
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

INCOMPLETE q–CHEBYSHEV POLİNOMLARININ ÖZELLİKLERİ

Elif ERCAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2016

Elif ERCAN tarafından hazırlanan "INCOMPLETE q–CHEBYSHEV POLİNOMLARININ ÖZELLİKLERİ" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Naim TUĞLU
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. .....

İkinci Danışman: Yrd. Doç. Dr. Miraç ÇETİN FİRENGİZ
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Başkent Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. .....

Başkan: Prof. Dr. Dursun TAŞCI
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. .....

Üye: Prof. Dr. Cengiz ÇİNAR
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. .....

Üye: Doç. Dr. E. Gökcen KOÇER
Matematik Anabilim Dalı, Necmettin Erbakan Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. .....

Tez Savunma Tarihi: 21/01/2016

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....
Prof. Dr. Metin GÜRÜ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalısmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Elif ERCAN

07/01/2016

INCOMPLETE q–CHEBYSHEV POLİNOMLARININ ÖZELLİKLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Elif ERCAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2016

ÖZET

Bu çalışmada birinci çeşit ve ikinci çeşit $q-$Chebyshev polinomlarının üreteç fonksiyonları elde edildi. Birinci çeşit incomplete $q-$Chebyshev polinomları $T_n^k(x,s,q)$ ve ikinci çeşit incomplete $q-$Chebyshev polinomları $U_n^k(x,s,q)$ tanımlandı. x, s, q özel durumları için bilinen polinomlar elde edildi. Ayrıca bu polinomlar için rekürans bağıntıları, aralarındaki ilişkiler ve toplam formülleri elde edildi.

Bilim Kodu : 204.1.025
Anahtar Kelimeler : $q-$Fibonacci polinomları, incomplete Fibonacci polinomları, Chebyshev polinomları
Sayfa Adedi : 47
Danışman : Doç. Dr. Naim TUĞLU
İkinci Danışman : Yrd. Doç. Dr. Miraç ÇETİN FİRENGİZ

THE PROPERTIES OF INCOMPLETE q–CHEBYSHEV POLYNOMIALS

(M. Sc. Thesis)

Elif ERCAN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2016

ABSTRACT

In this study, the generating functions of $q-$Chebyshev polynomials of the first and second kind were obtained. The incomplete $q-$Chebyshev polynomials of the first kind $T_n^k(x,s,q)$ and the incomplete $q-$Chebyshev polynomials of the second kind $U_n^k(x,s,q)$ were defined. The well-known polynomials were obtained for special cases of x, s, q . Also the recurrence relations, relationships and summation formulas for these polynomials were obtained.

Science Code	: 204.1.025
Key Words	: $q-$Fibonacci polynomials, incomplete Fibonacci polynomials, Chebyshev polynomials
Page Number	: 47
Supervisor	: Assoc. Prof. Dr. Naim TUĞLU
Co-Supervisor	: Assist. Prof. Dr. Miraç ÇETİN FİRENGİZ

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli katkılarıyla beni yönlendiren ve çalışmalarımın her safhasında bilgisine başvurduğum Sayın Hocam Doç. Dr. Naim TUĞLU'ya, görüş ve önerileri ile beni yönlendiren Sayın Yrd. Doç. Dr. Miraç ÇETİN FİRENGİZ'e teşekkürü bir borç bilirim. Manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme sevgilerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

ÇİZELGELERİN LİSTESİ viii

ŞEKİLLERİN LİSTESİ ix

SİMGELER VE KISALTMALAR x

1. GİRİŞ 1

2. ÖN BİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR 3

2.1. q–Binomiyel Katsayılar 5

2.2. Chebyshev Polinomları 7

3. q–CHEBYSHEV POLİNOMLARI 9

3.1. q–Fibonacci ve q–Lucas Polinomları 17

3.2. Incomplete Fibonacci ve Lucas Sayıları 18

4. INCOMPLETE q–CHEBYSHEV POLİNOMLARI 21

4.1. Rekürans Bağıntıları ve Aralarındaki İlişkiler 31

4.2. Toplam Formülleri 38

5. SONUÇ VE ÖNERİLER 43

KAYNAKLAR 45

ÖZGEÇMİŞ 47

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

Çizelge 2.1. Birinci ve ikinci çeşit bazı Chebyshev polinomları 8

Çizelge 3.1. Birinci çeşit bazı $q-$Chebyshev polinomları 9

Çizelge 3.2. İkinci çeşit bazı $q-$Chebyshev polinomları 10

Çizelge 3.3. İkinci çeşit $q-$Chebyshev ile diğer polinomlar arasındaki ilişkiler . 10

Çizelge 3.4. Birinci çeşit $q-$Chebyshev ile diğer polinomlar arasındaki ilişkiler 11

Çizelge 4.1. İkinci çeşit incomplete $q-$Chebyshev ile diğer polinomlar arasındaki ilişkiler 24

Çizelge 4.2. Birinci çeşit incomplete $q-$Chebyshev ile diğer polinomlar arasındaki ilişkiler 24

Çizelge 4.3. Birinci ve İkinci çeşit incomplete Chebyshev sayıları 25

Çizelge 4.4. Incomplete Pell ve Pell-Lucas sayıları 25

Çizelge 4.5. Incomplete Fibonacci ve Lucas sayıları 26

Çizelge 4.6. Incomplete Jacobsthall ve Jacobsthall-Lucas sayıları 26

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

Şekil 3.1. $T_n(x,s,q)$ $s=-1$, $q=-0.5,0.5,0.9,0.9999$, $n=0,1,2,3,4$ 12

Şekil 3.2. $U_n(x,s,q)$ $s=-1$, $q=-0.5,0.5,0.9,0.9999$, $n=0,1,2,3,4$ 13

Şekil 4.1. $U_9^k(x,s,q)$ $s=-1$, $q=-0.9,-0.5,0.5,0.9$, $k=0,1,2,3,4$ 27

Şekil 4.2. $T_9^k(x,s,q)$ $s=1$ $q=-0.9,-0.5,0.5,0.9$, $k=0,1,2,3,4$ 28

Şekil 4.3. $T_5^k(x/2,s,q)$ $s=1$, $q=-0.9,-0.5,0.5,0.9$, $k=0,1,2$ 29

Şekil 4.4. $U_8^k(x/2,s,q)$ $s=2$, $q=-0.9,-0.5,0.5,0.9$, $k=0,1,2,3,4$ 30

Şekil 4.5. Incomplete Fibonacci ve Lucas sayıları $1\leq n\leq 9$, $0\leq k\leq 4$. . . 30

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birliklte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$[n]_q$	n. $q-$tamsayısı
$[n]_q!$	$n!$ in $q-$benzeri
$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$	$q-$ binomiyel katsayılar
$(x;q)_n$	$q-$shifted faktoriyel
$F_n(x)$	Fibonacci polinomu
$L_n(x)$	Lucas polinomu
$P_n(x)$	Pell polinomu
$Q_n(x)$	Pell-Lucas polinomu
$J_n(y)$	Jacobsthal polinomu
$j_n(y)$	Jacobsthal-Lucas polinomu
$T_n(x)$	Birinci çeşit Chebyshev polinomu
$U_n(x)$	İkinci çeşit Chebyshev polinomu
$T_n(x,s,q)$	Birinci çeşit $q-$Chebyshev polinomu
$U_n(x,s,q)$	İkinci çeşit $q-$Chebyshev polinomu
$F_n(x,s,q)$	$q-$Fibonacci polinomu
$L_n(x,s,q)$	$q-$Lucas polinomu
$F_n(k)$	Incomplete Fibonacci sayısı
$L_n(k)$	Incomplete Lucas sayısı
$U_n^k(x,s,q)$	İkinci çeşit incomplete $q-$Chebyshev polinomu
$T_n^k(x,s,q)$	Birinci çeşit incomplete $q-$Chebyshev polinomu
$F_n^{(k)}(x,y)$	Incomplete Bivariate Fibonacci polinomu
$F_n^{(k)}(x)$	Incomplete Fibonacci polinomu
$P_n^{(k)}(x)$	Incomplete Pell polinomu
$J_n^{(k)}(x)$	Incomplete Jacobsthal polinomu
$L_n^{(k)}(x)$	Incomplete Lucas polinomu

1. GİRİŞ

Geçmişi Leonhard Euler'e kadar uzanan $q-$analiz veya kuantum-analiz olarak adlandırılan matematiğin çalışma konusu, 1070'ler de parçacık teorisinin çalışılmasıyla ortaya çıkmıştır. Aral ve arkadaşları, analizin temel kavramları, özellikleri ve bununla ilgili teoremlerin $q-$benzerlerini incelemiştir [3]. $q-$Analiz deki ifadeler $q \to 1^-$ durumunda klasik teorem veya ifadeyi vermektedir [3, 18]. Son yıllarda araştırmacıların ilgi odağı olan $q-$analizi, sayılar teorisi araştırmacılarına da bir uygulama alanı olmuştur.

Rus matematikçi Chebyshev (1821-1894) tarafından ortaya atılan Chebyshev polinomları matemamatiğin bir çok alanında önem taşımaktadır. Chebyshev polinomları bir çok matematikçi tarafından kapsamlı şekilde çalışılmıştır [19]. Cigler ise Chebyshev polinomlarının $q-$benzerlerini tanımlamıştır [6]. Cigler tanımladığı birinci ve ikinci çeşit $q-$Chebyshev polinomlarının Al-Salam and Ismail polinomlarının özel durumları olduğuna değinmiştir [1]. Ayrıca bu polinomaların rekürans bağıntıları, Binet benzeri formülleri, kendi aralarındaki ilişkiler, bazı q-benzer polinomlar ile olan ilişkileri gibi özellikleri incelenmiştir [6–9].

Ortaçağın İtalyan matematikçisi Leonard of Pisa tarafından Liber Abaci kitabında bahsedilen terimleri 0, 1, 1, 2, 3, 5, ... olan sayıların dizisi Fibonacci sayıları olarak adlandırılır. Fibonacci sayıları ve genelleştirmeleri ile ilgili bir çok ilginç özellik ve uygulama vardır [16, 26]. 1996 yılında Fibonacci sayılarının bir genelleştirmesi olan incomplete Fibonacci sayıları Filipponi tarafından tanımlanmıştır [15]. Bu çalışmada Fibonacci ve Lucas sayılarının açık (explicit) formülünden faydalanarak incomplete Fibonacci ve Lucas sayıları tanımlanmış. Daha sonra bu diziler için rekürans bağıntıları, toplam formülleri ve bazı özellikleri elde edilmiştir. Pintér ve Srivastava ise incomplete Fibonaccci ve Lucas sayıları için üreteç fonksiyonlarını hesaplamışlardır [20]. 2004 de incomplete genelleştirilmiş Fibonacci ve genelleştirilmiş Lucas sayıları ve üreteç fonksiyonları üzerinde çalışılmış [14]. Djordjević ve Srivastava incomplete genelleştirilmiş Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarını tanımlayarak, bu sayıların üreteç fonksiyonlarını elde etmişlerdir [13].

2010 yılında ise Tasci ve Cetin-Firengiz Fibonacci sayılarının bir genelle ştirmesi olan Fibonacci ve Lucas p-sayılarının açık (explicit) form ülünden faydalanarak, incomplete Fibonacci ve Lucas p-sayılarını tanımlayarak birçok eşitlik ve özellik elde etmiştir [23]. Incomplete diziler ile yapılan çalışmalar devam etmiştir [21–23].

Fibonacci sayılarının $q-$benzerleri bazı yazarlar tarafından çeşitli şekillerde tanımlanmıştır. Andrews, I. Schur'un tanımladığı Fibonacci polinomlarının $q-$benzerlerinin üreteç fonksiyonlarını operatör yardımıyla hesaplamıştır [2]. Carlitz ise Fibonacci polinomlarının $q-$benzerlerinin farklı bir genelleştirmesi üzerine çalışmıştır [5]. Ayrıca yine Cigler tarafından $q-$Fibonacci ve $q-$Lucas polinomları tanımlanarak, bu polinomların bazı özellikleri ve mors kod uygulamaları üzerine çalışılmıştır [9, 10, 12].

Bu çalışmanın ikinci bölümünde gerekli önbilgilerden ve klasik Chebyshev polinomlarıdan bahsedildi. Üçüncü bölümde Cigler tarafından tanımlanan birinci ve ikinci çeşit $q-$Chebyshev polinomları tanımları verilerek, bu polinomların üreteç fonksiyonları elde edildi. Ayrıca üçüncü bölümün alt bölümlerinde, $q-$Fibonacci ve $q-$Lucas polinomları ve incomplete Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili bilgiler aktarıldı. Son bölümde ise birinci ve ikinci çeşit incomplete $q-$Chebyshev polinomları tanımlanarak, bu polinomların sağladığı rekürans bağıntıları elde edilmiştir. Ayrıca aynı polinomlar için bazı toplam formülleri hesaplanmıştır. Burada birinci ve ikinci çeşit incomplete $q-$Chebyshev polinomlarının toplamlarının, birinci ve ikinci çeşit $q-$Chebyshev polinomları ile ifade edileceği görülmüştür. Sonuç olarak $q-$Chebyshev polinomlarının bir genelleştirmesi tanımlanmıştır. Tanımlanan polinomlarda $x,\ s,\ q$ nun aldığı değerlere göre bilinen Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas, Chebyshev polinomlarının elde edildiği görülmüştür.

2. ÖN BİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamızda ihtiyaç duyacağımız bazı tanım ve kavramlara yer vereceğiz.

2.1. Tanım

Başlangıç koşulları $h_0(x) = a$, $h_1(x) = b$ olan ve $n \geqslant 2$ için

$$h_n(x) = ph_{n-1}(x) + qh_{n-2}(x) \tag{2.1}$$

rekürans bağıntısıyla tanımlanan dizilere Horadam dizileri denir [17].

Horadam dizilerinin rekürans bağıntısının karakteristik denklemi

$$t^2 - pt - q = 0$$

dir. Bu denklemin iki reel kökü

$$\alpha = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}, \qquad \beta = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

dir. Sağladığı Binet formülü $A = \dfrac{b - a\beta}{\sqrt{p^2 + 4q}}$, $B = \dfrac{a - \alpha b}{\sqrt{p^2 + 4q}}$ olmak üzere,

$$h_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

dir. Üreteç fonksiyonu ise

$$g(t) = \frac{a + t(b - ap)}{1 - pt - qt^2}$$

dir. Eğer Eş.2.1 ifadesinde;

$p = x$ ve $a = 0,\ b = q = 1$ alınırsa

$$F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x); \qquad F_0(x) = 0,\ F_1(x) = 1$$

rekürans bağıntısı ile Fibonacci polinomları elde edilir. Ayrıca bu polinomlarda $x = 1$ seçilirse Fibonacci dizisi $\{F_n\}$ elde edilir.

$a = 2$, $b = p = x$, $q = 1$ alınırsa Lucas polinomlarının rekürans bağıntısı olan

$$L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x); \qquad L_0(x) = 2,\ L_1(x) = x$$

elde edilir. Bu polinomlarda $x = 1$ seçilirse Lucas dizisi $\{L_n\}$ elde edilir.

$a = 0$, $b = q = 1$, $p = 2x$ alınırsa Pell polinomlarının rekürans bağıntısı

$$P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x); \qquad P_0(x) = 0,\ P_1(x) = 1$$

elde edilir. Ayrıca bu polinomlarda $x = 1$ seçilirse Pell dizisi $\{P_n\}$ elde edilir.

$a = 2$, $b = p = 2x$, $q = 1$ seçilirse Pell-Lucas polinomlarının reküransı olan

$$Q_n(x) = 2xQ_{n-1}(x) + Q_{n-2}(x); \qquad Q_0(x) = 2,\ Q_1(x) = 2x$$

elde edilir.Burada $x = 1$ seçilirse Pell-Lucas dizisi $\{Q_n\}$ elde edilir.

$a = 0$, $b = p = 1$, $q = 2y$ seçilirse Jacobsthal polinomlarının rekürans bağıntısı

$$J_n(y) = J_{n-1}(y) + 2yJ_{n-2}(y); \qquad J_0(y) = 0,\ J_1(y) = 1$$

elde edilir. Ayrıca burada $y = 1$ seçilirse Jacobsthal dizisi $\{J_n\}$ elde edilir.

$a = 2$, $b = p = 1$ ve $q = 2y$ alınırsa Jacobsthal-Lucas polinomlarının rekürans bağıntısı

$$j_n(y) = j_{n-1}(y) + 2yj_{n-2}(y); \qquad j_0(y) = 2,\ j_1(y) = 1$$

elde edilir. Burada $y = 1$ seçilirse Jacobsthal-Lucas dizisi $\{J_n\}$ elde edilir.

$a = 1, b = x,\ p = 2x$ ve $q = -1$ alınırsa birinci çeşit Chebyshev polinomlarının rekürans bağıntısı olan

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x); \qquad T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x$$

elde edilir.

$a = 1,\ b = p = 2x$ ve $q = -1$ alınırsa ikinci çeşit Chebyshev polinomlarının rekürans bağıntısı olan

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x); \qquad U_0(x) = 1,\ U_1(x) = 2x$$

elde edilir.

2.1. q–Binomiyel Katsayılar

n pozitif bir tamsayı ve $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$ olmak üzere

$$[n]_q = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

ifadesine n tamsayısının $q-$benzeri denir. $n!$ in $q-$benzeri

$$[n]_q! = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ [n]_q\,[n-1]_q \cdots [1]_q, & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. $n < k$ için $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = 0$ olmak üzere $n \geq k \geq 0$ için

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{[n]_q!}{[n-k]_q!\,[k]_q!}$$

ile tanımlı katsayılara Gaussian veya $q-$binomiyel katsayıları denir [3]. Ayrıca

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{(q;q)_n}{(q;q)_{n-k}(q;q)_k}, \qquad 0 \leq k \leq n$$

olup, burada $(x;q)_0 = 1$,

$$(x;q)_n = \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 - q^i x\right).$$

ve

$$(x;q)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - q^i x)$$

olmak üzere $(x;q)_n$ ifadesine $q-$shifted faktoriyel denir. Ayrıca

$$\lim_{q \to 1^-} [n]_q = n$$

ve

$$\lim_{q \to 1^-} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \binom{n}{k}$$

bilinen binomiyel katsayılara dönüşür.

$q-$binomiyel katsayıları için $q-$Pascal kuralları aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q \tag{2.2}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q \tag{2.3}$$

$$\frac{[n]_q}{[n-k]_q} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q = q^k \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q \tag{2.4}$$

$$\frac{[n]_q}{[n-k]_q} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q \tag{2.5}$$

2.2. Chebyshev Polinomları

2.2. Tanım

$n \geq 0$, $x \in [-1, 1]$ olmak üzere

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

ile tanımlanan polinoma birinci çeşit Chebyshev polinomları denir [19]. Eğer $x = cos\varphi$ alınırsa $T_n(x) = \cos n\varphi$ olur. Ayrıca birinci çeşit Chebyshev polinomları $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ ve her $n \geq 2$ için

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

rekürans bağıntısıyla da tanımlanır.

2.3. Tanım

$x \in [-1, 1]$ ve $x = cos\varphi$ için

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi}$$

şeklindeki polinoma ikinci çeşit Chebyshev polinomları denir [19].

İkinci çeşit Chebyshev polinomları $U_{0.} = 1,\ U_1(x) = 2x$ ve her $n \geq 2$ için

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$$

rekürans bağıntısını sağlar.

Birinci ve ikinci Chebyshev polinomları arasında

$$T_n^2(x) - (x^2 - 1)U_{n-1}^2(x) = 1$$

bağıntısı vardır.

Çizelge 2.1. Birinci ve ikinci çeşit bazı Chebyshev polinomları

n	$T_n(x)$	$U_n(x)$
0	1	1
1	x	$2x$
2	$2x^2-1$	$4x^2-1$
3	$4x^3-3x$	$8x^3-4x$
4	$8x^4-8x^2+1$	$16x^4-12x^2+1$
5	$16x^5-20x^3+5x$	$32x^5-32x^3+6x$
6	$32x^6-48x^4+18x^2-1$	$64x^6-80x^4+24x^2-1$
7	$64x^7-112x^5+56x^3-7x$	$128x^7-192x^5+80x^3-8x$
8	$128x^8-256x^6+160x^4-32x^2+1$	$256x^8-448x^6+240x^4-40x^2+1$
9	$256x^9-576x^7+432x^5-120x^3+9x$	$512x^9-1024x^7+672x^5-160x^3+10x$

$x \in [-1,1]$ ve $x = cos\varphi$ için ikinci çeşit Chebyshev polinomunun türevi

$$\frac{d}{dx}U_n(x) = \frac{(n+1)T_{n+1}(x) - xU_n(x)}{x^2-1}$$

dir [19].

Birinci ve ikinci Chebyshev polinomları arasında

$$\frac{d}{dx}T_n(x) = nU_{n-1}(x)$$

bağıntısı vardır [19].

3. q–CHEBYSHEV POLİNOMLARI

3.1. Tanım

$T_0(x,s,q)=1,\ T_1(x,s,q)=x$ başlangıç şartları ve $n\geq 2$ için

$$T_n(x,s,q)=(1+q^{n-1})xT_{n-1}(x,s,q)+q^{n-1}sT_{n-2}(x,s,q) \tag{3.1}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlı polinomlara birinci çeşit $q-$Chebyshev polinomları denir [6].

Burada $q\to 1^-$ ve $s=-1$ iken $T_n(x,-1,1)=T_n(x)$ bilinen Chebyshev polinomudur.

Çizelge 3.1 de birinci çeşit $q-$Chebyshev polinomlarının birkaçı verilmiştir.

Çizelge 3.1. Birinci çeşit bazı $q-$Chebyshev polinomları

n	$T_n(x,s,q)$
0	1
1	x
2	$(1+q)x^2+qs$
3	$(1+q)(1+q^2)x^3+q(1+q+q^2)sx$
4	$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)x^4+q(1+q)(1+q^2)^2sx^2+q^4s^2$
5	$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)x^5+q(1+q)(1+q^2)^2(1+q^4)sx^3+(1+q^4)q^4s^2x$
	$+(1+q)(1+q^2)q^4sx^3+q^5(1+q+q^2)s^2x$

3.2. Tanım

$U_0(x,s,q)=1,\ U_1(x,s,q)=(1+q)x$ başlangıç şartları ve $n\geq 2$ için

$$U_n(x,s,q)=(1+q^n)xU_{n-1}(x,s,q)+q^{n-1}sU_{n-2}(x,s,q) \tag{3.2}$$

ile tanımlı polinomlara ikinci çeşit $q-$Chebyshev polinomları denir [6].

$U_n(x)$, bilinen Chebyshev polinomu olmak üzere özel olarak $q \to 1^-$ ve $s = -1$ iken $U_n(x, -1, 1) = U_n(x)$ dir.

İkinci çeşit $q-$Chebyshev polinomlarının birkaçı Çizelge 3.2 'de verilmiştir.

Çizelge 3.2. İkinci çeşit bazı $q-$Chebyshev polinomları

n	$U_n(x, s, q)$
0	1
1	$(1+q)x$
2	$(1+q)(1+q^2)x^2 + qs$
3	$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)x^3 + q(1+q)(1+q^2)sx$
4	$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)x^4 + q(1+q)(1+q^2)(1+q^4)sx^2 + (1+q)(1+q^2)q^3sx^2 + q^4s^2$
5	$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)(1+q^5)x^5 + q(1+q)(1+q^2)(1+q^4)(1+q^5)sx^3$
	$+(1+q)(1+q^2)(1+q^5)q^3sx^3 + (1+q^5)q^4s^2 + (1+q)(1+q^2)(1+q^3)x^3q^4s$
	$+(1+q)(1+q^2)s^2xq^5$

$x = \frac{1}{2}$, $s = 1$ ve $q \to 1^-$ olması durumunda ikinci çeşit $q-$Chebyshev polinomu Fibonacci sayısına dönüşür. Yani $U_n(\frac{1}{2}, 1, 1) = F_{n+1}$ dir. Bu ve benzer durumlar Çizelge 3.3 'de verilmiştir.

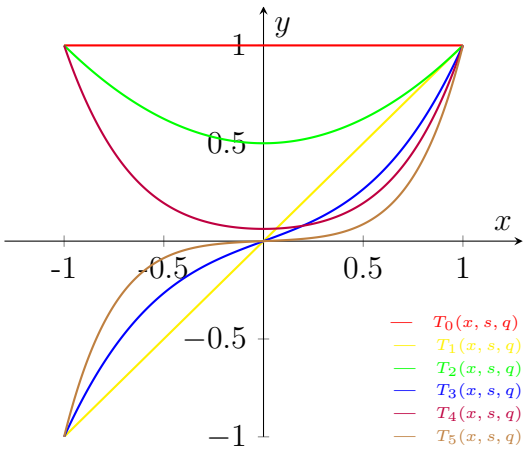
Çizelge 3.3. İkinci çeşit $q-$Chebyshev ile diğer polinomlar arasındaki ilişkiler

x	s	q	$U_n(x, s, q)$	İkinci çeşit $q-$Chebyshev polinomu
x	-1	1	$U_n(x)$	İkinci çeşit Chebyshev polinomu
$\frac{x}{2}$	1	1	$F_{n+1}(x)$	Fibonacci polinomu
$\frac{1}{2}$	1	1	F_{n+1}	Fibonacci sayısı
x	1	1	$P_{n+1}(x)$	Pell polinomu
1	1	1	P_{n+1}	Pell sayısı
$\frac{1}{2}$	$2y$	1	$J_{n+1}(y)$	Jacobsthal polinomu
$\frac{1}{2}$	2	1	J_{n+1}	Jacobsthal sayısı

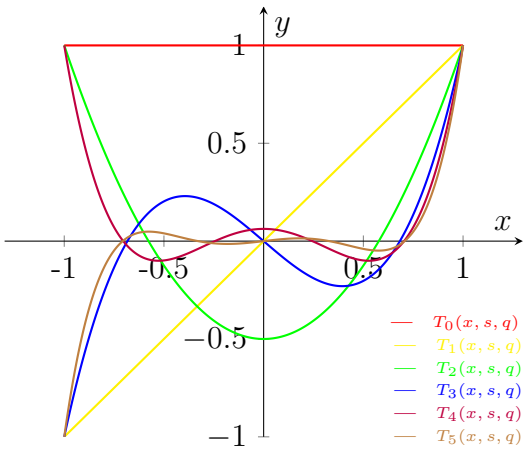
$x = \frac{x}{2}$, $s = 1$ ve $q \to 1^{-}$ seçilmesi durumunda birinci çeşit $q-$Chebyshev polinomu Lucas polinomuna dönüşür. Burada x, s, ve q nun seçilen değerleri için elde edilen özel durumlar Çizelge 3.4 'de verilmiştir.

Çizelge 3.4. Birinci çeşit $q-$Chebyshev ile diğer polinomlar arasındaki ilişkiler

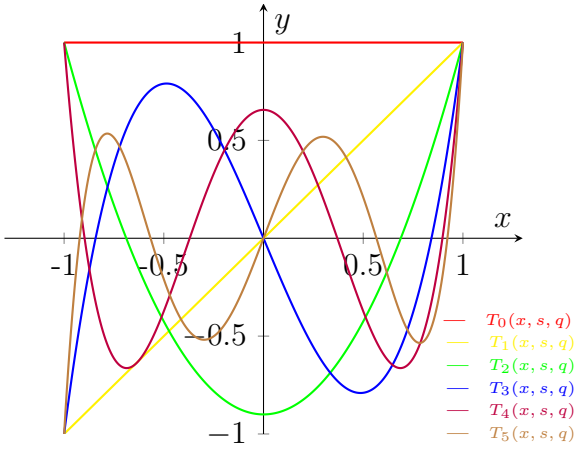
x	s	q	$T_n(x,s,q)$	Birinci çeşit $q-$Chebshev polinomu
x	-1	1	$T_n(x)$	Birinci çeşit Chebyshev polinomu
$\frac{x}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}L_n(x)$	Lucas polinomu
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}\ L_n$	Lucas sayısı
x	1	1	$\frac{1}{2}\ Q_n(x)$	Pell-Lucas polinomu
1	1	1	$\frac{1}{2}\ Q_n$	Pell-Lucas sayısı
$\frac{1}{2}$	$2y$	1	$\frac{1}{2}\ j_n(y)$	Jacobsthal-Lucas polinomu
$\frac{1}{2}$	2	1	$\frac{1}{2}\ j_n$	Jacobsthal-Lucas sayısı



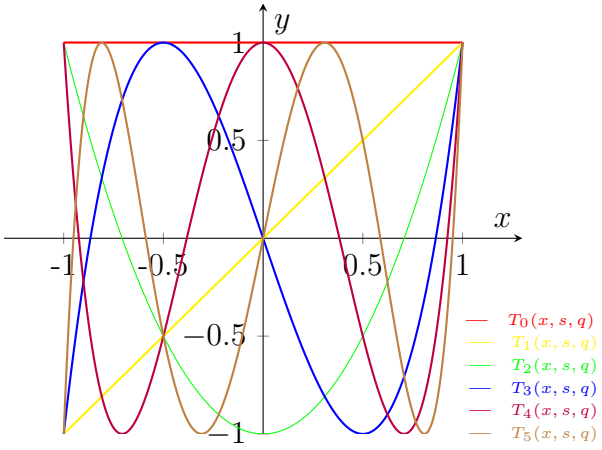
$q = -0.5$



$q = 0.5$



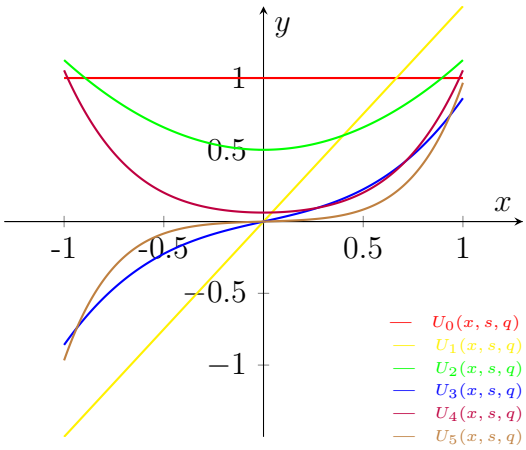
$q = 0.9$



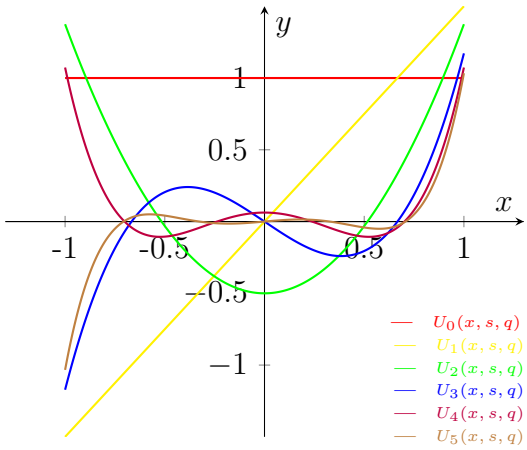
$q = 0.9999$

Şekil 3.1. $T_n(x,s,q)$ $s=-1$, $q=-0.5, 0.5, 0.9, 0.9999$, $n=0,1,2,3,4$

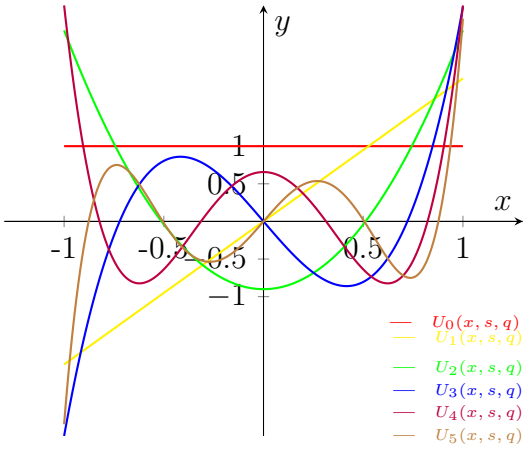
Birinci çesit $q-$Chebyshev polinomların bazılarının $-1 \leq x \leq 1$ aralığındaki grafikleri Şekil 3.1 'de görülmektedir.



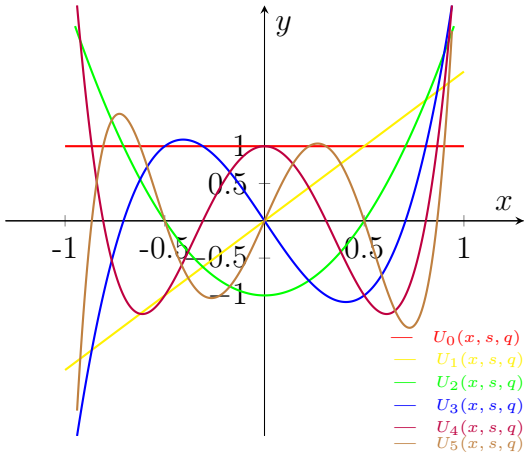
$q = -0.5$



$q = 0.5$



$q = 0.9$



$q = 0.9999$

Şekil 3.2. $U_n(x,s,q)$ $s=-1$, $q=-0.5, 0.5, 0.9, 0.9999$, $n=0,1,2,3,4$

İkinci çesit $q-$Chebyshev polinomların bazılarının $-1 \leq x \leq 1$ aralığındaki grafikleri Şekil 3.2 'de görülmektedir.

3.3. Tanım

$T_0(x,s,q)=1$ olmak üzere $n>0$ için

$$T_n(x,s,q)=\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{j^2} \frac{[n]_q}{[n-j]_q} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-j-1}}{(-q;q)_j} s^j x^{n-2j} \tag{3.3}$$

ile tanımlı ifadeye birinci çeşit $q-$Chebyshev polinomlarının açık (explicit) formülü denir [6].

3.4. Tanım

$n \geq 0$ için

$$U_n(x,s,q)=\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{j^2} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-j}}{(-q;q)_j} s^j x^{n-2j} \tag{3.4}$$

ile tanımlı ifadeye ikinci çeşit $q-$Chebyshev polinomlarının açık (explicit) formülü denir [6].

$f(z)$ herhangibir fonksiyon olmak üzere Andrews η_z operatörünü $\eta_z(f(z))=f(qz)$ şeklinde tanımlamıştır [2].

3.5. Teorem

Birinci çeşit $q-$Chebyshev polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$S(z)=\frac{1-xz}{1-xz-(xz+sqz^2)\eta_z}$$

dir.

İspat

$S(z)=\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x,s,q)z^n$ olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
&S(z) - xzS(z) - xz\eta_z S(z) - sqz^2\eta_z S(z) \\
&\quad = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x,s,q)z^n - x\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x,s,q)z^{n+1} - x\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x,s,q)z\eta_z\left(z^n\right) \\
&\quad\quad - s\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x,s,q)qz^2\eta_z\left(z^n\right) \\
&\quad = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x,s,q)z^n - x\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x,s,q)z^{n+1} - x\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x,s,q)z^{n+1}q^n \\
&\quad\quad - s\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x,s,q)q^{n+1}z^{n+2} \\
&\quad = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x,s,q)z^n - x\sum_{n=1}^{\infty} T_{n-1}(x,s,q)z^n - x\sum_{n=1}^{\infty} T_{n-1}(x,s,q)q^{n-1}z^n \\
&\quad\quad - s\sum_{n=2}^{\infty} T_{n-2}(x,s,q)q^{n-1}z^n \\
&\quad = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x,s,q)z^n - x\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{n-1}\right)T_{n-1}(x,s,q)z^n - s\sum_{n=2}^{\infty} T_{n-2}(x,s,q)q^{n-1}z^n \\
&\quad = T_0(x,s,q) + T_1(x,s,q)z + \sum_{n=2}^{\infty} T_n(x,s,q)z^n - x\left(1+q^0\right)T_0(x,s,q)z \\
&\quad\quad - x\sum_{n=2}^{\infty}\left(1+q^{n-1}\right)T_{n-1}(x,s,q)z^n - s\sum_{n=2}^{\infty} T_{n-2}(x,s,q)q^{n-1}z^n \\
&\quad = T_0(x,s,q) + T_1(x,s,q)z - 2xT_0(x,s,q)z \\
&\quad\quad + \sum_{n=2}^{\infty}\left(T_n(x,s,q) - x\left(1+q^{n-1}\right)T_{n-1}(x,s,q) - sq^{n-1}T_{n-2}(x,s,q)\right)z^n
\end{aligned}
$$

olur. Burada Eş.3.1 ifadesi göz önüne alınırsa

$$S(z) - xzS(z) - xz\eta_z S(z) - sqz^2\eta_z S(z) = T_0(x,s,q) + T_1(x,s,q)z - 2T_0(x,s,q)xz$$

ve $T_0(x,s,q) = 1$ ile $T_1(x,s,q) = x$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$S(z) - xzS(z) - xz\eta_z S(z) - sqz^2\eta_z S(z) = 1 - xz$$

olup, böylece

$$S(z) = \frac{1-xz}{1-xz-(xz+sqz^2)\eta_z}$$

elde edilir.

3.6. Teorem

İkinci çeşit q-Chebyshev polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$G(z) = \frac{1}{1 - xz - (xqz + sqz^2)\,\eta_z}$$

dir.

İspat

İkinci çeşit q-Chebyshev polinomlarının aradığımız üreteç fonksiyonu

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x,s,q)z^n$$

olsun.

$$\begin{aligned}
&G(z) - xzG(z) - xqz\eta_z G(z) - sqz^2\eta_z G(z) \\
&\quad= \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x,s,q)z^n - x\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x,s,q)z^{n+1} - x\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x,s,q)q^{n+1}z^{n+1} \\
&\qquad - s\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x,s,q)q^{n+1}z^{n+2} \\
&\quad= \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x,s,q)z^n - x\sum_{n=0}^{\infty} \left(1+q^{n+1}\right) U_n(x,s,q)z^{n+1} - s\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x,s,q)q^{n+1}z^{n+2} \\
&\quad= \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x,s,q)z^n - x\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+q^n\right) U_{n-1}(x,s,q)z^n - s\sum_{n=2}^{\infty} U_{n-2}(x,s,q)q^{n-1}z^n \\
&\quad= U_0(x,s,q) + U_1(x,s,q)z + \sum_{n=2}^{\infty} U_n(x,s,q)z^n - x\left(1+q\right) U_0(x,s,q)z \\
&\qquad - x\sum_{n=2}^{\infty} \left(1+q^n\right) U_{n-1}(x,s,q)z^n - s\sum_{n=2}^{\infty} U_{n-2}(x,s,q)q^{n-1}z^n \\
&\quad= U_0(x,s,q) + U_1(x,s,q)z - x\left(1+q\right) U_0(x,s,q)z \\
&\qquad + \sum_{n=2}^{\infty} \left(U_n(x,s,q) - x\left(1+q^n\right) U_{n-1}(x,s,q) - sU_{n-2}(x,s,q)q^{n-1}\right) z^n
\end{aligned}$$

olup, Eş. 3.2 ifadesi göz önüne alınırsa

$$G(z) - xzG(z) - xqz\eta_z G(z) - sqz^2\eta_z G(z) = U_0(x,s,q) + U_1(x,s,q)z - x\left(1+q\right) U_0(x,s,q)z$$

elde edilir. $U_0(x,s,q)=1$ ve $U_1(x,s,q)=(1+q)x$ değerleri yerine yazılırsa

$$\left(1-xz-\left(xqz+sqz^2\right)\eta_z\right)G(z)=1$$

olarak elde edilir.

3.1. q–Fibonacci ve q–Lucas Polinomları

Fibonacci polinomlarının $q-$benzerleri çeşitli makalelerde çalışılmıştır [2, 5, 9–12].

Carlitz, Fibonacci polinomunun $q-$benzerini $\phi_0(a)=0,\ \phi_1(a)=1$ başlangıç koşulları ve $n\geq 2$ için

$$\phi_n(a)=a\phi_{n-1}(a)+q^{n-2}\phi_{n-2}(a)$$

rekürans bağıntısıyla tanımlamıştır [5]. Bu polinomların açık (explicit) formülünü

$$\phi_n(a)=\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}q^{j^2}\begin{bmatrix}n-j-1\\ j\end{bmatrix}_q a^{n-1-2j};\quad n\geq 1$$

olarak elde edilmiştir [5].

Carlitz'in tanımından farklı olarak Cigler,

$$F_n(x,s,q)=\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}q^{\binom{j+1}{2}}\begin{bmatrix}n-j-1\\ j\end{bmatrix}_q s^j x^{n-1-2j}$$

açık formülüne sahip $q-$Fibonacci polinomlarını tanımlamıştır. $F_0(x,s,q)=0$ ve $F_1(x,s,q)=1$ başlangıç koşulları ve

$$F_n(x,s,q)=xF_{n-1}(x,s,q)+(q-1)sD_qF_{n-1}(x,s,q)+sF_{n-2}(x,s,q)$$

rekürans bağıntısını sağlar [12].

Benzer şekilde Cigler tarafından $q-$Lucas polinomları $n > 0$

$$L_n(x,s,q) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{\binom{j}{2}} \frac{[n]_q}{[n-j]_q} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix}_q s^j x^{n-2j}$$

açık (explicit) formülüyle tanımlanmıştır. $L_n(x,s,q)$ ile tanımlanan polinomlar benzer olarak $L_0(x,s,q) = 2$ ve $L_1(x,s,q) = x$ başlangıç şartlarıyla

$$L_n(x,s,q) = xL_{n-1}(x,s,q) + (q-1)sD_qL_{n-1}(x,s,q) + sL_{n-2}(x,s,q)$$

reküransını sağlar [12].

$q-$Fibonacci ve $q-$Lucas polinomları arasında

$$L_n(x,s,q) = F_{n+1}(x,s,q) + sF_{n-1}(x,s,q),$$

$$L_n(x,qs,q) = F_{n+1}(x,s,q) + q^n sF_{n-1}(x,s,q)$$

bağıntıları vardır.

3.2. Incomplete Fibonacci ve Lucas Sayıları

3.7. Tanım

n negatif olmayan bir tamsayı ve $0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ olmak üzere

$$F_n(k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{n-1-j}{j}$$

ile tanımlı sayılara incomplete (tamamlanmamış) Fibonacci sayıları ve $0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ olmak üzere

$$L_n(k) = \sum_{j=0}^{k} \frac{n}{n-j} \binom{n-j}{j}$$

ile tanımlı sayılara incomplete (tamamlanmamış) Lucas sayıları denir [15].

Özel olarak $F_n\left(\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor\right) = F_n$ ve $L_n\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) = L_n$ dir.

Örnek

Incomplete Fibonacci sayıları için $n = 6$ ise $0 \leq k \leq 2$ olup,

$$k = 0 \text{ ise } F_6(0) = \sum_{j=0}^{0} \binom{5-j}{j} = \binom{5}{0} = 1$$
$$k = 1 \text{ ise } F_6(1) = \sum_{j=0}^{1} \binom{5-j}{j} = \binom{5}{0} + \binom{4}{1} = 1 + 4 = 5$$
$$k = 2 \text{ ise } F_6(2) = \sum_{j=0}^{2} \binom{5-j}{j} = \binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2} = 1 + 4 + 3 = 8 = F_6.$$

Incomplete Lucas sayıları için $n = 6$ ise $0 \leq k \leq 3$ olup,

$$k = 0 \text{ ise } L_6(0) = \sum_{j=0}^{0} \frac{6}{6-j}\binom{6-j}{j} = \frac{6}{6}\binom{6}{0} = 1$$
$$k = 1 \text{ ise } L_6(1) = \sum_{j=0}^{1} \frac{6}{6-j}\binom{6-j}{j} = \frac{6}{6}\binom{6}{0} + \frac{6}{5}\binom{5}{1} = 7$$
$$k = 2 \text{ ise } L_6(2) = \sum_{j=0}^{3} \frac{6}{6-j}\binom{6-j}{j} = \frac{6}{6}\binom{6}{0} + \frac{6}{5}\binom{5}{1} + \frac{6}{4}\binom{4}{2} = 16$$
$$k = 3 \text{ ise } L_6(3) = \sum_{j=0}^{3} \frac{6}{6-j}\binom{6-j}{j} = \frac{6}{6}\binom{6}{0} + \frac{6}{5}\binom{5}{1} + \frac{6}{4}\binom{4}{2} + \frac{6}{3}\binom{3}{3} = 18.$$

Filipponi tarafından incomplete Fibonacci ve Lucas sayıları için sırasıyla

$$F_{n+2}(k+1) = F_{n+1}(k+1) + F_n(k); \qquad 0 \leqslant k \leqslant \left\lfloor\tfrac{n-2}{2}\right\rfloor \tag{3.5}$$

$$L_{n+2}(k+1) = L_{n+1}(k+1) + L_n(k); \qquad 0 \leqslant k \leqslant \left\lfloor\tfrac{n-1}{2}\right\rfloor \tag{3.6}$$

rekürans bağıntılarının sağlandığı gösterilmiştir [15]. Aynı çalışmada yazar

$$F_{n+2}(k+1) = F_{n+1}(k+1) + F_n(k) - \binom{n-1-k}{k}$$

homogen olmayan rekürans bağıntısını elde etmiş ve benzer olarak incomplete Lucas sayıları için homogen olmayan rekürans bağıntısını

$$L_{n+2}(k+1) = L_{n+1}(k+1) + L_n(k) - \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}$$

olarak elde etmiştir. Ek olarak incomplete Fibonacci ve Lucas sayılarının tanımlarından yararlanarak $0 \leqslant k \leqslant \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ için

$$F_{n-1}(k-1) + F_{n+1}(k) = L_n(k)$$

olduğunu göstermiştir.

Pintér ve Srivastava tarafından incomplete Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonunu

$$\sum_{j=0}^{\infty} F_k(j)t^j = t^{2k+1}\frac{(F_{2k} + F_{2k-1}t)(1-t)^{k+1} - t^2}{(1-t)^{k+1}(1-t-t^2)}$$

ve incomplete Lucas sayılarının üreteç fonksiyonunu

$$\sum_{j=0}^{\infty} L_k(j)t^j = t^{2k}\frac{(L_{2k-1} + L_{2k-2}t)(1-t)^{k+1} - t^2(2-t)}{(1-t)^{k+1}(1-t-t^2)}$$

olarak elde edilmiştir [20].

4. INCOMPLETE q–CHEBYSHEV POLİNOMLARI

Bu bölümde Cigler'in tanımladığı $q-$Chebyshev polinomlarının açık (explicit) formüllerinden faydalanarak incomplete $q-$Chebyshev polinomları tanımlandı. Tanımlanan bu polinomların başta rekürans bağıntıları olmak üzere bazı özelliklerini elde edildi. Elde edilen bağıntı ve özellikler de $x,\ s,\ q$ değişkenlerinin özel değerleri için, bilinen incomplete Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas polinomları ile birinci ve ikinci çeşit incomplete Chebyshev polinomlarının elde edildiği görüldü.

4.1. Tanım

n negatif olmayan bir tamsayı ve $0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ olmak üzere

$$U_n^k(x,s,q) = \sum_{j=0}^{k} q^{j^2} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-j}}{(-q;q)_j} s^j x^{n-2j} \tag{4.1}$$

ile tanımlı polinomlara ikinci çeşit incomplete $q-$Chebyshev polinomları denir.

İkinci çeşit incomplete $q-$Chebyshev polinomları için

$$U_n^0(x,s,q) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1+q^{k+1}\right) x^n; \qquad n \geq 1,$$

$$U_n^1(x,s,q) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1+q^{k+1}\right) x^n + q\frac{1-q^{n-1}}{1-q^2} \prod_{k=0}^{n-2} \left(1+q^{k+1}\right) s x^{n-2}; \qquad n \geq 2$$

dir. Ayrıca özel olarak $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ seçilirse $U_n^k(x,s,q) = U_n(x,s,q)$ olur.

4.2. Tanım

n negatif olmayan bir tamsayı ve $0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ olmak üzere

$$T_n^k(x,s,q) = \sum_{j=0}^{k} q^{j^2} \frac{[n]_q}{[n-j]_q} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-j-1}}{(-q;q)_j} s^j x^{n-2j} \tag{4.2}$$

ile tanımlı polinomlara birinci çeşit incomplete $q-$Chebyshev polinomları denir.

Birinci çeşit incomplete $q-$Chebyshev polinomları için

$$T_n^0(x,s,q)=\prod_{k=0}^{n-2}\left(1+q^{k+1}\right)x^n; \qquad n\geq 2,$$

$$T_n^1(x,s,q)=\prod_{k=0}^{n-2}\left(1+q^{k+1}\right)x^n+q\frac{1-q^n}{1-q^2}\prod_{k=0}^{n-3}\left(1+q^{k+1}\right)sx^{n-2}; \qquad n\geq 3.$$

Örnek

İkinci çeşit incomplete $q-$Chebyshev polinomları için $n=5$ ise $0\leq k\leq 2$ olur.

$k=0$ ise

$$\begin{aligned} U_5^0(x,s,q) &= \sum_{j=0}^{0} q^{j^2}\begin{bmatrix}5-j\\ j\end{bmatrix}_q\frac{(-q;q)_{5-j}}{(-q;q)_j}s^jx^{5-2j} \\ &= (1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)(1+q^5)x^5, \end{aligned}$$

$k=1$ ise

$$\begin{aligned} U_5^1(x,s,q) &= \sum_{j=0}^{1} q^{j^2}\begin{bmatrix}5-j\\ j\end{bmatrix}_q\frac{(-q;q)_{5-j}}{(-q;q)_j}s^jx^{5-2j} \\ &= \begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}_q\frac{(-q;q)_5}{(-q;q)_0}x^5+q\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}_q\frac{(-q;q)_4}{(-q;q)_1}sx^3 \\ &= (1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)(1+q^5)x^5 \\ &\quad +q(1+q^2)\left(1+q^3\right)(1+q^4)(1+q+q^2+q^3)sx^3, \end{aligned}$$

$k=2$ ise

$$\begin{aligned} U_5^2(x,s,q) &= \sum_{j=0}^{2} q^{j^2}\begin{bmatrix}5-j\\ j\end{bmatrix}_q\frac{(-q;q)_{5-j}}{(-q;q)_j}s^jx^{5-2j} \\ &= \begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}_q\frac{(-q;q)_5}{(-q;q)_0}x^5+q\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}_q\frac{(-q;q)_4}{(-q;q)_1}sx^3+q^4\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}_q\frac{(-q;q)_3}{(-q;q)_2}s^2x \\ &= (1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)(1+q^5)x^5+q(1+q^2)\left(1+q^3\right)(1+q^4) \\ &\quad \times(1+q+q^2+q^3)sx^3+q^4(1+q^3)(1+q+q^2)s^2x. \end{aligned}$$

Örnek

Birinci çeşit incomplete $q-$Chebyshev polinomları için $n=5$ ise $0 \leq k \leq 2$ olur.

$k=0$ ise

$$\begin{aligned} T_5^0(x,s,q) &= \sum_{j=0}^{0} q^{j^2} \frac{[5]_q}{[5-j]_q} \begin{bmatrix} 5-j \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{4-j}}{(-q;q)_j} s^j x^{5-2j} \\ &= \frac{[5]_q}{[5]_q} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_4}{(-q;q)_0} x^5 \\ &= (1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)x^5, \end{aligned}$$

$k=1$ ise

$$\begin{aligned} T_5^1(x,s,q) &= \sum_{j=0}^{1} q^{j^2} \frac{[5]_q}{[5-j]_q} \begin{bmatrix} 5-j \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{4-j}}{(-q;q)_j} s^j x^{5-2j} \\ &= \frac{[5]_q}{[5]_q} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_4}{(-q;q)_0} x^5 + q \frac{[5]_q}{[4]_q} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_3}{(-q;q)_1} s x^3 \\ &= (1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)x^5 + q(1+q+q^2+q^3+q^4)\left(1+q^3\right) s x^3, \end{aligned}$$

$k=2$ ise

$$\begin{aligned} T_5^2(x,s,q) &= \sum_{j=0}^{2} q^{j^2} \frac{[5]_q}{[5-j]_q} \begin{bmatrix} 5-j \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{4-j}}{(-q;q)_j} s^j x^{5-2j} \\ &= \frac{[5]_q}{[5]_q} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_4}{(-q;q)_0} x^5 + q \frac{[5]_q}{[4]_q} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_3}{(-q;q)_1} s x^3 + q^4 \frac{[5]_q}{[3]_q} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_2}{(-q;q)_2} s^2 x \\ &= (1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)x^5 + q(1+q+q^2+q^3+q^4)(1+q^2) \\ &\quad \times \left(1+q^3\right) s x^3 + q^4(1+q+q^2+q^3+q^4)s^2 x. \end{aligned}$$

$x=x$, $s=1$ ve $q \to 1^-$ seçilmesi durumunda ikinci çeşit incomplete $q-$Chebyshev polinomu incomplete Pell polinomuna dönüşür [23]. Benzer durumlar Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.2 'de verilmiştir.

Çizelge 4.1. İkinci çeşit incomplete $q-$Chebyshev ile diğer polinomlar arasındaki ilişkiler

x	s	q	$U_n^k(x,s,q)$	İkinci çeşit incomplete $q-$Chebyshev polinomu
x	-1	1	$U_n^k(x)$	İkinci çeşit incomplete Chebyshev polinomu
$\frac{x}{2}$	y	1	$F_{n+1}^{(k)}(x,y)$	Incomplete Bivariate Fibonacci polinomu
$\frac{x}{2}$	1	1	$F_{n+1}^{(k)}(x)$	Incomplete Fibonacci polinomu
$\frac{1}{2}$	1	1	$F_{n+1}^{(k)}$	Incomplete Fibonacci sayısı
x	1	1	$P_{n+1}^{(k)}(x)$	Incomplete Pell polinomu
1	1	1	$P_{n+1}^{(k)}$	Incomplete Pell sayısı
$\frac{1}{2}$	$2y$	1	$J_{n+1}^{(k)}(x)$	Incomplete Jacobsthal polinomu
$\frac{1}{2}$	2	1	$J_{n+1}^{(k)}$	Incomplete Jacobsthal sayısı

Çizelge 4.2. Birinci çeşit incomplete $q-$Chebyshev ile diğer polinomlar arasındaki ilişkiler

x	s	q	$T_n^k(x,s,q)$	Birinci çeşit incomplete $q-$Chebyshev polinomu
x	-1	1	$T_n^k(x)$	Birinci çeşit incomplete Chebyshev polinomu
$\frac{x}{2}$	y	1	$\frac{1}{2}\ L_n^{(k)}(x,y)$	İncomplete Bivariate Lucas polinomu
$\frac{x}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}\ L_n^{(k)}(x)$	Incomplete Lucas polinomu
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}\ L_n^{(k)}$	Incomplete Lucas sayısı
x	1	1	$\frac{1}{2}\ Q_n^{(k)}(x)$	Incomplete Pell-Lucas polinomu
1	1	1	$\frac{1}{2}\ Q_n^{(k)}$	Incomplete Pell-Lucas sayısı
$\frac{1}{2}$	$2y$	1	$\frac{1}{2}\ j_n^{(k)}(y)$	Incomplete Jacobsthal-Lucas polinomu
$\frac{1}{2}$	2	1	$\frac{1}{2}\ j_n^{(k)}$	Incomplete Jacobsthal-Lucas sayısı

Dolayısıyla bu çalışmada elde edilen özellikler [13–15, 20–24] makalelerinde tanımlanan incomplete polinomlar ve sayılar için de geçerli olur.

Çizelge 4.3. Birinci ve İkinci çeşit incomplete Chebyshev sayıları

	$T_n^k(1,-1,1)$					
n/k	0	1	2	3	4	
1	1					
2	2	1				
3	4	1				
4	8	0	1			
5	16	-4	1			
6	32	-16	2	1		
7	64	-48	8	1		
8	128	-128	32	0	1	
9	256	-320	112	-8	1	
10	512	-768	352	-48	2	1

	$U_n^k(1,-1,1)$					
n/k	0	1	2	3	4	5
1	2					
2	4	3				
3	8	4				
4	16	4	5			
5	32	0	6			
6	64	-16	8	7		
7	128	-64	16	8		
8	256	-192	48	8	9	
9	512	-512	160	0	10	
10	1024	-1280	512	-48	12	11

Çizelge 4.4. Incomplete Pell ve Pell-Lucas sayıları

	$2T_n^k(1,1,1) = Q_n^{(k)}$				
n/k	0	1	2	3	4
1	2				
2	4	6			
3	8	14			
4	16	32	34		
5	32	72	82		
6	64	160	196	198	
7	128	352	464	478	
8	256	768	1088	1152	1154
9	512	1664	2528	2768	2786

	$U_n^k(1,1,1) = P_{n+1}^{(k)}$				
n/k	0	1	2	3	4
1	2				
2	4	5			
3	8	12			
4	16	28	29		
5	32	64	70		
6	64	144	168	169	
7	128	320	400	408	
8	256	704	944	984	985
9	512	1536	2208	2368	2378

Çizelge 4.5. Incomplete Fibonacci ve Lucas sayıları

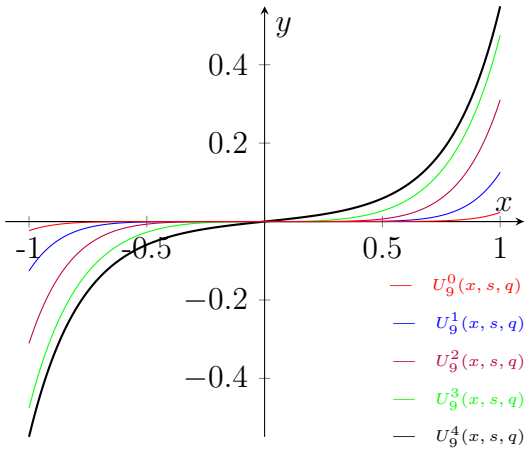
	$2T_n^k(\frac{1}{2},1,1) = L_n^{(k)}$					
n/k	0	1	2	3	4	5
1	1					
2	1	3				
3	1	4				
4	1	5	7			
5	1	6	11			
6	1	7	16	18		
7	1	8	22	29		
8	1	9	29	45	47	
9	1	10	37	67	76	
10	1	11	46	96	121	123

	$U_n^k(\frac{1}{2},1,1) = F_{n+1}^{(k)}$					
n/k	0	1	2	3	4	5
1	1					
2	1	2				
3	1	3				
4	1	4	5			
5	1	5	8			
6	1	6	12	13		
7	1	7	17	21		
8	1	8	23	33	34	
9	1	9	30	50	55	
10	1	10	38	73	88	89

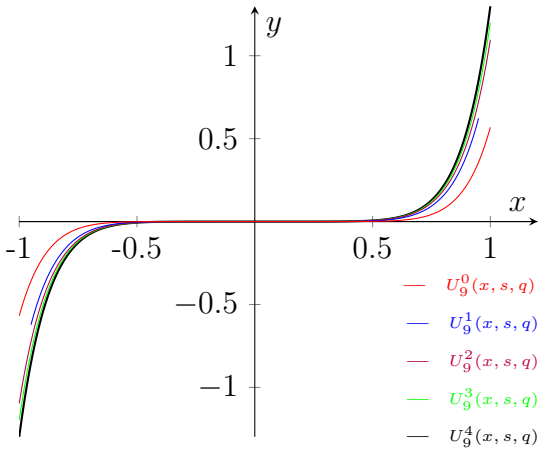
Çizelge 4.6. Incomplete Jacobsthall ve Jacobsthall-Lucas sayıları

	$2T_n^k(\frac{1}{2},2,1) = j_n^{(k)}$					
n/k	0	1	2	3	4	5
1	1					
2	1	5				
3	1	7				
4	1	9	17			
5	1	11	31			
6	1	13	49	65		
7	1	15	71	127		
8	1	17	97	225	257	
9	1	19	127	367	511	
10	1	21	161	561	961	1025

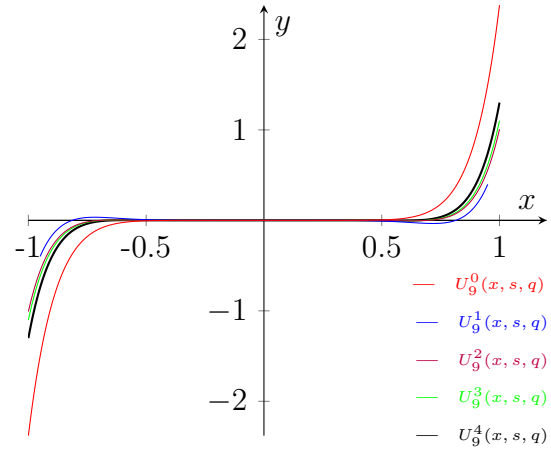
	$U_n^k(\frac{1}{2},2,1) = J_{n+1}^{(k)}$					
n/k	0	1	2	3	4	5
1	1					
2	1	3				
3	1	5				
4	1	7	11			
5	1	9	21			
6	1	114	35	43		
7	1	13	53	85		
8	1	15	75	155	171	
9	1	17	101	261	341	
10	1	19	131	411	651	683



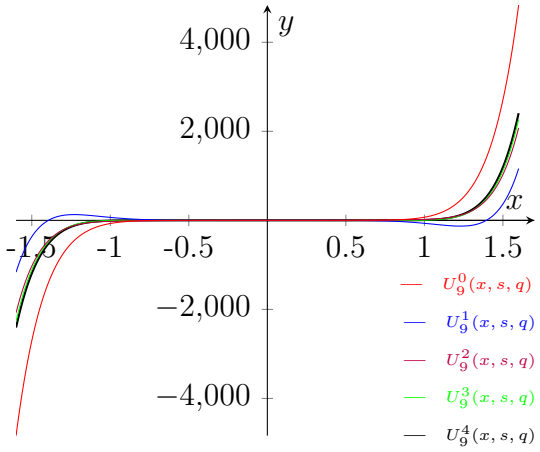
(a) $q = -0.9$



(b) $q = -0.5$

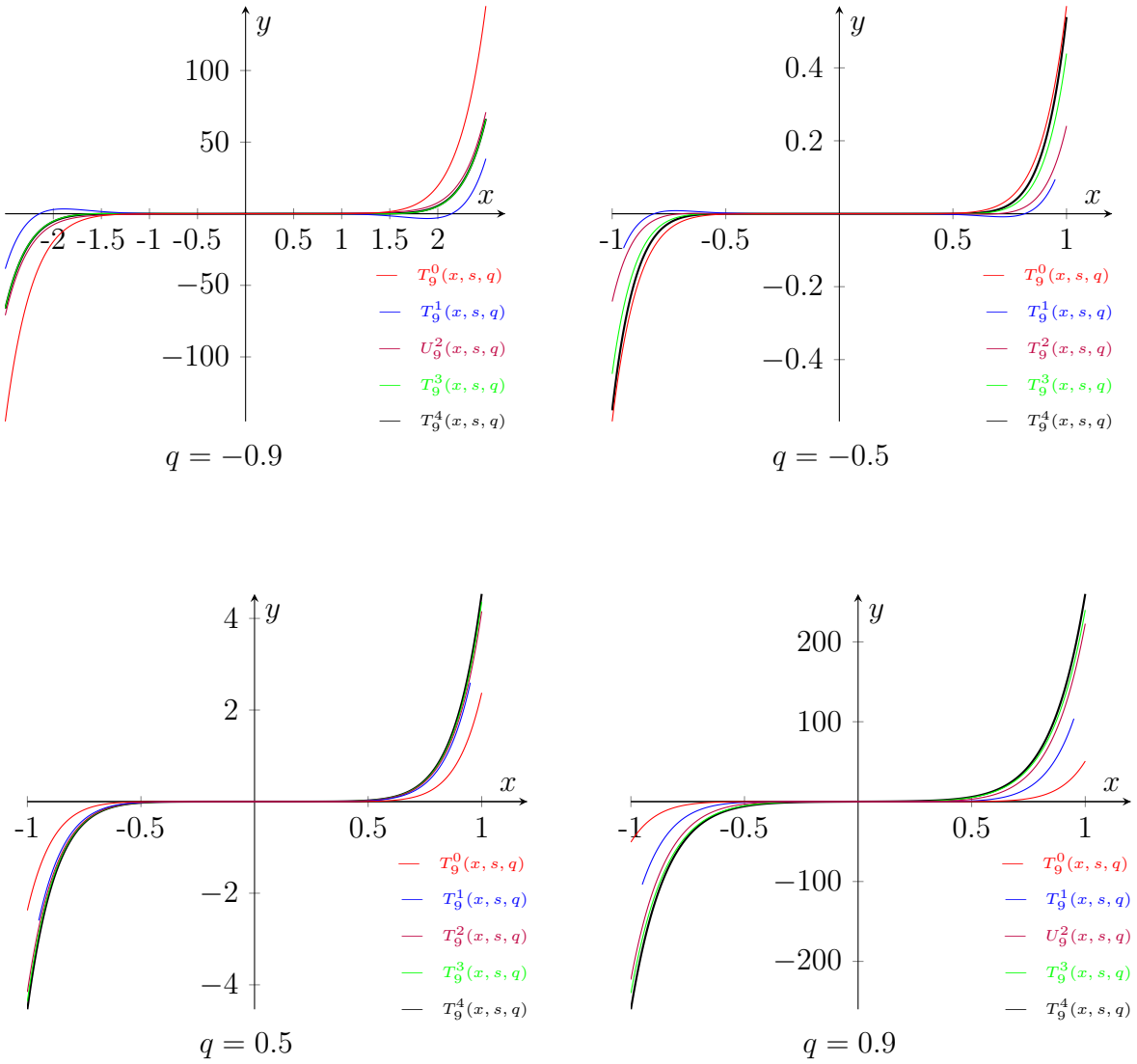


(c) $q = 0.5$

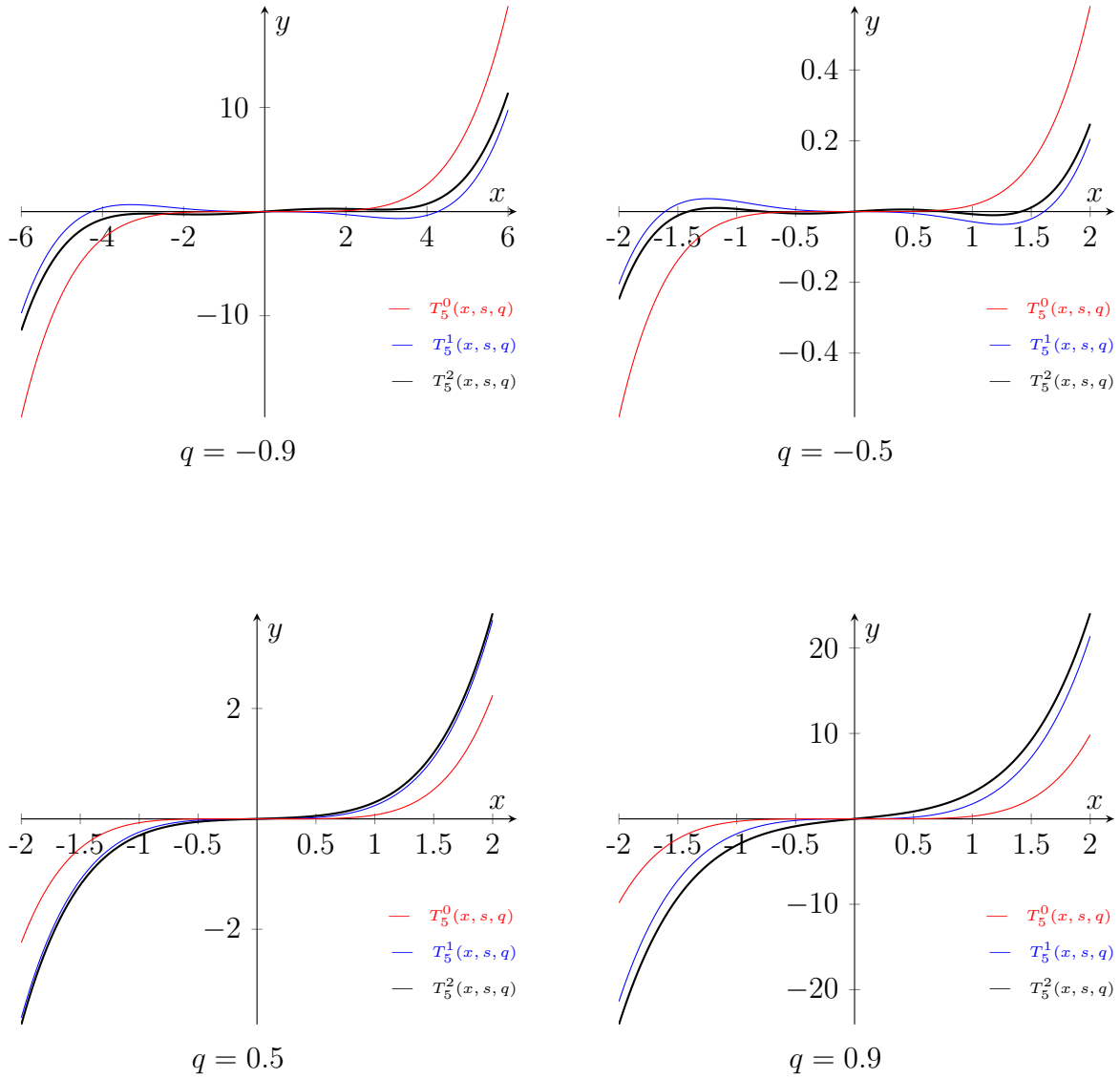


(d) $q = 0.9$

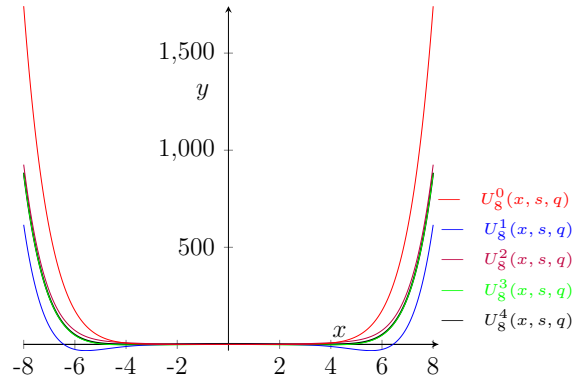
Şekil 4.1. $U_9^k(x,s,q) \quad s = -1, \;\; q = -0.9, -0.5, 0.5, 0.9, \; k = 0,1,2,3,4$



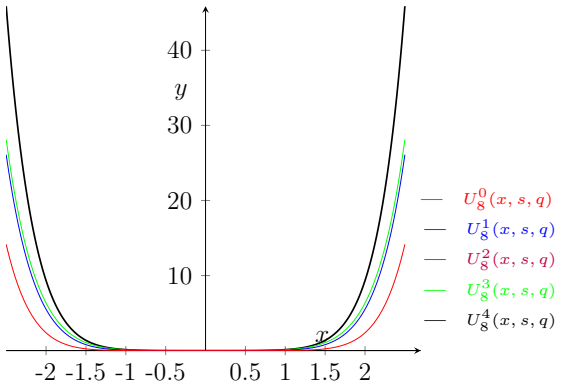
Şekil 4.2. $T_9^k(x,s,q)$ $s=1$ $q=-0.9,-0.5,0.5,0.9,$ $k=0,1,2,3,4$



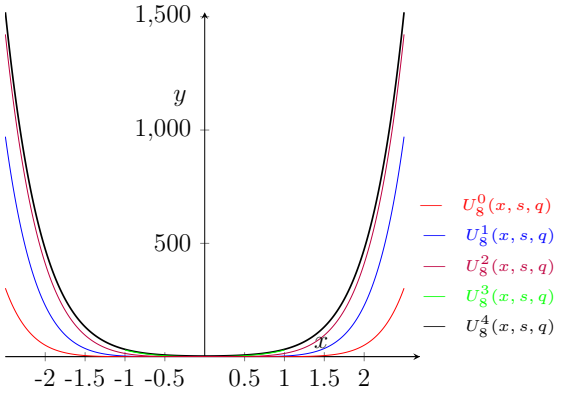
Şekil 4.3. $T_5^k(x/2, s, q)$ $s = 1$, $q = -0.9, -0.5, 0.5, 0.9$, $k = 0, 1, 2$



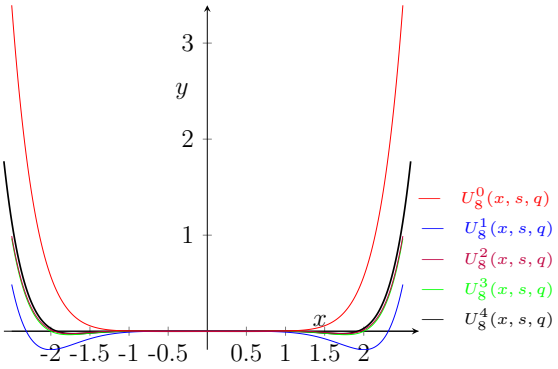
$q = -0.9$



$q = -0.5$

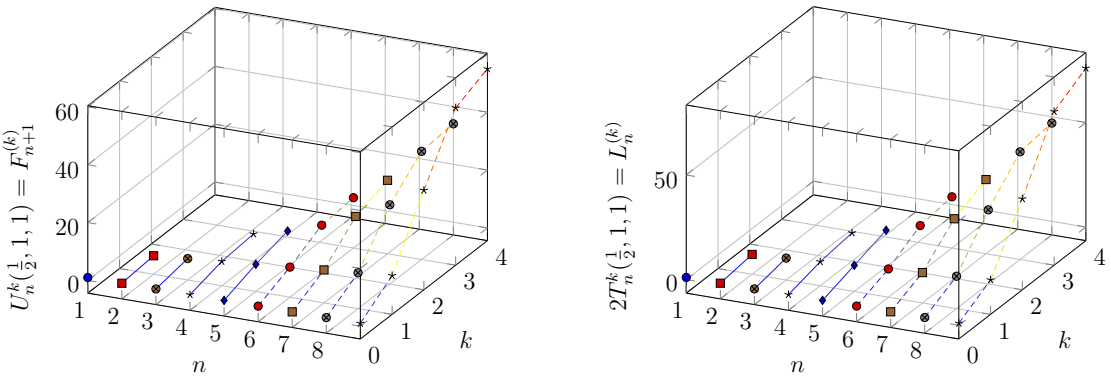


$q = 0.5$



$q = 0.9$

Şekil 4.4. $U_8^k(x/2, s, q)$ $s = 2$, $q = -0.9, -0.5, 0.5, 0.9$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$



Şekil 4.5. Incomplete Fibonacci ve Lucas sayıları $1 \leq n \leq 9$, $0 \leq k \leq 4$.

4.1. Rekürans Bağıntıları ve Aralarındaki İlişkiler

4.3. Teorem

İkinci çeşit incomplete $q-$Chebyshev polinomları $0 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ için

$$U_{n+2}^{k+1}(x,s,q) = (1+q^{n+2})xU_{n+1}^{k+1}(x,s,q) + q^{n+1}sU_n^k(x,s,q) \tag{4.3}$$

rekürans bağıntısını sağlar.

İspat

Eş. 4.1 ifadesi kullanılarak

$$\begin{aligned}
&(1+q^{n+2})xU_{n+1}^{k+1}(x,s,q) + q^{n+1}sU_n^k(x,s,q) \\
&\quad = (1+q^{n+2})x\sum_{j=0}^{k+1} q^{j^2}\begin{bmatrix} n-j+1 \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-j+1}}{(-q;q)_j} s^j x^{n+1-2j} \\
&\qquad + q^{n+1}s\sum_{j=0}^{k} q^{j^2}\begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-j}}{(-q;q)_j} s^j x^{n-2j} \\
&\quad = \sum_{j=0}^{k+1} q^{j^2}\left\{(1+q^{n+2})\begin{bmatrix} n-j+1 \\ j \end{bmatrix}_q + q^{n+1}q^{-2j+1}(1+q^j)\begin{bmatrix} n-j+1 \\ j-1 \end{bmatrix}_q\right\} \\
&\qquad \times \frac{(-q;q)_{n-j+1}}{(-q;q)_j} s^j x^{n-2j+2} \\
&\quad = \sum_{j=0}^{k+1} q^{j^2}\left\{\left(\begin{bmatrix} n-j+1 \\ j \end{bmatrix}_q + q^{n-2j+2}\begin{bmatrix} n-j+1 \\ j-1 \end{bmatrix}_q\right)\right. \\
&\qquad \left. + q^{n-j+2}\left(q^j\begin{bmatrix} n-j+1 \\ j \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-j+1 \\ j-1 \end{bmatrix}_q\right)\right\} \frac{(-q;q)_{n-j+1}}{(-q;q)_j} s^j x^{n-2j+2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada Eş.2.2 ve Eş. 2.3 eşitlikleri ile verilen $q-$Pascal kuralları kullanılarak

$$(1+q^{n+2})xU_{n+1}^{k+1}(x,s,q)+q^{n+1}sU_n^k(x,s,q)$$

$$=\sum_{j=0}^{k+1}q^{j^2}\left(1+q^{n-j+2}\right)\begin{bmatrix}n-j+2\\ j\end{bmatrix}_q\frac{(-q;q)_{n-j+1}}{(-q;q)_j}s^jx^{n-2j+2}$$

$$=\sum_{j=0}^{k+1}q^{j^2}\begin{bmatrix}n-j+2\\ j\end{bmatrix}_q\frac{(-q;q)_{n-j+2}}{(-q;q)_j}s^jx^{n-2j+2}$$

$$=U_{n+2}^{k+1}(x,s,q).$$

elde edilir.

Aşağıdaki teoremde ikinci çeşit incomplete $q-$Chebyshev polinomların homogen olmayan rekürans bağıntısı elde edilmiştir.

4.4. Teorem

İkinci çeşit incomplete $q-$Chebyshev polinomu $U_n^k(x,s,q)$, olmak üzere

$$U_{n+2}^k(x,s,q) = (1+q^{n+2})xU_{n+1}^k(x,s,q)+q^{n+1}sU_n^k(x,s,q)-q^{n+1+k^2}\begin{bmatrix}n-k\\ k\end{bmatrix}_q \times\frac{(-q;q)_{n-k}}{(-q;q)_k}s^{k+1}x^{n-2k}. \tag{4.4}$$

İspat

Eş.4.1 ve Eş.4.3 ifadeleri kullanılarak

$$U_{n+2}^k(x,s,q) = (1+q^{n+2})xU_{n+1}^k(x,s,q)+q^{n+1}sU_n^{k-1}(x,s,q)$$

$$= (1+q^{n+2})xU_{n+1}^k(x,s,q)+q^{n+1}s\sum_{j=0}^{k-1}q^{j^2}\begin{bmatrix}n-j\\ j\end{bmatrix}_q\frac{(-q;q)_{n-j}}{(-q;q)_j}s^jx^{n-2j}$$

$$= (1+q^{n+2})xU_{n+1}^k(x,s,q)+q^{n+1}sU_n^k(x,s,q)-q^{n+1+k^2}\begin{bmatrix}n-k\\ k\end{bmatrix}_q \times\frac{(-q;q)_{n-k}}{(-q;q)_k}s^{k+1}x^{n-2k}$$

olarak bulunur.

4.5. Teorem

$T_n^k(x,s,q)$ ve $U_n^k(x,s,q)$, sırasıyla birinci ve ikinci çeşit incomplete $q-$Chebyshev polinomları olmak üzere $0 \leq k \leq \frac{n+1}{2}$ için

$$T_{n+2}^k(x,s,q) = xU_{n+1}^k(x,s,q) + q^{n+1}sU_n^{k-1}(x,s,q) \tag{4.5}$$

dir.

İspat

Eş. 4.1 ifadesi kullanılarak

$$\begin{aligned}
&xU_{n+1}^k(x,s,q) + q^{n+1}sU_n^{k-1}(x,s,q) \\
&\quad = x\sum_{j=0}^{k} q^{j^2} \begin{bmatrix} n-j+1 \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-j+1}}{(-q;q)_j} s^j x^{n+1-2j} + q^{n+1}s\sum_{j=0}^{k-1} q^{j^2} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-j}}{(-q;q)_j} s^j x^{n-2j} \\
&\quad = \sum_{j=0}^{k} q^{j^2} \begin{bmatrix} n-j+1 \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-j+1}}{(-q;q)_j} s^j x^{n-2j+2} \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{k} q^{n+1}q^{(j-1)^2} \begin{bmatrix} n-j+1 \\ j-1 \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-j+1}}{(-q;q)_{j-1}} s^j x^{n-2j+2} \\
&\quad = \sum_{j=0}^{k} q^{j^2} \left\{ \begin{bmatrix} n-j+1 \\ j \end{bmatrix}_q + q^{n+1-2j+1}(1+q^j) \begin{bmatrix} n-j+1 \\ j-1 \end{bmatrix}_q \right\} \frac{(-q;q)_{n-j+1}}{(-q;q)_j} s^j x^{n-2j+2} \\
&\quad = \sum_{j=0}^{k} q^{j^2} \left\{ \begin{bmatrix} n-j+1 \\ j \end{bmatrix}_q + q^{n-2j+2} \begin{bmatrix} n-j+1 \\ j-1 \end{bmatrix}_q + q^{n-j+2} \begin{bmatrix} n-j+1 \\ j-1 \end{bmatrix}_q \right\} \\
&\qquad \times \frac{(-q;q)_{n-j+1}}{(-q;q)_j} s^j x^{n-2j+2}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Önce Eş. 2.3 denklemi daha sonra Eş. 2.5 ifadesi göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
xU_{n+1}^k(x,s,q) + q^{n+1}sU_n^{k-1}(x,s,q) &= \sum_{j=0}^{k} q^{j^2} \frac{[n+2]_q}{[n-j+2]_q} \begin{bmatrix} n-j+2 \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-j+1}}{(-q;q)_j} s^j x^{n-2j+2} \\
&= T_{n+2}^k(x,s,q)
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.6. Teorem

Birinci çeşit incomplete $q-$Chebyshev polinomu $T_n^k(x,s,q)$, olmak üzere $0 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ için

$$T_{n+2}^{k+1}(x,s,q) = (1+q^{n+1})xT_{n+1}^{k+1}(x,s,q) + q^{n+1}sT_n^k(x,s,q) \tag{4.6}$$

reküransı sağlanır.

İspat

Eş.4.3 ve Eş.4.5 ifadeleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
T_{n+2}^{k+1}(x,s,q) &= xU_{n+1}^{k+1}(x,s,q) + q^{n+1}sU_n^k(x,s,q) \\
&= x\left\{(1+q^{n+1})xU_n^{k+1}(x,s,q) + q^n sU_{n-1}^k(x,s,q)\right\} \\
&\quad +q^{n+1}s\left\{(1+q^n)xU_{n-1}^k(x,s,q) + q^{n-1}sU_{n-2}^{k-1}(x,s,q)\right\} \\
&= (1+q^{n+1})x^2U_n^{k+1}(x,s,q) + q^n sxU_{n-1}^k(x,s,q) \\
&\quad +q^{n+1}s(1+q^n)xU_{n-1}^k(x,s,q) + q^{2n}s^2U_{n-2}^{k-1}(x,s,q) \\
&= (1+q^{n+1})x^2U_n^{k+1}(x,s,q) + q^n sx(1+q^{n+1})U_{n-1}^k(x,s,q) \\
&\quad +q^{n+1}sxU_{n-1}^k(x,s,q) + q^{2n}s^2U_{n-2}^{k-1}(x,s,q) \\
&= (1+q^{n+1})x\left\{xU_n^{k+1}(x,s,q) + q^n sU_{n-1}^k(x,s,q)\right\} \\
&\quad +q^{n+1}s\left\{xU_{n-1}^k(x,s,q) + q^{n-1}sU_{n-2}^{k-1}(x,s,q)\right\} \\
&= (1+q^{n+1})xT_{n+1}^{k+1}(x,s,q) + q^{n+1}sT_n^k(x,s,q)
\end{aligned}$$

dir.

Birinci çeşit incomplete $q-$Chebyshev polinomlarının homogen olmayan rekürans bağıntısı aşağıdaki teoremde verilmiştir.

4.7. Teorem

$T_n^k(x,s,q)$ birinci çeşit incomplete $q-$Chebyshev polinomu olmak üzere

$$\begin{aligned} T_{n+2}^k(x,s,q) &= (1+q^{n+1})T_{n+1}^k(x,s,q) + q^{n+1}sT_n^k(x,s,q) \\ &\quad -q^{n+1+k^2}\frac{[n]_q}{[n-k]_q}\begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-k-1}}{(-q;q)_k}s^{k+1}x^{n-2k}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

İspat

Eş. 4.2 ve Eş. 4.6 ifadeleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} T_{n+2}^k(x,s,q) &= (1+q^{n+1})xT_{n+1}^k(x,s,q) + q^{n+1}sT_n^{k-1}(x,s,q) \\ &= (1+q^{n+1})xT_{n+1}^k(x,s,q) + q^{n+1}s\sum_{j=0}^{k-1}q^{j^2}\frac{[n]_q}{[n-j]_q}\begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix}_q \\ &\quad \times\frac{(-q;q)_{n-j-1}}{(-q;q)_j}s^jx^{n-2j} \\ &= (1+q^{n+1})T_{n+1}^k(x,s,q) + q^{n+1}sT_n^k(x,s,q) \\ &\quad -q^{n+1+k^2}s\frac{[n]_q}{[n-k]_q}\begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-k-1}}{(-q;q)_k}s^kx^{n-2k} \end{aligned}$$

elde edilir.

Aşagıdaki teoremlerde birinci ve ikinci çeşit Chebyshev polinomları arasındaki ilişkiler elde edilmiştir.

4.8. Teorem

$T_n^k(x,s,q)$ ve $U_n^k(x,s,q)$, sırasıyla birinci ve ikinci çeşit incomplete $q-$Chebyshev polinomları olmak üzere $0 \le k \le \frac{n+1}{2}$ için

$$T_{n+2}^k(x,s,q) = xU_{n+1}^k(x,q^2s,q) + qsU_n^{k-1}(x,q^2s,q). \tag{4.8}$$

İspat

Eş.4.1 ifadesi göz önüne alınırsa

$$xU_{n+1}^{k}(x,q^2s,q)+qsU_{n}^{k-1}(x,q^2s,q)$$

$$=x\sum_{j=0}^{k}q^{j^2}\begin{bmatrix}n+1-j\\ j\end{bmatrix}_q\frac{(-q;q)_{n+1-j}}{(-q;q)_j}(q^2s)^jx^{n+1-2j}+qs\sum_{j=0}^{k-1}q^{j^2}\begin{bmatrix}n-j\\ j\end{bmatrix}_q\frac{(-q;q)_{n-j}}{(-q;q)_j}(q^2s)^jx^{n-2j}$$

$$=\sum_{j=0}^{k}q^{j^2+2j}\begin{bmatrix}n+1-j\\ j\end{bmatrix}_q\frac{(-q;q)_{n+1-j}}{(-q;q)_j}s^jx^{n+2-2j}+\sum_{j=0}^{k-1}q^{j^2+2j+1}\begin{bmatrix}n-j\\ j\end{bmatrix}_q\frac{(-q;q)_{n-j}}{(-q;q)_j}s^{j+1}x^{n-2j}$$

$$=\sum_{j=0}^{k}q^{j^2+2j}\begin{bmatrix}n+1-j\\ j\end{bmatrix}_q\frac{(-q;q)_{n+1-j}}{(-q;q)_j}s^jx^{n+2-2j}+\sum_{j=1}^{k}q^{j^2}\begin{bmatrix}n+1-j\\ j-1\end{bmatrix}_q\frac{(-q;q)_{n+1-j}}{(-q;q)_{j-1}}s^jx^{n+2-2j}$$

$$=\sum_{j=0}^{k}q^{j^2}\left\{q^{2j}\begin{bmatrix}n+1-j\\ j\end{bmatrix}_q+(1+q^j)\begin{bmatrix}n+1-j\\ j-1\end{bmatrix}_q\right\}\frac{(-q;q)_{n+1-j}}{(-q;q)_j}s^jx^{n+2-2j}$$

$$=\sum_{j=0}^{k}q^{j^2}\left\{q^j\left\{q^j\begin{bmatrix}n+1-j\\ j\end{bmatrix}_q+\begin{bmatrix}n+1-j\\ j-1\end{bmatrix}_q\right\}+\begin{bmatrix}n+1-j\\ j-1\end{bmatrix}_q\right\}\frac{(-q;q)_{n+1-j}}{(-q;q)_j}s^jx^{n+2-2j}$$

olur. Burada Eş. 2.2 denklemi kullanılarak

$$xU_{n+1}^{k}(x,q^2s,q)+qsU_{n}^{k-1}(x,q^2s,q)$$

$$=\sum_{j=0}^{k}q^{j^2}\left\{q^j\begin{bmatrix}n+2-j\\ j\end{bmatrix}_q+\begin{bmatrix}n+1-j\\ j-1\end{bmatrix}_q\right\}\frac{(-q;q)_{n+1-j}}{(-q;q)_j}s^jx^{n+2-2j}$$

elde edilip, Eş. 2.4 ifadesinden

$$xU_{n+1}^{k}(x,q^2s,q)+qsU_{n}^{k-1}(x,q^2s,q)$$

$$=\sum_{j=0}^{k}q^{j^2}\frac{[n+2]_q}{[n+2-j]_q}\begin{bmatrix}n+2-j\\ j\end{bmatrix}_q\frac{(-q;q)_{n+1-j}}{(-q;q)_j}s^jx^{n+2-2j}$$

$$=T_{n+2}^{k}(x,s,q)$$

elde edilir.

4.9. Teorem

$T_n^k(x,s,q)$ ve $U_n^k(x,s,q)$ sırasıyla birinci ve ikinci çeşit incomplete $q-$Chebyshev polinomları olmak üzere $0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ için

$$(1+q^{n+2})T_{n+2}^k(x,s,q) = U_{n+2}^k(x,s,q) + q^{2n+3}sU_n^{k-1}(x,s,q) \tag{4.9}$$

dir.

İspat

Eş.4.3 ve Eş.4.1 ifadelerinden

$$\begin{aligned}
&U_{n+2}^k(x,s,q) + q^{2n+3}sU_n^{k-1}(x,s,q) \\
&= \left\{(1+q^{n+2})xU_{n+1}^k(x,s,q) + q^{n+1}sU_n^{k-1}(x,s,q)\right\} + q^{2n+3}sU_n^{k-1}(x,s,q) \\
&=(1+q^{n+2})x\sum_{j=0}^{k} q^{j^2}\begin{bmatrix} n+1-j \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n+1-j}}{(-q;q)_j}s^j x^{n+1-2j} + q^{n+1}s\sum_{j=0}^{k-1} q^{j^2}\begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix}_q \\
&\quad \times \frac{(-q;q)_{n-j}}{(-q;q)_j}s^j x^{n-2j} + q^{2n+3}s\sum_{j=0}^{k-1} q^{j^2}\begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-j}}{(-q;q)_j}s^j x^{n-2j} \\
&=\sum_{j=0}^{k} q^{j^2}\begin{bmatrix} n+1-j \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n+1-j}}{(-q;q)_j}s^j x^{n+2-2j} + \sum_{j=0}^{k} q^{n+2}q^{j^2}\begin{bmatrix} n+1-j \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n+1-j}}{(-q;q)_j}s^j x^{n+2-2j} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{k-1} q^{n+1}q^{j^2}\begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-j}}{(-q;q)_j}s^{j+1} x^{n-2j} + \sum_{j=0}^{k-1} q^{2n+3}q^{j^2}\begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-j}}{(-q;q)_j}s^{j+1} x^{n-2j} \\
&=\sum_{j=0}^{k} q^{j^2}\begin{bmatrix} n+1-j \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n+1-j}}{(-q;q)_j}s^j x^{n+2-2j} + \sum_{j=0}^{k} q^{n+2}q^{j^2}\begin{bmatrix} n+1-j \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n+1-j}}{(-q;q)_j}s^j x^{n+2-2j} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k} q^{n+1}q^{(j-1)^2}\begin{bmatrix} n+1-j \\ j-1 \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n+1-j}}{(-q;q)_{j-1}}s^j x^{n+2-2j} + \sum_{j=1}^{k} q^{2n+3}q^{(j-1)^2}\begin{bmatrix} n+1-j \\ j-1 \end{bmatrix}_q \\
&\quad \times \frac{(-q;q)_{n+1-j}}{(-q;q)_{j-1}}s^j x^{n+2-2j} \\
&=\sum_{j=0}^{k} q^{j^2}\begin{bmatrix} n+1-j \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n+1-j}}{(-q;q)_j}s^j x^{n+2-2j} + \sum_{j=1}^{k} q^{n+1}q^{(j-1)^2}\begin{bmatrix} n+1-j \\ j-1 \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n+1-j}}{(-q;q)_{j-1}}s^j x^{n+2-2j} \\
&\quad + q^{n+2}\sum_{j=0}^{k} q^{j^2}\begin{bmatrix} n+1-j \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n+1-j}}{(-q;q)_j}s^j x^{n+2-2j} \\
&\quad + q^{n+2}\sum_{j=0}^{k} q^{n+1}q^{(j-1)^2}\begin{bmatrix} n+1-j \\ j-1 \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n+1-j}}{(-q;q)_{j-1}}s^j x^{n+2-2j}
\end{aligned}$$

son ifade düzenlenip, Eş. 2.3 ve Eş. 2.5 denklemleri kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&U_{n+2}^{k}(x,s,q)+q^{2n+3}sU_{n}^{k-1}(x,s,q)\\
&=\sum_{j=0}^{k}q^{j^2}\left\{\begin{bmatrix}n+1-j\\ j\end{bmatrix}_q+q^{n+1-2j+1}(1+q^j)\begin{bmatrix}n+1-j\\ j-1\end{bmatrix}_q\right\}\frac{(-q;q)_{n+1-j}}{(-q;q)_j}s^jx^{n+2-2j}\\
&\quad+q^{n+2}\sum_{j=0}^{k}q^{j^2}\left\{\begin{bmatrix}n+1-j\\ j\end{bmatrix}_q+q^{n+1-2j+1}(1+q^j)\begin{bmatrix}n+1-j\\ j-1\end{bmatrix}_q\right\}\frac{(-q;q)_{n+1-j}}{(-q;q)_j}s^jx^{n+2-2j}\\
&=\sum_{j=0}^{k}q^{j^2}\left\{\begin{bmatrix}n+1-j\\ j\end{bmatrix}_q+q^{n+2-2j}\begin{bmatrix}n+1-j\\ j-1\end{bmatrix}_q+q^{n+2-j}\begin{bmatrix}n+1-j\\ j-1\end{bmatrix}_q\right\}\frac{(-q;q)_{n+1-j}}{(-q;q)_j}s^jx^{n+2-2j}\\
&\quad+q^{n+2}\sum_{j=0}^{k}q^{j^2}\left\{\begin{bmatrix}n+1-j\\ j\end{bmatrix}_q+q^{n+2-2j}\begin{bmatrix}n+1-j\\ j-1\end{bmatrix}_q+q^{n+2-j}\begin{bmatrix}n+1-j\\ j-1\end{bmatrix}_q\right\}\frac{(-q;q)_{n+1-j}}{(-q;q)_j}s^jx^{n+2-2j}\\
&=\sum_{j=0}^{k}q^{j^2}\frac{[n+2]_q}{[n+2-j]_q}\begin{bmatrix}n+2-j\\ j\end{bmatrix}_q\frac{(-q;q)_{n+1-j}}{(-q;q)_j}s^jx^{n+2-2j}\\
&\quad+q^{n+2}\sum_{j=0}^{k}q^{j^2}\frac{[n+2]_q}{[n+2-j]_q}\begin{bmatrix}n+2-j\\ j\end{bmatrix}_q\frac{(-q;q)_{n+1-j}}{(-q;q)_j}s^jx^{n+2-2j}\\
&=T_{n+2}^{k}(x,s,q)+q^{n+2}T_{n+2}^{k}(x,s,q)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

4.2. Toplam Formülleri

Bu bölümde birinci ve ikinci çeşit incomplete $q-$Chebyshev polinomlarını içeren çeşitli toplam formülleri elde edilmiştir.

Özellik

$U_n^k(x,s,q)$, ikinci çeşit incomplete $q-$Chebyshev polinomları olmak üzere

$$\frac{d}{dx}U_n(x,s,q)=nx^{-1}U_n(x,s,q)-2x^{-1}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}jq^{j^2}\begin{bmatrix}n-j\\ j\end{bmatrix}_q\frac{(-q;q)_{n-j}}{(-q;q)_j}s^jx^{n-2j} \tag{4.10}$$

dir.

İspat

Eş. 3.4 ifadesi göz önüne alınıp, x'e göre türev alınarak ispat tamamlanır.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}U_n(x,s,q) &= \frac{d}{dx}\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{j^2}\begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-j}}{(-q;q)_j} s^j x^{n-2j} \\ &= n\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{j^2}\begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-j}}{(-q;q)_j} s^j x^{n-2j-1} - 2\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} jq^{j^2}\begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix}_q \\ &\quad \times \frac{(-q;q)_{n-j}}{(-q;q)_j} s^j x^{n-2j-1}.\end{aligned}$$

Özellik

$T_n^k(x,s,q)$, birinci çeşit incomplete $q-$Chebyshev polinomları olmak üzere

$$\frac{d}{dx}T_n(x,s,q) = nx^{-1}T_n(x,s,q) - 2x^{-1}\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} jq^{j^2}\frac{[n]_q}{[n-j]_q}\begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-j-1}}{(-q;q)_j} s^j x^{n-2j}. \quad (4.11)$$

İspat

Eş.3.3 ifadesinin x'e göre türevi hesaplanırsa

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}T_n(x,s,q) &= \frac{d}{dx}\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{j^2}\frac{[n]_q}{[n-j]_q}\begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-j-1}}{(-q;q)_j} s^j x^{n-2j} \\ &= n\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{j^2}\frac{[n]_q}{[n-j]_q}\begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-j-1}}{(-q;q)_j} s^j x^{n-2j-1} \\ &\quad -2\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} jq^{j^2}\frac{[n]_q}{[n-j]_q}\begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-j-1}}{(-q;q)_j} s^j x^{n-2j-1} \\ &= nx^{-1}T_n(x,s,q) - 2x^{-1}\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} jq^{j^2}\frac{[n]_q}{[n-j]_q}\begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-j-1}}{(-q;q)_j} s^j x^{n-2j}\end{aligned}$$

elde edilir.

4.10. Teorem

$U_n^k(x,s,q)$, ikinci çeşit incomplete $q-$Chebyshev polinomları olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} U_n^k(x,s,q) = \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \frac{n}{2} + 1 \right) U_n(x,s,q) + \frac{x}{2} \frac{dU_n(x,s,q)}{dx} \tag{4.12}$$

toplam formülü sağlanır.

İspat

Eş. 4.1 ifadesi göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} U_n^k(x,s,q) &= U_n^0(x,s,q) + U_n^1(x,s,q) + \cdots + U_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(x,s,q) \\
&= \left(q^0 \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_n}{(-q;q)_0} x^n \right) + \left(q^0 \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_n}{(-q;q)_0} x^n + q \begin{bmatrix} n-1 \\ 1 \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-1}}{(-q;q)_1} s x^{n-2} \right) \\
&\quad + \cdots + \left(q^0 \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_n}{(-q;q)_0} x^n + q \begin{bmatrix} n-1 \\ 1 \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-1}}{(-q;q)_1} s x^{n-2} \right. \\
&\quad \left. + \cdots + q^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \begin{bmatrix} n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{(-q;q)_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} s^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} x^{n-2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right) \\
&= \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right) \left(q^0 \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_n}{(-q;q)_0} x^n \right) + \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 - 1 \right) \\
&\quad \times \left(q \begin{bmatrix} n-1 \\ 1 \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-1}}{(-q;q)_1} s x^{n-2} \right) + \cdots + \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) \\
&\quad \times \left(q^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \begin{bmatrix} n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{(-q;q)_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} s^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} x^{n-2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 - j \right) q^{j^2} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-j}}{(-q;q)_j} s^j x^{n-2j} \\
&= \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right) U_n(x,s,q) - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} j q^{j^2} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-j}}{(-q;q)_j} s^j x^{n-2j}
\end{aligned}$$

olup, Eş. 4.10 denklemi göz önüne alınırsa

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} U_n^k(x,s,q) = \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \frac{n}{2} + 1 \right) U_n(x,s,q) + \frac{x}{2} \frac{dU_n(x,s,q)}{dx}$$

elde edilir.

4.11. Teorem

$T_n^k(x,s,q)$, birinci çeşit incomplete $q-$Chebyshev polinomları olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2} \right]} T_n^k(x,s,q) = \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \frac{n}{2} + 1 \right) T_n(x,s,q) + \frac{x}{2} \frac{dT_n(x,s,q)}{dx} \tag{4.13}$$

toplam formülü sağlanır.

İspat

Eş. 4.2 ifadesi kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} T_n^k(x,s,q) &= T_n^0(x,s,q) + T_n^1(x,s,q) + \cdots + T_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(x,s,q) \\
&= \left(\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-1}}{(-q;q)_0} x^n \right) + \left(\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-1}}{(-q;q)_0} x^n \right. \\
&\quad \left. + q \frac{[n]_q}{[n-1]_q} \begin{bmatrix} n-1 \\ 1 \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-2}}{(-q;q)_1} s x^{n-2} \right) + \cdots \\
&\quad + \left(\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-1}}{(-q;q)_0 (-q^n;q)_0} x^n + q \frac{[n]_q}{[n-1]_q} \begin{bmatrix} n-1 \\ 1 \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-2}}{(-q;q)_1} s x^{n-2} \right. \\
&\quad \left. + \cdots + q^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2} \frac{[n]_q}{\left[n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \right]_q} \begin{bmatrix} n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}}{(-q;q)_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} s^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} x^{n-2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 - j \right) q^{j^2} \frac{[n]_q}{[n-j]_q} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-j-1}}{(-q;q)_j} s^j x^{n-2j} \\
&= \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right) T_n(x,s,q) - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} j q^{j^2} \frac{[n]_q}{[n-j]_q} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-q;q)_{n-j-1}}{(-q;q)_j} s^j x^{n-2j}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada Eş. 4.11 denklemi göz önüne alınırsa

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} T_n^k(x,s,q) = \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \frac{n}{2} + 1 \right) T_n(x,s,q) + \frac{x}{2} \frac{d}{dx} T_n(x,s,q)$$

bulunur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, $q-$analiz, $q-$Chebyshev polinomları, $q-$Fibonacci sayıları ve incomplete Fibonacci sayıları ile ilgili çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde, tezde kullanılacak temel kavramlardan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde, $q-$Chebyshev polinomlarının tanmları verilerek, üreteç fonksiyonları elde edilmiştir. Ayrıca $q-$Fibonacci ve $q-$Lucas polinomları ile incomplete Fibonacci ve Lucas sayılarının tanımları ve bazı özelliklerine yer verilmiştir. Dördüncü bölümde ise birinci ve ikinci çeşit incomplete $q-$Chebyshev polinomları tanımlanmış, bu polinomlar için rekürans bağıntıları, aralarındaki ilişkiler ile toplam formülleri elde edilmiştir.

$q-$Chebyshev polinomlarının üreteç fonksiyonlarının elde edilmesi ve $q-$Chebyshev polinomlarının bir genelleştirmesi yapılması nedeniyle bu çalışma önem taşımaktadır. Ayrıca $x,\ s,\ q$ nun özel durumları için bazı polinomlar ve dizilerin edilmesi incomplete $q-$Chebyshev polinomlarının incomplete polinomlarında bir genelleştirmesi olduğunu göstermektedir.

KAYNAKLAR

1. Al-Salam, W. A. and Ismail, M. E. H. (1983). Orthogonal Polynomials Associated with the Rogers-Ramanujan Continued Fraction. ***Pacific Journal of Mathematics***, 104 , 269-283.

2. Andrews, G. E. (2004). Fibonacci numbers and the Rogers-Ramanujan identities. ***The Fibonacci Quarterly***, 42, 3-19.

3. Aral, A., Gupta, V. and Agarwal, R. (2013). *Applications of $q-$calculus in operator theory*, (First edition). New York: Springer, 1-11.

4. Atakihiyeva, M. and Atakishyev, N. (2013). On discrete $q-$extensions of Chebyshev polynominal. ***Communications in Mathematical Analysis***, 14, 1-12.

5. Carlitz, L. (1975). Fibonacci notes 4: $q-$Fibonacci polynomials. ***The Fibonacci Quarterly***, 13, 97-102.

6. İnternet: Cigler, J. A simple approach to $q-$Chebyshev polynomials. URL:http://www.webcitation.org/query?url=http%3A%2F%2Farxiv.org%2Fabs%2F1201.4703v2&date=2015-12-13. Son Erişim Tarihi: 13.12.2015.

7. İnternet: Cigler, J. $q-$Chebyshev polynomials. URL:http://www.webcitation.org/query?url=http%3A%2F%2Farxiv.org%2Fabs%2F1205.5383&date=2015-12-13. Son Erişim Tarihi: 13.12.2015.

8. İnternet: Cigler, J. Some remarks about $q-$Chebyshev polynomials and $q-$Catalan numbers and related results. URL: http://www.webcitation.org/query?url=http%3A%2F%2Farxiv.org%2Fabs%2F1312.2767&date=2015-12-13. Son Erişim Tarihi: 13.12.2015.

9. İnternet: Cigler, J. Some $q-$analogues of Fibonacci, Lucas and Chebyshev polynomials with nice moments. URL: http://www.webcitation.org/query?url=http%3A%2F%2Fhomepage.univie.ac.at%2Fjohann.cigler%2Fpreprints%2Fcheb-survey.pdf&date=2015-12-13. Son Erişim Tarihi: 13.12.2015.

10. Cigler, J. (2002). Einige $q-$analoga der Lucas-und Fibonacci-polynome. ***Sitzungsber, AW*** 211, 3-20.

11. Cigler, J. (2003). $q-$Fibonacci polynomials. ***The Fibonacci Quarterly***, 41, 31-40.

12. Cigler, J. (2003). A new class of $q-$Fibonacci polynomials. ***The Electronic Journal of Combinatorics***, 10.

13. Djordjević, G. B. (2004). Generating functions of the incomplete generalized Fibonacci and generalized Lucas numbers. ***The Fibonacci Quarterly***, 42(2), 106-113.

14. Djordjević, G. B. and Srivastava, H. M. (2005). Incomplete generalized Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers. ***Mathematical and Computer Modelling***, 42(9,10), 1049-1056.

15. Filipponi, P. (1996). Incomplete Fibonacci and Lucas numbers. ***Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo***, 45(2), 37-56.

16. Hoggatt Jr., V. E. (1969). *The Fibonacci and Lucas Numbers*, (First edition), Boston: Houghton Mifflin, 1-70.

17. Horadam, A. F. (1965). Basic properties of a certain generalized sequence of numbers. ***The Fibonacci Quarterly***, 3, 161–176.

18. Kac, V. and Cheung, P. (2001). *Quantum Calculus*, New York: Springer, 1-90.

19. Mason J. C. and Handscomb. D. C. (2003). *Chebyshev Polynomials*, (Second edition), Boca Raton: Chapman & Hall, 1-200.

20. Pintér, A. and Srivastava, H. M. (1999). Generating functions of the incomplete Fibonacci and Lucas numbers. ***Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo***, 48(2), 591-596.

21. Ramirez, J. L. (2015). Incomplete generalized Fibonacci and Lucas polynomials. ***Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics***, 44(2), 363-373.

22. Ramirez, J. L. (2013). Bi-periodic incomplete Fibonacci sequences. ***Annales Mathematicae et Informaticae***, 42, 83-92.

23. Tasci, D. and Cetin Firengiz, M. (2010). Incomplete Fibonacci and Lucas $p-$numbers. ***Mathematical and Computer Modelling***, 52(9,10), 1763-1770.

24. Tasci, D., Cetin Firengiz, M. and Tuglu, N. (2012). Incomplete bivariate Fibonacci and Lucas $p-$polynomials. ***Discrete Dynamics in Nature and Society***, 2012, Article ID 840345, 1-11.

25. Tuglu, N., Kocer, E.G. and Stakhov, A. (2011). Bivariate Fibonacci like $p-$polynomials. ***Applied Mathematics and Computation***, 217(24), 10239-10246.

26. Vajda, S. (1989). *Fibonacci and Lucas numbers, and the Golden Section: Theory and Applications*, (First edition), New York: Halsted Press, 10-100.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	:	ERCAN, Elif
Uyruğu	:	T.C.
Doğum tarihi ve yeri	:	31.08.1991, Erzurum
Medeni hali	:	Bekar
Telefon	:	0 (539) 275 42 83
e-mail	:	elifercan06@gmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Ankara Üniversitesi Matematik Böl.	2013
Lise	Elvankent Bilgi Anadolu Lisesi	2009

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Elif Ercan, Naim Tuğlu ve Miraç Çetin Firengiz, Incomplete q-Chebyshev Polinomları, 28. Ulusal Matematik Sempozyumu, Akdeniz Üniversitesi, 07-09 Eylül 2015.

Hobiler

Taekwando, kitap okumak, müzik dinlemek.



GAZİ GELECEKTİR...