GENEL SINIR KOŞULLU KUADRATİK SCHRÖDİNGER OPERATÖRÜN SPEKTRUMU VE SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Pınar IŞIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARALIK 2005
ANKARA

Pınar IŞIK tarafından hazırlanan GENEL SINIR KOŞULLU KUADRATİK SCHRÖDİNGER OPERATÖRÜN SPEKTRUMU VE SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ adlı bu tezin YÜKSEK LİSANS tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Esra KIR
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: : _____

Üye : _____

Üye : _____

Üye : _____

Üye : _____

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

GENEL SINIR KOŞULLU KUADRATİK SCHRÖDİNGER OPERATÖRÜN SPEKTRUMU VE SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Pınar IŞIK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Aralık 2005

ÖZET

Bu tezde $L_2[0,\infty)$ uzayında üretilen L operatörünün belirli başlangıç koşularını sağlayan çözümleri incelenmiştir. Operatörün resolventi ve sürekli spektrumu bulunmuştur. Özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin yapısı incelenip, özdeğer ve spektral tekilliklere karşı gelen esas fonksiyonların sırasıyla L_2 ve H_- uzaylarına ait olduğu ispatlanmıştır.

Bilim Kodu : **204.1.095**
Anahtar Kelimeler : **Özdeğer, öz fonksiyon, Wronskian, spektrum, spektral tekillik, resolvent, esas fonksiyon**
Sayfa Adedi : **58**
Tez Yöneticisi : **Yrd. Doç. Dr. Esra KIR**

SPECTRUM AND SPECTRAL SINGULARITIES OF A QUADRATIC PENCIL OF A SCHRODINGER OPERATOR WITH A GENERAL BOUNDARY CONDITION

(M. Sc. Thesis)

Pınar IŞIK

GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
December 2005

ABSTRACT

In this thesis, the solutions satisfying certain boundary conditions of the operator L generated in $L_2[0,\infty)$ are investigated. The resolvent and the continuous spectrum of the operator L are found. The structure of the eigenvalues and spectral singularities is investigated. It is also proved that principal functions corresponding to the eigenvalues and spectral singularities of the operator L belong to L_2 and H_-, respectively.

Science Code : **204.1.095**
Key Words : **Eigenvalue, eigenfunction, Wronskian, spectrum, spectral singularity, resolvent, principal function**
Page Number : **58**
Adviser : **Assist. Prof. Esra KIR**

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın ortaya çıkış sürecinde bilgi birikimi ve tecrübeleriyle beni yönlendiren danışmanım Yrd. Doç. Dr. Esra KIR'a ve her aşamada desteklerini benden esirgemeyen aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iii

ABSTRACT iv

TEŞEKKÜR v

İÇİNDEKİLER vi

KISALTMALAR VE SİMGELER vii

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL KAVRAMLAR 3

2.1. Giriş 3

2.2. $\ell(y) = 0$ Denkleminin Çözümleri 8

3. L OPERATÖRÜNÜN RESOLVENTİ VE SPEKTRUMU 15

3.1. L Operatörünün Resolventi ve Sürekli Spektrumu 15

3.2. L Operatörünün Özdeğerleri ve Spektral Tekillikleri 28

4. L OPERATÖRÜNÜN ÖZDEĞERLERİNE VE SPEKTRAL TEKİLLİKLERİNE KARŞI GELEN ESAS FONKSİYONLAR 42

4.1. L Operatörünün Özdeğerlerine Karşı Gelen Esas Fonksiyonlar 42

4.2. L Operatörünün Spektral Tekilliklerine Karşı Gelen Esas Fonksiyonlar 50

KAYNAKLAR 57

ÖZGEÇMİŞ 58

KISALTMALAR VE SİMGELER

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
C	Kompleks sayılar cümlesi
H	Hilbert uzayı
D(A)	A operatörünün tanım cümlesi
R(A)	A operatörünün değer cümlesi
W[y_1,y_2]	y_1 ve y_2 çözümlerinin Wronskianı
o(1)	Sonsuz küçük değerler
O(1)	Sınırlı değerler
R_λ(A)	A operatörünün resolventi
ρ(A)	A operatörünün resolvent cümlesi
σ(A)	C\ρ(A) A operatörünün spektrumu
σ_d(A)	A operatörünün diskret spektrumu
σ_c(A)	A operatörünün sürekli spektrumu
σ_r(A)	A operatörünün rezidü spektrumu
L*	L operatörünün adjointi

1. GİRİŞ

$L_2(R_+)$ uzayında tanımlı $\ell_0(y) = -y'' + q(x)y$, $x \in R_+ := [0,\infty)$ diferensiyel ifadesi ve $y'(0) - h.y(0) = 0$ sınır koşulu yardımıyla üretilen operatör L_0 ile gösterilsin. Burada q kompleks değerli bir fonksiyon ve $h \in C$ dir. L_0'ın spektral analizinin incelenmesine ilk olarak 1960 yılında Naimark tarafından başlanmıştır (7, 8). Naimark, non-selfadjoint L_0 operatörünün spektrumunun özdeğerler, spektral tekillikler ve sürekli spektrumdan oluştuğunu göstermiştir. Özdeğer olmayan, sürekli spektrumda yer alan, resolventin kutuplarına, Schwartz spektral tekillik adını vermiştir (11). Lyance, spektral tekilliklere karşılık gelen esas fonksiyonların özelliklerini incelemiş ve spektral tekilliklerin, spektral açılıma etkisini araştırmıştır (4).

L_2 uzayında, $\ell(y) = -y'' + [q(x) + 2\lambda p(x) - \lambda^2]y$, $x \in R_+$ diferensiyel ifadesi ve $y(0) = 0$ koşuluyla tanımlanan operatör spektral teorisinin bazı problemleri Jaulent-Jean (3), Maksudov (5) ve Maksudov-Guseinov (6) tarafından ele alınmıştır.

$L_2[0,\infty)$ uzayında, $-y'' + [q(x) + 2\lambda p(x) - \lambda^2]y = 0$, $x \in R_+$ denklemi ve $\int_0^\infty K(x)\,y(x)\,dx + \alpha.y'(0) - \beta.y(0) = 0$ sınır koşulu yardımıyla üretilen Kuadratik Schrödinger Operatörler demeti $L(\lambda)$ ile gösterilmiştir. Bairamov, Çakar ve Krall 1999'daki çalışmalarında L operatörünün spektrumunu bulup, $\lim_{x\to\infty} p(x) = 0$, $\sup_{x\in R_+} \left\{ e^{\varepsilon\sqrt{x}} \left[|q(x)| + |p'(x)| + |K(x)| \right] \right\} < \infty$, $\varepsilon > 0$ koşulları altında L'nin özdeğerlerinin, spektral tekilliklerinin ve onların katlarının sonlu olduğunu göstermişlerdir (1).

Bu tez çalışması 4 bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümün ilk kısmında temel tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci kısımda ise diferensiyel operatör tanımlanmış ve diferensiyel denklemin çözümleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümün ilk kısmında, operatörün resolventi parametrelerin değişimi yöntemiyle hesaplanmış, sürekli spektrumu bulunmuştur. Üçüncü bölümün ikinci kısmında L operatörünün özdeğer ve spektral tekilliklerinin yapısı incelenmiştir.

Dördüncü bölümün ilk kısmında L'nin özdeğerlerine karşılık gelen esas fonksiyonlar tümevarım yöntemiyle bulunmuştur. İkinci kısımda L'nin spektral tekilliklerine karşı gelen esas fonksiyonlar bulunmuştur. Özdeğerlere karşılık gelen esas fonksiyonların L_2 , spektral tekilliklere karşılık gelen esas fonksiyonların H_- uzayına ait olduğu ispatlanmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Giriş

Bu bölümde, spektral analizin bazı temel tanımları ve önemli teoremleri ifade edildikten sonra, tanımlanacak olan diferensiyel denklemin belirli başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri incelenecektir.

Tanım 1: H kompleks lineer uzay olsun. H üzerinde aşağıdaki aksiyonları sağlayan $(,) : H\times H\to C$ dönüşüme iç çarpım denir.

1. $(x,y) = \overline{(y,x)}$

2. $(x_1+x_2,y) = (x_1,y)+(x_2,y)$ $\qquad (x_1,x_2,y\in H)$

3. $(\lambda x,y) = \lambda(x,y)$ $\qquad (\lambda\in C)$

4. $(x,x) \geq 0$

5. $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bu halde (x,y) kompleks sayısına x ve y elemanlarının iç çarpımı, H lineer uzayına ise iç çarpım uzayı denir. H iç çarpım uzayında

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$$

formülü bir norm tanımladığından, iç çarpım uzayı bu norma göre lineer normlu uzay olur. Eğer bu lineer normlu uzay tam ise H uzayına Hilbert uzayı adı verilir.

Tanım 2: H Hilbert uzayında herhangi bir $D\subset H$ lineer alt uzayı ve $A: D\subset H\to H$ dönüşümü verilsin. Eğer her $\alpha_1,\alpha_2\in C$ ve her $x_1,x_2\in D$ için

$A(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2) = \alpha_1Ax_1+\alpha_2Ax_2$ eşitliği sağlanıyorsa A operatörüne lineer operatör, D'ye ise A operatörünün tanım bölgesi denir ve bu küme D(A) ile gösterilir.

C kompleks sayılar cümlesi, X topolojik vektör uzayı, L(X) X'de tanımlı lineer operatörler uzayı olsun.

Tanım 3: $A \in L(X)$ ve $\lambda_0 \in C$ için $(A-\lambda_0 I)x = 0$ denkleminin $x = 0$ aşikar çözümünden başka bir $x \neq 0$ çözümü bulunursa, $\lambda_0 \in C$ sayısına A operatörünün özdeğeri, bu denklemin her bir $x \neq 0$ çözümüne ise A operatörünün λ_0 özdeğerine karşı gelen özfonksiyonu denir.

Tanım 4: $\overline{D(A)} = H$ olmak üzere $\forall x,y \in D(A)$ için

$$(Ax,y) = (x,Ay)$$

eşitliği sağlanıyorsa A operatörüne simetrik operatör denir. A simetrik operatörü için $A^* = A$ ise A operatörüne self adjoint operatör denir (A^*: A'nın adjointidir). Bu şartı sağlamıyorsa operatöre non-self adjoint operatör adı verilir.

Tanım 5: $A \in L(X)$ olmak üzere

$$\sigma_d(A) := \{\lambda: \lambda \in C , R_\lambda(A) = (A-\lambda I)^{-1} \text{ resolvent operatörü yoktur}\}$$

cümlesine A operatörünün özdeğerler cümlesi denir.

Tanım 6: $A \in L(X)$ olmak üzere

$$\rho(A) := \{\lambda: \lambda \in C, R_\lambda(A) \text{ var}, R_\lambda(A) \text{ sınırlı}, \overline{D(R_\lambda(A))} = H \}$$

cümlesine, A operatörünün resolvent cümlesi denir.

Tanım 7: $A \in L(X)$ olmak üzere

$$\sigma_c(A) := \{\lambda: \lambda \in C, R_\lambda(A) \text{ var}, R_\lambda(A) \text{ sınırsız}, \overline{D(R_\lambda(A))} = H \}$$

cümlesine A operatörünün sürekli spektrumu denir.

Tanım 8: $A \in L(X)$ olmak üzere

$$\sigma_r(A) := \{\lambda: \lambda \in C, R_\lambda(A) \text{ var}, R_\lambda(A) \text{ sınırlı}, \overline{D(R_\lambda(A))} \neq H\}$$

cümlesine A operatörünün kalan (rezidü) spektrumu denir.

Tanım 9: $A \in L(X)$ olmak üzere

$$\sigma(A) = C \backslash \rho(A)$$

kümesine A operatörünün spektrumu denir.

Teorem (Privalov) 1 (10)*:* g fonksiyonunun açık üst düzlemde analitik olduğunu kabul edelim. E cümlesi g fonksiyonunun reel sıfırlarının cümlesi ve μ, E cümlesinin reel Lebesque ölçüsü olsun.

Eğer $\mu(E) > 0$ ise bu durumda $g(z) \equiv 0$ olur.

Teorem 2: $f \in L_1(-\infty,+\infty)$ olmak üzere

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).e^{-i\lambda x}\, dx$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun Fourier dönüşümü denir.

$f \in L_2(-\infty,+\infty)$ olduğunda ise $N > 0$ olmak üzere

$$g_N(\lambda) = \int_{-N}^{+N} f(x).e^{-i\lambda x}\, dx$$

şeklinde yazılır. $\lim_{N\to\infty} g_N(\lambda) = g(\lambda)$ olacak şekilde bir $g \in L_2(0,\infty)$ vardır.

Teorem (Pavlov) 3 (9)*:* Kabul edelim ki g(z) fonksiyonu açık kompleks üst düzleminde analitik, tüm basamaktan türevleri sürekli, kapalı üst düzlemde sürekli olsun. Bu durumda T > 0 sayısı var öyleki

$$\left|\frac{d^r}{dz^r}g(z)\right| \le A_r \quad , \quad r = 0,1,2,... \qquad \text{Im } z \ge 0,\ |z| < T$$

ve

$$\left|\int_{-\infty}^{T}\frac{\ln|g(x)|}{1+x^2}dx\right| < \infty \ , \quad \left|\int_{T}^{\infty}\frac{\ln|g(x)|}{1+x^2}dx\right| < \infty$$

sağlanır. Ayrıca M cümlesi g(z) fonksiyonunun sonsuz katlı sıfırlarının cümlesi ve $\mu(M_s) = 0$'dır.

h keyfi pozitif bir sayı olmak üzere

$$\int_0^h \ln T(s).d\mu(M_s) = -\infty$$

ise bu durumda g(z) = 0'dır. Burada

$$T(s) = \inf_r \frac{A_r.s^r}{r!}$$

dir ve $\mu(M_s)$, M cümlesinin s komşuluğunun lineer Lebesque ölçüsüdür.

Teorem (Lebesque) 4: $(g_\nu(x))$ ölçülebilen fonksiyonlar dizisi ve $\lim_{\nu\to\infty} g_\nu(x) = g(x)$ olsun. Eğer bir $G \in L_1(-\infty,+\infty)$ mevcut ve $\forall\nu$ için $|g_\nu(x)| \le G(x)$ ise

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_R g_\nu(x)\,dx = \int_R g(x)\,dx$$

dir.

Şimdi aşağıdaki sınır değer problemini tanımlayalım.

$$-y''+[q(x)+2\lambda p(x)-\lambda^2]y = 0 \quad , \quad x\in R_+ = [0,\infty) \qquad [2.1]$$

diferensiyel denklemi ve

$$\int_0^\infty K(x)\, y(x)\, dx + \alpha y'(0) - \beta y(0) = 0 \qquad [2.2]$$

sınır koşulunu gözönüne alalım.

Burada p ve q fonksiyonları R_+'dan C'ye fonksiyonlar p, R_+ üzerinde sürekli diferensiyellenebilir ve sınırlı fonksiyon, K kompleks değerli fonksiyon ve $\alpha,\beta\in C$, $|\alpha|+|\beta| \neq 0$ dır. λ kompleks parametredir.

[2.1]-[2.2] sınır değer problemi yardımıyla

$L_2[0,\infty;C) := \left\{ f : \int_0^\infty |f(x)|^2\, dx < \infty \right\}$ uzayında L operatörü aşağıdaki biçimde tanımlansın.

$\forall y\in L_2[0,\infty;C)$ diferensiyellenebilen $y(x,\lambda)$ fonksiyonu için

$\ell(y) := -y''+[q(x)+2\lambda p(x)-\lambda^2]y$ diferensiyel ifadesini göz önüne alalım.

$$D(L) = \left\{ y : y\in L_2[0,\infty;C) \;\; \begin{array}{l} 1\text{- } y' \text{ var ve } R_+\text{'nın her bir} \\ \quad \text{sonlu alt aralığında mutlak sürekli} \\ 2-\ell(y)\in L_2[0,\infty;C) \\ 3\text{- } \int_0^\infty K(x)y(x)dx + \alpha y'(0) - \beta y(0) = 0 \end{array} \right\}$$

olmak üzere $\forall y\in D(L)$ için $Ly := \ell(y)$ şeklinde tanımlayalım [1].

2.2. $\ell(y) = 0$ Denkleminin Çözümleri

$$\int_0^\infty |p(x)|dx < \infty \text{ ve } \int_0^\infty x\left[|q(x)| + |p'(x)|\right]dx < \infty \qquad [2.3]$$

şartı altında $\ell(y) = 0$ denkleminin çözümlerini inceleyelim.

$\omega(x) = \int_x^\infty p(t)\,dt$ $A^{\pm}(x,t)$ p ve q'ya göre sürekli diferensiyellenebilir ve $A^{\pm}(x,t)$ aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar.

$$\left|A^{\pm}(x,t)\right| \le c\,\xi\left(\frac{x+t}{2}\right).\exp\{\tau(x)\} \quad (c>0) \qquad [2.4]$$

$$\left|A_x^{\pm}(x,t)\right|, \left|A_t^{\pm}(x,t)\right| \le c\left[\xi^2\left(\frac{x+t}{2}\right) + \theta\left(\frac{x+t}{2}\right)\right] \quad (c>0) \qquad [2.5]$$

Ayrıca

$$\xi(x) = \int_x^\infty \left[|q(t)| + |p'(t)|\right]dt \;,\; \tau(x) = \int_x^\infty \left[t.|q(t)| + 2.|p(t)|\right]dt \qquad [2.6]$$

$$\theta(x) = \frac{1}{4}\left[|q(x)| + |p(x)|^2 + |p'(x)|\right] \qquad [2.7]$$

olarak tanımlanmak üzere

$$e^{+}(x,\lambda) = e^{i[\omega(x)+\lambda x]} + \int_x^\infty A^{+}(x.t)e^{i\lambda t}dt \qquad [2.8]$$

$$e^{-}(x,\lambda) = e^{-i[\omega(x)+\lambda x]} + \int_x^\infty A^{-}(x.t)e^{-i\lambda t}dt \qquad [2.9]$$

$\ell(y) = 0$ denkleminin çözümleridir.

$e^{+}(x,\lambda)$ çözümü $Im\lambda > 0$ üst yarı düzleminde λ'ya göre analitik ve reel eksene dek sürekli fonksiyon ve $e^{-}(x,\lambda)$ çözümü $Im\lambda < 0$ alt yarı düzlemde λ'ya göre analitik ve reel eksene dek sürekli fonksiyondur (1, 3).

Teorem 1 (1)*:* $-y''+[q(x)+2\lambda p(x)-\lambda^2]y = 0$, $0 \le x < \infty$ denkleminin [2.3] koşulunu sağlayan $e^{\pm}(x,\lambda)$ çözümleri aşağıdaki asimptotik eşitlikleri sağlar.

$$e^{+}(x,\lambda) = e^{+i[\omega(x)+\lambda(x)]} + O(1) \;\; ; \;\; |\lambda|\to\infty \;\; , \;\; Im\lambda \ge 0 \qquad [2.10]$$

$$e^{-}(x,\lambda) = e^{-i[\omega(x)+\lambda(x)]} + O(1) \;\; ; \;\; |\lambda|\to\infty \;\; , \;\; Im\lambda \le 0 \qquad [2.11]$$

$$e_x^{+}(x,\lambda) = +i[\lambda-p(x)].e^{+i[\omega(x)+\lambda x]} + O(1) \;\; ; \;\; |\lambda|\to\infty \;\; , \;\; Im\lambda \ge 0 \qquad [2.12]$$

$$e_x^{-}(x,\lambda) = -i[\lambda-p(x)].e^{-i[\omega(x)+\lambda x]} + O(1) \;\; ; \;\; |\lambda|\to\infty \;\; , \;\; Im\lambda \le 0 \qquad [2.13]$$

İspat: [2.10] asimptotik eşitliğinin ispatı ile başlayalım.

(i) $Im\lambda = 0$ olsun. $|e^{i\lambda t}| = 1$ olduğu açıktır.

[2.4] eşitsizliğinin $0 \le x < \infty$ için integrali alınırsa

$$\int_0^{\infty}\left|A_0^{+}(x_0,t)\right|dt \le c\int_0^{\infty}\xi\left(\frac{x_0+t}{2}\right).e^{\tau(x_0)}dt$$

$$= c\int_0^{\infty}\left\{\int_{\frac{x_0+t}{2}}^{\infty}\left[|q(s)|+|p'(s)|\right]ds\right\}.e^{\int_{x_0}^{\infty}[u.|q(u)|+2.|p(u)|]du}dt$$

$$\le c\int_0^{\infty}\left\{\int_{t/2}^{\infty}\left[|q(s)|+|p'(s)|\right]ds\right\}.e^{\int_{x_0}^{\infty}[u.|q(u)|+2.|p(u)|]du}dt$$

$$= c\int_0^{\infty}\left[\int_{t/2}^{\infty}\left[|q(s)|+|p'(s)|\right]ds\right]dt$$

$$= c\int_0^{\infty}\left[\int_0^{2s}\left[|q(s)|+|p'(s)|\right]dt\right]ds$$

$$= 2c\int_0^{\infty} s.\left[|q(s)| + |p'(s)|\right]ds$$

$$< \infty$$

elde edilir. O halde $A^+(x,.) \in L_1[0,\infty)$ olur.

$f(x) \in L_1(-\infty,\infty)$ ise $g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x).e^{-i\lambda x}\,dx$ integraline f(x) fonksiyonunun Fourier dönüşümü denir.

$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x).e^{i\lambda x}\,dx$ integraline ise, g(x)'in ters Fourier dönüşümü adı verilir.

Fourier dönüşümünün özelliklerinden

$g(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x).e^{i\lambda x}\,dx$ integrali $|\lambda| \to \infty$ için $g(\lambda) = o(1)$ olur.

$$\tilde{A}^+(x,t) = \begin{cases} A^+(x,t) & ; \quad x \le t < \infty \\ 0 & ; \quad -\infty < t < x \end{cases}$$

olarak tanımlansın.

$e^+(x,\lambda)$ çözümü $e^+(x,\lambda) = e^{+i[\omega(x)+\lambda x]} + \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}^+(x,t).e^{i\lambda t}\,dt$ olarak yazılır.

$A^+(x,t) \in L_1[0,\infty)$ olduğundan $\tilde{A}^+(x,t) \in L_1(-\infty,+\infty)$ olur. O halde; Fourier dönüşümünün özeliklerinden,

$$e^+(x,\lambda) = e^{+i[\omega(x)+\lambda x]} + O(1) \quad ; \quad |\lambda| \to \infty \quad , \quad \mathrm{Im}\lambda = 0$$

elde edilir.

(ii) $\mathrm{Im}\lambda > 0$ olsun. Bu durumda $e^{i\lambda t}$ fonksiyonu azalandır.

$|A^+(x,t)|.|e^{i\lambda t}| \le |A^+(x,t)|$ ve $A^+(x,t) \in L_1[0,\infty)$ şartı sağlandığından

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \int_0^\infty \left|A^+(x,t).e^{i\lambda t}\right| dt = \int_0^\infty \lim_{|\lambda|\to\infty} \left|A^+(x,t).e^{i\lambda t}\right| dt$$

$$= o(1) \quad ; \quad |\lambda|\to\infty \quad , \quad \mathrm{Im}\lambda > 0$$

elde edilir. O halde $e^+(x,\lambda) = e^{i[\omega(x)+\lambda x]} + O(1) \quad ; \quad |\lambda|\to\infty \quad , \quad \mathrm{Im}\lambda > 0$ olur.

(i) ve (ii)'den $e^+(x,\lambda) = e^{i[\omega(x)+\lambda x]} + O(1) \quad ; \quad |\lambda|\to\infty \quad , \quad \mathrm{Im}\lambda \ge 0$ elde edilir.

Benzer şekilde [2.11] asimptotik eşitliği ispatlanabilir.

Şimdi [2.12] asimptotik eşitliğini ispatlayalım.

$$e^+(x,\lambda) = e^{i[\omega(x)+\lambda x]} + \int_x^\infty A^+(x,t).e^{i\lambda t}\, dt \quad , \quad \omega(x) = \int_x^\infty p(t)\, dt$$

ise

$$e_x^+(x,\lambda) = +i[\lambda - p(x)]e^{+i[\omega(t)+\lambda x]} + \int_x^\infty A_x^+(x,t).e^{i\lambda t}\, dt - A^+(x,x).e^{i\lambda x}$$

olur.

Burada $\left|A_x^+(x,t)\right| \le c\left[\xi^2\left(\frac{x+t}{2}\right) + \theta\left(\frac{x+t}{2}\right)\right]$ eşitsizliğinin her iki yanının $0 \le x < \infty$ için integrali alınırsa

$$\int_0^\infty \left|A_x^+(x,t)\right| dt \le c\int_0^\infty \left[\xi^2\left(\frac{x+t}{2}\right)+\theta\left(\frac{x+t}{2}\right)\right]dt$$

$$= c\left\{\int_0^\infty \xi^2\left(\frac{x+t}{2}\right)dt+\int_0^\infty \theta\left(\frac{x+t}{2}\right)dt\right\}$$

$$\le c\left\{\int_0^\infty\left[\int_{\frac{x+t}{2}}^\infty\left\{|q(s)|+|p'(s)|\right\}ds\right]^2 dt+\frac{1}{4}\int_0^\infty\left[|q(u)|+|p(u)|^2+|p'(u)|\right]du\right\}$$

[2.3] şartı göz önüne alınırsa

$$\int_0^\infty \left|A_x^+(x,t)\right| dt \le c\left\{\int_0^\infty\left[\int_x^\infty s.\left[|q(s)|+|p'(s)|\right]ds\right]^2 dt+\frac{1}{4}\int_0^\infty\left[|q(u)|+|p'(u)|\right]du+\frac{1}{4}\int_0^\infty\left[|p(u)|^2\right]du\right\}$$

$$\le c\left\{\int_0^\infty\left[\int_x^\infty s.\left[|q(s)|+|p'(s)|\right]ds\right]^2 dt+\frac{1}{4}\int_0^\infty u.\left[|q(u)|+|p'(u)|\right]du+\frac{1}{4}\int_0^\infty\left[|p(u)|^2\right]du\right\}<\infty$$

elde edilir. O halde $A_x^+(x,t)\in L_1[0,\infty)$ dir.

(i) $\mathrm{Im}\lambda = 0$ olsun. Bu durumda; $|e^{i\lambda x}| = 1$ ve $A_x^+(x,x) = O(1)$, $|\lambda|\to\infty$ olduğu açıktır.

$e_x^+(x,\lambda) = +i\left[\lambda - p(x)\right]e^{+i[\omega(x)+\lambda x]} + O(1)$, $|\lambda|\to\infty$, $\mathrm{Im}\lambda = 0$ elde edilir.

(ii) $\mathrm{Im}\lambda > 0$ olsun. Bu durumda, $e^{i\lambda x}$ azalandır. $A^+(x,x)\in L_1[0,\infty)$ olduğu açıktır.

$e_x^+(x,\lambda) = +i\left[\lambda - p(x)\right]e^{i[\omega(x)+\lambda x]} + O(1)$; $|\lambda|\to\infty$, $\mathrm{Im}\lambda > 0$ elde edilir.

(i) ve (ii)'den $e_x^+(x,\lambda) = +i\left[\lambda - p(x)\right]e^{i[\omega(x)+\lambda x]} + O(1)$, $|\lambda|\to\infty$, $\mathrm{Im}\lambda \ge 0$ bulunur.

[2.13] asimptotik eşitliği [2.12]'ye benzer biçimde ispatlanabilir.

Lemma 1 (1)*:* [2.1] denkleminin,

$$\lim_{x\to\infty} e^{\pm i\lambda x}.\varphi^{\pm}(x,\lambda)=1 \text{ ve } \lim_{x\to\infty} e^{\pm i\lambda x}.\varphi_x^{\pm}(x,\lambda)=\mp i\lambda \quad , \ \lambda\in \overline{C}_{\pm} \qquad [2.14]$$

koşulunu sağlayan $\varphi^{\pm}(x,\lambda)$ çözümleridir.

Bu çözümler için

$$W\left[e^{\pm}(x,\lambda),\varphi^{\pm}(x,\lambda)\right]=\mp 2i\lambda \quad , \ \lambda\in \overline{C}_{\pm} \qquad [2.15]$$

ve

$$W\left[e^{+}(x,\lambda),e^{-}(x,\lambda)\right]=-2i\lambda \quad , \ \lambda\in R=(-\infty,+\infty) \qquad [2.16]$$

sağlanır.

Burada $\overline{C}_{+}:=\{\lambda:\lambda\in C\,,\,Im\,\lambda\geq 0\}$ ve $\overline{C}_{-}:=\{\lambda:\lambda\in C\,,\,Im\,\lambda\leq 0\}$ dır (3).

İspat: Önce [2.15] eşitliğini ispatlayalım.

(i) $Im\lambda\geq 0$ olsun.

$$W\left[e^{+}(x,\lambda),\varphi^{+}(x,\lambda)\right]=\begin{vmatrix} e^{+}(x,\lambda) & \varphi^{+}(x,\lambda) \\ e_x^{+}(x,\lambda) & \varphi_x^{+}(x,\lambda)\end{vmatrix}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[e^{+}(x,\lambda)\,\varphi_x^{+}(x,\lambda)-e_x^{+}(x,\lambda)\,\varphi^{+}(x,\lambda)\right]$$

$e_x^{+}(x,\lambda)$ tanımı ve [2.14] eşitliğinden

$$W\left[e^{+}(x,\lambda),\varphi^{+}(x,\lambda)\right]=(-i\lambda)-(i\lambda)=-2i\lambda$$

elde edilir.

(ii) $\mathrm{Im}\lambda \le 0$ olsun.

$$W\left[e^{-}(x,\lambda),\varphi^{-}(x,\lambda)\right]=\lim_{x\to\infty} e^{-}(x,\lambda)\,\varphi_x^{-}(x,\lambda)-\lim_{x\to\infty} e_x^{-}(x,\lambda)\,\varphi^{-}(x,\lambda)$$

$e_x^{-}(x,\lambda)$ tanımı ve [2.14] eşitliğinden

$$W\left[e^{-}(x,\lambda),\varphi^{-}(x,\lambda)\right]=+2i\lambda$$

bulunur.

[2.16] eşitliğini ispatlayalım.

$$W\left[e^{+}(x,\lambda),e^{-}(x,\lambda)\right]=\lim_{x\to\infty} e^{+}(x,\lambda)\,e_x^{-}(x,\lambda)-\lim_{x\to\infty} e^{-}(x,\lambda)\,e_x^{-}(x,\lambda)$$

Burada $e_x^{+}(x,\lambda)$ ve $e_x^{-}(x,\lambda)$ fonksiyonlarının tanımı kullanılırsa

$$W[e^{+}(x,\lambda),e^{-}(x,\lambda)] = -2i\lambda \quad , \quad \lambda\in R = (-\infty,+\infty)$$

elde edilir.

3. L OPERATÖRÜNÜN RESOLVENTİ VE SPEKTRUMU

Bu bölümde ilk olarak L operatörünün resolventi ve sürekli spektrumu verilecektir. İkinci kısımda L operatörünün özdeğerleri ve spektral tekilliklerinin yapısı incelenecektir.

3.1. L Operatörünün Resolventi ve Sürekli Spektrumu

Teorem 1 (1)*:* L'nin resolventi integral operatörü ve $\lambda \in \rho(L)$ olup

$$(R_\lambda f)(x) = \int_0^\infty G(x,t;\lambda)\, f(t)\, dt \qquad [3.1]$$

biçimindedir. Ayrıca

$$G(x,t;\lambda) = \begin{cases} G^+(x,t;\lambda) & ; \quad \mathrm{Im}\,\lambda > 0 \\ G^-(x,t;\lambda) & ; \quad \mathrm{Im}\,\lambda < 0 \end{cases} \qquad [3.2]$$

şeklinde olup, $G^+(x,t;\lambda)$, $\mathrm{Im}\lambda > 0$ düzleminde

$G^+(x,t;\lambda) = G_1^+(x,t;\lambda) + G_2^+(x,t;\lambda)$ ve $G^-(x,t;\lambda)$ ise $\mathrm{Im}\lambda < 0$ düzleminde $G^-(x,t;\lambda) = G_1^-(x,t;\lambda) + G_2^-(x,t;\lambda)$ biçimindedir.

Burada

$$G_1^\pm(x,t;\lambda) = \begin{cases} \dfrac{e^\pm(x,\lambda).g^\pm(t,\lambda)}{N^\pm(\lambda)} & ; \quad 0 \le t < x \\ \dfrac{e^\pm(t,\lambda).g^\pm(x,\lambda)}{N^\pm(\lambda)} & ; \quad x \le t < \infty \end{cases} \qquad [3.3]$$

$$G_2^\pm(x,t;\lambda) = \pm \begin{cases} \dfrac{e^\pm(t,\lambda).\varphi^\pm(x,\lambda)}{2i\lambda} & ; \quad 0 \le t < x \\ \dfrac{e^\pm(x,\lambda).\varphi^\pm(t,\lambda)}{2i\lambda} & ; \quad x \le t < \infty \end{cases} \qquad [3.4]$$

biçimindedir. Ayrıca

$$N^{\pm}(\lambda) = \int_0^{\infty} K(x).e^{\pm}(x,\lambda)dx + \alpha.e_x^{\pm}(0,\lambda) - \beta.e^{\pm}(0,\lambda) \qquad [3.5]$$

$$g^{\pm}(t,\lambda) = \mp\frac{1}{2i\lambda}\Big\{e^{\pm}(t,\lambda)\int_t^{\infty} K(x)\,\varphi^{\pm}(x,\lambda)dx + \varphi^{\pm}(t,\lambda)\int_0^{t} K(x)\,e^{\pm}(x,\lambda)dx$$
$$+\left[\alpha.e_x^{\pm}(0,\lambda) - \beta.e^{\pm}(0,\lambda)\right]\varphi^{\pm}(t,\lambda)\Big\} \qquad [3.6]$$

biçiminde tanımlıdır.

İspat: $W\left[e^{\pm}(x,\lambda), g^{\pm}(x,\lambda)\right] = N^{\pm}(\lambda)$ [3.7]

eşitliğini gösterelim.

$$W\left[e^{+}(x,\lambda), g^{+}(x,\lambda)\right] = e^{+}(x,\lambda)\,g_x^{+}(x,\lambda) - e_x^{+}(x,\lambda)\,g^{+}(x,\lambda) \qquad [3.8]$$

[3.6] eşitliğinin x'e göre türevi alınırsa

$$g_x^{+}(x,\lambda) = -\frac{1}{2i\lambda}\Big\{e_x^{+}(x,\lambda)\int_x^{\infty} K(t).\varphi^{+}(t,\lambda)dt + e^{+}(x,\lambda)\left[0 - 1.K(x).\varphi^{+}(x,\lambda)\right]$$
$$+\varphi_x^{+}(x,\lambda)\int_x^{\infty} K(t)\,e^{+}(t,\lambda)dt + \varphi^{+}(x,\lambda)\left[K(x)e^{+}(x,\lambda) - 0\right]$$
$$+\left[\alpha.e_x^{+}(0,\lambda) - \beta.e^{+}(0,\lambda)\right].\varphi_x^{+}(x,\lambda)\Big\}$$

gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$g_x^{+}(x,\lambda) = -\frac{1}{2i\lambda}\Big\{\int_x^{\infty} e_x^{+}(x,\lambda)\,K(t)\,\varphi^{+}(t,\lambda)dt + \int_0^{x} \varphi_x^{+}(x,\lambda)\,K(t)\,e^{+}(t,\lambda)\,dt$$
$$+\left[\alpha.e_x^{+}(0,\lambda) - \beta.e^{+}(0,\lambda)\right].\varphi_x^{+}(x,\lambda)\Big\} \qquad [3.9]$$

elde edilir.

[3.9], [3.8]'de yerine yazılırsa ve [2.15] göz önüne alınırsa

$$W\left[e^{+}(x,\lambda),g^{+}(x,\lambda)\right]=-\frac{1}{2i\lambda}\Big[\Big\{e^{+}(x,\lambda)\int_{0}^{\infty}\left[e_{x}^{+}(x,\lambda).\varphi^{+}(t,\lambda)+\varphi_{x}^{+}(x,\lambda)e^{+}(t,\lambda)\right]K(t)dt$$

$$+e^{+}(x,\lambda)\left[\alpha.e_{x}^{+}(0,\lambda)-\beta.e^{+}(0,\lambda)\right].\varphi_{x}^{+}(x,\lambda)\Big\}$$

$$-e_{x}^{+}(x,\lambda)\Big\{\int_{0}^{\infty}\left[e^{+}(x,\lambda).\varphi^{+}(t,\lambda)+\varphi^{+}(x,\lambda)e^{+}(t,\lambda)\right]K(t)dt$$

$$+\left[\alpha.e_{x}^{+}(0,\lambda)-\beta.e^{+}(0,\lambda)\right]\varphi^{+}(x,\lambda)\Big\}\Big]$$

$$=-\frac{1}{2i\lambda}\Big[\int_{0}^{\infty}\left[e^{+}(x,\lambda)\,e_{x}^{+}(x,\lambda).\varphi^{+}(t,\lambda)+e^{+}(x,\lambda)\,\varphi_{x}^{+}(x,\lambda)\,e^{+}(t,\lambda)\right]K(t)\,dt$$

$$-\int_{0}^{\infty}\left[e^{+}(x,\lambda)\,e_{x}^{+}(x,\lambda)\,\varphi^{+}(t,\lambda)+e_{x}^{+}(x,\lambda)\,\varphi^{+}(x,\lambda)\,e^{+}(t,\lambda)\right]K(t)\,dt$$

$$+\left[\alpha\,e_{x}^{+}(0,\lambda)-\beta\,e^{+}(0,\lambda)\right].\left(e^{+}(x,\lambda)\,\varphi_{x}^{+}(x,\lambda)-e_{x}^{+}(x,\lambda)\,\varphi^{+}(x,\lambda)\right)\Big]$$

$$=-\frac{1}{2i\lambda}\Big\{\int_{0}^{\infty}\left[e^{+}(x,\lambda)\,\varphi_{x}^{+}(x,\lambda)-e_{x}^{+}(x,\lambda)\,\varphi^{+}(x,\lambda)\right]e^{+}(t,\lambda)\,K(t)\,dt$$

$$+\left[\alpha\,e_{x}^{+}(0,\lambda)-\beta\,e^{+}(0,\lambda)\right].W\left[e^{+}(x,\lambda)\,\varphi^{+}(x,\lambda)\right]\Big\}$$

$$=-\frac{1}{2i\lambda}\Big\{\int_{0}^{\infty}W\left[e^{+}(x,\lambda)\,\varphi^{+}(x,\lambda)\right]e^{+}(t,\lambda)\,K(t)\,dt$$

$$+\left[\alpha\,e_{x}^{+}(0,\lambda)-\beta\,e^{+}(0,\lambda)\right].W\left[e^{+}(x,\lambda)\,\varphi^{+}(x,\lambda)\right]\Big\}$$

$$=-\frac{1}{2i\lambda}\,W\left[e^{+}(x,\lambda)\,,\,\varphi^{+}(x,\lambda)\right]\left\{\int_{0}^{\infty}K(t)\,e^{+}(t,\lambda)\,dt+\left[\alpha.e_{x}^{+}(0,\lambda)-\beta.e^{+}(0,\lambda)\right]\right\}$$

$$=\int_{0}^{\infty}K(t).e^{+}(t,\lambda)dt+\alpha.e_{x}^{+}(0,\lambda)-\beta.e^{+}(0,\lambda)$$

$$=+N^{+}(\lambda)$$

Benzer olarak $W[e^{-}(x,\lambda),g^{-}(x,\lambda)] = N^{-}(\lambda)$ eşitliği bulunur. O halde [3.7] eşitliği ispatlanmış olur.

$W[e^+(x,\lambda),g^+(x,\lambda)] = N^+(\lambda)$ eşitliğinden $Im\lambda > 0$ üst yarı düzleminde [2.1] denkleminin temel çözümler sistemi $e^+(x,\lambda)$, $g^+(x,\lambda)$ olur.

O halde $-y''+[q(x)+2\lambda p(x)-\lambda^2]y = 0$ homogen denkleminin bir çözümü $\tilde{y} = c_1e^+(x,\lambda) + c_2g^+(x,\lambda)$ şeklinde ve

$$-y''+[q(x)+2\lambda p(x)-\lambda^2]y = f(x) \qquad [3.10]$$

homogen olmayan diferensiyel denklemin bir çözümünü ise $y = c_1(x)e^+(x,\lambda)+ c_2(x)g^+(x,\lambda)$ biçiminde arayalım.

Bu durumda

$$y' = c_1'(x)e^+(x,\lambda) + c_2'(x)g^+(x,\lambda) + c_1(x)e_x^+(x,\lambda) + c_2(x)g_x^+(x,\lambda)$$

elde edilir.

Şimdi

$$c_1'(x)e^+(x,\lambda) + c_2'(x)g^+(x,\lambda) = 0 \qquad [3.11]$$

olduğunu varsayalım.

Bu durumda

$$y'' = c_1'(x)e_x^+(x,\lambda) + c_2'(x)g_x^+(x,\lambda) + c_1(x)e_{xx}^+(x,\lambda) + c_2(x)g_{xx}^+(x,\lambda)$$

olur. y ve y'' [3.10]'da yerine yazarsak

$$c_1'(x)e_x^+(x,\lambda) + c_2'(x)g_x^+(x,\lambda) = -f(x) \qquad [3.12]$$

elde edilir. [3.11] ve [3.12] eşitliklerinden aşağıdaki denklem sistemi bulunur.

$$\begin{aligned} c_1'(x)e^+(x,\lambda) + c_2'(x)g^+(x,\lambda) &= 0 \\ c_1(x)e_x^+(x,\lambda) + c_2'(x)g_x^+(x,\lambda) &= -f(x) \end{aligned} \qquad [3.13]$$

[3.13] sisteminin çözümünden

$$c_1'(x) = \frac{f(x)}{N^+(\lambda)} g^+(x,\lambda) \text{ ve } c_2'(x) = -\frac{f(x)}{N^+(\lambda)} e^+(x,\lambda)$$

olur. Buradan

$$c_1(x) = \frac{1}{N^+(\lambda)} \int_0^x g^+(t,\lambda) f(t)\,dt + \int_0^\infty K(x)c_1(x)dx + \alpha.c_1'(0) - \beta.c_1(0) \qquad [3.14]$$

$$c_2(x) = \frac{1}{N^+(\lambda)} \int_x^\infty e^+(t,\lambda) f(t)\,dt + \int_0^\infty K(x)c_2(x)dx + \alpha.c_2'(\infty) - \beta.c_2(\infty) \qquad [3.15]$$

elde edilir.

$y = c_1(x)e^+(x,\lambda)+c_2(x)g^+(x,\lambda)$ ile tanımlanan $y(x,\lambda)$ çözümünün $L_2[0,\infty)$'da olması için $c_2(\infty) = 0$ ve sınır koşulunun sağlanması için $c_1(0) = 0$ olmalıdır.

O halde

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \frac{1}{N^+(\lambda)} \int_0^x g^+(t,\lambda) f(t)\,dt \\ c_2(x) &= \frac{1}{N^+(\lambda)} \int_x^\infty e^+(t,\lambda) f(t)\,dt \end{aligned} \qquad [3.16]$$

şeklini alır.

$$y = \int_0^x \frac{e^+(x,\lambda)g^+(t,\lambda)}{N^+(\lambda)} f(t)\,dt + \int_x^\infty \frac{g^+(x,\lambda)e^+(t,\lambda)}{N^+(\lambda)} f(t)\,dt$$

bulunur.

Bu durumda

$$G_1^+(x,t;\lambda)=\begin{cases}\dfrac{e^+(x,\lambda)g^+(t,\lambda)}{N^+(\lambda)} & ; \quad 0\le t<x\\ \dfrac{e^+(t,\lambda)g^+(x,\lambda)}{N^+(\lambda)} & ; \quad x\le t<\infty\end{cases}$$

bulunur.

Parametrelerin değişimi yöntemiyle $G_2^+(x,t;\lambda)=\begin{cases}\dfrac{e^+(t,\lambda)\varphi^+(x,\lambda)}{2i\lambda} & ; \quad 0\le t<x\\ \dfrac{e^+(x,\lambda)\varphi^+(t,\lambda)}{2i\lambda} & ; \quad x\le t<\infty\end{cases}$

aşağıdaki biçimde elde edilir.

[2.15]'den $W[e^+(x,\lambda),\varphi^+(x,\lambda)] = -2i\lambda \neq 0,\ \lambda\in \overline{C}_+$ olduğunu göstermiştik. O halde [2.1] denkleminin temel çözümler sistemi $e^+(x,\lambda)$ ve $\varphi^+(x,\lambda)$ dır. O halde $-y''+[q(x)+2\lambda p(x)-\lambda^2]y=0$ homogen denkleminin bir çözümü $\tilde{y} = c_1\varphi^+(x,\lambda) + c_2e^+(x,\lambda)$ şeklinde ve

$$-y''+ [q(x)+2\lambda p(x)-\lambda^2]y = f(x) \qquad [3.17]$$

homogen olmayan diferensiyel denkleminin bir çözümü ise $y = c_1(x)\varphi^+(x,\lambda)+ c_2(x)e^+(x,\lambda)$ biçiminde arayalım. Bu durumda

$$y'(x) = c_1'(x)\varphi^+(x,\lambda) + c_2'(x)e^+(x,\lambda) + c_1(x)\varphi_x^+(x,\lambda) + c_2(x)e_x^+(x,\lambda)$$

elde edilir. Şimdi

$$c_1'(x)\varphi^+(x,\lambda) + c_2'(x)e^+(x,\lambda) = 0 \qquad [3.18]$$

olduğunu varsayalım.

Bu durumda

$$y''(x) = c_1'(x)\varphi_x^+(x,\lambda) + c_2'(x)e_x^+(x,\lambda) + c_1(x)\varphi_{xx}^+(x,\lambda) + c_2(x)e_{xx}^+(x,\lambda)$$

olur.

y ve y'' [3.17]'de yerine yazarsak

$$c_1'(x)\varphi_x^+(x,\lambda) + c_2'(x)e_x^+(x,\lambda) = -f(x) \qquad [3.19]$$

bulunur. [3.18] ve [3.19] eşitliklerinden dolayı aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} c_1'(x)\varphi^+(x,\lambda) + c_2'(x)e^+(x,\lambda) &= 0 \\ c_1'(x)\varphi_x^+(x,\lambda) + c_2'(x)e_x^+(x,\lambda) &= -f(x) \end{aligned} \qquad [3.20]$$

[3.20] sisteminin çözümünden

$$c_1'(x) = \frac{f(x)}{2i\lambda}e^+(x,\lambda) \quad \text{ve} \quad c_2'(x) = -\frac{f(x)}{2i\lambda}\varphi^+(x,\lambda)$$

olur. Buradan

$$c_1(x) = \frac{1}{2i\lambda}\int_0^x e^+(t,\lambda)f(t)\,dt + \int_0^\infty K(x)c_1(x)dx + \alpha.c_1'(0) - \beta.c_1(0) \qquad [3.21]$$

$$c_2(x) = \frac{1}{2i\lambda}\int_x^\infty \varphi^+(t,\lambda)f(t)\,dt + \int_0^\infty K(x)c_2(x)dx + \alpha.c_2'(\infty) - \beta.c_2(\infty) \qquad [3.22]$$

elde edilir.

$y = c_1(x)\varphi^+(x,\lambda)+c_2(x)e^+(x,\lambda)$ ile tanımlanan $y(x,\lambda)$ çözümünün $L_2[0,\infty)$'da olması için $c_1(0) = 0$ elde edilir. Sınır koşulunun sağlanması için $c_2(\infty) = 0$ olmalıdır.

O halde

$$c_1(x) = \frac{1}{2i\lambda}\int_0^x e^+(t,\lambda) f(t)\,dt$$
$$c_2(x) = \frac{1}{2i\lambda}\int_x^\infty \varphi^+(t,\lambda) f(t)\,dt \qquad [3.23]$$

şeklini alır.

$$y = \int_0^x \frac{e^+(t,\lambda)\varphi^+(x,\lambda)}{2i\lambda} f(t)\,dt + \int_x^\infty \frac{\varphi^+(t,\lambda)e^+(x,\lambda)}{2i\lambda} f(t)\,dt$$

bulunur. O halde

$$G_2^+(x,t;\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\varphi^+(x,\lambda)e^+(t,\lambda)}{2i\lambda} & ; \quad 0 \le t < x \\ \dfrac{e^+(x,\lambda)\varphi^+(t,\lambda)}{2i\lambda} & ; \quad x \le t < \infty \end{cases}$$

dir.

Bu durumda $\mathrm{Im}\lambda > 0$ düzleminde;

$$G^+(x,t;\lambda) = G_1^+(x,t;\lambda) + G_2^+(x,t;\lambda)$$

biçiminde yazılır.

Benzer olarak $\mathrm{Im}\lambda < 0$ düzleminde;

$$G^-(x,t;\lambda) = G_1^-(x,t;\lambda) + G_2^-(x,t;\lambda)$$

biçimindedir.

O halde

$$G(x,t;\lambda)=\begin{cases}G^{+}(x,t;\lambda) & ; \quad \operatorname{Im}\lambda>0\\ G^{-}(x,t;\lambda) & ; \quad \operatorname{Im}\lambda<0\end{cases}$$

olmak üzere

$$(R_\lambda f)(x)=\int_0^\infty G(x,t;\lambda)\,f(t)\,dt$$

elde edilir.

Teorem 2 (1)*:* Her bir λ kompleks sayısı için $\operatorname{Im}\lambda>0$ düzleminde öyle bir $c_\lambda^{+}>0$ ve $d_\lambda^{+}>0$ sayıları var öyle ki

$$\left\|R_\lambda^{+}\right\|\le\frac{c_\lambda^{+}}{\left|N^{+}(\lambda)\right|\sqrt{\left|\operatorname{Im}\lambda\right|}}\quad\text{ve}\quad\left\|R_\lambda^{+}\right\|\le\frac{d_\lambda^{+}}{\lambda\sqrt{\left|\operatorname{Im}\lambda\right|}}\qquad[3.24]$$

ve $\operatorname{Im}\lambda<0$ düzleminde öyle bir $c_\lambda^{-}>0$ ve $d_\lambda^{-}>0$ sayıları var öyleki

$$\left\|R_\lambda^{-}\right\|\le\frac{c_\lambda^{-}}{\left|N^{-}(\lambda)\right|\sqrt{\left|\operatorname{Im}\lambda\right|}}\quad,\quad\left\|R_\lambda^{-}\right\|\le\frac{d_\lambda^{-}}{\lambda\sqrt{\left|\operatorname{Im}\lambda\right|}}\qquad[3.25]$$

olur.

İspat: [3.24] eşitsizliğini ispatlayalım.

$$f^{+}=\begin{cases}f_1^{+} & , \quad G_1^{+}\text{ için}\\ f_2^{+} & , \quad G_2^{+}\text{ için}\end{cases}$$

olarak tanımlayalım.

O halde

$$(R_\lambda^+ f^+)(t) = \int_0^\infty G^+(x,t;\lambda)\, f^+(t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty (G_1^+(x,t;\lambda) + G_2^+(x,t;\lambda))\, f^+(t)\, dt$$

ise $(R_\lambda^+ f_1^+)(t) = \int_0^\infty G_1^+(x,t;\lambda)\, f_1^+(t)\, dt$ yazılır.

$$f_1^+(t) = \begin{cases} \overline{g^+(t,\lambda)} & ; \quad 0 \le t < a \\ 0 & ; \quad a \le t < \infty \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım.

$$\int_0^\infty \left| f_1^+(t) \right|^2 dt = \int_0^a \left| \overline{g^+(t,\lambda)} \right|^2 dt < \infty$$

idi. O halde $f_1^+(.) \in L_2[0,\infty)$ olur.

$$(R_\lambda^+ f_1^+)(t) = \int_0^\infty G_1^+(x,t;\lambda)\, f_1^+(t)\, dt$$

$$= \int_0^a \frac{e^+(x,\lambda)\, g^+(t,\lambda)}{N^+(\lambda)}\, \overline{g^+(t,\lambda)}\, dt$$

$$= \frac{e^+(x,\lambda)}{N^+(\lambda)} \int_0^a \left| g^+(t,\lambda) \right|^2 dt$$

$$(R_\lambda^+ f_1^+)(t) = \frac{e^+(t,\lambda)}{N^+(\lambda)} \left\| f_1^+ \right\|^2$$

olur.

$e^{+}(x,\lambda) = e^{+i[\omega(x)+\lambda x]} + O(1)$, $|\lambda|\to\infty$, $\mathrm{Im}\lambda \geq 0$ asimptotik eşitliğinden

$$|e^{+}(x,\lambda)| = e^{-\mathrm{Im}\lambda x} + O(1) \qquad ; \quad |\lambda|\to\infty \ , \ \mathrm{Im}\lambda \geq 0$$

elde edilir. Buradan

$$|e^{+}(x,\lambda)| > \frac{1}{2}\, e^{-\mathrm{Im}\lambda x}$$

olduğu açıktır.

$$\int_0^\infty \left|e^{+}(x,\lambda)\right|^2 dx \geq \frac{1}{4}\int_a^\infty e^{-2\,\mathrm{Im}\lambda x}\, dx = -\frac{1}{8\,\mathrm{Im}\,\lambda} e^{-2x\,\mathrm{Im}\lambda}\Big|_a^\infty$$

$$= \frac{1}{8\,\mathrm{Im}\,\lambda} e^{-2a\,\mathrm{Im}\,\lambda} \qquad [3.26]$$

elde edilir. O halde

$$\left\|R_\lambda^{+} f_1^{+}\right\|^2 = \int_0^\infty \left|(R_\lambda^{+} f_1^{+})(t)\right|^2 dt$$

$$\geq \int_0^\infty \left|e^{+}(x,\lambda)\right|^2 dx \,.\, \frac{\left\|f_1^{+}\right\|^2}{\left|N^{+}(\lambda)\right|^2}$$

$$> \frac{1}{8\,\mathrm{Im}\,\lambda} e^{-2a\,\mathrm{Im}\,\lambda} \cdot \frac{\left\|f_1^{+}\right\|^2}{\left|N^{+}(\lambda)\right|^2}$$

eşitsizliğinden

$$\left\|R_\lambda^{+} f_1^{+}\right\|^2 > \frac{1}{\left|N^{+}(\lambda)\right|^2}\left\|f_1^{+}\right\|^2 \cdot \frac{1}{8\,\mathrm{Im}\,\lambda} e^{-2a.\mathrm{Im}\,\lambda}$$

ve

$$\left\|R_\lambda^{+}\right\| \geq \frac{c_\lambda^{+}}{\left|N^{+}(\lambda)\right|\sqrt{\left|\mathrm{Im}\,\lambda\right|}}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\mathrm{Im}\lambda > 0$ için $(R_\lambda^+ f_2^+)(t) = \int_0^\infty G_2^+(x,t;\lambda) f_2^+(t)\,dt$ yazılır.

$$f_2^+(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 \le t < a \\ \overline{\varphi^+(t,\lambda)} & ; \quad a \le t < \infty \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım.

$$\int_0^\infty \left|f_2^+(t)\right|^2 dt = \int_0^\infty \left|\overline{\varphi^+(t,\lambda)}\right|^2 dt < \infty$$

idi. O halde $f_2^+(.) \in L_2[0,\infty)$ olur.

$$\begin{aligned}(R_\lambda^+ f_2^+)(t) &= \int_0^\infty G_2^+(x,t;\lambda) f_2^+(t)\,dt \\ &= \int_a^\infty \frac{e^+(x,\lambda)\varphi^+(t,\lambda)}{2i\lambda}\,\overline{\varphi^+(t,\lambda)}\,dt \\ &= \int_a^\infty \frac{e^+(x,\lambda)}{2i\lambda}\left|\varphi^+(t,\lambda)\right|^2 dt \\ &= \frac{e^+(x,\lambda)}{2i\lambda}\left\|f_2^+(t)\right\|^2\end{aligned}$$

elde edilir. [3.26] kullanılırsa

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left|(R_\lambda^+ f_2^+)(t)\right|^2 dt &> \int_0^\infty \frac{\left|e^+(x,\lambda)\right|^2}{\left|2i\lambda\right|^2}\left\|f_2^+(t)\right\|^2 dx \\ &= \frac{\left\|f_2^+\right\|^2}{4\lambda^2}\int_0^\infty \left|e^+(x,\lambda)\right|^2 dx \\ &> \frac{1}{\lambda^2}\left\|f_2^+\right\|^2 \frac{1}{32\,\mathrm{Im}\,\lambda}\,e^{-2a\,\mathrm{Im}\lambda}\end{aligned}$$

yazılır. O halde

$$\left\|R_\lambda^+\right\| \geq \frac{d_\lambda^+}{\lambda\sqrt{|\mathrm{Im}\,\lambda|}}$$

elde edilir.

Benzer şekilde [3.25] elde edilir.

Teorem 3 (1)*:* λ, L operatörünün resolvent cümlesine ait ve $\lambda\to\lambda_0\in(-\infty,\infty)$ ise $\lim_{\lambda\to\lambda_0}\|R_\lambda\| = \infty$.

İspat: [3.24] ve [3.25] eşitsizlikleri ve $\mathrm{Im}\lambda_0 = 0$ olduğundan $\lim_{\lambda\to\lambda_0}\|R_\lambda\| = \infty$ elde edilir.

Teorem 4 (1)*:* L operatörünün sürekli spektrumu reel eksendir. Yani $\sigma_c(L) = (-\infty,+\infty)$ dir.

İspat: $\lambda\in(-\infty,+\infty)$ için Teorem 3.1.2'den $R_\lambda(L)$ operatörünün varlığı ve teorem 3.1.3'den $R_\lambda(L)$'nin sınırsızlığı ispatlandı. Şimdi $R_\lambda(L)$'nin tanım cümlesinin $L_2(0,\infty)$'da yoğun olduğunu gösterelim.

$L_2(0,\infty) = \overline{R(L-\lambda I)} \oplus N(L^*-\lambda I)$ eşitliğinde $N(L^*-\lambda I)$ cümlesi $L^*-\lambda I$ operatörünün çekirdeğidir. L^* ise L'nin adjointidir.

$$L^* := \begin{cases} -y'' + \left[\overline{q(x)} + 2\lambda\overline{p(x)} - \lambda^2\right]y = 0 \\ \int_0^\infty \overline{K(x)}.y(x)\,dx + \alpha.y'(0) - \beta.y(0) = 0 \end{cases}$$

ile gösterilen operatörün pozitif özdeğeri olmadığından $N(L^*-\lambda I) = \{0\}$ elde edilir.

O halde $L_2(0,\infty) = \overline{D((L-\lambda I)^{-1})}$ dir.

Teorem 2 ve 3'ten $\sigma_c(L) = (-\infty,+\infty)$ bulunur.

3.2. L Operatörünün Özdeğerleri ve Spektral Tekillikleri

L operatörünün özdeğerleri ve spektral tekillikleri cümlesini $\sigma_d(L)$ ve $\sigma_{ss}(L)$ ile gösterelim.

Teorem 1 (1)*:*

$$\sigma_d(L) = \{\lambda : \mathrm{Im}\,\lambda > 0\,,\ N^+(\lambda) = 0\} \cup \{\lambda : \mathrm{Im}\,\lambda < 0\,,\ N^-(\lambda) = 0\} \qquad [3.27]$$

$$\sigma_{ss}(L) = \{\lambda : \lambda \in IR^*\,,\ N^+(\lambda) = 0\} \cup \{\lambda : \lambda \in IR^*\,,\ N^-(\lambda) = 0\} \quad \text{ve}$$

$$\{\lambda : \lambda \in IR^*\,,\ N^+(\lambda) = 0\} \cap \{\lambda : \lambda \in IR^*\,,\ N^-(\lambda) = 0\} = \emptyset \qquad [3.28]$$

dir. Burada $IR^* = IR \backslash \{0\}$ dır.

İspat: M_1^+ ve M_1^- ile aşağıdaki cümleleri tanımlayalım.

$$M_1^+ = \{\lambda : \mathrm{Im}\,\lambda > 0\,,\ N^+(\lambda) = 0\}$$

$$M_1^- = \{\lambda : \mathrm{Im}\,\lambda < 0\,,\ N^-(\lambda) = 0\}$$

$$M = M_1^+ \cup M_1^-$$

cümlesini gösterelim.

L operatörünün özdeğerlerinin tanımı kullanılırsa

$$M \subset \sigma_d(L) \qquad [3.29]$$

olduğu açıktır. [3.27] eşitliğini ispatlamak için $\sigma_d(L) \subset M$ olduğunu göstermeliyiz.

a) $\lambda_0 \in C$, $\mathrm{Im}\lambda_0 > 0$ ve $\lambda_0 \in \sigma_d(L)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda [2.1] denkleminin $\lambda=\lambda_0$ için aşikar olmayan [2.2] koşulunu sağlayan $\psi^+(x,\lambda) \in L_2[0,\infty)$ çözümü vardır.

Ayrıca [2.15]'ten $W[e^+(x,\lambda_0)\ ,\ \varphi^+(x,\lambda_0)] = -2i\lambda_0 \neq 0$ olduğundan ψ^+ , $e^+(x,\lambda_0)$ ve $\varphi^+(x,\lambda_0)$'nın lineer kombinasyonu biçiminde yazılır.

$$\tilde{N}^+(\lambda_0) = \int_0^\infty K(x)\varphi^+(x,\lambda_0) + \alpha\varphi_x^+(0,\lambda_0) - \beta\varphi^+(0,\lambda_0)$$

ve

$$N^+(\lambda_0) = \int_0^\infty K(x)e^+(x,\lambda_0) + \alpha e_x^+(0,\lambda_0) - \beta e^+(0,\lambda_0)$$

olmak üzere

$$\psi^+(x,\lambda_0) = \tilde{N}^+(\lambda_0)e^+(x,\lambda_0) - N^+(\lambda_0)\varphi^+(x,\lambda_0)\ ,\ \ \mathrm{Im}\lambda > 0$$

olur. $\psi^+(x,\lambda) \in L_2[0,\infty)$ olduğundan

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\psi^+(x,\lambda_0) &= \lim_{x\to\infty}\left[\tilde{N}^+(\lambda_0)e^+(x,\lambda_0) - N^+(\lambda_0)\varphi^+(x,\lambda_0)\right] \\ &= \lim_{x\to\infty}\tilde{N}^+(\lambda_0)e^+(x,\lambda_0) - \lim_{x\to\infty}N^+(\lambda_0)\varphi^+(x,\lambda_0) \\ &= 0\end{aligned}$$

olması için $N^+(\lambda_0) = 0$ olmalıdır. Buradan $\lambda_0 \in C$, $\mathrm{Im}\lambda_0 > 0$ ve $\lambda_0 \in \sigma_d(L)$ için

$$\lambda_0 \in M_1^+ \qquad [3.30]$$

olur.

b) $\lambda_0 \in C$, $\mathrm{Im}\lambda_0 < 0$ ve $\lambda_0 \in \sigma_d(L)$ kabul edelim. Bu durumda (a) şıkkına benzer olarak

$$\lambda_0 \in M_1^- \qquad [3.31]$$

bulunur.

c) Kabul edelim ki $\lambda_0 \in (-\infty,+\infty)$ olsun. [2.16]'dan $W[e^+(x,\lambda_0),e^-(x,\lambda_0)] = -2i\lambda_0$ idi. Bu durumda $\psi(x,\lambda_0) = N^+(\lambda_0)e^-(x,\lambda_0) - N^-(\lambda_0)e^+(x,\lambda_0)$ lineer kombinasyonu biçiminde yazılır.

$\psi(x,\lambda_0)$ [2.1] – [2.2] sınır değer probleminin bir çözümüdür. Sınır koşulunun sağlanması için $N^+(\lambda_0) = 0$ ve $N^-(\lambda_0) = 0$ olmalıdır. O halde $\psi(x,\lambda_0) \equiv 0$ olduğundan $\psi(x,\lambda_0)$ öz fonksiyon olamaz. λ_0 özdeğer değildir $\lambda_0 \notin \sigma_d(L)$ dir.

Dolayısıyla

$$\sigma_d(L) \cap (-\infty,+\infty) = \emptyset \qquad [3.32]$$

elde ederiz.

[3.30] ve [3.31]'den

$$\sigma_d(L) \subset M \qquad [3.33]$$

olur.

[3.29] ve [3.33]'den ise $\sigma_d(L) = M$ elde edilir.

Şimdi [3.28] eşitliğini ispatlayalım.

Teorem 1'e göre N^+ ve N^- fonksiyonlarının reel eksendeki sıfırları resolventin kutuplarıdır. Diğer taraftan bu sıfırlar aynı zamanda L operatörünün sürekli spektrumu üzerindedir. Fakat [3.32]'ye göre bu sıfırlar L operatörünün özdeğerleri değildir. Bu durumda spektral tekilliklerin tanımına göre

$$\sigma_{ss}(L) = \{\lambda: \lambda \in \mathbb{R}^* , N^+(\lambda) = 0\} \cup \{\lambda: \lambda \in \mathbb{R}^* , N^-(\lambda) = 0\}$$

elde edilir. Böylece Teorem 1'in ispatı tamamlanır.

M_2^+ ile aşağıdaki cümleyi gösterelim.

$$M_2^+ = \{\lambda: \lambda \in \mathbb{R}, N^+(\lambda) = 0\}$$

Teorem 1 açıktır ki L operatörünün özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin yapısını incelememiz için sırası ile N^+ ve N^- fonksiyonlarının üst düzlemde ve alt düzlemdeki sıfırlarının yapısını incelememiz gerekiyor. Basitlik için N^+ fonksiyonunun üst düzlemdeki sıfırlarının yapısını inceleyelim. N^- fonksiyonunun alt düzlemdeki sıfırlarının yapısı benzer şekilde incelenir.

Teorem 2 (1): $K \in L^1(\mathbb{R}_+) \cap L^2(\mathbb{R}_+)$ olsun.

$$\int_0^\infty |p(x)|dx < \infty \ , \ \int_0^\infty x.[|q(x)| + |p'(x)|]dx < \infty$$

koşulu altında aşağıdakiler vardır.

(i) M_1^+ cümlesi sınırlıdır, en çok sayılabilir sayıdadır ve limit noktaları reel eksenin sınırlı bir aralığındadır.

(ii) M_2^+ cümlesi kompakttır.

İspat:

(i) $N^+(\lambda) = \int_0^\infty K(x).e^+(x,\lambda)dx + \alpha e_x^+(0,\lambda) - \beta e^+(0,\lambda)$ idi.

$e^+(x,\lambda) = e^{+i[\omega(x)+\lambda x]} + \int_x^\infty A^+(x,t).e^{i\lambda t}\,dt$ kullanılarak

$$e_x^+(x,\lambda) = i[\omega'(x) + \lambda].e^{+i[\omega(x)+\lambda x]} + \int_x^\infty A_x^+(x,t)e^{i\lambda t}\,dt - A^+(x,x)e^{i\lambda x}$$

ve buradan da

$$e_x^+(0,\lambda) = i[\omega'(0) + \lambda].e^{i\omega(0)} + \int_0^\infty A_x^+(0,t)e^{i\lambda t}\,dt - A^+(0,0)$$

elde edilir. $\omega'(0) = -p(0)$ olduğu göz önüne alınırsa

$$e_x^+(0,\lambda) = i[\lambda - p(0)].e^{i\omega(0)} + \int_0^\infty A_x^+(0,t)e^{i\lambda t}\,dt - A^+(0,0) \qquad [3.34]$$

elde edilir.

[3.34], $e^+(0,\lambda)$ ve $e^+(x,\lambda)$, $N^+(\lambda)$'da yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$f^+(t) = K(t).e^{i\omega(t)} + \int_0^t K(x)A^+(x,t)\,dx + \alpha.A_x^+(0,t) - \beta.A^+(0,t) \qquad [3.35]$$

olmak üzere

$$N^+(\lambda) = i\lambda\alpha e^{i\omega(0)} - \alpha\left[ip(0)e^{i\omega(0)} + A^+(0,0)\right] - \beta e^{i\omega(0)} + \int_0^\infty f^+(t)e^{i\lambda t}\,dt \qquad [3.36]$$

bulunur.

$K \in L^1(\mathbb{R}_+) \cap L^2(\mathbb{R}_+)$ ve $A^+ \in L_1(\mathbb{R}_+)$ olduğundan

$$f^+ \in L_1(\mathbb{R}_+) \qquad [3.37]$$

olduğu açıktır.

Dolayısıyla

$$N^+(\lambda) = i\lambda\alpha.e^{i\omega(0)} - \alpha.[ip(0)e^{i\omega(0)} + A^+(0,0)] - \beta e^{i\omega(0)} + O(1) \quad Im\lambda \geq 0 \ , \ |\lambda| \to \infty \qquad [3.38]$$

eşitliği vardır.

Diğer taraftan $N^+(\lambda)$ fonksiyonu $Im\lambda > 0$ yarı düzleminde analitik $Im\lambda \geq 0$ yarı düzleminde ise süreklidir.

Bu durumda [3.38]'den $N^+(\lambda)$ fonksiyonu yeteri kadar büyük λ'lar ve $Im\lambda \geq 0$ için sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla $N^+(\lambda)$ fonksiyonunun $Im\lambda \geq 0$ yarı düzlemindeki sıfırları (yani M_1^+ ve M_2^+ cümleleri) sınırlı bir bölgededir.

$N^+(\lambda)$ fonksiyonu $Im\lambda > 0$ yarı düzleminde analitik olduğundan onun analitik bölgesinin içindeki sıfırları (yani M_1^+ cümlesi) en çok sayılabilir sayıdadır.

Analitik fonksiyonun analitik bölgesinin içindeki sıfırlarının limit noktaları analitik bölgesinin sınırında olduğundan M_1^+ cümlesinin limit noktaları reel eksenin sınırlı bir aralığında yer alır.

(ii) M_2^+ cümlesinin limit noktaları yine M_2^+'ya ait olduğundan M_2^+ kompakttır.

<u>*Sonuç 3* (1)*:*</u>

$$\lim_{x \to \infty} p(x) = 0 \quad , \quad \sup_{x \in IR_+} \left\{ e^{\varepsilon\sqrt{x}} [|q(x)| + |p'(x)| + |K(x)|] \right\} < \infty \quad , \quad \varepsilon > 0$$

koşulu sağlandığında $N^+(\lambda)$ fonksiyonu $Im\lambda > 0$ açık üst yarı düzleminde analitik ve reel eksende sonsuz basamaktan sürekli diferensiyellenebilen bir fonksiyondur. Ayrıca öyle A_r , $r = 0,1,...$ sabitleri vardır ki

$$\left| \frac{d^r}{d\lambda^r} N^+(\lambda) \right| \leq A_r \quad , \quad r = 0,1,... \quad Im\lambda \geq 0$$

ve

$$\left|N^{+}(\lambda) - i\lambda\alpha e^{i\omega(0)}\right| < \infty \quad , \quad Im\lambda \geq 0$$

eşitlikleri sağlanır. Burada

$$A_r = c.2^r \int_0^{\infty} u^r \, e^{-\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{u}} du \ , r = 1,2,... \ (c > 0)$$

M_1^+ cümlesinin limit noktalarının cümlesini M_3^+ ile M_2^+ cümlesinin limit noktalarının cümlesini M_4^+ ile ve $N^+(\lambda)$ fonksiyonunun kapalı üst düzlemdeki sonsuz katlı sıfırlarının cümlesini M_5^+ ile gösterelim.

Teorem 4 (1)*:* (i) $M_3^+ \subset M_2^+$, $M_4^+ \subset M_2^+$, $M_5^+ \subset M_2^+$

(ii) $M_3^+ \subset M_5^+$, $M_4^+ \subset M_5^+$

İspat: (i) Bilindiği gibi özdeş olarak sıfırdan farklı analitik fonksiyonun analitik bölgesinin içindeki sıfırlarının limit noktaları analitik bölgesinin sınırındadır. Bu nedenle açık üst düzlemde analitik olan $N^+(\lambda)$ fonksiyonunun $Im\lambda > 0$ bölgesindeki sıfırlarının limit noktaları olan M_3^+ cümlesi reel eksende olmalıdır. Buradan ve $N^+(\lambda)$ fonksiyonunun reel eksendeki sürekliliğinden

$$M_3^+ \subset M_2^+$$

olur.

Benzer olarak reel eksende analitik olan $N^+(\lambda)$ fonksiyonunun reel eksendeki limit noktaları olan M_4^+ cümlesi reel eksende olmalıdır.

$$M_4^+ \subset M_2^+$$

yazılır.

Aynı zamanda özdeş olarak sıfır olmayan analitik fonksiyonun sonsuz katlı sıfırları analitik bölgesinin sınırında olduğundan

$$M_5^+ \subset M_2^+$$

elde edilir.

(ii) Kabul edelimki $M_3^+ \not\subset M_5^+$ olsun. Yani $\exists(\lambda_n) \in M_3^+$ ve $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda_0$ var öyleki $\lambda_0 \notin M_5^+$'dır. $N^+(\lambda)$ reel eksene dek sürekli olduğundan $\lambda_0 \in M_1^+$ olur ve öyle n_0 sonlu pozitif tam sayısı vardır ki

$$N^+(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{n_0}.a(\lambda) \quad ; \quad a(\lambda_0) \neq 0$$

olur. $a(\lambda)$ fonksiyonunun sürekli olduğu açıktır. $N^+(\lambda_n) = 0$ ve $\lambda_n \neq \lambda_0$ olduğundan

$$O = \frac{N^+(\lambda_n)}{(\lambda_n - \lambda_0)^{n_0}} = a(\lambda_n) \qquad [3.39]$$

olur. $a(\lambda)$ fonksiyonunun sürekliliğinden ve [3.39] eşitliğinden

$$0 = \lim_{n\to\infty} a(\lambda_n) = a(\lambda_0)$$

elde edilir ve dolayısıyla $a(\lambda_0) = 0$ olur ki bu da $a(\lambda_0) \neq 0$ olmasına tezattır.

O halde, λ_0, $N^+(\lambda)$ fonksiyonunun sonlu katlı sıfırı olamaz yani $\lambda_0 \in M_5^+$ olmalıdır.

Benzer şekilde $M_4^+ \not\subset M_5^+$ olsun. Yani $\exists(\lambda_n) \in M_4^+$ ve $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda_0$ var öyleki $\lambda_0 \notin M_5^+$ dır. $N^+(\lambda)$ reel eksene dek sürekli olduğundan $\lambda_0 \in M_2^+$ olur ve öyle n_0 sonlu pozitif tam sayısı vardır ki

$$N^+(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{n_0}.b(\lambda) \quad ; \quad b(\lambda_0) \neq 0$$

olur. $b(\lambda)$ fonksiyonunun sürekli olduğu açıktır. $N^+(\lambda_n) = 0$ ve $\lambda_n \neq \lambda_0$ olduğundan

$$O = \frac{N^+(\lambda_n)}{(\lambda_n - \lambda_0)^{n_0}} = b(\lambda_n) \qquad [3.40]$$

olur.

$b(\lambda)$ fonksiyonunun sürekliliğinden ve [3.40] eşitliğinden $0 = \lim_{n\to\infty} b(\lambda_n) = b(\lambda_0)$ elde edilir ve dolayısıyla $b(\lambda_0) = 0$ olur ki bu da $b(\lambda_0) \neq 0$ olmasına tezattır.

O halde λ_0, $N^+(\lambda)$ fonksiyonunun sonlu katlı sıfırı olamaz yani $\lambda_0 \in M_5^+$ olmalıdır.

Teorem 5 (1)*:* $A_r = c.2^r \int_0^\infty u^r e^{-\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{u}} du$, r = 1,2,... (c > 0) ile tanımlanan A_r sabitleri aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$A_r \leq B.b^r.r^r.r! \qquad [3.41]$$

Burada B ve b sabitleri c'ye ve ε'na bağlı pozitif sabitlerdir.

İspat: $A_r = c.2^r \int_0^\infty u^r e^{-\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{u}} du$ eşitsizliğini göz önüne alalım. İntegralde $\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{u} = t$ dönüşümü yapılırsa

$$A_r = 8c \cdot \frac{2^r.4^r}{\varepsilon^{2r+2}} \int_0^{\infty} t^{2r+1}.e^{-t}\, dt$$

elde edilir. Sonuncu integrale 2r kez kısmi integrasyon uygularsak

$$A_r \le 8c.2^r.(2r+1)(2r)(2r-1) \ldots 3.2 \int_0^{\infty} t.e^{-t}\, dt$$

$$\le 8c.2^r(2r+1)(2r+1) \ldots (2r+1)\,(2r+1) \int_0^{\infty} t.e^{-t}\, dt$$

$$\le B.2^r.(2r+1)^{2r} \qquad [3.42]$$

olur. Burada $B = 8c \int_0^{\infty} t.e^{-t}\, dt < \infty$

[3.42] eşitliğinden $A_r \le B.2^r.4^r.r^{2r}\left(1+\frac{1}{2r}\right)^{2r}$ elde edilir.

$\left(1+\frac{1}{2r}\right)^{2r} < e$, $r^r < e^r.r!$ eşitsizlikleri kullanılırsa

$$A^r \le B.b^r.r^r.r!$$

olur. Burada b = 8e dir.

Teorem 6 (1)*:* $N^+(\lambda)$ fonksiyonunun $Im\lambda \ge 0$ yarı düzlemindeki sonsuz katlı sıfırlarının cümlesi boştur. Yani $M_5^+ = \emptyset$ dir.

İspat: Teoremi analitik fonksiyonların birebirlik teoremi olan Pavlov Teoremi'ni kullanarak ispatlayacağız. Teorem 3.3.4'e göre M_5^+ cümlesi sınırlıdır ve $M_5^+ \subset (-\infty,+\infty)$ 'dur. Dolayısıyla $\exists T > 0$ sabiti var.

$$\left|\frac{d^r}{d\lambda^r}N^+(\lambda)\right| \le A_r \quad , \quad r = 0,1,2,... \qquad Im\lambda \ge 0 \quad , \quad |z| < 2T$$

olur. Ayrıca

$$\left|\int_{-\infty}^{-T}\frac{\ln|N^+(\lambda)|}{1+\lambda^2}\,d\lambda\right| < \infty \quad , \quad \left|\int_{T}^{\infty}\frac{\ln|N^+(\lambda)|}{1+\lambda^2}\,d\lambda\right| < \infty$$

sağlanır.

$$\left|\frac{d^r}{d\lambda^r}N^+(\lambda)\right| \le 2^r.c\int_0^\infty t^r.e^{-\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{t}}\,dt \text{ 'den}$$

$$\left|\frac{d^r}{d\lambda^r}N^+(\lambda)\right| \le A_r \le B.b^r.r^r.r!$$

çıkar. Eğer $\int_0^h \ln E(s)\,d\mu(M_{5,s}^+) = -\infty$ olsaydı Pavlov teoremine göre $N^+(\lambda) \equiv 0$ olmalıydı.

Bu nedenle $E(s) = \inf_r \frac{A_r.s^r}{r!}$ ve $\mu(M_{5,s}^+)$ ise M_5^+ cümlesinin s-komşuluğunun lineer Lebesque ölçüsüdür.

Fakat bilindiği gibi $N^+(\lambda) \neq 0$'dır. Bu nedenle de

$$\int_0^h \ln E(s)\,d\mu(M_{5,s}^+) > -\infty \qquad [3.43]$$

olur. E(s) aşağıdaki gibi değerlendirilebilir. [3.41]'e göre

$$E(s) = \inf_r \frac{A_r.s^r}{r!} \le B.\inf_r \left\{\frac{b^r.r^r.t!.s^r}{t!}\right\}$$

$$= B.\inf_{r}\left\{b^r.r^r.s^r\right\}$$

$$\leq \min_{x\in[0,\infty)}\left\{b^x.x^x.s^x\right\} \qquad [3.44]$$

olur.

Aşağıdaki fonksiyonu göz önüne alalım. $f(x) = b^x.s^x.x^x = (bsx)^x$ E(s) ile ilgili olarak bir değerlendirme elde etmek için f(x) fonksiyonunun minumumu bulunmalıdır.

$$\ln f(x) = x.\ln (bsx)$$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(bsx)+1$ ise

$$f'(x) = (bsx)^x.[\ln(bsx)+1] \qquad [3.45]$$

Şimdi ekstremum noktalarını inceleyelim.

$$f'(x) = 0$$

$$f'(x) = (bsx)^x\ [\ln(bsx)+1] = 0$$

ise $\ln(bsx) = -1$ ve $\ln e^{-1} = -1$ olduğundan

$$\ln(bsx) = \ln(e^{-1}) \Rightarrow bsx = e^{-1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{bse}$$

bulunur.

Şimdi $x = b^{-1}s^{-1}e^{-1}$ noktasında yerel minumum olduğunu gösterelim. [3.45]'den

$$\ln f'(x) = \ln(bsx)^x + \ln[\ln(bsx)+1]$$

ve türev alınırsa

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = \ln(bsx) + x\,\frac{bs}{bsx} + \frac{\frac{bs}{bsx}}{\ln(bsx)+1}$$

$$f''(x) = f'(x)\left[\frac{(\ln(bsx)+1)^2 + \frac{1}{x}}{\ln(bsx)+1}\right]$$

$$f''(x) = (bsx)^x\left[(\ln(bsx)+1)^2 + \frac{1}{x}\right]$$

elde edilir.

$$f''(b^{-1}s^{-1}e^{-1}) = (e^{-1})^{b^{-1}s^{-1}e^{-1}}[bse] > 0$$

olduğundan $x = \frac{1}{bse}$ noktasında yerel minumuma sahiptir.

$$f(b^{-1}s^{-1}e^{-1}) = e^{-b^{-1}s^{-1}e^{-1}}$$

sonucu elde edilir.

$$E(s) \le B \inf_r \{b^r s^r r^r\} \le B \exp\{-b^{-1}s^{-1}e^{-1}\}$$

olur.

$$\ln E(s) \le -\frac{1}{bse} < \frac{1}{s}$$

olduğundan Pavlov teoremine göre

$$\int_0^h \frac{1}{s} d\mu(M_{5,s}^+) < \infty$$

bulunur.

Bu ifadenin yakınsak olması M_5^+ cümlesinin lineer komşuluğunun boş olması gerekir bu ise M_5^+'nın boş olması demektir. Yani $M_5^+ = \emptyset$ dır.

$M_3^+ \subset M_5^+$ ve $M_4^+ \subset M_5^+$ olduğundan $M_3^+ = \emptyset$ ve $M_4^+ = \emptyset$ olması demektir.

Bilindiği gibi M_3^+ cümlesi M_1^+ cümlesinin limit noktalarıdır. Ayrıca M_1^+ cümlesi Teorem 2'ye göre sınırlı olduğundan M_1^+ cümlesi sonlu sayıda elemana sahiptir. Buradan M_2^+ cümlesinin sonlu sayıda elemana sahip olduğu açıktır. Dolayısıyla $N^+(\lambda)$ fonksiyonunun $Im\lambda \geq 0$ yarı düzlemindeki tüm sıfırları sonlu sayıdadır.

Sonuç 7 (1)*:* $N^-(\lambda)$ fonksiyonu kapalı alt yarı düzleminde sonlu sayıda sonlu katlı sıfıra sahiptir.

Teorem 1, Teorem 5 ve Teorem 6'dan aşağıdaki teorem elde edilir.

Sonuç 8 (1)*:* $\lim_{x\to\infty} p(x) = 0$, $\sup_{x\in IR^+} \left\{ e^{\varepsilon\sqrt{x}} \left[|q(x)| + |p'(x)| + |K(x)| \right] \right\} < \infty$

koşulu sağlandığında L operatörünün sonlu sayıda sonlu katlı özdeğer ve spektral tekilliği vardır.

4. L OPERATÖRÜNÜN ÖZDEĞERLERİNE VE SPEKTRAL TEKİLLİKLERİNE KARŞI GELEN ESAS FONKSİYONLAR

Bu bölümde L operatörünün özdeğerlerine ve spektral tekilliklerine karşı gelen esas fonksiyonlar incelenecektir. Daha sonra L operatörünün özdeğer ve spektral tekilliklere karşı gelen esas fonksiyonların sırasıyla L_2 ve H_- uzaylarına ait olduğu ispat edilecektir.

4.1. L Operatörünün Özdeğerlerine Karşı Gelen Esas Fonksiyonlar

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $C_+ = \{\lambda: \lambda\in C , \mathrm{Im}\lambda > 0\}$, $C_- = \{\lambda: \lambda\in C , \mathrm{Im}\lambda < 0\}$ olmak üzere C_+'da N^+'nın sıfırlarını $\lambda_1^+,\lambda_2^+,...,\lambda_j^+$ ile C_-'de N^-'nin sıfırlarını $\mu_1^-,\mu_2^-,...,\mu_\ell^-$ ile gösterelim. Bunların katı da sırasıyla $m_1^+, m_2^+,..., m_j^+$ ve $m_1^-, m_2^-,..., m_\ell^-$ olsun. Benzer şekilde $\mathbb{R}^*$'da N^+'nın sıfırlarının $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\alpha$ ve N^-'nin sıfırlarını $\mu_1,\mu_2,...,\mu_\upsilon$ ile gösterelim. Bunların katı da sırasıyla $m_1,m_2,...,m_\alpha$ ve $n_1,n_2,...,n_\upsilon$ olsun.

[2.15] ve [2.16] eşitliklerinden

$$\psi^{\pm}(x,\lambda) = \tilde{N}^{\pm}(\lambda)e^{\pm}(x,\lambda) - N^{\pm}(\lambda)\varphi^{\pm}(x,\lambda) \quad ; \quad \lambda\in C_{\pm} \qquad [4.1]$$

ve

$$\psi(x,\lambda) = N^{+}(\lambda)e^{-}(x,\lambda) - N^{-}(\lambda)e^{+}(x,\lambda) \quad ; \quad \lambda\in \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad [4.2]$$

eşitlikleri yazılabilir.

O halde [4.1] den $\mathrm{Im}\lambda > 0$ için $\psi^{+}(x,\lambda) = \tilde{N}^{+}(\lambda)e^{+}(x,\lambda) - N^{+}(\lambda)\varphi^{+}(x,\lambda)$ ve C_+'da N^+'nın sıfırları $\lambda_1^+,...,\lambda_j^+$ olduğundan k = 1,2,...,j için $N^{+}(\lambda_k^+) = 0$ olur. Bu durumda k = 1,2,...,j için

$$\psi^{+}(x,\lambda_k^+) = \tilde{N}^{+}(\lambda_k)e^{+}(x,\lambda_k^+) \qquad [4.3]$$

elde edilir.

Benzer şekilde [4.1]'den $\mathrm{Im}\lambda < 0$ için $\psi^-(x,\lambda) = \tilde{N}^-(\lambda)e^-(x,\lambda) - N^-(\lambda)\varphi^-(x,\lambda)$, C_-'de N^-'nin sıfırları $\mu_1^-, \mu_2^-, ..., \mu_\ell^-$ olduğundan i = 1,2,...,ℓ için $N^-(\mu_i^-) = 0$ olur.

i = 1,2,...,ℓ için

$$\psi^-(x,\mu_i^-) = \tilde{N}^-(\mu_i^-)e^-(x,\mu_i^-) \qquad [4.4]$$

yazılır.

Teorem 1 (1): n = 0,1,..., $m_k^+ - 1$, k = 1,2,..., j için

$$\left\{\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\psi^+(x,\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k^+} = \sum_{j=0}^{n} A_j(\lambda_k^+)\left\{\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}e^+(x,\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \qquad [4.5]$$

burada

$$A_j(\lambda_k^+) = \binom{n}{j}\left\{\frac{\partial^{n-j}}{\partial\lambda^{n-j}}\tilde{N}^+(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k^+}$$

dir. Ayrıca p = 0,1,..., $m_i^- - 1$, i = 1,2,...,ℓ için

$$\left\{\frac{\partial^p}{\partial\lambda^p}\psi^-(x,\lambda)\right\}_{\lambda=\mu_i^-} = \sum_{j=0}^{p} B_j(\mu_i^-)\left\{\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}e^-(x,\lambda)\right\}_{\lambda=\mu_i^-} \qquad [4.6]$$

burada

$$B_j(\mu_i^-) = \binom{p}{j}\left\{\frac{\partial^{p-j}}{\partial\lambda^{p-j}}\tilde{N}^-(\lambda)\right\}_{\lambda=\mu_i}$$

dır.

İspat: [4.5] formülünün ispatı ile başlayalım. İspatta tümevarım metodunu kullanacağız.

n = 0 için [4.3]'den [4.5] formülü elde edilir.

n = 1 için ispatlayalım.

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\psi^{+}(x,\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k^{+}} = \left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\tilde{N}^{+}(\lambda)e^{+}(x,\lambda) - N^{+}(\lambda)\varphi^{+}(x,\lambda)\right]\right\}_{\lambda=\lambda_k^{+}}$$

$$= \left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\tilde{N}^{+}(\lambda)e^{+}(x,\lambda) + \tilde{N}^{+}(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}e^{+}(x,\lambda)\right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial\lambda}N^{+}(\lambda)\varphi^{+}(x,\lambda) - N^{+}(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi^{+}(x,\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k^{+}}$$

$$= \left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\tilde{N}^{+}(\lambda)e^{+}(x,\lambda) + \tilde{N}^{+}(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}e^{+}(x,\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k^{+}}$$

$$- \frac{\partial}{\partial\lambda}N^{+}(\lambda_k^{+})\varphi^{+}(x,\lambda_k^{+}) - N^{+}(\lambda_k^{+})\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi^{+}(x,\lambda_k^{+})$$

bulunur.

k = 1,2,...,j için $N^{+}(\lambda_k^{+}) = 0$ olduğundan

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\psi^{+}(x,\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k^{+}} = \left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\tilde{N}^{+}(\lambda)e^{+}(x,\lambda) + \tilde{N}^{+}(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}e^{+}(x,\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k^{+}}$$

$$- \frac{\partial}{\partial\lambda}N^{+}(\lambda_k^{+})\varphi^{+}(x,\lambda_k^{+}) \qquad [4.7]$$

elde edilir.

Ayrıca, $N^{+}(\lambda)$ fonksiyonu $Im\lambda \geq 0$ düzleminde sonlu sayıda, sonlu katlı sıfıra sahip olduğu için n = 1,2,..., m_{k-1}^{+} , k = 1,2,...,j için

$$N^{+}(\lambda) = (\lambda - \lambda_k^{+})^{n}.a(\lambda) \quad , \quad a(\lambda_k^{+}) \neq 0 \qquad [4.8]$$

biçiminde tanımlanabilir.

Buradan

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}N^{+}(\lambda)=n(\lambda-\lambda_k^{+})^{n-1}a(\lambda)+(\lambda-\lambda_k^{+})^{n}.\frac{\partial}{\partial\lambda}a(\lambda)$$

$$=\sum_{j=0}^{1}\binom{1}{j}\frac{\partial^{1-j}}{\partial\lambda^{1-j}}(\lambda-\lambda_k^{+})^{n}.\frac{\partial^{j}}{\partial\lambda^{j}}a(\lambda)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}N^{+}(\lambda)=n(n-1)(\lambda-\lambda_k^{+})^{n-2}a(\lambda)+2n(\lambda-\lambda_k^{+})^{n-1}.\frac{\partial}{\partial\lambda}a(\lambda)$$

$$+(\lambda-\lambda_k^{+})^{n}.\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}a(\lambda)$$

$$=\sum_{j=0}^{2}\binom{2}{j}\left\{\frac{\partial^{2-j}}{\partial\lambda^{2-j}}(\lambda-\lambda_k^{+})^{n}\right\}\left\{\frac{\partial^{j}}{\partial\lambda^{j}}a(\lambda)\right\}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^{n}}{\partial\lambda^{n}}N^{+}(\lambda)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left\{\frac{\partial^{n-j}}{\partial\lambda^{n-j}}(\lambda-\lambda_k^{+})^{n}\right\}\left\{\frac{\partial^{j}}{\partial\lambda^{j}}a(\lambda)\right\}$$

elde edilir. O halde $n = 1,2,...,m_k^{+}-1$, $k = 1,2,...,j$ için

$$\left\{\frac{\partial^{n}}{\partial\lambda^{n}}N^{+}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k^{+}}\equiv 0 \qquad [4.9]$$

bulunur.

[4.7] ve [4.9]'dan $n = 1$ için [4.5] formülü elde edilir.

[4.5] formülü $2 \le n_0 \le m_k^{+}-2$ için var olsun.

$$\left\{\frac{\partial^{n_0}}{\partial\lambda^{n_0}}\psi^{+}(x,\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k^{+}}=\sum_{j=0}^{n_0}\binom{n_0}{j}\left\{\frac{\partial^{n_0-j}}{\partial\lambda^{n_0-j}}\tilde{N}^{+}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k^{+}}\left\{\frac{\partial^{j}}{\partial\lambda^{j}}e^{+}(x,\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k^{+}} \qquad [4.10]$$

Şimdi [4.5] formülünü n_0+1 için ispatlayalım.

$$\left\{\frac{\partial^{n_0+1}}{\partial\lambda^{n_0+1}}\psi^+(x,\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k^+}=\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\frac{\partial^{n_0}}{\partial\lambda^{n_0}}\psi^+(x,\lambda)\right\}\right\}_{\lambda=\lambda_k^+}$$

$$=\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\binom{n_0}{0}\left\{\frac{\partial^{n_0}}{\partial\lambda^{n_0}}\tilde{N}^+(\lambda)\right\}\left\{e^+(x,\lambda)\right\}\right.\right.$$

$$+\binom{n_0}{1}\left\{\frac{\partial^{n_0-1}}{\partial\lambda^{n_0-1}}\tilde{N}^+(\lambda)\right\}\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}e^+(x,\lambda)\right\}$$

$$+\binom{n_0}{2}\left\{\frac{\partial^{n_0-2}}{\partial\lambda^{n_0-2}}\tilde{N}^+(\lambda)\right\}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}e^+(x,\lambda)\right\}$$

$$\vdots$$

$$+\binom{n_0}{n_0-1}\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\tilde{N}^+(\lambda)\right\}\left\{\frac{\partial^{n_0-1}}{\partial\lambda^{n_0-1}}e^+(x,\lambda)\right\}$$

$$\left.\left.+\binom{n_0}{n_0}\left\{\tilde{N}^+(\lambda)\right\}\left\{\frac{\partial^{n_0}}{\partial\lambda^{n_0}}e^+(x,\lambda)\right\}\right]\right\}_{\lambda=\lambda_k^+}$$

$$=\left\{\binom{n_0}{0}\left\{\frac{\partial^{n_0+1}}{\partial\lambda^{n_0+1}}\tilde{N}^+(\lambda)\right\}\left\{e^+(x,\lambda)\right\}+\binom{n_0}{0}\left\{\frac{\partial^{n_0}}{\partial\lambda^{n_0}}\tilde{N}^+(\lambda)\right\}\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}e^+(x,\lambda)\right\}\right.$$

$$+\binom{n_0}{1}\left\{\frac{\partial^{n_0}}{\partial\lambda^{n_0}}\tilde{N}^+(\lambda)\right\}\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}e^+(x,\lambda)\right\}+\binom{n_0}{1}\left\{\frac{\partial^{n_0-1}}{\partial\lambda^{n_0-1}}\tilde{N}^+(\lambda)\right\}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}e^+(x,\lambda)\right\}$$

$$+\binom{n_0}{2}\left\{\frac{\partial^{n_0-1}}{\partial\lambda^{n_0-1}}\tilde{N}^+(\lambda)\right\}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}e^+(x,\lambda)\right\}+\binom{n_0}{2}\left\{\frac{\partial^{n_0-2}}{\partial\lambda^{n_0-2}}\tilde{N}^+(\lambda)\right\}\left\{\frac{\partial^3}{\partial\lambda^3}e^+(x,\lambda)\right\}$$

$$\vdots$$

$$+\binom{n_0}{n_0-1}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\tilde{N}^+(\lambda)\right\}\left\{\frac{\partial^{n_0-1}}{\partial\lambda^{n_0-1}}e^+(x,\lambda)\right\}+\binom{n_0}{n_0-1}\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\tilde{N}^+(\lambda)\right\}\left\{\frac{\partial^{n_0}}{\partial\lambda^{n_0}}e^+(x,\lambda)\right\}$$

$$\left.+\binom{n_0}{n_0}\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\tilde{N}^+(\lambda)\right\}\left\{\frac{\partial^{n_0}}{\partial\lambda^{n_0}}e^+(x,\lambda)\right\}+\binom{n_0}{n_0}\left\{\tilde{N}^+(\lambda)\right\}\left\{\frac{\partial^{n_0+1}}{\partial\lambda^{n_0+1}}e^+(x,\lambda)\right\}\right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \qquad [4.11]$$

Kombinasyonun sonuçlarından biri olan, ($n \geq r$) olmak üzere, $\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}=\binom{n+1}{r}$ ifadesi kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, [4.11] ifadesi

$$\left\{\frac{\partial^{n_0+1}}{\partial\lambda^{n_0+1}}\psi^+(x,\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k^+} = \left\{\binom{n_0+1}{0}\left\{\frac{\partial^{n_0+1}}{\partial\lambda^{n_0+1}}\tilde{N}^+(\lambda)\right\}\{e^+(x,\lambda)\}\right.$$

$$+\binom{n_0+1}{1}\left\{\frac{\partial^{n_0}}{\partial\lambda^{n_0}}\tilde{N}^+(\lambda)\right\}\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}e^+(x,\lambda)\right\}$$

$$+\binom{n_0+1}{2}\left\{\frac{\partial^{n_0-1}}{\partial\lambda^{n_0-1}}\tilde{N}^+(\lambda)\right\}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}e^+(x,\lambda)\right\}$$

$$\vdots$$

$$+\binom{n_0+1}{n_0}\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\tilde{N}^+(\lambda)\right\}\left\{\frac{\partial^{n_0}}{\partial\lambda^{n_0}}e^+(x,\lambda)\right\}$$

$$\left.+\binom{n_0+1}{n_0+1}\{\tilde{N}^+(\lambda)\}\left\{\frac{\partial^{n_0+1}}{\partial\lambda^{n_0+1}}e^+(x,\lambda)\right\}\right\}_{\lambda=\lambda_k^+}$$

$$=\left\{\sum_{j=0}^{n_0+1}\binom{n_0+1}{j}\left\{\frac{\partial^{n_0+1-j}}{\partial\lambda^{n_0+1}}\tilde{N}^+(\lambda)\right\}\left\{\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}e^+(x,\lambda)\right\}\right\}_{\lambda=\lambda_k^+}$$

olur. O halde [4.5] formülü n_0+1 için gerçeklenir.

[4.5] formülü tümevarım metodu ile gösterilmiş olur. Benzer şekilde [4.6] eşitliği ispatlanır.

Teorem 2 (1)*:* Özdeğerlere karşı gelen esas fonksiyonlar $L_2[0,\infty;C)$'nin elemanıdır. Yani

$$\left\{\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\psi^+(x,\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \in L_2[0,\infty;C) \ , \ n=0,1,...,m_k^+-1 \ , \ k=1,2,...,j \qquad [4.12]$$

$$\left\{\frac{\partial^p}{\partial\lambda^p}\psi^-(x,\lambda)\right\}_{\mu=\mu_i^-} \in L_2[0,\infty;C) \ , \ p=0,1,...,m_i^--1 \ , \ i=1,2,...,\ell \qquad [4.13]$$

dir.

İspat: [2.4]'den $e^+(x,\lambda)=e^{i[\omega(x)+\lambda x]}+\int_x^\infty A^+(x,t)e^{i\lambda t}\,dt$ idi. Buradan

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} e^{+}(x,\lambda) = (ix).e^{i[\omega(x)+\lambda x]} + \int_{x}^{\infty} A^{+}(x,t).(it) e^{i\lambda t}\, dt$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} e^{+}(x,\lambda) = (ix)^2.e^{i[\omega(x)+\lambda x]} + \int_{x}^{\infty} A^{+}(x,t).(it)^2 e^{i\lambda t}\, dt$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n} e^{+}(x,\lambda) = (ix)^n.e^{i[\omega(x)+\lambda x]} + \int_{x}^{\infty} A^{+}(x,t).(it)^n e^{i\lambda t}\, dt \qquad [4.14]$$

bulunur. [4.14]'den

$$\left\{\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n} e^{+}(x,\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k^{+}} = \left\{(ix)^n.e^{i[\omega(x)+\lambda x]} + \int_{x}^{\infty} A^{+}(x,t).(it)^n e^{i\lambda t}\, dt\right\}_{\lambda=\lambda_k^{+}} \qquad [4.15]$$

$n = 0,1,...,m_k^{+} - 1$, $k = 1,2,...,j$ elde edilir.

$$\left|\left\{\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n} e^{+}(x,\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k^{+}}\right| = \left|\left\{(ix)^n.e^{i[\omega(x)+\lambda x]} + \int_{x}^{\infty} A^{+}(x,t).(it)^n e^{i\lambda t}\, dt\right\}_{\lambda=\lambda_k^{+}}\right|$$

$$= \left|(ix)^n.e^{i[\omega(x)+\lambda_k^{+} x]} + \int_{x}^{\infty} A^{+}(x,t).(it)^n e^{i\lambda_k^{+} t}\, dt\right|$$

$$\le \left|(ix)^n.e^{i[\omega(x)+\lambda_k^{+} x]}\right| + \left|\int_{x}^{\infty} A^{+}(x,t).(it)^n e^{i\lambda_k^{+} t}\, dt\right|$$

$$\le x^n.e^{-x\,\mathrm{Im}\,\lambda_k^{+}} + \int_{x}^{\infty} \left|A^{+}(x,t)\right|.t^n.e^{-t.\mathrm{Im}\,\lambda_k^{+}}\, dt \qquad [4.16]$$

$A^{+}(x,t) \in L_1$ olduğundan [4.16]

$$\left|\left\{\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n} e^{+}(x,\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k^{+}}\right| \le x^n.e^{-x.\mathrm{Im}\,\lambda_k^{+}} + \int_{x}^{\infty} t^n.e^{-t.\mathrm{Im}\,\lambda_k^{+}} dt \qquad [4.17]$$

biçiminde yazılır.

$\operatorname{Im}\lambda_k^+ > 0$ olduğundan

$$\int_0^\infty t^n . e^{-t.\operatorname{Im}\lambda_k^+} dt < \infty \qquad [4.18]$$

olur. Buradan

$$\left\| \left\{ \frac{\partial^n}{\partial\lambda^n} e^+(x,\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \right\|^2 = \int_0^\infty \left| \left\{ \frac{\partial^n}{\partial\lambda^n} e^+(x,\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \right|^2 dx < \infty$$

elde edilir.

O halde $n = 0,1,2,...,m_k^+ - 1$, $k = 1,2,...,j$ için

$$\left\{ \frac{\partial^n}{\partial\lambda^n} e^+(x,\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \in L_2[0,\infty;C) \qquad [4.19]$$

olur.

[4.5], [4.19] ve $\tilde{N}^+$ fonksiyonunun sonluluğundan $n = 0,1,2,...,m_k^+ - 1$ $k = 1,2,...,j$ için

$$\left\{ \frac{\partial^n}{\partial\lambda^n} \psi^+(x,\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \in L_2(0,\infty;C)$$

elde edilir.

[4.13]'de [4.12]'ye benzer olarak ispatlanır.

Tanım 1 (1): $\psi^+(x,\lambda_k^+), \left\{ \frac{\partial}{\partial\lambda} \psi^+(x,\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+}, ..., \left\{ \frac{\partial^{m_k^+-1}}{\partial\lambda^{m_k^+-1}} \psi^+(x,\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+}$

ve

$$\psi^-(x,\mu_i^-), \left\{ \frac{\partial}{\partial\lambda} \psi^-(x,\lambda) \right\}_{\lambda=\mu_i^-}, ..., \left\{ \frac{\partial^{m_i^- -1}}{\partial\lambda^{m_i^- -1}} \psi^-(x,\lambda) \right\}_{\lambda=\mu_i^-}$$

fonksiyonlarına L operatörünün $\lambda = \lambda_k^+$, k = 1,2,...,j ve $\lambda = \mu_i^-$, i = 1,2,...,ℓ özdeğerlerine bağlı esas fonksiyonları denir. $\psi^+(x,\lambda_k^+)$, $\psi^-(x,\mu_i^-)$ baş fonksiyonlardır.

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\psi^+(x,\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k^+},...,\left\{\frac{\partial^{m_k^+-1}}{\partial\lambda^{m_k^+-1}}\psi^+(x,\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k^+}$$

fonksiyonları $\psi^+(x,\lambda_k^+)$'nın eş (associated) fonksiyonları

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\psi^-(x,\lambda)\right\}_{\lambda=\mu_i^-},...,\left\{\frac{\partial^{m_i^--1}}{\partial\lambda^{m_i^--1}}\psi^-(x,\lambda)\right\}_{\lambda=\mu_i^-}$$

fonksiyonları ise, $\psi^-(x,\mu_i^-)$'nin eş fonksiyonları olarak adlandırılır.

4.2. L Operatörünün Spektral Tekilliklerine Karşı Gelen Esas Fonksiyonlar

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$'da, N^+'nın sıfırlarını $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\alpha$ ve N^-'nin sıfırlarını $\mu_1,\mu_2,...,\mu_\upsilon$ ile göstermiştik.

[4.2] eşitliğinden

$$k = 1,2,...,\alpha \text{ için } \psi(x,\lambda_k) = -N^-(\lambda_k)\, e^+(x,\lambda_k) \qquad [4.20]$$

ve

$$i = 1,2,...,\upsilon \text{ için } \psi(x,\mu_i) = N^+(\mu_i)\, e^-(x,\mu_i) \qquad [4.21]$$

yazılır.

Sonuç 1 (1)*:* n = 0,1,...,m_k–1 , k = 1,2,...,α için

$$\left\{\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\psi(x,\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k} = \sum_{j=0}^{n} C_j(\lambda_k)\left\{\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}e^+(x,\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k}$$

burada

$$C_j(\lambda_k) = -\binom{n}{j}\left\{\frac{\partial^{n-j}}{\partial\lambda^{n-j}} N^{-}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k} \qquad [4.22]$$

ve $p = 0,1,2,...,n_i-1$, $i = 1,2,...,\upsilon$ için

$$\left\{\frac{\partial^p}{\partial\lambda^p}\psi(x,\lambda)\right\}_{\lambda=\mu_i} = \sum_{j=0}^{p} D_j(\mu_i)\left\{\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j} e^{-}(x,\lambda)\right\}_{\lambda=\mu_i}$$

burada

$$D_j(\mu_i) = \binom{p}{j}\left\{\frac{\partial^{p-j}}{\partial\lambda^{p-j}} N^{+}(\lambda)\right\}_{\lambda=\mu_i} \qquad [4.23]$$

eşitlikleri vardır.

Sonuç 4.2.1'in ispatı Teorem 4.1.1'in ispatına benzer olarak yapılır.

Lemma 1 (1)*:* Spektral tekilliklere karşı gelen esas fonksiyonlar $L_2[0,\infty;C)$'nın elemanı değildir. Yani

$$\left\{\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\psi(.,\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k} \notin L_2[0,\infty;C) \quad , \; n = 0,1,...,m_k-1 \quad , \; k = 1,2,...,\alpha \qquad [4.24]$$

$$\left\{\frac{\partial^p}{\partial\lambda^p}\psi(.,\lambda)\right\}_{\lambda=\mu_i} \notin L_2[0,\infty;C) \quad , \; p = 0,1,...,n_i-1 \quad , \; i = 1,2,...,\upsilon \qquad [4.25]$$

dir.

Bu lemmanın ispatı için

$$\left\{\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n} e^+(x,\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k} = \left\{(ix)^n e^{i[\omega(x)+\lambda x]} + \int_x^\infty A^+(x,t)\,(it)^n\, e^{i\lambda t}\,dt\right\}_{\lambda=\lambda_k} \qquad [4.26]$$

$$\left\{\frac{\partial^p}{\partial\lambda^p} e^-(x,\lambda)\right\}_{\lambda=\mu_i} = \left\{-(ix)^p e^{-i[\omega(x)+\lambda x]} + \int_x^\infty A^-(x,t)\,(-it)^p\, e^{-i\lambda t}\,dt\right\}_{\lambda=\mu_i} \qquad [4.27]$$

eşitliklerini kullanalım. [4.26] eşitliğinden

$$\left|\left\{\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n} e^+(x,\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k}\right| = \left|\left\{(ix)^n e^{i[\omega(x)+\lambda x]} + \int_x^\infty A^+(x,t)\,(it)^n\, e^{i\lambda t}\,dt\right\}_{\lambda=\lambda_k}\right|$$

$$= \left|(ix)^n e^{i[\omega(x)+\lambda_k x]} + \int_x^\infty A^+(x,t)\,(it)^n\, e^{i\lambda_k t}\,dt\right|$$

$$\le \left|(ix)^n e^{i[\omega(x)+\lambda_k x]}\right| + \int_x^\infty \left|A^+(x,t)\right| t^n\,dt$$

$$= x^n + \int_x^\infty \left|A^+(x,t)\right| t^n\,dt \qquad [4.28]$$

bulunur. [4.28]'den

$$\left\{\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n} e^+(x,\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k} \notin L_2[0,\infty;C) \quad , \; n = 0,1,...,m_k-1 \; , \; k = 1,2,...,\alpha$$

buradan ve [4.22]'den [4.24] elde edilir.

Benzer şekilde [4.27] ve [4.23]'ten [4.25] elde edilir.

Şimdi aşağıdaki Hilbert uzaylarını tanımlayalım (2):

$$H(0,\infty;C,m) := \left\{f : \int_0^\infty (1+x)^{2m}\,|f(x)|^2\,dx < \infty\right\}$$

kümesi ve üzerindeki norm

$$\|f\|_+^2 = \int_0^\infty (1+x)^{2m} |f(x)|^2 \, dx$$

ve

$$H(0,\infty;C,-m) := \left\{ g : \int_0^\infty (1+x)^{-2m} |g(x)|^2 \, dx < \infty \right\}$$

kümesi ve üzerindeki norm

$$\|g\|_-^2 = \int_0^\infty (1+x)^{-2m} |g(x)|^2 \, dx$$

biçimindedir.

Bu tanımların sonucunda $H(0,\infty;C,0) = L_2(0,\infty;C)$ dir.

Ayrıca $H(0,\infty;C,m) \underset{\neq}{\subset} L_2(0,\infty;C) \underset{\neq}{\subset} H(0,\infty;C,-m)$, $m = 1,2,...$ dir. Gerçekten

(i) $H(0,\infty;C,m) \underset{\neq}{\subset} L_2(0,\infty;C)$ $m = 1,2,...$ ifadesini göstermek için $\forall f \in H(0,\infty;C,m)$ için $f \in L_2(0,\infty;C)$ olduğunu gösterelim.

$f \in H(0,\infty;C,m)$ olduğu için $\int_0^\infty (1+x)^{2m} |f(x)|^2 \, dx < \infty$ dur.

$$1 \le 1+x \Rightarrow 1 \le (1+x)^{2m} \;;\; m = 1,2,... \; x \in [0,\infty)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty |f(x)|^2 .1 dx \le \int_0^\infty (1+x)^{2m} .|f(x)|^2 dx < \infty \quad , \; m = 1,2,...$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty |f(x)|^2 \, dx < \infty$$

$$\Rightarrow f \in L_2[0,\infty;C)$$

elde edilir.

(ii) $L_2(0,\infty;C) \underset{\neq}{\subset} H(0,\infty;C,-m)$, m = 1,2,... ifadesini göstermek için $\forall f \in L_2(0,\infty;C)$ için $f \in H(0,\infty;C,-m)$ olduğunu gösterelim.

$x \in [0,\infty)$ olduğundan $0 \le x < 1$ ve $x > 1$ durumlarını ayrı ayrı inceleyelim.

a) $0 \le x < 1$ ise $0 < (1+x)^{-2m} \le 1$ olur.

Buradan; $\int_0^\infty |f(x)|^2 (1+x)^{-2m} dx \le \int_0^\infty |f(x)|^2 dx$ yazılır. $f \in L_2(0,\infty;C)$ olduğu için

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 (1+x)^{-2m} dx \le \int_0^\infty |f(x)|^2 dx < \infty$$

yazılır. O halde $f \in H(0,\infty;C,-m)$ bulunur.

b) $x \ge 1$ ise $(1+x)^{-2m} \le 1$ olduğundan (a) şıkkına benzer şekilde elde edilir.

(i) ve (ii)'den $H(0,\infty;C,m) \underset{\neq}{\subset} L_2(0,\infty;C) \underset{\neq}{\subset} H(0,\infty;C,-m)$ m = 1,2,... bulunur.

Teorem 1 (1)*:* Spektral tekilliklere karşı gelen esas fonksiyonlar Hilbert uzayındadır. Yani

$$\left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \psi(.,\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k} \in H(0,\infty;C,-(n+1)) \ , \ n = 0,1,...,m_k-1 \ , \ k = 1,2,...,\alpha \qquad [4.29]$$

$$\left\{ \frac{\partial^p}{\partial \lambda^p} \psi(.,\lambda) \right\}_{\lambda=\mu_i} \in H(0,\infty;C,-(p+1)) \ , \ p = 0,1,...,m_i-1 \ , \ i = 1,2,...,\upsilon \qquad [4.30]$$

İspat: [4.26] ve [4.27]'den $n = 0,1,...,m_k-1$, $k = 1,2,...,\alpha$ için

$$\left| \left\{ \frac{\partial^n}{\partial\lambda^n} e^+(x,\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k} \right| \le x^n + \int_x^\infty \left| A^+(x,\lambda) \right| t^n \, dt \qquad [4.31]$$

ve $p = 0,1,...,n_i-1$, $i = 1,2,...,\upsilon$ için

$$\left| \left\{ \frac{\partial^p}{\partial\lambda^p} e^-(x,\lambda \right\}_{\lambda=\mu_i} \right| \le x^p + \int_x^\infty t^p \left| A^-(x,\lambda) \right| dt \qquad [4.32]$$

elde edilir.

$H(0,\infty;C,-(n+1))$ uzayının tanımından [4.31] eşitsizliğinden [4.29] hesaplanır. Benzer şekilde [4.32] eşitliğinden [4.30] ispatlanır.

Tanım 1 (1): $\psi(x,\lambda_k)$, $\left\{ \frac{\partial}{\partial\lambda} \psi(x,\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k}$,..., $\left\{ \frac{\partial^{m_k-1}}{\partial\lambda^{m_k-1}} \psi(x,\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k}$

ve

$$\psi(x,\mu_i) \, , \left\{ \frac{\partial}{\partial\lambda} \psi(x,\lambda) \right\}_{\lambda=\mu_i} ,..., \left\{ \frac{\partial^{n_i-1}}{\partial\lambda^{n_i-1}} \psi(x,\lambda) \right\}_{\lambda=\mu_i}$$

fonksiyonlarına sırasıyla L operatörünün $\lambda = \lambda_k$, $k = 1,2,...,\alpha$ ve $\lambda = \mu_i$, $i = 1,2,...,\upsilon$ spektral tekilliklerine bağlı esas fonksiyonları denir. $n_0 = \max\{m_1,...,m_\alpha, n_1,...,n_\upsilon\}$ olmak üzere

$$H_{n_0} = H(0,\infty;C,n_0+1) \quad , \quad H_{-n_0} = H(0,\infty;C,-(n_0+1))$$

alınırsa

$$H_{n_0} \subset\neq L_2(0,\infty;C) \subset\neq H_{-n_0}$$

olur.

Sonuç 2 (1)*:* Spektral tekilliklere karşı gelen esas fonksiyonlar H_{-n_0} uzayına aittir. Yani

$$\left\{\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\psi(.,\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k} \in H_{-n_0} \quad ; \quad n = 0,1,...,m_k-1 \ , \ k = 1,2,...,\alpha$$

$$\left\{\frac{\partial^p}{\partial\lambda^p}\psi(.,\lambda)\right\}_{\lambda=\mu_i} \in H_{-n_0} \quad ; \quad p = 0,1,...,n_i-1 \ , \ i = 1,2,...,\upsilon$$

dir.

KAYNAKLAR

1. Bairamov, E., Çakar, Ö., Krall, A.M. "Spectrum and Spectral Singularities of a Quadratic Pencil of a Schrödinger Operator with a General Boundary Condition", ***Journal of Differential Equations***, 151: 252-267 (1999).

2. Berezanski, Yu, M., "Expansion in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators", ***Amer. Math. Soc.***, Providence (1968).

3. Jaulent, M., and Jean, C., "The inverse s-wave scattering problem for a class of potentials depending on energy" ***Comm. Math. Phys***. 28: 177-220 (1972).

4. Lyance, V.E., "A Differential Operator with Spectral Singularities, I, II", ***Amer. Math. Soc. Trans.***, Ser. 2, 60: 185-225, 227-283 (1967).

5. Maksudov, F.G., "Eigenfunction Expansion of a Quadratic Pencil of Schrödinger Operators, Spectral Theory of Operators", Bakü (1977) [In Russian].

6. Maksudov, F.G., and Guseinov, G. Sh., "On Solution of the Inverse Scattering Problem for a Quadratic Pencil of One-dimensional Schrödinger Operators on the Whole Axis", ***Sov. Math. Dokl.***, 34: 34-38 (1987).

7. Naimark, M.A., "Investigation of the Spectrum and the Expansion in Eigenfunctions of a Non-selfadjoint Operator of Second Order on a Semi-axis", ***Amer. Math. Soc. Trans.***, Ser. 2, 16: 103-193, Amer. Math. Soc., Providence (1960).

8. Naimark, M.A., "Linear Differential Operators I, II", ***Ungar***, New York (1968).

9. Pavlov, B.S., "The non-selfadjoint Schrödinger Operator", ***Topics in Math. Phys.***, 1: 87-110 (1967).

10. Privalov, I.I., "The Boundary Properties of Analytic Functions" in "Hochscschulbücher für Math.", ***VEB Deutscher Verlung***, 25, Berlin.

11. Schwartz, J.T., "Some non-selfadjoint Operators", ***Comm. Pure and Appl. Math.***, 13: 609-639 (1960).

ÖZGEÇMİŞ

Pınar IŞIK 1980 yılında Ankara'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ankara'da tamamladı. 1997 yılında girdiği, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümü'nden 2001 yılında matematikçi ünvanıyla mezun oldu. 2003 yılından beri Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine devam etmektedir. Halen T.C. Milli Eğitim Bakanlığı'nın Ankara, Bala İmam–Hatip Lisesinde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.