HER ÖZ ALTGRUBU LOKAL SONLU GRUBUN NİLPOTENT GENİŞLEMESİ OLAN GRUPLAR

Sevilay AKYOL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NİSAN 2012
ANKARA

HER ÖZ ALTGRUBU LOKAL SONLU GRUBUN NİLPOTENT GENİŞLEMESİ OLAN GRUPLAR

Sevilay AKYOL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NİSAN 2012

ANKARA

Sevilay AKYOL tarafından hazırlanan **"HER ÖZ ALTGRUBU LOKAL SONLU GRUBUN NİLPOTENT GENİŞLEMESİ OLAN GRUPLAR"** adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Aynur ARIKAN
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Dursun TAŞÇI
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU
Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Doç. Dr. Aynur ARIKAN
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Tarih: /04/2012

Bu tez ile Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Sevilay AKYOL

HER ÖZ ALTGRUBU LOKAL SONLU GRUBUN NİLPOTENT GENİŞLEMESİ OLAN GRUPLAR
(Yüksek Lisans Tezi)

Sevilay AKYOL

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Nisan 2012

ÖZET

Bu tez çalışmasında Amel Dilmi'nin "Groups whose proper subgroups are locally finite-by-nilpotent" başlıklı makalesi çalışılmıştır. Bu makalede minimal (LF)N-olmayan gruplar incelenmektedir. İlk olarak, bu makaledeki bazı teoremlerin ispatı için gerekli olan Endimioni ve Traustason'un "On torsion-by-nilpotent groups" adlı makalesi göz önüne alınmıştır. Tezin üçüncü bölümünde bu makaledeki [3] P.Hall' ın iyi bilinen sonucuna benzer olan "H, G nin bir normal altgrubu olsun öyle ki H ve G/H' (LF)N grup ise G, (LF)N gruptur" teoreminin ve dördüncü bölümünde de Amel Dilmi'nin makalesinde verilen "minimal (LF)N-olmayan bir G grubu aşikar olmayan sonlu faktörü bulunmayan sonlu üreteçli mükemmel gruptur öyle ki G/FratG sonsuz basit gruptur" teoreminin daha ayrıntılı ispatı verilmiştir. Ayrıca minimal (LF)N-olmayan gruplar için yapılan ispatların minimal (LF)N_c-olmayan gruplar için de geçerli olduğunun ispatı ayrıntılı olarak verilmiştir. Böylece bu çalışmada Amel Dilmi'nin makalesinin daha açık, ayrıntılı ve kolay anlaşılabilir bir şekli ortaya çıkarılmıştır.

Bilim Kodu : 204.1.025
Anahtar Kelimeler : nilpotent grup, lokal sonlu grup, torsiyon grup
Sayfa Adedi : 62
Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Aynur ARIKAN

GROUPS WHOSE PROPER SUBGROUPS ARE LOCALLY FINITE-BY-NILPOTENT

(M. Sc. Thesis)

Sevilay AKYOL

GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

April 2012

ABSTRACT

In this thesis the paper written by Abel Dilmi titled "Groups whose proper subgroups are locally finite-by-nilpotent" is studied. In this paper minimal non (LF)N–groups are looked into. First of all, to prove a few theorems in this thesis we considered the paper titled "On torsion-by-nilpotent groups" written by Endimioni and Troustason. In the third chapter of this thesis, the theorem is proved that is similar to P.Hall's best known corollary " Let H be a normal subgroup of a group G. If H and G/H′ are (LF)N group then G is (LF)N group" and in the fourth chapter, the theorem is proved that's given in Amel Dilmi's article "If G is a minimal non (LF)N–group, then G is a finitely generated perfect group which has no non-trivial finite factor and such that G/FratG is an infinite simple group" in detail. It is given in detail that the proofs that are made for minimal non (LF)N–groups are also valid for minimal non (LF)N_c-groups. Thus in this paper Amel Dilmi's article is put into more clear, detailed and easily understandable form.

Science Code : 204.1.025
Key Words : nilpotent group, locally finite group, torsion group
Page Number : 62
Adviser : Assoc. Prof. Dr. Aynur ARIKAN

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında ve tamamlanmasında değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, faydalı tavsiyelerde bulunan ve kendisinden çok şey öğrendiğim Sayın Hocam Doç. Dr. Aynur ARIKAN'a, ayrıca bana desteklerinden dolayı aileme, tüm arkadaşlarıma ve sevgili eşime teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$H \leq G$	*H, G* nin altgrubu
$H \lhd G$	*H, G* nin normal altgrubu
G/H	*G* nin *H* ile bölüm grubu
$H \cong K$	*H* ile *K* izomorftur
$\lvert G:H \rvert$	*H* nin *G* içindeki indeksi
$<H,K>$	*H* ve *K* tarafından üretilen grup
$<x>$	*x* tarafından üretilen devirli grup
$x^y = y^{-1}xy$	*x* in *y* ile eşleniği
$[x,y] = x^{-1}x^y$	*x* ve *y* nin komütatörü
$[X_1, X_2]$	$< [x_1, x_2]: x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 >$
G'	$[G,G]$
G_{ab}	G/G'
$G^{(n)}$	$[G^{(n-1)}, G^{(n-1)}]$
$N_G(H)$	*H* nin *G* içindeki normalleyeni
$C_G(a)$	*a* nın *G* içindeki merkezleyeni
$C_G(A)$	*A* nın *G* içindeki merkezleyeni
$Z(G)$	*G* grubunun merkezi
H^{α}	*H* ın α fonksiyonu altındaki görüntüsü
$C_{P^{\infty}}$	Quasidevirli grup
H char *G*	*H, G* nin karakteristik altgrubu
$H^G = < g^{-1}hg : g \in G, h \in H >$	*H* nin *G* içindeki normal kapanışı
H_G	*H* nin *G* içindeki koru

Simgeler	**Açıklama**
$Z_{\alpha}(G)$	*G* grubunun α merkezi
$Z_{\infty}(G)$	*G* nin hipermerkezi
$\gamma_i(G)$	$\gamma_1(G)=G$, $\gamma_i(G)=[\gamma_{i-1}(G),G]$
G^m	$< g^m; g\in G >$
HsnG, $H \lhd\lhd G$	*H, G* nin bir altnormal altgrubu
s(*G,H*)	*H* nin *G* deki altnormallik indeksi
Aut (G)	*G* nin otomorfizmalar kümesi
End (G)	*G* nin endomorfizmalar kümesi
Frat G	*G* nin Frattini grubu
$\varphi(G)$	*G* nin lokal sonlu radikal grubu
$I_{\pi,G}(H)$	*G* de *H* nin π-izolatör kümesi
$\sqrt{H}$, $I_G(H)$	*H* nin *G* içindeki izolatörü
$\delta_G(H)$	[*H,G*]

1. GİRİŞ

X ve Y iki grup sınıfı olsun. Eğer G bir grup ise $N \triangleleft G$ iken $N \in X$ ve $G/N \in Y$ ise G grubuna X tipindeki bir grubun Y tipindeki bir grupla genişlemesi denir. Eğer G nin G/N nilpotent olacak şekilde normal lokal sonlu N altgrubu varsa G ye bir $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ (locally finite-by-nilpotent) grup denir.

G bir grup ve X grupların bir sınıfı olsun. G grubunun her öz altgrubu bu sınıfa ait ve G grubu bu sınıfa ait değilse G ye minimal X-olmayan grup denir. X gruplarının çeşitli sınıfları için [5], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14]'de birçok sonuç elde edilmiştir. Bu tezde özellikle minimal $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$-olmayan gruplar incelenmiştir ve bu gruplarla ilgili çeşitli araştırmalar yapılmıştır.

Özellikle M. Xu tarafından 1996'da sonlu üreteçli ve sonsuz üreteçli minimal $\mathcal{FN}$(finite-by-nilpotent)-olmayan gruplar incelenmiştir ve [5]'deki makalesinde ispatladığı teoremle minimal $\mathcal{FN}$-olmayan gruplar ile $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ grupların ilişkisini belirlemiştir. Bu teorem aşağıda verilmiştir.

<u>Teorem</u>

Bir G grubunun sonsuz üreteçli minimal $\mathcal{FN}$-olmayan grup olması için gerek ve yeterli koşul G nin aşağıdaki şartlardan birini sağlamasıdır.

(i) Mükemmel olmayan minimal $\mathcal{FA}$(finite-by-abelian)-olmayan grup,

(ii) Mükemmel olmayan $\mathcal{AN}_*$ grup ($\mathcal{AN}_*$; her altgrubu altnormal olan minimal nilpotent olmayan grup),

(iii) Mükemmel lokal nilpotent minimal nilpotent olmayan grup.

M. Xu bu teoremden yola çıkarak sonsuz üreteçli minimal $\mathcal{FN}$-olmayan grubun $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ grup olduğunu göstermiştir.

Xu dan önce 1979'da Olshanski minimal $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$-olmayan grupların varlığını araştırmış ve bu grupların yapısını [6]'da gösterdiği gibi öz altgrupları devirli olan sonlu üreteçli basit ve torsiyonsuz grup olarak belirlemiştir. Amel Dilmi ise bu gruplar hakkındaki çalışmalara devam etmiş ve 2007'de minimal $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$-olmayan gruplar ile ilgili çalışmaları biraz daha genişletmiştir.

1996'da M. Xu tarafından [5]'deki makalesinde "G sonlu üreteçli minimal $\mathcal{FN}$-olmayan grup olsun. O zaman G aşikar olmayan sonlu faktörü olmayan mükemmel gruptur öyle ki $G/FratG$ sonsuz basit gruptur" teoremi ispatlanmıştır. Amel Dilmi "Groups whose proper subgroups are locally finite-by-nilpotent" adlı makalesinde M. Xu' nun bu teoremini minimal $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$-olmayan gruplara genişleterek ispatlamıştır. Ayrıca $c>0$ bir tamsayı ve $\mathcal{N}_c$ nilpotentlik sınıfı en çok c olan grupların bir sınıfı olmak üzere minimal $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$-olmayan gruplar için yapılanlar minimal $(\mathcal{LF})\mathcal{N}_c$-olmayan gruplar için de yapılmıştır. Yine bu makaledeki Önerme 2.1'de sonsuz üreteçli minimal $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$-olmayan grubun bulunmadığı da ispatlanmıştır.

Tezin ilk bölümünde, yukarıda söylenenleri ispatlamak için kullanılan Endimioni ve Traustason'nun "On torsion-by-nilpotent groups" adlı makalesinden yararlanılmış ve özellikle bu makaledeki P.Hall' ın iyi bilinen sonucuna benzer olan " H, G nin bir normal altgrubu olsun öyle ki H ve G/H' $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ grup ise G, $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ gruptur" teoremi kullanılmıştır.

2. BAZI HAZIRLIK TANIM VE SONUÇLARI

2.1. Tanım

G bir grup ve $x,y\in G$ olsun. $x^y=y^{-1}xy$ elemanına x in y ile eşleniği(konjugesi) denir. X ve Y, G nin boştan farklı altkümesi olsun. G nin X in Y ile eşleniği olan altgrubu

$$X^Y=\langle x^y : x\in X,\ y\in Y\rangle$$

olarak tanımlanır.

2.2. Tanım

G bir grup ve $N\leq G$ olsun. Her $g\in G$ ve $n\in N$ için $g^{-1}ng\in N$ ise o zaman N ye G nin bir normal altgrubu denir ve $N\lhd G$ şeklinde gösterilir.

2.3. Tanım

G bir grup olsun. G nin 1 den ve kendisinden başka normal altgrubu yoksa G grubuna basit grup denir.

2.4. Tanım

G bir grup ve H, G nin bir altgrubu olsun. H nın G içindeki kosetlerinin kümesinin kardinalitesine H nın G içindeki indeksi denir ve $|G:H|$ ile gösterilir.

2.5. Tanım

G bir grup olsun. G den G ye bir homomorfizmaya G nin endomorfizması, G den G ye bir izomorfizmaya ise G nin otomorfizması denir. G nin bütün endomorfizmalarının kümesi $End(G)$ ve otomorfizmalarının kümesi $Aut(G)$ ile gösterilir. *Aut(G), End(G)* nin bir altkümesidir. Ayrıca *Aut(G)* fonksiyon bileşke işlemine göre bir gruptur.

2.6. Tanım

H, *G* nin bir altgrubu olmak üzere tüm $\alpha \in EndG$ için $H^{\alpha} \leq H$ ise *H* ya *G* de fully-invariant denir.

2.7. Tanım

G bir grup ve *H, G* nin bir altgrubu olsun. Eğer her $\alpha \in Aut(G)$ için $H^{\alpha} \leq H$ ise *H* ya *G* nin karakteristik altgrubu denir ve *H char G* ile gösterilir. Aslında her $\alpha \in Aut(G)$ için $H^{\alpha\text{-}1} \leq H$ $(H^{\alpha} = \alpha(H))$ olduğundan $H^{\alpha} = H$ dır.

Bir grubun Fully-invariant altgrupları karakteristiktir ve karakteristik altgruplarda normaldir.

2.8. Teorem

$H,K \leq G$ için $K \lhd G$ ve *H char K* $\lhd G$ olsun. O zaman $H \lhd G$ dir [3].

İspat

K, G nin normal altgrubu olduğundan her $g \in G$ için $g^{-1}Kg = K$ dır. Böylece

$$\begin{aligned} \varphi_g : K &\rightarrow K \\ k &\rightarrow g^{-1}kg \end{aligned}$$

bir otomorfizmadır. *H char K* olduğundan her $g \in G$ için $H^{\varphi_g} = H$ dır. Yani; her $g \in G$ için $g^{-1}Hg = H$ olduğundan *H*, *G* de normaldir.

2.9. Tanım

G bir grup *ve* $x_1, x_2, \ldots$ G nin elemanları olsun.

$$[x_1, x_2] = x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2 = x_1^{-1} x_1^{x_2}$$

elemanına x_1 ve x_2 nin komütatörü denir. Daha genel olarak $n \geq 2$ ağırlıklı bir basit komütatör, ardıl olarak

$$[x_1, \ldots, x_n] = [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n]$$

şeklinde tanımlanır. Burada $[x_1] = x_1$ olarak kabul edilir. $x, y \in G$ için $[x, \underbrace{y, \ldots y}_{n}]$ komütatörü $[x,_n y]$ ile gösterilir.

$X_1, X_2, \ldots$ G grubunun boştan farklı alt kümeleri olsun. X_1 ve X_2 nin komütatör altgrubu

$$[X_1, X_2] = \langle [x_1, x_2] \; ; \; x_1 \in X_1 \text{ ve } x_2 \in X_2 \rangle$$

olarak tanımlanır. Burada $X_1 = X_2 = G$ ise $[G,G]$ komütatör grubuna G nin komütatör altgrubu denir ve G' ile gösterilir. Daha genel olarak $n \geq 2$ için

$$[X_1, \ldots, X_n] = [[X_1, \ldots, X_{n-1}], X_n] \text{ ve } [X_1] = \langle X_1 \rangle$$

dir. Burada $G' = G$ ise G ye mükemmel grup denir ve $[G,G] = G$ dir.

2.10. Tanım

G bir grup olsun. Eğer $1=G_0,G_1,...,G_n=G$, G nin altgruplarının bir dizisi ve $G_i \lhd G_{i+1}$ (i=0,1,2,…,n-1) olmak üzere

$$1=G_O \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G$$

ise bu diziye G nin bir sonlu serisi denir. G_{i+1}/G_i bölüm gruplarına serinin faktörleri ve G_i gruplarına da serinin terimleri denir. Eğer G_i ler farklı ise n negatif olmayan tamsayısına serinin uzunluğu denir.

T=$\{H_\alpha \mid \alpha \leq \beta\}$ bir β ordinaline eşit veya küçük ordinallerle indekslenen G nin altgruplarının bir kümesi olsun. Eğer T kümesi;

(a) $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ise $H_{\alpha_1} \leq H_{\alpha_2}$

(b) $H_\alpha \lhd H_{\alpha+1}$

(c) H_0=1 ve H_β=G

(d) Eğer λ limit ordinal ise $H_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} H_\alpha$

şartını sağlıyorsa T ye G nin bir artan serisi denir. Artan bir seriyi

$$1=H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_\beta = G$$

şeklinde yazmak mümkündür. Eğer T kümesi

(a) $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ve $H_{\alpha_1} \geq H_{\alpha_2}$

(b) H_0=G ve H_β=1

(c) $H_{\alpha+1} \lhd H_\alpha$

(d) Eğer λ limit ordinal ise $H_\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} H_\alpha$

şartını sağlıyorsa T ye G nin bir azalan serisi denir. Azalan bir seriyi

$$1 = H_\beta \lhd \cdots \lhd H_2 \lhd H_1 \lhd H_0 = G$$

şeklinde yazmak mümkündür. $1 = G_O \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G$ serisinde G_{i+1}/G_i abeliyan ise bu seriye abeliyan seri denir.

2.11. Tanım

G bir grup ve H, G nin bir altgrubu olsun. Eğer G nin

$$H = H_r \lhd H_{r-1} \lhd \cdots \lhd H_0 = G$$

olacak şekilde $H_0, H_1, \ldots, H_r$ altgrupları varsa H, G de altnormaldir denir. Burada r sonlu ve $i=0,1,\ldots,r-1$ için $H_{i+1} \lhd H_i$ dir. Genellikle $H \lhd^r G$, $H \lhd\lhd G$ veya H *sn* G ile gösterilir.

H_r=H olacak şekildeki en küçük $r \geq 0$ tamsayısına H nın G içindeki altnormallik indeksi denir ve $s(G:H)$ ile gösterilir.

2.12. Tanım

X, G nin boştan farklı bir altkümesi olsun. G nin X i içeren bütün normal altgruplarının kesişimine X in G içindeki normal kapanışı denir. X^G =< $g^{-1}Xg$: $g \in G$> ile gösterilir. X^G, G nin X i içeren en küçük normal altgrubudur.

G bir grup ve X, G nin boştan farklı bir altkümesi olsun. $X^{G,0}$=G ve her $i \geq 0$ için $X^{X^{G,i}} = X^{G,i+1}$ olarak tanımlansın. O zaman G nin

$$\cdots \lhd X^{G,2} \lhd X^{G,1} \lhd X^{G,0} = G$$

serisi elde edilir. Bu seriye X in G içindeki normal kapanış serisi denir.

2.13. Tanım

G bir grup ve X, G nin boştan farklı bir altkümesi olsun. G de X in koru, G nin X i içeren bütün normal altgruplarının birleşimi olarak tanımlanır ve X_G ile gösterilir. Ayrıca G nin bir H altgrubu için $H_G \lhd G$ ve

$$H_G = \bigcup_{g \in G} g^{-1}Hg$$

dır.

2.14. Tanım

G bir grup olsun. Eğer her $x \in G$ ve her n pozitif tamsayısı için $x = y^n$ olacak şekilde bir $y \in G$ var ise o zaman G ye köklü(radicable) grup denir. Toplamsal gruplarda köklü terimi yerine bölünebilir(divisible) terimi kullanılır. Eğer her n pozitif tamsayısı için G^n=G ise G ye yarı-köklü (quasi-radicable) grup denir. Burada

$$G^n = < g^n : g \in G >$$

dir.

2.15. Tanım

G bir grup ve $1=G_O \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G$, G nin bir serisi olsun. Eğer her $0 \leq i \leq n$ için G_{i+1}/G_i değişmeli ise G ye bir çözülebilir grup denir. G nin bu şekildeki serilerinin en küçüğünün uzunluğuna G nin komütatör uzunluğu denir.

2.16. Tanım

G bir grup ve $a \in G$ olsun.

$$C_G(a)=\{ x\in G : xa=ax \}=\{x\in G : [x,a]=1\}$$

kümesine a nın G içindeki merkezleyeni denir. Eğer $N \leq G$ ise

$$C_G(N)=\{ x\in G : \text{her } n\in N \text{ için } [n,x]=1\}$$

kümesine N nin G içindeki merkezleyeni denir. $C_G(a)$ ve $C_G(N)$, G nin altgruplarıdır. Özel olarak $N \lhd G$ ise $C_G(N) \lhd G$ dir. $C_G(G)$ altgrubuna G nin merkezi denir ve $Z(G)$ ile gösterilir. Ayrıca $Z(G) \lhd G$ ve $Z(G)$ G nin karakteristik altgrubudur.

2.17. Tanım

G bir grup ve H, G nin bir altgrubu olsun.

$$G_H = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$$

altgrubuna H nın G içindeki normalleyeni denir ve $N_G(H)$ ile gösterilir. $H \lhd N_G(H)$ ve $N_G(H)$, H nın normal olduğu G nin en büyük altgrubudur.

2.18. Tanım

G bir grup ve $G^{(0)}=G$ olsun. $i>0$ olmak üzere

$$G^{(i)}=[G^{(i-1)},G^{(i-1)}]$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $\cdots \leq G^{(2)} \leq G^{(1)} \leq G$ serisine G nin komütatör serisi denir. Burada $G^{(1)}=G'$ ve $G^{(2)}=G''$ dir. Eğer G bir çözülebilir grup ise o zaman bir $n\geq 0$ tamsayısı için $G^{(n)}=1$ dir. Bu şekildeki en küçük $n\geq 0$ tamsayısı G nin komütatör uzunluğuna eşittir.

Eğer bir çözülebilir grubun çözülebilir uzunluğu 2 ise bu gruba metabeliyan grup denir.

2.19. Tanım

G bir grup $Z_0(G)=1$, $Z_1(G)=Z(G)$ olsun. Eğer α limit ordinal ise;

$$Z_\alpha(G)=\bigcup_{\beta<\alpha} Z_\beta(G)$$

α limit ordinal değilse $Z_\alpha(G)$,

$$Z_\alpha(G)/Z_{\alpha-1}(G)=Z\left(G/Z_{\alpha-1}(G)\right)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu şekilde devam edilirse öyle bir $\beta\geq 0$ ordinali vardır ki her $\alpha\geq\beta$ için $Z_\alpha(G)=Z_\beta(G)$ dir. $Z_\beta(G)$ ye G nin hipermerkezi denir.

$$1 = Z_0(\mathrm{G}) \leq Z_1(\mathrm{G}) \leq \cdots$$

serisine G nin genelleştirilmiş yukarı merkez serisi denir. $Z_\beta(G)=G$ ise G bir hipermerkez gruptur. Bir n doğal sayısı için $Z_n(G)=G$ ise G nilpotent gruptur. Bu şekildeki en küçük n tamsayısına G nin nilpotentlik sınıfı denir.

2.20. Tanım

G bir grup $\gamma_1(G)=G$ olsun. Eğer α limit ordinal ise

$$\gamma_\alpha(G) = \bigcap_{\beta<\alpha} \gamma_\beta(G)$$

α limit ordinal değil ise

$$\gamma_\alpha(G) = [\gamma_{\alpha-1}(G), G]$$

şeklinde tanımlansın. $\cdots \leq \gamma_2(G) \leq \gamma_1(G) = G$ ye G nin genelleştirilmiş aşağı merkez serisi denir. Eğer bir n tamsayısı için $\gamma_{n+1}(G)=1$ ise G nilpotenttir. Bu şekildeki doğal sayıların en küçüğü n ise G nin nilpotentlik sınıfı n dir.

2.21. Tanım

G bir grup olsun. Eğer G nin her elemanın mertebesi sonlu ise G ye torsiyon(periyodik) grup denir. Eğer G nin birimden başka hiçbir elemanının mertebesi sonlu değilse G ye torsiyonsuz grup denir. Eğer G nin en az bir elemanının mertebesi sonsuz ise G ye periyodik olmayan grup denir.

G bir nilpotent grup olsun. O zaman G de sonlu mertebeli elemanların kümesi T, G nin fully-invariant altgrubudur öyle ki G/T torsiyonsuzdur.

2.22. Tanım

Bir grubun her sonlu üreteçli altgrubu nilpotent ise bu gruba lokal nilpotent denir.

2.23. Tanım

G bir grup ve p asal sayı olsun. Her $g \in G$ için $g^{p^n} = 1$ olacak şekilde bir $n \geq 0$ tamsayısı varsa, başka bir deyişle G nin her elemanının mertebesi p nin bir kuvveti ise o zaman G ye bir p-grubu denir.

2.24. Tanım

X boştan farklı bir küme olsun. Elemanları gruplardan oluşan ve aşağıdaki özellikleri sağlayan X sınıfına, bir teorik sınıf ya da grup sınıfı denir.

i) $G \in X$ için $G_1 \cong G$ ise $G_1 \in X$ dir.

ii) X bir birim(veya aşikar) grup içerir.

X grupların bir sınıfı olsun. $G \in X$ ve H, G grubunun bir altgrubu olsun. Eğer $H \in X$ ise X altgrup kapalıdır denir.

H, G grubunun normal altgrubu olmak üzere $H \in X$ ve $G/H \in X$ olduğunda eğer $G \in X$ oluyorsa X genişleme kapalıdır denir.

2.25. Tanım

G bir grup ve P de grupların bir özelliği olsun. Eğer G nin her öz altgrubu P yi sağlıyor fakat G sağlamıyor ise G ye minimal P-olmayan grup denir.

2.26. Tanım

X ve Y iki grup sınıfı olsun. Eğer G bir grup ise $N \triangleleft G$ iken $N \in X$ ve $G/N \in Y$ ise G grubuna X tipindeki bir grubun Y tipindeki bir grupla genişlemesi denir.

2.27. Tanım

G bir grup olsun. Eğer G nin G/N sonlu olacak şekilde normal nilpotent N altgrubu varsa G ye bir $\mathcal{NF}$-grup denir. N nin nilpotentlik sınıfı $\leq m$ *ise* G ye bir $\mathcal{N}_m\mathcal{F}$-grup denir.

G bir grup olsun. Eğer G nin G/N nilpotent olacak şekilde normal sonlu N altgrubu varsa G ye bir $\mathcal{FN}$-grup denir.

2.28. Tanım

G bir grup olsun. Eğer G nin G/N nilpotent olacak şekilde normal lokal sonlu N altgrubu varsa G ye bir $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$-grup denir.

2.29. Tanım

G bir grup olsun. Eğer G nin aşikar olmayan her sonlu üreteçli altgrubunun sonlu indeksli bir öz altgrubu varsa G ye lokal dereceli grup denir. Diğer bir deyişle G nin her aşikar olmayan sonlu üreteçli altgrubunun aşikar olmayan sonlu görüntüsü varsa G ye lokal dereceli grup denir.

Ayrıca sonlu indeksli bir öz altgrup içeren sonlu üreteçli grup lokal dereceli gruptur.

2.30. Tanım

G bir grup ve H, G nin bir altgrubu olsun. $H \leq G$ ve $H<K \leq G$ iken $K=G$ elde edilirse

H altgrubuna G nin maksimal altgrubu denir.

2.31. Tanım

X kısmi sıralı bir küme olsun. Her biri boştan farklı X_0 kümesi en az bir maksimal eleman içerirse bu kümeye maksimallik şartını sağlar denir.

2.32. Tanım

G bir grup olsun. G nin bütün maksimal altgruplarının kesişimine G nin Frattini altgrubu denir. G nin maksimal altgrubu yoksa Frattini altgrup G ye eşit alınır. Bu altgrup karakteristiktir ve $FratG$ şeklinde gösterilir.

2.33. Teorem

Aşikar olmayan sonlu üreteçli grup Frattini altgruba eşittir [3].

2.34. Teorem

Herhangi bir G grubunda Frattini altgrup, G nin üreteci olmayan elemanların kümesine eşittir [3].

İspat

$g \in FratG$ olmak üzere $G = < g, X >$ fakat $G \neq < X >$ olduğunu kabul edelim. O zaman $g \notin < X >$ dir. Bu yüzden [3, 3.3.14] den $< X > \leq M$ ve $g \notin M$ şartlarını sağlayan M maksimal altgrubu vardır. Şimdi eğer $M < H \leq G$ ise $g \in H$ ve $H = G$ dir. Bu nedenle *M,* G grubunda maksimaldir. Fakat $g \in FratG \leq M$ ve bu yüzden $G = < g, X > = M$ dir. Bu ise çelişkidir. Böylece g bir üreteç değildir. Yani $g \in FratG$ ise $G = < X >$ dir.

2.35. Teorem

G bir grup ve $x,y,z\in G$ olsun.

(i) $[x,y]=[y,x]^{-1}$

(ii) $[xy,z]=[x,z]^y[y,z]$ ve $[x,yz]=[x,z][x,y]^z$

(iii) $[x,y^{-1}]=([x,y]^{y^{-1}})^{-1}$ ve $[x^{-1},y]=([x,y]^{x^{-1}})^{-1}$

(iv) $[x,y^{-1},z]^y[y,z^{-1},x]^z[z,x^{-1},y]^x=1$

dir [15].

İspat

(i) $[y,x]^{-1}=(y^{-1}x^{-1}yx)^{-1}=x^{-1}y^{-1}xy=[x,y]$

(ii) $[x,z]^y[y,z]=y^{-1}[x,z]y[y,z]$

$$=y^{-1}x^{-1}z^{-1}xzyy^{-1}z^{-1}yz$$

$$=y^{-1}x^{-1}z^{-1}xyz$$

$$=(xy)^{-1}z^{-1}(xy)z$$

$$=[xy,z]$$

$[x,z][x,y]^z=[x,z]z^{-1}[x,y]z$

$$[x,z]z^{-1}[x,y]z = x^{-1}z^{-1}xzz^{-1}x^{-1}y^{-1}xyz$$

$$= x^{-1}z^{-1}y^{-1}\ xyz$$

$$= x^{-1}(yz)^{-1}x(yz)$$

$$= [x, yz]$$

(iii) $([x,y]^{y^{-1}})^{-1} = (y[x,y]y^{-1})^{-1}$

$$= (yx^{-1}y^{-1}xyy^{-1})^{-1}$$

$$= (yx^{-1}y^{-1}x)^{-1}$$

$$= x^{-1}yxy^{-1}$$

$$= [x, y^{-1}]$$

$$([x,y]^{x^{-1}})^{-1} = (x[x,y]x^{-1})^{-1}$$

$$= (xx^{-1}y^{-1}xyx^{-1})^{-1}$$

$$= (y^{-1}xyx^{-1})^{-1}$$

$$= xy^{-1}x^{-1}y$$

$$= [x^{-1}, y]$$

(iv) $[x, y^{-1}, z]^{y}[y, z^{-1}, x]^{z}[z, x^{-1}, y]^{x}=1$ olduğunu gösterelim.

$u=xz\,x^{-1}yx$, $v=yx\,y^{-1}zy$ ve $w=zy\,z^{-1}xz$ olsun. O zaman

$$[x, y^{-1}, z]^{y} = y^{-1}[[x, y^{-1}], z]y$$

$$= y^{-1}[x, y^{-1}]^{-1}z^{-1}[x, y^{-1}]zy$$

$$= y^{-1}[y^{-1}, x]z^{-1}[x, y^{-1}]zy$$

$$= y^{-1}yx^{-1}y^{-1}xz^{-1}x^{-1}yxy^{-1}zy$$

$$=(xzx^{-1}yx)^{-1}yxy^{-1}zy$$

$$=u^{-1}v$$

$$[y, z^{-1}, x]^{z} = z^{-1}[[y, z^{-1}], x]z$$

$$=z^{-1}[y, z^{-1}]^{-1}x^{-1}[y, z^{-1}]xz$$

$$=z^{-1}[z^{-1}, y]x^{-1}[y, z^{-1}]xz$$

$$=z^{-1}zy^{-1}z^{-1}yx^{-1}y^{-1}zyz^{-1}xz$$

$$=(yxy^{-1}zy)^{-1}zyz^{-1}xz$$

$$=v^{-1}w$$

$$[z, x^{-1}, y]^{x} = x^{-1}[[z, x^{-1}], y]x$$

$$= x^{-1}[[z,x^{-1}]^{-1}y^{-1}[z,x^{-1}]yx$$

$$= x^{-1}[x^{-1},z]y^{-1}[z,x^{-1}]yx$$

$$= x^{-1}xz^{-1}x^{-1}zy^{-1}z^{-1}xzx^{-1}yx$$

$$= (zyz^{-1}xz)^{-1}xzx^{-1}yx$$

$$= w^{-1}u$$

dir. O halde

$$[x,y^{-1},z]^{y}[y,z^{-1},x]^{z}[z,x^{-1},y]^{x} = u^{-1}vv^{-1}ww^{-1}u = 1$$

dir.

2.36. Teorem

X bir grubun altkümesi ve K da altgrubu olsun. O zaman

(i) $X^{K} = < X,[X,K] >$

(ii) $[X,K]^{K} = [X,K]$

(iii) $K = < Y >$ ise $[X,K] = [X,Y]^{K}$

dır [3].

2.37. Teorem

G bir grup ve H ve K, G nin altgrupları olsun. $H=\langle x\rangle$ ve $K=\langle y\rangle$ ise o zaman

$$[H,K]=[X,Y]^{HK}$$

dır [3].

2.38. Teorem (Üç Altgrup Lemma)

H, K ve L G nin altgrupları olsun. $[H,K,L]$, $[K,L,H]$ ve $[L,H,K]$ nın herhangi ikisi G nin normal bir altgrubunda içerilirse üçüncü de içerilir [3].

İspat

Teorem 2.37 den $[H,K,L]$, $h\in H$, $k\in K$ ve $l\in L$ olmak üzere $[h,k^{-1},l]$ şeklinde komütatörlerin eşlenikleri tarafından üretilir. $[K,L,H]$ ve $[L,H,K]$ içinde benzer şekildedir. Teorem 2.35 (iv) den $[h,k^{-1},l]$, $[k,l^{-1},h]$ ve $[l,h^{-1},k]$ nin herhangi ikisi G nin herhangi bir altgrubuna ait ise üçüncüde aittir.

2.39. Teorem

G bir grup ve $a,b\in G$ olsun. O zaman $[a,b]^a=[a,b]$ ise her $n\in\mathbb{Z}$ için

$$[a^n,b]=[a,b]^n$$

dir [15].

İspat

İspatı *n>0* için *n* üzerine indüksiyonla yapalım.

n=1 için iddia açıktır. *n>1* olmak üzere iddia *n-1* için doğru olsun. *n* için iddianın doğru olduğunu gösterelim. *n-1* için iddia doğru ise $[a^{n-1},b]=[a,b]^{n-1}$ dir. Ayrıca

$$[a,b]^{a^k} = ([a,b]^a)^{a^{k-1}} = ([a,b])^{a^{k-1}} = [a,b]^a = [a,b]$$

dir.

$$[a^n,b]=[aa^{n-1},b]$$

$$= [a,b]^{a^{n-1}}[a^{n-1},b]$$

$$= [a,b][a^{n-1},b]$$

$$= [a,b][a,b]^{n-1}$$

$$= [a,b]^n$$

Bundan dolayı *n>0* için iddia doğrudur. Şimdi *n<0* için iddianın doğru olduğunu gösterelim. *–n>0* olduğundan ilk kısımda gösterildiği gibi

$$e= [a^{-n}a^n,b]$$

$$= [a^{-n},b]^{a^n}[a^n,b]$$

$$= ([a,b]^{-n})^{a^n}[a^n,b]$$

$$= [a,b]^{-n}[a^n,b]$$

Buradan $[a^n, b] = [a,b]^n$ dir. O halde her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$[a^n, b] = [a,b]^n$$

dir.

2.40. Tanım

G bir sonlu grup, p bir asal sayı, k, m doğal sayılar ve $(k, p)=1$ olmak üzere $|G| = kp^m$ olsun. O zaman G nin mertebesi p^m olan p-altgrubuna Sylow p-altgrubu denir.

2.41. Teorem

G sonlu bir grup olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) G nilpotenttir.

(ii) G nin her öz altgrubu altnormaldir.

(iii) G normalleyen şartlarını sağlar.

(iv) G nin her maksimal altgrubu normaldir.

(v) G, Sylow altgruplarının direkt çarpımıdır [3].

2.42. Tanım

Lokal nilpotent faktörleri olan bir yükselen merkez serisine sahip olan gruba radikal grup denir. G nin lokal sonlu radikal grubu $\varphi(G)$ olarak tanımlanır. Yani $\varphi(G)$, G

nin bütün lokal sonlu altgruplarının çarpımıdır. Böylece $\varphi(G)$ lokal sonlu ve $\varphi(G/\varphi(G))$ aşikardir.

2.43. Teorem

H, bir G grubunun sonlu indeksli altgrubu ve $|G:H|=n$ ise o zaman H nin G içindeki koru H_G, G de sonlu indeksli ve $|G:H_G| \mid n!$ dir [3].

2.44. Teorem

N bir G grubunun normal altgrubu olsun. Eğer N ve G/N' nilpotent ise G nilpotenttir [3].

2.45. Teorem

G her öz altgrubu $\mathcal{FN}$ olan sonlu üreteçli lokal dereceli bir grup olsun. O halde $G \in \mathcal{FN}$ dir [9].

2.46. Teorem

G her öz altgrubu nilpotent olan torsiyonsuz lokal nilpotent bir grup olsun. O zaman G nilpotenttir [13].

2.47. Teorem

Sonlu üreteçli çözülebilir torsiyon grup sonludur [3].

2.48. Tanım

$G=\left\langle c_i : c_1^p = 1, c_{i+1}^p = c_i, i = 1,2,... \right\rangle$ şeklinde tanımlı G grubuna bir lokal devirli p-grubu veya prüfer tipli grup veya quasidevirli grup denir ve C_{p^∞} ile gösterilir. C_{p^∞} grup her öz altgrubu sonlu devirli grup olan sonsuz bir p-grubudur.

Eğer bir grup sonlu sayıda quasideviri grubun direkt çarpımının bir sonlu genişlemesi ise o zaman gruba bir Chernikov grup denir.

2.49. Teorem

G, c sınıflı nilpotent grubun torsiyon grup genişlemesi olan torsiyonsuz lokal nilpotent bir grup olsun. O zaman *G, c* sınıflı nilpotent bir gruptur [4].

2.50. Tanım

G bir grup ve X bir grup sınıfı olsun. Her $1 \neq y \in G$ için $y \notin A_y$ ve $G/A_y \in X$ olacak şekilde $A_y \lhd G$ varsa G ye bir residually X-grubu denir.

2.51. Teorem

Bir sonlu üreteçli torsiyonsuz nilpotent G grubu bir p asal sayısı için residually sonlu p-grubudur [3].

2.52. Tanım

R birimli ve değişmeli bir halka olsun. Girişleri R olan ve köşegen elemanları 1 olan *nxn* tipindeki üst üçgensel matrise unitriangular matris denir ve bu tip matrislerin kümesi *U(n,R)* ile gösterilir. *U(n,R),* determinantı birim olan matrislerin bir grubudur. Ayrıca bu grup nilpotentlik sınıfı *n-1* olan nilpotent gruptur.

3. TORSİYON GRUBUN NİLPOTENT GRUP GENİŞLEMESİ

Bu kısımda Endimioni ve Traustason'un "On Torsion-by-Nilpotent Groups" isimli makalesi incelenerek bu makaledeki aşağıdaki önemli sonuç verilecektir.

C bölüm grupları ve altgruplar altında kapalı olan grupların bir sınıfı olsun. *C* nin bütün metabeliyan grupları, torsiyon grubun nilpotent grup genişlemesi(torsion-by-nilpotent) ise o zaman *C* nin bütün çözülebilir gruplarının torsiyon grubun nilpotent grup genişlemesi olduğu ispat edilecektir. Buradan P.Hall' ın iyi bilinen sonucuna(*H* bir *G* grubunun normal altgrubu olsun. G/H' ve *H* nilpotent ise o zaman *G* nilpotenttir) benzer şekilde "*H, G* nin bir normal altgrubu öyle ki *H* ve G/H' $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ (locally finite-by-nilpotent) grup ise o zaman *G,* $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ gruptur" sonucu elde edilecektir. Ayrıca burada $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ grubun yerine torsiyon grubun nilpotent grup genişlemesi alındığında bu son durumun yanlış olacağını gösteren bir örnek verilecektir.

Nilpotent grupların sınıfı genişletme altında kapalı değildir. Buna bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek

S_3 ün bir normal serisi $\{(1)\} \triangleleft A_3 \triangleleft S_3$ tür. Burada $A_3/\{(1)\}$ ile S_3/A_3 bölüm grubu abeliyan olduğundan S_3 çözülebilirdir. Aynı zamanda A_3 ve S_3/A_3 nilpotenttir fakat $Z(S_3)=1$ olduğundan S_3 nilpotent değildir.

Fakat *G* bir grup olmak üzere *G* nin *H* normal nilpotent altgrubu için G/H' nilpotent ise *G* nin nilpotent olduğu P.Hall tarafından gösterilmiştir. Bu sonuç aşağıda verilmiştir.

A. Teorem

H bir G grubunun normal altgrubu olsun. G/H' ve H nilpotent ise G nilpotenttir [1].

Bu sonuç bir grubun nilpotent olduğunu ispatlamak için çok sık kullanılır. Özellikle çözülebilirlik uzunluğu üzerine tümevarımla aşağıdaki sonucu elde etmek kolaydır.

B. Teorem

C bölüm grupları ve altgruplar altında kapalı olan grupların bir sınıfı olsun. C nin bütün metabeliyan grupları nilpotent olsun. O halde C nin bütün çözülebilir grupları nilpotenttir [1].

İspat

C nin çözülebilir gruplarının çözülebilirlik uzunluğu üzerine tümevarım uygulayalım.

$H \in C$ çözülebilir grubu için H nin çözülebilirlik uzunluğu 1 ise H abeliyan olduğundan iddia açıktır. H nin çözülebilirlik uzunluğu 2 ise H metabeliyan gruptur ve hipotezden dolayı H nilpotenttir. İddia n için doğru olsun. $H^{(n)} = 1$ dir ve H nilpotenttir. Çözülebilirlik uzunluğu $n+1$ olan gruplar için iddianın doğru olduğunu gösterelim. H nın çözülebilirlik uzunluğu $n+1$ olsun. O zaman H' nün çözülebilirlik uzunluğu n olduğundan H' nilpotenttir. Aynı zamanda H/H' abeliyan olduğundan Teorem A dan dolayı H nilpotenttir.

Hall'ın ilk sonucundan dolayı benzer yapıdaki sonuçlar [4]'te verilmektedir. Bu bölümdeki amaç; "nilpotentlik" ile "torsiyon grubun nilpotent grup genişlemesi" yer değiştirdiğinde benzer sonuçları elde etme imkanı olup olmadığını göstermektedir.

İlk olarak Teorem B de "nilpotentlik" ile "torsiyon grubun nilpotent genişlemesi" yer değiştirdiğinde benzer sonuç elde edilir. Bu durum ispatı daha sonra verilmek üzere aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir.

3.1. Teorem

C bölüm grupları ve altgruplar altında kapalı olan grupların bir sınıfı olsun. C nin bütün metabeliyan grupları, torsiyon grubun nilpotent grup genişlemesi olsun. O zaman C nin bütün çözülebilir grupları, torsiyon grubun nilpotent genişlemesidir [1].

Fakat "nilpotentlik", "torsiyon grubun nilpotent grup genişlemesi" ile yer değiştirdiğinde Teorem A doğru değildir. Bununla birlikte Teorem A, "nilpotentlik" ile "$(\mathcal{LF})\mathcal{N}$" yer değiştirdiğinde doğrudur.

3.2. Teorem

H, G grubunun bir normal altgrubu olsun. G/H' ve H $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ grup ise o zaman G, $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ gruptur [1].

Özel olarak Teorem 2.47 den lokal çözülebilir torsiyon bir grup lokal sonlu olduğundan aşağıdaki sonucu elde ederiz.

3.3. Sonuç

G lokal çözülebilir bir grup ve H da G nin normal altgrubu olsun. G/H' ve H torsiyon grubun nilpotent grup genişlemesi ise o zaman G de torsiyon grubun nilpotent grup genişlemesidir [1].

Yukarıda belirtildiği gibi Sonuç 3.3 lokal çözülebilirlik kaldırılırsa yanlıştır. Teorem A nın sonucu olan Teorem B deki nilpotentlik durumunun aksine Teorem 3.1, Teorem 3.2 yi ispatlamak için kullanılacaktır.

Öncelikle yukarıda verilen teorem ve sonuçların ispatında kullanılacak lemma ve bu lemmaların ispatını verelim.

G bir grup ve $x_1,\ldots,x_n$ G grubunun elemanları olsun. $[x_1,\ldots,x_n]$ komütatörü tümevarımla,

$$[x_1,\ldots,x_n]=\left[x_1,\ldots,x_{n-1}\right]^{-1} x_n^{-1}[x_1,\ldots,x_{n-1}]\ x_n$$

ile tanımlanır. H ve K, G nin altgrupları olmak üzere $[H,K]=<[y,z]\ ;\ y\in H,\ z\in K>$ şeklinde yazılabilir. $n \geq 1$ için $\gamma_n(G)$; G nin alçalan merkez serisinin n. terimi olarak tanımlanır. Bu altgrup G nin n ağırlıklı bütün sol-normlu kümeleri tarafından üretilir. G nin normal altgruplar üzerinde bir δ_G gösterimini

$$\delta_G(H) = [H,G]$$

şeklinde tanımlayalım.

3.4. Lemma

G nin herhangi iki H ve K normal altgrubu için

$$\delta_G(HK) = \delta_G(H)\ \delta_G(K)$$

dır [1].

İspat

Bunun için $[HK, G] = [H, G]\ [K, G]$ olduğunu göstermeliyiz. Tanım 2.35 (ii) den

$$[HK, G]=[H,G]^K\,[K,G]$$

dir. Dolayısıyla $[H,G]^K = [H,G]$ olduğunu göstermek yeterlidir. $H \lhd G$ ve $K \lhd G$ olmak üzere $h \in H$, $k \in K$ ve $g \in G$ olsun. $[h,g]^k = [h,k]^{-1}[h, gk]$ ve $gk \in G$ olduğundan $[h,g]^k \in [H, G]$ dir. O halde $[H,G]^K = [H, G]$ dir. Böylece

$$[HK, G] = [H, G]\,[K, G]$$

dir.

3.5. Lemma

G bir grup, H ve K G nin normal altgrupları olsun. O zaman

$$\delta_G([H,K]) \leq [\delta_G(H), K]\,[H, \delta_G(K)]$$

dır [1].

İspat

$[[H,K],G] \leq [[H,G],K][H,[K,G]]$ olduğunu göstermeliyiz. Önce $[H,K]$ nın G de normal olduğunu gösterelim. O zaman $g \in G$ ve $[h,k] \in [H,K]$ olmak üzere $g^{-1}[h,k]g \in [H,K]$ olduğunu göstermeliyiz. $H \lhd G$, $K \lhd G$ ve $HK \lhd G$ olduğundan

$$g^{-1}[h,k]g = g^{-1}(h^{-1}k^{-1}hk)g$$

$$= g^{-1}h^{-1}(gg^{-1})k^{-1}(gg^{-1})h(gg^{-1})kg$$

$$= (g^{-1}hg)^{-1}(g^{-1}kg)^{-1}(g^{-1}hg)(g^{-1}kg)$$

$$= [g^{-1}hg, g^{-1}kg] \in [H,K]$$

dır. Böylece $[H,K] \lhd G$ dir. Benzer şekilde $[H,G] \lhd G$, $[K,G] \lhd G$ ve $H \lhd G$, $K \lhd G$ olduğundan $[[H,G],K] \lhd G$ ve $[H,[K,G]] \lhd G$ dır. $[[H,G],K]\ [H,[K,G]] = N$ olsun. O zaman $[[H,G],K] \leq N$ ve $[H,[K,G]] \leq N$ dir. Üç altgrup Lemma gereğince;

$$[[H,K],G] \leq N$$

dir. Buradan $[[H,K],G] \leq [[H,G],K]\ [H,[K,G]]$ elde edilir.

Şimdi G bir grup, H ve K G nin normal altgrupları olsun. n üzerine tümevarım uygulayarak Leibnitz formülü;

$$\delta_G^n\ [H,K] \leq \prod_{i=0}^{n} [\delta_G^i(H), \delta_G^{n-i}(K)]$$

elde edilir.

3.6. Lemma

H ve K bir G grubunun normal altgrupları olsun. Kabul edelim ki bir c pozitif tamsayısı için $\delta_G^c(H) \leq K$ olsun. O zaman her $t>0$ tamsayısı için

$$\delta_G^{t(c-1)+1}(\gamma_t(H)) \leq \delta_H^{t-1}(K)$$

dır [1].

İspat

t üzerine tümevarım uygulayarak iddiayı ispatlayalım. Eğer $t=1$ ise $\delta_H^0(K) = K$ ve $\gamma_1(H) = H$ olduğundan hipotezden dolayı $\delta_G^{1(c-1)+1}(\gamma_1(H)) = \delta_G^c(H) \leq K = \delta_H^{1-1}(K)$ dır. $t>1$ olmak üzere iddia t-1 için doğru olsun. O zaman

$$\delta_G^{(t-1)(c-1)+1}(\gamma_{t-1}(H)) \le \delta_H^{t-2}(K)$$

dir. O halde iddianın t için doğru olduğunu gösterelim.

$$\delta_G^{t(c-1)+1}(\gamma_t(H)) = \delta_G^{t(c-1)+1}([\gamma_{t-1}(H), H])$$

olduğundan Leibnitz formülünden

$$\delta_G^{t(c-1)+1}(\gamma_t(H)) = \delta_G^{t(c-1)+1}([\gamma_{t-1}(H), H]) \le \prod_{i=0}^{t(c-1)+1} [\delta_G^{i}(\gamma_{t-1}(H)), \delta_G^{t(c-1)+1-i}(H)]$$

elde edilir. Önce $(t\text{-}1)\,(c\text{-}1)+1\text{-}i \le 0$ olsun.

O halde $i \ge (t\text{-}1)(c\text{-}1)+1$ olduğundan $\delta_G^{i}(\gamma_{t-1}(H) \le \delta_G^{(t-1)(c-1)+1}(\gamma_{t-1}(H))$ dır. Ayrıca tümevarım hipotezi gereğince $\delta_G^{(t-1)(c-1)+1}(\gamma_{t-1}(H)) \le \delta_H^{t-2}(K)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
[\,\delta_G^{i}(\gamma_{t-1}(H)), \delta_G^{t(c-1)+1-i}(H)\,] &\le [\,\delta_G^{(t-1)(c-1)+1}(\gamma_{t-1}(H)), \delta_G^{t(c-1)+1-i}(H)\,] \\
&\le [\,\delta_H^{t-2}(K)\,, H\,] \\
&= \delta_H^{t-1}(K)
\end{aligned}$$

dır. Şimdi de $i<(t\text{-}1)(c\text{-}1)+1$ olsun.

Buradan $t(c\text{-}1)+1\text{-}i \ge c$ olduğundan ve hipotezden $\delta_G^{(t-1)(c-1)+1}(H) \le \delta_G^{c}(H) \le K$ dır. Böylece

$$[\,\delta_G^{i}(\gamma_{t-1}(H)), \delta_G^{t(c-1)+1-i}(H)\,] \le [(\gamma_{t-1}(H), K] \tag{1}$$

dır. Şimdi $[\gamma_{t-1}(H), K] \leq \delta_H^{t-1}(K)$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır. Üç Altgrup Lemma ve tümevarım hipotezinden

$$[\gamma_{t-1}(H), K] \leq \delta_H^{t-1}(K)$$

dır. Böylece (1) den dolayı

$$[\delta_G^i(\gamma_{t-1}(H)), \delta_G^{t(c-1)+1-i}(H)] \leq \delta_H^{t-1}(K)$$

dır. Sonuç olarak $\delta_G^{t(c-1)+1}(\gamma_t(H)) \leq \prod_{i=0}^{t(c-1)+1} [\delta_G^i(\gamma_{t-1}(H)), \delta_G^{t(c-1)+1-i}(H)] \leq \delta_H^{t-1}(K)$ dir. Buradan

$$\delta_G^{t(c-1)+1}(\gamma_t(H)) \leq \delta_H^{t-1}(K)$$

olduğundan ispat tamamlanır.

3.7. Tanım

G bir grup *H, G* nin bir altgubu ve π asal sayıların boştan farklı bir altkümesi olsun. Eğer *m* bir pozitif π-tamsayısı için $x^m \in H$ olan *G* nin her x elemanlarının kümesine *G* de *H* nın π-izolatör kümesi denir ve $I_{\pi,G}(H)$ ya da $I_\pi(H)$ ile gösterilir. Eğer π bütün asal sayıların kümesi ise izolatör kümesi $I_G(H)$ ya da $I(H)$ ile gösterilir. π bütün asal sayıların kümesi olmak üzere eğer $I_\pi(H) = H$ ise *H, G* de π-izolated altgrup veya basit izolated altgrup denir [16].

Genel olarak $I_\pi(H)$ altgrup olmak zorunda değildir. Buna bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek

$G = S_3$ ve $H = < i >$ aşikar altgrup olsun. π=2 olmak üzere

$$I_\pi(H) = \{i, (1,2), (1,3), (2,3)\}$$

G nin 2-izolatör altkümesidir. Fakat $I_\pi(H)$, G nin altgrubu değildir.

G bir grup olsun. Eğer π bütün asal sayıların kümesi ve G nin her H altgrubu için $I_\pi(H)$ da G nin bir altgrubu oluyorsa G ye π-izolatör özelliğine ya da izolatör özelliğine sahiptir denir.

Ek olarak G nin bütün H altgrupları için $|I_\pi(H):H|$ sonlu ise o zaman G kuvvetli π-izolatör özelliğine ya da kuvvetli izolatör özelliğine sahiptir denir. Eğer G izolatör özelliğine sahip ise G deki bütün izolatörler G de izolateddır. Eğer π bütün asal sayıların kümesi ise burada $I(H)$ izolatör $\sqrt{H}$ ile gösterilecektir.

3.8. Teorem

G bir sonlu üreteçli nilpotent grup ve $H \leq G$ olsun. Eğer $G = < x_1, x_2, ..., x_n >$ ve bir r_i π-sayısı için $x_i^{r_i} \in H$ ise o zaman G nin her bir elemanının pozitif π-kuvveti H dadır. Ayrıca $|G:H|$ sonludur ve π-sayısıdır [16].

İspat

Eğer G abeliyan ise iddia açıktır. Kabul edelim ki G nin nilpotentlik sınıfı c olsun. c üzerine tümevarım uygulayalım. Böylece kabülden dolayı $|G : H\gamma_c(G)|$ sonlu π-sayısı d dir. G sonlu üreteçli nilpotent grup olduğundan G nin her altgrubuda sonlu üreteçlidir. Böylece $\gamma_c(G)$ sonlu üreteçli ve üreteçleri $y_1, y_2, ..., y_s$ olsun. O zaman tümevarım hipotezinden öyle bir pozitif π-sayısı s_i vardır ki $y_i^{s_i} \in H \cap \gamma_c(G)$ dır. Ayrıca $|\gamma_c(G) : H \cap \gamma_c(G)|$ bir pozitif π-sayısı e ye eşittir.

$$|\gamma_c(G) : H \cap \gamma_c(G)| = |H\gamma_c(G) : H|$$

olduğundan $|H\gamma_c(G) : H| = e$ dir. O zaman

$$|G : H| = |G : H\gamma_c(G)||H\gamma_c(G) : H| = de$$

dir. G nilpotent ve H, G nin altnormal altgrubu olduğundan $\forall g \in G$ için g nin bir pozitif π-kuvveti H dadır.

3.9. Teorem

G bir lokal nilpotent grup olsun. O zaman

i) G izolatör özelliğine sahip;

ii) Eğer G sonlu üreteçli ise o zaman G kuvvetli izolatör özelliğine sahiptir [16].

İspat

i) $H \leq G$ için $I(H)$ nin G nin altgrubu olduğunu gösterelim. $x, y \in I(H)$ ise $x^r, y^s \in H$ olacak şekilde *r,s* pozitif tamsayıları vardır. $< x, y >$, G nin sonlu üreteçli nilpotent altgrubu olduğundan Teorem 3.8 den dolayı $|< x, y >:< x^r, y^s >|$ sonlu ve $(xy^{-1})^m \in < x^r, y^s >$ olacak şekilde m pozitif tamsayısı vardır. Fakat $< x^r, y^s > \leq H$ olduğundan $(xy^{-1})^m \in H$ olur ki o zaman $xy^{-1} \in I(H)$ dır. Böylece $I(H)$ G nin altgrubudur. Dolayısıyla G izolatör özelliğine sahiptir.

ii) Eğer G sonlu üreteçli ise G sonlu üreteçli nilpotent gruptur. Teorem 3.8 den dolayı $|G:H|$ sonlu ve $|I(H):H| \leq |G:H|$ olduğundan $|I(H):H|$ sonludur.

Teorem 3.1 in ispatı

Şimdi Teorem 3.1 nin ispatı için gerekli lemmaları verelim.

C altgrup ve bölüm grupları altında kapalı olan grupların bir sınıfı olsun. Kabul edelim ki en az bir d>2 tamsayısı için C de çözülebilirlik uzunluğu en fazla d -1 olan bütün çözülebilir gruplar, bir torsiyon grubun nilpotent grup genişlemesi olsun. Bu şartlar altında Lemma 3.10 dan Lemma 3.15 e kadar G grubu komutatör uzunluğu $\leq d$ olan C de bir çözülebilir grup olarak alınacaktır.

3.10. Lemma

G nin torsiyon elemanlarının kümesi bir altgruptur [1].

İspat

a, b G nin sonlu mertebeli elemanları olsun. H= <*a,b*> nin torsiyon grup olduğunu göstermek istiyoruz. H' nün komütatör uzunluğu en çok d-1 olduğundan yukarıdaki kabulden dolayı H' torsiyon grubun nilpotent grup genişlemesidir. O zaman H' nün öyle bir torsiyon T altgrubu vardır ki H'/T nilpotenttir. K=H/T olsun. O zaman $K/K'' \in C$ dır. Şimdi $K/K''/(K/K'')'$ bölüm grubu abeliyan ve $(K/K'')''=1$ olduğundan K/K'' bölüm grubu metabeliyandır. Böylece yukarıdaki kabulden dolayı K/K'' torsiyon grubun nilpotent grup genişlemesidir. $(H/T)''=H''T/T$ ve III .İzomorfizma teoreminden

$$K/K'' = {H/T}\big/{(H/T)''} \cong H/H''T$$

dir. O halde çözülebilir bir grubun altgrubu çözülebilir olduğundan K/K'' *a, b* nin görüntüleri tarafından üretilen torsiyon gruptur. Torsiyon bir grubun altgrubu da torsiyon grup olduğundan K'/K'' torsiyon gruptur ve $K' = H'/T$ nilpotent olduğundan K' bir torsiyon gruptur. Böylece K/K' ve K' nün torsiyon grup olduğunu göstermiş olduk. Bu yüzden $K = H/T$ torsiyon gruptur ve bu H nin torsiyon grup olması anlamına gelir.

3.11. Lemma

H, G nin normal altgrubu ise $\sqrt{H}$ bir altgruptur [1].

İspat

$x, y \in \sqrt{H}$ olsun. O zaman öyle $n, m \geq 1$ için $x^n, y^m \in H$ olduğundan xH ve yH, G/H bölüm grubunun torsiyon elemanlarıdır. Ayrıca $G \in C$ ve C bölüm grubu altında kapalı olduğundan G/H bir C gruptur. O zaman Lemma 3.10 dan dolayı $< xH, yH >$, G/H nın torsiyon altgrubudur. Böylece $xy^{-1}H \in < xH, yH >$ olduğundan öyle bir e$\in \mathbb{Z}^+$ vardır ki $(xy^{-1}H)^e = H$ dır. Buradan $(xy^{-1})^e H = H$ ve $(xy^{-1})^e \in H$ olduğundan $\sqrt{H}$, *G* nin bir altgruptur.

3.12. Lemma

a, b G nin elemanları ve en az bir *r,s*>0 tamsayısı için $[a^r, b^s]=1$ olsun. Eğer *G* torsiyonsuz ise *a* ve *b* değişmelidir [1].

İspat

H=< *a, b* > olsun. *H* nin abeliyan olduğunu göstermek istiyoruz. H' nün komütatör uzunluğu en çok *d*-1 dir ve bu altgrup yukarıdaki kabulden dolayı torsiyon grubun nilpotent grup genişlemesidir. Fakat *G* torsiyonsuz olduğundan H' de torsiyonsuz gruptur. Böylece H' nün H'/T nilpotent olacak şekilde torsiyon T normal altgrubu aşikar olduğundan H' nilpotenttir. $H'' \leq \sqrt{H''}$ olduğundan

$$\left(H'/\sqrt{H''}\right)' = H''\sqrt{H''}/\sqrt{H''} = 1$$

dir. Böylece $H/\sqrt{H''}$ metabeliyan gruptur. Ayrıca bölümün başındaki açıklamadan $H/\sqrt{H''} \in C$ dir. $H/\sqrt{H''}$ torsiyon grubun nilpotent grup genişlemesidir.

Şimdi $H/\sqrt{H''}$ nin torsiyonsuz olduğunu gösterelim. $h\sqrt{H''} \in H\sqrt{H''}$ ve $h\sqrt{H''} \neq \sqrt{H''}$ olsun. Kabul edelim ki *n>0* tamsayısı için $h^n\sqrt{H''} = \sqrt{H''}$ olsun. O zaman bir *m>0* tamsayısı için $(h^n)^m \in H''$ elde edilir. O zaman $h \in \sqrt{H''}$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Bundan dolayı $H/\sqrt{H''}$ bölüm grubu torsiyonsuzdur. Böylece $H/\sqrt{H''}$ nilpotenttir.

$$H \rightarrow H/\sqrt{H''}$$
$$< a, b > \rightarrow < a, b > /\sqrt{H''} = < a\sqrt{H''}, b\sqrt{H''} >$$

kanonik epimorfizma olduğundan $H/\sqrt{H''}$ bölüm grubu *a, b* nin görüntüleri tarafından üretilir. $[a\sqrt{H''}, b\sqrt{H''}] = [a,b]\sqrt{H''}$, $H/\sqrt{H''}$ bölüm grubunun torsiyonsuz, nilpotent ve ayrıca $[a^r, b^s] = 1$ olduğunu kullanarak $[a,b] \in \sqrt{H''}$ olduğundan $H/\sqrt{H''}$ abeliyandır. Böylece $H' \leq \sqrt{H''}$ dür. O zaman $\forall x \in H'$ için $x \in \sqrt{H''}$ olduğundan $x^m \in H''$ olacak şekilde *m>0* tamsayısı vardır. O halde H'/H'' torsiyon gruptur. Fakat H' nilpotent olduğundan bir *n* için $(H')^{(n)} = 1$ dir. Dolayısıyla $(H')^{(n-1)}$ torsiyon gruptur. Bu şekilde devam edilirse H' torsiyon gruptur. Böylece H' hem torsiyon grup hem de torsiyonsuz grup olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde H' aşikardır. Sonuç olarak $[H, H] = H' = 1$ olduğundan H abeliyandır.

3.13. Lemma

H ve *K, G* nin normal altgrupları olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır [1].

i) $[\sqrt{H}, \sqrt{K}] \leq \sqrt{[H,K]}$;

ii) $\delta_G(\sqrt{H}) \leq \sqrt{\delta_G(H)}$.

İspat

H ve *K*, *G* nin normal altgrupları olduğundan Lemma 3.11 den dolayı $\sqrt{H}$ ve $\sqrt{K}$, *G* nin normal altgruplarıdır.

i) $[a,b] \in [\sqrt{H}, \sqrt{K}]$ olsun. O zaman $a \in \sqrt{H}$ ve $b \in \sqrt{K}$ olduğundan en az bir $r,s>0$ tamsayıları için $a^r \in H$ ve $b^s \in K$ dır. $L = G/\sqrt{[H,K]}$ alalım. *L* de *a* ve *b* nin $\bar{a} = a\sqrt{[H,K]}$ ve $\bar{b} = b\sqrt{[H,K]}$ görüntüleri için

$$[\bar{a}^r, \bar{b}^s] = [(a\sqrt{[H,K]})^r, (b\sqrt{[H,K]})^s] = [a^r, b^s]\sqrt{[H,K]}$$

dir. $[a^r, b^s] \in [H,K]$ ve $[H,K] \leq \sqrt{[H,K]}$ olduğundan $[a^r, b^s] \leq \sqrt{[H,K]}$ dır. Böylece $[\bar{a}^r, \bar{b}^s] = 1$ dir. $L = G/\sqrt{[H,K]} \in C$ komütatör uzunluğu en çok *d* olan bir gruptur. Eğer $g\sqrt{[H,K]} \in L$ için $g^n\sqrt{[H,K]} = \sqrt{[H,K]}$ olacak şekilde $n>0$ tamsayısı varsa $g^n \in \sqrt{[H,K]}$ olduğundan $g^{nk} \in [H,K]$ olacak şekilde $k>0$ tamsayısı vardır. O zaman $g \in \sqrt{[H,K]}$ olduğundan $L=1$ dir. O halde *L* torsiyonsuz bir gruptur. Böylece Lemma 3.12 den $[\bar{a}, \bar{b}] = 1$ dir. Yani $[a,b]\sqrt{[H,K]} = \sqrt{[H,K]}$ olduğundan $[a,b]$, $\sqrt{[H,K]}$ ya aittir. Dolayısıyla lemmanın ilk kısmı sağlanır.

ii) $\delta_G(\sqrt{H})=[\sqrt{H},G]=[\sqrt{H},\sqrt{G}]$ ve $\sqrt{\delta_G(H)}=\sqrt{[H,G]}$ olup (i) nin ispatından açıktır.

3.14. Lemma

H, G nin normal bir altgrubu olsun. Kabul edelim ki en az bir *c*>0 tamsayısı için $\delta_G^c(H)\leq\sqrt{H'}$ olsun. O zaman bir *t*>0 tamsayısı için aşağıdakiler sağlanır [1].

i) $\delta_G^{t(c-1)+1}\left(\gamma_t(H)\right)\leq\sqrt{\gamma_{t+1}(H)}$;

ii) $\delta_G^{t(c-1)+1}\left(\sqrt{\gamma_t(H)}\right)\leq\sqrt{\gamma_{t+1}(H)}$.

İspat

i) $K=\sqrt{H'}$ olarak alınırsa $K\lhd G$ ve $H'\lhd G$ dir. Ayrıca hipotezden $\delta_G^c(H)\leq\sqrt{H'}=K$ olduğundan Lemma 3.6 yi uygulayabiliriz. Böylece $\delta_G^{t(c-1)+1}\left(\gamma_t(H)\right)\leq\delta_H^{t-1}(\sqrt{H'})$ elde edilir. Lemma 3.13 den dolayı

$$\delta_H^{t-1}(\sqrt{H'})\leq\sqrt{\delta_H^{t-1}\left(H'\right)}$$

dir. Ayrıca $\delta_H^{t-1}(H')=\gamma_{t+1}(H)$ ve

$$\delta_G^{t(c-1)+1}\left(\gamma_t(H)\right)\leq\delta_H^{t-1}(\sqrt{H'})\leq\sqrt{\delta_H^{t-1}\left(H'\right)}=\sqrt{\gamma_{t+1}(H)}$$

olduğundan $\delta_G^{t(c-1)+1}\left(\gamma_t(H)\right)\leq\sqrt{\gamma_{t+1}(H)}$ elde edilir.

ii) Lemma 3.13 den $\delta_G^{t(c-1)+1}\left(\sqrt{\gamma_t(H)}\right) \leq \sqrt{\delta_G^{t(c-1)+1}\left(\gamma_t(H)\right)}$ dir ve bu yüzden (i) yi kullanarak

$$\delta_G^{t(c-1)+1}\left(\sqrt{\gamma_t(H)}\right) \leq \sqrt{\sqrt{\gamma_{t+1}(H)}}$$

dir. Buradan $\sqrt{\sqrt{\gamma_{t+1}(H)}} = \sqrt{\gamma_{t+1}(H)}$ olduğundan

$$\delta_G^{t(c-1)+1}\left(\sqrt{\gamma_t(H)}\right) \leq \sqrt{\gamma_{t+1}(H)}$$

dir. Böylece ispat tamamdır.

3.15. Lemma

H, G nin normal bir altgrubu olsun. Bir $c>0$ tamsayısı için $\delta_G^c\left(G\right) \leq \sqrt{H'}$ olsun. Herhangi bir $t>0$ tamsayısı için

$$f(t) = \frac{t(t+1)(c-1)}{2} + t \quad \text{için} \quad \delta_G^{f(t)}\left(G\right) \leq \sqrt{\gamma_{t+1}(H)}$$

dir [1].

İspat

t üzerine tümevarım uygulayalım. $t=1$ için

$$f(1) = \frac{1(1+1)(c-1)}{2} + 1 = c, \quad \delta_G^c\left(G\right) \leq \sqrt{H'} = \sqrt{\gamma_2(H)}$$

dır. O halde $t>1$ olmak üzere iddiamız t-1 için doğru olsun. $\delta_G^{f(t-1)}(G) \le \sqrt{\gamma_t(H)}$ dir. iddiamızın t için doğru olduğunu gösterelim.

$$\delta_G^{f(t)}(G) = \delta_G^{t(c-1)+1}\delta_G^{f(t-1)}(G) \le \delta_G^{t(c-1)+1}\left(\sqrt{\gamma_t(H)}\right)$$

olduğundan $\delta_G^{f(t)}(G) \le \delta_G^{t(c-1)+1}\left(\sqrt{\gamma_t(H)}\right)$ dir. Şimdi $\delta_G^{c}(G) \le \sqrt{H'}$ olduğundan Lemma 3.14 ü uygulayabiliriz. Buradan $\delta_G^{t(c-1)+1}\left(\sqrt{\gamma_t(H)}\right) \le \sqrt{\gamma_{t+1}(H)}$ elde edilir. Bu yüzden

$$\delta_G^{f(t)}(G) \le \sqrt{\gamma_{t+1}(H)}$$

dır.

Şimdi Teorem 3.1 in ispatını verebiliriz.

3.1. Teorem

C bölüm grupları ve altgruplar altında kapalı olan grupların bir sınıfı ve C nin bütün metabeliyan grupları, torsiyon grubun nilpotent grup genişlemesi olsun. O halde C nin bütün çözülebilir grupları, torsiyon grubun nilpotent grup genişlemesidir [1].

İspat

$G \in C$ komütatör uzunluğu d olan çözülebilir bir grup olsun. d komütatör uzunluğu üzerine tümevarım uygulayalım. d=1 için $G'=1$ olup G abeliyandır. Böylece iddia açıktır. Eğer d=2 ise $G''=1$ve G metabeliyan olduğundan hipotezden dolayı G, torsiyon grubun nilpotent grup genişlemesidir. O halde d>2 ve iddia d-1 için doğru olsun. O zaman C de komütatör uzunluğu en çok d-1 olan bütün çözülebilir gruplar torsiyon grubun nilpotent grup genişlemesi olsun. Lemma 3.10 dan G nin torsiyon elemanlarının kümesi bir altgrup şeklindedir. Bu yüzden genelliği bozmadan G nin torsiyonsuz olduğunu kabul edebiliriz. G nin nilpotent olduğunu ispatlamalıyız. $H=G'$ olsun. H nın çözülebilirlik uzunluğu d-1 olduğundan hipotezden torsiyon grubun nilpotent grup genişlemesidir. Fakat H torsiyonsuz olduğundan nilpotenttir.

$G/\sqrt{H'} = G/\sqrt{G''}$ nin nilpotent ve torsiyonsuz olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $G/\sqrt{G''}$ torsiyonsuz olmasın. O zaman bir $g \in G/\sqrt{G''}$ için $g^n \in \sqrt{G''}$ olacak şekilde n>0 tamsayısı vardır. Böylece m>0 için $g^{nm} \in G''$ olduğundan $g \in \sqrt{G''}$ olur ki bu bir çelişkidir. Bundan dolayı $G/\sqrt{G''}$ torsiyonsuzdur. Ayrıca $G'' \leq \sqrt{G''}$ olduğundan $G''\sqrt{G''}/\sqrt{G''} = 1$ dır. Dolayısıyla $G/\sqrt{G''}$ metabeliyandır. Böylece $G\sqrt{G''}\Big/G'\sqrt{G''}/\sqrt{G''}$ abeliyan ve $G'\sqrt{G''}/\sqrt{G''}$ nilpotent olduğundan $G/\sqrt{G''}$ nilpotenttir.

$G/\sqrt{H'}$ ve H nilpotent olduğundan k ve c pozitif tamsayılar olmak üzere $\gamma_{c+1}(G/\sqrt{H'}) = \{1\}$ ve $\gamma_{k+1}(H) = \{1\}$ dır. Buradan $\gamma_{c+1}(G) \leq \sqrt{H'}$ dır. $\gamma_{c+1}(G) = \delta_G^c(G)$ olduğundan Lemma 3.15 i uygulayabiliriz. Böylece $t \in \mathbb{Z}^+$ için $\delta_G^{f(t)}(G) \leq \sqrt{\gamma_{t+1}(H)}$ dır. $t=k$ olarak alınırsa $\delta_G^{f(k)}(G) \leq \sqrt{\{1\}}$ elde edilir. Fakat G torsiyonsuz olduğundan

$$\delta_G^{f(k)}(G) = \gamma_{f(k)+1}(G) = 1$$

dir. Böylece G nilpotenttir.

<u>Teorem 3.2 nin ispatı</u>

Şimdi Teorem 3.2 nin ispatı için gerekli lemmaları verelim.

3.16. Lemma

G bir metabeliyan grup öyle ki $G/Z(G)$ torsiyon grubun nilpotent grup genişlemesi olsun. O zaman G torsiyon grubun nilpotent grup genişlemesidir [1].

İspat

Hipotezden $G/Z(G)$, torsiyon grubun nilpotent grup genişlemesi olduğundan $G/Z(G)$ nin bir torsiyon $T/Z(G)$ altgrubu vardır ki $\left. G/Z(G) \middle/ T/Z(G) \right.$ nilpotenttir. O zaman bir $k \geq 1$ tamsayısı için $\gamma_k\left(\left. G/Z(G) \middle/ T/Z(G) \right. \right)=1$ dir. Böylece $\left. \gamma_k\left(G/Z(G)\right)T/Z(G) \middle/ T/Z(G) \right.=1$ olduğundan $\gamma_k\left(G/Z(G)\right) \leq T/Z(G)$ dir. O halde $\gamma_k\left(G/Z(G)\right)$ torsiyon gruptur. k=1 olması durumunda $G/Z(G)$ torsiyon gruptur. Bu yüzden $k \geq 2$ olduğunu kabul edebiliriz. $x_1, x_2, ..., x_{k+1} \in G$ için

$$\left[x_1Z(G), x_2Z(G), ..., x_kZ(G)\right] \in \gamma_k\left(G/Z(G)\right)$$

ve $\gamma_k\left(G/Z(G)\right)$ torsiyon grup olduğundan öyle bir e>0 tamsayısı vardır ki $\left[x_1, x_2, ..., x_k\right]^e Z(G)$=1 ve $\left[x_1, x_2, ..., x_k\right]^e \in Z(G)$ dir. Buradan $x_{k+1} \in G$ için

$$\left[\left[x_1, x_2, ..., x_k\right]^e, x_{k+1}\right]=1$$

dir. G metabeliyan olduğundan G' abeliyandır. $a \in G'$, $b \in G$ için

$$[a,b]^a = a^{-1}[a,b]a = a^{-1}a[a,b] = [a,b]$$

olduğundan Teorem 2.39 dan $[a^e, b] = [a,b]^e$ dir. Bu yüzden

$$\left[[x_1,x_2,...,x_k]^e,x_{k+1}\right]=[x_1,x_2,...,x_{k+1}]^e=1$$

dir. Aynı zamanda $\gamma_{k+1}(G)\leq G'$ dır. G metabeliyan grup olduğundan G' abeliyan ve dolayısıyla $\gamma_{k+1}(G)$ abeliyandır. Ayrıca $[x_1,x_2,...,x_{k+1}]^e=1$ olduğundan $\gamma_{k+1}(G)$ torsiyon gruptur. Böylece $\gamma_{k+1}(G/\gamma_{k+1}(G))=1$ olduğundan $G/\gamma_{k+1}(G)$ nilpotenttir. Yani G torsiyon grubun nilpotent grup genişlemesidir.

3.17. Lemma

G bir çözülebilir grup öyle ki $G/Z(G)$ torsiyon grubun nilpotent grup genişlemesi olsun. O halde G torsiyon grubun nilpotent genişlemesidir [1].

İspat

C, G çözülebilir grubunun bir sınıfı öyle ki $G/Z(G)$ torsiyon grubun nilpotent grup genişlemesi olsun. Şimdi C nin altgrup kapalı olduğunu gösterelim. *H,* G nin altgrubu olsun. Hipotezden $G/Z(G)$ torsiyon grubun nilpotent genişlemesi olduğundan $G/Z(G)$ nin torsiyon kısmı $T(G/Z(G))$ olmak üzere $G/Z(G) \big/ T(G/Z(G))$ nilpotenttir. O zaman öyle bir c pozitif tamsayısı için $\gamma_c(G/Z(G))\leq T(G/Z(G))$ olduğundan $\gamma_c(G)Z(G)/Z(G)\leq T(G/Z(G))$ dir. Fakat $\gamma_c(H)Z(G)/Z(G)\leq\gamma_c(G)Z(G)/Z(G)$ olduğundan

$$\gamma_c(H)Z(G)/Z(G)\leq T(G/Z(G))$$

dir. O zaman $\forall x\in\gamma_c(H)$ için öyle bir k pozitif tamsayısı vardır ki $x^k\in Z(G)\leq C_G(H)$ olduğundan $x^k\in C_G(H)=Z(H)$ ve $x^k\in Z(H)$ dır. Böylece $\gamma_c\left(H/Z(H)\right)\leq T\left(H/Z(H)\right)$ ve $\gamma_c\left(H/Z(H) \big/ T\left(H/Z(H)\right)\right)=1$ olduğundan

$\left. H/Z(H) \middle/ T\left(H/Z(H)\right) \right.$ nilpotenttir. Ayrıca G çözülebilir olduğundan H da çözülebilirdir. Böylece *H, C* sınıfındandır.

Benzer şekilde *G* nin bölüm grubunun *C* sınıfından olduğu açıktır. Yani çözülebilir bir grubun her altgrubu ve bölüm grubu çözülebilirdir. Bu yüzden Teorem 3.1 ve Lemma 3.16 dan sonuç görülür.

Şimdi Schur'un iyi bilinen sonucunun bir genişlemesini ispatsız hatırlayalım [4].

3.18. Lemma

G bir grup öyle ki $G/Z(G)$ lokal sonlu bir grup olsun. O halde G' lokal sonlu bir gruptur [4].

3.19. Lemma

G bir grup öyle ki $G/Z(G)$ lokal sonlu bir grubun nilpotent genişlemesi olsun. O zaman *G* lokal sonlu bir grubun nilpotent genişlemesidir [1].

İspat

$\varphi(G)$ yi *G* nin lokal sonlu radikali olarak tanımlayalım. Yani; $\varphi(G)$, *G* nin bütün normal lokal sonlu altgruplarının çarpımıdır. Lokal sonlu grupların sınıfı genişleme altında kapalı olduğundan $\varphi(G)$ lokal sonludur ve $\varphi(G/\varphi(G))$ aşikardır. Bu yüzden, $G/\varphi(G)$ yerine *G* alabiliriz. O zaman *G* nin aşikar olmayan normal lokal sonlu altgrubu olmadığından *G* nin nilpotent olduğunu ispatlamak yeterlidir. *L, G* nin $Z(G)$ yi içeren normal altgrubu öyleki $L/Z(G) = \varphi\left(G/Z(G)\right)$ olsun. $Z(G) \leq L$ olduğundan $Z(G) \leq Z(L)$ dir. Böylece $L/Z(G)$ lokal sonlu olduğundan $L/Z(L)$ lokal sonludur. O zaman Lemma 3.18 den L' lokal sonludur. Fakat *G* aşikar olmayan normal lokal sonlu bir altgrup içermediğinden $L' = \{1\}$ alabiliriz. O halde *L* abeliyandır. Aynı zamanda G/L nilpotent olduğundan G çözülebilirdir. Böylece Lemma 3.17 dan G torsiyon grubun nilpotent genişlemesidir. O zaman G nin öyle bir T torsiyon altgrubu vardır ki G/T nilpotenttir. G çözülebilir grup olduğundan T çözülebilir gruptur. T nin her sonlu üreteçli altgubu Teorem 2.47 den sonlu olduğundan T lokal sonludur. Böylece G lokal sonlu grubun nilpotent genişlemesidir. Sonuç olarak $\varphi(G)$ aşikar olduğundan G nin nilpotent olduğu ispatlanmış olur. Bu da istenendir.

Şimdi Teorem 3.2 yi ispatlayalım.

3.2. Teorem

H, bir G grubunun normal altgrubu olsun. Eğer G/H' ve H $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ grup ise G $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ gruptur [1].

İspat

Kabul edelim ki H lokal sonlu bir grubun k sınıflı nilpotent genişlemesi olsun. Bu teoremi k üzerine tümevarımla ispatlayalım. $k \leq 1$ olduğunda sonuç açıktır. $G/\varphi(H)$ yerine G aldığımızda Lemma 3.18 de olduğu gibi $\varphi(H)$, H nin lokal sonlu radikali olmak üzere, H normal altgrubunu torsiyonsuz ve $k>1$ sınıflı nilpotent grup olarak kabul edebiliriz.

Tümevarım hipotezinden $G/\gamma_k(H)$ lokal sonlu bir grubun nilpotent genişlemesidir. Böylece $G/\gamma_k(H)$ nin lokal sonlu $S/\gamma_k(H)$ normal altgrubu vardır ki $\dfrac{G/\gamma_k(H)}{S/\gamma_k(H)}$ nilpotentdir. Böylece öyle bir c pozitif tamsayısı vardır ki

$$\gamma_{c+1}\left(\dfrac{G/\gamma_k(H)}{S/\gamma_k(H)}\right)=1$$

dir. Buradan $\gamma_{c+1}\left(G/\gamma_k\left(H\right)\right)\leq S/\gamma_k\left(H\right)$ olduğundan $\gamma_{c+1}\left(G/\gamma_k\left(H\right)\right)=\gamma_{c+1}(G)\gamma_k\left(H\right)/\gamma_k\left(H\right)$ lokal sonludur. O halde $a\in\gamma_{c+1}\left(G\right)$ için $\overline{a}\in\gamma_{c+1}\left(G\right)\gamma_k\left(H\right)/\gamma_k\left(H\right)$ alınırsa öyle bir n tamsayısı için $\overline{a}^n=1$ ve buradan $a^n\in\gamma_k\left(H\right)$ olup $a\in\sqrt{\gamma_k\left(H\right)}$ dır. Dolayısıyla $\gamma_{c+1}\left(G\right)\leq\sqrt{\gamma_k\left(H\right)}$ elde edilir.

$K=H\cap\sqrt{\gamma_k\left(H\right)}$ olmak üzere $\delta_G^c(H)\leq K$ olduğu açıktır. Şimdi Lemma 3.6 dan dolayı eğer $t=k$ alınırsa

$$\delta_G^{k(c-1)+1}(\gamma_k\left(H\right))\leq\delta_H^{k-1}(K)$$

elde edilir. $\delta_H^{k-1}(K)$ grubu $z\in K$ ve $y_1,\ldots,y_{k-1}\in H$ olmak üzere $[z,y_1,\ldots,y_{k-1}]$ şeklinde elemanlar tarafından üretilir. Böyle üreteçler göz önüne alındığında bir e pozitif tamsayısı için $z^e\in\gamma_k(H)$ olsun. H, k sınıfında nilpotent olduğundan

$$[z,y_1,\ldots,y_{k-1}]^e=[z^e,y_1,\ldots,y_{k-1}]=1$$

yazabiliriz. Fakat H torsiyonsuz olduğundan $[z,y_1,\ldots,y_{k-1}]=1$ dir. Bu yüzden $\delta_H^{k-1}(K)$ aşikardır. Böylece $\delta_G^{k(c-1)+1}(\gamma_k(H))$ aşikardır. O halde G nin alçalan merkez serisi $(Z_n(G))_{n\geq 0}$ olarak yazılırsa $\gamma_k(H)$, $Z_{k(c-1)+1}(G)$ de içerilir.

$G/\gamma_k(H)$ lokal sonlu bir grubun nilpotent genişlemesi olduğundan $G/Z_{k(c-1)+1}(G)$ de $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ gruptur. Lemma 3.19 un uygulamasını tekrarlarsak G nin $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ grup olduğunu göstermiş oluruz.

Teorem 3.2 de $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ grup yerine torsiyon grubun nilpotent genişlemesi alındığında doğru değildir. Buna bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek

Bir $m \geq 2$ tamsayısını ve $e \geq 665$ tek tamsayısını alalım. S. I. Adian, torsiyonsuz çözülebilir olmayan gruba *A(m,e)* örneğini verdi öyle ki $Z(A(m,e))$ devirlidir(aşikar olmayan) ve $A(m,e)/Z(A(m,e))$, e üslü m üreteçlidir. Uygunluk için *A=A(m,e)* alalım. *B* torsiyonsuz, nilpotentlik sınıfı 2, merkezi devirli ve B' ne eşit olan bir grup olsun. (Tamsayılar halkasında girişleri ile 3x3 tipinde unitriangular matris buna bir örnektir.)

Kabul edelim ki $Z(A) = \langle a \rangle$ ve $Z(B) = \langle b \rangle$ olsun. $C = \langle (a,b) \rangle$ olmak üzere $G = (A \times B)/C$ olsun. $f : B \to G$ homomorfizması $f(z) = (1,z)C$ şeklinde tanımlansın. $H = f(B)$ için aşağıdakilerin sağlandığı kolaylıkla gösterilebilir.

i) *H,* 2 sınıflı nilpotent;

ii) G/H' (üssü *e)*-by-abeliyan;

iii) *G* torsiyonsuzdur ve nilpotent değildir.

Bu yüzden G/H' ve *H* torsiyon grubun nilpotent genişlemesidir fakat *G* torsiyon grubun nilpotent genişlemesi değildir.

4. HER ÖZ ALTGRUBU LOKAL SONLU GRUBUN NİLPOTENT GENİŞLEMESİ OLAN GRUPLAR

G bir grup ve X grupların bir sınıfı olsun. G grubunun her öz altgrubu bu sınıfa ait ve G grubu bu sınıfa ait değilse G ye minimal X-olmayan grup denir. X gruplarının çeşitli sınıfları için bir bazı yazarlar tarafından birçok sonuç elde edilmiştir.

1979'da Olshanski minimal $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$-olmayan grupların varlığını araştırmış ve bu grupların yapısını [6]'da gösterdiği gibi öz altgrupları devirli olan sonlu üreteçli basit ve torsiyonsuz grup olarak belirlemiştir.

M. Xu sonsuz üreteçli minimal $\mathcal{FN}$-olmayan grubun $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ grup olduğunu göstermiştir ve "G sonlu üreteçli minimal $\mathcal{FN}$-olmayan grup ise G aşikar olmayan sonlu faktörü olmayan mükemmel gruptur öyle ki $G\ /\ FratG$ sonsuz basit gruptur" teoremini ispatlamıştır.

Amel Dilmi ise 2007'de "Groups whose proper subgroups are locally finite-by-nilpotent" adlı makalesinde yukarıdaki sonuçları minimal $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$-olmayan gruba genişletmiş ve sonsuz üreteçli minimal $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$-olmayan grubun olmadığını ispatlamıştır. Ayrıca $c>0$ bir tamsayı ve $\mathcal{N}_c$ nilpotentlik sınıfı en çok c olan grupların bir sınıfı olmak üzere minimal $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$-olmayan gruplar için yapılanlar minimal $(\mathcal{LF})\mathcal{N}_c$-olmayan gruplar içinde yapmıştır.

Tezimizin bu bölümünde Amel Dilmi'nin bu makalesi üzerinde çalıştık.

4.1. Teorem

G bir minimal $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$-olmayan grup olsun. O zaman G aşikar olmayan sonlu faktörü bulunmayan sonlu üreteçli mükemmel grup olsun öyle ki $G/FratG$ sonsuz basit gruptur [2].

Teorem 4.1 i kullanarak minimal $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$-olmayan gruplar üzerinde aşağıdaki sonuçları ispatlayabiliriz.

4.2. Teorem

$c>0$ bir tamsayı G minimal $(\mathcal{LF})\mathcal{N}_c$-olmayan grup olsun. G aşikar olmayan sonlu faktörü bulunmayan sonlu üreteçli mükemmel grup olsun öyle ki $G/FratG$ sonsuz basit gruptur [2].

Bu bölümde öncelikle Teorem 4.1 ve Teorem 4.2 nin ispatı için gerekli lemma ve ispatları verip daha sonra Teorem 4.1 ve Teorem 4.2 nin ispatını vereceğiz.

<u>Minimal</u> $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$- <u>olmayan gruplar</u>

Teorem 4.1'in bir bölümü aşağıdaki önermeden hemen görülür.

4.3.Önerme

G öz altgrupları $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ olan bir grup olsun. G aşağıdaki şartlardan birini sağlarsa G bir $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ gruptur.

i) G sonlu indeksli bir öz altgrubu olan sonlu üreteçli bir grup;

ii) G sonlu üreteçli değildir [2].

İspat

i) G sonlu üreteçli ve N, G de sonlu indeksli bir öz altgrup olsun. O zaman Teorem 2.43 den N yi G de normal alabiliriz. Hipotezden N, $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ grup ve aynı zamanda sonlu üreteçtedir. N, $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ grup olduğundan N nin bir K lokal sonlu normal altgrubu vardır ki N/K nilpotenttir. N/K nilpotent olduğundan öyle bir $k \geq 0$ için

$$1=\gamma_{k+1}(N/K)=[\gamma_k(N/K),N/K]$$

$$=[\gamma_k(N),N]K/K$$

$$=\gamma_{k+1}(N)K/K$$

dir ve böylece $\gamma_{k+1}(N) \leq K$ dır. K lokal sonlu olduğundan $\gamma_{k+1}(N)$ lokal sonludur.

$$G/\gamma_{k+1}(N) \Big/ N/\gamma_{k+1}(N) \cong G/N$$

ve N, G de sonlu indeksli olduğundan $G/\gamma_{k+1}(N) \big/ N/\gamma_{k+1}(N)$ sonludur. Ayrıca $\gamma_{k+1}(N/\gamma_{k+1}(N))=1$ olduğundan $N/\gamma_{k+1}(N)$ nilpotenttir. Böylece $G/\gamma_{k+1}(N)$ bir $\mathcal{NF}$(nilpotent-by-finite) gruptur. G sonlu üreteçli olduğundan $G/\gamma_{k+1}(N)$ sonlu üreteçlidir öyle ki altgruplar üzerinde maksimallik şartını sağlar. $H/\gamma_{k+1}(N) < G/\gamma_{k+1}(N)$ olsun. Maksimal şartını sağlayan grubun her altgrubu sonlu üreteçli olduğundan $H/\gamma_{k+1}(N)$ sonlu üreteçlidir. Hipotezden $H/\gamma_{k+1}(N)$ nın $K/\gamma_{k+1}(N)$ lokal sonlu altgrubu vardır öyle ki $H/\gamma_{k+1}(N) \big/ K/\gamma_{k+1}(N)$ nilpotenttir. $K/\gamma_{k+1}(N)$ lokal sonlu ve sonlu üreteçli olduğundan sonludur. O halde $G/\gamma_{k+1}(N)$ nin her öz altgrubu $\mathcal{FN}$(finite-by-nilpotent) gruptur. Böylece Teorem 2.45 den her öz altgrubu $\mathcal{FN}$ olan lokal dereceli sonlu üreteçli grubun kendisi $\mathcal{FN}$ gruptur. $\mathcal{NF}$ sınıfındaki gruplar açık olarak lokal dereceli olduğundan $G/\gamma_{k+1}(N)$, $\mathcal{FN}$ gruptur.

$G/\gamma_{k+1}(N)$ $\mathcal{FN}$ grup olduğundan $G/\gamma_{k+1}(N)$ nin öyle bir $S/\gamma_{k+1}(N)$ sonlu normal altgrubu vardır ki $\dfrac{G/\gamma_{k+1}(N)}{S/\gamma_{k+1}(N)}$ nilpotenttir.

$$\dfrac{G/\gamma_{k+1}(N)}{S/\gamma_{k+1}(N)} \cong G/S$$

olduğundan G/S nilpotenttir. Ayrıca $S/\gamma_{k+1}(N)$ sonlu ve $\gamma_{k+1}(N)$ lokal sonlu olduğundan S lokal sonludur. Böylece G, $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ gruptur.

ii) Kabul edelim ki G sonlu üreteçli olmasın. $x_1,\ldots,x_n$ G nin sonlu mertebeli elemanları olsun. G sonlu üreteçli olmadığından $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ G nin öz altgrubudur. O halde hipotezden $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$, $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ gruptur. $H=\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ olsun. H, $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ grup olduğundan H/M nilpotent olacak şekilde M lokal sonlu normal altgrubu vardır. H/M, nilpotent ve sonlu üreteçli torsiyon grup olduğundan Teorem 2.47 den H/M sonludur. Bu yüzden $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ sonludur. O halde bütün sonlu elemanların kümesi T lokal sonludur.

Eğer G/T sonlu üreteçli değilse K/T, G/T nin sonlu üreteçli altgrubu olsun. O zaman $K/T \neq G/T$ dir. K/T nin nilpotent olduğunu göstermeliyiz. $K/T \neq G/T$ olduğundan $K \neq G$ dir. Hipotezden K, $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ gruptur. O halde K/M nilpotent ise $M \leq T$ olduğundan K/T nilpotenttir. Buradan da G/T lokal nilpotenttir. G/T torsiyonsuz ve lokal nilpotent olduğundan $H/T < G/T$ vardır ki $H<G$ dir. Hipotezden $H \in (\mathcal{LF})\mathcal{N}$ gruptur. Dolayısıyla H/A nilpotent olacak şekilde $A \in \mathcal{LF}$ vardır. $A \leq T$ olduğundan

$$\dfrac{H/A}{T/A} \cong H/T$$

dır. H/A nilpotent olduğundan $\dfrac{H/A}{T/A}$ nilpotent ve dolayısıyla H/T nilpotenttir. Böylece G/T nin her öz altgrubu nilpotenttir. Teorem 2.46 dan G/T nilpotenttir.

Böylece G , $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ gruptur.

Şimdi eğer G/T sonlu üreteçliyse, sonlu üreteçli bir H altgrubu vardır öyle ki $G=HT$ dir. G sonlu üreteçli olmadığından H, G nin öz altgrubudur. Bu yüzden hipotezden H, $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ gruptur. II. İzomorfizma Teoreminden

$$G/T = HT/T \cong H/H \cap T$$

olduğundan G/T, $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ grup ve aynı zamanda torsiyonsuz olduğundan G/T nilpotenttir. O halde G, $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ gruptur.

Sonlu üreteçli lokal dereceli grupların öz altgrupları sonlu indeksli olduğundan bir önceki önermeden aşağıdaki sonucu elde ederiz.

4.4. Sonuç

G her öz altgrubu $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ sınıfından olan lokal dereceli grup olsun. O zaman G, $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ gruptur [2].

İspat

Önce G sonlu üreteçli olsun. G lokal dereceli grup olduğundan G nin sonlu indeksli bir öz altgrubu vardır. O halde Önerme 4.3(i) den G, $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ gruptur. Eğer G sonlu üreteçli değilse tekrar Önerme 4.3(ii) den G, $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ gruptur.

4.5. Sonuç

G her öz altgrubu $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ sınıfından mükemmel olmayan bir grup olsun. O zaman G, $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ gruptur [2].

İspat

G sonlu üreteçli değilse Önerme 4.3(ii) den G, $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ gruptur. O halde G sonlu üreteçli olsun; böylece $G \neq G'$ ve G/G' aşikar olmayan sonlu üreteçli lokal dereceli grup olduğundan G nin aşikar olmayan sonlu bir görüntüsü vardır. Gerçekten G/G' sonlu üreteçli, abeliyan ve lokal dereceli grup olduğundan $\left. G/G' \middle/ K/G' \right.$ sonlu olacak şekilde K/G' öz altgrubu vardır. O zaman G/K sonludur. Yani G nin sonlu indeksli bir öz altgrubu vardır. O halde Önerme 4.3(i) den G, $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ gruptur.

Şimdi Teorem 4.1 in ispatını verelim.

Teorem 4.1 in ispatı:

G minimal $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$-olmayan grup olsun. G sonlu üreteçli grup olduğu ve $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ grup olmadığı için Önerme 4.3(i) den sonlu indeksli bir öz altgrubu yoktur. Ayrıca G mükemmel grup ise Sonuç 4.5 ten G, $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ grup olmadığından bu bir çelişkidir ve böylece G mükemmel grup olamaz.

Şimdi $G/FratG$ nin sonsuz basit grup olduğunu ispatlayalım. G sonlu üreteçli olduğundan maksimal normal altgrubu vardır. Bundan dolayı $FratG \neq G$ dir. O zaman $G/FratG$ aşikar değildir. Ayrıca G nin sonlu indeksli bir öz altgrubu olmadığından $G/FratG$ sonsuzdur**.**

N, $FratG$ yi içeren G nin normal öz altgrubu olsun. Yani $G/FratG$ basit grup olmasın. O zaman $G/FratG$ nin $N/FratG$ öz normal altgrubu vardır. Buradan $G \neq N$ ve $N \neq FratG$ dir. Hipotezden dolayı N, $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ gruptur ve bir $x \in N$ vardır öyle ki $x \notin FratG$ dir. $x \notin FratG$ olduğundan $x \notin M$ olacak şekilde G nin M maksimal altgrubu vardır. Böylece N, M yi içermez. O halde $G=NM$ dir.

Eğer $NM \neq G$ olsaydı NM, G nin maksimal altgrubu ve $M \leq NM$ olurdu. M, G nin maksimal altgrubu olduğundan $NM=M$ dir. O halde $x \in M$ olur ki bu bir çelişkidir. Böylece $G=NM$ dir

N, $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ grup olduğundan Önerme 4.3(i) nin ispatında görüldüğü gibi en az bir $k \geq 0$ için $\gamma_{k+1}(N)$ lokal sonludur. G mükemmel olduğundan $G=G'$ ve böylece

$$G=\gamma_{k+1}(G)=\gamma_{k+1}(NM)$$

dir. Şimdi k üzerine tümevarım uygulayarak $\gamma_{k+1}(NM) \subseteq N\gamma_{k+1}(M)$ olduğunu gösterelim. $k=0$ ise $\gamma_1(NM)=N\gamma_1(M)=NM$ dir. O halde $k>0$ ve $\gamma_k(NM) \subseteq N\gamma_k(M)$ olsun. $k+1$ için $\gamma_{k+1}(NM) \subseteq N\gamma_{k+1}(M)$ olduğunu gösterelim. $g \in \gamma_{k+1}(NM)$ olsun. O zaman her $1 \leq i \leq k+1$ için $x_i \in N$ ve $y_i \in M$ olmak üzere

$$g=\left[x_1 y_1, \ldots, x_{k+1} y_{k+1}\right]$$

formunda elemanların sonlu çarpımları olarak yazılabilir. $v=[x_1 y_1, \ldots, x_k y_k]$ olsun. İndüksiyon hipotezinden dolayı $v \in N\gamma_k(M)$ dir. Böylece $x \in N$ ve $y \in \gamma_k(M)$ olmak üzere $v=xy$ alınabilir. O halde Teorem 2.35(ii) den

$$[v, x_{k+1}y_{k+1}]=[xy, x_{k+1}y_{k+1}]$$

$$= [xy, y_{k+1}][xy, x_{k+1}]^{y_{k+1}}$$

$$=[x, y_{k+1}]^y[y, y_{k+1}]([x, x_{k+1}]^y[y, x_{k+1}])^{y_{k+1}}$$

şeklindedir. Burada $[y, y_{k+1}] \in \gamma_{k+1}(M)$ ve $x, x_i \in N$ dir. N, G de normal olduğundan $[x, y_{k+1}]^y \in N$ ve $([x, x_{k+1}]^y[y, x_{k+1}])^{y_{k+1}} \in N$ dir. O halde

$[x_1 y_1, \ldots, x_{k+1} y_{k+1}] \in N\gamma_{k+1}(M)$

olur. Böylece sonuç olarak $g \in N\gamma_{k+1}(M)$ dir. O halde $\gamma_{k+1}(NM) \subseteq N\gamma_{k+1}(M)$ ve $G = \gamma_{k+1}(NM) \subseteq N\gamma_{k+1}(M)$ olduğundan $G = N\gamma_{k+1}(M)$ dir. Buradan

$G/N' = N\gamma_{k+1}(M)/N' = (N/N')(\gamma_{k+1}(M)N'/N')$

dir. $\gamma_{k+1}(M)$ lokal sonlu ve N/N' abeliyan olduğundan $\gamma_{k+1}(M)N'/N'$ lokal sonludur. Bu yüzden $N/N' \cap \gamma_{k+1}(M)N'/N'$ lokal sonludur. Ayrıca N/N' abeliyan ve $G/N' = N\gamma_{k+1}(M)/N' = (N/N')(\gamma_{k+1}(M)N'/N')$ olduğundan G/N', $\mathcal{A}(\mathcal{LF})$ gruptur. Burada $\mathcal{A}$ abeliyan grupların sınıfıdır. Böylece $\frac{G/N'}{A/N'}$ lokal sonlu olacak şekilde A/N' abeliyan altgrubu vardır. G sonlu üreteçli olduğundan $\frac{G/N'}{A/N'}$ sonludur. Eğer $G/N' = A/N'$ ise $G=A$ olur. Fakat G abeliyan olamayacağından çelişki elde edilir. Çünkü G abeliyan ise $G'=1$ olur. G mükemmel olduğundan $G=G'=1$ olup G nin aşikar olmamasıyla çelişir. O halde $G/N' \neq A/N'$ dir. Böylece G/N' nün sonlu indeksli öz altgrubu vardır. Ayrıca G sonlu üreteçli olduğundan G/N' lokal dereceli gruptur ve Sonuç 4.4 den G/N', $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ gruptur. Teorem 3.2 den $N \lhd G$, N ve G/N' $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ grup ise G, $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ gruptur. Bu ise G nin $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ grup olmamasıyla çelişir. O halde $G/FratG$ basit gruptur.

Şimdi ise Teorem 4.2 nin ispatı için gerekli lemmaları verelim.

<u>Minimal</u> $(\mathcal{LF})\mathcal{N}_c$ - <u>olmayan gruplar</u>

4.6. Lemma

G bir grup ve F, G nin lokal sonlu radikali olsun. G/F nilpotent ise G/F torsiyonsuzdur [2].

İspat

F, G nin lokal sonlu radikali ve $\overline{G}=G/F$ olmak üzere $\overline{G}$ nilpotent olsun. Kabul edelim ki $\overline{x}$, $\overline{G}$ de sonlu mertebeli bir eleman olsun. İlk olarak $\overline{x}^{\overline{G}}$ normal kapanışının lokal sonlu olduğunu gösterelim. $<\overline{h}_1,\overline{h}_2,...,\overline{h}_n>$, $\overline{x}^{\overline{G}}$ nin sonlu üreteçli bir altgrubu olsun. $1\leq i\leq n$ için her $\overline{h}_i$ elemanı $\overline{x}^{\overline{G}}$ elemanlarının bir sonlu çarpımı olarak yazılabileceğinden $<\overline{h}_1,\overline{h}_2,...,\overline{h}_n>$, bir s>0 tamsayısı vardır öyle ki $1\leq j\leq s$ için en az bir $\overline{g}_j\in\overline{G}$ olmak üzere $<\overline{x}^{\overline{g}_1},\overline{x}^{\overline{g}_2},...,\overline{x}^{\overline{g}_s}>$ nin bir altgrubudur. Dahası $<\overline{x}^{\overline{g}_1},\overline{x}^{\overline{g}_2},...,\overline{x}^{\overline{g}_s}>$ nilpotent ve her üreteci sonlu mertebeden sonlu üreteçli gruptur. Teorem 2.47 den sonlu üreteçli nilpotent torsiyon grup sonlu olduğundan $<\overline{x}^{\overline{g}_1},\overline{x}^{\overline{g}_2},...,\overline{x}^{\overline{g}_s}>$ sonludur ve dolayısıyla $<\overline{h}_1,\overline{h}_2,...,\overline{h}_n>$ sonludur. Sonuç olarak $\overline{x}^{\overline{G}}$ lokal sonludur. Fakat $\overline{G}$ nin aşikar olmayan lokal sonlu normal altgrubu bulunmadığından $\overline{x}^{\overline{G}}$ aşikardır. Böylece $\overline{x}=\overline{1}$ olduğundan $\overline{G}$ torsiyonsuzdur.

4.7.Önerme

c>0 bir tamsayı ve G her öz altgrubu $(\mathcal{LF})\mathcal{N}_c$ sınıfından olan bir grup olsun. Eğer aşağıdaki şartlardan biri sağlanırsa G, $(\mathcal{LF})\mathcal{N}_c$ gruptur.

i) G sonlu indeksli bir öz altgrubu olan sonlu üreteçli bir grup;

ii) G sonlu üreteçli değildir [2].

İspat

G, (i) ya da (ii) şartlarından birini sağlasın. $(\mathcal{LF})\mathcal{N}_c$, $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ tarafından içerildiğinden Önerme 4.3 den dolayı G, $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ gruptur. Böylece G nin bir N normal altgrubu vardır öyle ki N lokal sonludur ve G/N nilpotenttir. Dolayısıyla N, G

nin lokal sonlu F radikali tarafından içerilir. $N \leq F$, G/N nilpotent ve $\frac{G/N}{F/N} \cong G/F$ olduğundan $\frac{G/N}{F/N}$ nilpotenttir. Dolayısıyla G/F nilpotenttir. Açık olarak G nin lokal sonlu olmadığını kabul edebiliriz. Böylece G/F aşikar değildir. Dolayısıyla Lemma 4.6 dan G/F torsiyonsuzdur.

Öncelikle G/F sonlu üreteçli olsun. G/F sonlu üreteçli ve torsiyonsuz nilpotent grup olduğundan Teorem 2.51 den residually sonlu p-gruptur ve böylece lokal dereceli gruptur. Dolayısıyla G/F nin sonlu indeksli bir öz normal altgubu vardır. Bu altgrup K/F olsun. $\frac{G/F}{K/F} \cong G/K$ olduğundan G/K sonludur. Hipotezden K/F , $(\mathcal{LF})\mathcal{N}_c$ ye ait olduğundan G/F, $((\mathcal{LF})\mathcal{N}_c)\mathcal{F}$ ye aittir. G/F torsiyonsuz olduğundan lokal sonlu altgrubu aşikardır. Dolayısıyla G/F, $\mathcal{N}_c\mathcal{F}$ sınıfındandır. G/F, $\mathcal{N}_c\mathcal{F}$ sınıfından torsiyonsuz nilpotent grup olduğundan Teorem 2.49 dan G/F , $\mathcal{N}_c$ gruptur. Sonuç olarak G, $(\mathcal{LF})\mathcal{N}_c$ gruptur.

Şimdi G/F sonlu üreteçli olmasın. $a_1, a_2, ..., a_{c+1}$, G/F nin elemanları olsun. G/F sonlu üreteçli olmadığından $< a_1, a_2, ..., a_{c+1} >$ G/F de öz altgruptur. Hipotezden $< a_1, a_2, ..., a_{c+1} >$ $(\mathcal{LF})\mathcal{N}_c$ gruptur. G/F torsiyonsuz olduğundan $< a_1, a_2, ..., a_{c+1} >$ nin lokal sonlu altgrubu aşikardır. Böylece $< a_1, a_2, ..., a_{c+1} >$ $\mathcal{N}_c$ gruptur. O halde $\gamma_{c+1}(< a_1, a_2, ..., a_{c+1} >) = 1$ ve buradan $[a_1, a_2, ..., a_{c+1}] = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\gamma_{c+1}(G/F) &= [G/F, G/F, ..., G/F] \\
&= \langle [a_1, a_2, ..., a_{c+1}]\ ;\ a_1, a_2, ..., a_{c+1} \in G/F \rangle \\
&= 1
\end{aligned}$$

dir. Böylece G/F, $\mathcal{N}_c$ gruptur. Buradan da G, $(\mathcal{LF})\mathcal{N}_c$ gruptur.

Sonlu üreteçli lokal dereceli grupların sonlu indeksli bir öz altgrubu bulunduğundan aşağıdaki sonucu Önerme 4.7 den dolayı elde edebiliriz.

4.8. Sonuç

$c>0$ bir tamsayı ve G öz altgrupları $(\mathcal{LF})\mathcal{N}_c$ sınıfından lokal dereceli grup olsun. O zaman G, $(\mathcal{LF})\mathcal{N}_c$ sınıfındandır [2].

İspat

G sonlu üreteçli olsun. G lokal dereceli olduğundan G nin sonlu indeksli bir öz normal altgrubu vardır. O halde Önerme 4.7 (i) den G, $(\mathcal{LF})\mathcal{N}_c$ gruptur.

G sonlu üreteçli olmasın. O zaman Önerme 4.7(ii) den G, $(\mathcal{LF})\mathcal{N}_c$ gruptur.

Şimdi Teorem 4.2 nin ispatını verebiliriz.

Teorem 4.2 nin ispatı:

G bir minimal $(\mathcal{LF})\mathcal{N}_c$-olmayan grup olsun. $(\mathcal{LF})\mathcal{N}_c$, $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ de içerildiğinden dolayı G nin her öz altgrubu $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ gruptur.

Kabul edelim ki G, $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$ grup olsun. O halde G nin bir N lokal sonlu normal altgrubu vardır öyle ki G/N nilpotenttir. G/N nin her öz normal altgrubu $(\mathcal{LF})\mathcal{N}_c$ ve G/N lokal dereceli olduğundan Sonuç 4.8 ten G/N, $(\mathcal{LF})\mathcal{N}_c$ gruptur.

Sonuç olarak N lokal sonlu olduğundan G, $(\mathcal{LF})\mathcal{N}_c$ gruptur. Bu bir çelişkidir. Yani G bir minimal $(\mathcal{LF})\mathcal{N}$-olmayan gruptur. O halde Teorem 4.1 den dolayı G, aşikar olmayan sonlu faktörü olmayan sonlu üreteçli mükemmel grup olsun öyle ki $G/FratG$ sonsuz basit gruptur. Böylece ispat tamamlanır.

KAYNAKLAR

1. Endimioni, G., Traustason, G., “On torsion-by-nilpotent groups”, ***J. Algebra***, 241:669-676 (2001)

2. Dilmi, A., “Groups whose proper subgroups are locally finite-by-nilpotent”,***Annales Mathematiquess Blaise Pascal,*** 14:29-35 (2007)

3. Robinson, D.J.S., “A Course in the theory of Groups”, ***Springer-Verlag*** , NewYork, 10-30-100-227 (1972)

4. Robinson, D.J.S., “Finiteness conditions and generalized soluble groups Vols.I, II”, ***Springer,*** Berlin, 47-55 (1972)

5. Xu, M., “Groups whose proper subgroups are finite-by-nilpotent”, ***Arch. Math.,*** 66:353-359 (1996)

6. Olshanski, A.Y., “An infinite simple torsion-free noetherian group”, ***Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.***, 43:1328-1393 (1979)

7. Asar, A.O., “Locally nilpotent p-group whose proper subgroups are hypercentral or nilpotent-by-chernikov”, ***J. London Math. Soc.***, 61:412-422 (2000)

8. Belyaev, V., “Groups of the Miller-Moreno type”, ***Sibirsk. Mat. Z.,*** 19:509-514 (1978)

9. Bruno, B.,Phillips, R.E., “On minimal conditions related to Miller-Moreno type groups”, ***Rend. Sem. Mat. Univ. Padova***, 69:153-168 (1983)

10. Kuzucuoğlu, M., Phillips, R.E., “Locally finite minimal non FC-groups”, ***Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.***, 105:417-420 (1989)

11. Newman, M.F., Wiegold, J., “Groups with many nilpotent subgroups”, ***Arch. Math.***, 15:241-250 (1964)

12. Otal, J., Pena, J.M., “Groups in which every proper subgroups is Chernikov-by-nilpotent or nilpotent-by-Chernikov”, ***Arch. Math.,*** 51:193-197 (1988)

13. Smith, H., “Groups with few non-nilpotent subgroups”, ***Glasgow Math. J.,*** 39:141-151 (1997)

14. Xu, M., “Groups whose proper subgroups are Baer groups”, ***Acta. Math. Sinica***, 40:10-17 (1996)

15. Shenkman, E., “Group theory”, ***Van Nostrand***, Princeton, 60 (1965)

16. Robinson, D.J.S., Lennox, J.C., “The theory of infinite soluble groups”, ***Oxford,*** 37-40 (2004)

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	:AKYOL, Sevilay
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 15.07.1986 Samsun
Medeni hali	: Evli
Telefon	: 0 (554) 991 77 96
e-mail	: sevilay_mat55@hotmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Lisans	Ondokuz Mayıs Üniversitesi/Matematik Bölümü	2009
Lise	Asarcık Lisesi	2003

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Seyahat etmek, zeka oyunları oynamak, bulmaca çözmek, kitap okumak