $r_2, t_2 > 0$ çiftleri için,

$M(x_1, z, t_1) \geq (1 - r_1)$ ve $M(x_2, z, t_2) \geq (1 - r_2)$

(veya buna denk olarak $z \in \bar{B}_M(x_1, r_1, t_1) \cap \bar{B}_M(x_2, r_2, t_2)$) olacak şekilde $z \in X$ varsa

$(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayına konvekstir denir.

Örnek

(X, d) bir konveks metrik uzay ve $t > 0$ olsun. $a * b = a.b$ olmak üzere, $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde;

$$M(x, y, t) = e^{\frac{-d(x,y)}{t}}$$

biçiminde tanımlı M fonksiyonu X üzerinde bir fuzzy metriktir. Bu şartlar altında $(X, M, *)$ bir konveks fuzzy metrik uzaydır.

Çözüm

(X, d) konveks olsun bu durumda; $d(x_1, x_2) \leq \alpha + \beta$ şartını sağlayan $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\alpha, \beta > 0$ için, $d(x_1, z) \leq \alpha$ ve $d(x_2, z) \leq \beta$ (veya buna denk olarak $z \in \bar{B}(x_1, \alpha) \cap \bar{B}(x_2, \beta)$) olacak şekilde $z \in X$ vardır. $\alpha, \beta > 0$ sayıları $\alpha = -t_1 \ln(1 - r_1)$ ve $\beta = -t_2 \ln(1 - r_2)$ olarak seçilirse, $M(x_1, x_2, t_1 + t_2) \geq (1 - r_1) * (1 - r_2)$ eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $r_1, r_2 \in (0, 1)$ dir. (X, d) nin konveksliğinden,

$$\begin{aligned} d(x_1, z) \leq -t_1 \ln(1 - r_1) \text{ ve } d(x_2, z) &\leq -t_2 \ln(1 - r_2) \\ \implies -d(x_1, z) &\geq t_1 \ln(1 - r_1) \text{ ve } -d(x_2, z) \geq t_2 \ln(1 - r_2) \\ \implies e^{-d(x_1,z)} &\geq e^{t_1 \ln(1-r_1)} \text{ ve } e^{-d(x_2,z)} \geq e^{t_2 \ln(1-r_2)} \\ \implies e^{\frac{-d(x_1,z)}{t_1}} &\geq (1 - r_1) \text{ ve } e^{\frac{-d(x_2,z)}{t_2}} \geq (1 - r_2) \\ \implies M(x_1, z, t_1) &\geq (1 - r_1) \text{ ve } M(x_2, z, t_2) \geq (1 - r_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $z \in \bar{B}_M(x_1, r_1, t_1) \cap \bar{B}_M(x_2, r_2, t_2)$ olacak şekilde $z \in X$ vardır ve $(X, M, *)$ konvekstir.

3.1.3. Teorem

d, X üzerinde bir metrik ve M_d, $a * b = \min\{a, b\}$ ile $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde

$$M_d(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$$

biçiminde tanımlı standart fuzzy metrik olsun. Bu durumda, (X, d) konveks metrik

uzaydır ancak ve ancak $(X, M_d, *)$ konveks fuzzy metrik uzaydır.

İspat

(X, d) konveks olsun. Bu durumda; $d(x_1, x_2) \leq \alpha + \beta$ şartını sağlayan $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\alpha, \beta > 0$ için, $d(x_1, z) \leq \alpha$ ve $d(x_2, z) \leq \beta$ (veya buna denk olarak $z \in \bar{B}(x_1, \alpha) \cap \bar{B}(x_2, \beta)$) olacak şekilde $z \in X$ vardır. $\alpha, \beta > 0$ sayıları $\alpha = \frac{t_1 r_1}{1-r_1}$ ve $\beta = \frac{t_2 r_2}{1-r_2}$ olarak seçilirse, $M_d(x_1, x_2, t_1 + t_2) \geq (1 - r_1) * (1 - r_2)$ eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $r_1, r_2 \in (0, 1)$ dir. (X, d) nin konveksliğinden;

$$\begin{aligned} d(x_1, z) \quad &\leq \quad \frac{t_1 r_1}{1 - r_1} \text{ ve } d(x_2, z) \leq \frac{t_2 r_2}{1 - r_2} \\ &\Longrightarrow \quad t_1 + d(x_1, z) \leq \frac{t_1}{1 - r_1} \text{ ve } t_2 + d(x_2, z) \leq \frac{t_2}{1 - r_2} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{t_1}{t_1 + d(x_1, z)} \geq 1 - r_1 \text{ ve } \frac{t_2}{t_2 + d(x_2, z)} \geq 1 - r_2 \\ &\Longrightarrow \quad M_d(x_1, z, t_1) \geq (1 - r_1) \text{ ve } M_d(x_2, z, t_2) \geq (1 - r_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $z \in \bar{B}_M(x_1, r_1, t_1) \cap \bar{B}_M(x_2, r_2, t_2)$ olacak şekilde $z \in X$ var ve $(X, M_d, *)$ konvekstir.

Tersine $(X, M_d, *)$ konveks olsun bu durumda; $M_d(x_1, x_2, t_1 + t_2) \geq (1 - r_1) * (1 - r_2)$ şartını sağlayan $x_1, x_2 \in X$, $r_1, t_1 > 0$ ve $r_2, t_2 > 0$ çifti için, $M_d(x_1, z, t_1) \geq (1 - r_1)$ ve $M_d(x_2, z, t_2) \geq (1 - r_2)$ olacak şekilde $z \in X$ vardır. Özel olarak $r_1, r_2 \in (0, 1)$ sayıları $r_1 = \frac{\alpha}{t_1 + \alpha}$ ve $r_2 = \frac{\beta}{t_2 + \beta}$ olacak şekilde seçilirse $\alpha, \beta > 0$ dır. $(X, M_d, *)$ ın konveksliğinden,

$$\begin{aligned} M_d(x_1, z, t_1) \quad &\geq \quad 1 - \frac{\alpha}{t_1 + \alpha} \text{ ve } M_d(x_2, z, t_2) \geq 1 - \frac{\beta}{t_2 + \beta} \\ &\Longrightarrow \quad M_d(x_1, z, t_1) \geq \frac{t_1}{t_1 + \alpha} \text{ ve } M_d(x_2, z, t_2) \geq \frac{t_2}{t_2 + \beta} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{t_1}{t_1 + d(x_1, z)} \geq \frac{t_1}{t_1 + \alpha} \text{ ve } \frac{t_2}{t_2 + d(x_2, z)} \geq \frac{t_2}{t_2 + \beta} \\ &\Longrightarrow \quad d(x_1, z) \leq \alpha \text{ ve } d(x_2, z) \leq \beta \end{aligned}$$

elde edilir, yani $z \in \bar{B}(x_1, \alpha) \cap \bar{B}(x_2, \beta)$ olacak şekilde $z \in X$ vardır. Böylece (X, d) konvekstir.

Not

Tanım 3.1.2 dikkate alındığında, konveks bir $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayının konveks alt kümelerin kesişimleri konveks olmayabilir. Bunun için aşağıdaki örnek verilmiştir.

Örnek

$(\mathbb{R}^2, d)$ alışılmış metrik uzay olsun. $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere, $\mathbb{R}^2$ de $(0, 0)$ merkezli, $r = 1$ yarıçaplı $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ birim çemberi ve $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$ üzerinde tanımlı $M_d(x, y, t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$ standart fuzzy metriğini alalım. $(\mathbb{R}^2, d)$ metrik uzayının $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sqrt{1 - x^2}\right\}$ ve $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\sqrt{1 - x^2}\right\}$ olacak şekilde iki alt kümesini alalım. A, B kümeleri sırasıyla S birim çemberinin üst yarısı ve alt yarısıdır ve $\mathbb{R}^2$ den indirgenen metrikle birlikte $\mathbb{R}^2$ nin konveks iki alt kümesidir. Bu durumda Teorem 3.1.3 ten A ve B aynı zamanda $(\mathbb{R}^2, M, *)$ fuzzy metrik uzayınında konveks iki alt kümesidir. Fakat $A \cap B$ kümesi, yalnız iki noktadan oluştuğu için $(\mathbb{R}^2, M, *)$ fuzzy metrik uzayının konveks olmayan bir alt kümesidir.

O halde bir konveks fuzzy metrik uzayın, konveks iki alt kümesinin kesişimi konveks olmayabilir. Bir fuzzy metrik uzayın hangi şartlar altında konveks alt kümelerinin kesişiminin de konveks olacağı Teorem 3.1.4 te verilmiştir.

3.1.4. Teorem

$(X, M*)$ kompakt, konveks fuzzy metrik uzay ve $C_1 \supseteq C_2 \supseteq C_3 ...$, X in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümelerinin iç içe azalan bir dizisi olsun. Bu durumda,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \varnothing$$

ve aynı zamanda konvekstir.

İspat

Kabul edelim ki $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n = \varnothing$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $U_n = C_n^c$ olacak şekilde U_n kümelerini dikkate alalım. $\forall n \in \mathbb{N}$ için C_n kümeleri kapalı olduğundan, U_n kümelerinin her biri

açık kümelerdir.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n\right)^c = X$$

olduğundan, $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$, X in açık örtüsüdür. X kompakt olduğundan, X in sonlu bir $\{U_{n_1}, U_{n_2}, ..., U_{n_k}\}$ alt örtüsü vardır. Böylece;

$$\begin{aligned} X &= U_{n_1} \cup U_{n_2} \cup ... \cup U_{n_k} \\ &= \left(U_{n_1}^c \cap U_{n_2}^c \cap ... \cap U_{n_k}^c\right)^c \\ &= (C_{n_1} \cap C_{n_2} \cap ... \cap C_{n_k})^c \end{aligned}$$

dir. O halde, $C_{n_1} \cap C_{n_2} \cap ... \cap C_{n_k} = \varnothing$ olur ve bu durum boştan farklı C_n kümelerinin içiçe azalanlığı ile çelişir. O halde $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \varnothing$ olur. Şimdi $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ nin konveks olduğunu gösterelim. $x_1, x_2 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ alalım. Bu durumda, her $x_1, x_2 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ için ve her bir $n = \{1, 2, ...\}$ için $x_1, x_2 \in C_n$ dir. Her bir $n \in N$ için C_n kümeleri konveks olduğundan;

$$M(x_1, x_2, t_1 + t_2) \geq (1 - r_1) * (1 - r_2)$$

şartını sağlayan, $x_1, x_2 \in C_n$ ve $r_1, t_1 > 0$, $r_2, t_2 > 0$ çiftleri için $M(x_1, z_n, t_1) \geq (1 - r_1)$ ve $M(x_2, z_n, t_2) \geq (1 - r_2)$ olacak şekilde $z_n \in C_n$ noktaları vardır. X kompakt olduğundan; $\{z_n\}$, $\{z_{n_k}\} \to z \in X$ olacak şekilde yakınsak bir alt diziye sahiptir. C_n kümelerinin her biri kapalı olduğundan $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ dir. M fuzzy metriği $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde sürekli olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} M(x_1, z_n, t_1) = M(x_1, z, t_1) \text{ ve } \lim_{n\to\infty} M(x_2, z_n, t_2) = M(x_2, z, t_2)$$

dir. O halde $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ kümesi için

$$M(x_1, z, t_1) \geq (1 - r_1) \text{ ve } M(x_2, z, t_2) \geq (1 - r_2)$$

dir ve $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ konvekstir.

Şimdi Thanithamil [43] ile Vosoughi ve Hosseini [46] nin, fuzzy metrik uzayların konveksliği ile ilgili vermiş oldukları tanımlar ile bu iki tanımın Tanım 3.1.2 den

farkları incelenecektir.

3.1.5. Tanım

$(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay, $I = [0, 1]$ ve $R : X \times X \times I \to X$ sürekli bir dönüşüm olsun. Her bir $(x, y, \lambda) \in X \times X \times I$ ve $u \in X$ için

$$M(u, R(x, y, \lambda), t) \geq \lambda M(u, x, t) + (1 - \lambda)M(u, y, t)$$

ise, R ye X üzerinde bir konveks yapı denir. Bir R konveks yapısıyla birlikte X e konveks fuzzy metrik uzay denir [43].

3.1.6. Tanım

$(X, M, *)$ Tanım 3.1.5 anlamında bir konveks metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer, $\forall x, y \in A$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için $R(x, y, \lambda) \in A$ olacak şekilde bir R konveks yapısı varsa, A alt kümesine konvekstir denir.

3.1.7. Önerme

$(X, M, *)$ Tanım 3.1.5 anlamında bir konveks fuzzy metrik uzay olsun. Bu durumda $B_M(x, r, t)$ açık yuvarı ve $\bar{B}_M(x, r, t)$ kapalı yuvarı $(X, M, *)$ konveks fuzzy metrik uzayının konveks alt kümeleridir.

İspat

$B_M(x, r, t)$, $(X, M, *)$ da bir açık yuvar, $x_1, x_2 \in B_M(x, r, t)$ ve $\lambda \in [0, 1]$ olsun. $x_1, x_2 \in B_M(x, r, t) \subset X$ ve X konveks olduğundan, $R(x_1, x_2, \lambda) \in X$ olacak şekilde $R(x_1, x_2, \lambda)$ konveks yapısı vardır. Ayrıca $x_1, x_2 \in B_M(x, r, t)$ olduğundan, $M(x, x_1, t) > (1 - r)$ ve $M(x, x_2, t) > (1 - r)$ dir. Şimdi $R(x_1, x_2, \lambda)$ konveks yapısının $B_M(x, r, t)$ ye de ait olduğunu, yani $M(x, R(x_1, x_2, \lambda), t) > 1 - r$ olduğunu göstermeliyiz. X konveks fuzzy metrik uzay olduğundan;

$$\begin{aligned} M(x, R(x_1, x_2, \lambda), t) &\geq \lambda M(x, x_1, t) + (1 - \lambda)M(x, x_2, t) \\ &> \lambda(1 - r) + (1 - \lambda)(1 - r) \\ &= 1 - r. \end{aligned}$$

Böylece, $R(x_1, x_2, \lambda) \in B_M(x, r, t)$ dir. Benzer şekilde $\bar{B}_M(x, r, t)$ kapalı yuvarının da $(X, M, *)$ konveks fuzzy metrik uzayının konveks alt kümesi olduğu kolaylıkla görülebilir.

3.1.8. Teorem

$(X, M, *)$ Tanım 3.1.5 anlamında bir konveks fuzzy metrik uzay olsun. Bu durumda, A ve B kümeleri X in konveks iki alt kümesi olmak üzere $A \cap B$ kümesi de konvekstir.

İspat

A ve B iki konveks alt küme olsun. Keyfi $y, z \in A \cap B$ alalım. Bu durumda, $y, z \in A$ ve A konveks olduğundan, $\forall y, z \in A$ ve $\lambda \in I$ için $R(y, z, \lambda) \in A$ olacak şekilde R konveks yapısı var öyle ki $\forall a \in A$ için

$$M(a, R(y, z, \lambda), t) \geq \lambda M(a, y, t) + (1 - \lambda) M(a, z, t) \tag{3.1}$$

dir. Benzer şekilde $\forall y, z \in B$ ve $\lambda \in I$ için $R(y, z, \lambda) \in B$ olacak şekilde R konveks yapısı var öyle ki $\forall b \in B$ için

$$M(b, R(y, z, \lambda), t) \geq \lambda M(b, y, t) + (1 - \lambda) M(b, z, t) \tag{3.2}$$

dir. $\forall a \in A$ ve $\forall b \in B$ için sırasıyla (3.1) ve (3.2) eşitsizlikleri sağlandığından, $A \cap B$ nin keyfi u elemanı için de

$$M(u, R(y, z, \lambda), t) \geq \lambda M(u, y, t) + (1 - \lambda) M(u, z, t)$$

sağlanır. O halde her bir $(y, z, \lambda) \in (A \cap B) \times (A \cap B) \times I$ ve $\forall u \in (A \cap B)$ için

$$M(u, R(y, z, \lambda), t) \geq \lambda M(u, y, t) + (1 - \lambda) M(u, z, t)$$

dir ve $A \cap B$ konvekstir.

Not

Teorem 3.1.8 ile; Tanım 3.1.5 anlamında bir konveks fuzzy metrik uzayın konveks iki alt kümesinin kesişiminin de konveks olduğu gösterilmiştir. Fakat Tanım 3.1.2 dikkate

alındığında, bir $(X, M, *)$ konveks fuzzy metrik uzayının konveks (üzerlerindeki fuzzy metrik ile birlikte) iki alt kümesinin kesişiminin konveks olmayabileceği bir örnekle açıklanmıştı.

3.1.9. Tanım

$(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olsun. Her bir $x, y \in X$ için

$$M(x, y, t) = M(x, z, t_0) * M(z, y, t_1)$$

olacak şekilde $z \neq x, y$ varsa $(X, M, *)$ a konveks fuzzy metrik uzay denir (Burada $\forall t_0, t_1 \in (0, \infty)$ için $t = t_0 + t_1$ dir.) [46].

3.1.10. Önerme

$(X, M, *)$ Tanım 3.1.2 anlamında bir konveks fuzzy metrik uzay olsun. Bu durumda $(X, M, *)$ Tanım 3.1.9 anlamında konveks fuzzy metrik uzaydır.

İspat

$(X, M, *)$, $a * b = \min\{a, b\}$ ile bir fuzzy metrik uzay ve $M(x_1, x_2, t_1 + t_2) \geq (1 - r_1) * (1 - r_2)$ şartını sağlayan herhangi $x_1, x_2 \in X$, $r_1, t_1 > 0$ ve $r_2, t_2 > 0$ çifti için $M(x_1, z, t_1) \geq (1-r_1)$ ve $M(x_2, z, t_2) \geq (1-r_2)$ olsun. Eğer özel olarak $1-r_1 = 1-r_2 = M(x_1, x_2, t_1 + t_2)$ olarak seçilirse,

$$M(x_1, z, t_1) \geq (1 - r_1) = M(x_1, x_2, t_1 + t_2)$$
$$M(x_2, z, t_2) \geq (1 - r_2) = M(x_1, x_2, t_1 + t_2)$$

dir ve (FM-4) şartından,

$$\begin{aligned} M(x_1, x_2, t_1 + t_2) &\geq M(x_1, z, t_1) * M(x_2, z, t_2) \\ &\geq (1 - r_1) * (1 - r_2) \\ &= \min\{1 - r_1, 1 - r_2\} = (1 - r_1) = M(x_1, x_2, t_1 + t_2). \end{aligned}$$

olur ve sonuç olarak $M(x_1, x_2, t_1 + t_2) = M(x_1, z, t_1) * M(x_2, z, t_2)$ elde edilir.

Not

Önerme 3.1.10 un tersinin de doğru olması için uzayın tam olması gerekir.

4. FUZZY METRİK UZAYLARDA HİPERKONVEKSLİK

Bu bölümde, ilk kez Aronszajn ve Panitchpakdi [4] tarafından verilen ve Espinola ve Khamsi [11] tarafından geliştirilen metrik uzaylarda hiperkonvekslik kavramı, fuzzy metrik uzaylara taşınmıştır. Hiperkonveks fuzzy metrik uzayların bazı temel özellikleri ispatlanmıştır. Ayrıca fuzzy metrik uzaylar için m-ayrılabilirlik tanımı ile hiperkonvekslikten daha zayıf bir kavram olan m-hiperkonvekslik tanımı verilmiş ve herhangi bir $m-$ayrılabilir $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayı için m-hiperkonveksliğin, uzayın hiperkonveksliğine denk olduğu ispatlanmıştır.

4.1. Hiperkonveks Fuzzy Metrik Uzaylar

Klasik topolojide bilindiği gibi, bir X Haussdorf topolojik uzayının kompaktlığı; "bu uzayın kapalı kümelerinden oluşan keyfi bir aile için, bu ailenin her sonlu alt ailesi boştan farklı kesişime sahip ise (sonlu arakesit özelliği), tüm aile boştan farklı kesişime sahiptir" ifadesine denktir. Bu bölümde kompaktlık karakterine sahip fakat, kompkatlıktan çok daha zayıf bir özellik yuvar kesişim özelliği ve 2-li yuvar kesişim özelliği verilecektir.

4.1.1. Tanım

$(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay ve Γ indis kümesi olsun. $\forall i \in \Gamma$ için $r_i \in (0,1)$ ve $t_i \in (0, \infty)$ olmak üzere, herhangi $\Gamma_f \subset \Gamma$ sonlu alt kümesi için $\bigcap_{i \in \Gamma_f} \bar{B}_M(x_i, r_i, t_i) \neq \varnothing$ iken, kapalı yuvarların herhangi $(\bar{B}_M(x_i, r_i, t_i))_{i \in \Gamma}$ koleksiyonu için $\bigcap_{i \in \Gamma} \bar{B}_M(x_i, r_i, t_i) \neq \varnothing$ ise, X e yuvar kesişim özelliğini (ball intersection property) sağlıyor denir.

4.1.2. Tanım

$(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay, Γ indis kümesi ve $\forall i \in \Gamma$ için $r_i \in (0,1)$ ve $t_i \in (0, \infty)$ olsun. $(\bar{B}_M(x_i, r_i, t_i))_{i \in \Gamma}$ herhangi ikisi kesişen kapalı yuvarların bir koleksiyonu olmak üzere, $\bigcap_{i \in \Gamma} \bar{B}_M(x_i, r_i, t_i) \neq \varnothing$ ise, X e 2-li yuvar kesişim özelliğini (binary ball intersection property) sağlıyor denir.

Not

Tanım 4.1.1 de verilmiş olan yuvar kesişim özelliğinin, sonlu arakesit özelliğinden (her sonlu kesişimin boştan farklı olması durumu) farklı olduğuna dikkat edilmelidir. Tanım 4.1.1 de $n = 2$ iken herhangi ikisi kesişen kapalı yuvarların bir

$(\bar{B}_M(x_i, r_i, t_i))_{i\in\Gamma}$ ailesi için $\bigcap_{i\in\Gamma} \bar{B}_M(x_i, r_i, t_i) \neq \varnothing$, $n = 3$ iken herhangi üçü kesişen kapalı yuvarların bir $(\bar{B}_M(x_i, r_i, t_i))_{i\in\Gamma}$ ailesi için $\bigcap_{i\in\Gamma} \bar{B}_M(x_i, r_i, t_i) \neq \varnothing$ ve n iken de herhangi n tanesi kesişen kapalı yuvarların bir $(\bar{B}_M(x_i, r_i, t_i))_{i\in\Gamma}$ ailesi için $\bigcap_{i\in\Gamma} \bar{B}_M(x_i, r_i, t_i) \neq \varnothing$ kastedilmektedir.

4.1.3. Tanım

$(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay ve Γ indis kümesi olsun. $\forall i \in \Gamma$ için $r_i \in (0, 1)$ ve $t_i \in (0, \infty)$ olmak üzere, $\forall i, j \in \Gamma$ için

$$M(x_i, x_j, t_i + t_j) \geq (1 - r_i) * (1 - r_j)$$

şartını sağlayan X deki $\bar{B}_M(x_i, r_i, t_i)$ kapalı yuvarlarının herhangi koleksiyonu için; $\bigcap_{i\in\Gamma} \bar{B}_M(x_i, r_i, t_i) \neq \varnothing$ ise, X e hiperkonveks fuzzy metrik uzay veya kısaca hiperkonvekstir denir.

4.1.4. Teorem

d, X üzerinde bir metrik ve M_d, $a * b = \min\{a, b\}$ sürekli t-normu ile $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde

$$M_d(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$$

biçiminde tanımlı standart fuzzy metrik olsun. Bu durumda, (X, d) hiperkonveks metrik uzaydır ancak ve ancak $(X, M_d, *)$ hiperkonveks fuzzy metrik uzaydır.

İspat

(X, d) hiperkonveks olduğundan, $d(x_\alpha, x_\beta) \leq r_\alpha + r_\beta$ şartını sağlayan $\bar{B}(x_\alpha, r_\alpha)$ kapalı yuvarların herhangi koleksiyonu için $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} \bar{B}(x_\alpha, r_\alpha) \neq \varnothing$ dir. $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$ için $\frac{r_\alpha}{t_\alpha + r_\alpha} = R_\alpha$ ve $\frac{r_\beta}{t_\beta + r_\beta} = R_\beta$ olacak şekilde R_α, R_β sayıları seçilsin. Bu durumda $R_\alpha, R_\beta \in (0, 1)$ olduğu açıktır. Genelliği bozmadan $R_\alpha \geq R_\beta$ alınırsa,

$$\begin{aligned} M_d(x_\alpha, x_\beta, t_\alpha + t_\beta) &\geq (1 - R_\alpha) * (1 - R_\beta) \\ &= \min\{(1 - R_\alpha), (1 - R_\beta)\} \\ &= (1 - R_\alpha) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$ için $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayının hiperkonveksliği için ön şart sağlanmış olur. Aynı zamanda (X, d) metrik uzayının hiperkonveksliğinden; $\forall \alpha \in \Gamma$ için $z \in X$ var öyle ki;

$$
\begin{aligned}
& z \in \bigcap_{\alpha \in \Gamma} \bar{B}(x_\alpha, r_\alpha) \\
& \quad \Longrightarrow \quad d(x_\alpha, z) \leq r_\alpha \\
& \quad \Longrightarrow \quad t_\alpha + d(x_\alpha, z) \leq t_\alpha + r_\alpha \\
& \quad \Longrightarrow \quad \frac{t_\alpha}{t_\alpha + d(x_\alpha, z)} \geq \frac{t_\alpha}{t_\alpha + r_\alpha} \\
& \quad \Longrightarrow \quad M_d(x_\alpha, z, t_\alpha) \geq 1 - R_\alpha \\
& \quad \Longrightarrow \quad z \in \bar{B}_M(x_\alpha, R_\alpha, t_\alpha)
\end{aligned}
$$

dir. Dolayısıyla $\forall \alpha \in \Gamma$ için $z \in \bigcap_{\alpha \in \Gamma} \bar{B}(x_\alpha, R_\alpha, t_\alpha)$ ve böylece $(X, M_d, *)$ hiperkonveks fuzzy metrik uzaydır.

Tersine, $(X, M_d, *)$ hiperkonveks olsun. Bu durumda, $M_d(x_\alpha, x_\beta, t_\alpha + t_\beta) \geq (1 - R_\alpha) * (1 - R_\beta) = \min\{1 - R_\alpha, 1 - R_\beta\}$ şartını sağlayan $x_\alpha, x_\beta \in X$, $R_\alpha, t_\alpha > 0$ ve $R_\beta, t_\beta > 0$ çifti için, $M_d(x_\alpha, z, t_\alpha) \geq (1 - R_\alpha)$ ve $M_d(x_\beta, z, t_\beta) \geq (1 - R_\beta)$ olacak şekilde $z \in X$ vardır. Genelliği bozmadan $R_\alpha \geq R_\beta$ alınırsa, $M_d(x_\alpha, x_\beta, t_\alpha + t_\beta) \geq 1 - R_\alpha$ olur. Şimdi her $\alpha, \beta \in \Gamma$ için $r_\alpha = \frac{R_\alpha . t_\alpha}{1 - R_\alpha}$ ve $r_\beta = \frac{R_\beta . t_\beta}{1 - R_\beta}$ olacak şekilde $r_\alpha, r_\beta > 0$ sayıları seçilsin. Bu durumda $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$ için $d(x_\alpha, d(x_\alpha) \leq r_\alpha + r_\beta$ eşitsizliği sağlanır, yani (X, d) metrik uzayının hiperkonveksliği için ön şart sağlanmış olur. Aynı zamanda $(X, M_d, *)$ fuzzy metrik uzayının hiperkonveksliğinden, $\forall \alpha \in \Gamma$ için $z \in X$ var öyle ki;

$$
\begin{aligned}
& z \in \bigcap_{\alpha \in \Gamma} \bar{B}_M(x_\alpha, R_\alpha, t_\alpha) \neq \varnothing \\
& \quad \Longrightarrow \quad M_d(x_\alpha, z, t_\alpha) \geq 1 - R_\alpha \\
& \quad \Longrightarrow \quad \frac{t_\alpha}{t_\alpha + d(x_\alpha, z)} \geq 1 - R_\alpha \\
& \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{t_\alpha + d(x_\alpha, z)} \geq \frac{1 - R_\alpha}{t_\alpha} \\
& \quad \Longrightarrow \quad t_\alpha + d(x_\alpha, z) \geq \frac{t_\alpha}{1 - R_\alpha} \\
& \quad \Longrightarrow \quad d(x_\alpha, z) \leq \frac{R_\alpha . t_\alpha}{1 - R_\alpha} = r_\alpha \\
& \quad \Longrightarrow \quad z \in \bar{B}(x_\alpha, r_\alpha)
\end{aligned}
$$

dır. O halde $\forall \alpha \in \Gamma$ için $z \in X$ var öyle ki $z \in \bigcap_{\alpha \in \Gamma} \bar{B}(x_\alpha, r_\alpha)$ ve böylece (X, d) hiperkonveks metrik uzaydır.

Örnek

Teorem 4.1.4 te özel olarak $(X = \mathbb{R}, d)$ alışılmış metrik uzayı alınırsa, $(\mathbb{R}, d)$ hiperkonveks olduğundan, $(\mathbb{R}, M_d, *)$ standart fuzzy metrik uzayı da hiperkonvekstir.

4.1.5. Önerme

$(X, M, *)$ bir hiperkonveks fuzzy metrik uzay ise, X 2-li yuvar kesişim özelliğini sağlar.

İspat

$(X, M, *)$ bir hiperkonveks fuzzy metrik uzay, Γ bir indis kümesi ve her $i \in \Gamma$ için $x_i \in X$, $r_i \in (0,1)$, $t_i \in (0, \infty)$ olsun. $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayında herhangi ikisi kesişen kapalı yuvarların $\left\{\bar{B}_M(x_i, r_i, t_i)\right\}_{i\in\Gamma}$ ailesini alalım, yani her $i, j \in \Gamma$ için $\bar{B}_M(x_i, r_i, t_i) \cap \bar{B}_M(x_j, r_j, t_j) \neq \varnothing$ olsun. Bu durumda $z \in \bar{B}_M(x_i, r_i, t_i) \cap \bar{B}_M(x_j, r_j, t_j)$ olacak şekilde bir $z \in X$ var öyle ki;

$$
\begin{aligned}
&z \in \bar{B}_M(x_i, r_i, t_i) \cap \bar{B}_M(x_j, r_j, t_j) \\
&\quad \Longrightarrow \; z \in \bar{B}_M(x_i, r_i, t_i) \text{ ve } z \in \bar{B}_M(x_j, r_j, t_j) \\
&\quad \Longrightarrow \; M(x_i, z, t_i) \geq (1 - r_i) \text{ ve } M(x_j, z, t_j) \geq (1 - r_j)
\end{aligned}
$$

dir. Tanım 2.2.1-(iv) den ve (FM-4) şartından

$$
\begin{aligned}
M(x_i, x_j, t_i + t_j) &\geq M(x_i, z, t_i) * M(x_j, z, t_j) \\
&\geq (1 - r_i) \; * (1 - r_j)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Dolayısıyla her $i, j \in \Gamma$ için $M(x_i, x_j, t_i + t_j) \geq (1 - r_i) * (1 - r_j)$ olur. $(X, M, *)$ hiperkonveks olduğundan $M(x_i, x_j, t_i + t_j) \geq (1 - r_i) * (1 - r_j)$ şartını sağlayan yuvarlar için ortak bir $z \in X$ vardır, yani her $i \in \Gamma$ için $\bigcap_{i\in\Gamma} B_M(x_i, r_i, t_i) \neq \varnothing$ olmak zorundadır. Herhangi ikisi kesişen kapalı yuvarların $\left\{\bar{B}_M(x_i, r_i, t_i)\right\}_{i\in\Gamma}$ ailesi için $\bigcap_{i\in\Gamma} B_M(x_i, r_i, t_i) \neq \varnothing$ bulunduğundan X, 2-li yuvar kesişim özelliğini sağlar.

4.1.6. Teorem

$(X, M, *)$ yuvar kesişim özelliğine sahip bir fuzzy metrik uzay ise X tamdır. Özel olarak her hiperkonveks fuzzy metrik uzay tamdır.

İspat

$(X, M, *)$ yuvar kesişim özelliğine sahip bir fuzzy metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir Cauchy dizisi olsun. Herhangi $n \geq 1$ için,

$$r_n = \sup_{t_n>0} \left\{ \inf_{m\geq n} \left\{ \sup_{s<t_n} \{M(x_n, x_m, s)\} \right\} \right\}$$

kümesini ve kapalı yuvarların $\left(\bar{B}_M(x_n, r_n, t_n)\right)_{n\geq 1}$ koleksiyonunu dikkate alalım. $\{x_n\}$ Cauchy dizisi olduğundan ve $\{r_n\}$ nin seçiminden dolayı, her $m \geq n$ için $M(x_n, x_m, t_n) \geq 1 - r_n$ elde edilir yani, $\{r_n\}$ fuzzy sıfır çapa sahiptir. Bu durumda $n_1 < n_2 < ... < n_k$ olacak şekildeki herhangi sonlu sayıda indis için,

$$M(x_{n_1}, x_{n_k}, t_{n_1}) \geq 1 - r_{n_1},\ M(x_{n_2}, x_{n_k}, t_{n_2}) \geq 1 - r_{n_2},\ ...,\ M(x_{n_k}, x_{n_k}, t_{n_k}) \geq 1 - r_{n_k}$$

olur. Bu durumda; kapalı yuvarların sonlu kesişimi için

$$x_{n_k} \in \bar{B}_M(x_{n_1}, r_{n_1}, t_{n_1}) \cap \bar{B}_M(x_{n_2}, r_{n_2}, t_{n_2}) \cap ... \cap \bar{B}_M(x_{n_k}, r_{n_k}, t_{n_k})$$

elde edilir. Aynı zamanda X yuvar kesişim özelliğini sağladığından dolayı herhangi $n \geq 1$ için $\bigcap_{n\geq 1} \bar{B}_M(x_n, r_n, t_n) \neq \varnothing$ dir. $\{x_n\}$ bir Cauchy ve $\{r_n\}$ fuzzy sıfır çapa sahip olduğundan dolayı, $\bigcap_{n\geq 1} \bar{B}_M(x_n, r_n, t_n)$ kesişimi $\{x_n\}$ dizisinin tek limit noktası olan $z \in X$ noktasına indirgenir. Gerçekten; $z \in \bigcap_{n\geq 1} \bar{B}_M(x_n, r_n, t_n)$ olduğundan, her bir $r_n, t_n > 0$ çifti için, her $n \geq n_1$ için $M(x_n, z, t_n) > 1 - r_n$ olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece $t_n > 0$ için $n \to \infty$ iken $M(x_n, z, t_n)$ fonksiyonu 1 noktasına yakınsar ve $(X, M, *)$ tamdır.

4.1.7. Önerme

$(X, M, *)$ bir hiperkonveks fuzzy metrik uzaydır ancak ve ancak X 2-li yuvar kesişim özelliğini sağlar ve aynı zamanda konvekstir.

İspat

$(X, M, *)$ hiperkonveks bir fuzzy metrik uzay olsun. Önerme 4.1.5 ten X 2-li yuvar kesişim özelliğini sağlar. X in konveks fuzzy metrik uzay olduğu Tanım 3.1.2 ve Tanım 4.1.3 ten açıktır.

Tersine X konveks olduğundan, her $i,j \in \Gamma$ için $M(x_i,x_j,t_i+t_j) \geq (1-r_i)*(1-r_j)$ şartını sağlayan kapalı yuvarlar için $\bar{B}_M(x_i,r_i,t_i) \cap \bar{B}_M(x_j,r_j,t_j) \neq \varnothing$ tur. Aynı zamanda X 2-li yuvar kesişim özelliğini sağladığından $i,j \in \Gamma$ için $\bar{B}_M(x_i,r_i,t_i) \cap \bar{B}_M(x_j,r_j,t_j) \neq \varnothing$ iken $\bigcap_{i\in\Gamma} \bar{B}_M(x_i,r_i,t_i) \neq \varnothing$ tur ve böylece X hiperkonvekstir.

4.2. Fuzzy Metrik Uzaylarda m-Hiperkonvekslik ve m-Ayrılabilirlik

Bu bölümde öncelikle fuzzy metrik uzaylar için hiperkonvekslik kavramıyla yapısal olarak aynı olan fakat hiperkonvekslikten daha zayıf bir özellik olan m-hiperkonvekslik tanımını ve fuzzy metrik uzaylarda klasik ayrılabilirlikten daha kuvvetli bir özellik olan m-ayrılabilirlik tanımını vereceğiz. Bu bölüm boyunca Γ bir indis kümesi olmak üzere $card(\Gamma)$ ile Γ kümesinin kardinalitesi kastedilecektir.

4.2.1. Tanım

$(X,M,*)$ bir fuzzy metrik uzay, Γ indis kümesi ve $m \geq 3$ olmak üzere $card(\Gamma) < m$ olsun. Her $i \in \Gamma$ için $r_i \in (0,1)$ ve $t_i \in (0,\infty)$ olmak üzere, $\forall i,j \in \Gamma$ için

$$M(x_i,x_j,t_i+t_j) \geq (1-r_i)*(1-r_j)$$

şartlarını sağlayan $\bar{B}_M(x_i,r_i,t_i)$ kapalı yuvarlarının herhangi koleksiyonu için

$$\bigcap_{i\in\Gamma} \bar{B}_M(x_i,r_i,t_i) \neq \varnothing$$

ise, X e m-hiperkonvekstir denir.

Tanım 4.2.1 de özel olarak $m=2$ alındığında her fuzzy metrik uzayın 2-hiperkonveks olduğuna (bkz.Önerme 4.2.2-(ii)) ve $m=1$ alındığında $card(\Gamma)<1$ ve $\Gamma=\varnothing$ olduğuna dikkat ediniz. Bu sebeple Tanım 4.2.1 de $m \geq 3$ alınmıştır.

4.2.2. Önerme

(i) Fuzzy metrik uzaylarda hiperkonvekslik m-hiperkonvekslikten ve $n<m$ iken de m-hiperkonvekslik n-hiperkonvekslikten daha kuvvetli bir özelliktir.

(ii) Her $(X,M,*)$ fuzzy metrik uzayı 2-hiperkonvekstir.

İspat

(i) $(X,M,*)$ bir hiperkonveks fuzzy metrik uzay iken $(X,M,*)$ ın m-hiperkonveks olduğunu gösterelim. $(X,M,*)$ hiperkonveks, Γ bir indis kümesi olsun. $(X,M,*)$ hiperkonveks ise $\forall i,j \in \Gamma$ için $M(x_i,x_j,t_i+t_j) \geq (1-r_i)*(1-r_j)$ şartını sağlayan kapalı yuvarların $\left\{\bar{B}_M(x_i,r_i,t_i)\right\}_{i\in\Gamma}$ ailesi için $\bigcap\limits_{i\in\Gamma}\bar{B}_M(x_i,r_i,t_i) \neq \varnothing$ olur. $\Gamma^* \subset \Gamma$ olmak üzere $card(\Gamma^*) < m$ olsun. Herhangi $\forall k,l \in \Gamma^*$ için $M(x_k,x_l,t_k+t_l) \geq (1-r_k)*(1-r_l)$ şartını sağlayan kapalı yuvarların $\left\{\bar{B}_M(x_k,r_k,t_k)\right\}_{k\in\Gamma^*}$ ailesini alalım. $\Gamma^* \subset \Gamma$ olduğundan $k,l \in \Gamma$ dir. X hiperkonveks olduğundan, $M(x_k,x_l,t_k+t_l) \geq (1-r_k)*(1-r_l)$ şartını sağlayan kapalı yuvarlar için $\bigcap\limits_{k\in\Gamma^*}\bar{B}_M(x_k,r_k,t_k) \neq \varnothing$ olur. Böylece X m-hiperkonvekstir.

$n < m$ olmak üzere $(X,M,*)$ bir m-hiperkonveks fuzzy metrik uzay iken $(X,M,*)$ ın n-hiperkonveks olduğunu gösterelim. $(X,M,*)$ m-hiperkonveks ise $card(\Gamma^*) < m$ olmak üzere her $i,j \in \Gamma^*$ için $M(x_i,x_j,t_i+t_j) \geq (1-r_i)*(1-r_j)$ şartını sağlayan kapalı yuvarların $\left\{\bar{B}_M(x_i,r_i,t_i)\right\}_{i\in\Gamma^*}$ ailesi için $\bigcap\limits_{i\in\Gamma^*}\bar{B}_M(x_i,r_i,t_i) \neq \varnothing$ olur. Şimdi $n < m$ ve $card(\Gamma^{**}) < n$ olsun. Herhangi $k,l \in \Gamma^{**}$ için $M(x_k,x_l,t_k+t_l) \geq (1-r_k)*(1-r_l)$ şartlarını sağlayan kapalı yuvarların $\bar{B}_M(x_k,r_k,t_k)$ $(k \in \Gamma^{**})$ koleksiyonunu alalım. $\Gamma^{**} \subset \Gamma^*$ olduğundan $k,l \in \Gamma^*$ dir. X m-hiperkonveks olduğundan, $M(x_k,x_l,t_k+t_l) \geq (1-r_k)*(1-r_l)$ şartlarını sağlayan kapalı yuvarlar için $\bigcap\limits_{k\in\Gamma^{**}}\bar{B}_M(x_k,r_k,t_k) \neq \varnothing$ olur. Böylece X n-hiperkonvekstir.

(ii) $(X,M,*)$ fuzzy metrik uzay, $card(\Gamma) < 2$ olmak üzere Γ bir indis kümesi ve her $i \in \Gamma$ için $x_i \in X$, $r_i \in (0,1)$ ve $t_i \in (0,\infty)$ olsun. Her $i \in \Gamma$ için $\bar{B}_M(x_i,r_i,t_i) \cap \bar{B}_M(x_i,r_i,t_i) \neq \varnothing$ her zaman sağlandığından $z \in \bar{B}_M(x_i,r_i,t_i) \cap \bar{B}_M(x_i,r_i,t_i)$ olacak şekilde bir $z \in X$ her zaman vardır.

4.2.3. Teorem

Fuzzy metrik uzaylarda $m = 3$ için 3-hiperkonvekslik konveksliğe denktir.

İspat

$(X,M,*)$ bir 3-hiperkonveks fuzzy metrik uzay olsun. $Card(\Gamma) < m = 3$ olduğundan, indis kümesi $\Gamma = \{1,2\}$ dir. Bu durumda her $i,j \in \Gamma$ için $M(x_i,x_j,t_i+t_j) \geq (1-r_i)*(1-r_j)$ şartını sağlayan $\{B_M(x_i,r_i,t_i)\}_{i\in\Gamma}$ kapalı yuvarlar ailesi için $\bigcap\limits_{i\in\Gamma}B_M(x_i,r_i,t_i) \neq \varnothing$ tur, yani $\forall i \in \Gamma = \{1,2\}$ için $B_M(x_1,r_1,t_1) \cap B_M(x_2,r_2,t_2) \neq \varnothing$ ve dolayısıyla $z \in B_M(x_1,r_1,t_1) \cap B_M(x_2,r_2,t_2)$ olacak şekilde $z \in X$ var. O halde $M(x_1,z,t_1) \geq (1-r_1)$

ve $M(x_2, z, t_2) \geq (1 - r_2)$ olacağından X konvekstir.

Tersine $(X, M, *)$ bir konveks fuzzy metrik uzay olsun. Bu durumda $M(x_1, x_2, t_1 + t_2) \geq (1 - r_1) * (1 - r_2)$ eşitsizliğini sağlayan $x_1, x_2 \in X$, $r_1, t_1 > 0$ ve $r_2, t_2 > 0$ çifti için $M(x_1, z, t_1) \geq (1 - r_1)$ ve $M(x_2, z, t_2) \geq (1 - r_2)$ olacak şekilde $z \in X$ vardır. Böylece $z \in B_M(x_1, r_1, t_1) \cap B_M(x_2, r_2, t_2)$ dir ve dolayısıyla $\forall i \in \Gamma = \{1, 2\}$ için $\bigcap_{i \in \Gamma} B_M(x_i, r_i, t_i) \neq \varnothing$ tur. O halde X 3-hiperkonvekstir.

4.2.4. Tanım

$(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay, Γ bir indis kümesi olsun. Eğer X, $K \subset \Gamma$ olmak üzere $card(K) < m$ olacak şekilde indislenmiş yoğun bir alt kümeye sahipse, yani X kardinalitesi m den küçük, indislenmiş yoğun bir alt kümeye sahipse, X e m-ayrılabilir fuzzy metrik uzay denir.

Not

$(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayı için $n < m$ iken m-ayrılabilirlik n-ayrılabilirlikten daha zayıftır ve aynı zamanda sonlu bir m kardinali için m-ayrılabilirlik, $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayının en çok $m - 1$ noktaya sahip olması demektir. Gerçekten; $(X, M, *)$ n-ayrılabilir bir fuzzy metrik uzay, Γ bir indis kümesi ve $n < m$ olsun. Bu durumda $K \subset \Gamma$ olmak üzere X in $card(K) < n$ olacak şekilde indislenmiş yoğun bir alt kümesi vardır. $card(K) < n$ olduğundan, $K = \{1, 2, ..., n - 1\}$ olarak alınırsa, $\{p_i\}_{i=1}^{n-1} \in X$ olmak üzere

$$\overline{\{p_1, p_2, ..., p_{n-1}\}} = X \tag{4.1}$$

dir. Şimdi, $card(K) < n < m$ için $\overline{\{p_1, p_2, ..., p_{n-1}, p_n, p_{n+1}, ..., p_{m-2}, p_{m-1}\}} = X$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\overline{\{p_1, p_2, ..., p_{n-1}, p_n, p_{n+1}, ..., p_{m-2}, p_{m-1}\}} = \overline{\{p_1, p_2, ..., p_{n-1}\}} \cup \overline{\{p_n, p_{n+1}, ..., p_{m-2}, p_{m-1}\}}$$

olduğundan ve 4.1 eşitliğinden,

$$\begin{aligned} \overline{\{p_1, p_2, ..., p_{n-1}, p_n, p_{n+1}, ..., p_{m-2}, p_{m-1}\}} &= \overline{\{p_1, p_2, ..., p_{n-1}\}} \cup \overline{\{p_n, p_{n+1}, ..., p_{m-2}, p_{m-1}\}} \\ &= X \cup \overline{\{p_n, p_{n+1}, ..., p_{m-2}, p_{m-1}\}} \\ &= X \end{aligned}$$

olur ve X m-ayrılabilirdir.

Ayrıca, sonlu bir m kardinali için $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayı m-ayrılabilir ise, X in en çok $m-1$ noktaya sahip olacağı açıktır.

Daha önce $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayının hiperkonveksliğinin, uzayın m-hiperkonveksliğinden daha kuvvetli olduğu gösterilmişti (bkz. Önerme 4.2.2-(i)). Bu durumda $(X, M, *)$ bir hiperkonveks fuzzy metrik uzay iken aynı zamanda m-hiperkonvekstir. Şimdi bu ifadenin tersinin hangi şart altında doğru olduğunu göstermek için Teorem 4.2.5 verilecektir.

4.2.5. Teorem

$(X, M, *)$ m-hiperkonveks ve aynı zamanda m-ayrılabilir bir fuzzy metrik uzay ise, X hiperkonvekstir.

İspat

Her $i, j \in \Gamma$ için $M(x_i, x_j, t_i + t_j) \geq (1 - r_i) * (1 - r_j)$ şartını sağlayan kapalı yuvarların indislenmiş keyfi $\bar{B}_M(x_i, r_i, t_i)$ ailesini dikkate alalım. X m-hiperkonveks ve $card(K) < m$ olmak üzere $\{p_k\}$, $(k \in K)$ kümesi X de yoğun olsun. $r_k^{'}$, $t_k^{'} > 0$, $k \in K$ çiftini sırasıyla aşağıdaki gibi alalım.

$r_k^{'}$, $t_k^{'}$ = tüm $r \in (0, 1)$ sayılarının infimumu ve tüm $t > 0$ sayılarının infimumu öyle ki $\bar{B}_M(x_i, r_i, t_i) \subset \bar{B}_M(p_k, r, t)$ olacak şekilde $\exists\ i \in \Gamma$ var. (4.2)

Bu durumda kapalı yuvarların $\bar{B}_M(p_k, r_k^{'}, t_k^{'})$, $k \in K$ sınıfı m-hiperkonvekslik şartını sağlar. Gerçekten, keyfi $k, l \in K$ indislerini, $\varepsilon \in (0, 1)$ ve $\varepsilon^{'} > 0$ sayılarını alalım. (4.2) ifadesinden

$$\bar{B}_M(x_i, r_i, t_i) \subset \bar{B}_M(p_k, r_k^{'} + \varepsilon, t_k^{'} + \varepsilon^{'}) \tag{4.3}$$

ve

$$\bar{B}_M(x_j, r_j, t_j) \subset \bar{B}_M(p_l, r_l^{'} + \varepsilon, t_l^{'} + \varepsilon'). \tag{4.4}$$

olacak şekilde i, $j \in \Gamma$ vardır. X m-hiperkonveks olduğundan, $q \in \bar{B}_M(x_i, r_i, t_i) \cap \bar{B}_M(x_j, r_j, t_j)$ olacak şekilde $q \in X$ vardır. (4.3), (4.4) ifadelerinden q aynı zamanda

$\bar{B}_M(p_k, r_k^{'} + \varepsilon, t_k^{'} + \varepsilon^{'}) \cap \bar{B}_M(p_l, r_l^{'} + \varepsilon, t_l^{'} + \varepsilon')$ ye aittir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} q \quad &\in \quad \bar{B}_M(p_k, r_k^{'} + \varepsilon, t_k^{'} + \varepsilon^{'}) \cap \bar{B}_M(p_l, r_l^{'} + \varepsilon, t_l^{'} + \varepsilon') \\ &\Longrightarrow \quad M(p_k, q, t_k^{'} + \varepsilon^{'}) \geq 1 - (r_k^{'} + \varepsilon) \text{ ve } M(p_l, q, t_l^{'} + \varepsilon^{'}) \geq 1 - (r_l^{'} + \varepsilon) \\ &\Longrightarrow \quad M(p_k, p_l, t_k^{'} + t_l^{'} + 2\varepsilon^{'}) \geq \left[1 - (r_k^{'} + \varepsilon)\right] * \left[1 - (r_l^{'} + \varepsilon)\right]. \end{aligned} \tag{4.5}$$

$\varepsilon \in (0,1)$ ve $\varepsilon' > 0$ keyfi olduğundan, (4.5) ifadesinden, kapalı yuvarların $\bar{B}_M(p_k, r_k^{'}, t_k^{'})$, $k \in K$ koleksiyonu için, m- hiperkonvekslik şartı elde edilmiş oldu. Böylece, $x \in \bigcap_{k \in K} \bar{B}_M(p_k, r_k^{'}, t_k^{'})$ olacak şekilde $x \in X$ vardır. Şimdi hiperkonvekslik için her $i \in \Gamma$ için x in $\bar{B}_M(x_i, r_i, t_i)$ ye ait olduğu, yani $M(x, x_i, t_i) \geq 1 - r_i$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için keyfi $\varepsilon \in (0,1)$ ve keyfi $\varepsilon' > 0$ alalım. $\{p_k\}$, $k \in K$ kümesi

X de yoğun olduğundan her bir $x_i \in X$ için

$$M(x_i, p_k, \varepsilon') > 1 - \varepsilon \tag{4.6}$$

olacak şekilde bir p_k noktası vardır. Böylece,

$$\bar{B}_M(x_i, r_i, t_i) \subset \bar{B}_M(p_k, r_i + \varepsilon, t_i + \varepsilon')$$

dir. $r_k^{'}$ ve $t_k^{'}$ sayılarının seçiminden,

$$\bar{B}_M(p_k, r_k^{'}, t_k^{'}) \subset \bar{B}_M(p_k, r_i + \varepsilon, t_i + \varepsilon')$$

ve $r_k^{'} \leq r_i + \varepsilon$, $t_k^{'} \leq t_i + \varepsilon'$ dir. Böylece üçgen eşitsizliğinden (FM-4 şartı)

$$\begin{aligned} M(x, x_i, t_i + 2\varepsilon^{'}) &\geq M(x, p_k, t_i + \varepsilon^{'}) * M(p_k, x_i, \varepsilon') \\ &\geq M(x, p_k, t_k^{'}) * M(p_k, x_i, \varepsilon') \\ &> (1 - r_k^{'}) * (1 - \varepsilon) \\ &\geq [1 - (r_i + \varepsilon)] * (1 - \varepsilon) \end{aligned}$$

elde edilir. ε ve ε' sayıları keyfi olduğundan, $M(x, x_i, t_i) \geq 1 - r_i$ yani; $x \in \bigcap_{i \in \Gamma} \bar{B}_M(x_i, r_i, t_i)$ dir.

Not

$(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayının m-ayrılabilir olması ve aynı zamanda sonlu sayıda elemana sahip olması durumunda uzayın m-hiperkonveksliğinden bahsedilemez. Gerçekten, fuzzy metrik uzaylarda m-hiperkonvekslik ($m \geq 3$) konveksliği gerektirdiğinden (bkz. Önerme 4.1.7), X in tek noktaya indirgenmesi durumu dışında, X in sonlu bir küme olmasından bahsedilemez. Teorem 4.2.5 ile bu durum ispatlanmıştır.

5. SEZGİSEL FUZZY METRİKLERİN BAZI ALT SINIFLARI

Bu bölümde, Park [30] ın vermiş olduğu sezgisel fuzzy metrik tanımı dikkate alınarak, bu metriğin alt sınıfları olan sabit sezgisel fuzzy metrik ve kuvvetli sezgisel fuzzy metrik kavramları tanımlanmış ve örneklendirilmiştir. Ayrıca bu iki sınıf arasındaki ilişkiler incelenmiştir.
Bu bölüm boyunca $*$ ve $\diamondsuit$ sırasıyla sürekli t-norm ve sürekli t-conorm; X boştan farklı bir küme; $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}^+$ sırasıyla reel sayılar kümesi ve pozitif reel sayılar kümesi; M ve N fonksiyonları $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde tanımlı ve $[0, 1]$ aralığında değerler alan fuzzy kümeleri olarak alınacaktır.

5.1. Kuvvetli Sezgisel Fuzzy Metrikler ve Sabit Sezgisel Fuzzy Metrikler

Park [30] ın sezgisel fuzzy metrik tanımı dikkate alındığında; bir çok sezgisel fuzzy metrik $M(x,z,t) \geq M(x,y,t) * M(y,z,t)$ ve $N(x,z,t) \leq N(x,y,t) \diamondsuit N(y,z,t)$ şartlarını sağlamaktadır. Bu alt bölümde, "kuvvetli " olarak isimlendirilen, sezgisel fuzzy metriklerin bu tip sınıfı için bazı özellikler incelenmiş ve bazı sezgisel fuzzy metrik örnekleri ile kuvvetli sezgisel fuzzy metrik örnekleri verilmiştir.

5.1.1. Tanım

$(X, M, N, *, \diamondsuit)$ bir sezgisel fuzzy metrik uzay olsun. Eğer, M ve N fonksiyonları her $x, y, z \in X$ ve her $t > 0$ için

$$M(x,z,t) \geq M(x,y,t) * M(y,z,t) \qquad \text{(IFM-5}'\text{)}$$

ve

$$N(x,z,t) \leq N(x,y,t) \diamondsuit N(y,z,t) \qquad \text{(IFM-10}'\text{)}$$

şartlarını sağlıyorsa $(M, N, *, \diamondsuit)$ sezgisel fuzzy metriğine kuvvetlidir veya $(X, M, N, *, \diamondsuit)$ ye kuvvetli sezgisel fuzzy metrik uzay denir.

Not

Tanım 5.1.1 deki (IFM-5′) ve (IFM-10′) şartları, herhangi M, N fonksiyonları için $*$ ve $\diamondsuit$ ile birlikte kuvvetli olma şartları olarak düşünülebilir. M, N fonksiyonları $*$ ve $\diamondsuit$

ile birlikte kuvvetli olma şartlarını sağlamasına rağmen aynı $*$ ve $\diamondsuit$ ile X üzerinde bir sezgisel fuzzy metrik olmayabilir. Bundan dolayı sezgisel fuzzy metrik uzay tanımındaki (IFM-5) ve (IFM-10) şartları yerine sırasıyla (IFM-5′) ve (IFM-10′) kullanılamaz. Aşağıdaki örnek bu durumu açıklamaktadır.

Örnek

$|\cdot|$, $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı alışılmış metrik ve $t \in (0,\infty)$ olsun. $M : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times(0,\infty) \to [0,1]$ ve $N : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times(0,\infty) \to [0,1]$ fonksiyonları $a*b = ab$ ve $a\diamondsuit b = a+b-ab$ olmak üzere,

$$M(x,y,t) = \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}+|x-y|} \text{ ve } N(x,y,t) = \frac{|x-y|}{\frac{1}{t}+|x-y|}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda M, N fonksiyonları, $*$ ve $\diamondsuit$ ile birlikte kuvvetli olma şartlarını sağlamasına rağmen, M, N fonksiyonları aynı $*$ ve $\diamondsuit$ ile , X üzerinde bir sezgisel fuzzy metrik değildir.

Çözüm

M, N fonksiyonları,$*$ ve $\diamondsuit$ ile birlikte kuvvetli olma şartları olan (IFM-5′) ve (IFM-10′) şartlarını sağlar. Gerçekten; her $x, y, z \in X$ ve $t > 0$ için,

$$\begin{aligned} M(x,y,t).M(y,z,t) &= \frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}|y-z|+\frac{1}{t}|x-y|+|x-y|.|y-z|} \\ &\leq \frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}|y-z|+\frac{1}{t}|x-y|} \\ &\leq \frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}|x-z|} = \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}+|x-z|} = M(x,z,t) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} N(x,y,t)+N(y,z,t)-[N(x,y,t).N(y,z,t)] &= \frac{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}|x-y|+\frac{1}{t}|y-z|+|x-y|.|y-z|-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}|y-z|+\frac{1}{t}|x-y|+|x-y|.|y-z|} \\ &\geq \frac{\frac{1}{t}|y-z|+\frac{1}{t}|x-y|}{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}|y-z|+\frac{1}{t}|x-y|} \\ &\geq \frac{|x-z|}{\frac{1}{t}+|x-z|} = N(x,z,t). \end{aligned}$$

Buna rağmen (M, N), (IFM-10) şartını sağlamadığından dolayı X üzerinde bir sezgisel

fuzzy metrik değildir. Gerçekten, $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ ve $t = s = 1$ seçilirse;

$$\begin{aligned} N(x,y,t) + N(y,z,s) - [N(x,y,t).N(y,z,s)] &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\right] = \frac{3}{4} \\ &< \frac{4}{5} = N(x,z,t+s). \end{aligned}$$

Bu örnek için $M(x,y,.)$ ve $N(x,y,.)$ nin her $x, y \in X$ için t ye göre sırasıyla kesin azalan ve kesin artan olduklarına dikkat ediniz.

Not

Sezgisel fuzzy metrik uzay şartlarından (IFM-5) ve (IFM-10) şartları yerine sırasıyla kuvvetli olma şartları olan (IFM-5′) ve (IFM-10′) şartları kullanılarak bir kuvvetli sezgisel fuzzy metrik tanımlamak mümkündür. Bunun için gerekli şart $M(x,y,.)$ ve $N(x,y,.)$ fonksiyonlarının $(0,\infty)$ üzerinde (yani t ye bağlı olarak) sırasıyla artan-sürekli ve azalan-sürekli olmaları gerekir. Gerçekten böyle bir durumda, $M(x,y,.)$ ve $N(x,y,.)$ kuvvetli olma şartlarını sağladığından,

$$M(x,z,t+s) \geq M(x,y,t+s) * M(y,z,t+s)$$

ve

$$N(x,z,t+s) \leq N(x,y,t+s) \diamondsuit N(y,z,t+s)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Ayrıca, $M(x,y,.)$ ve $N(x,y,.)$ sırasıyla artan-sürekli ve azalan-sürekli olduğundan,

$$M(x,z,t+s) \geq M(x,y,t+s) * M(y,z,t+s) \geq M(x,y,t) * M(y,z,s) \tag{5.1}$$

ve

$$N(x,z,t+s) \leq N(x,y,t+s) \diamondsuit N(y,z,t+s) \leq N(x,y,t) \diamondsuit N(y,z,s) \tag{5.2}$$

eşitsizlikleri sağlanır. (5.1) ve (5.2) eşitsizlikleri ise, sırasıyla (IFM-5) ve (IFM-10) şartlarının sağlandığını gösterir.

5.1.2. Tanım

$(X, M, N, *, \diamondsuit)$ bir sezgisel fuzzy metrik uzay olsun. Eğer M ve N fonksiyonları t ye bağlı değilse, başka bir ifadeyle her $x, y \in X$ için $M_{xy}(t) = M(x, y, t)$ ve $N_{xy}(t) = N(x, y, t)$ sabit ise $(M, N, *, \diamondsuit)$ sezgisel fuzzy metriğine sabittir denir.

$(X, M, N, *, \diamondsuit)$ nin bir sabit sezgisel fuzzy metrik uzay olması durumunda $M(x, y, t)$, $N(x, y, t)$ ve $B_{(M,N)}(x, r, t)$ yerine sırasıyla $M(x, y)$, $N(x, y)$ ve $B_{(M,N)}(x, r)$ ifadeleri kullanılacaktır.

Örnek

Her sabit sezgisel fuzzy metrik kuvvetlidir.

5.1.3. Tanım

$(M, N, *, \diamondsuit)$, X üzerinde bir sezgisel fuzzy metrik olsun. Her $x_1, x_2, x_3 \in X$ ve $t > 0$ için

$$M(x_1, x_3, t) \geq \min\{M(x_1, x_2, t), M(x_2, x_3, t)\} \tag{5.3}$$

ve

$$N(x_1, x_3, t) \leq \text{maks}\{N(x_1, x_2, t), N(x_2, x_3, t)\} \tag{5.4}$$

şartları sağlanıyorsa $(M, N, *, \diamondsuit)$ ye sezgisel fuzzy ultrametrik (non-Archimedean sezgisel fuzzy metrik) denir.

5.1.4. Önerme

$(M_d, N_d, *, \diamondsuit)$ standart sezgisel fuzzy metriği $a * b = \min\{a, b\}$ sürekli t-normu ve $a \diamondsuit b = \text{maks}\{a, b\}$ sürekli t-conormu ile X üzerinde bir sezgisel fuzzy ultrametriktir ancak ve ancak d, X üzerinde bir ultrametriktir.

İspat

d, X üzerinde bir ultrametrik olsun. Bu durumda $\forall x_1, x_2, x_3 \in X$ için $d(x_1, x_3) \leq$

maks $\{d(x_1, x_2), d(x_2, x_3)\}$ eşitsizliği sağlanır.

$$\begin{aligned} M_d(x_1, x_3, t) &= \frac{t}{t + d(x_1, x_3)} \\ &\geq \frac{t}{t + \text{maks}\{d(x_1, x_2), d(x_2, x_3)\}} \\ &= \min\left\{\frac{t}{t + d(x_1, x_2)}, \frac{t}{t + d(x_2, x_3)}\right\} \\ &= \min\{M_d(x_1, x_2, t), M_d(x_2, x_3, t)\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d(x_1, x_3) \leq \text{maks}\{d(x_1, x_2), d(x_2, x_3)\} \\ \Longrightarrow\ t + d(x_1, x_3) \leq \text{maks}\{t + d(x_1, x_2), t + d(x_2, x_3)\} \\ \Longrightarrow\ -\frac{t}{t + d(x_1, x_3)} \leq \text{maks}\left\{-\frac{t}{t + d(x_1, x_2)}, -\frac{t}{t + d(x_2, x_3)}\right\} \\ \Longrightarrow\ 1 - \frac{t}{t + d(x_1, x_3)} \leq \text{maks}\left\{1 - \frac{t}{t + d(x_1, x_2)}, 1 - \frac{t}{t + d(x_2, x_3)}\right\} \\ \Longrightarrow\ \frac{d(x_1, x_3)}{t + d(x_1, x_3)} \leq \text{maks}\left\{\frac{d(x_1, x_2)}{t + d(x_1, x_2)}, \frac{d(x_2, x_3)}{t + d(x_2, x_3)}\right\} \\ \Longrightarrow\ N_d(x_1, x_3, t) \leq \text{maks}\{N_d(x_1, x_2, t), N_d(x_2, x_3, t)\}. \end{aligned}$$

Tersine, $(M_d, N_d, *, \diamondsuit)$, X üzerinde bir sezgisel fuzzy ultrametrik olsun. Bu durumda her $x_1, x_2, x_3 \in X$ ve $t > 0$ için $M_d(x_1, x_3, t) \geq \min\{M_d(x_1, x_2, t), M_d(x_2, x_3, t)\}$ ve $N_d(x_1, x_3, t) \leq \text{maks}\{N_d(x_1, x_2, t), N_d(x_2, x_3, t)\}$ dir.

$$\begin{aligned} d(x_1, x_3) &= t.\left[\frac{1}{1 - N_d(x_1, x_3, t)} - 1\right] \\ &\leq t.\left[\frac{1}{1 - \text{maks}\{N_d(x_1, x_2, t), N_d(x_2, x_3, t)\}} - 1\right] \\ &= t.\left[\frac{1}{\min\left\{1 - \frac{d(x_1, x_2)}{t + d(x_1, x_2)}, 1 - \frac{d(x_2, x_3)}{t + d(x_2, x_3)}\right\}} - 1\right] \\ &= t.\left[\text{maks}\left\{\frac{d(x_1, x_2)}{t}, \frac{d(x_2, x_3)}{t}\right\}\right] = \text{maks}\{d(x_1, x_2), d(x_2, x_3)\}. \end{aligned}$$

Örnek

Her sezgisel fuzzy ultrametrik, minimum t-normu ve maksimum t-conormu ile kuvvetlidir.

5.1.5. Önerme

$X \neq \varnothing$ bir küme, $g : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ bire-bir bir fonksiyon ve $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [0, +\infty)$ sürekli artan bir fonksiyon olsun. $\lambda, \mu > 0$ sabit olmak üzere, $X \times X \times \mathbb{R}^+$ üzerinde tanımlı M, N fonksiyonları

$$M(x, y, t) = \left(\frac{(\min \{g(x), g(y)\})^\lambda + \varphi(t)}{(\text{maks} \{g(x), g(y)\})^\lambda + \varphi(t)} \right)^\mu,$$

$$N(x, y, t) = 1 - \left(\frac{(\min \{g(x), g(y)\})^\lambda + \varphi(t)}{(\text{maks} \{g(x), g(y)\})^\lambda + \varphi(t)} \right)^\mu$$

biçimde tanımlansın. $a * b = ab$ ve $a \diamondsuit b = a + b - ab$ olmak üzere, $(M, N, *, \diamondsuit)$, X üzerinde bir sezgisel fuzzy metriktir.

İspat

M ve N fonksiyonlarının (IFM-1)-(IFM-4), (IFM-6) ve (IFM-7)-(IFM-9), (IFM-11) şartlarını sağladığı açıktır. (IFM-5) ve (IFM-10) şartlarının sağlandığını gösterelim.

(IFM-5) Kabul edelim ki $g(x) \leq g(z)$ olsun, aşağıdaki üç durum mevcuttur.

$$M(x, z, t + s) = \left(\frac{g(x)^\lambda + \varphi(t + s)}{g(y)^\lambda + \varphi(t + s)} \right)^\mu . \left(\frac{g(y)^\lambda + \varphi(t + s)}{g(z)^\lambda + \varphi(t + s)} \right)^\mu$$

eşitligi ve φ fonksiyonunun artanlığı kullanılarak,

(1) $g(x) \leq g(y) \leq g(z)$ ise,

$$\begin{aligned} M(x, z, t + s) &= \left(\frac{g(x)^\lambda + \varphi(t + s)}{g(y)^\lambda + \varphi(t + s)} \right)^\mu . \left(\frac{g(y)^\lambda + \varphi(t + s)}{g(z)^\lambda + \varphi(t + s)} \right)^\mu \\ &\geq \left(\frac{g(x)^\lambda + \varphi(t)}{g(y)^\lambda + \varphi(t)} \right)^\mu . \left(\frac{g(y)^\lambda + \varphi(s)}{g(z)^\lambda + \varphi(s)} \right)^\mu \\ &= M(x, y, t).M(y, z, s), \end{aligned}$$

(2) $g(y) \leq g(x) \leq g(z)$ ise,

$$\begin{aligned} M(x,z,t+s) &= \left(\frac{g(x)^\lambda + \varphi(t+s)}{g(y)^\lambda + \varphi(t+s)}\right)^\mu . \left(\frac{g(y)^\lambda + \varphi(t+s)}{g(z)^\lambda + \varphi(t+s)}\right)^\mu \\ &\geq \left(\frac{g(x)^\lambda + \varphi(t)}{g(y)^\lambda + \varphi(t)}\right)^\mu . \left(\frac{g(y)^\lambda + \varphi(s)}{g(z)^\lambda + \varphi(s)}\right)^\mu \\ &\geq \left(\frac{g(y)^\lambda + \varphi(t)}{g(x)^\lambda + \varphi(t)}\right)^\mu . \left(\frac{g(y)^\lambda + \varphi(s)}{g(z)^\lambda + \varphi(s)}\right)^\mu = M(x,y,t).M(y,z,s), \end{aligned}$$

(3) $g(x) \leq g(z) \leq g(y)$ ise,

$$\begin{aligned} M(x,z,t+s) &= \left(\frac{g(x)^\lambda + \varphi(t+s)}{g(y)^\lambda + \varphi(t+s)}\right)^\mu . \left(\frac{g(y)^\lambda + \varphi(t+s)}{g(z)^\lambda + \varphi(t+s)}\right)^\mu \\ &\geq \left(\frac{g(x)^\lambda + \varphi(t)}{g(y)^\lambda + \varphi(t)}\right)^\mu . \left(\frac{g(y)^\lambda + \varphi(s)}{g(z)^\lambda + \varphi(s)}\right)^\mu \\ &\geq \left(\frac{g(x)^\lambda + \varphi(t)}{g(y)^\lambda + \varphi(t)}\right)^\mu . \left(\frac{g(z)^\lambda + \varphi(s)}{g(y)^\lambda + \varphi(s)}\right)^\mu = M(x,y,t).M(y,z,s) \end{aligned}$$

elde edilir. $g(x) > g(z)$ olması halinde de benzer işlemler yapılır.

(IFM-10) Kabul edelim ki $g(x) \leq g(z)$ olsun, aşağıdaki üç durum mevcuttur.

(1) $g(x) \leq g(y) \leq g(z)$ ise,

$$\begin{aligned} N(x,y,t)+N(y,z,t)-[N(x,y,t).N(y,z,t)] &= 1-\left(\frac{g(x)^\lambda+\varphi(t)}{g(y)^\lambda+\varphi(t)}\right)^\mu + 1-\left(\frac{g(y)^\lambda+\varphi(s)}{g(z)^\lambda+\varphi(s)}\right)^\mu \\ &\quad -\left(1-\left(\frac{g(x)^\lambda+\varphi(t)}{g(y)^\lambda+\varphi(t)}\right)^\mu\right).\left(1-\left(\frac{g(y)^\lambda+\varphi(s)}{g(z)^\lambda+\varphi(s)}\right)^\mu\right) \\ &= 1-\left(\frac{g(x)^\lambda+\varphi(t)}{g(y)^\lambda+\varphi(t)}\right)^\mu . \left(\frac{g(y)^\lambda+\varphi(s)}{g(z)^\lambda+\varphi(s)}\right)^\mu \\ &\geq 1-\left(\frac{g(x)^\lambda+\varphi(t+s)}{g(y)^\lambda+\varphi(t+s)}\right)^\mu . \left(\frac{g(y)^\lambda+\varphi(t+s)}{g(z)^\lambda+\varphi(t+s)}\right)^\mu \\ &= 1-\left(\frac{g(x)^\lambda+\varphi(t+s)}{g(z)^\lambda+\varphi(t+s)}\right)^\mu = N(x,z,t+s), \end{aligned}$$

(2) $g(y) \leq g(x) \leq g(z)$ ise,

$$\begin{aligned}
N(x,y,t)+N(y,z,t)-[N(x,y,t).N(y,z,t)] &= 1-\left(\frac{g(y)^\lambda+\varphi(t)}{g(x)^\lambda+\varphi(t)}\right)^\mu+1-\left(\frac{g(y)^\lambda+\varphi(s)}{g(z)^\lambda+\varphi(s)}\right)^\mu \\
&\quad -\left(1-\left(\frac{g(y)^\lambda+\varphi(t)}{g(x)^\lambda+\varphi(t)}\right)^\mu\right).\left(1-\left(\frac{f(y)^\lambda+\varphi(s)}{g(z)^\lambda+\varphi(s)}\right)^\mu\right) \\
&= 1-\left(\frac{g(y)^\lambda+\varphi(t)}{g(x)^\lambda+\varphi(t)}\right)^\mu.\left(\frac{g(y)^\lambda+\varphi(s)}{g(z)^\lambda+\varphi(s)}\right)^\mu \\
&\geq 1-\left(\frac{g(y)^\lambda+\varphi(t+s)}{g(x)^\lambda+\varphi(t+s)}\right)^\mu.\left(\frac{g(y)^\lambda+\varphi(t+s)}{g(z)^\lambda+\varphi(t+s)}\right)^\mu \\
&\geq 1-\left(\frac{g(x)^\lambda+\varphi(t+s)}{g(x)^\lambda+\varphi(t+s)}\right)^\mu.\left(\frac{g(x)^\lambda+\varphi(t+s)}{g(z)^\lambda+\varphi(t+s)}\right)^\mu \\
&= 1-\left(\frac{g(x)^\lambda+\varphi(t+s)}{g(z)^\lambda+\varphi(t+s)}\right)^\mu = N(x,z,t+s),
\end{aligned}$$

(3) $g(x) \leq g(z) \leq g(y)$ ise,

$$\begin{aligned}
N(x,y,t)+N(y,z,t)-[N(x,y,t).N(y,z,t)] &= 1-\left(\frac{g(x)^\lambda+\varphi(t)}{g(y)^\lambda+\varphi(t)}\right)^\mu+1-\left(\frac{g(z)^\lambda+\varphi(s)}{g(y)^\lambda+\varphi(s)}\right)^\mu \\
&\quad -\left(1-\left(\frac{g(x)^\lambda+\varphi(t)}{g(y)^\lambda+\varphi(t)}\right)^\mu\right).\left(1-\left(\frac{g(z)^\lambda+\varphi(s)}{g(y)^\lambda+\varphi(s)}\right)^\mu\right) \\
&= 1-\left(\frac{g(x)^\lambda+\varphi(t)}{g(y)^\lambda+\varphi(t)}\right)^\mu.\left(\frac{g(z)^\lambda+\varphi(s)}{g(y)^\lambda+\varphi(s)}\right)^\mu \\
&\geq 1-\left(\frac{g(x)^\lambda+\varphi(t+s)}{g(y)^\lambda+\varphi(t+s)}\right)^\mu.\left(\frac{g(z)^\lambda+\varphi(t+s)}{g(y)^\lambda+\varphi(t+s)}\right)^\mu \\
&\geq 1-\left(\frac{g(x)^\lambda+\varphi(t+s)}{g(z)^\lambda+\varphi(t+s)}\right)^\mu.\left(\frac{g(z)^\lambda+\varphi(t+s)}{g(z)^\lambda+\varphi(t+s)}\right)^\mu \\
&= 1-\left(\frac{g(x)^\lambda+\varphi(t+s)}{g(z)^\lambda+\varphi(t+s)}\right)^\mu = N(x,z,t+s),
\end{aligned}$$

elde edilir. $g(x) > g(z)$ olması halinde de benzer işlemler yapılır.

Örnek

Önerme 5.1.5 te özel olarak $\mathbb{R}^+$, g ve φ birim fonksiyon, $\lambda = \mu = 1$ alınırsa, M ve N fonksiyonları

$$M(x,y,t) = \frac{\min\{x,y\}+t}{\text{maks}\{x,y\}+t},\ N(x,y,t) = \frac{\text{maks}\{x,y\}-\min\{x,y\}}{\text{maks}\{x,y\}+t}$$

biçiminde olur ve $(M, N, *, \diamondsuit)$, $\mathbb{R}^+$ üzerinde sezgisel fuzzy metriktir. Aynı zamanda

$(M, N, *, \diamondsuit)$ kuvvetlidir.

Çözüm

$(M, N, *, \diamondsuit)$ sezgisel fuzzy metriğinin (IFM-5′) ve (IFM-10′) şartlarını sağladığını göstermeliyiz.

(IFM-5′) Kabul edelim ki $x \leq z$ olsun, Bu durumda $x \leq y \leq z$, $y \leq x \leq z$ ve $x \leq z \leq y$ durumları söz konusudur.

(1) $x \leq y \leq z$ ise,

$$\begin{aligned} M(x,z,t) &= \frac{x+t}{z+t} \\ &= \frac{x+t}{y+t}.\frac{y+t}{z+t} \\ &= M(x,y,t).M(y,z,t). \end{aligned}$$

(2) $y \leq x \leq z$ ise,

$$\begin{aligned} M(x,z,t) &= \frac{x+t}{z+t} \\ &\geq \frac{y+t}{x+t}.\frac{x+t}{z+t} \\ &\geq \frac{y+t}{x+t}.\frac{y+t}{z+t} \\ &= M(x,y,t).M(y,z,t). \end{aligned}$$

(3) $x \leq z \leq y$ ise,

$$\begin{aligned} M(x,z,t) &= \frac{x+t}{z+t} = \frac{x+t}{y+t}.\frac{y+t}{z+t} \\ &\geq \frac{x+t}{y+t}.\frac{z+t}{y+t} \\ &= M(x,y,t).M(y,z,t). \end{aligned}$$

$z < x$ olması durumunda ise $z \leq y \leq x$, $z \leq x \leq y$ ve $y \leq z \leq x$ durumları söz konusudur ve benzer işlemler tekrarlanır.

(IFM-10′) Öncelikle işlem kolaylığı açısından, verilen $\diamondsuit$ sürekli t-conormu için $N(x,y,t)\diamondsuit N(y,z,t)$ ifadesinin eşitini bulalım ve daha sonra muhtemel durumları inceleyelim.

$$\begin{aligned}
N(x,y,t)\diamondsuit N(y,z,t) &= \frac{\text{maks}\{x,y\}-\min\{x,y\}}{\text{maks}\{x,y\}+t}+\frac{\text{maks}\{y,z\}-\min\{y,z\}}{\text{maks}\{y,z\}+t}\\
&-\left[\frac{\text{maks}\{x,y\}-\min\{x,y\}}{\text{maks}\{x,y\}+t}.\frac{\text{maks}\{y,z\}-\min\{y,z\}}{\text{maks}\{y,z\}+t}\right]\\
&=\frac{t.\text{maks}\{x,y\}-t.\min\{x,y\}+\text{maks}\{x,y\}.\text{maks}\{y,z\}}{[\text{maks}\{x,y\}+t].[\text{maks}\{y,z\}+t]}\\
&+\frac{t.\text{maks}\{y,z\}-t.\min\{y,z\}-\min\{x,y\}.\min\{y,z\}}{[\text{maks}\{x,y\}+t].[\text{maks}\{y,z\}+t]}\\
&=\frac{\text{maks}\{x,y\}.[\text{maks}\{y,z\}+t]+t.[\text{maks}\{y,z\}+t]}{[\text{maks}\{x,y\}+t].[\text{maks}\{y,z\}+t]}\\
&+\frac{-\min\{x,y\}.[\min\{y,z\}+t]-t.[\min\{y,z\}+t]}{[\text{maks}\{x,y\}+t].[\text{maks}\{y,z\}+t]}\\
&=\frac{[\text{maks}\{x,y\}+t].[\text{maks}\{y,z\}+t]}{[\text{maks}\{x,y\}+t].[\text{maks}\{y,z\}+t]}\\
&-\frac{[\min\{x,y\}+t].[\min\{y,z\}+t]}{[\text{maks}\{x,y\}+t].[\text{maks}\{y,z\}+t]}.
\end{aligned}$$

Kabul edelim ki $x\le z$ olsun, aşağıdaki üç durum mevcuttur.

(1) $x\le y\le z$ ise,

$$\begin{aligned}
N(x,y,t)+N(y,z,t)-[N(x,y,t).N(y,z,t)] &= \frac{[y+t].[z+t]-[x+t].[y+t]}{[y+t].[z+t]}\\
&=\frac{z-x}{z+t}=N(x,z,t).
\end{aligned}$$

(2) $y\le x\le z$ ise,

$$\begin{aligned}
N(x,y,t)+N(y,z,t)-[N(x,y,t).N(y,z,t)] &= \frac{[x+t].[z+t]-[y+t].[y+t]}{[x+t].[z+t]}\\
&=1-\frac{[y+t]}{[x+t]}.\frac{[y+t]}{[z+t]}\\
&\ge 1-\frac{[x+t]}{[x+t]}.\frac{[x+t]}{[z+t]}\\
&=\frac{z-x}{z+t}=N(x,z,t).
\end{aligned}$$

(3) $x \leq z \leq y$ ise,

$$\begin{aligned} N(x,y,t) + N(y,z,t) - [N(x,y,t).N(y,z,t)] &= \frac{[y+t]\,.\,[y+t] - [x+t]\,.\,[z+t]}{[y+t]\,.\,[y+t]} \\ &= 1 - \frac{[x+t]}{[y+t]}.\frac{[z+t]}{[y+t]} \\ &\geq 1 - \frac{[x+t]}{[z+t]}.\frac{[z+t]}{[z+t]} \\ &= \frac{z-x}{z+t} = N(x,z,t). \end{aligned}$$

$z < x$ olması durumunda benzer işlemler tekrarlanır.

5.1.6. Önerme

$(K, P, *, \diamondsuit)$, $a * b = ab$ sürekli t-normu ve $a \diamondsuit b = a + b - ab$ sürekli t-conormu ile X üzerinde bir sabit sezgisel fuzzy metrik olsun. $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sürekli, artan bir fonksiyon ve $t > 0$ olmak üzere, $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde tanımlı M, N fonksiyonları

$$M(x,y,t) = \frac{\varphi(t)}{\varphi(t) + 1 - K(x,y)} \text{ ve } N(x,y,t) = \frac{P(x,y)}{\varphi(t) + P(x,y)}$$

biçiminde verilsin. Bu durumda $(M, N, *, \diamondsuit)$, X üzerinde bir sezgisel fuzzy metriktir.

İspat

Diğer şartların sağlandığı açık olduğundan (IFM-1), (IFM-5) ve (IFM-10) şartları ispatlanacaktır.

(IFM-1) $\forall x, y, z \in X$ ve $t \in (0, \infty)$ için

$$M(x,y,t) + N(x,y,t) = \frac{\varphi(t)}{\varphi(t) + 1 - K(x,y)} + \frac{P(x,y)}{\varphi(t) + P(x,y)} \leq 1 \tag{5.5}$$

olduğu gösterilmelidir. (5.5) ifadesinde gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\frac{\varphi(t)^2 + \varphi(t).P(x,y) + \varphi(t).P(x,y) + P(x,y) - P(x,y).K(x,y)}{[\varphi(t) + 1 - K(x,y)]\,.\,[\varphi(t) + P(x,y)]} - 1 \leq 0 \tag{5.6}$$

elde edilir. (5.6) eşitsizliğinde gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\frac{\varphi(t).P(x,y) - \varphi(t) + \varphi(t).K(x,y)}{[\varphi(t) + 1 - K(x,y)] \, . \, [\varphi(t) + P(x,y)]} \leq 0 \tag{5.7}$$

elde edilir. (5.7) eşitsizliği ise $\varphi(t) \in \mathbb{R}^+$ ve $(1 - K(x,y))$, $P(x,y) \in [0,1]$ olduğundan

$$\varphi(t). \, [K(x,y) + P(x,y) - 1] \leq 0 \tag{5.8}$$

eşitsizliğine denktir. Bu durumda her $t > 0$ için $\varphi(t) \in \mathbb{R}^+$ olduğundan, $K(x,y) + P(x,y) - 1 \leq 0$ olduğunu görmek yeterli olacaktır. $(K, P, *, \diamondsuit)$ nin X üzerinde bir sabit sezgisel fuzzy metrik olduğu göz önünde bulundurulduğunda $K(x,y) + P(x,y) \leq 1$ dir ve $K(x,y) + P(x,y) - 1 \leq 0$ elde edilir.

(IFM-5) $(K, P, *, \diamondsuit)$ nin X üzerinde bir sabit sezgisel fuzzy metrik olduğundan faydalanılarak

$$[1 - K(x,y)] \, . \, [1 - K(y,z)] = 1 - K(x,y) - K(y,z) + K(x,y).K(y,z) \geq 0$$

elde edilir. Böylece,

$$\varphi(t) \, [(1 - K(x,y)).(1 - K(y,z))] + 1 - K(x,y) - K(y,z) + K(x,y).K(y,z) \geq 0 \tag{5.9}$$

yazılabilir. (5.9) eşitsizliğinde gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} & \varphi(t) - \varphi(t).K(x,y) - \varphi(t).K(y,z) + 1 + K(x,y).K(y,z) - K(x,y) - K(y,z) \\ \geq \; & -\varphi(t).K(x,y).K(y,z) \end{aligned} \tag{5.10}$$

elde edilir. (5.10) eşitsizliğinin her iki yanına $\varphi(t)^2 + \varphi(t)$ eklenip gerekli düzenlemeler yapıldığında sırasıyla

$$\begin{aligned} & \varphi(t) \, [\varphi(t) + 1 - K(y,z)] + [\varphi(t) + 1 - K(y,z)] - K(x,y) \, [\varphi(t) + 1 - K(y,z)] \\ \geq \; & \varphi(t) \, [\varphi(t) + 1 - K(x,y).K(y,z)] \end{aligned}$$

ve

$$[\varphi(t) + 1 - K(y,z)] \, . \, [\varphi(t) + 1 - K(x,y)] \geq \varphi(t). \, [\varphi(t) + 1 - K(x,y).K(y,z)]$$

elde edilir. $(K, P, *, \diamondsuit)$, (IFM-5) şartını sağladığından $K(x,z) \geq K(x,y).K(y,z)$ ve dolayısıyla $1 - K(x,z) \leq 1 - K(x,y).K(y,z)$ olduğundan

$$\begin{aligned}[\varphi(t) + 1 - K(y,z)] \cdot [\varphi(t) + 1 - K(x,y)] &\geq \varphi(t).[\varphi(t) + 1 - K(x,y).K(y,z)] \\ &\geq \varphi(t).[\varphi(t) + 1 - K(x,z)] \end{aligned} \tag{5.11}$$

dir. (5.11) eşitsizliği ise

$$\frac{1}{[\varphi(t) + 1 - K(x,z)]} \geq \frac{\varphi(t)}{[\varphi(t) + 1 - K(x,y)] \cdot [\varphi(t) + 1 - K(y,z)]} \tag{5.12}$$

eşitsizliğine denktir. (5.12) eşitsizliğinin her iki yanı $\varphi(t)$ ile çarpıldığında,

$$\frac{\varphi(t)}{[\varphi(t) + 1 - K(x,z)]} \geq \frac{\varphi(t)}{[\varphi(t) + 1 - K(x,y)]} . \frac{\varphi(t)}{[\varphi(t) + 1 - K(y,z)]}$$

elde edilir yani $M(x,z,t) \geq M(x,y,t).M(y,z,t)$ dir. M artan ve sürekli olduğundan $M(x,z,t+s) \geq M(x,y,t+s).M(y,z,t+s) \geq M(x,y,t).M(y,z,s)$ dir.

(IFM-10) $(K, P, *, \diamondsuit)$, X üzerinde sabit sezgisel fuzzy metrik olduğundan, $x, y, z \in X$ için $P(x,z) \leq P(x,y) + P(y,z) - P(x,y).P(y,z)$ dir.

$$\begin{aligned} N(x,y,t) \diamondsuit N(y,z,t) &= \frac{P(x,y)}{\varphi(t) + P(x,y)} + \frac{P(y,z)}{\varphi(t) + P(y,z)} - \left[\frac{P(x,y)}{\varphi(t) + P(x,y)} . \frac{P(y,z)}{\varphi(t) + P(y,z)} \right] \\ &= \frac{\varphi(t)^2 + \varphi(t).P(x,y) + \varphi(t).P(y,z) + P(x,y).P(y,z) - \varphi(t)^2}{\varphi(t)^2 + \varphi(t).P(x,y) + \varphi(t).P(y,z) + P(x,y).P(y,z)} \\ &= 1 - \frac{\varphi(t)^2}{\varphi(t)^2 + \varphi(t).P(x,y) + \varphi(t).P(y,z) + P(x,y).P(y,z)} \\ &\geq 1 - \frac{\varphi(t)^2}{\varphi(t)^2 + \varphi(t).P(x,y) + \varphi(t).P(y,z)} \\ &\geq 1 - \frac{\varphi(t)^2}{\varphi(t)^2 + \varphi(t).P(x,y) + \varphi(t).P(y,z) - \varphi(t).P(x,y).P(y,z)} \\ &= 1 - \frac{\varphi(t)}{\varphi(t)\left[P(x,y) + P(y,z) - P(x,y).P(y,z)\right]} \\ &\geq 1 - \frac{\varphi(t)}{\varphi(t) + P(x,z)} = \frac{P(x,z)}{\varphi(t) + P(x,z)} = N(x,z,t). \end{aligned} \tag{5.13}$$

N azalan olduğundan, $1 - N(x,y,t+s) \geq 1 - N(x,y,t)$ ve $1 - N(y,z,t+s) \geq$

$1 - N(y, z, s)$ dir. Son iki eşitsizlik taraf tarafa çarpılarak

$$N(x,y,t+s)+N(y,z,t+s)-N(x,y,t+s).N(y,z,t+s) \leq N(x,y,t)+N(y,z,s)-N(x,y,t).N(y,z,s)$$

ve (5.13) ifadesinden,

$$N(x, z, t + s) \leq N(x, y, t) + N(y, z, s) - N(x, y, t).N(y, z, s)$$

elde edilir.

Önerme 5.1.6 da M ve N fonksiyonları sırasıyla t ye göre artan-sürekli ve azalan-sürekli fonksiyonlar olduğundan (IFM-5) ve (IFM-10) şartları yerine (IFM-5′) ve (IFM-10′) şartlarının kullanılmıştır. Yani; $(M, N, *, \diamondsuit)$ bir sezgisel fuzzy metrik olduğunu göstermek için M ve N nin $*$ ve $\diamondsuit$ ile birlikte sırasıyla (IFM-5′) ve (IFM-10′) şartlarını sağlamalarından faydalanılmıştır.

Örnek

Özel olarak Önerme 5.1.6 da $\varphi(t) = t$ alınırsa, M ve N fonksiyonları

$$M(x, y, t) = \frac{t}{t + 1 - K(x, y)} \text{ ve } N(x, y, t) = \frac{P(x, y)}{t + P(x, y)}$$

biçiminde olur ve $(M, N, *, \diamondsuit)$, X üzerinde bir sezgisel fuzzy metriktir. Aynı zamanda $(M, N, *, \diamondsuit)$ kuvvetlidir.

Çözüm

(IFM-5′) Her $x, y, z \in X$, $t > 0$ için

$$\frac{t}{t + 1 - K(x, z)} \geq \frac{t}{t + 1 - K(x, y)} . \frac{t}{t + 1 - K(y, z)} \tag{5.14}$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmelidir. (5.14) eşitsizliğinde gerekli işlemler yapıldığında eşitsizliğin,

$$t.[1 + K(x, z) - K(y, z) - K(x, y)] + 1 + K(x, y).K(y, z) - K(x, y) - K(y, z) \geq 0 \tag{5.15}$$

eşitsizliğine denk olduğu görülür.

$$1 + K(x,y).K(y,z) - K(x,y) - K(y,z) = [1 - K(x,y)] . [1 - K(y,z)] \geq 0$$

olduğundan, $[1+K(x,z)-K(y,z)-K(x,y)] > 0$ olduğunu görmek yeterlidir. $(K, P, *, \diamondsuit)$, X üzerinde bir sabit sezgisel fuzzy metrik olduğundan, $K(x,z) \geq K(x,y).K(y,z)$ dir ve

$$\begin{aligned} 1 + K(x,z) - K(y,z) - K(x,y) &\geq 1 + K(x,y).K(y,z) - K(x,y) - K(y,z) \\ &= [1 - K(x,y)] . [1 - K(y,z)] > 0. \end{aligned}$$

(IFM-10′) Her $x, y, z \in X$, $t > 0$ için

$$\frac{P(x,z)}{t + P(x,z)} \leq \frac{P(x,y)}{t + P(x,y)} + \frac{P(y,z)}{t + P(y,z)} - \left[\frac{P(x,y)}{t + P(x,y)} . \frac{P(y,z)}{t + P(y,z)}\right] \tag{5.16}$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmelidir. (5.16) eşitsizliğinde gerekli işlemler yapıldığında

$$t^2 . [P(x,y) + P(y,z) - P(x,z)] + t.P(x,y).P(y,z) \geq 0$$

elde edilir. $t > 0$ ve $P(x,y).P(y,z) \in [0,1]$ olduğundan, $[P(x,y) + P(y,z) - P(x,z)] \geq 0$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $(K, P, *, \diamondsuit)$, X üzerinde bir sabit sezgisel fuzzy metrik olduğundan $P(x,z) \leq P(x,y) + P(y,z) - P(x,y).P(y,z)$ dır. Böylece

$$-P(x,z) \geq -P(x,y) - P(y,z) + P(x,y).P(y,z)$$

ve

$$P(x,y) + P(y,z) - P(x,z) \geq P(x,y).P(y,z) \geq 0.$$

Örnek

$(K, P, *, \diamondsuit)$, $a * b = ab$ ve $a \diamondsuit b = a + b - ab$ ile X üzerinde bir sabit sezgisel fuzzy metrik olsun. $t > 0$ olmak üzere, $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde tanımlı M, N fonksiyonları

$$M(x,y,t) = \frac{t + K(x,y)}{t+1}, \; N(x,y,t) = \frac{P(x,y)}{t+1}.$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $(M, N, *, \diamondsuit)$, X üzerinde bir kuvvetli sezgisel fuzzy metriktir.

Çözüm

İlk olarak $(M, N, *, \diamondsuit)$ ın X üzerinde bir sezgisel fuzzy metrik olduğunu gösterelim. Diğer şartların sağlandığı açık olduğundan (IFM-5) ve (IFM-10) şartları ispatlanacaktır.

(IFM-5) Her $a, b \in [0,1]$, $t, s > 0$ için

$$\frac{t+a}{t+1}.\frac{t+b}{t+1} \leq \frac{(t+s)+a}{(t+s)+1}.\frac{(t+s)+b}{(t+s)+1} \leq \frac{(t+s)+ab}{(t+s)+1} \tag{5.17}$$

olduğu açıktır. Her $x, y, z \in X$ için $K(x,y).K(y,z) \in [0,1]$ ve $K(x,z) \geq K(x,y).K(y,z)$ olduğundan, (5.17) ifadesi kullanılarak

$$\begin{aligned} M(x,y,t).M(y,z,s) &= \frac{t+K(x,y)}{t+1}.\frac{s+K(y,z)}{s+1} \\ &\leq \frac{(t+s)+K(x,y)}{(t+s)+1}.\frac{(t+s)+K(y,z)}{(t+s)+1} \\ &\leq \frac{(t+s)+K(x,y).K(y,z)}{(t+s)+1} \leq \frac{(t+s)+K(x,z)}{(t+s)+1} = M(x,z,t+s). \end{aligned}$$

(IFM-10) $(K, P, *, \diamondsuit)$, X üzerinde bir sabit sezgisel fuzzy metrik olduğundan, Her $x, y, z \in X$ için $P(x,z) \leq P(x,y) + P(y,z) - P(x,y).P(y,z)$ dır. Böylece,

$$\frac{P(x,z)}{(t+s)+1} \leq \frac{P(x,y)}{(t+s)+1} + \frac{P(y,z)}{(t+s)+1} - \frac{P(x,y).P(y,z)}{(t+s)+1}. \tag{5.18}$$

ve

$$\frac{P(x,y)}{(t+s)+1} \leq \frac{P(x,y)}{t+1} \text{ ve } \frac{P(y,z)}{(t+s)+1} \leq \frac{P(y,z)}{t+1}$$

dir. Aynı zamanda, her $t, s > 0$ için $(t+s)+1 \leq (t+1).(s+1)$ olduğundan,

$$\frac{1}{(t+s)+1} \geq \frac{1}{(t+1).(s+1)}$$

ve

$$-\frac{P(x,y).P(y,z)}{(t+s)+1} \leq -\frac{P(x,y).P(y,z)}{(t+1).(s+1)}$$

ve

$$\begin{aligned}\frac{P(x,y)}{(t+s)+1}+\frac{P(y,z)}{(t+s)+1}-\frac{P(x,y).P(y,z)}{(t+s)+1} &\leq \frac{P(x,y)}{(t+s)+1}+\frac{P(y,z)}{(t+s)+1}-\frac{P(x,y).P(y,z)}{(t+1).(s+1)} \\ &\leq \frac{P(x,y)}{t+1}+\frac{P(y,z)}{s+1}-\frac{P(x,y)}{(t+1)}.\frac{P(y,z)}{s+1} \\ &= N(x,y,t)+N(y,z,s)-N(x,y,t).N(y,z,s)\end{aligned} \tag{5.19}$$

dir. (5.18) ve (5.19) eşitsizliklerinden

$$\frac{P(x,z)}{(t+s)+1} \leq \frac{P(x,y)}{t+1}+\frac{P(y,z)}{s+1}-\frac{P(x,y)}{(t+1)}.\frac{P(y,z)}{s+1}$$

elde edilir yani; $N(x,z,t+s) \leq N(x,y,t)+N(y,z,s)-N(x,y,t).N(y,z,s)$ dir. Şimdi $(M,N,*,\diamondsuit)$ nin kuvvetli olduğunu görmek için (IFM-5′) ve (IFM-10′) şartlarını ispatlayalım.

(IFM-5′) Her $x,y,z \in X$, $t>0$ için

$$\frac{t+K(x,z)}{t+1} \geq \frac{t+K(x,y)}{t+1}.\frac{t+K(y,z)}{t+1}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterecegiz. Bu eşitsizlikte gerekli işlemler yapıldığında, eşitsizliğin

$$t.[K(x,z)+1]+K(x,z)-K(x,y).K(y,z) \geq t.[K(x,y)+K(y,z)]$$

eşitsizliğine denk olduğu görülür. Her $x,y,z \in X$, $t>0$ için $K(x,z) \geq K(x,y).K(y,z)$ olduğundan, $t.[K(x,z)+1] \geq t.[K(x,y)+K(y,z)]$ eşitsizliğinin veya buna denk olan $K(x,z)+1-K(x,y)-K(y,z)$ nin doğruluğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned}K(x,z)+1-K(x,y)-K(y,z) &\geq K(x,y).K(y,z)+1-K(x,y)-K(y,z) \\ &= K(x,y).[K(y,z)-1]+[1-K(y,z)] \\ &= [K(y,z)-1].[K(x,y)-1] \geq 0.\end{aligned}$$

(IFM-10′) $(K, P, *, \diamondsuit)$ sabit sezgisel fuzzy metrik olduğundan, her $x, y, z \in X$ için $P(x,z) \leq P(x,y) + P(y,z) - P(x,y).P(y,z)$ dir. O halde,

$$\frac{P(x,z)}{t+1} \leq \frac{P(x,y)}{t+1} + \frac{P(y,z)}{t+1} - \frac{P(x,y).P(y,z)}{t+1}. \tag{5.20}$$

Ayrıca, her $t, s \in \mathbb{R}^+$ için $t+1 \leq (t+1).(t+1)$ dir. Böylece,

$$\frac{1}{t+1} \geq \frac{1}{(t+1).(t+1)}$$

ve

$$-\frac{P(x,y).P(y,z)}{t+1} \leq -\frac{P(x,y).P(y,z)}{(t+1).(t+1)}$$

ve

$$\frac{P(x,y)}{t+1} + \frac{P(y,z)}{t+1} - \frac{P(x,y).P(y,z)}{t+1} \leq \frac{P(x,y)}{t+1} + \frac{P(y,z)}{t+1} - \frac{P(x,y).P(y,z)}{(t+1).(t+1)}. \tag{5.21}$$

(5.20) ve (5.21) eşitsizliklerinden

$$\frac{P(x,z)}{t+1} \leq \frac{P(x,y)}{t+1} + \frac{P(y,z)}{(t+1} - \frac{P(x,y)}{(t+1)}.\frac{P(y,z)}{(t+1)}$$

elde edilir yani; $N(x,z,t) \leq N(x,y,t) + N(y,z,t) - N(x,y,t).N(y,z,t)$ dir.

5.1.7. Önerme

d, X üzerinde bir metrik, $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow (0,1]$ sürekli ve artan bir fonksiyon olsun. $X \times X \times (0,\infty)$ üzerinde tanımlı M, N fonksiyonları

$$M(x,y,t) = \frac{\varphi(t)}{\varphi(t) + d(x,y)},\ N(x,y,t) = \frac{d(x,y)}{\varphi(t) + d(x,y)}$$

biçiminde verilsin. Bu durumda $(M, N, *, \diamondsuit)$, $a * b = ab$ ve $a \diamondsuit b = a + b - ab$ ile X üzerinde bir kuvvetli sezgisel fuzzy metriktir.

İspat

(IFM-1)-(IFM-4), (IFM-6) ile (IFM-7)-(IFM-9), (IFM-11) şartlarının sağlandığı açıktır. M artan, N azalan ve M, N fonksiyonları t ye göre sürekli olduklarından (IFM-5′) ve (IFM-10′) şartlarından faydalanarak (IFM-5) ve (IFM-10) şartlarının sağlandığını gösterelim.

(IFM-5′) $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow (0,1]$ sürekli ve artan bir fonksiyon olduğu için, M artandır (her $t < s$ için $M(x,y,t) \leq M(x,y,s)$). Her $x, y, z \in X$, $t > 0$ için

$$\frac{\varphi(t)}{\varphi(t)+d(x,z)} \geq \frac{\varphi(t)}{\varphi(t)+d(x,y)} . \frac{\varphi(t)}{\varphi(t)+d(y,z)} \tag{5.22}$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstereceğiz. (5.22) eşitsizliğinde gerekli işlemler yapıldığında, eşitsizliğin

$$[\varphi(t)+d(x,y)] . [\varphi(t)+d(y,z)] \geq \varphi(t) . [\varphi(t)+d(x,z)] \tag{5.23}$$

eşitsizliğine denk olduğu görülür. O halde, (5.22) eşitsizliğinin doğruluğunu görmek için, (5.23) eşitsizliğinin doğru olduğunu görmek yeterlidir.

$$\begin{aligned}\varphi(t)^2+\varphi(t).d(y,z)+\varphi(t).d(x,y)+d(x,y).d(y,z) &= \varphi(t)^2+\varphi(t).[d(x,y)+d(y,z)]+d(x,y).d(y,z)\\ &\geq \varphi(t)^2+\varphi(t).[d(x,z)]+d(x,y).d(y,z)\\ &\geq \varphi(t)^2+\varphi(t).[d(x,z)] = \varphi(t).[\varphi(t)+d(x,z)] .\end{aligned}$$

Böylece, $M(x,z,t) \geq M(x,y,t).M(y,z,t)$ ve $M(x,z,t+s) \geq M(x,y,t+s).M(y,z,t+s)$ dir. Ayrıca M artan ve sürekli olduğundan, $M(x,z,t+s) \geq M(x,y,t+s).M(y,z,t+s) \geq M(x,y,t).M(y,z,s)$ dir.

(IFM-10′) $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow (0,1]$ sürekli ve artan olduğundan, N azalandır (her $t < s$ için $N(x,y,s) \leq N(x,y,t)$). Her $x, y, z \in X$, $t > 0$ için verilen $\diamondsuit$ sürekli t-conormuna göre,

$$
\begin{aligned}
N(x,y,t)\diamondsuit N(y,z,t) &= \frac{d(x,y)}{\varphi(t)+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{\varphi(t)+d(y,z)} - \frac{d(x,y)}{\varphi(t)+d(x,y)}.\frac{d(y,z)}{\varphi(t)+d(y,z)} \\
&= \frac{\varphi(t)^2+\varphi(t).d(x,y)+\varphi(t).d(y,z)+d(x,y).d(y,z)-\varphi(t)^2}{\varphi(t)^2+\varphi(t).d(x,y)+\varphi(t).d(y,z)+d(x,y).d(y,z)} \\
&= 1 - \frac{\varphi(t)^2}{\varphi(t)^2+\varphi(t).\left[d(x,y)+d(y,z)\right]+d(x,y).d(y,z)} \\
&\geq 1 - \frac{\varphi(t)^2}{\varphi(t)^2+\varphi(t).[d(x,y)+d(y,z)]} \\
&\geq 1 - \frac{\varphi(t)}{\varphi(t)+d(x,z)} = \frac{d(x,z)}{\varphi(t)+d(x,z)} = N(x,z,t).
\end{aligned}
$$

Sonuç olarak, $N(x,z,t) \leq N(x,y,t) + N(y,z,t) - N(x,y,t).N(y,z,t)$ ve $N(x,z,t+s) \leq N(x,y,t+s) + N(y,z,t+s) - N(x,y,t+s).N(y,z,t+s)$. Ayrıca, N azalan ve sürekli olduğundan, $N(x,y,t+s) \leq N(x,y,t)$ ve $N(y,z,t+s) \leq N(y,z,s)$, böylece $1-N(x,y,t+s) \geq 1-N(x,y,t)$ ve $1-N(y,z,t+s) \geq 1-N(y,z,s)$ olur. Böylece

$$N(x,z,t+s) \leq N(x,y,t) + N(y,z,s) - N(x,y,t).N(y,z,s)$$

dir ve $(M,N,*,\diamondsuit)$, X üzerinde bir kuvvetli sezgisel fuzzy metriktir.

Örnek

Özel olarak, $(M_d,N_d,*,\diamondsuit)$ standart sezgisel fuzzy metriği $a*b=a.b$ ve $a\diamondsuit b = a+b-a.b$ ile kuvvetlidir.

Örnek

d, X üzerinde metrik, $a*b=ab$ ve $a\diamondsuit b = a+b-ab$ olsun. $t>0$ olmak üzere, $X\times X\times(0,\infty)$ üzerinde tanımlı M,N fonksiyonları

$$M(x,y,t) = e^{\frac{-d(x,y)}{t}} \text{ ve } N(x,y,t) = \frac{e^{\frac{d(x,y)}{t}}-1}{e^{\frac{d(x,y)}{t}}}.$$

biçiminde verilsin. $(M,N,*,\diamondsuit)$ kuvvetli sezgisel fuzzy metriktir.

Çözüm

(IFM-5′) $x, y, z \in X$ ve $t > 0$ olsun. d, X üzerinde metrik olduğundan,

$$\begin{aligned} d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) &\Longrightarrow -\frac{d(x,z)}{t} \geq -\frac{d(x,y)}{t} - \frac{d(y,z)}{t} \\ &\Longrightarrow e^{-\frac{d(x,z)}{t}} \geq e^{-\frac{d(x,y)}{t} - \frac{d(y,z)}{t}} \\ &\Longrightarrow e^{-\frac{d(x,z)}{t}} \geq e^{-\frac{d(x,y)}{t}}.e^{-\frac{d(y,z)}{t}} \\ &\Longrightarrow M(x,z,t) \geq M(x,y,t).M(y,z,t). \end{aligned}$$

(IFM-10′)

$$\begin{aligned} N(x,y,t)\diamondsuit N(y,z,t) &= \frac{e^{\frac{d(x,y)}{t}} - 1}{e^{\frac{d(x,y)}{t}}} + \frac{e^{\frac{d(y,z)}{t}} - 1}{e^{\frac{d(y,z)}{t}}} - \left[\frac{e^{\frac{d(x,y)}{t}} - 1}{e^{\frac{d(x,y)}{t}}}.\frac{e^{\frac{d(y,z)}{t}} - 1}{e^{\frac{d(y,z)}{t}}}\right] \\ &= \frac{e^{\frac{d(x,y)}{t} + \frac{d(y,z)}{t}} - 1}{e^{\frac{d(x,y)}{t} + \frac{d(y,z)}{t}}} = 1 - e^{-\left[\frac{d(x,y)+d(y,z)}{t}\right]} \\ &\geq 1 - e^{-\frac{d(x,z)}{t}} = \frac{e^{\frac{d(x,z)}{t}} - 1}{e^{\frac{d(x,z)}{t}}} = N(x,z,t). \end{aligned}$$

Örnek

d, X üzerinde ultrametrik (non- Archimedean) olmayan bir metrik olsun. Bu durumda, $a * b = \min\{a, b\}$ ve $a\diamondsuit b = \text{maks}\{a, b\}$ ile $(M_d, N_d, *, \diamondsuit)$ standart sezgisel fuzzy metriğinin kuvvetli olma şartları olan (IFM-5′) ve (IFM-10′) şartlarını sağlamadığı açıktır. Çünkü böyle bir durumda, $\exists\ x, y, z \in X$ için $d(x,z) > \text{maks}\{d(x,y), d(y,z)\}$ dir ve Önerme 5.1.4 ten $(M_d, N_d, *, \diamondsuit)$ kuvvetli-olmayan bir sezgisel fuzzy metrik olur.

5.2. Sabit Sezgisel Fuzzy Metrik ve Kuvvetli Sezgisel Fuzzy Metrik Arasındaki İlişkiler

$(M, N, *, \diamondsuit)$ sabit olmayan bir sezgisel fuzzy metrik, yani t ye bağlı olsun. $M_t : X \times X \to (0, 1]$ ve $N_t : X \times X \to [0, 1)$ fonksiyonları sırasıyla $M_t(x, y) = M(x, y, t)$ ve $N_t(x, y) = N(x, y, t)$ biçiminde tanımlı olmak üzere $\{(M_t, N_t, *, \diamondsuit) : t \in (0, \infty)\}$ fonksiyonlar ailesi verilsin. Şimdi bu notasyonu kullanarak Teorem 5.2.1 i verelim.

5.2.1. Teorem

$(M, N, *, \diamondsuit)$, X üzerinde sabit-olmayan bir sezgisel fuzzy metrik olsun. Bu durumda;

(i) $(M, N, *, \diamondsuit)$ kuvvetlidir ancak ve ancak her bir $t > 0$ için $(M_t, N_t, *, \diamondsuit)$ X üzerinde bir sabit sezgisel fuzzy metriktir.

(ii) $(M, N, *, \diamondsuit)$ kuvvetli ise, $\tau_{(M,N)} = \vee \left\{ \tau_{(M_t,N_t)} : t \in (0, \infty) \right\}$.

Eğer, $(M, N, *, \diamondsuit)$ kuvvetli bir sezgisel fuzzy metrik ise, $\{(M_t, N_t, *, \diamondsuit) : t \in (0, \infty)\}$ ailesi, $(M, N, *, \diamondsuit)$ den üretilen sabit sezgisel fuzzy metriklerin ailesidir.

İspat

(i) $(M, N, *, \diamondsuit)$, X üzerinde bir sabit-olmayan ve kuvvetli bir sezgisel fuzzy metrik olsun. Her bir $t > 0$ için $(M_t, N_t, *, \diamondsuit)$ nin X üzerinde bir sabit sezgisel fuzzy metrik olduğunu göstermeliyiz. t nin herhangi bir değeri için M_t ve N_t fonksiyonları t den bağımsızdır. Aynı zamanda, $M_t(x, y) = M(x, y, t)$, $N_t(x, y) = N(x, y, t)$ ve $(M, N, *, \diamondsuit)$ sezgisel fuzzy metrik olduğundan, her $x, y, z \in X$ ve $t > 0$ için,

(IFM-1) $M_t(x, y) + N_t(x, y) = M(x, y, t) + N(x, y, t) \leq 1$,

(IFM-2) $M_t(x, y) = M(x, y, t) > 0$,

(IFM-3) $M_t(x, y) = M(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y$,

(IFM-4) $M_t(x, y) = M(x, y, t) = M(y, x, t) = M_t(y, x)$,

(IFM-5) $M_t(x, z) = M(x, z, t) \geq M(x, y, t) * M(y, z, t) = M_t(x, y) * M_t(y, z)$,

(IFM-6) $M_t(x, y) = M(x, y, t) : (0, \infty) \to (0, 1]$ süreklidir,

(IFM-7) $N_t(x, y) = N(x, y, t) > 0$,

(IFM-9) $N_t(x, y) = N(x, y, t) = N(y, x, t) = N_t(y, x)$,

(IFM-10) $N_t(x, z) = N(x, z, t) \leq N(x, y, t) \diamondsuit N(y, z, t) = N_t(x, y) \diamondsuit N_t(y, z)$,

(IFM-11) $N_t(x,y) = N(x,y,t) : (0,\infty) \to (0,1]$ süreklidir.

Bu durumda Her bir $t > 0$ için $(M_t, N_t, *, \diamondsuit)$, X üzerinde sabit sezgisel fuzzy metriktir.

Tersine, her bir $t > 0$ için $(M_t, N_t, *, \diamondsuit)$, X üzerinde bir sabit sezgisel fuzzy metrik olsun. Şimdi $(M, N, *, \diamondsuit)$ nin kuvvetli olduğunu gösterelim. Her bir $t \in \mathbb{R}^+$ için $(M_t, N_t, *, \diamondsuit)$ kuvvetli olduğundan ve $M_t(x,y) = M(x,y,t)$ ve $N_t(x,y) = N(x,y,t)$ olduğundan,

$$M(x,z,t) = M_t(x,z) \geq M_t(x,y) * M_t(y,z) = M(x,y,t) * M(y,z,t)$$

ve

$$N(x,z,t) = N_t(x,z) \leq N_t(x,y) \diamondsuit N_t(y,z) = N(x,y,t) \diamondsuit N(y,z,t)$$

böylece, $(M, N, *, \diamondsuit)$ kuvvetlidir.

(ii) $(M, N, *, \diamondsuit)$, kuvvetli olsun. $\tau_{(M,N)} = \vee \left\{ \tau_{(M_t,N_t)} : t \in (0,\infty) \right\}$ olduğunu gösterelim. Bu eşitliğin doğruluğunu göstermek için, $x \in X$ olmak üzere her $t > 0$, $r \in (0,1)$ için $B_{(M,N)}(x,r,t) = B_{(M_t,N_t)}(x,r)$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned} B_{(M,N)}(x,r,t) &= \{ y \in X : M(x,y,t) > 1-r \text{ ve } N(x,y,t) < r \ \} \\ &= \{ y \in X : M_t(x,y) = M(x,y,t) > 1-r \text{ ve } N_t(x,y) = N(x,y,t) < r \ \} \\ &= \{ y \in X : M_t(x,y) > 1-r \text{ ve } N_t(x,y) < r \ \} \\ &= B_{(M_t,N_t)}(x,r). \end{aligned}$$

Böylece, her $x \in X, r \in (0,1), t > 0$ için $B_{(M,N)}(x,r,t)$ açık yuvarı $B_{(M_t,N_t)}(x,r)$ açık yuvarı ile çakışır o halde $\tau_{(M,N)} = \vee \left\{ \tau_{(M_t,N_t)} : t \in (0,\infty) \right\}$.

Örnek

Önerme 5.1.5 te özel olarak $X = \mathbb{R}^+$, f ve φ birim fonksiyon, $\alpha = \beta = 1$ alınırsa,

$$M(x,y,t) = \frac{\min\{x,y\} + t}{\text{maks}\{x,y\} + t}, \ N(x,y,t) = \frac{\text{maks}\{x,y\} - \min\{x,y\}}{\text{maks}\{x,y\} + t}$$

biçiminde olur. $(M, N, *, \diamondsuit)$ nin $\mathbb{R}^+$ üzerinde kuvvetli sezgisel fuzzy metrik olduğu

gösterilmişti. $(M, N, *, \diamondsuit)$ kuvvetli sezgisel fuzzy metriğini dikkate alalım. Bu durumda, her bir $t > 0$ için

$$M_t(x,y) = \frac{\min\{x,y\} + t}{\text{maks}\{x,y\} + t} \text{ and } N_t(x,y) = \frac{\text{maks}\{x,y\} - \min\{x,y\}}{\text{maks}\{x,y\} + t}$$

bir sabit sezgisel fuzzy metriktir. Ayrıca her bir $t > 0$ için $\tau_{(M_t,N_t)} = \tau_{(M,N)}$ dir.

Örnek

$$\varphi(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$

olmak üzere, $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times (0,\infty)$ üzerinde

$$M(x,y,t) = \begin{cases} 1 & , x = y \\ \frac{\min\{x,y\}}{\text{maks}\{x,y\}}.\varphi(t) & , x \neq y \end{cases}, N(x,y,t) = \begin{cases} 0 & , x = y \\ \frac{\text{maks}\{x,y\} - \varphi(t)\min\{x,y\}}{\text{maks}\{x,y\}} & , x \neq y \end{cases}$$

biçiminde tanımlı M ve N fonksiyonlarını dikkate alalım. Bu durumda $(M, N, *, \diamondsuit)$, $a * b = ab$ ve $a \diamondsuit b = a + b - ab$ ile $\mathbb{R}^+$ üzerinde bir kuvvetli sezgisel fuzzy metriktir.

$t \geq 1$ için $M_t(x,y) = \frac{\min\{x,y\}}{\text{maks}\{x,y\}}$, $N_t(x,y) = \frac{\text{maks}\{x,y\} - \min\{x,y\}}{\text{maks}\{x,y\}}$ dir ve $\tau_{(M_t,N_t)}$, $\mathbb{R}^+$ üzerindeki alışılmış topolojidir. Gerçekten, $t \geq 1$ için $x \leq y$ ve $x > y$ durumları incelendiğinde,

$$\begin{aligned} B_{(M_t,N_t)} &= \left\{ y : \frac{x}{y} > 1 - r \text{ ve } \frac{y-x}{y} < r \right\} \cup \left\{ y : \frac{y}{x} > 1 - r \text{ ve } \frac{x-y}{x} < r \right\} \\ &= \left\{ y : \frac{x}{1-r} > y \right\} \cup \{ y : x.(1-r) < y \} \\ &= \left(x.(1-r), \frac{x}{1-r} \right) \end{aligned}$$

açık aralığı elde edilir. Dolayısıyla, $x \in X$ ve her $r \in (0,1)$ için,

$$x \in (x - \delta, x + \delta) \subset \left(x.(1-r), \frac{x}{1-r} \right)$$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı bulunur, böylece $\tau_{(M_t,N_t)} \subset \tau_{(M,N)}$ dir.

Tersine $x \in X$ ve her $\delta > 0$ için,

$$x \in \left(x.(1-r), \frac{x}{1-r} \right) \subset (x-\delta, x+\delta)$$

olacak şekilde $r \in (0,1)$ vardır, böylece $\tau_{(M,N)} \subset \tau_{(M_t,N_t)}$ dir.

$t < 1$ için $M_t(x,y) = \frac{\min\{x,y\}}{\text{maks}\{x,y\}}.t$, $N_t(x,y) = \frac{\text{maks}\{x,y\} - t.\min\{x,y\}}{\text{maks}\{x,y\}}$ dir ve $\tau_{(M_t,N_t)}$, $\mathbb{R}^+$ üzerinde ayrık topolojidir. Gerçekten, $t < 1$ için $x \leq y$ ve $x > y$ durumları incelendiğinde,

$$\begin{aligned} B_{(M_t,N_t)_{t\in(0,1)}} &= \left\{ y : \frac{xt}{y} > 1-r \text{ ve } \frac{y-tx}{y} < r \right\} \cup \left\{ y : \frac{yt}{x} > 1-r \text{ ve } \frac{x-ty}{x} < r \right\} \\ &= \left\{ y : \frac{xt}{1-r} > y \right\} \cup \left\{ y : \frac{x.(1-r)}{t} < y \right\} \\ &= \left(\frac{x.(1-r)}{t}, \frac{xt}{1-r} \right) = \{x\}. \end{aligned}$$

Şimdi ise, $t \in (0,\infty)$ olmak üzere, X üzerindeki sabit sezgisel fuzzy metriklerin bir $\{(M_t, N_t, *, \diamondsuit) : t \in (0,\infty)\}$ ailesinin, her bir $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $M_t(x,y) = M(x,y,t)$ ve $N_t(x,y) = N(x,y,t)$ biçiminde tanımlı dönüşümler yardımıyla, hangi durumda X üzerinde bir $(M, N, *, \diamondsuit)$ sezgisel fuzzy metrigi tanımlayacağı gösterilecektir. Bunun için Teorem 5.2.2 yi verelim.

5.2.2. Teorem

$\{(M_t, N_t, *, \diamondsuit) : t \in (0,\infty)\}$, X üzerindeki sabit sezgisel fuzzy metriklerin bir ailesi olsun.

(i) $X \times X \times (0,\infty)$ üzerinde $M(x,y,t) = M_t(x,y)$ ve $N(x,y,t) = N_t(x,y)$ olarak tanımlı M ve N fonksiyonlarını dikkate alalım. Bu durumda $(M, N, *, \diamondsuit)$, X üzerinde bir sezgisel fuzzy metriktir ancak ve ancak $\{M_t : t \in (0,\infty)\}$ artan bir aile (yani $t < t'$ iken $M_t \leq M_{t'}$), $\{N_t : t \in (0,\infty)\}$ azalan bir aile (yani $t < t'$ iken $N_{t'} \leq N_t$) ve her $x, y \in X$ için $M_{xy}(t) = M_t(x,y)$ ve $N_{xy}(t) = N_t(x,y)$ olarak tanımlı $M_{xy}, N_{xy} : (0,\infty) \to [0,1]$ fonksiyonları sürekli fonksiyonlardır.

(ii) Eğer (i) şartı sağlanırsa $(M, N, *, \diamondsuit)$ kuvvetlidir. Bu durumda $(M, N, *)$ kuvvetli sezgisel fuzzy metriği, onun sabit sezgisel fuzzy metriklerinin $\{(M_t, N_t, *, \diamondsuit) : t \in (0,\infty)\}$ ailesi tarafından karakterize edildi denir.

İspat

(i) $(M, N, *, \diamondsuit)$, X üzerinde bir sezgisel fuzzy metrik ise sonuç açıktır. Gerçekten, her bir $t > 0$ için $(M_t, N_t, *, \diamondsuit)$, X üzerinde bir sezgisel fuzzy metrik olduğu için $(M, N, *, \diamondsuit)$ de X üzerinde bir sezgisel fuzzy metriktir. Dolayısıyla $M_{xy}(t) = M_t(x, y)$ ve $N_{xy}(t) = N_t(x, y)$ süreklidir. Ayrıca, her $t > 0$ için $(M_t, N_t, *, \diamondsuit)$ sabit olduğundan $(M_t, N_t, *, \diamondsuit)$ kuvvetlidir. Bu durumda,

$$M(x, z, t) = M_t(x, z) \geq M_t(x, y) * M_t(y, z) = M(x, y, t) * M(y, z, t)$$

ve

$$N(x, z, t) = N_t(x, z) \leq N_t(x, y) \diamondsuit N_t(y, z) = N(x, y, t) \diamondsuit N(y, z, t).$$

O halde her $t > 0$ için $(M, N, *, \diamondsuit)$ kuvvetli, M artan, N azalandır ve $\{M_t : t \in (0, \infty)\}$ artan, $\{N_t : t \in (0, \infty)\}$ azalan bir ailedir. Tersine, $\{M_t : t \in (0, \infty)\}$ artan bir aile, $\{N_t : t \in (0, \infty)\}$ azalan bir aile ve her $x, y \in X$ için $M_{xy}(t) = M_t(x, y)$ ve $N_{xy}(t) = N_t(x, y)$ olarak tanımlı $M_{xy}, N_{xy} : (0, \infty) \to [0, 1]$ fonksiyonları süreklidir. Şimdi de $(M, N, *, \diamondsuit)$ nin X üzerinde bir sezgisel fuzzy metrik olduğunu gösterelim. (IFM-1)-(IFM-4), (IFM-6)-(IFM-9) ve (IFM-11) şartlarının sağlandığı açıktır. Bu yüzden M ve N için sadece üçgen eşitsizliğini gösterelim. Her bir $t > 0$ için $(M_t, N_t, *, \diamondsuit)$ sabit olduğundan, $(M_t, N_t, *, \diamondsuit)$ kuvvetlidir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} M(x, z, t + s) &= M_{t+s}(x, z) \\ &\geq M_{t+s}(x, y) * M_{t+s}(y, z) \\ &\geq M_t(x, y) * M_s(y, z) = M(x, y, t) * M(y, z, s) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} N(x, z, t + s) &= N_{t+s}(x, z) \\ &\leq N_{t+s}(x, y) \diamondsuit N_{t+s}(y, z) \\ &\leq N_t(x, y) \diamondsuit N_s(y, z) = N(x, y, t) \diamondsuit N(y, z, s). \end{aligned}$$

(ii) $\forall x, y, z \in X$, $t > 0$ için

$$M(x, z, t) = M_t(x, z) \geq M_t(x, y) * M_t(y, z) = M(x, y, t) * M(y, z, t)$$

ve

$$N(x,z,t) = N_t(x,z) \leq N_t(x,y) \diamondsuit N_t(y,z) = N(x,y,t) \diamondsuit N(y,z,t).$$

O halde $(M, N, *, \diamondsuit)$ kuvvetlidir ve $(M, N, *, \diamondsuit)$, sabit sezgisel fuzzy metriklerinin $\{(M_t, N_t, *, \diamondsuit) : t \in (0, \infty)\}$ ailesi tarafından karakterize edilmiştir.

Örnek

$\mathbb{R}$ üzerindeki sabit sezgisel fuzzy metriklerin

$$M_t(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{1+|x-y|} & , t \leq 1 \\ \frac{2}{2+|x-y|} & , t > 1 \end{cases} \text{ ve } N_t(x,y) = \begin{cases} \frac{|x-y|}{1+|x-y|} & , t \leq 1 \\ \frac{|x-y|}{2+|x-y|} & , t > 1 \end{cases}$$

olarak verilmiş $\{(M_t, N_t, *, \diamondsuit) : t \in (0, \infty)\}$ ailesini dikkate alalım. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, \infty)$ üzerinde tanımlı M, N fonksiyonları $M(x,y,t) = M_t(x,y)$ ve $N(x,y,t) = N_t(x,y)$ olarak tanımlansın. Bu durumda $(M, N, *, \diamondsuit)$, $a * b = ab$ ve $a \diamondsuit b = a + b - ab$ olarak tanımlı sürekli t-norm ve t-conormu ile $\mathbb{R}$ üzerinde bir sezgisel fuzzy metrik değildir. Gerçekten, $\mathbb{R}$ üzerinde M_{xy} artan bir fonksiyon, N_{xy} azalan bir fonksiyondur fakat $x \neq y$ iken $t = 1$ de M_{xy} ve N_{xy} sürekli değildir.

Örnek

$\mathbb{R}$ üzerindeki sabit sezgisel fuzzy metriklerin

$$M_t(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{1+|x-y|} & , t \leq 1 \\ \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}+|x-y|} & , t > 1 \end{cases} \text{ ve } N_t(x,y) = \begin{cases} \frac{|x-y|}{1+|x-y|} & , t \leq 1 \\ \frac{|x-y|}{\frac{1}{t}+|x-y|} & , t > 1 \end{cases}.$$

olarak verilmiş $\{(M_t, N_t, *, \diamondsuit) : t \in (0, \infty)\}$ ailesini dikkate alalım.$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, \infty)$ üzerinde tanımlı M, N fonksiyonları $M(x,y,t) = M_t(x,y)$ ve $N(x,y,t) = N_t(x,y)$ olarak tanımlansın. Bu durumda $(M, N, *, \diamondsuit)$, $a * b = ab$ ve $a \diamondsuit b = a + b - ab$ olarak tanımlı sürekli t-norm ve t-conormu ile $\mathbb{R}$ üzerinde bir sezgisel fuzzy metrik değildir. Gerçekten, M_{xy} ve N_{xy} fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir fakat, M_{xy}, N_{xy} sırasıyla artan ve azalan olmadığından $(M, N, *, \diamondsuit)$, $\mathbb{R}$ üzerinde sezgisel fuzzy metrik değildir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Klasik metrik uzaylardaki teori ve uygulamaların fuzzy metrik uzaylarda nasıl yorumlanacağı veya çalışıp çalışmayacağı konusu üzerinde bir çok çalışma yapılmıştır. Mevcut tez çalışmasında da klasik metrik uzaylarda önemli yere sahip olan konvekslik ve hiperkonvekslik kavramları fuzzy metrik uzaylara taşınmıştır. Bu tezin orjinal olan üçüncü ve dördüncü bölümlerinde giriş kısmında bahsedilmiş olan klasik metrik uzaylardaki konvekslik ve hiperkonvekslik kavramının fuzzy metrik uzaylardaki karşılığı üzerine odaklanılmıştır. Konveks (metriksel olarak) fuzzy metrik uzay kavramı farklı bir yolla yeniden tanımlanmış ve fuzzy metrik uzaylar için ilk kez tanımlanmış olan hiperkonveks fuzzy metrik uzay kavramının temelini oluşturmuştur. Hem konveks fuzzy metrik uzaylar hem de hiperkonveks fuzzy metrik uzayların bazı temel özellikleri incelenmiştir. Bu bakımdan tezde olan çalışmalar ileride yapılacak olan çalışmalara bir kaynak teşkil edecektir. Klasik konveks metrik uzaylar ve hiperkonveks metrik uzaylarda özellikle sabit nokta teorisiyle gelişimine devam eden bu kavramlar konveks fuzzy metrik uzaylar ve hiperkonveks fuzzy metrik uzaylar için sabit nokta teori çalışmalarında yer bulacaktır. Ayrıca herhangi bir lineer yapıya gereksinim duymayan Banach büzülme teoremi ile lineer yapıya ihtiyaç duyan bazı diğer büzülme teorilerinde, teorinin ihtiyacına göre gereken konvekslik tanımı seçilerek konu ilerletilebilecektir. Ayrıca mevcut tezin beşinci bölümünde üzerinde çalışılan kuvvetli sezgisel fuzzy metrikler, fuzzy metriğin bir genellemesi olduğundan bazı uygulamalarda kullanılabilecektir.

KAYNAKLAR

1. Alaca, C., Turkoglu, D. and Yildiz, C. (2006). Fixed points in intuitionistic fuzzy metric spaces. *Chaos, Solitons & Fractals,* 29(5), 1073-1078.

2. Alaca, C., Altun, İ., Turkoglu, D. (2008). On compatible mappings of type (I) and (II) in intuitionistic fuzzy metric spaces, *Communications of the Korean Mathematical Society,* 23(3), 427-446.

3. Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. (1998) *Principles of real analysis* (Thidrd edition). USA: Gulf Professional Publishing, 372-373.

4. Aronszajn, N. and Panitchpakdi, P. (1956). Extension of uniformly continuous transformations and hyperconvex metric spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, 6(3), 405-439. MR 18:917c.

5. Atanassov, K. T. (1986). Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems,* 20(1), 87-96.

6. Chatterjee, D. (1980). M-Convexity and best approximation.*Institut Mathematique Publications* 28(42), 43-50.

7. Chang, C.L. (1968). Fuzzy topological space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 24, 182-190.

8. Çoker, D. (1997). An introduction to intuitionistic fuzzy topological spaces. *Fuzzy Sets and Systems,* 88(1), 81-89.

9. Efe, H. and Yildiz, C. (2006). On the Hausdorff intuitionistic fuzzy metric on compact sets. *International Journal of Pure and Applied Mathematics, 31(2),* 143-155.

10. Efe, H. and Yiğit, E. (2016). On strong intuitionistic fuzzy metrics. *Jornal of Nonlinear Science and its Applications,* 9, 4016-4038.

11. Espínola, R. and Khamsi, M. A. (2001). Introduction to hyperconvex spaces. In WA Kirk and B. Sims (Eds.), *Handbook of metric fixed point theory.* Netherlands: Springer, pp. 391-435.

12. George, A. and Veeramani, P. (1994). On some results in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems,* 64(3), 395-399.

13. George, A. and Veeramani, P. (1995). Some theorems in fuzzy metric spaces. *Journal of Fuzzy Mathematics*, 3, 933-940.

14. George, A. and Veeramani, P. (1997). On some results of analysis for fuzzy metric

spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 90(3), 365-368.

15. Golshan, H. M., Naraghi, H., and Kazemi, M. (2011). t-Best approximation in fuzzy and intuitionistic fuzzy metric spaces. *Journal of Nonlinear Analysis and Optimization: Theory & Applications,* 2(1).

16. Grabiec, M. (1988). Fixed points in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 27(3), 385-389.

17. Gregori, V. and Romaguera, S. (2000). Some properties of fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems,* 115(3), 485-489.

18. Gregori, V. and Romaguera, S. (2004). Characterizing completable fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems,* 144(3), 411-420.

19. Gregori, V., Romaguera, S. and Veeramani, P. (2006). A note on intuitionistic fuzzy metric spaces. *Chaos, Solitons & Fractals,* 28(4), 902-905.

20. Gregori, V., Morillas, S. and Sapena, A. (2011). Examples of fuzzy metrics and applications. *Fuzzy Sets and Systems,* 170(1), 95-111.

21. Ješić, S. N., Babačev, N. A., and Nikolić, R. M. (2013). A common fixed point theorem in fuzzy metric spaces with nonlinear contractive type condition defined using Φ-function. *In Abstract and Applied Analysis.*

22. Kaleva, O. and Seikkala, S. (1984). On fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems,* 12(3), 215-229.

23. Khamsi, M.A. (2002, January 20-24) *Introduction to metric fixed point theory.* Paper presented at the International Workshop on Nonlinear Functional Analysis and its Applications. Shahid Beheshti University, Tehran, Iran.

24. Khamsi, M.A. and Kirk, W. A. (2011) *An introduction to metric spaces and fixed point theory.* New York: John Wiley & Sons Publishers, 71-98.

25. Kramosil, I. and Michálek, J. (1975). Fuzzy metrics and statistical metric spaces. *Kybernetika,* 11(5), 336-344.

26. Lowen, R. (1996). *Fuzzy Set Theory.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 12-26.

27. Menger, K. (1928). Untersuchungen über allegemeine Metrik. *Mathematische Annalen*, 100(1), 75–63.

28. Miesch, B. and Pavón, M. (2016). Ball intersection properties in metric Spaces. *arXiv preprint arXiv:1610.03307.*

29. Park, S. (1999). Fixed point theorems in hyperconvex metric spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 37(4), 467-472.

30. Park, J. H. (2004). Intuitionistic fuzzy metric spaces. *Chaos, Solitons & Fractals,* 22(5), 1039-1046.

31. Piera, A. S. (2001). A contribution to the study of fuzzy metric spaces. *Applied General Topology,* 2(1), 63-75.

32. Rabin, M. O. (1955). A note on Helly's theorem. *Pacific Journal of Mathematics,* 5(3), 363-366.

33. Roberts, A. W. and Varberg, D. E. (1974). *Convex functions.* New York: Academic Press, 1-120.

34. Rodriguez-López, J. and Romaguera, S. (2004). The Hausdorff fuzzy metric on compact sets. *Fuzzy Sets and Systems,* 147(2), 273-283.

35. Romaguera, S. (2002). On completion of fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems,* 130(3), 399-404.

36. Saadati, R. and Park, J. H. (2006). On the intuitionistic fuzzy topological spaces. *Chaos, Solitons & Fractals,* 27(2), 331-344.

37. Sapena, A. and Morillas, S. (2009). On strong fuzzy metrics. *In Proceedings of the Workshop in Applied Topology WIAT'09,* 9, 135-141.

38. Schweizer, B. and Sklar, A. (1960). Statistical metric spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, 10(1), 313-334.

39. Sharma, B.K. and Dewangan, C.L. (1995). Fixed point theorem in convex metric space. *Novi Sad Journal of Mathematics*, 25(1), 9-18.

40. Shimizu, T. (1998). Fixed Points of Multivalued Nonexpansive Mappings in Certain Convex Metric Spaces. *Nonlinear Analysis and Convex Analysis,* 75-84.

41. Şen, Z. (2001). *Bulanık (Fuzzy) Mantık Ve Modelleme İlkeleri.* İstanbul: Bilge Sanat Yapım Yayınevi, 10-19.

42. Takahashi, W. (1970). A convexity in metric space and nonexpansive mappings. *Kodai Mathematical Seminar Reports*, 22, 142-149.

43. Thanithamil, A. and Thirunavukarasu, P. (2014). Some Results in Fuzzy Metric Spaces with Convex Structure. *International Journal of Mathematical Analysis*, 8(57), 2827-2836.

44. Turkoglu, D., Alaca, C. and Yildiz, C. (2006). Compatible maps and compatible maps of types (α) and (β) in intuitionistic fuzzy metric spaces. *Demonstratio Mathematica,* 39(3), 671-684.

45. Turkoglu, D., Alaca, C., Cho Y. J. and Yildiz, C. (2006). Common fixed point theorems in intuitionistic fuzzy metric spaces. *Journal of Applied Mathematics and Computing,* 22(1), 411-424.

46. Vosoughi, H. and Hosseini Ghoncheh, S.J. (2012). Extension of fuzzy contraction mappings. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 9(5), 1-6.

47. Yiğit, E. and Efe, H. (Baskıda). Convexity and hyperconvexity in fuzzy metric spaces. *Journal of Computational Analysis and Applications,*

48. Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control,* 8(3), 338-353.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler



Soyadı, Adı	:	YİĞİT, Ebru
Uyruğu	:	T.C.
Doğum tarihi ve yeri	:	20.10.1985, Kaman
Medeni hali	:	Bekar
Telefon	:	(0553) 477 34 64
e-mail	:	yigittebru@gmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek Lisans	Kahramanmaraş S. İ. Üniv./Matematik Böl.	2012
Lisans	Niğde Üniversitesi/Matematik Böl.	2009
Lise	İbn-i Sina Y.D.A. Lisesi	2005

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2010-2012	Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Efe, H. and Yiğit, E. (2016). On strong intuitionistic fuzzy metrics. *Journal of Nonlinear Science and its Applications,* 9, 4016-4038.
2. Yiğit, E. and Efe, H. (2017). Intuitionistic Fuzzy Metrics Deduced by Combination of Several Distance Criteria. *Gazi University Journal of Science,* 30(1), 413-429.
3. Yiğit, E. and Efe, H. (Baskıda). Convexity and hyperconvexity in fuzzy metric spaces. *Journal of Computational Analysis and Applications,*
4. Erduran, Ş. F., Yiğit, E., Alar, R. and Gezicioğlu A. (2017). Soft fuzzy metric spaces. *General Letters in Mathematics,* 3(2), 91-101.

Sempozyumlar

1. Yiğit, E.,Erduran, Ş. F., Efe, H. (2017, May 11-13). *Some properties of soft fuzzy metric spaces*. Paper presented at VI. International Conference on Mathematics and Mathematics Education. Harran University, Şanlıurfa, Turkey.
2. Erduran, Ş. F.,Yiğit, E., Alar, R. (2017, May 11-13). *Completeness of soft fuzzy metric spaces*. Paper presented at VI. International Conference on Mathematics and Mathematics Education. Harran University, Şanlıurfa, Turkey.



GAZİ GELECEKTİR...