
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

BAZI ÖZEL SAYI DİZİLERİ İLE İLİŞKİLİ CIRCULANT MATRİSLERİN ÖZELLİKLERİ

Rüçhan BICAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARALIK 2025

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Rüçhan BICAK

16/12/2025

BAZI ÖZEL SAYI DİZİLERİ İLE İLİŞKİLİ CIRCULANT MATRİSLERİN ÖZELLİKLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Rüçhan BICAK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Aralık 2025

ÖZET

Bu tezde Fibonacci ve Leonardo polinomlarının bir kısmı literatürde var olan tanım ve özelliklerine yer verildi. Fibonacci ve Leonardo polinomları arasındaki ilişki verildi. Sonrasında çalışmamızda temel teşkil eden matris normlarının, circulant matris, $r-$circulant matris ve geometrik circulant matrisin literatürde var olan tanımlarına yer verildi. Ardından Fibonacci polinomlarının ve gerekli birkaç üreteç fonksiyonunun birbiriyle Cauchy çarpımından faydalanarak çeşitli toplamlar elde edildi. Bu toplamlardan faydalanarak Fibonacci ve Leonardo polinomlarını içeren $r-$circulant matrisin Euclidean normu tam şekilde elde edildi ve bundan faydalanarak spektral normlarının alt ve üst sınırını elde edildi. Ayrıca circulant matrisin Euclidean normunu verdikten sonra circulant matrisin spektral normunun tanımından yola çıkılarak $x \geq 1$ için spektral normu sınırlara bağlı kalmaksızın elde edildi. Elde ettiğimiz sonuçların nümerik örneklerine ve elde ettiğimiz sonuçlar ile literatürde var olan sonuçlar tablolar ile karşılaştırıldı.

Bilim Kodu	:	20401
Anahtar Kelimeler	:	Matris normları, Fibonacci polinomları, Leonardo polinomları, circulant matrisler
Sayfa Adedi	:	61
Danışman	:	Prof. Dr. Naim TUĞLU

PROPERTIES OF CIRCULANT MATRICES ASSOCIATED WITH SOME SPECIAL NUMBER SEQUENCES
(M. Sc. Thesis)

Rüçhan BICAK

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
December 2025

ABSTRACT

This thesis presents some of the definitions and properties of Fibonacci and Leonardo polynomials found in the literature. The relationship between Fibonacci and Leonardo polynomials is described. Subsequently, the definitions of matrix norms, circulant matrices, r-circulant matrices, and geometric circulant matrices found in the literature, which form the basis of our work, are presented. Subsequently, various sums were obtained using the Cauchy product of several generating functions. Using these sums, the Euclidean norm of the $r-$circulant matrix containing Fibonacci and Leonardo polynomials was fully obtained, and the lower and upper bounds of the spectral norms were obtained using this. Furthermore, after giving the Euclidean norm of the circulant matrix, the spectral norm was obtained for $x \geq 1$ without any constraints based on the definition of the spectral norm of the circulant matrix. Numerical examples of the results obtained were compared with the results in the literature using tables.

Science Code	:	20401
Keywords	:	Matrix norms, Fibonacci polynomials, Leonardo polynomials, circulant matrices
Number of pages	:	61
Supervisor	:	Prof. Dr. Naim TUĞLU

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans sürecimde; her daim yanımda olan, engin bilgi ve tecrübeleriyle bana katkı sağlayan, meslek hayatımda rol model edindiğim danışmanım Prof. Dr. Naim TUĞLU' ya teşekkür ederim.

En büyük şükür vesilem olan, bugünlerimin hazırlayıcıları kıymetli annem ve babam başta olmak üzere aileme sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

ÇİZELGELERİN LİSTESİ viii

SİMGELER VE KISALTMALAR ix

1. GİRİŞ 1

2. ÖN BİLGİLER 7

2.1. Fibonacci ve Leonardo Polinomları 7

2.2. Fibonacci Polinomlarının Üreteç Fonksiyonları 9

2.3. Circulant Matrisler 11

2.4. Matris Normları 12

3. POLİNOMLARI İÇEREN BAZI TOPLAM FORMÜLLERİ 15

3.1. Temel Özellikler 15

4. CİRCULANT MATRİSLERİN NORMLARI 23

4.1. Circulant Matrislerin Normları 23

4.2. *r*–Circulant Matrislerin Normları 28

5. NÜMERİK ÖRNEKLER 39

6. SONUÇLARIN KARŞILAŞTIRILMASI 49

7. SONUÇ VE ÖNERİLER 55

KAYNAKLAR 57

ÖZGEÇMİŞ 61

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

Çizelge 5.1. $C(\mathcal{L}e_n(x))$ circulant matrisinin Euclid normları 39

Çizelge 5.2. Bazı $C(\mathcal{L}e_n(x))$ circulant matrislerinin Euclid normları 39

Çizelge 5.3. $x \geq 1$ için $C(\mathcal{L}e_n(x))$ circulant matrisinin spektral normları 40

Çizelge 5.4. Bazı $C(\mathcal{L}e_n(x))$ circulant matrislerinin spektral normları 40

Çizelge 5.5. $x \geq 1$ için $C(F_n(x))$ circulant matrisinin spektral normları 41

Çizelge 5.6. Bazı $C(F_n(x))$ circulant matrislerinin spektral normları 41

Çizelge 5.7. $r = \frac{1}{2},\ x < 0$ $C_r(\mathcal{L}e_n(x))$ $r-$circulant matrislerinin Euclid normları.... 42

Çizelge 5.8. $r = \frac{1}{2},\ x > 0$ $C_r(\mathcal{L}e_n(x))$ $r-$circulant matrislerinin Euclid normları.... 42

Çizelge 5.9. $r = 2,\ x < 0$ $C_r(\mathcal{L}e_n(x))$ $r-$circulant matrislerinin Euclid normları.... 43

Çizelge 5.10. $r = 2\ x > 0$ $C_r(\mathcal{L}e_n(x))$ $r-$circulant matrislerinin Euclid normları 43

Çizelge 5.11. $r = \frac{1}{2}$ $C_r(F_n(x))$ $r-$circulant matrislerinin Euclid normları 44

Çizelge 5.12. $r = 2$ için $C_r(F_n(x))$ $r-$circulant matrislerinin Euclid normları 44

Çizelge 5.13. $r = \frac{1}{2}, x > 0$ $C_r(\mathcal{L}e_n(x))$ $r-$circulant matrislerinin spektral normları... 45

Çizelge 5.14. $r = \frac{1}{2}, x < 0$ $C_r(\mathcal{L}e_n(x))$ $r-$circulant matrislerinin spektral normları... 45

Çizelge 5.15. $r = 3, x > 0$ $C_r(\mathcal{L}e_n(x))$ $r-$circulant matrislerinin spektral normları... 46

Çizelge 5.16. $r = 3, x < 0$ $C_r(\mathcal{L}e_n(x))$ $r-$circulant matrislerinin spektral normları .. 46

Çizelge 5.17. $r = \frac{1}{2}$, $C_r(F_n(x))$ $r-$circulant matrislerinin spektral normları..... 47

Çizelge 5.18. $r = 3$ için $C_r(F_n(x))$ $r-$circulant matrislerinin spektral normları 47

Çizelge 6.1. $\|C(F_n)\|_2$ için bulanan sınırların karşılaştırılması 49

Çizelge 6.2. $x < 1,\ x \neq 0$ $\|C(F_n(x))\|_2$ spektral normun karşılaştırılması 50

Çizelge 6.3. $r = 3,\ \|C_r(F_n)\|_2$ için bulanan sınırların karşılaştırılması 51

Çizelge 6.4. $r = \frac{1}{2},\ \|C_r(F_n)\|_2$ için bulanan sınırların karşılaştırılması 52

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\|\|A\|\|_2$	A matrisinin spektral normu
$\|\|A\|\|_E$	A matrisinin Euclidean (Frobenius) normu
$A \circ B$	A ve B matrislerin Hadamard çarpımı
$C(F_n)$	Fibonacci sayılarını içeren $n \times n$ circulant matris
$C(F_n(x))$	Fibonacci polinomlarını içeren $n \times n$ circulant matris
$C(\mathcal{L}e_n)$	Leonardo sayılarını içeren $n \times n$ circulant matris
$C(\mathcal{L}e_n(x))$	Leonardo polinomlarını içeren $n \times n$ circulant matris
C_r	r-circulant matris
$C_r(F_n)$	Fibonacci sayılarını içeren $n \times n$ r-circulant matris
$C_r(F_n(x))$	Fibonacci polinomlarını içeren $n \times n$ r-circulant matris
$C_r(\mathcal{L}e_n)$	Leonardo sayılarını içeren $n \times n$ r-circulant matris
$C_r(\mathcal{L}e_n(x))$	Leonardo polinomlarını içeren $n \times n$ r-circulant matris
C_r^*	Geometrik circulant matris
F_n	Fibonacci sayısı
$F_n(x)$	Fibonacci polinomu
$\mathcal{L}e_n$	Leonardo sayısı
$\mathcal{L}e_n(x)$	Leonardo polinomu

Kısaltmalar	**Açıklamalar**
o.ü.	Olmak üzere

1. GİRİŞ

Özel sayı dizileri matematikte ve gerçek hayatta karşımıza çıkmaktadır. Şüphesiz en popüler ve ilginç olanı Fibonacci sayılarıdır. Doğanın altın oranını içinde barındıran Fibonacci sayıları ünlü tavşan probleminden ortaya çıkmıştır. Başlangıç koşulu 0 ve 1 olan ikinci basamaktan indirgeme bağıntısına sahip olan bu sayı dizisi literatürde farklı sayı dizileri ve polinomlarının ortaya çıkışında ilham kaynağı olmuştur. Frontczak 2018 yılında [1] çalışmasında Fibonacci, Lucas, Tribonacci, Tribonacci-Lucas sayılarının üreteç fonksiyonlarının Cauchy çarpımından faydalanarak çeşitli toplamlar elde etmiştir. Fibonacci polinomlarını 1883 yılında [2] Catalan tanımlamıştır.

İlk defa Jansson 1966 yılında doktora tezinde Leonardo sayılarını düşünen kişi olarak öne çıkmaktadır. Lakin Singmaster Leonordo sayılarını 1970 yılındaki [3] çalışmasında bu doktora tezindeki bazı varsayımlarda yanlış bulup düzelterek Leonardo sayılarını tanımlayan ilk kişi ve çalışma olarak ön plana çıkmaktadır. Fonseca ve arkadaşları [4] çalışmalarında bunu ortaya koymuştur. Leonardo sayıları 1970'li yıllarda ortaya çıkmasına rağmen bu sayıların ilgi odağı olması Catarino ve Borges'in bu sayıların Binet formülü, üreteç fonksiyonu, Cassini, Catalan ve d'Ocegna özelliklerinin yanı sıra bu sayı dizisini içeren toplam formüllerinden bahseden [5] çalışmalarından sonra olmuştur. Alp ve Koçer [6] çalışmalarında Leonardo sayılarının Binet formülünü kullanarak bir takım yeni özellikler ve Fibonacci ve Lucas sayıları arasında yakın ilişkiler elde etmiştir. Leonardo sayılarının genelleştirilmiş halleri hakkında birçok çalışma yapılmıştır [7–13]. Prasad ve Kumari Leonardo polinomlarını 2024 yılında [14] çalışmalarında tanımlamış ve bu çalışmalarında bu polinomların indirgeme bağıntısını, çeşitli toplam formüllerini, üreteç fonksiyonlarını, Fibonacci, Lucas ve Chebyshev polinomları ile yakın ilişkiler elde etmiştir.

Toeplitz matrisinin özel hali olan circulant matrisin matris formu ilk defa 1979 yılında Davis tarafından tanımlanmıştır [15]. Circulant matrislerin normu hakkında birçok çalışma yapılmıştır. Bu konuda ilk defa 2005 yılında Solak [16] çalışmasında Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren circulant matrisin çeşitli normlarını hesaplamıştır.

Kocer 2007 yılında [17] çalışmasında modifiye Pell, Jocobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarını içeren circulant, negacyclic ve semicirculant matrislerin özelliklerini elde etmiştir.

Alptekin ve arkadaşları 2007 yılında [18] çalışmalarında Horadam sayılarını içeren circulant matrisin özdeğerini ve çeşitli normlarını semicirculant matrisin ise Euclidean normunu hesaplamışlardır.

Bahşi ve Solak 2010 yılında [19] aritmetik dizileri içeren circulant matrislerin özdeğerleri, determinantını, tersini, Euclidean ve spektral normunu hesaplamışlardır.

Yazlık ve Taşkara 2013 yılında [20] çalışmalarında $k-$Horadam sayılarını içeren circulant matrisin spektral normu için alt ve üst sınırlar elde etmiş ayrıca bu matrisin determinantı ve özdeğerleri için çeşitli formüller elde etmişlerdir.

Bahşi 2015 yılında [21] çalışmasında Tribonacci dizisi, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren circulant matrisin spektral normunu hesaplamıştır.

Solak ve Bahşi 2016 yılında [22] çalışmalarında kompleks Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren circulant matrislerin spektral normlarını hesaplamışlardır. Ayrıca kompleks Fibonacci sayılarındaki altın oranı vermişlerdir.

Solak ve Bahşi 2018 yılında [23] çalışmalarında circulant matrisin satırlarına Ducci dönüşümünü uygulayarak bu matrisin özdeğerlerini, determinantını, Euclidean ve spektral normu başta olmak üzere çeşitli normlarını hesaplamışlardır.

Solak ve arkadaşları 2018 yılında [24] çalışmalarında Fibonacci sayılarını içeren circulant matrisin satırlarına Ducci dönüşümü uygulamış ve bu matrisin özdeğerlerini, determinatını Euclidean ve spektral normu başta olmak üzere çeşitli normlarını hesaplamışlardır.

Baran ve Yetiş 2019 yılında [25] çalışmalarında Tetranacci dizisini içeren toplam formülleri ve çeşitli özellikler elde etmişlerdir. Tetranacci dizisini içeren circulant matrisin maksimum satır ve maksimum sütun normunu hesaplamışlardır.

Yılmaz ve arkadaşları 2025 yılında [26] Fibonacci polinomları içeren circulant matrisin determinatını, tersini, Euclidean normunu ve spektral normu için alt ve üst sınırı hesaplamışlardır.

Zamanla özel circulant matrisler inşaa edilmiştir. Cline 1974 yılında [27] $r-$circulant matrisi tanımlamıştır. Kızılateş ve Tuğlu 2016 yılında [28] çalışmalarında geometrik circulant matrisi tanımlamış ve genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ve Hiperharmonik sayılarını içeren geometrik circulant matrisin çeşitli normlarını hesaplamışlardır.

Shen ve Cen 2010 yılında [29] çalışmalarında k-Fibonacci ve $k-$Lucas sayılarını içeren $r-$circulant matrisin Euclidean normunun alt ve üst sınırını; spektral normunun alt ve üst sınırını hesaplamışlardır.

Shen ve Cen 2010 yılında [30] çalışmalarında Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren r-circulant matrisin Euclidean normunun alt ve üst sınırını; spektral normunun alt ve üst sınırını hesaplamışlardır.

Bahşi ve Solak 2014 yılında [31] çalışmalarında Hiper Fibonacci ve Hiper Lucas sayılarını içeren circulant matrisin spektral normunu ve Euclidean normu için alt ve üst sınırını; Hiper Fibonacci ve Hiper Lucas sayılarını içeren $r-$circulant matrisin Euclidean normunu ve spektral normu için alt ve üst sınırlarını hesaplamışlardır.

Tuğlu ve Kızılateş 2015 yılında [32] çalışmalarında hiperharmonik Fibonacci sayılarını içeren circulant matrisin spektral normunu ve hiperharmonik Fibonacci sayılarını içeren $r-$circulant matrisin Euclidean normunu ve spektral normu için alt ve üst sınırı hesaplamışlardır.

Bueno 2016 yılında [33] çalışmasında Fibonacci sayılarının ve geometrik dizilerinin oranından elde ettiği elemanları içeren sağ circulant matrisin özdeğerlerini, determinantını, tersini ve Euclidean normunu hesaplamıştır.

Sintunavarat 2016 yılında [34] çalışmasında r-circulant ve circulant matrisin spektral normunun üst sınırını incelemiştir.

Bahşi ve Solak 2018 yılında [35] çalışmasında Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren $g-$circulant matrisin determinantını, tersini ve spektral normunu hesaplamışlardır.

Kızılateş ve Tuğlu 2018 yılında [36] çalışmalarında Tribonacci sayılarını içeren geometrik ve simetrik geometrik circulant matrislerinin spektral normları için alt ve üst sınır elde etmişlerdir.

Shi 2018 yılında [37] çalışmasında $k-$Horadam sayılarını içeren geometrik ve $r-$circulant matrislerinin spektral normları için alt ve üst sınır elde etmiştir.

Radičić 2019 yılında [38] çalışmasında geometrik dizileri içeren $k-$circulant matrislerin özdeğerlerini, determianatını, tersini, Euclidean normunu ve spektral normu için alt ve üst sınırını hesaplamıştır.

Uygun 2022 yılında [39] çalışmasında genelleştirilmiş Jacobsthal and Jacobsthal Lucas sayıları içeren geometrik circulant matrisinin spektral normu için alt ve üst sınır elde etmiştir.

Kumari ve arkadaşları 2023 yılında [40] çalışmalarında $k-$Mersenne ve $k-$Mersenne-Lucas sayıları içeren $r-$circulant matrisin spektral normu için alt ve üst sınırlar elde etmiş ayrıca bu matrisin determinant ve özdeğerlerine yer vermişlerdir.

Arpacı ve Yılmaz 2024 yılında [41] çalışmalarında Leonardo sayılarını içeren geometrik circulant matrisin spektral normu için alt ve üst sınır elde etmişlerdir.

Radičić 2025 yılında [42] çalışmasında çift indisli Lucas sayılarını içeren $k-$circulant matrisin özdeğerini, Euclidean normunu ve spektral normu için alt ve üst sınırını hesaplamıştır.

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde literatür taraması, ikinci bölümde bir kısmı literatürde mevcut olan Fibonacci ve Leonardo polinomlarının tanım ve özelliklerine yer verilmiştir. Üçüncü bölümde gerekli birkaç üreteç fonksiyonlarının Cauchy çarpımından faydalanarak çeşitli toplamlar elde edilmiştir. Dördüncü bölümde Fibonacci ve

Leonardo polinomlarını içeren circulant, $r-$ circulant matrisin Euclidean normları sınırlara bağlı kalmaksızın elde edilmiş olup bundan faydalanarak spektral normları için alt ve üst sınırlar elde edilmiştir. Özel olarak $x = 1$ seçimi ile Fibonacci ve Leonardo sayılarını içeren circulant r- circulant matrisin normları elde edilmiştir. Beşinci bölümde elde etmiş olduğumuz sonuçların nümerik örneklerine yer verilmiştir. Altıncı bölümde elde etmiş olduğumuz sonuçlar ile literatürde var olan sonuçlar tablolar ile karşılaştırılmıştır. Yedinci bölümde ise sonuç ve öneriler kısmı yer almaktadır.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, Fibonacci ve Leonardo polinomlarının - sayılarının literatürde var olan tanımlarına, Fibonacci polinomlarının Binet formülüne, çalışmamızda ihtiyaç duyacağımız birkaç üreteç fonksiyonuna, circulant matris ve özel circulant matrislerin tanımlarına, matris normlarına, çeşitli norm tanımları ve aralarındaki ilişkilerine yer verildi.

2.1. Fibonacci ve Leonardo Polinomları

2.1.1. Tanım

Başlangıç koşulları $F_0(x) = 0$, $F_1(x) = 1$ olan ve $n \geq 2$ için

$$F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x) \tag{2.1}$$

şeklindeki indirgeme bağıntısını sağlayan polinom fonksiyonlara Fibonacci polinomları denir [2, 43].

2.1.2. Tanım

Başlangıç koşulları $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olan ve $n \geq 2$ için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{2.2}$$

şeklindeki indirgeme bağıntısını sağlayan sayı dizilerine Fibonacci sayıları denir [43].

Fibonacci polinomlarının indirgeme bağıntısının karakteristik denkleminin kökleri

$$\alpha = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}, \quad \beta = \frac{x - \sqrt{x^2+4}}{2}$$

olup bu polinomların Binet formülü

$$F_n(x) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{2.3}$$

şeklindedir. α ve β arasında

$$\alpha+\beta=x \tag{2.4}$$

$$\alpha-\beta=\sqrt{x^2+4} \tag{2.5}$$

$$\alpha\beta=-1 \tag{2.6}$$

$$\alpha^2+\beta^2=x^2+2 \tag{2.7}$$

ilişkileri mevcuttur [14].

2.1.3. Tanım

Başlangıç koşulları $\mathcal{L}e_0(x)=1$, $\mathcal{L}e_1(x)=2x-1$ olan ve $n\geq 2$ için

$$\mathcal{L}e_n(x)=x\mathcal{L}e_{n-1}(x)+\mathcal{L}e_{n-2}(x)+x \tag{2.8}$$

şeklindeki indirgeme bağıntısını sağlayan polinom fonksiyonlara Leonardo polinomları denir [14].

2.1.4. Tanım

Başlangıç koşulları $\mathcal{L}e_0=1$, $\mathcal{L}e_1=1$ olan ve $n\geq 2$ için

$$\mathcal{L}e_n=\mathcal{L}e_{n-1}+\mathcal{L}e_{n-2}+1 \tag{2.9}$$

şeklindeki indirgeme bağıntısını sağlayan sayı dizilerine Leonardo sayıları denir [3, 5].

2.1.5. Lemma

Leonardo polinomları ile Fibonacci polinomları arasında

$$\mathcal{L}e_n(x)=2F_{n+1}(x)-1 \tag{2.10}$$

ilişkisi mevcuttur [14].

2.2. Fibonacci Polinomlarının Üreteç Fonksiyonları

2.2.1. Teorem

Fibonacci polinomlarının üreteç fonksiyonları

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)t^n = \frac{t}{1-xt-t^2} \tag{2.11}$$

şeklindedir [44].

Eş. 2.11 de indis ötelemesi yapılırsa

$$m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1}(x)t^n = \frac{1}{1-xt-t^2} \tag{2.12}$$

elde edilir. Buradan

$$t = \frac{m(t)\left(1-t^2\right)-1}{xm(t)} \tag{2.13}$$

olarak yazılabilir.

2.2.2. Teorem

Fibonacci polinomları için

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^2(x)t^n = \frac{t(1-t)}{(1+t)\left((1-t)^2-x^2t\right)} \tag{2.14}$$

sağlanır.

İspat

Eş. 2.3, Eş. 2.5, Eş. 2.6 ve Eş. 2.7 kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^2(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)^2 t^n$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha^2 t\right)^n + \left(\beta^2 t\right)^n - 2\,(-t)^n \\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \left(\frac{1}{1-\alpha^2 t} + \frac{1}{1-\beta^2 t} - \frac{2}{1+t} \right) \\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \left(\frac{t\left(\alpha^2+\beta^2+2\right) - t^2(\alpha^2+\beta^2+2)}{1-t\left(\alpha^2+\beta^2-1\right) - t^2(\alpha^2+\beta^2-1)+t^3} \right) \\
&= \frac{t(1-t)}{1-t(x^2+1)-t^2(x^2+1)+t^3} \\
&= \frac{t(1-t)}{(1+t)\left((1-t)^2 - x^2 t\right)}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Eş. 2.14 de indis ötelemesi yapılırsa

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1}^2(x) t^n = \frac{(1-t)}{(1+t)\left((1-t)^2 - x^2 t\right)} \tag{2.15}$$

elde edilir.

$|t| < 1$ için

$$b(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n t^n = \frac{t}{(1-t)^2} \tag{2.16}$$

olup,

$$(1-t)^2 = \frac{t}{b(t)} \tag{2.17}$$

şeklinde yazılabilir.

2.3. Circulant Matrisler

2.3.1. Tanım

$n \times n$ tipinde bir circulant matris

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \dots & c_{n-4} & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n-1} & c_0 \end{pmatrix}_{n \times n} \tag{2.18}$$

şeklinde tanımlıdır. C circulant matrisi ilk satırındaki $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ elemanlarının sirküle olmasıyla elde edilir ve $C = Circ(c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$ şeklinde gösterilir [15].

Bir $n \times n$ tipinde circulant matrisin özdeğerleri, birimin n. kuvvetten kökleri w^i olmak üzere $t = 0, 1, 2, \dots, n-1$ için

$$\lambda_t = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \left(w^t\right)^i \tag{2.19}$$

şeklindedir [45].

2.3.2. Tanım

$r \in \mathbb{C}$ olmak üzere $n \times n$ tipinde bir $r-$circulant matris

$$C_r = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ rc_{n-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ rc_{n-2} & rc_{n-1} & c_0 & \dots & c_{n-4} & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ rc_1 & rc_2 & rc_3 & \dots & rc_{n-1} & c_0 \end{pmatrix}_{n \times n} \tag{2.20}$$

şeklinde tanımlıdır. $C_r = Circ_r(c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$ şeklinde gösterilir [27].

2.3.3. Tanım

$r \in \mathbb{C}$ olmak üzere $n \times n$ tipinde bir geometrik circulant matris

$$C_r^* = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ rc_{n-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ r^2c_{n-2} & rc_{n-1} & c_0 & \dots & c_{n-4} & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r^{n-1}c_1 & r^{n-2}c_2 & r^{n-3}c_3 & \dots & rc_{n-1} & c_0 \end{pmatrix}_{n\times n} \tag{2.21}$$

şeklinde tanımlıdır. $C_r^* = Circ_r^*(c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$ şeklinde gösterilir [28].

2.4. Matris Normları

2.4.1. Tanım

F bir cisim, $M_{mn}(F)$ de elemanları F cisminden alınan $m \times n$ matrislerin kümesi ve $A, B \in M_{mn}(F)$, $\alpha \in F$ olmak üzere

1. $\|A\| \geq 0$ ve $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
2. $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
4. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

şartlarını sağlayan

$\|.\| : M_{mn}(F) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

şeklindeki dönüşüme matris normu denir ve bir A matrisinin normu $\|A\|$ ile gösterilir [46].

2.4.2. Tanım

A $m \times n$ tipinde herhangi bir matris olsun. $A = (a_{ij})_{m\times n}$ matrisinin Euclidean (Frobenius)

normu

$$\|A\|_E = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.22}$$

şeklinde tanımlıdır [47].

2.4.3. Tanım

A $m \times n$ tipinde herhangi bir matris olsun. $A = (a_{ij})_{m \times n}$ matrisinin spektral normu

$$\|A\|_2 = \left(\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A^* A) \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.23}$$

şeklinde tanımlıdır [47].

Euclidean norm ile spektral norm arasında

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_E \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_E \tag{2.24}$$

ve

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_E \leq \sqrt{n} \|A\|_2 \tag{2.25}$$

eşitsizlikleri mevcuttur [47].

2.4.4. Tanım

A $m \times n$ tipinde herhangi bir matris olsun. $A = (a_{ij})_{m \times n}$ matrisinin maksimum satır uzunluk normu ile maksimum sütun uzunluk normu sırasıyla

$$r_1(A) = \max_i \left(\sum_j |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad c_1(A) = \max_j \left(\sum_i |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.26}$$

şeklinde tanımlıdır [48].

2.4.5. Tanım

$A = (a_{ij})_{m\times n}$ ve $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ iki matris olmak üzere, bu matrislerin Hadamard çarpımı $A \circ B$ ile gösterilir ve $A\circ B = \left(a_{ij}b_{ij}\right)_{m\times n}$ olarak tanımlanır [46].

A ve B $m \times n$ tipinde herhangi iki matris olsun.

$$\|A \circ B\|_2 \leq r_1(A)c_1(B) \tag{2.27}$$

eşitsizliği mevcuttur [49].

3. POLİNOMLARI İÇEREN BAZI TOPLAM FORMÜLLERİ

Bu kısımda, ilerideki aşamalarda hesaplanacak olan Euclidean ve spektral norm hesabı için Fibonacci polinomu ve gerekli birkaç üreteç fonksiyonunun Cauchy çarpımından faydalanarak çeşitli toplamlar elde edilmiştir.

3.1. Temel Özellikler

3.1.1. Teorem

Fibonacci polinomları için

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_{k+1}(x) = \frac{F_{n+1}(x) + F_n(x) - 1}{x} \tag{3.1}$$

sağlanır [50].

3.1.2. Teorem

Fibonacci polinomları için

$$\sum_{k=1}^{n} F_k^2(x) = \frac{F_{n+1}(x)F_n(x)}{x} \tag{3.2}$$

sağlanır [30].

3.1.3. Teorem

Leonardo polinomları için

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}_{e_k}(x) = \frac{\mathcal{L}_{e_n}(x) + \mathcal{L}_{e_{n-1}}(x)}{x} - n \tag{3.3}$$

sağlanır [8].

3.1.4. Teorem

Leonardo sayıları için

$$\sum_{k=0}^{n} \mathcal{L}e_k = \mathcal{L}e_{n+2} - (n+2) \tag{3.4}$$

sağlanır [5].

3.1.5. Teorem

Leonardo polinomları için

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}e_k^2(x) = \frac{4\left(F_{n+1}(x)-1\right)\left(F_n(x)-1\right)}{x} + n \tag{3.5}$$

sağlanır [14].

3.1.6. Teorem

Fibonacci polinomları için

$$\sum_{k=0}^{n-1} (n-k) F_k^2(x) = \frac{F_n^2(x) - n + 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}{x^2} \tag{3.6}$$

sağlanır.

İspat

$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^2(x) t^n = \frac{t(1-t)}{(1+t)\left((1-t)^2 - tx^2\right)}$ ve $b(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n t^n$ olsun. Eş. 2.17 ile verilen $(1-t)^2 = \frac{t}{b(t)}$ özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{t(1-t)}{(1+t)\left((1-t)^2 - tx^2\right)} \\ &= \frac{t(1-t)}{(1+t)\left(\frac{t}{b(t)} - tx^2\right)} \\ &= \frac{t}{(1-t^2)\left(1 - x^2 b(t)\right)} \end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$h(t) = \frac{t}{(1-t^2)\,(1-x^2 b(t))}$$

dir. Gerekli düzenlemeler yapıldığı taktirde

$$x^2 b(t) h(t) = h(t) - \frac{t}{1-t^2} \tag{3.7}$$

olup, Eş. 3.7 deki eşitliğin sol tarafı Cauchy çarpımından

$$\begin{aligned} x^2 b(t) h(t) =& x^2 \sum_{n=0}^{\infty} n t^n \sum_{n=0}^{\infty} F_n^2(x) t^n \\ =& x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (n-k) F_k^2(x) \right) t^n \end{aligned} \tag{3.8}$$

elde edilir. Eş. 3.7 deki eşitliğin sağ tarafı

$$\begin{aligned} h(t) - \frac{t}{1-t^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n^2(x) t^n - \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(F_n^2(x) - n + 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) t^n \end{aligned} \tag{3.9}$$

olup, Eş. 3.8 ve Eş. 3.9 Eş. 3.7 de yerine yazılıp, polinomların eşitliğinden

$$\sum_{k=0}^{n-1} (n-k) F_k^2(x) = \frac{F_n^2(x) - \left(n - 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)}{x^2}$$

sonucuna varılır.

3.1.7. Sonuç

Fibonacci sayıları için

$$\sum_{k=0}^{n-1} (n-k) F_k^2 = F_n^2 - \left(n - 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) \tag{3.10}$$

sağlanır.

3.1.8. Teorem

Fibonacci polinomları için

$$\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)F_{k+1}^2(x)=\frac{F_{n+1}^2(x)-(n+1)+2\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}{x^2} \tag{3.11}$$

sağlanır.

İspat

$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}F_{n+1}^2(x)t^n=\frac{(1-t)}{(1+t)\left((1-t)^2-tx^2\right)}$, $b(t)=\sum_{n=0}^{\infty}nt^n$ olsun. Eş. 2.17 ile verilen $(1-t)^2=\frac{t}{b(t)}$ özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}f(t)=&\frac{(1-t)}{(1+t)\left((1-t)^2-tx^2\right)}\\=&\frac{1-t}{(1+t)\left(\left(\frac{t}{b(t)}-tx^2\right)\right)}\\=&\frac{(1-t)\,b(t)}{(1+t)t-(1+t)tx^2b(t)}\\=&\frac{1}{(1-t^2)\,(1-x^2b(t))}\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığı taktirde

$$x^2b(t)f(t)=f(t)-\frac{1}{1-t^2} \tag{3.12}$$

elde edilir. Eş. 3.12 deki eşitliğin sol tarafını hesaplayabilmek için Cauchy çarpımı kullanılırsa

$$x^2b(t)f(t)=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(n-k)\,F_{k+1}^2(x)\right)t^n \tag{3.13}$$

elde edilir, ayrıca Eş. 3.12 deki eşitliğin sağ tarafı

$$f(t)-\frac{1}{1-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(F_{n+1}^2(x)-(n+1)+2\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\right)t^n \tag{3.14}$$

şeklinde elde edilir. Eş. 3.13 ve Eş. 3.14 Eş. 3.12 de yerine yazılırsa

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (n-k) F_{k+1}^2(x) \right) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(F_{n+1}^2(x) - (n+1) + 2 \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \right) t^n$$

elde edilir. Polinomların eşitliğinden ve gerekli düzenlemeler yapıldığı taktirde

$$\sum_{k=0}^{n-1} (n-k) F_{k+1}^2(x) = \frac{F_{n+1}^2(x) - (n+1) + 2 \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}{x^2}$$

sonucuna varılır.

3.1.9. Teorem

Fibonacci polinomları için

$$\sum_{k=0}^{n} (n-k) F_{k+1}(x) = \frac{2F_{n+2}(x) + (2-x) F_{n+1}(x) - x(n+1) - 2}{x^2} \tag{3.15}$$

sağlanır.

İspat

$m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1}(x) t^n$, $b(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n t^n = \frac{t}{(1-t)^2}$ olsun. Eş. 2.13 ile verilen $t = \frac{(1-t^2)m(t)-1}{xm(t)}$ özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} b(t) &= \frac{t}{(1-t)^2} \\ &= \frac{\frac{(1-t^2)m(t)-1}{xm(t)}}{(1-t)^2} \\ &= \frac{(1-t^2)m(t)-1}{(1-t)^2 xm(t)} \end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$b(t) = \frac{(1-t^2)m(t)-1}{(1-t)^2 xm(t)}$$

dir. Gerekli düzenlemeler yapıldığı taktirde

$$xb(t)m(t) = \frac{1+t}{1-t}m(t) - \frac{1}{(1-t)^2} \tag{3.16}$$

elde edilir. Eş. 3.16 deki eşitliğin sol tarafını hesaplayabilmek için Cauchy çarpımı kullanılırsa

$$xb(t)m(t) = x\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(n-k)F_{k+1}(x)\right)t^n \tag{3.17}$$

elde edilir, ayrıca Eş. 3.16 deki eşitliğin sol tarafı

$$\frac{1+t}{1-t}m(t) - \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(2\sum_{k=0}^{n}F_{k+1}(x) - F_{n+1}(x) - (n+1)\right)t^n \tag{3.18}$$

şeklinde elde edilir. Eş. 3.17 ve Eş. 3.18 Eş. 3.16 de yerine yazılırsa

$$x\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(n-k)F_{k+1}(x)\right)t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(2\sum_{k=0}^{n}F_{k+1}(x) - F_{n+1}(x) - (n+1)\right)t^n$$

elde edilir. Polinomların eşitliğinden ve gerekli düzenlemelerden

$$\sum_{k=0}^{n}(n-k)F_{k+1}(x) = \frac{2F_{n+2}(x) + (2-x)F_{n+1}(x) - x(n+1) - 2}{x^2}$$

sonucuna varılır.

3.1.10. Sonuç

Leonardo polinomları için

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\,\mathcal{L}_k^2(x) =& \frac{4F_{n+1}^2(x) - 8F_{n+2}(x) + (4x-8)F_{n+1}(x)}{x^2} \\ &+ \frac{(n+1)\left(nx^2+8x-8\right) + 16\left\lfloor\frac{n+3}{2}\right\rfloor}{2x^2}\end{aligned} \tag{3.19}$$

sağlanır.

İspat

Eş. 3.11 ve Eş. 3.15 ile verilen özellikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\,\mathcal{L}_{e_k}^2(x) &= \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\left(4F_{k+1}^2(x)-4F_{k+1}(x)+1\right)\\ &=4\frac{F_{n+1}^2(x)-(n+1)+2\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}{x^2}\\ &\quad-4\frac{2F_{n+2}(x)+(2-x)\,F_{n+1}(x)-x(n+1)-2}{x^2}+\frac{n\,(n+1)}{2}\\ &=\frac{4F_{n+1}^2(x)-8F_{n+2}(x)+(4x-8)F_{n+1}(x)}{x^2}\\ &\quad+\frac{(n+1)\left(nx^2+8x-8\right)+16\left\lfloor\frac{n+3}{2}\right\rfloor}{2x^2}\end{aligned}$$

elde edilir.

3.1.11. Sonuç

Leonardo sayıları için

$$\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\,\mathcal{L}_{e_k}^2 = 4F_{n+1}^2-4F_{n+4}+8\left\lfloor\frac{n+3}{2}\right\rfloor+\frac{n(n+1)}{2} \tag{3.20}$$

sağlanır.

4. CİRCULANT MATRİSLERİN NORMLARI

Bu bölümde Fibonacci ve Loenardo polinom - sayılarını içeren bazı circulant matrislerin Euclidean ve spektral normuna yer verildi.

4.1. Circulant Matrislerin Normları

Leonardo polinomlarını içeren $n \times n$ tipinde bir circulant matris

$$C(\mathcal{L}e_n(x)) = Circ(\mathcal{L}e_0(x), \mathcal{L}e_1(x), \mathcal{L}e_2(x), \ldots, \mathcal{L}e_{n-1}(x))$$
$$= \begin{pmatrix} \mathcal{L}e_0(x) & \mathcal{L}e_1(x) & \cdots & \mathcal{L}e_{n-2}(x) & \mathcal{L}e_{n-1}(x) \\ \mathcal{L}e_{n-1}(x) & \mathcal{L}e_0(x) & \cdots & \mathcal{L}e_{n-3}(x) & \mathcal{L}e_{n-2}(x) \\ \mathcal{L}e_{n-2}(x) & \mathcal{L}e_{n-1}(x) & \cdots & \mathcal{L}e_{n-4}(x) & \mathcal{L}e_{n-3}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{L}e_1(x) & \mathcal{L}e_2(x) & \cdots & \mathcal{L}e_{n-1}(x) & \mathcal{L}e_0(x) \end{pmatrix}_{n\times n} \tag{4.1}$$

Leonardo sayılarını içeren $n \times n$ tipinde bir circulant matris

$$C(\mathcal{L}e_n) = Circ(\mathcal{L}e_0, \mathcal{L}e_1, \mathcal{L}e_2, \ldots, \mathcal{L}e_{n-1})$$
$$= \begin{pmatrix} \mathcal{L}e_0 & \mathcal{L}e_1 & \cdots & \mathcal{L}e_{n-2} & \mathcal{L}e_{n-1} \\ \mathcal{L}e_{n-1} & \mathcal{L}e_0 & \cdots & \mathcal{L}e_{n-3} & \mathcal{L}e_{n-2} \\ \mathcal{L}e_{n-2} & \mathcal{L}e_{n-1} & \cdots & \mathcal{L}e_{n-4} & \mathcal{L}e_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{L}e_1 & \mathcal{L}e_2 & \cdots & \mathcal{L}e_{n-1} & \mathcal{L}e_0 \end{pmatrix}_{n\times n} \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlıdır.

4.1.1. Teorem

$C(\mathcal{L}e_n(x)) = Circ(\mathcal{L}e_0(x), \mathcal{L}e_1(x), \mathcal{L}e_2(x), \ldots, \mathcal{L}e_{n-1}(x))$ Leonardo polinomlarını içeren $n \times n$ tipinde bir circulant matris olsun. $C(\mathcal{L}e_n(x))$ matrisinin Euclidean normu için

$$\|C(\mathcal{L}e_n(x))\|_E = \sqrt{\frac{4n}{x}(F_{n+1}(x)-1)(F_n(x)-1)+n^2} \tag{4.3}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 2.22 ve Eş. 3.5 den

$$\|C(\mathcal{L}e_n(x))\|_E = \sqrt{n\sum_{s=0}^{n-1}\mathcal{L}e_s^2(x)} = \sqrt{n\frac{4(F_{n+1}(x)-1)(F_n(x)-1)+nx}{x}}$$

$C(\mathcal{L}e_n(x))$ matrisinin Euclidean normu elde edilir.

4.1.2. Sonuç

$C(\mathcal{L}e_n) = Circ(\mathcal{L}e_0, \mathcal{L}e_1, \mathcal{L}e_2, \ldots, \mathcal{L}e_{n-1})$ Leonardo sayılarını içeren $n \times n$ tipinde bir circulant matris olsun. $C(\mathcal{L}e_n)$ matrisinin Euclidean normu

$$\|C(\mathcal{L}e_n)\|_E = \sqrt{4n(F_{n+1}F_n - F_{n+2} + 1) + n^2} \tag{4.4}$$

dir.

4.1.3. Teorem

$C(\mathcal{L}e_n(x))$ Leonardo polinomlarını içeren $n \times n$ tipinde circulant matris olsun. $C(\mathcal{L}e_n(x))$ matrisinin spektral normu $x \geq 1$ için

$$\|C(\mathcal{L}e_n(x))\|_2 = \frac{\mathcal{L}e_n(x) + \mathcal{L}e_{n-1}(x)}{x} - n, \tag{4.5}$$

dir.

İspat

$C(\mathcal{L}e_n(x))$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_t = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1})$ olsun. Eş.2.19 den

$$\lambda_t(C(\mathcal{L}e_n(x))) = \sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{L}e_i(x)\left(w^t\right)^i$$

dir. $x \geq 1$ ve $t = 0$ için

$$\lambda_0 \left(C \left(\mathcal{L}e_n \left(x \right) \right) \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{L}e_i \left(x \right) > 0$$

olup Eş. 3.3 den

$$\lambda_0 \left(C \left(\mathcal{L}e_n \left(x \right) \right) \right) = \frac{1}{x} \left(\mathcal{L}e_n(x) + \mathcal{L}e_{n-1}(x) \right) - n \tag{4.6}$$

dir. $x \geq 1$ ve $1 \leq t \leq n-1$ için

$$|\lambda_t| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{L}e_i \left(x \right) \left(w^t \right)^i \right| \leq \left| \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{L}e_i \left(x \right) \right| \left| \left(w^t \right)^i \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{L}e_i \left(x \right) \tag{4.7}$$

dir. Eş. 2.23 den

$$\left\| C \left(\mathcal{L}e_n \left(x \right) \right) \right\|_2 = \left(\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \left(C \left(\mathcal{L}e_n \right)^* C \left(\mathcal{L}e_n \right) \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

olup, $C \left(\mathcal{L}e_n \left(x \right) \right)$ normal matris olduğundan ve spektral norm tanımından

$$\left\| C \left(\mathcal{L}e_n \left(x \right) \right) \right\|_2 = \max_{0 \leq t \leq n-1} |\lambda_t| = \max(|\lambda_0| , \max_{1 \leq t \leq n-1} |\lambda_t|)$$

dir. Eş. 4.6 ve Eş. 4.7 den

$$\left\| C \left(\mathcal{L}e_n \left(x \right) \right) \right\|_2 = \frac{1}{x} \left(\mathcal{L}e_n(x) + \mathcal{L}e_{n-1}(x) \right) - n$$

elde edilir.

4.1.4. Sonuç

$C \left(\mathcal{L}e_n \right)$ Leonardo sayılarını içeren $n \times n$ tipinde circulant matris olsun. $C \left(\mathcal{L}e_n \right)$ matrisinin spektral normu

$$\left\| C \left(\mathcal{L}e_n \right) \right\|_2 = \mathcal{L}e_{n+1} - n - 1 \tag{4.8}$$

şeklindedir.

Fibonacci polinomlarını içeren $n \times n$ tipinde bir circulant matris

$$C(F_n(x)) = Circ(F_0(x), F_1(x), F_2(x), \ldots, F_{n-1}(x))$$
$$= \begin{pmatrix} F_0(x) & F_1(x) & \cdots & F_{n-2}(x) & F_{n-1}(x) \\ F_{n-1}(x) & F_0(x) & \cdots & F_{n-3}(x) & F_{n-2}(x) \\ F_{n-2}(x) & F_{n-1}(x) & \cdots & F_{n-4}(x) & F_{n-3}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F_1(x) & F_2(x) & \cdots & F_{n-1}(x) & F_0(x) \end{pmatrix}_{n \times n} \tag{4.9}$$

Fibonacci sayılarını içeren $n \times n$ tipinde bir circulant matris

$$C(F_n) = Circ(F_0, F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})$$
$$= \begin{pmatrix} F_0 & F_1 & \cdots & F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_0 & \cdots & F_{n-3} & F_{n-2} \\ F_{n-2} & F_{n-1} & \cdots & F_{n-4} & F_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F_1 & F_2 & \cdots & F_{n-1} & F_0 \end{pmatrix}_{n \times n} \tag{4.10}$$

şeklinde tanımlıdır [16], [26].

4.1.5. Teorem

$C(F_n(x)) = Circ(F_0(x), F_1(x), F_2(x), \ldots, F_{n-1}(x))$ Fibonacci polinomlarını içeren $n \times n$ tipinde bir circulant matris olsun. $C(F_n(x))$ matrisinin Euclidean normu

$$\|C(F_n(x))\|_E = \sqrt{\frac{nF_n(x)F_{n-1}(x)}{x}} \tag{4.11}$$

dir [26].

4.1.6. Sonuç

$C(F_n) = Circ(F_0, F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})$ Fibonacci sayılarını içeren $n \times n$ tipinde bir circulant

matris olsun. $C(F_n)$ matrisinin Euclidean normu

$$\|C(F_n)\|_E = \sqrt{nF_nF_{n-1}} \tag{4.12}$$

dir [16].

4.1.7. Teorem

$C(F_n(x))$ Fibonacci polinomlarını içeren $n \times n$ tipinde circulant matris olsun. $C(F_n(x))$ matrisinin spektral normu $x \geq 1$ için

$$\|C(F_n(x))\|_2 = \frac{F_n(x) + F_{n-1}(x) - 1}{x} \tag{4.13}$$

dir.

İspat

$C(F_n(x))$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_t = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1})$ olsun. Eş.2.19 den

$$\lambda_t(C(F_n(x))) = \sum_{i=0}^{n-1} F_i(x) \left(w^t\right)^i$$

dir. $x \geq 1$ ve $t = 0$ için

$$\lambda_0(C(F_n(x))) = \sum_{i=0}^{n-1} F_i(x)$$

olup Eş. 3.4 den

$$\lambda_0(C(F_n(x))) = \frac{F_n(x) + F_{n-1}(x) - 1}{x} \tag{4.14}$$

dir. $1 \leq t \leq n-1$ için

$$|\lambda_t| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} F_i(x) \left(w^t\right)^i\right| \leq \left|\sum_{i=0}^{n-1} F_i(x)\right| \left|\left(w^t\right)^i\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} F_i(x) \tag{4.15}$$

dir. Eş. 2.23 den

$$\|C(F_n(x))\|_2 = \left(\max_{1\leq i\leq n} \lambda_i (C(F_n(x))^* C(F_n(x))) \right)^{\frac{1}{2}}$$

olup $C(\mathcal{L}e_n)$ matrisi normal matris olduğundan ve spektral norm tanımından

$$\|C(F_n(x))\|_2 = \max_{0\leq t\leq n-1} |\lambda_t| = \max(|\lambda_0|, \max_{1\leq t\leq n-1} |\lambda_t|)$$

dir. Eş. 4.14 ve Eş. 4.15 den

$$\|C(F_n(x))\|_2 = \frac{F_n(x) + F_{n-1}(x) - 1}{x}$$

elde edilir.

4.1.8. Sonuç

$C(F_n)$ Fibonacci sayılarını içeren $n \times n$ tipinde bir circulant matris olsun. $C(F_n)$ matrisinin spektral normu

$$\|C(F_n)\|_2 = F_{n+1} - 1 \tag{4.16}$$

dir.

4.2. *r*–Circulant Matrislerin Normları

Leonardo polinomlarını içeren $n \times n$ tipinde bir $r-$circulant matris

$$\begin{aligned} C_r(\mathcal{L}e_n(x)) =& Circ_r(\mathcal{L}e_0(x), \mathcal{L}e_1(x), \mathcal{L}e_2(x), \ldots, \mathcal{L}e_{n-1}(x)) \\ =& \begin{pmatrix} \mathcal{L}e_0(x) & \mathcal{L}e_1(x) & \cdots & \mathcal{L}e_{n-2}(x) & \mathcal{L}e_{n-1}(x) \\ r\mathcal{L}e_{n-1}(x) & \mathcal{L}e_0(x) & \cdots & \mathcal{L}e_{n-3}(x) & \mathcal{L}e_{n-2}(x) \\ r\mathcal{L}e_{n-2}(x) & r\mathcal{L}e_{n-1}(x) & \cdots & \mathcal{L}e_{n-4}(x) & \mathcal{L}e_{n-3}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r\mathcal{L}e_1(x) & r\mathcal{L}e_2(x) & \cdots & r\mathcal{L}e_{n-1}(x) & \mathcal{L}e_0(x) \end{pmatrix}_{n\times n} \end{aligned} \tag{4.17}$$

Leonardo sayılarını içeren $n \times n$ tipinde bir $r-$circulant matris

$$C_r(\mathcal{L}e_n) = Circ_r(\mathcal{L}e_0, \mathcal{L}e_1, \mathcal{L}e_2, \ldots, \mathcal{L}e_{n-1})$$
$$= \begin{pmatrix} \mathcal{L}e_0 & \mathcal{L}e_1 & \cdots & \mathcal{L}e_{n-2} & \mathcal{L}e_{n-1} \\ r\mathcal{L}e_{n-1} & \mathcal{L}e_0 & \cdots & \mathcal{L}e_{n-3} & \mathcal{L}e_{n-2} \\ r\mathcal{L}e_{n-2} & r\mathcal{L}e_{n-1} & \cdots & \mathcal{L}e_{n-4} & \mathcal{L}e_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r\mathcal{L}e_1 & r\mathcal{L}e_2 & \cdots & r\mathcal{L}e_{n-1} & \mathcal{L}e_0 \end{pmatrix}_{n\times n} \tag{4.18}$$

şeklinde tanımlıdır.

4.2.1. Teorem

$C_r(\mathcal{L}e_n(x)) = Circ_r(\mathcal{L}e_0(x), \mathcal{L}e_1(x), \mathcal{L}e_2(x), \ldots, \mathcal{L}e_{n-1}(x))$ Leonardo polinomlarını içeren $n \times n$ tipinde bir $r-$circulant matris olsun. $C_r(\mathcal{L}e_n(x))$ matrisinin Euclidean normu

$$\|C_r(\mathcal{L}e_n(x))\|_E^2 = \frac{4-4|r|^2}{x^2}\left(F_{n+1}^2(x) - 2F_{n+2}(x) + (x-2)F_{n+1}(x) + (n+1)(x-1) + 2\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor\right)$$
$$+ \frac{4|r|^2 n}{x}(F_{n+1}(x)-1)(F_n(x)-1) + \frac{n}{2}\left(n\left(1+|r|^2\right) + \left(1-|r|^2\right)\right) \tag{4.19}$$

dir.

İspat

Eş. 3.5 ve Eş. 3.19 ile verilen özellikler kullanılanarak

$$\|C_r(\mathcal{L}e_n(x))\|_E^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\mathcal{L}e_k^2(x) + |r|^2\sum_{k=0}^{n-1}k\mathcal{L}e_k^2(x)$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\mathcal{L}e_k^2(x) + |r|^2\left(n\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{L}e_k^2(x) - \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\mathcal{L}e_k^2(x)\right)$$
$$= \left(1-|r|^2\right)\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\mathcal{L}e_k^2(x) + |r|^2 n\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{L}e_k^2(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(1-|r|^2\right) \frac{8F_{n+1}^2(x) - 16F_{n+2}(x) - (16-8x)F_{n+1}(x) + (n+1)\left(nx^2+8x-8\right)}{2x^2} \\
&\quad + \frac{8\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor}{x^2} + |r|^2 \frac{4n\left(F_{n+1}(x)F_n(x) - F_{n+1}(x) - F_n(x) + 1\right) + n^2x}{x} \\
&= \frac{4-4|r|^2}{x^2}\left(F_{n+1}^2(x) - 2F_{n+2}(x) + (x-2)F_{n+1}(x) + (n+1)(x-1) + 2\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor\right) \\
&\quad + \frac{4|r|^2 n}{x}\left(F_{n+1}(x)-1\right)\left(F_n(x)-1\right) + \frac{n}{2}\left(n\left(1+|r|^2\right) + \left(1-|r|^2\right)\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

4.2.2. Sonuç

$C_r(\mathcal{L}e_n) = Circ_r(\mathcal{L}e_0, \mathcal{L}e_1, \mathcal{L}e_2, \ldots, \mathcal{L}e_{n-1})$ Leonardo sayılarını içeren $n \times n$ tipinde bir $r-$circulant matris olsun. $C_r(\mathcal{L}e_n)$ matrisinin Euclidean normu

$$
\begin{aligned}
\|C_r(\mathcal{L}e_n)\|_E^2 &= \left(4-4|r|^2\right)\left(F_{n+1}^2 - F_{n+4} + 2\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor\right) + 4|r|^2 n\left(F_{n+1}-1\right)\left(F_n-1\right) \\
&\quad + \frac{n}{2}\left(n\left(1+|r|^2\right) + \left(1-|r|^2\right)\right) \qquad (4.20)
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

Eş. 4.19 ifadesinde $r=1$ seçilirse Eş. 4.3 de verilen $C(\mathcal{L}e_n(x))$ Leonardo polinomlarını içeren circulant matrisinin Euclidean normu

$$
\|C(\mathcal{L}e_n(x))\|_E = \sqrt{\frac{4n}{x}\left(F_{n+1}(x)-1\right)\left(F_n(x)-1\right) + n^2}
$$

elde edilir.

Eş. 4.20 ifadesinde $r=1$ seçilirse Eş. 4.4 de verilen $C(\mathcal{L}e_n)$ Leonardo sayılarını içeren circulant matrisinin Euclidean normu

$$
\|C(\mathcal{L}e_n)\|_E = \sqrt{4n\left(F_{n+1}-1\right)\left(F_n-1\right) + n^2}
$$

elde edilir.

4.2.3. Teorem

$C_r(\mathcal{L}e_n(x)) = Circ_r(\mathcal{L}e_0(x), \mathcal{L}e_1(x), \mathcal{L}e_2(x), \ldots, \mathcal{L}e_{n-1}(x))$ Leonardo polinomlarını içeren $n \times n$ tipinde bir $r-$circulant matris olsun. $C_r(\mathcal{L}e_n(x))$ matrisinin spektral normunun alt sınırı

$$\left(\begin{array}{c} \frac{4-4|r|^2}{nx^2}\left(F_{n+1}^2(x) - 2F_{n+2}(x) + (x-2)F_{n+1}(x) + (n+1)(x-1) + 2\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor\right) \\ + \frac{4|r|^2}{x}(F_{n+1}(x)-1)(F_n(x)-1) + \frac{1}{2}\left(n\left(1+|r|^2\right) + \left(1-|r|^2\right)\right) \end{array} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.21}$$

ve üst sınırı $|r| > 1$ için

$$\|C_r(\mathcal{L}e_n(x))\|_2 \leq \sqrt{\frac{4(F_{n+1}(x)-1)(F_n(x)-1)+nx}{x}((n-1)r^2+1)} \tag{4.22}$$

$|r| < 1$ için

$$\|C_r(\mathcal{L}e_n(x))\|_2 \leq \sqrt{\frac{4n(F_{n+1}(x)-1)(F_n(x)-1)+n^2x}{x}} \tag{4.23}$$

dir.

İspat

Eş. 4.19 den

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}}\|C_r(\mathcal{L}e_n(x))\|_E^2 = & \frac{4-4|r|^2}{nx^2}\left(F_{n+1}^2(x) - 2F_{n+2}(x) + (x-2)F_{n+1}(x) + (n+1)(x-1) + 2\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor\right) \\ & + \frac{4|r|^2}{x}(F_{n+1}(x)-1)(F_n(x)-1) + \frac{1}{2}\left(n\left(1+|r|^2\right) + \left(1-|r|^2\right)\right) \end{aligned}$$

dir. Eş. 2.24 den $|r| > 1$ ve $|r| < 1$ için spektral norm için alt sınır

$$\left(\begin{array}{c} \frac{4-4|r|^2}{nx^2}\left(F_{n+1}^2(x) - 2F_{n+2}(x) + (x-2)F_{n+1}(x) + (n+1)(x-1) + 2\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor\right) \\ + \frac{4|r|^2}{x}(F_{n+1}(x)-1)(F_n(x)-1) + \frac{1}{2}\left(n\left(1+|r|^2\right) + \left(1-|r|^2\right)\right) \end{array} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|C_r(\mathcal{L}e_n(x))\|_2$$

elde edilir. Diğer yandan $|r|>1$ $C_r\left(\mathcal{L}e_n\left(x\right)\right)=A\circ B$ olacak şekilde

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ r & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ r & r & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r & r & r & \cdots & r & 1 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} \mathcal{L}e_0(x) & \mathcal{L}e_1(x) & \cdots & \mathcal{L}e_{n-2}(x) & \mathcal{L}e_{n-1}(x) \\ \mathcal{L}e_{n-1}(x) & \mathcal{L}e_0(x) & \cdots & \mathcal{L}e_{n-3}(x) & \mathcal{L}e_{n-2}(x) \\ \mathcal{L}e_{n-2}(x) & \mathcal{L}e_{n-1}(x) & \cdots & \mathcal{L}e_{n-4}(x) & \mathcal{L}e_{n-3}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{L}e_1(x) & \mathcal{L}e_2(x) & \cdots & \mathcal{L}e_{n-1}(x) & \mathcal{L}e_0(x) \end{bmatrix}$$

matrisleri tanımlansın. Bu taktirde

$$r_1\left(A\right)=\max_{1\leq i\leq n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2}=\sqrt{\left(n-1\right)\left|r\right|^2+1},$$

$$c_1(B)=\max_{1\leq j\leq n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2}=\sqrt{\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{L}e_k^2(x)}=\sqrt{\frac{4\left(F_{n+1}(x)-1\right)\left(F_n(x)-1\right)+nx}{x}}$$

dir. Eş. 2.27 den

$$\left\|C_r\left(\mathcal{L}e_n(x)\right)\right\|_2\leq\sqrt{\frac{4\left(F_{n+1}(x)-1\right)\left(F_n(x)-1\right)+nx}{x}\left(\left(n-1\right)\left|r\right|^2+1\right)}$$

elde edilir. $|r|<1$ için üst sınır benzer şekilde $C_r\left(\mathcal{L}e_n\left(x\right)\right)=A\circ B$ olacak şekilde

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ r & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ r & r & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r & r & r & \cdots & r & 1 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} \mathcal{L}e_0(x) & \mathcal{L}e_1(x) & \cdots & \mathcal{L}e_{n-2}(x) & \mathcal{L}e_{n-1}(x) \\ \mathcal{L}e_{n-1}(x) & \mathcal{L}e_0(x) & \cdots & \mathcal{L}e_{n-3}(x) & \mathcal{L}e_{n-2}(x) \\ \mathcal{L}e_{n-2}(x) & \mathcal{L}e_{n-1}(x) & \cdots & \mathcal{L}e_{n-4}(x) & \mathcal{L}e_{n-3}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{L}e_1(x) & \mathcal{L}e_2(x) & \cdots & \mathcal{L}e_{n-1}(x) & \mathcal{L}e_0(x) \end{bmatrix}$$

matrisleri tanımlansın. Bu taktirde

$$r_1\left(A\right)=\max_{1\leq i\leq n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2}=\sqrt{n},$$

$$c_1(B)=\max_{1\leq j\leq n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2}=\sqrt{\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{L}e_k^2(x)}=\sqrt{\frac{4\left(F_{n+1}(x)-1\right)\left(F_n(x)-1\right)+nx}{x}}$$

dir. Eş. 2.27 den

$$\left\|C_r\left(\mathcal{L}e_n(x)\right)\right\|_2\leq\sqrt{\frac{4n\left(F_{n+1}(x)-1\right)\left(F_n(x)-1\right)+n^2x}{x}}$$

elde edilir.

4.2.4. Sonuç

$C_r(\mathcal{L}e_n) = Circ_r(\mathcal{L}e_0, \mathcal{L}e_1, \mathcal{L}e_2, \ldots, \mathcal{L}e_{n-1})$ Leonardo sayılarını içeren $n \times n$ tipinde bir $r-$circulant matris olsun. $C_r(\mathcal{L}e_n)$ matrisinin spektral normunun alt sınırı

$$\sqrt{\frac{(4-4|r|^2)}{n}\left(F_{n+1}^2 - F_{n+4} + 2\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor\right) + 4|r|^2 (F_{n+1}-1)(F_n-1) + \frac{1}{2}\left(n\left(1+|r|^2\right) + \left(1-|r|^2\right)\right)}$$

üst sınırı $|r| > 1$ için

$$\|C_r(\mathcal{L}e_n)\|_2 \leq \sqrt{(4(F_{n+1}-1)(F_n-1)+n)\left((n-1)|r|^2+1\right)} \tag{4.24}$$

ve $|r| < 1$ için

$$\|C_r(\mathcal{L}e_n)\|_2 \leq \sqrt{4n(F_{n+1}-1)(F_n-1)+n^2} \tag{4.25}$$

dir.

$C(\mathcal{L}e_n(x)) = Circ(\mathcal{L}e_0(x), \mathcal{L}e_1(x), \mathcal{L}e_2(x), \ldots, \mathcal{L}e_{n-1}(x))$ Leonardo polinomlarını içeren $n \times n$ tipinde bir circulant matrisin spektral normu Teorem 4.1.3 de $x \geq 1$ için tam olarak hesaplanmıştı. Aşağıdaki sonuç ile $C(\mathcal{L}e_n(x))$ matrisinin $x < 1$ için spektral normu alt ve üst sınırları verilmektedir.

4.2.5. Sonuç

$C(\mathcal{L}e_n(x)) = Circ(\mathcal{L}e_0(x), \mathcal{L}e_1(x), \mathcal{L}e_2(x), \ldots, \mathcal{L}e_{n-1}(x))$ Leonardo polinomlarını içeren $n \times n$ tipinde bir circulant matris olsun. $C(\mathcal{L}e_n(x))$ matrisinin $x < 1$ için spektral normunun alt ve üst sınırı

$$\sqrt{\frac{4(F_{n+1}(x)-1)(F_n(x)-1)+nx}{x}} \leq \|C(\mathcal{L}e_n(x))\|_2 \leq \sqrt{\frac{4n(F_{n+1}(x)-1)(F_n(x)-1)+n^2x}{x}} \tag{4.26}$$

dir.

Fibonacci polinomlarını içeren $n \times n$ tipinde bir $r-$circulant matris

$$C_r(F_n(x)) = Circ_r(F_0(x), F_1(x), F_2(x), \ldots, F_{n-1}(x))$$
$$= \begin{pmatrix} F_0(x) & F_1(x) & \cdots & F_{n-2}(x) & F_{n-1}(x) \\ rF_{n-1}(x) & F_0(x) & \cdots & F_{n-3}(x) & F_{n-2}(x) \\ rF_{n-2}(x) & rF_{n-1}(x) & \cdots & F_{n-4}(x) & F_{n-3}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ rF_1(x) & rF_2(x) & \cdots & rF_{n-1}(x) & F_0(x) \end{pmatrix}_{n\times n} \tag{4.27}$$

Fibonacci sayılarını içeren $n \times n$ tipinde bir $r-$circulant matris

$$C_r(F_n) = Circ_r(F_0, F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})$$
$$= \begin{pmatrix} F_0 & F_1 & \cdots & F_{n-2} & F_{n-1} \\ rF_{n-1} & F_0 & \cdots & F_{n-3} & F_{n-2} \\ rF_{n-2} & rF_{n-1} & \cdots & F_{n-4} & F_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ rF_1 & rF_2 & \cdots & rF_{n-1} & F_0 \end{pmatrix}_{n\times n} \tag{4.28}$$

şeklinde tanımlıdır [30].

4.2.6. Teorem

$C_r(F_n(x)) = Circ_r(F_0(x), F_1(x), F_2(x), \ldots, F_{n-1}(x))$ Fibonacci polinomlarını içeren $n \times n$ tipinde bir $r-$circulant matris olsun. $C_r(F_n(x))$ matrisinin Euclidean normu

$$\|C_r(F_n(x))\|_E = \sqrt{\frac{\left(1-|r|^2\right)\left(F_n^2(x) - n + 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + xn|r|^2 F_n(x)F_{n-1}(x)}{x^2}} \tag{4.29}$$

dir.

İspat

Eş. 3.2 ve Eş. 3.6 özellikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\|C_r(F_n(x))\|_E^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)F_k^2(x) + |r|^2\sum_{k=0}^{n-1}kF_k^2(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)F_k^2(x) + |r|^2\left(n\sum_{k=0}^{n-1}F_k^2(x) - \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)F_k^2(x)\right) \\
&= \left(1-|r|^2\right)\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)F_k^2(x) + |r|^2 n\sum_{k=0}^{n-1}F_k^2(x) \\
&= \left(1-|r|^2\right)\frac{F_n^2(x)-n+2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}{x^2} + |r|^2 n\frac{F_n(x)F_{n-1}(x)}{x} \\
&= \frac{\left(1-|r|^2\right)\left(F_n^2(x)-n+2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) + xn|r|^2F_n(x)F_{n-1}(x)}{x^2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.2.7. Sonuç

$C_r(F_n) = Circ_r(F_0,F_1,F_2,\ldots,F_{n-1})$ Fibonacci sayılarını içeren $n\times n$ tipinde bir $r-$circulant matris olsun. $C_r(F_n)$ matrisinin Euclidean normu

$$\|C_r(F_n))\|_E = \sqrt{\left(1-|r|^2\right)\left(F_n^2-n+2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)+n|r|^2F_nF_{n-1}} \tag{4.30}$$

şeklindedir.

Eş. 4.29 ifadesinde $r=1$ seçilirse Eş. 4.11 de verilen $C(F_n(x))$ Fibonacci polinomlarını içeren circulant matrisinin Euclidean normu

$$\|C(F_n(x))\|_E = \sqrt{\frac{nF_n(x)F_{n-1}(x)}{x}}$$

elde edilir.

Eş. 4.30 da $r=1$ seçilirse Eş. 4.12 de verilen $C(F_n(x))$ Fibonacci sayılarını içeren circulant matrisinin Euclidean normu

$$\|C(F_n)\|_E = \sqrt{nF_nF_{n-1}}$$

elde edilir.

4.2.8. Teorem

$C_r(F_n(x)) = Circ_r(F_0(x), F_1(x), F_2(x), \ldots, F_{n-1}(x))$ Fibonacci polinomlarını içeren $n \times n$ tipinde bir $r-$circulant matris olsun. $C_r(F_n(x))$ matrisinin spektral normunun alt sınırı

$$\sqrt{\frac{\left(1-|r|^2\right)\left(F_n^2(x)-n+2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)+xn|r|^2F_n(x)F_{n-1}(x)}{nx^2}} \leq \|C_r(F_n(x))\|_2 \tag{4.31}$$

üst sınırı $|r|>1$ için

$$\|C_r(F_n(x))\|_2 \leq \sqrt{\frac{(n-1)|r|^2F_n(x)F_{n-1}(x)}{x}} \tag{4.32}$$

ve $|r|<1$ için

$$\|C_r(F_n(x))\|_2 \leq \sqrt{\frac{(n-1)F_n(x)F_{n-1}(x)}{x}} \tag{4.33}$$

şeklindedir.

İspat

$|r|>1$ ve $|r|<1$ için alt sınırlar aynıdır. O halde Eş. 4.30 ve Eş. 2.27 özellikleri kullanılırsa

$$\sqrt{\frac{(1-r^2)\left(F_n^2(x)-n+2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)+xr^2F_n(x)F_{n-1}(x)}{nx^2}} \leq \|C_r(F_n(x))\|_2$$

elde edilir. $|r|>1$ için üst sınır $C_r(F_n(x)) = A \circ B$ olacak şekilde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ r & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ r & r & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r & r & r & \cdots & r & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} F_0(x) & F_1(x) & F_2(x) & \cdots & F_{n-2}(x) & F_{n-1}(x) \\ F_{n-1}(x) & F_0(x) & F_1(x) & \cdots & F_{n-3}(x) & F_{n-2}(x) \\ F_{n-2}(x) & F_{n-1}(x) & F_0(x) & \cdots & F_{n-4}(x) & F_{n-3}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F_1(x) & F_2(x) & F_3(x) & \cdots & F_{n-1}(x) & F_0(x) \end{bmatrix}$$

matrisleri tanımlansın. Bu taktirde

$$r_1(A) = \max_{1\le i\le n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = \sqrt{(n-1)|r|^2}$$

$$c_1(B) = \max_{1\le j\le n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} F_k^2(x)} = \sqrt{\frac{F_n(x)F_{n-1}(x)}{x}}$$

dir. Eş. 2.27 den

$$\|C_r(F_n(x))\|_2 \le \sqrt{\frac{(n-1)|r|^2 F_n(x)F_{n-1}(x)}{x}}$$

elde edilir. Benzer şekilde $|r|<1$ için üst sınır

$$\|C_r(F_n(x))\|_2 \le \sqrt{\frac{(n-1)F_n(x)F_{n-1}(x)}{x}}$$

şeklinde elde edilir.

4.2.9. Sonuç

$C_r(F_n) = Circ_r(F_0, F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})$ Fibonacci sayılarını içeren $n\times n$ tipinde bir $r-$circulant matris olsun. $C_r(F_n)$ matrisinin spektral normunun alt sınırı

$$\sqrt{\frac{1}{n}\left(1-|r|^2\right)\left(F_n^2 - n + 2\left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor\right) + |r|^2 F_n F_{n-1}} \le \|C_r(F_n))\|_2 \tag{4.34}$$

üst sınırı $|r| > 1$ için

$$\|C_r(F_n))\|_2 \leq |r| \sqrt{(n-1)F_nF_{n-1}} \tag{4.35}$$

$|r| < 1$ için

$$\|C_r(F_n)\|_2 \leq \sqrt{(n-1)F_{n-1}F_n} \tag{4.36}$$

şeklindedir.

$C(F_n(x)) = Circ(F_0(x), F_1(x), F_2(x), \ldots, F_{n-1}(x))$ Fibonacci polinomlarını içeren $n \times n$ tipinde bir circulant matrisin spektral normu Teorem 4.1.7 de $x \geq 1$ için tam olarak hesaplanmıştı. Aşağıdaki sonuç ile $C(F_n(x))$ matrisinin spektral normu $x < 1$ için alt ve üst sınırları verilmektedir.

4.2.10. Sonuç

$C(F_n(x)) = Circ(F_0(x), F_1(x), F_2(x), \ldots, F_{n-1}(x))$ Fibonacci polinomlarını içeren $n \times n$ tipinde bir circulant matris olsun. $C(F_n(x))$ matrisinin $x < 1$ için spektral normunun alt ve üst sınırları

$$\sqrt{\frac{F_n(x)F_{n-1}(x)}{x}} \leq \|C(F_n(x))\|_2 \leq \sqrt{\frac{nF_n(x)F_{n-1}(x)}{x}} \tag{4.37}$$

şeklindedir.

5. NÜMERİK ÖRNEKLER

Bu bölümde circulant ve $r-$circulant matrisler için elde edilen matris normları tablolar halinde örneklendirilmiştir.

Çizelge 5.1. $C(\mathcal{L}e_n(x))$ circulant matrisinin Euclid normları

n	$\|C(\mathcal{L}e_n(x))\|_E^2$
2	$8x^2-8x+4$
3	$12x^4+24x^2-12x+9$
4	$16(x^6+5x^4-x^3+6x^2-3x+1)$
5	$20x^8+140x^6+300x^4-20x^3+180x^2-60x+25$
10	$40\left(x^{18}+17x^{16}+121x^{14}+468x^{12}+1068x^{10}-x^9+1460x^8\right)$ $-40\left(-9x^7+1155x^6+28x^5-475x^4+35x^3-75x^2+15x\right)+25$

Çizelge 5.2. Bazı $C(\mathcal{L}e_n(x))$ circulant matrislerinin Euclid normları

n	$\|C(\mathcal{L}e_n(-1))\|_E$	$\left\|C\left(\mathcal{L}e_n\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\right\|_E$	$\left\|C\left(\mathcal{L}e_n\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right\|_E$	$\|C(\mathcal{L}e_n)\|_E$	$\|C(\mathcal{L}e_n(2))\|_E$
2	$\sqrt{20}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{20}$
3	$\sqrt{57}$	$\frac{\sqrt{87}}{2}$	$\frac{\sqrt{39}}{2}$	$\sqrt{33}$	$\sqrt{273}$
4	$\sqrt{272}$	$\frac{\sqrt{285}}{2}$	$\frac{\sqrt{77}}{4}$	12	$\sqrt{2480}$
5	$\sqrt{745}$	$\frac{\sqrt{7905}}{8}$	$\frac{\sqrt{3745}}{8}$	$\sqrt{585}$	$\sqrt{19345}$
6	$\sqrt{2628}$	$\frac{\sqrt{38655}}{16}$	$\frac{\sqrt{16191}}{16}$	$\sqrt{2052}$	$\sqrt{139140}$
7	$\sqrt{7441}$	$\frac{\sqrt{516187}}{32}$	$\frac{\sqrt{306523}}{32}$	$\sqrt{6769}$	$\sqrt{957313}$
8	$\sqrt{23296}$	$\frac{\sqrt{1099978}}{32}$	$\frac{\sqrt{317825}}{32}$	$\sqrt{21184}$	$\sqrt{6407872}$
9	$\sqrt{66609}$	$\frac{\sqrt{29477925}}{128}$	$\frac{\sqrt{21100581}}{128}$	$\sqrt{64233}$	$\sqrt{42101505}$
10	$\sqrt{197220}$	$\frac{\sqrt{232455250}}{256}$	$\frac{\sqrt{165229650}}{256}$	$\sqrt{190180}$	$\sqrt{272879700}$

Çizelge 5.3. $x \geq 1$ için $C(\mathcal{L}e_n(x))$ circulant matrisinin spektral normları

n	$\|C(\mathcal{L}e_n(x))\|_2$
2	$2x$
3	$2x^2+2x+1$
4	$2x^3+2x^2+6x$
5	$2x^4+2x^3+8x^2+6x+1$
6	$2x^5+2x^4+10x^3+8x^2+12x$
7	$2x^6+2x^5+12x^4+10x^3+20x^2+12x+1$
8	$2x^7+2x^6+14x^5+12x^4+30x^3+20x^2+20x$
9	$2x^8+2x^7+16x^6+14x^5+42x^4+30x^3+40x^2+20x+1$
10	$2x^9+2x^8+18x^7+16x^6+56x^5+42x^4+70x^3+40x^2+30x$

Çizelge 5.4. Bazı $C(\mathcal{L}e_n(x))$ circulant matrislerinin spektral normları

n	$\|C(F_n(1))\|_2$	$\left\|C\left(F_n\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right\|_2$	$\|C(F_n(2))\|_2$	$\|C(F_n(5))\|_2$
2	1	1	1	1
3	2	$\frac{5}{2}$	3	6
4	4	$\frac{23}{4}$	8	32
5	7	$\frac{97}{8}$	20	167
6	12	$\frac{399}{16}$	49	868
7	20	$\frac{1617}{32}$	119	4508
8	33	$\frac{6511}{64}$	288	23409
9	88	$\frac{26129}{128}$	696	121554
10	88	$\frac{104687}{256}$	1681	631180

Çizelge 5.5. $x \geq 1$ için $C(F_n(x))$ circulant matrisinin spektral normları

n	$\|C(F_n(x))\|_2$
2	1
3	$x+1$
4	x^2+x+2
5	x^3+x^2+3x+2
6	$x^4+x^3+4x^2+3x+3$
7	$x^5+x^4+5x^3+4x^2+6x+3$
8	$x^6+x^5+6x^4+5x^3+10x^2+6x+4$
9	$x^7+x^6+7x^5+6x^4+15x^3+10x^2+10x+4$
10	$x^8+x^7+8x^6+7x^5+21x^4+15x^3+20x^2+10x+5$

Çizelge 5.6. Bazı $C(F_n(x))$ circulant matrislerinin spektral normları

n	$\|C(F_n(1))\|_2$	$\left\|C\left(F_n\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right\|_2$	$\|C(F_n(2))\|_2$	$\|C(F_n(5))\|_2$
2	1	1	1	1
3	2	$\frac{5}{2}$	3	6
4	4	$\frac{23}{4}$	8	32
5	7	$\frac{97}{8}$	20	167
6	12	$\frac{399}{16}$	49	868
7	20	$\frac{1617}{32}$	119	4508
8	33	$\frac{6511}{64}$	288	23409
9	54	$\frac{26129}{128}$	696	121554
10	88	$\frac{104687}{256}$	1681	631180

Çizelge 5.7. $r=\frac{1}{2},\ x<0$ $C_r(\mathcal{L}e_n(x))$ $r-$circulant matrislerinin Euclid normları

n	$\|C_r(\mathcal{L}e_n(-2))\|_E$	$\|C_r(\mathcal{L}e_n(-1))\|_E$	$\left\|C_r\left(\mathcal{L}e_n\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\right\|_E$
2	$\frac{\sqrt{133}}{2}$	$\frac{\sqrt{53}}{2}$	$\sqrt{7}$
3	$\frac{\sqrt{723}}{2}$	$\frac{\sqrt{147}}{2}$	$\frac{\sqrt{246}}{4}$
4	$\frac{3\sqrt{614}}{2}$	$\frac{\sqrt{566}}{2}$	$\frac{\sqrt{2631}}{8}$
5	$\frac{\sqrt{34446}}{2}$	$\frac{\sqrt{1486}}{2}$	$\frac{\sqrt{4653}}{8}$
6	$\frac{\sqrt{229299}}{2}$	$\frac{\sqrt{4683}}{2}$	$\frac{\sqrt{158793}}{32}$
7	$\frac{\sqrt{1460437}}{2}$	$\frac{\sqrt{12685}}{2}$	$\frac{\sqrt{1063342}}{64}$
8	$\sqrt{2338135}$	$\sqrt{9319}$	$\frac{\sqrt{8238499}}{128}$
9	$\sqrt{14773938}$	$\sqrt{25698}$	$\frac{\sqrt{13664562}}{128}$
10	$\frac{\sqrt{372000913}}{2}$	$\frac{\sqrt{292569}}{2}$	$\frac{\sqrt{402913117}}{512}$

Çizelge 5.8. $r=\frac{1}{2},\ x>0$ $C_r(\mathcal{L}e_n(x))$ $r-$circulant matrislerinin Euclid normları

n	$\left\|C_r\left(\mathcal{L}e_n\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right\|_E$	$\|C_r(\mathcal{L}e_n(1))\|_E$	$\left\|C_r\left(\mathcal{L}e_n\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right\|_E$	$\|C_r(\mathcal{L}e_n(2))\|_E$
2	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{13}}{2}$	$\sqrt{7}$	$\frac{\sqrt{53}}{2}$
3	$\frac{\sqrt{102}}{4}$	$\frac{\sqrt{75}}{2}$	$\frac{\sqrt{918}}{4}$	$\frac{\sqrt{579}}{2}$
4	$\frac{\sqrt{791}}{8}$	$\frac{\sqrt{294}}{2}$	$\frac{\sqrt{21391}}{8}$	$\frac{\sqrt{4646}}{2}$
5	$\frac{\sqrt{1981}}{8}$	$\frac{\sqrt{1086}}{2}$	$\frac{\sqrt{110101}}{8}$	$\frac{\sqrt{33118}}{2}$
6	$\frac{\sqrt{65289}}{32}$	$\frac{\sqrt{3579}}{2}$	$\frac{3\sqrt{929257}}{32}$	$\frac{\sqrt{222483}}{2}$
7	$\frac{\sqrt{569518}}{64}$	$\frac{\sqrt{11197}}{2}$	$\frac{\sqrt{152264110}}{64}$	$\frac{\sqrt{1450933}}{2}$
8	$\frac{\sqrt{4542115}}{128}$	$\sqrt{8389}$	$\frac{19\sqrt{7487251}}{128}$	$\sqrt{232611}$
9	$\frac{\sqrt{9037362}}{128}$	$\sqrt{24504}$	$\frac{3\sqrt{1312453738}}{128}$	$\sqrt{1457978}$
10	$\frac{\sqrt{274994013}}{512}$	$\frac{\sqrt{281017}}{2}$	$\frac{\sqrt{817557632389}}{512}$	$\frac{3\sqrt{41297113}}{2}$

Çizelge 5.9. $r=2,\ x<0$ $C_r(\mathcal{L}e_n(x))$ $r-$circulant matrislerinin Euclid normları

n	$\|C_r(\mathcal{L}e_n(-2))\|_E$	$\|C_r(\mathcal{L}e_n(-1))\|_E$	$\left\|C_r\left(\mathcal{L}e_n\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\right\|_E$
2	$\sqrt{127}$	$\sqrt{47}$	$\sqrt{22}$
3	$\sqrt{882}$	$\sqrt{138}$	$\frac{\sqrt{189}}{2}$
4	$\sqrt{9114}$	$\sqrt{794}$	$\frac{\sqrt{3069}}{4}$
5	$\sqrt{65079}$	$\sqrt{2239}$	$\frac{\sqrt{20913}}{8}$
6	$\sqrt{486561}$	$\sqrt{8457}$	$\frac{\sqrt{227757}}{16}$
7	$\sqrt{3349648}$	$\sqrt{24520}$	$\frac{\sqrt{1517593}}{32}$
8	$\sqrt{22844260}$	$\sqrt{79204}$	$\frac{\sqrt{13761061}}{64}$
9	$\sqrt{151588893}$	$\sqrt{230253}$	$\frac{\sqrt{92731377}}{128}$
10	$\sqrt{993545587}$	$\sqrt{693531}$	$\frac{\sqrt{759363133}}{256}$

Çizelge 5.10. $r=2\ x>0$ $C_r(\mathcal{L}e_n(x))$ $r-$circulant matrislerinin Euclid normları

n	$\left\|C_r\left(\mathcal{L}e_n\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right\|_E$	$\|C_r(\mathcal{L}e_n(1))\|_E$	$\left\|C_r\left(\mathcal{L}e_n\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right\|_E$	$\|C_r(\mathcal{L}e_n(2))\|_E$
2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{22}$	$\sqrt{47}$
3	$\frac{\sqrt{93}}{2}$	$\sqrt{90}$	$\frac{\sqrt{1197}}{2}$	$\sqrt{786}$
4	$\frac{\sqrt{749}}{4}$	$\sqrt{426}$	$\frac{\sqrt{34069}}{4}$	$\sqrt{7754}$
5	$\frac{\sqrt{10801}}{8}$	$\sqrt{1839}$	$\frac{\sqrt{807121}}{8}$	$\sqrt{63607}$
6	$\frac{\sqrt{96621}}{16}$	$\sqrt{6681}$	$\frac{\sqrt{16969077}}{16}$	$\sqrt{473217}$
7	$\frac{\sqrt{963097}}{32}$	$\sqrt{22648}$	$\frac{\sqrt{334504585}}{32}$	$\sqrt{3335632}$
8	$\frac{\sqrt{8149285}}{64}$	$\sqrt{72364}$	$\frac{\sqrt{6327124669}}{64}$	$\sqrt{22734916}$
9	$\frac{\sqrt{69353457}}{128}$	$\sqrt{223149}$	$\frac{\sqrt{116479522737}}{128}$	$\sqrt{151475613}$
10	$\frac{\sqrt{551154237}}{256}$	$\sqrt{669883}$	$\frac{\sqrt{2103775367461}}{256}$	$\sqrt{992724483}$

Çizelge 5.11. $r=\frac{1}{2}$ $C_r(F_n(x))$ $r-$circulant matrislerinin Euclid normları

n	$\left\|C_r\left(F_n\left(\pm\frac{1}{2}\right)\right)\right\|_E$	$\|C_r(F_n(\pm1))\|_E$	$\left\|C_r\left(F_n\left(\pm\frac{3}{2}\right)\right)\right\|_E$	$\|C_r(F_n(2))\|_E$
2	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$
3	$\frac{\sqrt{42}}{4}$	$\frac{\sqrt{15}}{2}$	$\frac{\sqrt{90}}{4}$	$\frac{\sqrt{33}}{2}$
4	$\frac{\sqrt{423}}{8}$	$\frac{\sqrt{51}}{2}$	$\frac{\sqrt{1751}}{8}$	$\sqrt{57}$
5	$\frac{\sqrt{765}}{8}$	$\frac{\sqrt{147}}{2}$	$\frac{\sqrt{7837}}{8}$	$\sqrt{375}$
6	$\frac{\sqrt{23985}}{32}$	$\sqrt{108}$	$\frac{\sqrt{559377}}{32}$	$\frac{\sqrt{9765}}{2}$
7	$\frac{\sqrt{84175}}{64}$	$\sqrt{308}$	$\frac{\sqrt{4920279}}{64}$	$\frac{\sqrt{62825}}{2}$
8	$\frac{\sqrt{122011}}{128}$	$\frac{\sqrt{3507}}{2}$	$\frac{\sqrt{171802187}}{128}$	$\sqrt{100164}$
9	$\frac{\sqrt{1062369}}{256}$	$\frac{\sqrt{9891}}{2}$	$\frac{\sqrt{372225693}}{256}$	$\sqrt{634032}$
10	$\frac{\sqrt{59859973}}{512}$	$\frac{\sqrt{27775}}{2}$	$\frac{\sqrt{51310619525}}{512}$	$\frac{\sqrt{15952813}}{2}$

Çizelge 5.12. $r=2$ için $C_r(F_n(x))$ $r-$circulant matrislerinin Euclid normları

n	$\left\|C_r\left(F_n\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right\|_E$	$\|C_r(F_n(1))\|_E$	$\left\|C_r\left(F_n\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right\|_E$	$\|C_r(F_n(2))\|_E$
2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$
3	$\frac{\sqrt{33}}{2}$	$\sqrt{15}$	$\frac{\sqrt{105}}{2}$	$\sqrt{42}$
4	$\frac{\sqrt{477}}{4}$	$\sqrt{69}$	$\frac{\sqrt{2669}}{4}$	$\sqrt{372}$
5	$\frac{\sqrt{3465}}{8}$	$\sqrt{228}$	$\frac{\sqrt{55777}}{8}$	$\sqrt{2850}$
6	$\frac{\sqrt{32565}}{16}$	$\sqrt{768}$	$\frac{\sqrt{1119573}}{16}$	$\sqrt{20685}$
7	$\frac{\sqrt{243425}}{32}$	$\sqrt{2408}$	$\frac{\sqrt{21471177}}{32}$	$\sqrt{144200}$
8	$\frac{\sqrt{1970829}}{64}$	$\sqrt{7413}$	$\frac{\sqrt{400886333}}{64}$	$\sqrt{978384}$
9	$\frac{\sqrt{14620473}}{128}$	$\sqrt{22239}$	$\frac{\sqrt{7329998001}}{128}$	$\sqrt{6506172}$
10	$\frac{\sqrt{110754277}}{256}$	$\sqrt{65725}$	$\frac{\sqrt{131941842725}}{256}$	$\sqrt{42605437}$

Çizelge 5.13. $r=\frac{1}{2}, x>0$ $C_r(\mathcal{L}e_n(x))$ $r-$circulant matrislerinin spektral normları

$r=\frac{1}{2}$	$\left\|C_r\left(\mathcal{L}e_n\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right\|_2$		$\|C_r(\mathcal{L}e_n(1))\|_2$		$\|C_r(\mathcal{L}e_n(2))\|_2$	
n	Alt Sınır	Üst Sınır	Alt Sınır	Üst Sınır	Alt Sınır	Üst Sınır
2	1	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{26}}{4}$	2	$\frac{\sqrt{106}}{4}$	$\sqrt{20}$
3	$\frac{\sqrt{34}}{4}$	$\frac{\sqrt{39}}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\sqrt{33}$	$\frac{\sqrt{193}}{2}$	$\sqrt{273}$
4	$\frac{\sqrt{791}}{16}$	$\frac{\sqrt{77}}{2}$	$\frac{\sqrt{594}}{4}$	12	$\frac{\sqrt{4646}}{4}$	$\sqrt{2480}$
5	$\frac{\sqrt{9905}}{40}$	$\frac{\sqrt{3745}}{8}$	$\frac{\sqrt{5430}}{10}$	$\sqrt{585}$	$\frac{\sqrt{165590}}{10}$	$\sqrt{19345}$
6	$\frac{\sqrt{43526}}{64}$	$\frac{\sqrt{32382}}{16}$	$\frac{\sqrt{2386}}{4}$	$\sqrt{2052}$	$\frac{\sqrt{148322}}{4}$	$\sqrt{139140}$
7	$\frac{\sqrt{3986626}}{448}$	$\frac{\sqrt{306523}}{32}$	$\frac{\sqrt{78379}}{14}$	$\sqrt{6769}$	$\frac{\sqrt{10156531}}{14}$	$\sqrt{957313}$
8	$\frac{\sqrt{9084230}}{512}$	$\frac{\sqrt{634570}}{32}$	$\frac{\sqrt{16778}}{4}$	$\sqrt{21184}$	$\frac{\sqrt{4652222}}{4}$	$\sqrt{6407872}$
9	$\frac{\sqrt{9037362}}{384}$	$\frac{\sqrt{21100581}}{128}$	$\frac{\sqrt{24504}}{3}$	$\sqrt{64233}$	$\frac{\sqrt{14757978}}{3}$	$\sqrt{42101505}$
10	$\frac{\sqrt{27449940130}}{5120}$	$\frac{\sqrt{165229650}}{256}$	$\frac{\sqrt{2810170}}{20}$	$\sqrt{190180}$	$\frac{\sqrt{3716740170}}{20}$	$\sqrt{272879700}$

Çizelge 5.14. $r=\frac{1}{2}, x<0$ $C_r(\mathcal{L}e_n(x))$ $r-$circulant matrislerinin spektral normları

$r=\frac{1}{2}$	$\|C_r(\mathcal{L}e_n(-2))\|_2$		$\|C_r(\mathcal{L}e_n(-1))\|_2$		$\left\|C_r\left(\mathcal{L}e_n\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\right\|_2$	
n	Alt Sınır	Üst Sınır	Alt Sınır	Üst Sınır	Alt Sınır	Üst Sınır
2	$\frac{\sqrt{133}}{2}$	$2\sqrt{13}$	$\frac{\sqrt{53}}{2}$	$2\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{10}$
3	$\frac{\sqrt{723}}{2}$	$\sqrt{321}$	$\frac{\sqrt{147}}{2}$	$\sqrt{57}$	$\frac{\sqrt{246}}{4}$	$\frac{\sqrt{87}}{2}$
4	$\frac{\sqrt{2763}}{2}$	$4\sqrt{183}$	$\frac{\sqrt{566}}{2}$	$4\sqrt{17}$	$\frac{\sqrt{2631}}{8}$	$\frac{\sqrt{285}}{2}$
5	$\frac{\sqrt{34446}}{2}$	$\sqrt{19905}$	$\frac{\sqrt{1486}}{2}$	$\sqrt{745}$	$\frac{\sqrt{4653}}{8}$	$\frac{\sqrt{7905}}{8}$
6	$\frac{\sqrt{229299}}{2}$	$6\sqrt{3977}$	$\frac{\sqrt{4683}}{2}$	$6\sqrt{73}$	$\frac{\sqrt{158793}}{32}$	$\frac{\sqrt{77310}}{16}$
7	$\frac{\sqrt{1460437}}{2}$	$7\sqrt{19633}$	$\frac{\sqrt{12685}}{2}$	$\sqrt{7441}$	$\frac{\sqrt{1063342}}{64}$	$\frac{\sqrt{516187}}{32}$
8	$\sqrt{2338135}$	$8\sqrt{100615}$	$\sqrt{9319}$	$16\sqrt{91}$	$\frac{\sqrt{8238499}}{128}$	$\frac{\sqrt{1099978}}{32}$
9	$\sqrt{14773938}$	$27\sqrt{100615}$	$\sqrt{25698}$	$3\sqrt{7401}$	$\frac{\sqrt{13664562}}{128}$	$\frac{\sqrt{29477925}}{128}$
10	$\frac{\sqrt{372000913}}{2}$	$10\sqrt{2731093}$	$\frac{\sqrt{292569}}{2}$	$2\sqrt{49305}$	$\frac{\sqrt{40293117}}{512}$	$\frac{\sqrt{232455250}}{256}$

Çizelge 5.15. $r=3, x>0$ $C_r(\mathcal{L}e_n(x))$ $r-$circulant matrislerinin spektral normları

$r=3$	$\left\|C_r\left(\mathcal{L}e_n\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right\|_2$		$\|C_r(\mathcal{L}e_n(1))\|_2$		$\|C_r(\mathcal{L}e_n(2))\|_2$	
n	Alt Sınır	Üst Sınır	Alt Sınır	Üst Sınır	Alt Sınır	Üst Sınır
2	1	$\sqrt{10}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{20}$	$\sqrt{46}$	10
3	$\frac{\sqrt{61}}{2}$	$\frac{\sqrt{247}}{2}$	$\frac{\sqrt{555}}{3}$	$\sqrt{209}$	$\sqrt{547}$	$\sqrt{1729}$
4	$\frac{\sqrt{371}}{4}$	$\frac{\sqrt{539}}{2}$	$\sqrt{56}$	$\sqrt{1008}$	$\sqrt{40132}$	$\sqrt{17360}$
5	$\frac{\sqrt{112805}}{40}$	$\frac{\sqrt{27713}}{8}$	$\frac{\sqrt{19645}}{5}$	$\sqrt{4329}$	$\frac{\sqrt{686885}}{5}$	$\sqrt{143153}$
6	$\frac{\sqrt{305529}}{48}$	$\frac{\sqrt{248262}}{16}$	$\frac{\sqrt{21594}}{3}$	$\sqrt{15732}$	$\frac{\sqrt{1545018}}{3}$	$\sqrt{1066740}$
7	$\frac{\sqrt{14401709}}{224}$	$\frac{\sqrt{2408395}}{32}$	$\sqrt{114597}$	$\sqrt{53185}$	$\frac{\sqrt{51096479}}{7}$	$\sqrt{7521745}$
8	$\frac{\sqrt{546905}}{32}$	$\frac{\sqrt{317285}}{8}$	$\sqrt{44343}$	$\sqrt{169472}$	$\sqrt{6243332}$	$\sqrt{51262976}$
9	$\frac{\sqrt{149774917}}{384}$	$\frac{\sqrt{171149157}}{128}$	$\frac{\sqrt{488009}}{3}$	$\sqrt{521001}$	$\frac{\sqrt{333765793}}{3}$	$\sqrt{341489985}$
10	$\frac{\sqrt{2985904705}}{1280}$	$\frac{\sqrt{1354883130}}{256}$	$\frac{\sqrt{3673470}}{5}$	$\sqrt{1559476}$	$\frac{\sqrt{5481164470}}{5}$	$\sqrt{2237613540}$

Çizelge 5.16. $r=3, x<0$ $C_r(\mathcal{L}e_n(x))$ $r-$circulant matrislerinin spektral normları

$r=3$	$\|C_r(\mathcal{L}e_n(-2))\|_2$		$\|C_r(\mathcal{L}e_n(-1))\|_2$		$\left\|C_r\left(\mathcal{L}e_n\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\right\|_2$	
n	Alt Sınır	Üst Sınır	Alt Sınır	Üst Sınır	Alt Sınır	Üst Sınır
2	$\sqrt{126}$	$\sqrt{260}$	$\sqrt{46}$	10	$\sqrt{21}$	$\sqrt{50}$
3	$\sqrt{\frac{1817}{3}}$	$\sqrt{2033}$	$\sqrt{91}$	19	$\frac{\sqrt{1077}}{6}$	$\frac{\sqrt{551}}{2}$
4	$\sqrt{4856}$	$\sqrt{20496}$	$\sqrt{416}$	$\sqrt{1904}$	$\frac{\sqrt{1571}}{4}$	$\frac{\sqrt{1995}}{2}$
5	$\sqrt{\frac{140369}{5}}$	$\sqrt{147297}$	$\frac{\sqrt{23645}}{5}$	$\sqrt{5513}$	$\frac{\sqrt{212965}}{40}$	$\frac{\sqrt{58497}}{8}$
6	$\sqrt{\frac{529438}{3}}$	$\sqrt{1097297}$	$\frac{\sqrt{27258}}{3}$	$\sqrt{20148}$	$\frac{\sqrt{717753}}{48}$	$\frac{\sqrt{592710}}{16}$
7	$\sqrt{\frac{7329033}{7}}$	$\sqrt{7558705}$	$\frac{\sqrt{370895}}{7}$	$\sqrt{58465}$	$\frac{\sqrt{455229}}{32}$	$\frac{\sqrt{4055755}}{32}$
8	$\sqrt{6273220}$	$\sqrt{51514880}$	$\sqrt{21548}$	$\sqrt{186368}$	$\frac{\sqrt{917593}}{32}$	$\frac{\sqrt{549989}}{8}$
9	$\frac{\sqrt{334008833}}{3}$	$\sqrt{34177313}$	$\frac{\sqrt{502993}}{3}$	$\sqrt{540273}$	$\frac{\sqrt{198153797}}{384}$	$\frac{\sqrt{239098725}}{128}$
10	$\sqrt{\frac{1097136366}{5}}$	$\sqrt{2239496260}$	$\frac{\sqrt{3801790}}{5}$	$\sqrt{1617204}$	$\frac{\sqrt{4093857345}}{1280}$	$\frac{\sqrt{1906133050}}{256}$

Çizelge 5.17. $r=\frac{1}{2}$, $C_r\left(F_n\left(x\right)\right)$ $r-$circulant matrislerinin spektral normları

$r=\frac{1}{2}$	$\left\|C_r\left(F_n\left(\pm\frac{1}{2}\right)\right)\right\|_2$		$\left\|C_r\left(F_n\left(\pm1\right)\right)\right\|_2$		$\left\|C_r\left(F_n\left(\pm2\right)\right)\right\|_2$	
n	Alt Sınır	Üst Sınır	Alt Sınır	Üst Sınır	Alt Sınır	Üst Sınır
2	$\frac{\sqrt{10}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{10}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{10}}{4}$	1
3	$\frac{\sqrt{14}}{4}$	$\frac{\sqrt{10}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	2	$\frac{\sqrt{11}}{2}$	$\sqrt{10}$
4	$\frac{\sqrt{423}}{16}$	$\frac{\sqrt{135}}{4}$	$\frac{\sqrt{51}}{4}$	$\sqrt{18}$	$\frac{\sqrt{57}}{2}$	$\sqrt{90}$
5	$\frac{\sqrt{153}}{8}$	$\frac{\sqrt{261}}{4}$	$\frac{\sqrt{735}}{4}$	$\sqrt{60}$	$\sqrt{75}$	$\sqrt{696}$
6	$\frac{\sqrt{15990}}{64}$	$\frac{\sqrt{9425}}{16}$	$\sqrt{18}$	$\sqrt{200}$	$\frac{\sqrt{6510}}{4}$	$\sqrt{5075}$
7	$\frac{\sqrt{24050}}{64}$	$\frac{\sqrt{70590}}{32}$	$\sqrt{44}$	$\sqrt{624}$	$\frac{\sqrt{162750}}{4}$	$\sqrt{35490}$
8	$\frac{\sqrt{2444022}}{512}$	$\frac{\sqrt{558747}}{64}$	$\frac{\sqrt{7014}}{8}$	$\sqrt{1911}$	$\frac{\sqrt{50082}}{2}$	$\sqrt{241332}$
9	$\frac{\sqrt{236082}}{128}$	$\frac{\sqrt{1027530}}{64}$	$\frac{\sqrt{1099}}{2}$	$\sqrt{5712}$	$\frac{\sqrt{17612}}{2}$	$\sqrt{1607520}$
10	$\frac{\sqrt{598599730}}{5120}$	$\frac{\sqrt{30710565}}{256}$	$\frac{\sqrt{11110}}{4}$	$\sqrt{16830}$	$\frac{\sqrt{159528130}}{20}$	$\sqrt{10540485}$

Çizelge 5.18. $r=3$ için $C_r\left(F_n\left(x\right)\right)$ $r-$circulant matrislerinin spektral normları

$r=3$	$\left\|C_r\left(F_n\left(\pm\frac{1}{2}\right)\right)\right\|_2$		$\left\|C_r\left(F_n\left(\pm1\right)\right)\right\|_2$		$\left\|C_r\left(F_n\left(\pm2\right)\right)\right\|_2$	
n	Alt Sınır	Üst Sınır	Alt Sınır	Üst Sınır	Alt Sınır	Üst Sınır
2	$\sqrt{5}$	3	$\sqrt{5}$	3	$\sqrt{5}$	3
3	$\frac{\sqrt{21}}{2}$	$\frac{\sqrt{90}}{2}$	$\sqrt{10}$	6	$\sqrt{29}$	$\sqrt{90}$
4	$\frac{\sqrt{243}}{4}$	$\frac{\sqrt{1215}}{4}$	6	$\sqrt{162}$	$\sqrt{198}$	$\sqrt{810}$
5	$\frac{\sqrt{1413}}{8}$	$\frac{\sqrt{2349}}{4}$	$\frac{\sqrt{2415}}{5}$	$\sqrt{540}$	$\sqrt{1230}$	$\sqrt{6264}$
6	$\frac{\sqrt{101985}}{48}$	$\frac{\sqrt{84825}}{16}$	$\frac{\sqrt{2472}}{3}$	$\sqrt{1800}$	$\frac{\sqrt{67515}}{3}$	$\sqrt{45675}$
7	$\frac{\sqrt{73125}}{32}$	$\frac{\sqrt{635310}}{32}$	$\sqrt{744}$	$\sqrt{5616}$	$\sqrt{45075}$	$\sqrt{319410}$
8	$\frac{\sqrt{130977}}{32}$	$\frac{\sqrt{5028723}}{64}$	$\sqrt{2016}$	$\sqrt{17199}$	$\sqrt{268668}$	$\sqrt{2171988}$
9	$\frac{\sqrt{3475717}}{128}$	$\frac{\sqrt{9247770}}{64}$	$\frac{\sqrt{48594}}{3}$	$\sqrt{51408}$	$\frac{\sqrt{14335692}}{3}$	$\sqrt{14467680}$
10	$\frac{\sqrt{596183305}}{1280}$	$\frac{\sqrt{276395085}}{64}$	$\sqrt{14410}$	$\sqrt{15147}$	$\frac{\sqrt{235237705}}{5}$	$\sqrt{94864365}$

6. SONUÇLARIN KARŞILAŞTIRILMASI

Bu kısımda circulant matrisler için elde ettiğimiz bazı norm sonuçları ile literatürde elde edilmiş sonuçlar tablolar ile karşılaştırmalar yapılmıştır.

Solak [16], Fibonacci sayılarını içeren $n \times n$ circulant matrisin spektral normu için

$$\sqrt{F_n F_{n-1}} \leq \|C(F_n)\|_2 \leq F_n F_{n-1}$$

eşitsizliğini elde etmiştir.

Bizim bu çalışmamızda Fibonacci sayılarını içeren $n \times n$ circulant matrisin spektral normu için Eş. 4.16 ile elde ettiğimiz sonuç

$$\|C(F_n)\|_2 = F_{n+1} - 1$$

şeklindedir. $\|C(F_n)\|_2$ normu için Solak'ın çalışmasında bulduğu sonuçlar ile bizim bu çalışmada bulduğumuz sonuçların karşılaştırılması aşağıdaki tabloda yer almaktadır.

Çizelge 6.1. $\|C(F_n)\|_2$ için bulanan sınırların karşılaştırılması

n	Solak [16] Bulduğu Alt Sınır	Solak [16] Bulduğu Üst Sınır	Bulduğumuz Sonuç $\|C(F_n)\|_2$
2	1	1	1
3	$\sqrt{2}$	2	2
4	$\sqrt{6}$	6	4
5	$\sqrt{15}$	15	7
6	$\sqrt{40}$	40	12
7	$\sqrt{104}$	104	20
8	$\sqrt{273}$	273	33
9	$\sqrt{714}$	714	54
10	$\sqrt{1870}$	1870	88
20	$\sqrt{28284465}$	28284465	17710

Yılmaz ve arkadaşları [26] çalışmalarında Fibonacci polinomlarını $n \times n$ içeren circulant matrisin spektral normu için

$$\sqrt{\frac{F_n(x)F_{n-1}(x)}{x}} \leq \|C(F_n(x))\|_2 \leq \frac{1}{x}\sqrt{F_{n-2}(x)F_{n-1}^2(x)F_n(x)}$$

eşitsizliğini elde etmiştir. Biz Teorem 4.1.7 de $x \geq 1$ için spektral normu tam olarak hesapladık. Ayrıca Sonuç 4.2.10 da $x < 1$ için $\|C(F_n(x))\|_2$ spektral normunun alt ve üst sınırlar bulduk. Elde ettiğimiz alt sınırlar Yılmaz ve ve arkadaşlarının bulduğu sonuçlar ile aynı iken üst sınırlarımız onların bulduğu sonuçlardan daha küçük olduğundan daha iyi sınırlar elde ettik.

Çizelge 6.2. $x < 1,\ x \neq 0$ $\|C(F_n(x))\|_2$ spektral normun karşılaştırılması

n	$\|C(F_n(x))\|_2$	
	Yılmaz [26] üst Sınır	Bizim üst Sınır
3	$2+3x^2+x^4$	$\sqrt{3\frac{2+3x^2+x^4}{x}}$
4	$2+7x^2+5x^4+x^6$	$\sqrt{4\frac{2+7x^2+5x^4+x^6}{x}}$
5	$x^8+7x^6+16x^4+13x^2+3$	$\sqrt{5\frac{x^8+7x^6+16x^4+13x^2+3}{x}}$
6	$3+22x^2+40x^4+29x^6+9x^8+x^{10}$	$\sqrt{6\frac{3+22x^2+40x^4+29x^6+9x^8+x^{10}}{x}}$
7	$4+34x^2+86x^4+91x^6+46x^8+11x^{10}+x^{12}$	$\sqrt{7\frac{4+34x^2+86x^4+91x^6+46x^8+11x^{10}+x^{12}}{x}}$

Shen ve Cen [30] çalışmalarında Fibonacci sayılarını içeren $n \times n$ tipinde $r-$circulant matrisin spektral normu $|r| > 1$ için

$$\sqrt{F_nF_{n-1}} \leq \|C_r(F_n)\|_2 \leq |r|\,F_nF_{n-1}$$

ve $|r| < 1$ için

$$|r|\sqrt{F_nF_{n-1}} \leq \|C_r(F_n)\|_2 \leq \sqrt{(n-1)\,F_nF_{n-1}}$$

eşitsizliklerini elde etmiştir.

Bizim bu çalışmamızda Fibonacci sayılarını içeren $n \times n$ tipinde $r-$circulant matrisin spektral normu için Eş. 4.34 ve Eş. 4.36 ile

$|r| > 1$

$$\sqrt{\frac{1}{n}\left(1-|r|^2\right)\left(F_n^2-n+2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)+|r|^2 F_n F_{n-1}} \leq \|C_r(F_n))\|_2 \leq \sqrt{(n-1)|r|^2 F_n F_{n-1}}$$

ve $|r| < 1$ için

$$\sqrt{\frac{1}{n}\left(1-|r|^2\right)\left(F_n^2-n+2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)+|r|^2 F_n F_{n-1}} \leq \|C_r(F_n)\|_2 \leq \sqrt{(n-1) F_n F_{n-1}}$$

şeklindedir.

Çizelge 6.3. $r = 3$, $\|C_r(F_n)\|_2$ için bulanan sınırların karşılaştırılması

n	Shen [30] Alt Sınırlar	Buldugumuz Alt Sınırlar	Shen [30] Üst Sınırlar	Buldugumuz Üst Sınırlar
2	1	$\sqrt{5}$	3	3
3	$\sqrt{2}$	$\sqrt{10}$	6	6
4	$\sqrt{6}$	$\sqrt{36}$	$\sqrt{324}$	$\sqrt{162}$
5	$\sqrt{15}$	$\frac{\sqrt{2415}}{5}$	$\sqrt{2025}$	$\sqrt{540}$
6	$\sqrt{40}$	$\frac{\sqrt{2472}}{3}$	$\sqrt{14440}$	$\sqrt{1800}$
7	$\sqrt{104}$	$\sqrt{744}$	$\sqrt{97344}$	$\sqrt{5616}$
8	$\sqrt{273}$	$\sqrt{2016}$	$\sqrt{670761}$	$\sqrt{17199}$
9	$\sqrt{714}$	$\frac{\sqrt{48594}}{3}$	$\sqrt{4588164}$	$\sqrt{51408}$
10	$\sqrt{1870}$	$\sqrt{14410}$	$\sqrt{31472100}$	$\sqrt{151470}$
20	$\sqrt{28284465}$	$\sqrt{236254095}$	$\sqrt{7200098643026025}$	$\sqrt{4836643515}$

Çizelge 6.4. $r=\frac{1}{2},\ \|C_r(F_n)\|_2$ için bulanan sınırların karşılaştırılması

n	Shen [30] Alt Sınırlar	Buldugumuz Alt Sınırlar	Shen [30] ve Bizim Üst Sınırlar
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{10}}{4}$	1
3	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	2
4	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{51}}{4}$	$\sqrt{18}$
5	$\frac{\sqrt{15}}{2}$	$\sqrt{\frac{147}{20}}$	$\sqrt{60}$
6	$\sqrt{10}$	$\sqrt{18}$	$\sqrt{200}$
7	$\sqrt{26}$	$\sqrt{44}$	$\sqrt{624}$
8	$\frac{\sqrt{273}}{2}$	$\sqrt{\frac{3507}{32}}$	$\sqrt{1911}$
9	$\frac{\sqrt{714}}{2}$	$\frac{\sqrt{1099}}{2}$	$\sqrt{5712}$
10	$\frac{\sqrt{1870}}{2}$	$\frac{\sqrt{11110}}{4}$	$\sqrt{16830}$
20	$\frac{\sqrt{28284465}}{2}$	$\frac{\sqrt{140596995}}{4}$	$\sqrt{537404835}$

Bu iki sonucu karşılaştıralım. $|r|>1$ için alt sınırlar incelenirse

$$\begin{aligned}
\triangle_1 =& \frac{1}{n}\left(1-|r|^2\right)\left(F_n^2-n+2\left\lfloor\tfrac{n}{2}\right\rfloor\right)+|r|^2F_nF_{n-1}-F_nF_{n-1}\\
=& \left(1-|r|^2\right)\left(\frac{1}{n}F_n^2-F_nF_{n-1}-1+\frac{2}{n}\left\lfloor\tfrac{n}{2}\right\rfloor\right)\\
=& \left(1-|r|^2\right)\left(F_n\frac{F_n-nF_{n-1}}{n}-n+2\left\lfloor\tfrac{n}{2}\right\rfloor\right)\\
=& \left(1-|r|^2\right)\left(F_n\frac{F_{n-1}+F_{n-2}-nF_{n-1}}{n}-n+2\left\lfloor\tfrac{n}{2}\right\rfloor\right)\\
=& \left(1-|r|^2\right)\left(F_n\frac{F_{n-1}+F_{n-1}-F_{n-3}-nF_{n-1}}{n}-1+\frac{2}{n}\left\lfloor\tfrac{n}{2}\right\rfloor\right)\\
=& \left(1-|r|^2\right)\left(F_n\frac{(2-n)F_{n-1}-F_{n-3}}{n}-1+\frac{2}{n}\left\lfloor\tfrac{n}{2}\right\rfloor\right)
\end{aligned}$$

n çift tamsayı ise

$$\triangle_1=\left(1-|r|^2\right)F_n\left(\frac{(2-n)F_{n-1}-F_{n-3}}{n}\right)$$

$n\geq 2$ tamsayısı için $(2-n)F_{n-1}-F_{n-3}<0$ ve $1-|r|^2<0$ olduğundan $\triangle_1>0$ olur. n tek

tamsayı ise

$$\triangle_1 = \left(1-|r|^2\right)\left(F_n\frac{(2-n)F_{n-1}-F_{n-3}}{n}-1\right)$$

$n>1$ tamsayısı için $\triangle_1>0$ olur. $|r|>1$ için üst sınırlar incelenirse

$$\begin{aligned}\triangle_2 =& F_nF_{n-1}(n-1)|r|^2-(|r|F_nF_{n-1})^2\\ =& |r|^2F_nF_{n-1}((n-1)-F_nF_{n-1})\end{aligned}$$

$n=1,2,3$ için $\triangle_2=0$ ve $n>3$ için $\triangle_2<0$ olur.

Böylece $n>3$ olmak üzere $n\times n$ tipinden matrislerin spektral normları için alt ve üst sınırımızın daha iyi olduğu elde edilir.

Şimdi $|r|<1$ için alt sınırları inceleyelim.

$$\begin{aligned}\triangle_3 =& \frac{1}{n}\left(1-|r|^2\right)\left(F_n^2-n+2\left\lfloor\tfrac{n}{2}\right\rfloor\right)+|r|^2F_nF_{n-1}-|r|^2F_nF_{n-1}\\ =& \frac{1}{n}\left(1-|r|^2\right)\left(F_n^2-n+2\left\lfloor\tfrac{n}{2}\right\rfloor\right)\end{aligned}$$

$n=1$ için $\triangle_3=0$ ancak $n>1$ tamsayısı için $\triangle_2>0$ olur.

Böylece $|r|<1$ olmak üzere $n>2$ için $n\times n$ tipinden matrislerin spektral normları için bizim bulduğumuz alt sınırlar daha iyi olduğu görülür. $|r|<1$ için aynı üst sınırları bulunmuştur.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez, yedi bölüm içermektedir. Birinci bölümde; circulant matris, $r-$circulant matris, geometrik circulant matris, Fibonacci sayıları-polinomları ve Leonardo sayıları-polinomları ile alakalı literatürde yapılmış çalışmalarından bahsedilmiştir. İkinci bölümde çalışmamızın etrafında şekillendiği matrisler, özel sayı dizileri ve polinomlarına, ayrıca çalışmamızın mihenk taşını oluşturan üreteç fonksiyonlarına yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, Fibonacci polinomlarının ve bir önceki bölümde verilen üreteç fonksiyonlarının Cauchy çarpımından faydalanarak Euclidean norm hesabında karşımıza çıkacak olan çeşitli toplamlar elde edilmiştir. Dördüncü bölümde, literatürde şimdiye kadar özel sayı dizileri içeren $r-$circulant matrisin Euclidean normu tam bir şekilde hesaplanamadığı gözlemlenmiştir. Bir önceki bölümde yapmış olduğumuz üreteç fonksiyonlarının çarpımından faydalanarak Fibonacci, Leonardo polinom ve sayılarını içeren r-circulant matrislerin Euclidean normu herhangi bir küçültme veya büyültme yapmadan tam bir şekilde tarafımızca hesaplanabilmiştir. Buna bağlı olarak elde ettiğimiz $r-$circulant matrisin spektral normlarının aralığı tablolar vasıtası ile daha ideal olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca literatürde Fibonacci, Leonardo polinom ve sayılarını içeren circulant matrisin spektral normu sınırlara bağlı olarak verildiği gözlemlenmiştir. Circulant matrisin özdeğer ve spektral norm tanımlarından faydalanarak $x = 1$ için sınırlara bağlı kalmaksızın tam sonucu tarafımızca elde edilmiştir. Beşinci bölümde, bir önceki bölümde elde edilen sonuçların sayısal örneklerine yer verilmiştir. Altıncı bölümde elde etmiş olduğumuz sonuçlar ile literatürde var olan sonuçlar tablolar ile karşılaştırılmıştır. Yedinci bölümde sonuç ve öneriler kısmı yer almaktadır.

Üreteç fonksiyonlarının Cauchy çarpımı yöntemi sayesinde bulmuş olduğumuz toplamlar vasıtası ile $r-$circulant matrisin Euclidean normu hesaplanabilmiştir. Euclidean normun tam sonucunun elde edilmesiyle birlikte spektral norm aralığının daha dar olduğu gözükmektedir. Bu tezimiz literatüre katkı sağlayacağı için önem taşımaktadır.

KAYNAKLAR

1. Frontczak, R. (2018). Some Fibonacci-Lucas-Tribonacci-Lucas identities. *The Fibonacci Quarterly*, 56(3), 263–274.

2. Catalan, E. C. (1883). Notes sur la théorie des fractions continues et sur certaines séries. *Mémoires de l'Académie Royale de Belgique* 45, 1–182.

3. Singmaster, D. (1970). Some counterexamples and problems on linear recurrence relations. *The Fibonacci Quarterly*, 8(3), 264–267.

4. da Fonseca, C. M., Kızılateş, C., Saraiva, P. ve Shannon, A. G. (2025). Generalised Leonardo numbers. *Logic Journal of the IGPL*, jzaf005.

5. Catarino, P. M. M. C. ve Borges, A. (2019). On Leonardo numbers, *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, 89(1), 75–86.

6. Alp, Y. ve Koçer, E. G. (2021). Some properties of Leonardo numbers. *Konuralp Journal of Mathematics*, 9(1), 183–189.

7. Alp, Y. (2024). Some properties of the generalized Leonardo numbers. *Journal of New Theory*, 47, 52–60.

8. Alp, Y. ve Koçer, E. G. (2025). Bivariate Leonardo polynomials and Riordan arrays. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 31(2), 236–250.

9. Catarino, P. ve Borges, A. (2024). A note on incomplete Leonardo numbers. *Integers*, 20, A43.

10. Özimamoğlu, H. (2024). A new generalization of Leonardo hybrid numbers with q-integers. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 55, 325–334.

11. Shannon, A. G. (2019). A note on generalized Leonardo numbers. *Notes Number Theory Discrete Mathematics*, 25(3), 97–101.

12. Tan, E. ve Leung H. H. (2023). On Leonardo p-numbers. *Integers*, 23, A7

13. Kürüz, F., Dağdeviren, A. ve Catarino, P. (2021). On Leonardo pisano hybrinomials. *Mathematics*, 9(22), 2923.

14. Kumari, M. ve Prasad, K. (2025). The Leonardo polynomials and their algebraic properties. *Proceedings of the Indian National Science Academy*, 91(2), 662–671.

15. Davis, P. J. (1979). *Circulant Matrices* (First Edition). New York: Wiley, 66–70.

16. Solak, S. (2005). On the norms of circulant matrices with the Fibonacci and Lucas numbers. *Applied Mathematics and Computation*, 160(1), 125–132.

17. Kocer, E. G. (2007). Circulant, negacyclic and semicirculant matrices with the modified Pell, Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 36(2), 133–142.

18. Alptekin, E. G., Mansour, T. ve Tuglu, N. (2007). Norms of circulant and semicirculant matrices with Horadam's numbers. *Ars Combinatoria*, 85, 353–359.

19. Bahsi, M. ve Solak, S. (2010). On the circulant matrices with arithmetic sequence. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 5(25), 1213–1222.

20. Yazlik, Y. ve Taskara, N. (2013). On the norms of an $r-$circulant matrix with the generalized k-Horadam numbers. *Journal of Inequalities and Applications*, 2013(1), 394.

21. Bahsi, M. (2015). On the norms of circulant matrices with the generalized Fibonacci and Lucas numbers. *Turkic World Mathematical Society Journal of Pure and Applied Mathematics*, 6(1), 84–92.

22. Solak, S. ve Bahşi, M. (2016). On the norms of circulant matrices with the complex Fibonacci and Lucas numbers. *Gazi University Journal of Science*, 29(2), 487–490.

23. Solak, S. ve Bahşi, M. (2018). Some properties of circulant matrices with Ducci sequences. *Linear Algebra and its Applications*, 542, 557–568.

24. Solak, S., Bahşi, M. ve Kan, O. (2018). On the circulant matrices with Ducci sequences and Fibonacci numbers. *Filomat*, 32(15), 5501–5508.

25. Baran, F. Y. ve Yetiş, T. (2019). On the norm of circulant matrices via generalized Tetranacci numbers. *Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 6(2), 562–572.

26. Yılmaz, F., Ertas, A. ve Arpacı, S. (2025). Some results on circulant matrices involving Fibonacci polynomials. *AIMS Mathematics*, 10(4), 9256–9273.

27. Cline, R. E., Plemmons, R. J. ve Worm, G. (1974). Generalized inverses of certain Toeplitz matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, 8(1), 25–33.

28. Kızılateş, C. ve Tuglu, N. (2016). On the bounds for the spectral norms of geometric circulant matrices. *Journal of Inequalities and Applications*, 2016(1), 312.

29. Shen, S. ve Chen, J. (2010). On the spectral norms of r-circulant matrices with the $k-$Fibonacci and $k-$Lucas numbers. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 5(12), 569–578.

30. Shen, S. ve Chen, J. (2010). On the bounds for the norms of $r-$circulant matrices with Fibonacci and Lucas numbers. *Applied Mathematics and Computation*, 216(10), 2891–2897.

31. Bahsi, M. ve Solak, S. (2014). On the norms of $r-$circulant matrices with the hyper-Fibonacci and Lucas numbers. *Journal of Mathematics Inequalities*, 8(4), 693–705.

32. Tuglu, N. ve Kızılateş, C. (2015). On the norms of circulant and $r-$circulant matrices with the hyperharmonic Fibonacci numbers. *Journal of Inequalities and Applications*, 2015(1), 253.

33. Bueno, A. C. F. (2016). Right circulant matrices with ratio of the elements of Fibonacci and geometric sequence. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 22(3), 79–83.

34. Sintunavarat, W. (2016). The upper bound estimation for the spectral norm of r-circulant and symmetric $r-$circulant matrices with the Padovan sequence. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications,* 9(1), 92–101.

35. Bahsi, M. ve Solak, S. (2018). On the $g-$circulant matrices. *Communications of the Korean Mathematical Society*, 33(3), 695–704.

36. Kızılateş, C. ve Tuglu, N. (2018). On the norms of geometric and symmetric geometric circulant matrices with the Tribonacci number. *Gazi University Journal of Science*, 31(2), 555–567.

37. Shi, B. (2018). The spectral norms of geometric circulant matrices with the generalized k-Horadam numbers. *Journal of Inequalities and Applications*, 2018(1), 14.

38. Radičić, B. (2019). On $k-$circulant matrices involving geometric sequence. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 48(3), 805–817.

39. Uygun, Ş. (2022). On the bounds for the spectral norms of geometric circulant matrices with generalized Jacobsthal and Jacobsthal Lucas numbers. *Montes Taurus Journal of Pure and Applied Mathematics*, 4(1), 107–119.

40. Kumari, M., Prasad, K., Özkan, E. ve Tanti, J. (2023). On the norms and eigenvalues of $r-$circulant matrices with $k-$Mersenne and $k-$Mersenne–Lucas numbers. *Mathematical Notes*, 114(3), 522–535.

41. Arpacı, S. ve Yılmaz, F. (2024). Some results on geometric circulant matrices involving the Leonardo numbers. *Notes Number Theory Discrete Mathematics*, 30(1), 34–46.

42. Radičić, B. (2025). On $k-$circulant matrices involving the Lucas numbers of even index. *Mathematica Slovaca*, 75(1), 69–82.

43. Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications* (First Edition). New Jersey: A Wiley-Interscience Publication, 10–150.

44. Ozdemir, G. ve Simsek, Y. (2016). Generating functions for two-variable polynomials related to a family of Fibonacci type polynomials and numbers. *Filomat*, 30(4), 969–975.

45. Brockwell, P. J. ve Davis, R. A. (2006). *Time Series: Theory and Methods* (Second Edition). New York: Springer, 133–138.

46. Taşcı, D. (2017). *Lineer Cebir* (Beşinci Baskı). Ankara: Öziş, 252–260.

47. Horn, R. A. ve Johnson, C. R. (1991). *Topics in Matrix Analysis* (First Edition). Cambridge: Cambridge University Press, 212–240.

48. Horn, R. A. ve Johnson, C. R. (2013). *Matrix Analysis* (Second Edition). New York: Cambridge University Press, 340–371.

49. Mathias, R. (1990). The spectral norm of a nonnegative matrix. *Linear Algebra and its Applications*, 139, 269–284.

50. Panwar, Y. K., Singh, B. ve Gupta, V. K. (2013). Generalized Fibonacci polynomials *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 1, 43–47.



Gazili olmak ayrıcalıktır