
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

SZÁSZ OPERATÖRLERİNİN BAZI GENELLEMELERİ

Hatice ERYİĞİT

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Eylül 2022

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Hatice ERYİĞİT

13.09.2022

SZÁSZ OPERATÖRLERİNİN BAZI GENELLEMELERİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Hatice ERYİĞİT

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
EylülL 2022

ÖZET

Bu tez 5 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde yaklaşımlar teorisindeki bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, Szász operatörlerinin genellemelerinden biri olan Brenke tipli polinomlar kullanılarak yeni bir modifikasyon oluşturulmuştur. Yeni oluşturulan bu modifikasyon operatörünün öncelikle Korovkin teoreminin koşullarını sağladığı gösterilmiştir. Daha sonra yaklaşım hızı, klasik ve ikinci mertebeden süreklilik modülü ve de Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla hesaplanmıştır. Dördüncü bölümde ise, Boas-Buck tipli polinomların genelleştirmesini içeren Stancu-Durrmeyer operatörlerinin beta genellemesi elde edilmiştir. İlk olarak yeni tip modifikasyon operatörünün Korovkin teoreminin özelliklerini sağladığı gösterilmiştir. Daha sonra klasik ve ikinci dereceden süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonskiyonlar ile yakınsama hızı hesaplanmıştır. Beşinci bölüm sonuç kısmına ayrılmıştır.

Bilim Kodu	:	20406
Anahtar Kelimeler	:	Lineer ve pozitif operatör, Appell polinomları, Sheffer polinomları, Brenke polinomları, Szász operatörü, yaklaşım hızı
Sayfa Adedi	:	49
Danışman	:	Doç. Dr. Gürhan İÇÖZ

SOME GENERALIZATIONS OF SZÁSZ OPERATORS
(M. Sc. Thesis)

Hatice ERYİĞİT

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
September 2022

ABSTRACT

This thesis contains 5 chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, some basic definitions and theorems in analysis and approximation theory are given. In the third chapter, a new modification have been introduced using Brenke type polynomials which is a generalization of Szász operators. Firstly, it is shown that the new type modification operator has provided the properties of Korovkin's theorem. After that, the rate of convergence has been figured out via classical and second order modulus of continuity and Lipschitz class function. In the fourth chapter, Beta generalization of the Stancu-Durrmeyer operators, which includes the generalization of polynomials of the Boas-Buck type, is obtained. Firstly, it is shown that the new type modification operator has provided the properties of Korovkin's theorem. After that, the rate of convergence has been figured out via classical and second order modulus of continuity and Lipschitz class function. In the fifth chapter is devoted to the conclusion.

Science Code	:	20406
Keywords	:	Linear and positive operators, Appell polynomials, Sheffer polynomials, Brenke polynomials, Szász operators, rate of convergences
Number of pages	:	49
Supervisor	:	Assoc. Prof. Dr. Gürhan İÇÖZ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim sırasında çalışmaları ile bana destek olan, bilgi ve birikimini benden esirgemeyen, tez konumun belirlenmesi ve tez sürecimde desteğini eksik etmeyip değerli vaktini bana ayıran saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Gürhan İÇÖZ'e, tezimle ilgili değerlendirmeleri ile tezime katkı sağlayan tez jüri üyeleri sayın Prof. Dr. Bayram ÇEKİM ve sayın Doç. Dr. Serhan VARMA 'ya, eğitim hayatımı sonuna kadar destekleyen, manevi desteğini esirgemeyen sevgili aileme ve bu süreçte her türlü teknik sorunumda bana destek olan değerli arkadaşım Ar. Gör. Bulut ULUKAPI'ya sonsuz sevgi, saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

SİMGELER VE KISALTMALAR viii

1. GİRİŞ 1

2. TANIMLAR VE TEOREMLER 3

2.1. Temel Kavramalar 3

2.2. Lineer Pozitif Operatör Dizileri 4

2.3. Süreklilik Modülü 9

3. OPERATÖRÜN OLUŞTURULMASI 13

3.1. Operatörün Tarihçesi 13

3.2. Yaklaşım Hızı Hesabı 21

4. BOAS-BUCK TİPLİ POLİNOMLARIN GENELLEŞTİRİLMESİNİ İÇEREN STANCU-DURRMEYER OPERATÖRLERİNİN BETA GENELLEMESİ 31

4.1. L_n Operatörünün Oluşturulması 32

5. SONUÇ VE ÖNERİLER 43

KAYNAKLAR 45

ÖZGEÇMİŞ 49

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$a_n \rightrightarrows a$	a_n dizisinin a noktasına düzgün yakınsaklığı
$\varsigma_n^{\tau}(\tau;x)$	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir operatör dizisi
$L_n(\tau;x)$	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir operatör dizisi
$B_n(u;x)$	Bernstein polinom dizisi
$C[0,\infty)$	$[0,\infty)$ aralığında tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyon uzayı
$C^2[0,\infty)$	$\tau, \tau', \tau'' \in C[0,\infty)$ olan fonksiyon uzayı
(a_n)	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir fonksiyon dizisi
$\omega(f;\delta)$	f fonksiyonunun klasik süreklilik modülü
$\omega_2(f;\delta)$	f fonksiyonunun ikinci süreklilik modülü
$\|f\|$	$x \in [0,\infty)$ için $\|f\| = \|f\|_{C[0,\infty)} = \sup_{0\le x<\infty} \|f(x)\|$ ile tanımlanan norm
$\|g\|_{C^2[0,\infty)}$	$\|g\|_{C^2[0,\infty)} = \|g\|_{C[0,\infty)} + \|g'\|_{C[0,\infty)} + \|g''\|_{C[0,\infty)}$ ile tanımlanan norm
$K(f,\delta)$	f fonksiyonunun Peetre K-fonksiyoneli
$Lip_M(\alpha)$	Lipschitz sınıfı

Kısaltmalar	**Açıklamalar**
Eş.	Eşitlik/Eşitsizlik

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisi ilk olarak 1885 yılında P. L. Chebyshev'in ortaya attığı, kapalı ve sınırlı [a,b] aralığında tanımlı olan her sürekli fonksiyona düzgün yakınsak olacak şekilde bir polinom dizisi var mıdır, sorusu ile ortaya çıkmıştır. Bu soru Weierstrass Yaklaşım Teoremine dayanır. Bu teoreme göre, kapalı ve sınırlı [a,b] aralığında tanımlı olan her sürekli olan fonksiyona, düzgün yakınsak olacak biçimde bir polinom dizisi vardır. Bernstein [1], polinom dizilerinin ilk örneğini 1912 yılında $f \in C[0,1]$, $x \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

şeklinde tanımlamıştır. Bu operatörlerin önemi ilk yıllarda anlaşılamamıştır. Fakat 1950 li yıllarda Bèzier tarafından arabaların aerodinamiğinde kullanılmaya başlanmasından sonra ün kazanmaya başlamıştır. Bernstein operatörünün otomotiv sektöründe kullanılmaya başlanması ile yaklaşım teorisine ilgiyi arttırmıştır. Daha sonrasında görüntüleme sistemlerinin netliğinde kullanılmaya başlanmıştır. Lineer pozitif operatörlerin yaklaşım teorisi ise Bohman-Korovkin teoremine dayanmaktadır. Bu teorem lineer pozitif operatörlerin keyfi herhanagi kompakt aralıklarda yakınsaklığını incelemektedir. Bu teoremin, yaklaşımlar teorisinin gelişmesinde büyük rolü vardır. Szász [2], Bernstein operatörlerinin sonsuz aralıkta bir genellemesini

$$S_n(f;x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f(\tfrac{k}{n})$$

şeklinde elde etmiştir. Burada $x \geq 0$, $f \in C[0,\infty)$ ve bu seri yakınsak olarak tanımlanmıştır. Szász operatörünün genellemeleri bir çok araştırmacı tarafından yapılmıştır [3-23].

Bu tez, beş kısımdan oluşmaktadır.

Birinci bölüm, giriş bölümüdür.

İkinci bölümde, kullanılacak olan teoremlere, ispatlara ve tanımlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, başlangıçta Szász operatörlerinin tanımı verilmiştir. Daha sonrasında Jakimovski ve Leviatanın [3] Szász operatörünün genellemesi olarak verdiği yeni bir operatöre değinilmiştir. Ismail [4] ise Szász ve Jakimovski Leviatan operatörlerinden esinlenip Sheffer polinomlarını kullanarak başka bir operatör genellemesini elde ettiği bir operatöre yer verilmiştir. Varma ve arkadaşları [5] bu operatörleri odağına koyarak tanımladıkları Brenke tipli genelleştirilmiş operatörün tanımı verilmiştir. Yakın zamanda Cárdenas-Morales ve arkadaşları [6] Bernstein tipli operatörlerinin tanımı verilmiştir. Aral ve arkadaşları [7] ise Cárdenas-Morales ve arkadaşlarının tanımladığı operatörü dikkate alarak Szász operatörlerinin başka bir genellemesini tanımlamışlardır ve burada bu operatöre de yer verilmiştir. Bu bölümde orijinal olarak, Aral ve arkadaşlarının tanımladığı operatör, Varma ve arkadaşlarının tanımladığı şekilde Brenke tipli polinomlar yardımıyla daha genel bir hali olarak elde edilmiştir. Öncelikle bu operatörün Korovkin şartlarını sağladığı gösterilmiştir. Sonrasında ise yaklaşım özellikleri incelenip, yaklaşım hızı hesaplamalarında süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar kullanılmıştır.

Dördüncü bölüm Stancu-Durrmeyer Operatörlerinin Beta Genelleştirmesini İçeren Boas-Buck Tipi Polinomların Genelleştirilmesi adlı çalışmadan oluşmaktadır. Bu çalışmada, oluşturulan operatörün öncelikle Korovkin şartlarını sağladığı gösterilmiştir. Sonrasında elde edilen bu operatörün yaklaşım hızı, klasik ve ikinci süreklilik modülü ile Lipschitz sınıfından fonksiyonlar ile hesaplanmıştır.

Beşinci bölüm ve son bölüm ise sonuç bölümüdür.

2. TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde ihtiyacımız olan tanımlar ve teoremler verilecektir.

2.1. Temel Kavramalar

2.1.1. Tanım

Her $n \in \mathbb{N}$ ve A herhangi bir küme olsun. A dan R ye giden herhangi bir (ς_n) fonksiyon dizisi

verilmiş olsun. Eğer her $x \in A$ için $(\varsigma_n(x))$ dizisi $\varsigma(x)$ noktasına yakınsıyorsa, (ς_n) fonksiyon dizisinin her bir $x \in A$ için

$$\lim_{n\to\infty} \varsigma_n(x) = \varsigma(x)$$

olarak tanımlanan $\varsigma : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna noktasal yakınsadığı söylenir. Başka bir söyleyişle her $x \in A$ ve her $\varepsilon > 0$, $K(x) \in \mathbb{N}$ için $n \geq K(x)$ şartını sağlayan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|\varsigma_n(x) - \varsigma(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde ε varsa (ς_n) dizisine ς fonksiyonuna noktasal yakınsıyor denir [24].

2.1.2. Tanım

ς, A dan R ye tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için, her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in A$ için

$$|\varsigma_n(x) - \varsigma(x)| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığı herhangi bir n doğal sayısı varsa $\varsigma_n(x)$ dizisinin $\varsigma(x)$ fonskiyonuna düzgün yakınsadığı söylenir. Düzgün yakınsaklığın noktasal yakınsaklıktan önemli bir ayrımı vardır. Düzgün yakınsaklıkta $\varsigma_n(x)$ dizileri $\varsigma(x)$ sayılarına aynı hızla yakınsarlar. Oysa noktasal yakınsaklıkta yakınsama hızı x'e göre değişir. Dolayısıyla düzgün yakınsaklık noktasal yakınsaklıktan daha yararlı bir kavramdır [25].

A bir aralık ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\varsigma_n(x)$, A dan R ye sürekli bir fonksiyon olmak üzere (ς_n) dizisi bir $\varsigma : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna düzgün yakınsasın. Bundan dolayı ς sürekli bir fonskiyon olur.

2.1.3. Tanım

A bir aralık ve ς, A dan $\mathbb{R}$ ye bir fonksiyon olmak üzere her $x \in A$ için $|\varsigma(x)| < M$ olacak şekilde bir M pozitif reel sayısı bulunabiliyorsa, ς fonksiyonu sınırlı fonksiyondur. Benzer şekilde $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ dizisi sınırlı ise yani; her n doğal sayısı için en azından bir M pozitif reel sayısı bulunabiliyorsa (a_n) dizisi sınırlı dizi olarak tanımlanmaktadır [25].

2.1.4. Tanım

$[a,b]$ aralığında tanımlı ve aynı aralıktaki bütün noktalarda sürekli olan fonksiyonlar uzayı $C[a,b]$ ile gösterilir.

2.2. Lineer Pozitif Operatör Dizileri

2.2.5. Tanım

Reel değerli X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer X den alınmış herhangi f fonksiyonuna Y de bir ψf fonksiyonu karşılık getiren ψ kuralına operatör denir ve ψf fonksiyonunun x noktasında aldığı değer $\psi(f)(x) = \psi(f;x)$ şeklinde gösterilir.

Eğer her $f, g \in X$ ve $\alpha, \beta \in R$ için

$$\psi(\alpha f + \beta g) = \alpha\psi(f) + \beta\psi(g)$$

koşulu sağlanıyor ise ψ operatörüne lineer operatör denir [26,27].

2.2.6. Tanım

ς operatörü, X uzayında tanımlanmış pozitif bir f fonksiyonunu Y uzayından alınan pozitif bir ςf fonksiyonuna dönüştürüyorsa; yani K_f ve $K_{\varsigma(f)}$ sırası ile f ve ςf nin tanım kümeleri

ve her $t \in K_f$ için $f(t) \geq 0$ için her $x \in K_{\varsigma(f)}$ için $\varsigma(f;x) \geq 0$ sağlandığı takdirde ς operatörü pozitif operatör olarak tanımlanır [26-27].

Lineer pozitif operatörler monotondur [27].

2.2.1. Teorem (Bernstein Teoremi)

$f \in C[0,1]$, $x \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

ile verilen $\{B_n(f;x)\}$ polinom dizisi verilsin. Buna göre her bir $f \in C[0,1]$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n(f;x) - f\|_{C[0,1]} = 0$$

gerçeklenir. $\{B_n(f;x)\}$ polinom dizisi $[0,1]$ üzerindeki sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsaktır [1].

2.2.7. Tanım

$1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ koşullarını sağlayan iki reel sayı p ve q olmak üzere, her bir

$$a, b \in \ell_p = \left\{ a = (a_n) \subseteq \mathbb{R} : \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k|^p < \infty \right\} \tag{2.1}$$

iken,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği gerçeklenir ve bu eşitsizliğe Hölder Eşitsizliği denir. Hölder eşitsizliğinde özel olarak $p = q = 2$ seçilirse

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitsizlik Cauchy-Schwarz eşitsizliğidir [28,29].

2.2.2. Teorem (Korovkin Teoremi)

$\gamma_n : C[a,b] \to C[a,b]$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Eğer $n \to \infty$ iken

i) $\gamma_n(1;x) \rightrightarrows 1$

ii) $\gamma_n(t;x) \rightrightarrows x$

iii) $\gamma_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$

ise bu durumda her $f \in C[a,b]$ için $n \to \infty$ iken $\gamma_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$ dir [30].

Burada ki düzgün yakınsaklık $C[a,b]$ de ki maksimum norma göre yakınsaklık anlamındadır.

İspat

Kabul edelim ki $\gamma \in C[a,b]$ olsun. γ sürekli fonksiyon olduğundan dolayı

$$|t-x| \leq \delta \Rightarrow |\gamma(t)-\gamma(x)| < \varepsilon$$

sağlanır. $|t-x| > \delta$ için,

$$\frac{|t-x|}{\delta} > 1 \Longrightarrow \frac{(t-x)^2}{\delta^2} > 1$$

elde edilir. γ, $[a,b]$ de sınırlı olduğundan dolayı

$$|\gamma(t)-\gamma(x)| \leq |\gamma(t)| + |\gamma(x)| \leq 2M_\gamma$$

gerçeklenir.

$$|\gamma(t)-\gamma(x)| \leq 2M_\gamma \leq 2M_\gamma \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

yazılabilir.

$$|t-x| \leq \delta \Rightarrow |\gamma(t)-\gamma(x)| < \varepsilon$$
$$|t-x| > \delta \Rightarrow |\gamma(t)-\gamma(x)| \leq 2M_{\gamma}\frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $\forall x \in [a,b]$ için

$$|\gamma(t)-\gamma(x)| \leq \varepsilon + 2M_{\gamma}\frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

dir. Eğer (i) ve (ii) koşullarını sağlayan (γ_n) operatör dizisinin

$$\lim_{n\to\infty} \|\gamma_n(\gamma(t);x)-\gamma(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliğini de sağlandığı gösterilirse ispat tamamlanır.

Lineerlikten;

$$\begin{aligned}|\varsigma_n(f(t);x)-f(x)| &= |\varsigma_n(f(t);x)-f(x)+\varsigma_n(f(x);x)-\varsigma_n(f(x);x)| \\ &= |\varsigma_n((f(t)-f(x));x)+f(x)(\varsigma_n(1;x)-1)|\end{aligned}$$

dir. Burada üçgen eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$|\varsigma_n(f(t);x)-f(x)| \leq |\varsigma_n((f(t)-f(x));x)|+|f(x)||(\varsigma_n(1;x)-1)|$$

yazılabilir. Diğer taraftan lineer pozitif operatörler monoton artan olup

$$f(t)-f(x) \leq |f(t)-f(x)|$$

eşitsizliğini sağlayacağından

$$|\varsigma_n(f(t)-f(x);x)| \leq |\varsigma_n(|f(t)-f(x)|;x)|$$

olur. Operatör pozitif ve

$$|f(t)-f(x)| \geq 0$$

olduğundan

$$|\varsigma_n(|f(t)-f(x)|;x)| = \varsigma_n(|f(t)-f(x)|;x)$$

dir. O halde

$$|\varsigma_n(f(t);x)-f(x)| \leq \varsigma_n(|f(t)-f(x)|;x)+|f(x)||(\varsigma_n(1;x)-1)|$$

olduğu gösterilmiş olur.

$$|\varsigma_n(f(t);x)-f(x)| \leq \varsigma_n(|f(t)-f(x)|;x)+M_f|(\varsigma_n(1;x)-1)|$$

yazılabilir. (ς_n) monoton artan olduğundan

$$|\varsigma_n(f(t);x)-f(x)| \leq \varsigma_n\left(\varepsilon+2M_f\frac{(t-x)^2}{\delta^2};x\right)+M_f|(\varsigma_n(1;x)-1)|$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\varsigma_n\left(\varepsilon+\frac{2M_f}{\delta^2}(t-x)^2;x\right) &= \varsigma_n(\varepsilon;x)+\varsigma_n\left(\frac{2M_f}{\delta^2}(t-x)^2;x\right) \\
&= \varepsilon\varsigma_n(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}\varsigma_n\left(t^2-2xt+x^2;x\right) \\
&= \varepsilon\varsigma_n(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}\left[\varsigma_n\left(t^2;x\right)-x^2\right. \\
&\quad \left.+2x^2-2x\varsigma_n(t;x)+x^2\varsigma_n(1;x)-x^2\right] \\
&= \varepsilon\varsigma_n(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}\left[(\varsigma_n\left(t^2;x\right)-x^2)\right. \\
&\quad \left.+2x(x-\varsigma_n(t;x))+x^2(\varsigma_n(1;x)-1)\right]
\end{aligned}$$

yazılabilir. O halde

$$|\varsigma_n(f(t);x)-f(x)| \leq \varepsilon\varsigma_n(1;x)+M_f|(\varsigma_n(1;x)-1)|$$

$$+\frac{2M_f}{\delta^2}\left[\left(\varsigma_n\left(t^2;x\right)-x^2\right)\right.$$
$$\left.+2x(x-\varsigma_n(t;x))+x^2(\varsigma_n(1;x)-1)\right]$$

elde edilir. (i), (ii) ve (iii) koşullarının kullanılmasıyla

$$|\varsigma_n(f(t);x)-f(x)|\leq\varepsilon$$

bulunur. O halde

$$\lim_{n\to\infty}\max_{a\leq x\leq b}|\varsigma_n(f(t);x)-f(x)|=0$$

olur. Görüldüğü gibi Korovkin teoremi bu konudaki çalışmalara büyük katkı sağlamıştır. Çünkü verilen operatörün sadece 1, t, t^2 ifadelerini sırasıyla 1, x, x^2 ye düzgün yakınsaması sonlu aralıkta sürekli bütün fonksiyonların bu operatör yardımıyla yakınsamasını söylemeye yetmektedir.

2.3. Süreklilik Modülü

2.3.1. Tanım

f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında tanımlı, sürekli ve reel değerli bir fonksiyon olsun. $x,y\in[a,b]$ olmak üzere $|x-y|\leq\delta$ şartını sağlayan keyfi bir $\delta>0$ için

$|f(x)-f(y)|$ değerlerinin en küçük üst sınırına $[a,b]$ aralığında süreklilik modülü denir.

$$\omega(f;\delta)=\sup_{\substack{x,y\in[a,b]\\|x-y|\leq\delta}}|f(x)-f(y)|$$

ile gösterilir. Burada

$$\omega(f;\delta)=\sup_{|h|\leq\delta}|f(x+h)-f(x)|$$

ile de gösterilebilir [31,32].

2.3.1. Lemma

Süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri sağlar [32].

i)$\delta > 0$ için negatif olmayan bir fonksiyondur.

ii) $\delta_1 \leq \delta_2$ şartını sağlayan δ_1 ve δ_2 sayıları için $\omega(f;\delta_1) \leq \omega(f;\delta_2)$ eşitsizliği sağlanır.

Dolayısıyla ω fonksiyonu artan bir fonksiyondur.

iii) m bir doğal sayı olmak üzere, $\omega(f;m\delta) \leq m\omega(f;\delta)$ sağlanır.

iv) $\lambda > 0$ şartını sağlayan reel sayısı için $\omega(f;\lambda\delta) \leq (1+\lambda)\omega(f;\delta)$ sağlanır.

v) $|f(t)-f(x)| \leq \omega(f;|t-x|)$ eşitsizliği gerçeklenir.

vi) $|f(t)-f(x)| \leq \left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right)\omega(f;\delta)$ eşitsizliği gerçeklenir.

vii) $\lim_{\delta\to 0} \omega(f;\delta) = 0$ eşitliği gerçeklenir.

2.3.2. Tanım (Lipschitz Sınıfı)

$m,n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $[m,n]$ aralığında tanımlı bir f fonksiyonu verilsin. Her $x,t \in [m,n]$, $M > 0$ ve $0 < \gamma \leq 1$ için

$$|f(t)-f(x)| \leq M\,|t-x|^{\gamma}$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonlarının sınıfına Lipschitz sınıfı denir ve $Lip_M\gamma$ ile gösterilir. M Lipschitz sabiti olarak verilir [32].

2.3.3. Tanım (Petree K-Fonksiyoneli)

$f \in C[a,b]$ ve δ negatif olmayan bir reel sayı olsun.

$$K(f;\delta) = \inf_{g \in C^2[a,b]} \left\{ \|f-g\|_{C[a,b]} + \delta \|g\|_{C^2[a,b]} \right\}$$

eşitliği Petree K-fonksiyonelidir. $C^2[a,b]$ üzerinde tanımlı norm

$$\|g\|_{C^2[a,b]} = \|g\|_{C[a,b]} + \|g'\|_{C[a,b]} + \|g''\|_{C[a,b]}$$

ile verilir [33].

2.3.4. Tanım

$[a,b]$ aralığı reel sayılar kümesinin bir alt kümesi olsun. f, $C[a,b]$ nin bir elemanı ve $\delta > 0$ için f nin ikinci süreklilik modülü

$$\omega_2(f) = \sup_{\substack{0<h<\delta \\ x+2h \in [a,b]}} |f(x+2h) - 2f(x+h) - f(x)|$$

şeklinde tanımlıdır. M negatif olmayan reel sayısı için

$$K(f;\delta) \leq M\omega_2(f;\sqrt{\delta})$$

eşitsizliği gerçeklenir [34].

3. OPERATÖRÜN OLUŞTURULMASI

Bu bölüm Gazi Journal of Science dergisinde yayımlanan orijinal makaleden oluşmaktadır.

3.1. Operatörün Tarihçesi

Szász [2] tarafından, Szász lineer pozitif operatörü

$$S_n(f;x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f(\tfrac{k}{n}) \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada $x \geq 0$, $f \in C[0,\infty)$ ve seri yakınsak olarak tanımlanmaktadır. Szász operatörünün diğer özellikleri de bir çok yazar tarafından araştırılmıştır.

Appell polinomları yardımıyla Jakimovski ve Leviatan [3] Szász operatörlerinin bir genellemesini elde etmiştir. Burada

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \ (a_0 \neq 0)$$

$|z| < R(R > 1)$ diskinde, $g(1) \neq 0$ şeklinde olan bir analitik fonksiyondur. $p_k(x)$, Appell polinomlarının üreteç fonksiyonu olmak üzere, $x \geq 0$ için $p_k(x) \geq 0$ iken

$$g(u)e^{ux} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x)u^k$$

şeklinde tanımlanmıştır. Jakimovski ve Leviatan $P_n(f;x)$ lineer pozitif operatörünü

$$P_n(f;x) = \frac{e^{-nx}}{g(1)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) f(\tfrac{k}{n}) \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlamış ve yaklaşım özelliklerini vermiştir. (3.2) de $g(z) = 1$ ve $p_k(x) = \frac{x^k}{k!}$ seçilerek yukarıda verilen Szász operatörünün kolayca elde edilebileceği görülür.

Diğer taraftan Ismail [4] tarafından tanımlanan T_n operatörü için

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \ (a_0 \neq 0)$$

$H(z) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k z^k$, $(h_1 \neq 0)$

eşitliklerinde a_k ve h_k, $|z| < R$ $(R > 1)$ diskinde tanımlı analitik fonksiyonlardır.

$$A(t)\, e^{xH(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x)\, t^k, \quad |t| < R.$$

ile tanımlanan üreteç fonksiyonu için

i) $x \in [0,\infty)$, $p_k(x) \geq 0$,

ii) $A(1) \neq 0$ ve $H'(1) = 1$

koşulları sağlanmaktadır.

T_n lineer pozitif operatörlerini $n \in \mathbb{N}$ için

$$T_n(f;x) = \frac{e^{-nxH(1)}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx)\, f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlayan Ismail [4] ayrıca bu operatörün yaklaşım özelliklerini de araştırmıştır.

3.1.1. Sonuç

$H(t) = t$ için üreteç fonksiyonları

$$g(u)e^{ux} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x)\, u^k$$

olup, (3.3) ile tanımlı operatörün (3.2) ile verilen operatöre indirgendiği kolaylıkla görülür.

3.1.2. Sonuç

$H(t) = t$ ve $A(t) = 1$ seçilirse (3.3) ile verilen operatörden bu defa (3.1) ile tanımlanan Szász operatörü elde edildiği kolaylıkla görülür.

Brenke tipli polinomlar yardımıyla $\varsigma_n(f;x)$ lineer pozitif operatörü, Varma ve arkadaşları [5]

tarafından oluşturulmuştur. Brenke tipli polinomların üreteç fonksiyonları

$$A(t)B(xt)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k(x)t^k$$

şeklindedir. Burada

$$A(t)=\sum_{r=0}^{\infty}a_r t^r,\ a_0\neq 0,$$

$$B(t)=\sum_{r=1}^{\infty}b_r t^r,\ b_r\neq 0\ (r\neq 0)$$

analitik fonksiyonlardır ve

$$p_k(x)=\sum_{r=0}^{\infty}a_{k-r}b_r x^r,\ k=0,1,2,\ldots .$$

açık ifadeye sahiptir. Burada

(i) $A(1)\neq 0$, $\frac{a_{k-r}b_r}{A(1)}\geq 0$, $0\leq r\leq k$, $k=0,1,2,...,$

(ii) $B:[0,\infty)\to(0,\infty)$.

ifadelerinin gerçeklendiği kabul edilmektedir. Varma ve arkadaşları [5], $x\geq 0, f\in C[0,\infty)$ ve $n\in\mathbb{N}$ için

$$\varsigma_n(f;x):=\frac{1}{A(1)B(nx)}\sum_{k=0}^{\infty}p_k(nx)f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{3.4}$$

operatörünü tanımlamıştır.

Bu şekilde başlangıç düşüncesi (3.1) ile verilen Szász (3.1) operatörleri olup yapılan genellemeler yardımıyla daha genel olan operatörlerin elde edilmesine devam edilmiştir. Bu genellemelerden bazıları [5-23] çeşitli çalışmalarda detaylı olarak verilmiştir. Benzer düşünce başka operatör genellemeleri için de düşünülebilir. Yakın zamanda Cárdenas-Morales ve arkadaşları [6] Bernstein tipli $f\in C[0,1]$ şeklinde $B_n(f\circ\tau^{-1})\circ\tau$ operatörünü tanımlamışlardır. B_n, klasik Bernstein operatörleri ve τ, $\tau(0)=0$, $\tau(1)=1$ olacak şekilde ve $[0,1]$ üzerinde sonsuz kez türevlenebilen fonksiyondur. $x\in[0,1]$ için

$\tau'(x) > 0$ şartı sağlanır. Durrmeyer tipi bir genelleme [7] de incelenmiştir. Çok yakın zamanda Aral ve arkadaşları [8] Szász operatörlerinin benzer modifikasyonlarını tanıtmışlardır.

Bu bölümde ise, Aral ve arkadaşları tarafından tanımlanan lineer pozitif operatörler Brenke tipli polinomlar yardımıyla

$$\varsigma_n^{\tau}(f;x) := \frac{1}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)} \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}^{\tau}\left(\frac{n}{b_n}x\right)(f\circ\tau^{-1})\left(\frac{k}{n}b_n\right) \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Burada $x \in [0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, $\tau(x)$ fonksiyonu ise $x \geq 0$ için $\tau(0) = 0$, $\tau(1) = 1$ ve $\tau'(x) > 0$ koşullarını sağlayan sürekli türevlenebilir bir fonksiyondur. Ayrıca

$$p_{n,k}^{\tau}(x) = \sum_{r=0}^{k} a_{k-r} b_r \tau(x)^r, (k = 0,1,2,\ ...) \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Üreteç fonksiyonu

$$A(t)B(\tau(x)t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}^{\tau}(\tau(x))t^k \tag{3.7}$$

biçiminde verilmektedir. 3.1.3 Sonuç

(3.5) ile verilen operatörde, $B(t)$ ve $A(t)$ fonksiyonlarının özel olarak seçilmesi durumunda (3.5) operatörü, (3.1), (3.2), (3.3) ve (3.4) ile verilen operatörlere indirgenir.

3.1.1. Lemma

Negatif olmayan her x reel sayısı için

$$\varsigma_n^{\tau}(1;x) = 1 \tag{3.8}$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat

(3.7) eşitliğinde $t=1$ ve $\tau(x)=\frac{n}{b_n}\tau(x)$ alınırsa

$$A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)=\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}^{\tau}\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right) \tag{3.9}$$

gerçeklenir. (3.9) eşitliği (3.5) eşitliğinde yerine konulursa

$$\begin{aligned}\varsigma_n^{\tau}(1;x)&=\frac{1}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}^{\tau}\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)\\&=1\end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır.

3.1.2. Lemma

Negatif olmayan her x reel sayısı için

$$\varsigma_n^{\tau}(\tau;x)=\frac{B'\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}{B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\tau(x)+\frac{b_n}{n}\frac{A'(1)}{A(1)} \tag{3.10}$$

gerçeklenir.

İspat

(3.5) ile verilen ifadede $f(x)=\tau(x)$ yazılırsa

$$\begin{aligned}\varsigma_n^{\tau}(\tau;x)&=\frac{1}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}^{\tau}\left(\frac{n}{b_n}x\right)\frac{k}{n}b_n\\&=\frac{1}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\frac{b_n}{n}\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}^{\tau}\left(\frac{n}{b_n}x\right)k\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}^{\tau}\left(\frac{n}{b_n}x\right)k$ bulunmalıdır.

(3.7) ile verilen ifadenin t ye göre türevi alınırsa

$$A'(t)B(\tau(x)t)+\tau(x)A(t)B'(\tau(x)t)=\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}^{\tau}(\tau(x))t^{k-1}k \tag{3.11}$$

bulunur. Elde edilen bu eşitlikte $t=1$ ve $\tau(x)$ yerine $\frac{n}{b_n}\tau(x)$ alınırsa

$$A'(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)+\frac{n}{b_n}\tau(x)A(1)B'\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)=\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}^{\tau}\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)k$$

yazılır. Bulunan bu eşitlik, yukarıda elde edilen $\varsigma_n^{\tau}(\tau;x)$ ile verilen eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\varsigma_n^{\tau}(\tau;x)&=\frac{1}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\frac{b_n}{n}\left[A'(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)+\frac{n}{b_n}\tau(x)A(1)B'\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)\right]\\&=\frac{B'\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}{B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\tau(x)+\frac{b_n}{n}\frac{A'(1)}{A(1)}\end{aligned}$$

gerçeklenir ve ispat tamamlanır.

3.1.3. Lemma

Negatif olmayan her x reel sayısı için

$$\begin{aligned}\varsigma_n^{\tau}(\tau^2;x)&=\frac{B''\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}{B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\tau(x)^2+\frac{b_n}{n}\frac{(A(1)+2A'(1))B'\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\tau(x)\\&\quad+\frac{b_n^2}{n^2}\frac{A'(1)+A''(1)}{A(1)}\end{aligned} \tag{3.12}$$

gerçeklenir.

İspat

(3.5) ile verilen ifadede $f(x)=(\tau(x))^2$ yazılırsa

$$\begin{aligned}\varsigma_n^{\tau}(\tau^2;x)&=\frac{1}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}^{\tau}\left(\frac{n}{b_n}x\right)\frac{k^2}{n^2}b_n^2\\&=\frac{1}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\frac{b_n^2}{n^2}\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}^{\tau}\left(\frac{n}{b_n}x\right)k^2\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}^{\tau}\left(\frac{n}{b_n}x\right)k^2$ bulunmalıdır.

(3.11) in t ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
&A''(t)B(\tau(x)t)+2\tau(x)A'(t)B'(\tau(x)t)+\tau^2(x)A(t)B''(\tau(x)t)\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}^{\tau}(\tau(x))k(k-1)t^{k-2}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}^{\tau}(\tau(x))k^2t^{k-2}-\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}^{\tau}(\tau(x))kt^{k-2} \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

olup burada $t=1$ ve $\tau(x)$ yerine $\frac{n}{b_n}\tau(x)$ alınırsa

$$\begin{aligned}
&A''(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)+2\frac{n}{b_n}\tau(x)A'(1)B'\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)+\frac{n^2}{b_n^2}\tau^2(x)A(1)B''\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}^{\tau}\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)k^2-\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}^{\tau}\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)k
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada ise yukarıda elde edilen $\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}^{\tau}\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)k$ ifadesi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}^{\tau}\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)k^2 &= A''(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)+2\frac{n}{b_n}\tau(x)A'(1)B'\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)\\
&\quad+\frac{n^2}{b_n^2}\tau^2(x)A(1)B''\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)\\
&\quad+A'(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)+\frac{n}{b_n}\tau(x)A(1)B'\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)
\end{aligned}$$

gerçeklenir. Bu eşitsizlik $\varsigma_n^{\tau}\left(\tau^2;x\right)$ ile verilen eşitlikte yerine yazılırsa yazılırsa

$$\begin{aligned}
\varsigma_n^{\tau}\left(\tau^2;x\right) &= \frac{B''\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}{B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\tau^2(x)+\frac{b_n}{n}\frac{(A(1)+2A'(1))B'\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\tau(x)\\
&\quad+\frac{b_n^2}{n^2}\frac{A'(1)+A''(1)}{A(1)}
\end{aligned}$$

sağlanır ve ispat tamamlanır.

3.1.1. Tanım

$\{K_n\}$ operatör dizisi olsun. $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $\{K_n\}$ operatör dizisinin m-inci merkezi momenti

$$\Psi_m := \Psi_{n,m}(x) = K_n\left((t-x)^m; x\right)$$

ile tanımlanır.

3.1.4. Lemma

Negatif olmayan her x reel sayısı için

$$\varsigma_n^{\tau}\left(\tau(t)-\tau(x);x\right) = \frac{B'\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right) - B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}{B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\tau(x) + \frac{b_n}{n}\frac{A'(1)}{A(1)} \tag{3.14}$$

eşitliği ς_n^{τ} operatörünün birinci merkezi momentidir.

3.1.5. Lemma

Negatif olmayan her x reel sayısı için

$$\begin{aligned}\varsigma_n^{\tau}\left((\tau(t)-\tau(x))^2;x\right) = {} & \frac{B''\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right) - 2B'\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right) + B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}{B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\tau(x)^2 \\ & + \frac{b_n}{n}\frac{A(1)B'\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right) + 2A'(1)(B'\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right) - B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right))}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\tau(x) \\ & + \frac{b_n^2}{n^2}\frac{A'(1)+A''(1)}{A(1)}\end{aligned} \tag{3.15}$$

eşitliği ς_n^{τ} operatörünün ikinci merkezi momentidir.

3.1.1. Teorem

$f \in C[0,\infty) \cap G$ ve

$$\lim_{\theta\to\infty} \frac{B\prime(\theta)}{B(\theta)} = 1, \lim_{\theta\to\infty} \frac{B\text{"}(\theta)}{B(\theta)} = 1, \lim_{n\to\infty} b_n = \infty \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

limitleri gerçeklensin.

ς_n^{τ} operatörleri $[0,a]$ $(a > 0)$ kompakt alt aralığında f fonksiyonuna $n \to \infty$ için düzgün yakınsar. Yani

$$\lim_{n\to\infty} \varsigma_n^{\tau}\left(\tau^i;x\right) = \tau^i(x), (i = 0,1,2)$$

sağlanır. Burada

$$G := \{f : \forall x \in [0,\infty), |f(x)| \leq Ke^{Rx}, K \in \mathbb{R}^+, R \in \mathbb{R}\}$$

ile tanımlanmaktadır.

3.2. Yaklaşım Hızı Hesabı

Bu bölümde operatörün yaklaşım hızı hesabı süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımı ile yapılacaktır.

3.2.1. Teorem

$f \in C^1[0,\infty) \cap G$ alalım. Her $x \in [0,\infty)$ için

$$|\varsigma_n^{\tau}(f;x) - f(x)| \leq 2\left|\left(f\circ\tau^{-1}\right)'\tau(x)\right| \omega(f,\delta_n(x)) + 2\delta_n(x)\omega\left(\left(f\circ\tau^{-1}\right)', \delta_n(x)\right)$$

eşitsizliği gerçeklenir. Burada $\delta(x) := \delta_n(x) = \sqrt{\varsigma_n^{\tau}\left((\tau(t)-\tau(x))^2;x\right)}$ şeklinde seçilmiştir.

İspat

Herhangi $x,t\in[0,\infty)$ için

$$\begin{aligned} f(t) &= \left(f\circ\tau^{-1}\right)\tau(x)+\left(f\circ\tau^{-1}\right)'\tau(x)\left(\tau(t)-\tau(x)\right) \\ &\quad +\int_{\tau(x)}^{\tau(t)}\left[\left(f\circ\tau^{-1}\right)'(u)-\left(f\circ\tau^{-1}\right)'(\tau(x))\right]du \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada ς_n^{τ} operatörünün lineerlik özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \varsigma_n^{\tau}(f(t)-f(x);x) &= \left(f\circ\tau^{-1}\right)'\tau(x)\varsigma_n^{\tau}\left(\tau(t)-\tau(x);x\right) \\ &\quad +\varsigma_n^{\tau}\left(\int_{\tau(x)}^{\tau(t)}\left[\left(f\circ\tau^{-1}\right)'(u)-\left(f\circ\tau^{-1}\right)'(\tau(x))\right]du;x\right) \end{aligned}$$

bulunur. Süreklilik modülü

$$|f(t)-f(x)|\leq\omega(f,\delta)\left(1+\frac{|u-x|}{\delta}\right)$$

özelliğine sahip olduğundan, Mohiuddine ve arkadaşları [35] tarafından verilen eşitsizlik

$$\begin{aligned} &\left|\int_{\tau(x)}^{\tau(t)}\left[\left(f\circ\tau^{-1}\right)'(u)-\left(f\circ\tau^{-1}\right)'(\tau(x))\right]du\right| \\ &\leq \omega\left(\left(f\circ\tau^{-1}\right)',\delta\right)\left(\frac{\left(\tau(t)-\tau(x)\right)^2}{\delta}+|\tau(t)-\tau(x)|\right) \end{aligned}$$

şeklindedir. Bundan dolayı

$$\begin{aligned} |\varsigma_n^{\tau}(f;x)-f(x)| &\leq \left|\left(f\circ\tau^{-1}\right)'\tau(x)\right|\left|\varsigma_n^{\tau}\left(\tau(t)-\tau(x);x\right)\right| \\ &\quad +\omega\left(\left(f\circ\tau^{-1}\right)',\delta\right)\left\{\frac{1}{\delta}\varsigma_n^{\tau}\left(\left(\tau(t)-\tau(x)\right)^2;x\right)\right. \\ &\quad \left.+\varsigma_n^{\tau}\left(|\tau(t)-\tau(x)|;x\right)\right\}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

ifadesi elde edilir. Burada

$$\varsigma_n^{\tau}(\tau(t)-\tau(x);x) \leq \sqrt{\varsigma_n^{\tau}\left((\tau(t)-\tau(x))^2;x\right)}$$

olduğu açıkça görülür. Aynı zamanda

$$\begin{aligned}
|\varsigma_n^{\tau}(\tau(t)-\tau(x))| &= \left|\frac{1}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\sum_{k=0}^{\infty}P_{n,k}^{\tau}\left(\frac{n}{b_n}x\right)\left(\left(\frac{k}{n}b_n\right)-x\right)\right| \\
&\leq \left[\frac{1}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\sum_{k=0}^{\infty}P_{n,k}^{\tau}\left(\frac{n}{b_n}x\right)\left(\frac{\left|\frac{k}{n}b_n-x\right|}{\delta}+1\right)\right]\omega(f,\delta) \\
&\leq \left[1+\frac{1}{\delta}\frac{1}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\sum_{k=0}^{\infty}P_{n,k}^{\tau}\left(\frac{n}{b_n}x\right)\left|\frac{k}{n}b_n-x\right|\right]\omega(f,\delta)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\varsigma_n^{\tau}(\tau(t)-\tau(x);x) &\leq \left[1+\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\sum_{k=0}^{\infty}P_{n,k}^{\tau}\left(\frac{n}{b_n}x\right)\left(\left(\frac{k}{n}b_n-x\right)^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right. \\
&\quad \left.\times\left(\frac{1}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\sum_{k=0}^{\infty}P_{n,k}^{\tau}\left(\frac{n}{b_n}x\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right]\omega(f,\delta) \\
&\leq \left[1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\varsigma_n^{\tau}\left((\tau(t)-\tau(x))^2;x\right)}\right]\omega(f,\delta)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\delta(x):=\delta_n(x)=\sqrt{\varsigma_n^{\tau}\left((\tau(t)-\tau(x))^2;x\right)}$ alınırsa,

$$|\varsigma_n^{\tau}(\tau(t)-\tau(x))| \leq 2\omega(f,\delta_n)$$

gerçeklenir. Elde edilen bu eşitsizlik (3.16) ile verilen eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$|\varsigma_n^{\tau}(f;x)-f(x)| \leq \left|\left(f\circ\tau^{-1}\right)'\tau(x)\right|2\omega(f,\delta_n(x))+\omega\left(\left(f\circ\tau^{-1}\right)',\delta_n(x)\right)\left\{\frac{1}{\delta_n(x)}\delta_n(x)^2+\delta_n(x)\right\}$$

$$\leq \quad 2\left|\left(f\circ\tau^{-1}\right)'\tau(x)\right|\omega(f,\delta_n(x))+2\delta_n(x)\omega\left(\left(f\circ\tau^{-1}\right)',\delta_n(x)\right)$$

olup, ispat tamamlanır.

3.2.2. Teorem

$f\in Lip_M(\alpha)$ alalım. Bu durumda

$$|\varsigma_n^{\tau}(f;x)-f(x)|\leq M\cdot\left|\left(f\circ\tau^{-1}\right)'\tau(x)\right|(\delta_n)^{\frac{\alpha}{2}}$$

olur. Burada $\delta(x):=\delta_n(x)=\sqrt{\varsigma_n^{\tau}\left((\tau(t)-\tau(x))^2;x\right)}$ şeklinde seçilmiştir.

İspat

Herhangi bir $x,t\in[0,\infty)$ ve Taylor seri açılımından,

$$\begin{aligned} f(t) \quad &= \quad \left(f\circ\tau^{-1}\right)\tau(x)+\left(f\circ\tau^{-1}\right)'\tau(x)\left(\tau(t)-\tau(x)\right) \\ &\quad +\left(f\circ\tau^{-1}\right)''\tau(x)\left(\frac{\tau(t)-\tau(x)}{2!}\right)\eta(t,x) \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $\eta(t,x)=0$ olduğu bilinmektedir. Buradan ς_n^{τ} operatörünün lineerlik özelliği kullanılırsa,

$$\varsigma_n^{\tau}(f;x)-f(x)=\left(f\circ\tau^{-1}\right)'\tau(x)\varsigma_n^{\tau}\left(\left(\tau(t)-\tau(x)\right);x\right) \tag{3.17}$$

yazılabilir. ς_n^{τ} operatörünün tanımı ve Hölder eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned} |\varsigma_n^{\tau}(\tau(t)-\tau(x))| \quad &= \quad \left|\frac{1}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\sum_{k=0}^{\infty}P_{n,k}^{\tau}\left(\frac{n}{b_n}x\right)\left(\left(\frac{k}{n}b_n\right)-x\right)\right| \\ &\leq \quad \frac{1}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\sum_{k=0}^{\infty}P_{n,k}^{\tau}\left(\frac{n}{b_n}x\right)\left|\left(\frac{k}{n}b_n\right)-x\right| \\ &\leq \quad M\frac{1}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\sum_{k=0}^{\infty}P_{n,k}^{\tau}\left(\frac{n}{b_n}x\right)\left|\left(\frac{k}{n}b_n\right)-x\right|^{\alpha} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq M\left(\frac{1}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}b_n-x\right)^2 P_{n,k}^{\tau}\left(\frac{n}{b_n}x\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}}\\
&\quad\times\left(\frac{1}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\sum_{k=0}^{\infty}P_{n,k}^{\tau}\left(\frac{n}{b_n}x\right)\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}\\
&\leq M\left(\frac{1}{A(1)B\left(\frac{n}{b_n}\tau(x)\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}b_n-x\right)^2 P_{n,k}^{\tau}\left(\frac{n}{b_n}x\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}}\\
&\leq M\left(\varsigma_n^{\tau}\left((\tau(t)-\tau(x))^2;x\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada $\delta(x) := \delta_n(x) = \sqrt{\varsigma_n^{\tau}\left((\tau(t)-\tau(x))^2;x\right)}$ alınırsa

$$|\varsigma_n^{\tau}(\tau(t)-\tau(x))| \leq M\left(\delta_n(x)\right)^{\alpha}$$

gerçeklenir. Elde edilen bu eşitsizlik (3.17) ile verilen eşitsizlikte yerine koyulursa,

$$|\varsigma_n^{\tau}(f;x)-f(x)| \leq M\cdot\left|\left(f\circ\tau^{-1}\right)'\tau(x)\right|\left(\delta_n(x)\right)^{\alpha}$$

olur ve ispat tamamlanır.

3.2.1. Tanım

Petree K-fonksiyoneli her $x\in[0,\infty)$ ve $f\in C[0,\infty)$ için

$$K(f,\delta) = C\left(\omega_2\left(f,\sqrt{\delta}\right)+\min\{1,\delta\}\|f\|\right) \tag{3.18}$$

şeklinde ki eşitliği gerçeklenmektedir.

3.2.3. Teorem

$x\in[0,\infty)$, $f\in C^2[0,\infty)\cap G$ ve $\inf\limits_{x\in[0,\infty)}\tau'(x)\geq 1$ olsun. Bu durumda

$$|\varsigma_n^{\tau}(f;x)-f(x)| \leq C\left[\omega_2\left(f,\sqrt{\varepsilon_n}\right)+\min\{1,\varepsilon_n\}\|f\|\right]$$

eşitsizliği gerçeklenir. Burada C pozitif gerçel sayı, $\delta_n(x) = \sqrt{\varsigma_n^\tau\left((\tau(t)-\tau(x))^2;x\right)}$ ve $\varepsilon_n = \frac{\delta_n[1+\delta_n(1+\|\tau''\|)]}{2}$ olarak alınmıştır.

İspat

$g \in C^2[0,\infty)$ için Taylor formülü yardımıyla aş

$$g(t) = (g\circ\tau^{-1})\tau(x) + (\tau(t)-\tau(x))(g\circ\tau^{-1})'\tau(x) + \int_{\tau(x)}^{\tau(t)} (g\circ\tau^{-1})''(u)\,(\tau(t)-u)\,du. \quad (3.19)$$

eşitliği yazılabilir. Aynı zamanda Mohiuddine ve arkadaşları [35] tarafından verilen

$$(g\circ\tau^{-1})''(\tau(y)) = \frac{1}{\tau'(y)}\left[\frac{g''(y)\tau'(y) - g'(y)\tau''(y)}{(\tau'(y))^2}\right] \quad (3.20)$$

eşitlik kolayca görülür. Basit bir işlemle ise

$$\begin{aligned}(g\circ\tau^{-1})'(\tau(x)) &= g'\left(\tau^{-1}(\tau(x))\right)\left(\tau^{-1}\right)'(\tau(x)) \\ &= g'(x)\left(\tau^{-1}\right)'(\tau(x)) \\ &\leq \left\|g'(x)\right\|\left(\tau^{-1}\right)'(\tau(x)) \\ &= \left\|g'(x)\right\|\frac{1}{\tau'(\tau^{-1}(x))} \end{aligned} \quad (3.21)$$

eşitsizliğinin gerçeklendiği de görülür. Aşağıdaki eşitsizlik

$$\varsigma_n^\tau(\tau(t)-\tau(x);x) \leq \sqrt{\varsigma_n^\tau\left((\tau(t)-\tau(x))^2;x\right)} \quad (3.22)$$

açıkça gösterilebilir. Diğer taraftan

$$\int_{\tau(x)}^{\tau(t)} (\tau(t)-u)\,(g\circ\tau^{-1})''(u)du$$

ifadesinde $u=\tau(y)$ alınırsa $du=\tau'(y)dy$ olur ve

$$\int_x^t (\tau(t)-\tau(y))\,(g\circ\tau^{-1})''(\tau(y))\tau'(y)dy$$

elde edilir. Elde edilen bu ifadede (3.20) ile verilen eşitlik kullanılırsa

$$\int_x^t (\tau(t)-\tau(y))\left[\frac{g''(y)\tau'(y)-g'(y)\tau''(y)}{(\tau'(y))^2}\right]dy$$

olur. Burada ki integralde $y=\tau^{-1}(u)$ ve $\tau'(y)dy=du$ yerine yazılır ve iki integral şeklinde düzenlenirse

$$\begin{aligned}\int_{\tau(x)}^{\tau(t)} (\tau(t)-u)\,(g\circ\tau^{-1})''(u)du &= \int_{\tau(x)}^{\tau(t)} (\tau(t)-u)\,\frac{g''(\tau^{-1}(u))\tau'(\tau^{-1}(u))}{(\tau'(\tau^{-1}(u)))^2}du \\ &\quad -\int_{\tau(x)}^{\tau(t)} (\tau(t)-u)\,\frac{g'(\tau^{-1}(u))\tau''(\tau^{-1}(u))}{(\tau'(\tau^{-1}(u)))^3}du \qquad (3.23)\end{aligned}$$

bulunur. $\inf_{x\in[0,\infty)} \tau'(x)\geq 1$ dikkate alınırsa ve

$$|\varsigma_n^\tau(g;x)-g(x)|\leq \varsigma_n^\tau\left((\tau(t)-\tau(x))\,(g\circ\tau^{-1})'\tau(x)+\varsigma_n^\tau\left(\left|\int_{\tau(x)}^{\tau(t)} (\tau(t)-u)\,(g\circ\tau^{-1})''(u)du\right|;x\right)\right.$$

ile verilen ifadede (3.21) ve (3.23) ile elde edilen eşitlikler kullanılırsa

$$\begin{aligned}|\varsigma_n^\tau(g;x)-g(x)| &\leq \varsigma_n^\tau(\tau(t)-\tau(x))\left\|g'\right\|\left(\tau^{-1}\right)'(\tau(x)) \\ &\quad +\varsigma_n^\tau\left(\left|\int_{\tau(x)}^{\tau(t)} \frac{g''(\tau^{-1}(u))\tau'(\tau^{-1}(u))}{(\tau'(\tau^{-1}(u)))^2}(\tau(t)-u)\,du\right|;x\right) \\ &\quad +\varsigma_n^\tau\left(\left|\int_{\tau(x)}^{\tau(t)} \frac{g'(\tau^{-1}(u))\tau''(\tau^{-1}(u))}{(\tau'(\tau^{-1}(u)))^3}(\tau(t)-u)\,du\right|;x\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \varsigma_n^{\tau}\left(\tau(t)-\tau(x)\right)\left\|g'\right\|\frac{1}{\tau'(\tau^{-1}(x))} \\ &\quad +\varsigma_n^{\tau}\left(\left(\tau(t)-\tau(x)\right)^2;x\right)\left(\left\|g''\right\|+\left\|g'\right\|\left\|\tau''\right\|\right) \end{aligned}$$

olur ve (3.22) ile verilen eşitlikten

$$\begin{aligned} \left|\varsigma_n^{\tau}(g;x)-g(x)\right| &\leq \sqrt{\varsigma_n^{\tau}\left(\left(\tau(t)-\tau(x)\right)^2;x\right)}\left\|g'\right\| \\ &\quad +\varsigma_n^{\tau}\left(\left(\tau(t)-\tau(x)\right)^2;x\right)\left(\left\|g''\right\|+\left\|g'\right\|\left\|\tau''\right\|\right) \end{aligned}$$

yazılır ve $\delta_n=\sqrt{\varsigma_n^{\tau}\left(\left(\tau(t)-\tau(x)\right)^2;x\right)}$ seçilirse

$$\begin{aligned} \left|\varsigma_n^{\tau}(g;x)-g(x)\right| &\leq \delta_n\left\|g'\right\|+\delta_n^2\left(\left\|g''\right\|+\left\|g'\right\|\left\|\tau''\right\|\right) \\ &\leq \delta_n\left(\left\|g'\right\|+\delta_n(\left\|g''\right\|+\left\|g'\right\|\left\|\tau''\right\|)\right) \\ &\leq \delta_n\left[1+\delta_n(1+\left\|\tau''\right\|)\right]\|g\|_{C^2[0,\infty)} \end{aligned}$$

gerçeklenir. Dolayısıyla

$$\left|\varsigma_n^{\tau}(g;x)-g(x)\right|\leq \delta_n\left[1+\delta_n(1+\left\|\tau''\right\|)\right]\|g\|_{C^2[0,\infty)} \tag{3.24}$$

yazılır.

$f\in C[0,\infty)$ ve $g\in C^2[0,\infty)$ alınırsa ve (3.24) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left|\varsigma_n^{\tau}(f;x)-f(x)\right| &\leq |g(x)-f(x)|+\left|\varsigma_n^{\tau}(f-g;x)\right|+\left|\varsigma_n^{\tau}(g;x)-g(x)\right| \\ &\leq 2\|f-g\|+\delta_n\left(1+\delta_n(1+\left\|\tau''\right\|)\right)\|g\|_{C^2} \end{aligned}$$

olur ve $\varepsilon_n=\frac{\delta_n[1+\delta_n(1+\|\tau''\|)]}{2}$ alınırsa

$$\left|\varsigma_n^{\tau}(f;x)-f(x)\right| \leq 2\left\{\|f-g\|+\varepsilon_n\|g\|_{C^2}\right\}$$

gerçeklenir. Burada $g \in C^2[0,\infty)$ üzerinden infimum alınırsa

$$|\varsigma_n^{\tau}(f;x) - f(x)| \leq 2K(f,\varepsilon_n)$$

yazılabilir. (3.18) eşitliği kullanılırsa

$$|\varsigma_n^{\tau}(f;x) - f(x)| \leq C\left[\omega_2\left(f,\sqrt{\varepsilon_n}\right) + \min\{1,\varepsilon_n\}\|f\|\right]$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

4. BOAS-BUCK TİPLİ POLİNOMLARIN GENELLEŞTİRİLMESİNİ İÇEREN STANCU-DURRMEYER OPERATÖRLERİNİN BETA GENELLEMESİ

Bu bölüm Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Dergisinde yayımlanan makalenin düzenlenmiş halini içermektedir.

Son yıllarsa Szász [2] operatörlerinin genellemesi birçok araştırmacının ilgisini çekmiştir. Jakimovski-Leviatan [3] ve Ismail [4] sırasıyla Appell ve Sheffer polinomlarını kullanarak Szász operatörlerinin genellemesini elde etmişlerdir. Artan ilgi sebebiyle teori daha da gelişmiştir [5,10-19,23]. Ortogonal ve d-ortogonal polinomlar teoride yaygın olarak kullanılmıştır. Sonuç olarak Boas-Buck tipli polinomların genelleştirilmesini sağlayan yeni bir operatör dizisi üreteç fonskiyonu [37]

$$R(v)\Psi(xS(v)+\sigma(v))=\sum_{j=0}^{\infty}\theta_j(x)v^j \tag{4.1}$$

şeklinde olan operatör

$$H_n(f;x)=\frac{1}{R(1)\Psi(nxS(1)+\sigma(1))}\sum_{j=0}^{\infty}\theta_j(nx)f\left(\frac{j}{n}\right) \tag{4.2}$$

olarak tanımlanmıştır. Burada $|z|<L$ $(L>1)$ diskinde

$$S(v)=\sum_{j=0}^{\infty}s_jv^{j+1},(s_0\neq 0) \tag{4.3}$$

ve

$$\sigma(v)=\sum_{j=0}^{\infty}\sigma_jv^{j+2} \tag{4.4}$$

şeklindedir. (4.1) ile verilen eşitlik için

(1) $\Psi:\mathbb{R}\to(0,\infty)$,

(2) $\theta_j(x)\geq 0$ için $j=0,1,2,...,$

(3) $R(1) > 0$ ve $S'(1) = 1$.

koşulları sağlanmaktadır.

Sucu ve Varma [13], H_n operatörünün Kantorovich genellemesini

$$H_n^*(f;x) = \frac{n}{R(1)\Psi(nxS(1)+\sigma(1))} \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j(nx) \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f(\zeta)\, d\zeta \tag{4.5}$$

şeklinde tanımlamıştır. Operatörün yakınsama ve yaklaşım özellikleri elde edilmiştir.

Stancu-Durrmeyer (4.2) operatörlerinin Beta genellemesi

$$L_n(f;x) = \frac{1}{R(1)\Psi(nxS(1)+\sigma(1))} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\theta_j(nx)}{B(n+1,k)} \int_0^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+k+1}} f\left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}\right) dt \tag{4.6}$$

gibi tanımlanmıştır. Burada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x \in [0,\infty)$ ve $f \in C[0,\infty)$ olduğu kabul edilmiştir. Aynı zamanda, $S(v)$ ve $\sigma(v)$ sırasıyla (4.3) ve (4.4) ile verilmiştir. Beta fonksiyonu

$$B(n,k) = \int_0^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+k}} dt = \frac{\Gamma(n)\Gamma(k)}{\Gamma(n+k)} \tag{4.7}$$

olarak tanımlanmıştır. Burada $n,k > 0$ ve Γ Gama fonksiyonudur.

4.1. L_n Operatörünün Oluşturulması

İlk olarak L_n için bazı eşitlikler elde edilecektir.

4.1.1. Lemma

(4.1) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} L_n(1;x) &= 1, \\ L_n(\zeta;x) &= \frac{n}{n+\beta} \frac{\Psi'(nxS(1)+\sigma(1))}{\Psi(nxS(1)+\sigma(1))} x \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$+\frac{1}{n+\beta}\left(\frac{R'(1)}{R(1)}+\frac{\Psi'(nxS(1)+\sigma(1))}{\Psi(nxS(1)+\sigma(1))}\sigma'(1)+\alpha\right), \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
L_n(\zeta^2;x) &= \frac{n^3}{(n+\beta)^2(n-1)}\frac{\Psi''(nxS(1)+\sigma(1))}{\Psi(nxS(1)+\sigma(1))}x^2+\frac{n^2}{(n+\beta)^2(n-1)} \\
&\left\{\frac{[2R'(1)+R(1)(2+S''(1))]\,\Psi'(nxS(1)+\sigma(1))}{R(1)\Psi(nxS(1)+\sigma(1))}\right. \\
&\left.\frac{+2R'(1)\sigma'(1)\Psi''(nxS(1)+\sigma(1))}{R(1)\Psi(nxS(1)+\sigma(1))}+\frac{2\alpha(n-1)}{n}\frac{\Psi'(nxS(1)+\sigma(1))}{\Psi(nxS(1)+\sigma(1))}\right\}x \\
&+\frac{n}{(n+\beta)^2(n-1)}\left\{\frac{(\sigma'(1))^2R'(1)\Psi''(nxS(1)+\sigma(1))}{R(1)\Psi(nxS(1)+\sigma(1))}\right\} \\
&+\frac{n}{(n+\beta)^2(n-1)} \\
&\left\{\frac{[(2R'(1)+R(1))\,\sigma'(1)+R(1)\,(\sigma''(1)+\sigma'(1))]\,\Psi'(nxS(1)+\sigma(1))}{R(1)\Psi(nxS(1)+\sigma(1))}\right. \\
&\left.+\frac{R''(1)+2R'(1)}{R(1)}\right\} \\
&+\frac{2\alpha}{(n+\beta)^2}\left(\frac{R'(1)}{R(1)}+\frac{\Psi'(nxS(1)+\sigma(1))}{\Psi(nxS(1)+\sigma(1))}\sigma'(1)\right)+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

eşitlikleri elde edilir.

İspat

(4.1) ile verilen eşitlikte $v=1$ ve $x\to nx$ yazılırsa

$$\sum_{j=0}^{\infty}\theta_j(nx)=R(1)\Psi(nxS(1)+\sigma(1))$$

eşitliği elde edilir. L_n operatöründe bu eşitlik kullanarak tekrar yazılırsa

$$\begin{aligned}
L_n(1;x) &= \frac{1}{R(1)\Psi(nxS(1)+\sigma(1))}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\theta_j(nx)}{B(n+1,k)}\int_0^{\infty}\frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+k+1}}dt \\
&= \frac{1}{R(1)\Psi(nxS(1)+\sigma(1))}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\theta_j(nx)}{B(n+1,k)}B(n+1,k) \\
&= \frac{1}{R(1)\Psi(nxS(1)+\sigma(1))}\sum_{j=0}^{\infty}\theta_j(nx) \\
&= 1
\end{aligned}$$

elde edilir.

Burada (4.1) ile verilen eşitlikte operatörün v ye göre türevi alındıktan sonra $v=1$ ve $x \to nx$ yazılırsa

$$\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j(nx)\, j = R'(1)\Psi(nxS(1)+\sigma(1)) + R(1)\Psi'(nxS(1)+\sigma(1))\left[nxS'(1)+\sigma'(1)\right] \qquad (4.11)$$

eşitliğin gerçeklendiği açıkça görülür. Elde edilen bu ifadeyi (4.6) ile verilen L_n operatöründe yerine yazılırsa (4.9) ile verilen denklem elde edilir.

Son olarak (4.1) ile verilen eşitlikte operatörün v ye göre ikinci türevi alındıktan sonra $v=1$ ve $x \to nx$ yazılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j(nx)\, j^2 &= [R''(1)+R'(1)]\Psi(nxS(1)+\sigma(1)) \\ &\quad + \left[2R'(1)+R(1)\right]\Psi'(nxS(1)+\sigma(1))\left[nxS'(1)+\sigma'(1)\right] \\ &\quad + R(1)\Psi''(nxS(1)+\sigma(1))\left[nxS'(1)+\sigma'(1)\right]^2 \\ &\quad + R(1)\Psi'(nxS(1)+\sigma(1))\left[nxS''(1)+\sigma''(1)\right]\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Elde edilen bu ifade ise (4.6) ile verilen L_n operatöründe yerine yazılırsa (4.10) ile verilen denklem elde edilir.

4.1.2. Lemma

(4.8), (4.9) ve (4.10) ile verilen eşitlikler yardımıyla

$$\begin{aligned}L_n(\zeta - x; x) &= \frac{n}{n+\beta}\left(\frac{\Psi'(nxS(1)+\sigma(1))}{\Psi(nxS(1)+\sigma(1))} - \frac{n+\beta}{n}\right)x \\ &\quad + \frac{1}{n+\beta}\left(\frac{R'(1)}{R(1)} + \frac{\Psi'(nxS(1)+\sigma(1))}{\Psi(nxS(1)+\sigma(1))}\sigma'(1) + \alpha\right)\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
L_n((\zeta-x)^2;x) &= \left[\frac{n^3}{(n+\beta)^2(n-1)}\frac{\Psi''(nxS(1)+\sigma(1))}{\Psi(nxS(1)+\sigma(1))}-\frac{2n}{n+\beta}\frac{\Psi'(nxS(1)+\sigma(1))}{\Psi(nxS(1)+\sigma(1))}+1\right]x^2 \\
&+\frac{n}{(n+\beta)^2(n-1)}\left\{\frac{[2R'(1)+R(1)(2+S''(1))]\Psi'(nxS(1)+\sigma(1))}{R(1)\Psi(nxS(1)+\sigma(1))}\right. \\
&\frac{+2R'(1)\sigma'(1)\Psi''(nxS(1)+\sigma(1))}{R(1)\Psi(nxS(1)+\sigma(1))}+\frac{2\alpha(n-1)}{n}\frac{\Psi'(nxS(1)+\sigma(1))}{\Psi(nxS(1)+\sigma(1))} \\
&\left.-\frac{2(n+\beta)(n-1)}{n}\left(\frac{R'(1)}{R(1)}+\frac{\Psi'(nxS(1)+\sigma(1))}{\Psi(nxS(1)+\sigma(1))}\sigma'(1)+\alpha\right)\right\}x \\
&+\frac{n}{(n+\beta)^2(n-1)}\left\{\frac{(\sigma'(1))^2R'(1)\Psi''(nxS(1)+\sigma(1))}{R(1)\Psi(nxS(1)+\sigma(1))}\right\} \\
&+\frac{n}{(n+\beta)^2(n-1)} \\
&\times\left\{\frac{[(2R'(1)+R(1))\sigma'(1)+R(1)(\sigma''(1)+\sigma'(1))]\Psi'(nxS(1)+\sigma(1))}{R(1)\Psi(nxS(1)+\sigma(1))}\right. \\
&\left.+\frac{R''(1)+2R'(1)}{R(1)}\right\} \\
&+\frac{2\alpha}{(n+\beta)^2}\left(\frac{R'(1)}{R(1)}+\frac{\Psi'(nxS(1)+\sigma(1))}{\Psi(nxS(1)+\sigma(1))}\sigma'(1)\right)+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}
\end{aligned}
$$

eşitlikleri elde edilir.

Burada

$$\lim_{y\to\infty}\frac{\Psi''(y)}{\Psi(y)}=1,\ \lim_{y\to\infty}\frac{\Psi'(y)}{\Psi(y)}=1 \tag{4.12}$$

limitlerinin sağlandığı kabul edilmektedir.

Sıradaki teorem L_n operatörünün f fonksiyonuna düzgün yakınsadığını gösterecektir.

4.1.1. Teorem

f, $C[0,\infty)\cap\Omega$ üzerinde tanımlı bir fonksiyondur.

Burada $\Omega=\left\{f:\dfrac{f(x)}{1+x^2}\to A\right\}$ şeklindedir.

Bu durumda $[0,\infty)$ aralığının kompakt alt kümelerinde L_n operatörü f fonksiyonuna düzgün yakınsar.

İspat

Lemma 4.1.1 den kolayca

$$\lim_{n\to\infty} L_n(\zeta^i;x) = x^i,\ i = 0,1,2$$

olduğu görülür. Bu sayede $[0,\infty)$ aralığının kompakt alt kümelerinde düzgün yakınsaklıkların sağlandığı gösterilir. Böylece ispat Korovkin Teoremi [26] yardımıyla tamamlanır.

Bir sonraki teoremde süreklilik modulünü kullanarak L_n operatörünün yaklaşım özellikleri elde edilecektir.

4.1.2. Teorem

$f \in C[0,\infty) \cap \Omega$ için

$$|L_n(f;x) - f(x)| \leq 2\omega\left(f;\sqrt{L_n((\zeta - x)^2;x)}\right)$$

elde edilir.

İspat

Süreklilik modülünün özellikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} |L_n(f;x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{R(1)\Psi(nxS(1)+\sigma(1))} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\theta_j(nx)}{B(n+1,k)} \int_0^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+k+1}} \right. \\ &\quad \left. \times \left(f\left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}\right) - f(x) \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{R(1)\Psi(nxS(1)+\sigma(1))} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\theta_j(nx)}{B(n+1,k)} \int_0^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+k+1}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \left| f\left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}\right) - f(x) \right| \\
\leq\ & \omega(f;\delta) \frac{1}{R(1)\Psi(nxS(1)+\sigma(1))} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta_j(nx)}{B(n+1,k)} \int_0^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+k+1}} \\
&\times \left(1 + \frac{\left| \frac{nt+\alpha}{n+\beta} - x \right|}{\delta} \right) dt \\
\leq\ & \omega(f;\delta) \left(1 + \frac{1}{\delta} \frac{1}{R(1)\Psi(nxS(1)+\sigma(1))} \right. \\
&\left. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta_j(nx)}{B(n+1,k)} \int_0^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+k+1}} \left| \frac{nt+\alpha}{n+\beta} - x \right| dt \right)
\end{aligned} \tag{4.13}
$$

elde edilir. Yukarıda verilen integral üzerinde Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+k+1}} \left| \frac{nt+\alpha}{n+\beta} - x \right| dt &\leq \sqrt{\int_0^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+k+1}} dt} \sqrt{\int_0^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+k+1}} \left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta} - x \right)^2 dt} \\
&= \sqrt{B(n+1,k)} \sqrt{\int_0^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+k+1}} \left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta} - x \right)^2 dt}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Cauchy-Schwarz eşitsizliği toplam üzerinde uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{R(1)\Psi(nxS(1)+\sigma(1))} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta_j(nx)}{\beta(n+1,k)} \int_0^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+k+1}} \left| \frac{nt+\alpha}{n+\beta} - x \right| dt \\
\leq\ & \frac{1}{R(1)\Psi(nxS(1)+\sigma(1))} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta_j(nx)}{\sqrt{\beta(n+1,k)}} \sqrt{\int_0^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+k+1}} \left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta} - x \right)^2 dt} \\
=\ & \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\theta_j(nx)}{R(1)\Psi(nxS(1)+\sigma(1))}} \\
&\times \sqrt{\frac{\theta_j(nx)}{R(1)\Psi(nxS(1)+\sigma(1))\beta(n+1,k)} \int_0^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+k+1}} \left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta} - x \right)^2 dt} \\
\leq\ & \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta_j(nx)}{R(1)\Psi(nxS(1)+\sigma(1))}} \\
&\times \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta_j(nx)}{R(1)\Psi(nxS(1)+\sigma(1))\beta(n+1,k)} \int_0^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+k+1}} \left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta} - x \right)^2 dt}
\end{aligned}
$$

$$= \sqrt{\frac{1}{R(1)\Psi(nxS(1)+\sigma(1))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta_j(nx)}{\beta(n+1,k)}\int_0^{\infty}\frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+k+1}}\left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}-x\right)^2 dt}$$
$$= \sqrt{L_n((\zeta-x)^2;x)}.$$

bulunur. (4.13) ile verilen eşitsizlik göz önüne alınırsa

$$|L_n(f;x)-f(x)| \leq \left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{L_n((\zeta-x)^2;x)}\right)\omega(f;\delta)$$

olur. Burada $\delta_n(x) := \delta_n(x) = \sqrt{L_n((\zeta-x)^2;x)}$ alınırsa istenen sonuç elde edilir.

Şimdi $0 < \tau \leq 1$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,\infty)$ için Lipschitz sınıfı fonksiyonlarını hatırlayalım.

$$Lip_R^{(\tau)} := \left\{\Phi : |\Phi(\lambda_1)-\Phi(\lambda_2)| \leq R\ |\lambda_1-\lambda_2|^{\tau}\right\}.$$

4.1.3. Teorem

$\Phi \in Lip_R^{(\tau)}$ için

$$|L_n(\Phi;x)-\Phi(x)| \leq R\ \left[L_n((\zeta-x)^2;x)\right]^{\frac{\tau}{2}} \tag{4.14}$$

gerçeklenir.

İspat

$\Phi \in Lip_R^{(\tau)}$ alınırsa

$$\begin{aligned} |L_n(\Phi;x)-\Phi(x)| &= |L_n(\Phi(\zeta)-\Phi(x);x)| \\ &\leq L_n(|\Phi(\zeta)-\Phi(x)|;x) \\ &\leq R\,L_n(|\zeta-x|^{\tau};x) \end{aligned} \tag{4.15}$$

olur. İntegral için Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+k+1}} \left|\frac{nt+\alpha}{n+\beta}-x\right|^\tau dt &= \int_0^\infty \left(\frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+k+1}}\right)^{\frac{2-\tau}{2}} \left(\frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+k+1}}\right)^{\frac{\tau}{2}} \\
&\quad \times \left|\frac{nt+\alpha}{n+\beta}-x\right|^\tau dt \\
&\leq \left(\int_0^\infty \frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+k+1}} dt\right)^{\frac{2-\tau}{2}} \\
&\quad \times \left(\int_0^\infty \frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+k+1}} \left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}-x\right)^2 dt\right)^{\frac{\tau}{2}} \\
&= (\beta(n+1,k))^{\frac{2-\tau}{2}} \left(\int_0^\infty \frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+k+1}} \left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}-x\right)^2 dt\right)^{\frac{\tau}{2}}.
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Toplam için Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{R(1)\Psi(nxS(1)+\sigma(1))} \sum_{k=0}^\infty \frac{\theta_j(nx)}{\beta(n+1,k)} \int_0^\infty \frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+k+1}} \left|\frac{nt+\alpha}{n+\beta}-x\right|^\tau dt \\
\leq\ & \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{\theta_j(nx)}{R(1)\Psi(nxS(1)+\sigma(1))}\right)^{\frac{2-\tau}{2}} \\
&\times \left(\frac{\theta_j(nx)}{R(1)\Psi(nxS(1)+\sigma(1))\beta(n+1,k)} \int_0^\infty \frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+k+1}} \left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}-x\right)^2 dt\right)^{\tau} \\
\leq\ & \left(\sum_{k=0}^\infty \frac{\theta_j(nx)}{R(1)\Psi(nxS(1)+\sigma(1))}\right)^{\frac{2-\tau}{2}} \\
&\times \left(\frac{1}{R(1)\Psi(nxS(1)+\sigma(1))} \sum_{k=0}^\infty \frac{\theta_j(nx)}{B(n+1,k)} \int_0^\infty \frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+k+1}} \left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}-x\right)^2\right)^{\frac{\tau}{2}} \\
=\ & \left(L_n((\zeta-x)^2;x)\right)^{\frac{\tau}{2}}
\end{aligned}$$

gerçeklenir.

Elde edilen eşitsizlikten (4.14) gerçeklenir ve ispat tamamlanır.

İlk olarak Gavrea ve Rasa'nın sonucunu [38] ve ikinci dereceden Steklov fonksiyonunu hatırlayalım.

$(L_n)_n \geq 0$, $z \in C^2[0,a]$, $L_n(e_i;x) = e_i(x)$, $e_i(\zeta) = \zeta^i$, $i = 0,1,2$ özelliklerine sahip lineer pozitif operatör dizisi olsun. Gavrea ve Rasa'nın verdiği bir sonuç

$$|L_n(z;x) - z(x)| \leq \left\|z'\right\| \sqrt{L_n((\zeta - x)^2;x)} + \frac{1}{2}\left\|z''\right\| L_n((\zeta - x)^2;x)$$

şeklindedir. $f \in C[a,b]$ için f fonksiyonunun ikinci mertebeden Steklov fonksiyonu

$$f_h(x) := \frac{1}{h}\int_{-h}^{h}\left(1 - \frac{|t|}{h}\right) f(h;x+t)dt,\ x \in [a,b],$$

olarak tanımlanır. Burada $f(h;.) : [a-h, b+h] \to \mathbb{R}$, $h > 0$, olmak üzere

$$f(h;x) = \begin{cases} P_-(x) & ; \quad a-h \leq X < a \\ f(x) & ; \quad a \leq x \leq b \\ P_+(x) & ; \quad b < x \leq b+h \end{cases}$$

ve P_-, P_+ belirtilen aralıklarda en iyi doğrusal yaklaşımlardır.

4.1.4. Teorem

Φ, $[0,\infty)$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$|L_n(\Phi;x) - \Phi(x)| \leq \frac{3}{2}\left(1 + \frac{a}{2} + \frac{h^2}{2}\right)\omega_2(\Phi;h) + \frac{2h^2}{a}\|\Phi\|,$$

gerçeklenir.

İspat

Basit işlemler ile

$$L_n(\Phi;x) - \Phi(x) = L_n(\Phi - \Phi_h;x) + L_n(\Phi_h;x) - \Phi_h(x) + \Phi_h(x) - \Phi(x)$$

yazılabilir ve üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} |L_n(\Phi;x)-\Phi(x)| &\leq L_n\left(|\Phi-\Phi_h|;x\right)+|L_n(\Phi_h;x)-\Phi_h(x)|+|\Phi_h(x)-\Phi(x)| \\ &\leq 2\|\Phi-\Phi_h\|+|L_n(\Phi_h;x)-\Phi_h(x)|. \end{aligned} \tag{4.16}$$

olur ve burada Φ_h, Φ fonksiyonunun ikinci dereceden Steklov fonksiyonudur [38]. $\Phi_h \in C^2[0,a]$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca Gavrea ve Rasa'nın verdiği [38] ve Landau eşitsizliği ile

$$\begin{aligned} |L_n(\Phi_h;x)-\Phi_h(x)| &\leq \left\|\Phi_h'\right\|\sqrt{L_n\left((\zeta-x)^2;x\right)}+\frac{1}{2}\left\|\Phi_h''\right\|L_n\left((\zeta-x)^2;x\right) \\ &\leq \left(\frac{2}{a}\|\Phi_h\|\frac{a}{2}\left\|\Phi_h''\right\|\right)\sqrt{L_n\left((\zeta-x)^2;x\right)}+\frac{1}{2}\left\|\Phi_h''\right\|L_n\left((\zeta-x)^2;x\right) \\ &\leq \left(\frac{2}{a}\|\Phi_h\|+\frac{3a}{4}\frac{1}{h^2}\omega_2(\Phi;h)\right)L_n\left((\zeta-x)^2;x\right) \\ &\quad +\frac{3}{4}\frac{1}{h^2}\omega_2(\Phi;h)L_n\left((\zeta-x)^2;x\right). \end{aligned} \tag{4.17}$$

ifadesi elde edilir. Zhuk tarafından verilen [39] ikinci dereceden Steklov fonksiyonu ile $\omega_2(\Phi;h)$ arasında

$$\|\Phi-\Phi_h\| \leq \frac{3}{4}\omega_2(\Phi;h)$$

şeklinde bir bağıntı vardır. (4.16) ve (4.17) kullanılırsa

$$\begin{aligned} |L_n(\Phi_h;x)-\Phi_h(x)| &\leq \frac{3}{2}\omega_2(\Phi;h)+\left(\frac{2}{a}\|\Phi_h\|+\frac{3a}{4h^2}\omega_2(\Phi;h)\right)h^2 \\ &\quad +\frac{3}{4}\frac{1}{h^2}\omega_2(\Phi;h)h^4 \\ &\leq \frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{a}+\frac{h^2}{2}\right)\omega_2(\Phi;h)+\frac{2h^2}{a}\|\Phi_h\|, \end{aligned}$$

olur. Burada $h=\sqrt[4]{L_n\left((\zeta-x)^2;x\right)}$ alınırsa ispat tamamlanır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde öncelikle yaklaşım teorisinin temel bilgileri ve tanımları, Bernstein polinomları ve yeni bir operatör oluşturulmasını sağlayan operatörler ile bilgiler verilerek temel oluşturulmuştur. Bu tez içerisinde bir operatörün tanımlanması, Korovkin teoreminin şartları, operatörün yaklaşım özelliklerinin çeşitli yollardan incelenmesi gibi bilgilere kolaylıkla ulaşılabilecektir. Yaklaşım özelliklerini incelerken süreklililk modülü, Lipschitz sınıfı fonskiyonları gibi faydalı bilgiler verilmiştir. Bu tez incelendikten sonra bir operatörün nasıl kurulacağı, hangi yollar izleneceği, nelere dikkat edilmesi gerektiği, ispatlar sırasında nasıl bir yöntem izleneceği gibi sorulara cevap bulunacaktır. Bu tezi inceleyen bir araştırmacı bu operatörler yardımıyla daha genel operatörler elde edebilecektir. Yaklaşım hızlarını karşılaştırma fırsatı bulacaktır. Polinomlar ile yaklaşım teorisini birleştirme düşüncesine sahip olacaktır. Yeni bir polinom sınıfını şartları uyması durumunda, buradaki operatörlere benzer tanım oluşturarak yaklaşım özelliklerini gösterebilecektir. Bu anlamda bu tez bir ışık olacaktır.

KAYNAKLAR

1. Bernstein, S.N. (1912). Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. *Commununications of the Kharkov Mathematical Society*, 13(2),1-2.

2. Szász, O. (1950). Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 45, 239-245.

3. Jakimovski, A. and Leviatan, D. (1969). Generalized Szász operators for the approximation in the infinite interval. *Mathematica*, 11, 97-103

4. Ismail, M.E.H. (1974). On a generalization of Szász operators. *Mathematica*, 39, 259-267.

5. Varma, S., Sucu, S. and İçöz, G. (2012). Generalization of Szász operators involving Brenke type polynomials. *Computers and Mathematics with Applications*, 64, 121-127.

6. Cárdenas-Morales, D., Garrancho, P. and Rasa, I. (2011). Bernstein-type operators which preserve polynomials. *Computers Mathematics with Applications*, 62, 158-163.

7. Acar, T., Aral, A. and Rasa, I. (2014). Modified Bernstein-Durrmeyer operators. *General Mathematics*, 22(1), 27–41.

8. Aral, A., Inoan, D. and Rasa, I. (2014). On the generalized Szász–Mirakyan operators. *Results Mathematics*, 65, 441–452.

9. Aral, A. and Gupta, V. (2011). Generalized Szász Durrmeyer operators. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 32(1), 23–31.

10. Sucu, S., İçöz, G. and Varma, S. (2012). On some extensions of Szász operators including Boas-Buck type polynomials. *Abstract and Applied Analysis*, 2012, 680340.

11. İçöz, G., Varma, S. and Sucu, S. (2016). Approximation by operators including generalized Appell polynomials. *Filomat*, 30, 429-440.

12. İçöz, G. and Çekim, B. (2016). Stancu-type generalizations of the Chan-Chyan-Srivastava operators. *Filomat*, 30, 3733-3742.

13. Sucu, S. and Varma, S. (2019). Approximation by sequence of operators involving analytic functions. *Mathematics*, 7(2), 188.

14. Sucu, S. and Varma, S. (2015). Generalization of Jakimovski−Leviatan type Szász operators. *Applied Mathematics and Computation*, 270, 977-983.

15. Sucu, S. (2014). Dunkl analogue of Szász operators. *Mathematics and Computation*, 244, 42-48.

16. Cai, Q.B., Yüksel, İ., Dinlemez Kantar, Ü. and Çekim. B. (2019). Approximation properties of Durrmeyer type of Bleimann-Butzer and Hahn Operators. *Journal of Function Spaces*, 2019, 7047656.

17. Çekim. B., Dinlemez Kantar, Ü. and Yüksel, İ. (2017). Dunkl generalization of Szász-Beta type operators. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 40(18), 7697-7704.

18. Yazıcı, S. and Çekim, B. (2017). A Kantorovich type generalization of the Szász operators via two variable Hermite polynomials. *Gazi University Journal of Science*, 30(4), 432-440.

19. Aktaş, R., Söylemez, D. and Taşdelen, F. (2019). Stancu type generalization of Szász Durrmeyer operators involving Brenke-type polynomials *Filomat*, 855- 868.

20. Aktaş, R., Çekim, B. and Taşdelen, F. (2013). A Kantorovich-Stancu type generalization of Szász operators including Brenke-type polynomials. *Journal of Function Spaces and Applications*, Vol. 2013.

21. Taşdelen, F., Aktaş, R. and Altın, A. (2012). A Kantorovich type of Szász Operators including Brenke type polynomial. *Abstract and Applied Analysis*. Vol. 2012.

22. Çekim, B., Aktaş, R. and İçöz, G. (2019). Kantorovich-Stancu type operators including Boas-Buck type polynomials. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, (3), 48 (2), 460-471.

23. Taşdelen, F., Söylemez, D., Aktaş, R. (2019). Dunkl-Gamma type operators including Appell polynomials. *Complex Analysis and Operator Theory*, 13(7): 3359-3371.

24. Rudin, W. (1953). *Principles of Mathematical Analysis.* New York, Mcgraw-Hill.

25. Balcı, M. (2010). *Matematik Analiz 1,* Ankara:Balcı Yayınları, 77-131.

26. Altomare, F. and Campiti, M. (1994). *de Gruyter Studies in Mathematics*. Korovkin-type Approximation Theory and Its Applications, 17.

27. Hacısalihoğlu, H.H., Hacıyev, A.(1995). *Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı*. A.Ü.F.F. Döner Sermayesi İşletmesi Yayınları, Ankara, 1-100.

28. Soydan, Y. (2012). *Fonksiyonel Analiz.* Ankara: Nobel Yayınları, 1-184.

29. Kılıç, S.A. and Erdem, M. (1987). *Fonksiyonel Analize Giriş.* Ankara: Gazi Üniversitesi Yayınları, 62-100.

30. Korovkin, P. P. (1960). Linear operators and approximation theory. *Russian Monographs and Texts on advanced Math*,III, 1-63.

31. Ditzian, Z., and Agarwal, R.P. (2014).*Convergence Estimates in Approximation Theory.* Delhi:Springer International Publishing.

32. Gupta, V. and Gal, S.G. (2000). Approximation Theory: Moduli of Continuity and Global Smoothness Preservationi. *Basel:Birkhäuser:Verlag*,1-203.

33. Ditzian, Z. and Gal, S.G. (2000). Moduli of Smothness, *New York: Springer-Verlag,* 13-35.

34. Butzer, P.L., Berens, H. (1967). Convergence Estimates in Approximation, *Berlin-Heidelberg-New York:Springer*.

35. Mohiuddine, S., Acar, T. and A.Alghamdi, M. (2018). Genuine modified Bernstein-Durrmeyer operators. *Journal of Inequalities and Applications*, 104 (2018).

36. Devore, R.A. and Lorentz, G.G. (1993). *Springer, Berlin, Germany.* Constructive Approximation.

37. Rainville, E.D. (1960). *New York, NY, USA*. Functions Macmillan.

38. Gavrea, I. and Rasa, I. (1993). Remarks on some quantitative Korovkin-type results. *Revue d'analyse numérique et de Théorie de l'approximation*. 22, 173-176.

39. Zhuk, V.V. (1989). Functions of the Lip1 class and S. N. Bernstein's polynomials (Russian). *Vestnik Leningradskogo Universiteta. Matematika, Mekhanika, Astronomiya*, 1, 25-30.



GAZİ GELECEKTİR...