

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
BİLGİSAYAR VE ÖĞRETİM TEKNOLOJİLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

HİPERORTAM VE GEZİNMENİN YAPISAL ANALİZİNDE KULLANILAN
KAVRAMLAR, ÖLÇÜLER VE METRİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan
Sevgi GÜYER

Danışman
Yrd.Doç.Dr. Serçin KARATAŞ

ANKARA-2008

Sevgi GÜYER'in *Hiperortam ve Gezinmenin Yapısal Analizinde Kullanılan Kavramlar, Ölçüler ve Metrikler* başlıklı tezi 16/01/2008 tarihinde, jürimiz tarafından Bilgisayar ve Öğretim Teknolojileri Eğitimi Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Adı Soyadı

İmza

Başkan : Prof.Dr. Halil İbrahim YALIN.....	
Üye : Doç.Dr. Ahmet MAHİROĞLU.....	
Üye : Yrd.Doç.Dr. Serçin KARATAŞ (Tez Danışmanı).....	

Prof. Yılmaz ŞENDURUR
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Literatür taraması ağırlıklı olarak ve konuyla ilgili daha önceden yapılmış olan araştırmaların incelenmesi, derlenmesi ve sınıflandırılması biçiminde gerçekleştirilen bu tez çalışmasında, değerli öneri ve yönlendirmeleri için tez danışmanım Sn. Yrd.Doç.Dr. Serçin KARATAŞ'a; Kendisinden almış olduğum derslerde sayesinde kazandığım alan bilgisinden dolayı daha önce teşekkür etme fırsatı bulamadığım, aynı zamanda tezimin kapsam ve biçimsel açıdan düzenlenmesi konusunda verdiği değerli tavsiyeleri nedeniyle Sn. Prof.Dr. Halil İbrahim YALIN'a ve son olarak tezimin nihai şeklini almasında sağladığı katkılarından dolayı eşim Sn.Yrd.Doç.Dr. Tolga GÜYER'e içtenlikle teşekkür ederim.

Sevgi GÜYER

ÖZET

HİPERORTAM VE GEZİNMENİN YAPISAL ANALİZİNDE KULLANILAN KAVRAMLAR, ÖLÇÜLER VE METRİKLER

Güyer, Sevgi

Yüksek Lisans, Bilgisayar ve Öğretim Teknolojileri Eğitimi Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd.Doç.Dr. Serçin Karataş

Ocak – 2008

Bu çalışmada, sonlu matematik disiplini içerisinde yer alan graf teorisi temelinde hiperortam ve gezinmenin matematiksel modellemesi gerçekleştirilmiş, bu model üzerinde öğretim amaçlı hiperortamların ve gezinmenin yapısal analizinde kullanılacak kavram, ölçü ve metrikler tanımlanmıştır.

ABSTRACT**CONCEPTS, MEASURES AND METRICS WHICH ARE USED FOR THE
STRUCTURAL ANALYSIS OF THE HYPERMEDIA AND NAVIGATION**

Güyer, Sevgi

Yüksek Lisans, Bilgisayar ve Öğretim Teknolojileri Eğitimi Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd.Doç.Dr. Serçin Karataş

Ocak – 2008

In this study, mathematical modelling of the hypermedia and navigation based on the graph theory included in the finite mathematics discipline, is realized. On this model, concepts, measures and metrics which are used for the structural analysis of the instructional hypermedia and navigation are defined.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
JÜRİ ÜYELERİNİN İMZA SAYFASI	i
ÖNSÖZ	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TABLolar VE ŞEKİLLER LİSTESİ	vii
 BÖLÜM	
1. GİRİŞ	1
1.1. Problem	3
1.1.1. Problem Durumu	3
1.1.2. Problem Cümlesi	8
1.2. Amaç	8
1.2.1. Alt Amaçlar	8
1.3. Araştırmanın Önemi	9
1.4. Tanımlar	10
2. GRAF TEORİSİ	14
2.1. Graf Teorisinin Kısa Bir Tarihçesi	14
2.2. Graflarda Temel Kavramlar	17
2.3. Graf Türleri	19
2.3.1. Basit (Simple) Graflar	19
2.3.2. Devirli (Cyclic) Graflar	20
2.3.3. Tam (Complete) Graflar	21
2.3.4. r-Parçalı (r-Partite) Graflar	21
2.4. Eşyapılı Graflar	24
2.5. Graflar Arasındaki İkili İşlemler	30
2.5.1. İki Grafın Arakesiti ve Birleşimi	30
2.5.2. İki Grafın Toplamı	31
2.5.3. Grafların Birbirlerine Katılması	32
2.5.4. İki Grafın Kartezyen Çarpımı	33
2.5.5. İki Grafın Sözlük Çarpımı	34
2.5.6. İki Grafın Normal Çarpımı	35
2.5.7. İki Grafın Tensör (Kronecker) Çarpımı	36
2.6. Altgraflar	36
2.6.1. Altgraflarla İlgili Bazı Özellikler	37
2.7. Bir Grafın Tümleyeni	40
2.7.1. Tümleyenle İlgili Bazı Özellikler	42
2.8. Bir Düğümün Derecesi	43
2.9. Graflarda Yol Kavramı ve Bağlantılılık	46
2.10. Uzaklık Fonksiyonu ve Uzaklık Matrisi	49
2.11. Doğrusal Graflar	55

2.12. Ağaçlar	56
2.13. Yönlü Graflar	59
2.14. Ağırlıklı Yönlü Graflar	68
2.14.1. Ağırlıklı Yönlü Graflarda Bazı Algoritmalar	69
3. HİPERORTAM VE GEZİNMENİN MODELLENMESİ	76
3.1. Hiperortamın Modellenmesi	76
3.1.1. Hiperortamlarla İlgili Temel Kavramlar	80
3.2. Gezinmenin Modellenmesi	84
3.2.1. Gezinmeyle İlgili Temel Kavramlar	87
3.2.2. Gezinmenin Sınıflandırılması	87
3.3. Matris Gösterimler	91
3.3.1. Bağlantılılık Matrisi	91
3.3.2. Uzaklık Matrisi	93
3.3.3. Dönüştürülmüş Uzaklık Matrisleri	94
4. ÖLÇÜ VE METRİKLER	95
4.1. Yoğunluk (Density)	95
4.2. Merkezilik (Centrality)	97
4.3. Statü, Kontrastatü ve Prestij	98
4.4. Dallanma (Stratum)	101
4.5. Sıklık (Compactness)	104
4.6. Örnek Uygulama	104
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	110
5.1. Sonuçlar	110
5.2. Öneriler	111
5.2.1. Kuramsal Öneriler	111
5.2.2. Uygulamaya Yönelik Öneriler	112
KAYNAKÇA	113

TABLOLAR VE ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 1: Herder (2006)'e göre hiperortam ve gezinme ayrımı	7
Şekil 2: Hiperortam, hipermetin ve metin kavramları arasındaki ilişki	11
Şekil 3: Königsberg köprüsü	14
Şekil 4: Königsberg köprüleri ve ayırdıkları dört bölge: A, B, C ve D bölgeleri	15
Şekil 5: Königsberg grafi	16
Şekil 6: Üzerinde Euler yolunun tanımlanabileceği bir graf örneği	16
Şekil 7: $G=(V(G),E(G),I_G)$ grafi	17
Şekil 8: Örnek bir graf	18
Şekil 9: G grafi	19
Şekil 10: Basit graf	20
Şekil 11: C_3 ve C_4 grafları	20
Şekil 12: Tam graf	21
Şekil 13: Bir 2-parçalı graf	22
Şekil 14: Çeşitli türlerde r-parçalı graflar	23
Şekil 15: $K_{1,4}$, $K_{1,6}$ ve $K_{1,8}$ yıldız grafları	24
Şekil 16: Eşyapılı iki graf	25
Şekil 17: G, H ve J grafları	26
Şekil 18: G ve H grafları arasında bir eşyapı dönüşümü arayışı	28
Şekil 19: G grafinin yeniden düzenlenmesi	29
Şekil 20: G grafindan şekilsel deformasyonla G^* grafinin elde edilmesi	30
Şekil 21: Birleşim ve arakesit grafları	32
Şekil 22: W_5 grafi	33
Şekil 23: İki grafin birbirine katılması	33
Şekil 24: İki grafin kartezyen çarpımı	34
Şekil 25: İki grafin sözlük çarpımı	34
Şekil 26: $G \Delta H \neq H \Delta G$	35
Şekil 27: İki grafin normal çarpımı	35
Şekil 28: İki grafin tensör (kronecker) çarpımı	36
Şekil 29: H, G grafinin altgrafıdır	37
Şekil 30: H, G grafinda bir devirdir	37
Şekil 31: Düğüm grupları	38
Şekil 32: Maksimal düğüm grubu	38
Şekil 33: H, G'nin bir altgrafı, H^* ise G'nin $S=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_7\}$ kümesi tarafından düğüm-indirgenmiş altgrafıdır	39
Şekil 34: H^* , G'nin $T=\{e_1, e_2, e_3, e_5, e_8\}$ kümesi tarafından bağ-indirgenmiş altgrafıdır	39
Şekil 35: G grafi ve özel altgrafları	40
Şekil 36: G grafi ve $V(G)$ kümesi kullanılarak elde edilebilecek en büyük tam graf olan G^* grafi	41
Şekil 37: G grafi ve tümleyeni	42
Şekil 38: $G \cong G^C$ olduğundan, G grafi kendine-tümleyendir	42
Şekil 39: $G \cong G^C$	43
Şekil 40: Bir grafta düğümlerin dereceleri	43

Şekil 41: Bir kübik graf.....	44
Şekil 42: Grafta (a) bir yürüme, (b) bir iz ve (c) bir yol	47
Şekil 43: G grafi ve bileşenleri. $\omega(G)=3 \neq 1$ olduğundan G bağlantısızdır	48
Şekil 44: $\omega(G)=1$, dolayısıyla G bağlantılıdır	48
Şekil 45: G grafi ve her düğümün dış merkez sayıları.....	50
Şekil 46: $r(G)=2$, dolayısıyla $G_{Mer}=\{v_7\}$ olacaktır	51
Şekil 47: G grafi, merkezi ve çevresi	52
Şekil 48: G grafi ve medyanı	53
Şekil 49: G grafi	54
Şekil 50: G grafi ve $L(G)$ doğrusal grafi	56
Şekil 51: Ağaç türünde bir graf.....	57
Şekil 52: Bir ikili ağaç	57
Şekil 53: G grafi ve geren ağaçları T_1 ve T_2	59
Şekil 54: Yönlü graflarda düğüm ikilileri sıralıdır.....	60
Şekil 55: Yönlü graflarda iki yönlü bağlar.....	60
Şekil 56: Bir yönlü graf ve onun çatı grafi.....	61
Şekil 57: v_1 ve v_4 düğümleri arasında bir yol tanımı. Ancak tersi yönde bir yol tanımlamak mümkün değildir	62
Şekil 58: İç derece ve dış derece kavramları.....	62
Şekil 59: D yönlü grafi	63
Şekil 60: D yönlü grafi	64
Şekil 61: Simetrik (D_1) ve asimetrik (D_2 ve D_3) yönlü graflar	66
Şekil 62: Tam simetrik graflar	67
Şekil 63: 1-düzenli ve 2-düzenli yönlü graflar.....	67
Şekil 64: Kuvvetli bağlantılı bir yönlü graf ve düğümlerin dış merkez değerleri	68
Şekil 65: Geren ağaç için graf örneği.....	69
Şekil 66: Şekil 65’de verilen grafin bütün geren ağaçları.....	70
Şekil 67: Bir yerleşim planını gösteren ağırlıklı graf.....	71
Şekil 68: Şekil 67’de verilen ağırlıklı grafin hesaplanan minimum geren ağacı	72
Şekil 69: Dijkstra algoritması için örnek bir ağırlıklı yönlü graf.....	74
Şekil 70: Şekil 69’da verilen grafta, r ve t düğümleri arasındaki en kısa yol	75
Şekil 71: H hiperortamının diyagramı.....	78
Şekil 72: Sayfa&Bağlantı-Ağırlıklı örnek bir H hiperortamının diyagramı	80
Şekil 73: Hiperortamlarda “Dallanma” ve “Devir” yapıları	81
Şekil 74: $J \subseteq H$ “tam sayfa grubu”, b_1 ve b_2 “paralel bağlantılar” ve b_{19} “çapa”dır	82
Şekil 75: Bir H hiperortamı ve onun bir geren ağacı olan T hiperortamı	83
Şekil 76: b_3 bağlantısı bir çapa, (s_2, b_3, s_2) gezinme adımı ise bir çapa gezinmesidir .	86
Şekil 77: Bir gezinme örneği.....	87
Şekil 78: (a) Derinlemesine, (b) Genişlemesine, (c) Derinlemesine-Genişlemesine gezinme stratejileri	88
Şekil 79: (a) Kapalı ve (b) açık gezinmeler	89
Şekil 80: (a) İzlençe ve (b) yol türünde gezinmeler	90
Şekil 81: H hiperortamı ve A_H bağlantılılık matrisi.....	92
Şekil 82: Farklı hiperortamların yoğunluk değerleri.....	96
Şekil 83: Örnek 12 için verilen hiperortam.....	98
Şekil 84: Örnek 13 için verilen hiperortam.....	100
Şekil 85: Farklı hiperortamların mutlak prestij toplamaları	102

Şekil 86: Tam ve bağlantısız hiperortamların uzaklık matrislerinin girdi toplamaları	105
Şekil 87: Farklı hiperortamların sıklık değerleri	106
Şekil 88: Yapay Zekâya Giriş ders içeriğine ait hiperortam	107
Şekil 89: Örnek uygulamaya ait hiperortamın diyagramı	108
Tablo 1: Şekil 83’de verilen hiperortam için hesaplanan merkezilik değerleri	98
Tablo 1: Şekil 84’de verilen hiperortam için hesaplanan prestij değerleri	100

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Ülkelerin günden güne artan nüfusları ve buna paralel olarak eğitim verilmesi gereken insan sayılarının da büyük bir hızla çoğalması, beraberinde, eğitimin daha büyük kalabalıklara, daha hızlı, daha verimli ve daha kaliteli bir şekilde verilebilmesini kolaylaştıracak olan öğretim teknolojilerine ilgiyi de artırmıştır. Kuşkusuz ki öğretim teknolojisine hizmet eden en önemli araçlardan birisi de bilgisayardır. Bunda, bilgisayarların genel amaçlı makineler olmalarının ve yazılım desteği ile istenilen her türlü biçime “bürünebilme” yeteneklerinin payı büyüktür. Öyle ki bir bilgisayar, soru soran, sınav yapan, bir konuyu öğreten ve öğrencinin tepkilerine geri dönüt verebilen bir öğretmen olabilir. Bütün bunlar yapılırken, gerçek bir öğretmenin gözetimine gereksinim duyulabilir ya da öğrenci tamamen bilgisayar ile baş başa kalabilir.

Bilim ve teknolojinin tarihsel gelişimi göz önüne alındığında, ortaya çıkmaları ve gelişme süreçleri çok da uzun bir zaman dilimini kapsamayan bilgisayarların, başlangıçta sadece fen ve mühendislik alanlarındaki hesaplamalarda kullanılmalarının en önemli sebeplerinden birisi de, herkes tarafından kullanılamayacak düzeyde karmaşık arayüzlere ve donanımlara sahip olmalarıydı. Ancak günümüzde kaydettikleri ilerlemeler, bilgisayarları çok geniş kitleler tarafından kullanılabilir “kullanıcı-dostu” makineler haline getirmiştir. Bunun yanı sıra, internet ve web teknolojilerindeki yeni ve göz alıcı gelişmeler de bilgisayarların, özellikle toplumun yetişkin olmayan bireyleri için ilgi odağı olmasını sağlamıştır. Bu bireyler eğitimin en büyük tüketici kesimini oluşturduklarından, kullanma konusunda sahip oldukları bu eğilimlerinden yararlanmak şüphesiz ki eğitimciler için bulunmaz bir fırsat olacaktır.

Bu bağlamda, tez çalışması beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriştir. Bu bölümde sırasıyla problem durumu, ele alınan ana problemi ifade eden problem cümlesi ve problemin çözüm adımlarını gösteren alt problemler, problemin çözümü için gerçekleştirilmeleri gereken amaçlar, araştırmanın önemi ve tezin genelinde kullanılan kavramların tanımları verilmiştir.

İkinci bölüm, hiperortamın ve gezinmenin modellenmesine esas olan graf teorisi hakkında verilecek temel bilgilere ayrılmıştır. Bu bölümde verilen tanımlar, algoritmalar ve teoremler, oldukça geniş bir uygulama alanına sahip olan grafların, hiperortama ve gezinmeye uygulanabilecek özellikleri göz önünde bulundurularak seçilmiştir. Bölüm kapsamında verilen örneklerin bir kısmı, Balakrishnan ve Ranganathan (1999), Balakrishnan (1997), Buckley ve Lewinter (2003), Chartrand ve Lesniak (2004) ve Diestel (2000) kaynaklarından alınmıştır. Tez kapsamında graf teorisi araştırmanın amacına ulaşmak için araç olarak değerlendirildiğinden, bu bölümde teoremlerin ispatlarına yer verilmemiştir. Bu teoremler genel teoriye ait olup, ispatlarına yukarıda verilen kaynaklardan ulaşılabilir.

Üçüncü bölümde, graf teorisi temelinde hiperortamın ve hiperortamda gezinmenin modellenmesi sonucu elde edilen yeni kavram ve tanımlar verilmiştir. Bu bölümde ayrıca, gezinmenin ilgili literatürde yer alan çeşitli sınıflandırmalarına yer verilmiştir. Bununla birlikte, graf teorisi temelinde gerçekleştirilen modele uygun olarak yapılan farklı sınıflandırmalar da bu bölüm kapsamında ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde, hiperortamın ve hiperortamda gezinmenin yapısal olarak analiz edilmesinde kullanılacak ölçü ve metriklerin tanımlarına ve kullanım örneklerine yer verilmiştir.

Son bölüm olan beşinci bölüm ise, sonuçlar ve konuyla ilgili olarak ileride gerçekleştirilecek çalışmalar için yapılan kuramsal ve uygulamaya yönelik önerilere ayrılmıştır.

1.1. Problem

Bu bölümde, problem cümlesi ifade edilmeden önce, problemin odağını oluşturan ilgili çalışmaların ve bu araştırmanın gerçekleştirilmesi için gereken motivasyonun kaynağının açıklandığı problem durumu irdelenmiştir.

1.1.1. Problem Durumu

Uzaktan eğitim alanının da önemli bir ayağını oluşturan web teknolojilerine dayalı öğrenme ortamları, genellikle öğrencinin karşısına hiperortam olarak çıkmaktadır. Böyle bir ortamda, öğrenciyle bilgisayar arasında, öğretim teknolojisi uzmanı tarafından anlık olarak ya da önceden tanımlanmış kurallarla yönlendirilen bir etkileşimin gerçekleşmesi kaçınılmaz olacaktır. Diğer yandan, öğrenen birey, ardında ne kadar yüksek bir teknolojisi bulunursa bulunsun, hazırlanan bu özel öğrenme aracının bir bakıma “vitriini” konumunda olan web ortamının, onun öğrenmesini en yüksek seviyeye getirecek sadelikte ve uygunlukta olmasını bekleyecektir. Bu da, tasarım ilkelerinin böyle bir sürecin planlanmasındaki önemini vurgulamaktadır. Ayrıca, öğrenme ortamlarının, özellikle de web temelli olanların, bireysel farklılıklar ve gezinme stratejileri gibi değişkenlerle ilişkilerini inceleyen pek çok araştırma da ilgili alanyazıda yer almaktadır.

Öğretim materyali hazırlayan öğretim teknolojisi uzmanlarının en önemli problemlerinden birisi de, hazırladıkları materyalin gerçekten de “işe yarar” olup olmadığı konusunda kesin bir yargıya varmakta yaşadıkları zorluktur. Bu endişeleri gidermenin en kolay ve güvenilir yöntemlerinden birisi de, materyalin birinci

dereceden kullanıcıları olan öğrenciler üzerinde denenmesidir. Bu süreç, çoğunlukla bir kontrol grubu eşliğinde gerçekleştirilir ve yapılan ön-test ve son-test sonuçlarına göre elde edilen bulgular yorumlanır. Bu yorumlamalar, evren ve seçilen örneklemin durumuna göre, materyalin başarısı konusunda önemli ipuçları verebilir, ancak söz konusu materyal, hiperortam yapısında ise, öğrencilerin materyali kullanarak edindikleri başarımların değişikliği ya da bu başarımın kalıcılığı kadar önemli olan bir konu daha vardır ki o da öğrencinin materyalin kullanımı sürecindeki davranışlarıdır.

“Davranış” ile anlatılmak istenen, genellikle yapılandırılmış ya da yapılandırılmamış bir öğrenme çevresi sunan hiperortamlardan oluşan bir ortamda, öğrencinin gezinirken sergilediği dikkat noktaları, seçtiği gezinme stratejileri, sayfalardaki kalma süreleri ya da ortamda gösterdiği kaybolma eğilimleri (Conklin, 1987) gibi, eğitimsel açıdan dikkate alınması gereken her türlü hareketi olabilir. Her ne kadar günümüzde kullanılan popüler internet tarayıcılarında ziyaret edilen sayfaları geçici olarak kaydedip bu bağlantıları farklı renkte göstermek gibi “gezinme modellemesi” benzeri bazı özellikler bulunsun da (Park ve Kim, 2000; Nielsen, 2005), bunlar öğrencinin gezinmesi üzerine detaylı bir analiz gerçekleştirilebilmesini olanaklı kılacak kadar güçlü araçlar değildir. Hatta aynı bilgisayarı bir başka kullanıcı kullandığında, eğer aynı kullanıcı adı ile giriş yaptıysa, bağlantının rengi değişmiş olacaktır. Bu nedenle bazı uzmanlar, bağlantı renginin değişmesine izin verilmemesi gerektiğini savunurlar. Sonuç olarak, ortamın ve bu ortamda gezinen öğrencinin bahsedilen hareketlerinin sağlıklı bir şekilde ölçülebilmesi ve değerlendirilebilmesi için, öncelikle bir modelleme yapılması kaçınılmaz olacaktır.

Önceleri bilgisayar ağlarının analiz edilmesinde kullanılan teorik modellerin başında gelen ve son yıllarda oldukça gelişen ve uygulama alanları yaygınlaşan graf teorisinin, hiperortamlar ve bu ortamlarda gezinme için de oldukça uygun bir model olduğu söylenebilir. Graf teorisi temel alınarak modellenmiş bir ortamda gezinen bir öğrencinin, daha önce bahsedilen bütün davranışları matematiksel olarak ölçülebilir

birer büyüklük olarak elde edilebilir ki, bu veriler, bu konuda çalışan bir eğitimci için çok önemli bir analiz ortamı sağlayacaklardır.

Konuyla ilgili olarak yakın bir geçmişte başlayan çalışmalar, genellikle gezinmenin modellenmesi ve gezinme ile ortam modelleri arasındaki ilişkiler üzerine yoğunlaşmıştır. Diğer bir deyişle ele alınan konular genellikle, kullanıcının hiperortamla girdiği etkileşim ekseninde şekillenmiştir. Web ortamının yönlü graflarla gösterilmesi ve bu model üzerinden çeşitli analizlerin yapılması fikri daha çok 80'li yılların sonlarında tartışılmaya başlanmıştır. Bu konuda önde gelen isimlerden birisi de, *Hypertext* kongrelerinde sunduğu bildirilerle dikkatleri üzerine çeken ve önemli tartışmalar başlatan H. Van Dyke Parunak'tır. Parunak, *Hypertext'89* kongresinde sunduğu bildirisinde (Parunak, 1989), hiperortam topolojilerini graf teorisi temeline dayanan bir model üzerinde sınıflandırmış, bu topolojilerle kullanıcıların gezinme stratejilerinin karşılaştırmalı bir incelemesini yapmıştır. 1991 yılında aynı kongrede Parunak, hiperortam için graf temelli modele alternatif olarak geliştirdiği küme temelli modeli önermiştir (Parunak, 1991). Parunak'a göre küme-temelli bir model, sınıflandırmaya ve kullanıcının hiperortamla girdiği etkileşimin analiz edilmesine daha uygun bir ortam sunmaktadır.

Hiperortamın graf modeli ve bu model üzerinde bir kullanıcının gezinmesinin ölçülmesinde kullanılabilecek çeşitli formüllerin geliştirilmesi ya da doğrudan graf teorisinden aktarılması fikri ilk olarak Botafogo ve arkadaşları tarafından öne sürülmüştür (Botafogo vd., 1992). Botafogo tarafından *kullanışlı metrikler* olarak adlandırılan bu ölçüler, bir hiperortamın ya da gezinmenin doğrusallık ya da bağlantılılık gibi açılardan ölçülmesi için önerilmişlerdir. Bu ve benzer yaklaşımlar, daha sonra çeşitli araştırmacılar tarafından gerçekleştirilen çalışmalarla geliştirilmiştir (Pirolli vd., 1996; Kleinberg, 1999; Anderson vd., 2001; McEneaney, 2001; Claypool vd., 2001).

Graf teorisinde yer alan “ağırlıklı yönlü graf” kavramının hiperortamla ilişkilendirildiği önemli bir çalışma ise Heer ve Chi tarafından gerçekleştirilmiştir (Heer ve Chi, 2002). Bu çalışmalarında Heer ve Chi, her bağlantıya bir ağırlık değeri atamak suretiyle, sayfalar arasındaki ilişkileri göstermişlerdir. Aynı çalışmalarında, ağırlık türlerini de aşağıdaki şekilde sınıflandırmışlardır:

Düzgün ağırlık değeri: Her bağlantının ağırlık değeri eşittir.

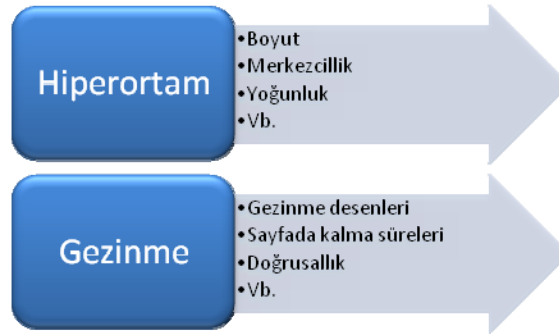
İçerik-temelli ağırlık değeri: Her bağlantı, bağlantının kaynak ve hedef sayfasında yer alan metinlerin “metinsel benzerlik” değerine bağlı olarak bir ağırlık değeri alır.

Geçiş-frekansı ağırlık değeri: Her bağlantı, kullanıcının o bağlantıyı izleme olasılığına bağlı olarak bir ağırlık değeri alır. Bu olasılık değeri, bir kullanıcının çoklu oturumlarından ya da genel olarak bütün kullanıcıların oturumlarından elde edilen bireysel tercih verileri tarafından belirlenir (Smyth ve Cotter, 2002).

Bakış süresi ağırlık değeri: Her bağlantıya, kullanıcının kaynak sayfada kalma süresine göre bir ağırlık değeri atanır.

Bu konuda yapılan ve alana kayda değer bir katkı sağlayan diğer bir çalışma, Herder tarafından 2006 yılında yazılmış olan doktora tezidir (Herder, 2006). Herder tez çalışmasını, 2002 yılından başlayarak yaptığı araştırmalarını derleyerek sonuçlandırmıştır (Herder, 2002; Herder 2003a; Herder, 2003b; Herder, 2003c). Yaptığı bu araştırmalarda Herder, çalışmalarını daha önce yapılanlardan farklı kılan bazı önemli konuları vurgulamıştır. Bunlardan başlıcası, daha önceki çalışmaların büyük bir kısmında karıştırılan “metrik” ve “ölçü” kavramlarını doğru ve yerinde kullanması olmuştur. Herder’in dikkati çeken diğer bir vurgusu da, site ve site üzerinde gezinme modellerinin, bu modeller üzerinde geliştirilen kavramlara bağlı olarak ayrı ayrı ele alınabileceği gibi, gezinmenin gerçekleştiği siteye bağlı ölçümlerin yapıldığı durumlarda, siteye ait değerlerinde göz önünde bulundurulması gerekliliğidir (Bkz. Şekil 1). Buna paralel olarak Brendt ve Brenstein ise web gezinmesinde bireysel farklılıkları görselleştirdikleri çalışmalarında (Brendt ve

Brenstein, 2001), web sitesi ile gezinmenin birbirlerinden bağımsız olarak değerlendirilmelerinin yanlış olacağını ifade etmişler, buna gerekçe olarak da gezinmenin site tarafından “çevrelenmiş” bir kavram olduğunu göstermişlerdir.



Şekil 1: Herder (2006)’e göre hiperortam ve gezinme ayrımı

Genel anlamda bir web sitesinin “görselleştirilmesi”, yani üzerinde daha kapsamlı analizlerin gerçekleştirilebilmesi ve graf teorisi gibi hiperortam yapısına fazlasıyla uygun bir teori kullanılarak görsel olarak modellenmesi, birçok araştırmacı tarafından 90’lı yılların başından itibaren başlı başına bir problem olarak ele alınmıştır. Bu konuda başlangıç olarak kabul edilebilecek çalışmalardan en önemlisi, 1994 yılında Pitkow ve Bharat tarafından geliştirilen bir görselleştirme aracı olan WebViz’dir (Pitkow ve Bharat, 1994). Bu araç, her ne kadar web sitesini klasik dizin yapısına dönüştüren basit bir uygulama olsa da, daha sonra geliştirilen benzer işlevli çeşitli araçlar için önemli bir ilham kaynağı olmuştur. Brendt ve Bernstein’in 2001 yılında yaptıkları araştırmanın bir ürünü olan STRADYN projesi, graf teorisindeki “geren ağaç” (spanning tree) sistemi üzerine kurulmuştur ve kullanıcıların bireysel farklılıkları ile gezinmeleri arasındaki ilişkilerin incelenmesinde kullanılmıştır (Brendt ve Brenstein, 2001).

Hiperortam ve hiperortamda gezinmenin görselleştirmesi ya da yapısal olarak analiz edilmesi doğrultusunda gerçekleştirilen çalışmalar bu şekilde özetlenebilir. Bu araştırmalar ışığında ele alınan problem cümlesi, izleyen bölümde verilmiştir.

1.1.2. Problem Cümlesi

Hiperortam ve hiperortamda gezinmenin yapısal analizinde kullanılan kavram, ölçü ve metrikler nelerdir ve öğretim teknolojileri boyutunda kullanım alanları nelerdir?

1.2. Amaç

Gerçekleştirilecek tez çalışmasında amaç, web-temelli öğretimde, hiperortam ve hiperortamda gezinmenin yapısal analizinde kullanılan çeşitli kavramlar, ölçüler ve metrikleri ele alarak, bunların kullanılabilirlik açısından değerlendirilmelerini gerçekleştirmektir.

1.2.1. Alt Amaçlar

1. Graf nedir? Grafların türleri ve özellikleri nelerdir?
2. Graf teorisinde yer alan temel teoremler ve algoritmalar nelerdir ve farklı modellere nasıl uygulanabilirler?
3. Graf teorisi hiperortamın modellenmesinde nasıl kullanılabilir?
4. Graf teorisi hiperortamda gezinmenin modellenmesinde nasıl kullanılabilir?
5. Hiperortamın değerlendirilmesinde kullanılabilecek kavram, ölçü ve metrikler nelerdir?
6. Hiperortamda gezinmenin değerlendirilmesinde kullanılabilecek kavram, ölçü ve metrikler nelerdir?

Bu bağlamda, hiperortam yapısında hazırlanmış bir öğrenme ortamının ve bu ortamda gezinen bir öğrencinin davranışlarının modellenmesi için kullanılan

matematiksel teori ele alınacaktır. Bu gezinme, verilen bir görevi yerine getirmek için ya da doğrudan “öğrenme” amacıyla olabilmektedir. Daha önce yapılan araştırmalarda çok çeşitli şekillerde sembolize edilen bu model, bu gösterimlerden en uygun olanları seçilerek ve bazı özgün kavramların da eklenmesiyle yeniden inşa edilecektir. Bu model üzerinde, öğretim teknolojileri alanında yapılan araştırmalarda elde edilen ham verilerin analizlerinde kullanılabilecek çeşitli kavram, metrik ve ölçüler değerlendirilecek ve bu araçların ileride yapılacak çalışmalara ne ölçüde ışık tutabileceği tartışılacaktır.

İlgili alanyazıda konuyla ilgili çok az Türkçe kaynak bulunduğundan, özellikle yurtdışında yapılan mümkün olduğunca çalışmaya ulaşarak, bunlardan elde edilecek net bilgiler derlenecektir.

1.3. Araştırmanın Önemi

Öğretim teknolojileri alanında gerçekleştirilen deneysel araştırmalar, özellikle de lisansüstü tez çalışmaları incelendiğinde, bunların önemli bir kısmının web temelli öğrenme sistemlerine dayandığı görülmektedir. Bu çalışmaların çoğunluğunda, öğrenme sistemlerin niteliklerini belirleyecek yapısal analizlerinin göz ardı edildiği gözlemlenmiştir. Sistemin yapısı ile öğrenen bireylerin “öğrenme stratejileri” ya da “bireysel farklılıkları” gibi değişkenlerin birbirleri ile ilişkilerinin incelenmesi gibi yeni sayılabilecek araştırmaların popüleritelerinin, yurtdışı ve yurtiçi kaynaklarda giderek arttığı görülmektedir. Bunun bir sonucu olarak, yurt dışında öğrenme ortamı olarak geliştirilen uyarlanabilir hiperortamların sayısı günden güne artmaktadır. Buna karşın, ülkemizde henüz bu konularda yeterince çalışma yapılmadığından, Türkçe kaynak bulmak neredeyse imkânsızdır.

Öğrenme sistemlerinin analizleri kadar önemli olan bir diğer konu da, gezinmenin modellenmesidir. Temel olarak, hiperortam ve gezinmenin

modellenmesi birbirlerinden çok farklı değildir. Ancak hiperortamın analizinde kullanılan ölçü ve metriklerin, gezinme üzerinde kullanıldıkları zaman, anlamları ve yorumları farklı olabilir. Bazı kaynaklarda, bu ölçü ve metriklerin ele alınan konulara özgü olarak sınıflandırmaları yapılmıştır, ancak genel anlamda geniş bir sınıflamaya rastlanmamıştır. Ayrıca graf teorisinde yer alan ve özellikle bilgisayar ağlarının analizinde yoğun olarak kullanılan “ağırlıklı yönlü graf” kavramının, hiperortam ve gezinme modellerinde kullanılmaları ile ilgili çok fazla araştırma yapılmadığı gözlenmiştir. Bu yönleri ile bu araştırma, alana özgün ve farklı bir yaklaşım getirmesi açısından önemlidir.

1.4. Tanımlar

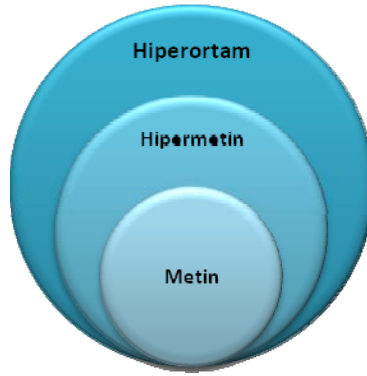
Bu bölümde, tezin genelinde kullanılan çeşitli kavramların tanımları verilmiştir. Graf teorisi ve hiperortamların modellenmesi gibi konular, ayrı birer bölüm olarak ele alındıklarından, bu konularla ilgili özel tanımlara ilgili bölümlerde yer verilmiştir.

E-öğrenme (E-learning): Web-temelli öğrenme, bilgisayar-temelli öğrenme, sanal sınıflar ve dijital işbirliği gibi çok sayıda uygulama ve süreçlere karşılık gelen, internet, intranet-extranet (LAN/WAN), ses ve videokaset, uydu yayını, etkileşimli TV ve CD-ROM yoluyla içeriğin sunulmasını sağlayan öğrenme türüdür.

Web-Temelli Öğretim (Web-Based Instruction): İnternet, özel bir intranet (iç ağ) ya da extranet (dış ağ) yoluyla eğitimsel bir içeriğin öğrenciye sunulmasıdır. Web-temelli öğretim, referanslar, e-posta, mesaj panoları ve tartışma grupları gibi diğer öğrenme kaynaklarına sıklıkla bağlantılar sağlar.

Hipermetin (Hypertext): Başka metinlere bağlantılar içeren, dolayısıyla da doğrusal olmayan bir yapıda okuma olanağı sunan metin türüne verilen isimdir. Bu terim ilk defa 1965 yılında Ted Nelson tarafından kullanılmıştır.

Hiperortam (Hypermedia): Metnin yanı sıra, resim, video, ses gibi çoklu ortam bileşenlerinin de metin içerisinde kullanılabildiği ve bunlara bağlantıların tanımlanabildiği gelişmiş bir hipermetin türüdür (Bkz. Şekil 2).



Şekil 2: Hiperortam, hipermetin ve metin kavramları arasındaki ilişki

Matematiksel Modelleme : En basit anlatımıyla matematiksel modelleme, herhangi bir bilimsel disiplinde yer alan kavram ya da kavramların, matematiksel normlara uygun olarak yeniden tanımlanmaları şeklinde tanımlanabilir. Bu gerçekleştirildiğinde, mevcut olanların üzerine aynı kesinlikte ve doğrulukta yeni kavramların eklenmesi mümkün hale gelir. Ayrıca konuyla ilgili olarak geliştirilecek bilgisayar programlarına temel oluşturacak algoritmaların yazılması ve hepsinden önemlisi, bu algoritmaların doğru sonuçlar ürettikleri matematiksel olarak kanıtlanabilirler.

Matematiksel modelleme temel olarak iki farklı motivasyonla gerçekleştirilir. Bunlardan ilki, tez kapsamında da ele alındığı gibi, o konuda yer alan çeşitli kavramların matematiksel kesinlikte tanımlanmalarını sağlamak ve dolayısıyla bu kavramlar üzerinde detaylı analizlerini gerçekleştirilebileceği bir ortam hazırlamaktır.

İkinci amaç ise çoğunlukla birincisiyle bağlantılıdır ve bir sürecin geçmişten o ana kadar olan gelişiminin analiz edilmesi sonucunda, gelecekteki durumunun kesin ya da kabul edilebilir kesinlikte tahmin edilmesidir. Fen ve tıp alanlarında bu türden modellemeler sıklıkla yapıldığı gibi son yıllarda özellikle insan davranışlarının modellenmesi gibi konularla sosyal alanlarda da bu tür modelleme çalışmalarına rastlanmaktadır.

Ölçü (Measure): Henri Léon Lebesgue tarafından sonlu kümeler için yapılan pozitif ölçü tanımı aşağıda verilmiştir:

X sonlu bir küme olmak üzere, $\mu : X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ küme fonksiyonu;

- i. $\mu(X) \geq 0$,
- ii. $\mu(\emptyset) = 0$,
- iii. $X_1, X_2, \dots$ kümeleri X kümesinin ayrık alt kümeleri olmak üzere,

$$\mu\left(\bigcup_n X_n\right) = \sum_n \mu(X_n)$$

kümeler ayrık değil ise,

$$\mu\left(\bigcup_n X_n\right) \leq \sum_n \mu(X_n)$$

özelliklerini sağlıyor ise bir ölçü adını alır.

Metrik (Metric): Uzaklık fonksiyonu olarak da adlandırılan metrik, boş olmayan bir X kümesinin her x, y ikilisi için, aşağıdaki özellikleri sağlayan $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu olarak tanımlanır:

- i. $d(x, y) \geq 0$.
- ii. $d(x, x) = 0$.
- iii. Eğer $d(x, y) = 0$ ise $x = y$.
- iv. $d(x, y) = d(y, x)$.
- v. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Ölçü ve metrik, işlevsel açıdan birbirleri ile yakından ilişkilidirler. Ölçü, bir kavramın “büyüklüğünü” ölçmek için kullanılır. Metrik ise iki kavramın birbirlerinden “uzaklığını” belirler. Diğer bir deyişle ölçünün bir tek girdisi varken, metrik için iki girdi gerekmektedir. Örneğin, bir hiperortamda yer alan herhangi bir sayfanın merkeziliği, bir ölçü kullanılarak ölçülür. Oysa iki sayfanın birbirlerinden uzaklığını, ya da iki hiperortamın birbirlerine ne kadar benzer olduğunu belirlemek için kullanacağımız fonksiyon bir metrik olacaktır.

Dönüşüm (Mapping): A ve B herhangi iki küme olmak üzere, A kümesinin elemanlarını, B kümesindeki elemanlara karşılık getiren bağıntıya dönüşüm adı verilir. Dönüşümler genellikle $\varphi: A \rightarrow B$, $\varphi(a) = b$ şeklinde gösterilir. Eğer φ dönüşümü her $a_1, a_2 \in A$ için $a_1 = a_2 \Rightarrow \varphi(a_1) = \varphi(a_2)$ gerektirmesini sağlıyorsa *bire-bir dönüşüm* adını alır.

BÖLÜM 2

GRAF TEORİSİ

2.1. Graf Teorisinin Kısa Bir Tarihçesi

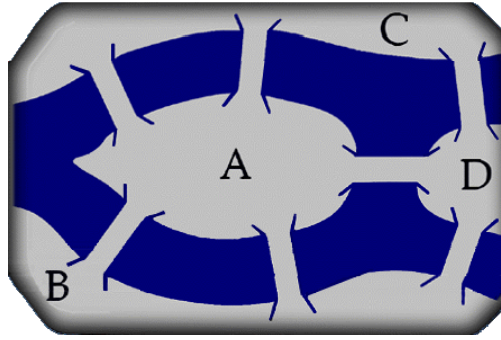
Rusya’ da, Kaliningrad şehrinin Königsberg kasabası, Pregel nehri tarafından dört bölgeye ayrılmıştır. Bu nehir üzerinde, bölgeleri birbirlerine bağlayan yedi adet köprü bulunmaktadır (Bkz. Şekil 3).



Şekil 3: Königsberg köprüsü

Bu görünümünden esinlenilerek ortaya konmuş olan ve “Königsberg Problemi” olarak bilinen ünlü bir tarihi problem, aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

“Bir gezgin, her köprüden sadece bir defa geçmek koşuluyla, bu yedi adet köprünün hepsinden geçerek dört bölgeyi de gezebilir mi ?” (Bkz. Şekil 4).



Şekil 4: Königsberg köprüleri ve ayırdıkları dört bölge: A, B, C ve D bölgeleri

İsviçreli matematikçi Leonhard Euler (1707-1783) tarafından bulunan çözüm, aynı zamanda graf teorisinin de başlangıcı özelliğini taşımaktadır. Euler'in bu problem için çözümü, yaptığı üç tanım ve kanıtladığı bir teoremden oluşmaktadır:

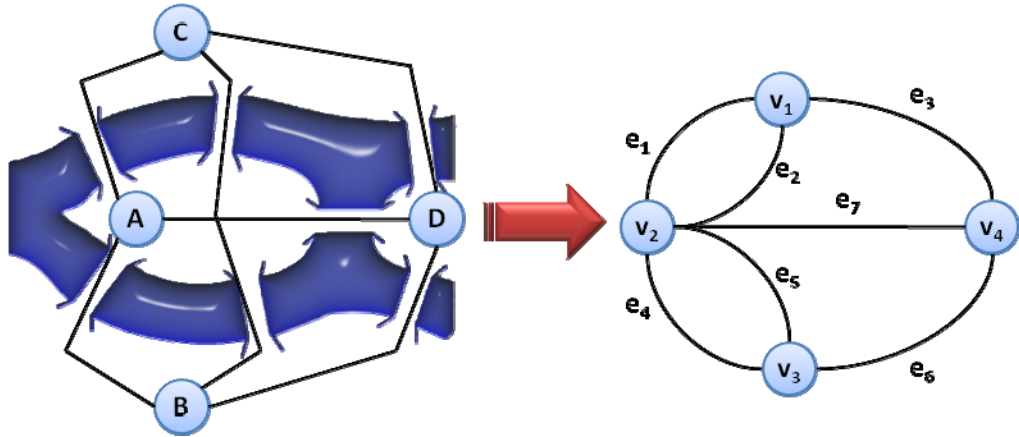
Tanım 1: Düğüm ve düğümler arasındaki bağlantıları gösteren yapıya “graf” adı verilir.

Tanım 2: Bir grafta, tek sayıda bağ içeren düğüme “tek düğüm”, çift sayıda bağ içeren düğüme ise “çift düğüm” adı verilir.

Tanım 3: Bir grafta, her bağdan sadece bir defa geçen sürekli yola “Euler yolu” adı verilir.

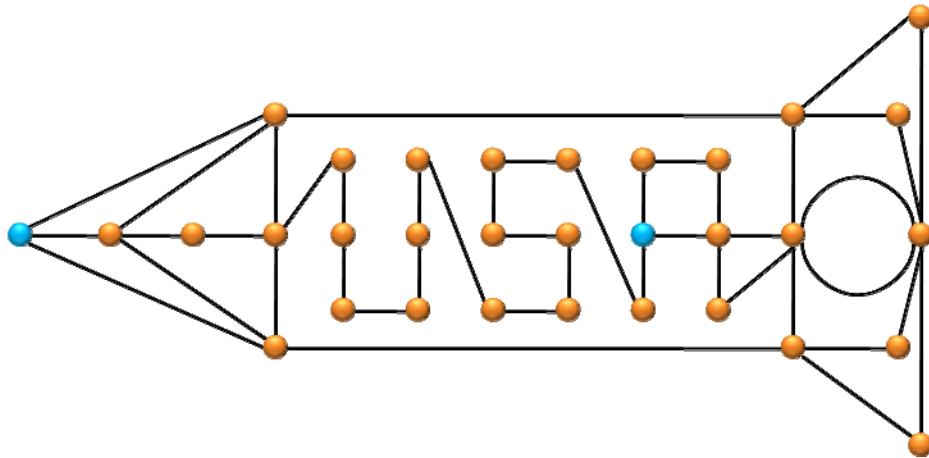
Teorem 1: Eğer bir graf, ikiden daha fazla sayıda tek düğüm içeriyorsa, bu grafta bir Euler yolunun tanımlanması mümkün değildir.

Sonuç olarak Euler, ziyaret edilecek dört bölgenin her birine birer düğüm yerleştirmiş, daha sonra bu düğümleri doğrularla birleştirerek daha sonra “graf” adını olacak yapıyı oluşturmuştur. Elde ettiği grafın bütün düğümleri tek düğüm olduğundan, kanıtlamış olduğu teorem gereğince bu grafta bir Euler yolu, yani problemin çözümü olacak bir yol tanımlanamayacaktır (Bkz. Şekil 5). Dolayısıyla hiçbir gezgin, her köprüden sadece bir defa geçmek koşuluyla, bu yedi adet köprü'nün hepsinden geçerek dört bölgeyi de gezemeyecektir.



Şekil 5: Königsberg grafi

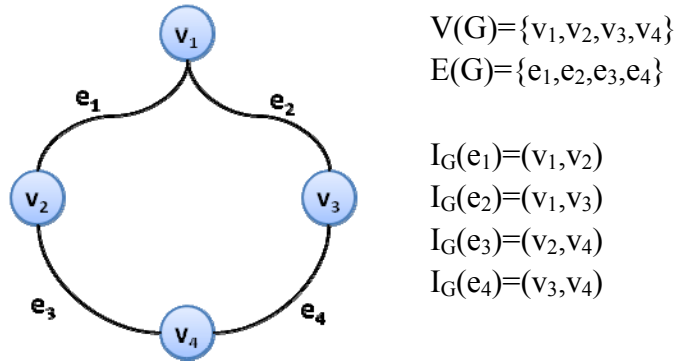
Şekil 6’de diyagramı verilen graf sadece iki tane tek düğüm içerdiğinden, bu graf üzerinde bir Euler yolu tanımlanabilir. Diğer bir deyişle bu graf üzerinde, her düğümden sadece bir defa geçecek bir yol çizilebilir.



Şekil 6: Üzerinde Euler yolunun tanımlanabileceği bir graf örneği

Bir G grafi, $V(G)=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ grafta yer alan *düğüm*lerin (node) *kümesi*, $E(G)=\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ düğümlerin aralarındaki ilişkileri gösteren *bağ*ların (edge) *kümesi* ve $I_G: E(G) \rightarrow V(G) \times V(G)$, her bir bağın uç düğümlerini veren *ilişki* (incidence) *dönüşümü* olmak üzere, $(V(G), E(G), I_G)$ üçlüsünden oluşur. $I_G(e)=(v_i, v_j)$ eşitliği, e bağının uç düğümlerinin v_i ve v_j olduğu anlamına gelecektir.

Her graf, düzlemde düğümleri daire benzeri sembollerle belirlemek ve düğümler arasındaki bağları eğrilerle çizmek suretiyle bir diyagram şeklinde gösterilebilir. Şekil 7’de, örnek bir graf ve grafi oluşturan düğüm ve bağ kümeleri ile ilişki dönüşümü verilmiştir.

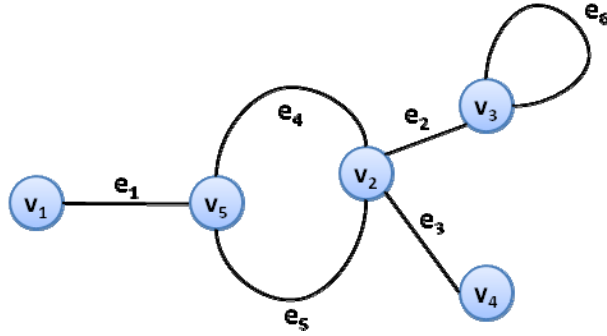


Şekil 7: $G=(V(G),E(G),I_G)$ grafi

2.2. Graflarda Temel Kavramlar

Hiçbir bağlantısı olmayan düğüme *bağımsız düğüm* adı verilir. Bütün düğümleri bağımsız olan grafa ise *bağılantısız graf* denir.

Bir $G=(V(G),E(G),I_G)$ grafının *mertebesi*, $V(G)$ kümesinin eleman sayısı, yani grafın içerdiği düğüm sayısıdır ve $|G|$ ile gösterilir. G grafının *büyüklüğü* ise $E(G)$ kümesinin eleman sayısı, yani grafın içerdiği bağ sayısıdır ve $\|G\|$ ile gösterilir. Bağılantısız bir grafta $\|G\|=0$ olacaktır. Ancak hiçbir graf için $V(G)=\emptyset$ olamayacağından, $|G|$ değeri her zaman sıfırdan farklı olacaktır. Örneğin, Şekil 9’da verilen graf için $|G|=5$ ve $\|G\|=6$ olacaktır.



Şekil 8: Örnek bir graf

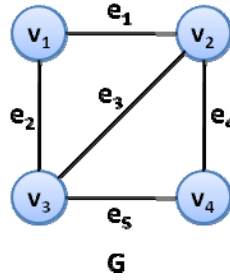
Bir grafta uçları aynı olan düğüm olan bağlara *döngü* adı verilir. Şekil 8’de verilen grafta e_6 bağı bir döngüdür. Aynı uç düğümlere sahip olan iki ya da daha çok bağdan oluşan kümeye *çoklu* veya *paralel bağlar* adı verilir. Şekil 8’de verilen grafta e_4 ve e_5 bağları paraleldirler.

Eğer bir $G=(V(G),E(G),I_G)$ grafında $v_i, v_j \in V(G)$ düğümleri için $I_G(e)=(v_i, v_j)$ olacak şekilde bir e bağı varsa bu düğümlere *komşu düğümler* denir. Buna bağlı olarak, bir G grafının *komşuluk matrisi* $A_G=[a_{ij}]$, aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Eğer } v_i \text{ ve } v_j \text{ düğümleri komşu ise;} \\ 0 & \text{Aksi halde.} \end{cases}$$

Benzer şekilde, eğer bir v_i düğümü, bir e_j bağı için uç düğüm ise v_i düğümü ve e_j bağı *ilişkilidir* denir. Buna göre, bir G grafının *ilişki matrisi* $B_G=[b_{ij}]$, aşağıdaki gibi tanımlanacaktır:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Eğer } v_i \text{ düğümü ve } e_j \text{ bağı ilişkili ise;} \\ 0 & \text{aksi halde.} \end{cases}$$



Şekil 9: G grafi

Örnek olarak, Şekil 9’da verilen G grafinin komşuluk ve ilişki matrisleri aşağıdaki gibi olacaktır:

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3. Graf Türleri

Grafların birçok sınıflandırması yapılmıştır. Bu kesimde ele alınan sınıflandırma, en temel graf sınıflandırmasıdır.

2.3.1. Basit (Simple) Graflar

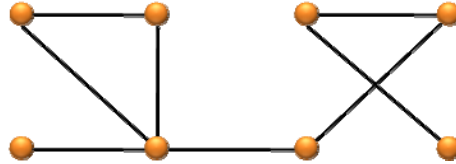
Hiçbir döngü ya da paralel bağ içermeyen graflardır. Dolayısıyla basit bir grafta, I_G dönüşümü bire-bir olacaktır. $|G|=n$ olan basit bir grafta en fazla,

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

sayıda bağ bulunabilir. Diğer bir deyişle, G basit bir graf ise,

$$0 < |G| \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

olur. Şekil 10’da diyagramı verilen graf, basit bir graftır.



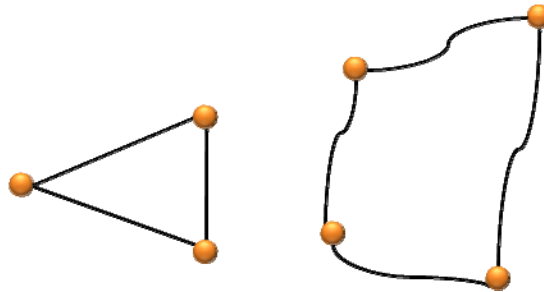
Şekil 10: Basit graf

2.3.2. Devirli (Cyclic) Graflar

Mertebesi (düğüm sayısı) 3 ya da daha büyük olan bir $G=(V(G),E(G),I_G)$ grafi aşağıdaki koşulları sağlıyor ise bir devirli graf adını alır:

$$I_G(e_1)=(v_1,v_2), I_G(e_2)=(v_2,v_3), \dots, I_G(e_{n-1})=(v_{n-1},v_n), I_G(e_n)=(v_n,v_1)$$

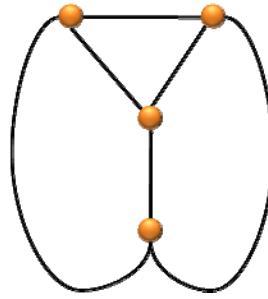
Devirli olmayan graflara devirsiz (acyclic) graf denir. n Sayıda düğümden oluşan bir devirli graf genellikle C_n simgesi ile gösterilir. Örnek olarak C_3 ve C_4 grafları Şekil 11’de verilmiştir.



Şekil 11: C_3 ve C_4 grafları

2.3.3. Tam (Complete) Graflar

Basit bir G grafinın bütün düğümleri birbirleri ile bağlı ise G 'ye bir tam graf adı verilir. Aşağıda diyagramı verilen graf, bir tam graftır. Şekil 8 ve Şekil 10'da verilen graflar ise tam değildir. Devirli graflarda ise, C_3 tam bir graftır, ancak $n > 3$ için hiçbir C_n grafi tam değildir.



Şekil 12: Tam graf

Mertebesi n olan tam graflar, K_n simgesi ile gösterilirler. Bu durumda Şekil 12'de verilen graf K_4 grafi olacaktır. K_3 grafi ise her zaman üç düğümden oluşan bir devirli graf olur. Yani $K_3 \equiv C_3$ yazabiliriz. K_n grafi, herhangi bir basit grafin içereceği en fazla bağ sayısı olan $\frac{n(n-1)}{2}$ sayıda bağ içerecektir.

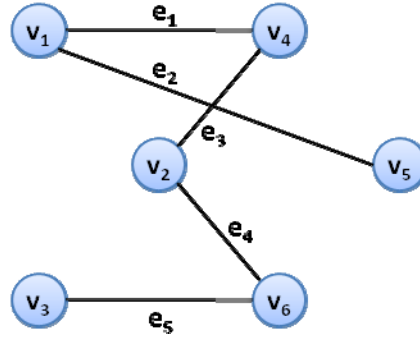
2.3.4. r-Parçalı (r-partite) Graflar

Bir $G=(V(G),E(G),I_G)$ grafinde $V(G)$ kümesi, her $e \in E(G)$ bağı için, $I_G(e)=(v_1,v_2)$ olmak üzere, v_1 ve v_2 farklı kümelerden alınacak biçimde ayrık r -tane $V_1(G), V_2(G), \dots, V_r(G)$ kümelerine bölünebiliyorsa G 'ye bir r -parçalı graf denir. Burada $V_1(G), V_2(G), \dots, V_r(G)$ kümeleri $V(G)$ kümesinin sınıfları adını alır. Bu durumda $V(G)$ kümesi, sınıflarının birleşiminden oluşacaktır.

$$V(G) = \bigcup_{j=1}^r V_j(G)$$

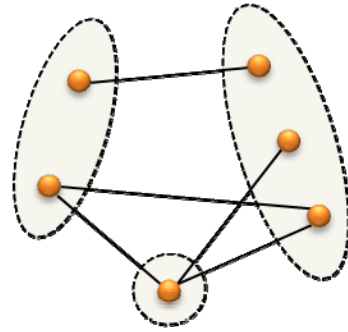
Eğer $V(G)$ kümesinin her bir sınıfından seçilen düğümlerin oluşturdukları bütün ikililer bağlı ise G 'ye bir *tam r-parçalı* graf adı verilir. Böyle bir graf, $V_1(G)$, $V_2(G)$, ..., $V_r(G)$ kümelerinin eleman sayıları sırasıyla $s_1, s_2, \dots, s_r$ olmak üzere, $K_{s_1, s_2, \dots, s_r}$ simgesi ile gösterilir. Eğer $V(G)$ 'nin sınıflarının eleman sayılarının hepsi s gibi bir sayıya eşitse, bu durumda tam r-parçalı graf K_r^s simgesi ile gösterilir. Aşağıdaki örnekte çeşitli türlerde r-parçalı graflar verilmiştir.

Örnek 1: $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ ve $I_G(e_1) = (v_1, v_4)$, $I_G(e_2) = (v_1, v_5)$, $I_G(e_3) = (v_2, v_4)$, $I_G(e_4) = (v_2, v_6)$, $I_G(e_5) = (v_3, v_6)$ olmak üzere $G = (V(G), E(G), I_G)$ grafi, $V(G)$ kümesinin $V_1(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$, $V_2(G) = \{v_4, v_5, v_6\}$ sınıflar ile bir 2-parçalı (bipartite) graftır (Bkz. Şekil 13).

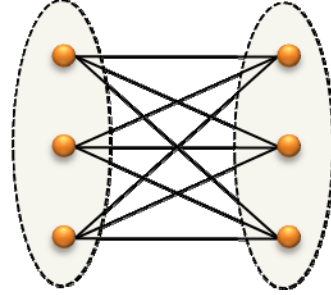
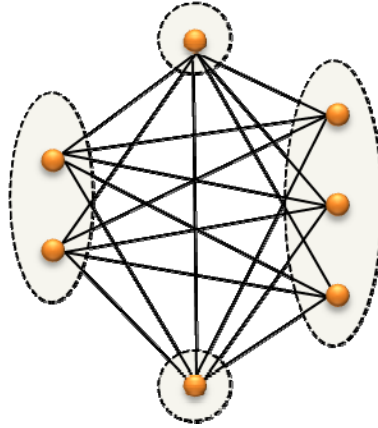
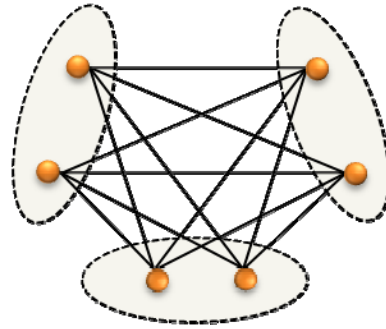


Şekil 13: Bir 2-parçalı graf

Örnek 2: Şekil 14'de çeşitli türlerde r-parçalı graflar verilmiştir.

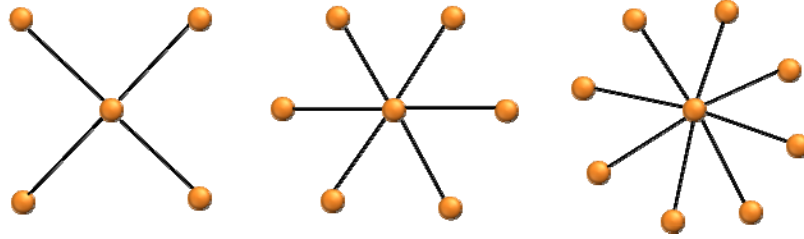


(a) 3-parçalı graf.

(b) K_3^2 (c) $K_{1,1,2,3}$ (d) K_2^3 **Şekil 14:** Çeşitli türlerde r-parçalı graflar

r-Parçalı grafların diyagramlarında da görüldüğü gibi, aslında amaç bütün grafi, birbirleri dışında kalan düğümlerle bağları olan r sayıda parçaya bölmektir. Bu parçalama işlemi, olası en az parça ile ve eğer mümkün ise parçalanma “tam” olacak şekilde yapılır. Örneğin Şekil 14’de yer alan (a) grafında, iki düğüme sahip olan parçanın düğümleri ayrı birer parça olarak düşünülebilir. Bu durumda graf 4-parçalı olacaktır. Bu anlamda, n sayıda düğüme sahip olan bütün graflar n-parçalı graf olarak düşünülebilirler. (b), (c) ve (d) grafları ise sırasıyla 1, 4 ve 3-parçalı tam graflardır. Çünkü bu graflarda, parçalarda yer alan düğümler, kendi parçalarında yer alan düğümlerin dışındaki bütün düğümlerle bağlıdırlar.

$q \geq 1$ olmak üzere, $K_{1,q}$ tipindeki graflara *yıldız graf* adı verilir. Örneğin $K_{1,4}$, $K_{1,6}$ ve $K_{1,8}$ grafları Şekil 15’de verilmiştir.



Şekil 15: $K_{1,4}$, $K_{1,6}$ ve $K_{1,8}$ yıldız grafları

2.4. Eşyapılı Graflar

$G=(V(G),E(G),I_G)$ ve $H=(V(H),E(H),I_H)$ graflarını göz önüne alalım. Eğer $V(G)=V(H)$, $E(G)=E(H)$ ve $I_G=I_H$ ise G ve H grafları denktir denir ve bu durum $G \equiv H$ şeklinde gösterilir. Birbirine denk olmayan iki graf arasında denklik kadar önemli olan diğer bir ilişki de iki grafın birbirine eşyapılı (izomorf) olmasıdır. İki grafın eşyapılı olabilmesi için gereken tek koşul, bu iki graf arasında en az bir eşyapı dönüşümü (izomorfizma) bulunmasıdır. Dolayısıyla öncelikle graflar arasındaki eşyapı dönüşümünün tanımlanması gereklidir.

G ve H grafları arasında tanımlanacak bir eşyapı dönüşümü, iki farklı dönüşümden oluşur. Bunlardan ilki, iki grafın düğüm kümeleri arasında, ikincisi ise bağ kümeleri arasında tanımlıdır. Önce birinci dönüşümü tanımlayalım.

G ve H graflarının düğüm kümeleri arasında bir

$$\Phi: V(G) \rightarrow V(H)$$

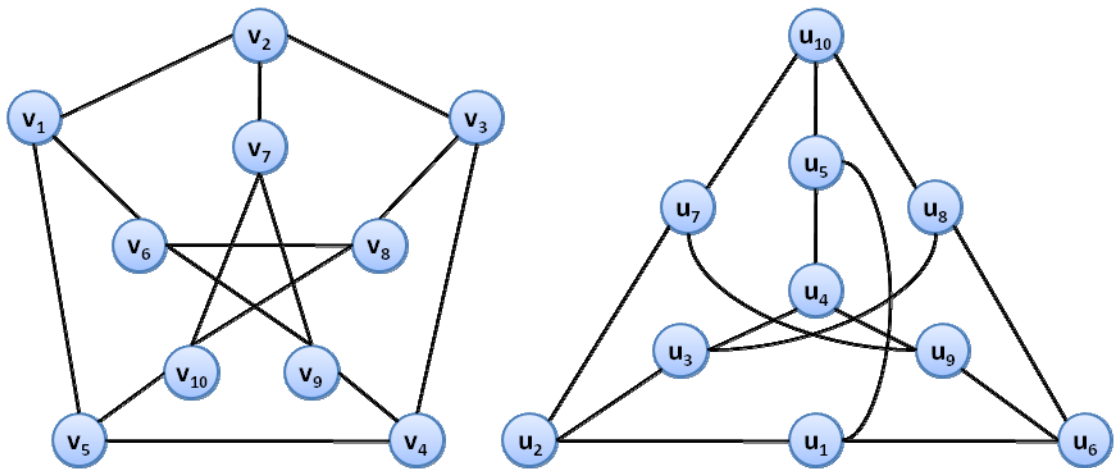
dönüşümünü, “ $u, v \in V(G)$ düğümleri G grafında komşu düğümlerdir. $\Leftrightarrow \Phi(u), \Phi(v) \in V(H)$ düğümleri H grafında komşu düğümlerdir.” şeklinde tanımlayalım.

İkinci olarak G ve H graflarının bağ kümeleri arasında bir

$$\theta: E(G) \rightarrow E(H)$$

dönüşümünü, “ $I_G(e) = (u, v) \Leftrightarrow I_H(\theta(e)) = (\Phi(u), \Phi(v))$ ” şeklinde tanımlayalım. Bu biçimde tanımlanan (Φ, θ) ikilisine G ve H grafları arasında bir eşyapı dönüşümü adı verilir. Bu durumda G ve H grafları eşyapılıdır ve bu durum $G \cong H$ olarak gösterilir.

Eşyapılı olan iki grafın diyagramları farklı gibi gözükse de, aralarında kurulan eşyapı dönüşümü bağ yapılarının aynı kaldığını gösterir. Dolayısıyla eşyapılı graflar arasında hemen hemen bütün özellikler, aynı cebirsel yapılarda olduğu gibi birbirlerine aktarılabilir. Bundan dolayı eşyapılı graflar, teorik olarak aynı graflar olarak değerlendirilebilirler. Şekil 16’da verilen iki graf eşyapılıdır. Bu graflardan soldaki, Petersen grafi olarak bilinir. Dolayısıyla sağdaki graf, Petersen grafının sağladığı bütün özellikleri sağlayacaktır.

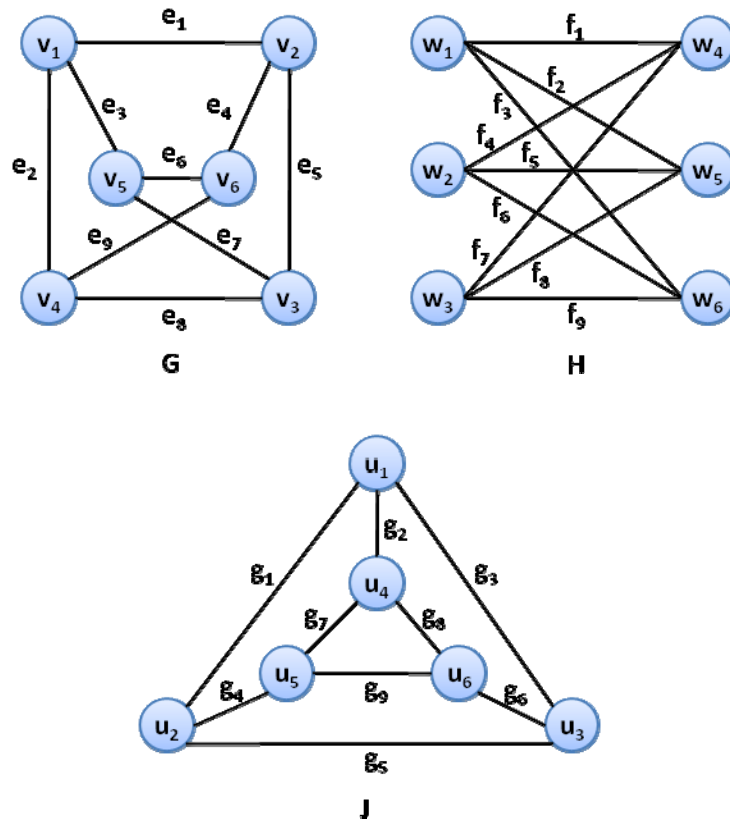


Şekil 16: Eşyapılı iki graf

Bir G grafindan kendisi üzerine tanımlanan eşyapı dönüşümüne, G grafinin *otomorfizması* adı verilir.

Teorem 2: G ve H grafları eşyapılı ise $|G|=|H|$ ve $\|G\|=\|H\|$ olur. Dolayısıyla buna denk olarak, “iki grafin düğüm sayıları ve bağ sayıları birbirine eşit değilse, bu graflar eşyapılı olamazlar” sonucu çıkarılabilir.

Örnek 3: Şekil 17’de diyagramları verilen G , H ve J graflarını göz önüne alalım.



Şekil 17: G , H ve J grafları

Öncelikle bu grafların mertebe ve büyüklüklerini karşılaştıralım. $|G|=|H|=|J|=6$ ve $\|G\|=\|H\|=\|J\|=9$ olduğundan, Teorem 2'ye dayanarak eşyapılı olup olmadıkları konusunda herhangi bir yorum yapılamaz.

Öncelikle G ve H grafları arasında bir eşyapı dönüşümü tanımlayalım. Bunun için ilk olarak $V(G)$ ve $V(H)$ kümeleri arasındaki Φ dönüşümünü tanımlayalım.

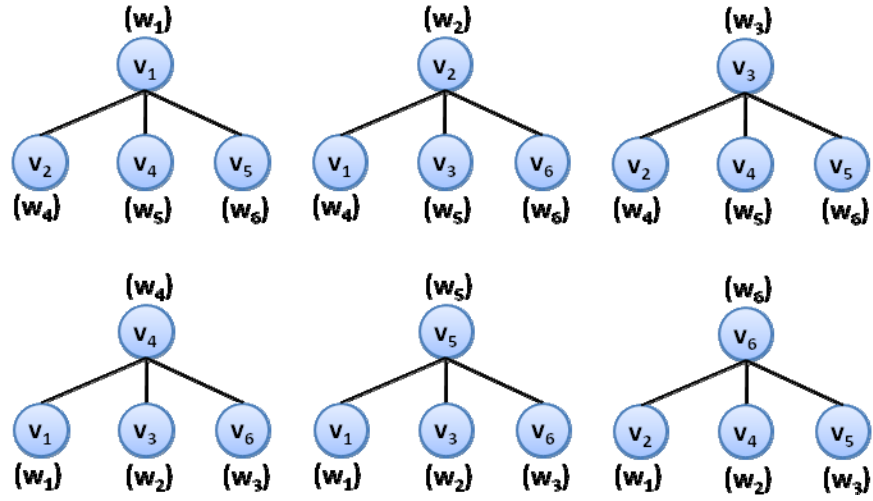
v	v ₁	v ₂	v ₃	v ₄	v ₅	v ₆
w= $\Phi(v)$	w ₁	w ₄	w ₃	w ₆	w ₅	w ₂

İkinci olarak, $E(G)$ ve $E(H)$ kümeleri arasındaki θ dönüşümünü tanımlayalım.

e	e ₁	e ₂	e ₃	e ₄	e ₅	e ₆	e ₇	e ₈	e ₉
f= $\theta(e)$	f ₁	f ₃	f ₂	f ₄	f ₇	f ₅	f ₈	f ₉	f ₆

Tanımlanan (Φ, θ) ikilisi, koşulları sağladıklarından G ve H grafları arasında bir eşyapı dönüşümüdür. Dolayısıyla $G \cong H$ olur. Ancak J grafi ile G ya da H grafları arasında herhangi bir eşyapı dönüşümü tanımlanamaz. Aynı mertebeden ve aynı büyüklükte iki graf arasında bir eşyapı dönüşümü bulunup bulunmadığı problemi, graf teorisinde “eşyapı dönüşümü problemi” adını alır ve bu problemin çözümü büyük graflarda kolay değildir. Bunun sebebi, iki graf arasında bir eşyapı dönüşümünün varlığını araştıran ve eğer varsa bu eşyapı dönüşümünü tanımlayan genel bir algoritmanın bulunmamasıdır.

Şimdi G ve H grafları arasında bir başka eşyapı dönüşümünü, daha sistematik bir yolla tanımlamak için öncelikle G ve H graflarında yer alan her bir düğüm için bağları ayrı ayrı çizilip, iki graf için üst üste bindirilir (Bkz. Şekil 18).



Şekil 18: G ve H grafları arasında bir eşyapı dönüşümü arayışı

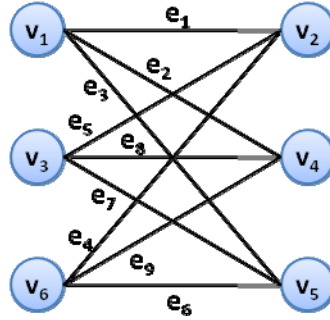
Bu diyagramlardan, $V(G)$ ve $V(H)$ kümeleri arasındaki olası dönüşümleri aşağıdaki gibi listelenebilir.

v	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
$\Phi(v)$	w_1	w_4	w_5	w_5	w_6	w_6
	w_4	w_2	w_3	w_4	w_5	w_3
		w_1	w_2	w_2	w_3	

Bu dönüşümlerden, aşağıda tanımlanan θ dönüşümü $E(G)$ kümesindeki her bir bağı $E(H)$ kümesindeki bir bağa bire-bir karşılık getirecek şekilde seçilenler koyu renkle gösterilmiştir.

e	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9
$\theta(e)$	f_1	f_2	f_3	f_7	f_4	f_9	f_6	f_5	f_8

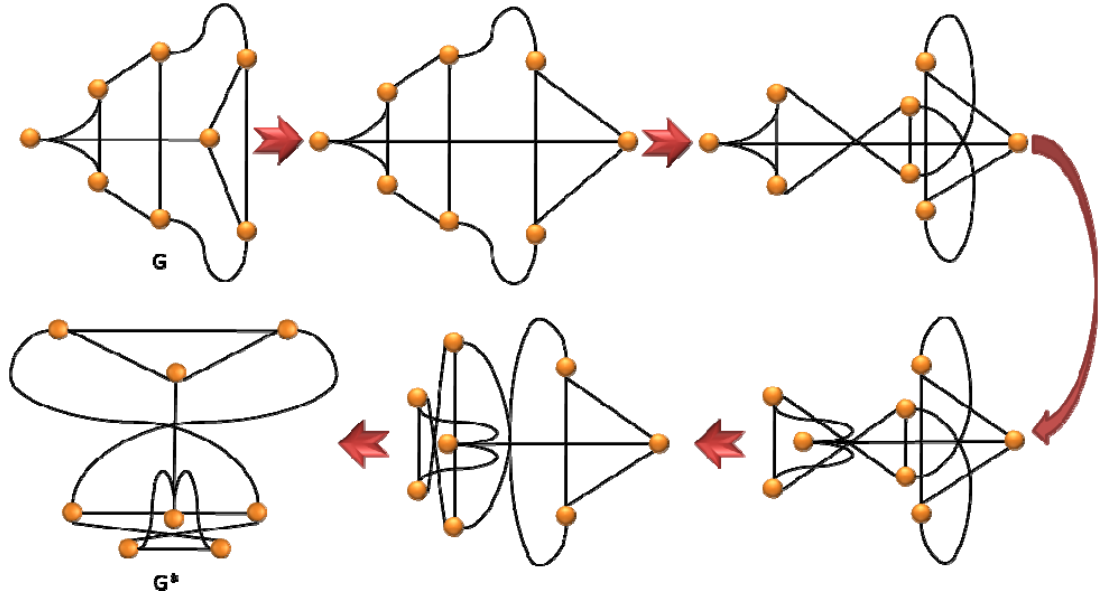
Bu durumda (Φ, θ) ikilisi, G ve H grafları arasında diğer bir eşyapı dönüşümü olur. Ancak bu iki grafin eşyapılı olmaları için aralarında bir tek eşyapı dönüşümünün tanımlanması yeterlidir. Eşyapılı graflarda, bir çok özeliğin graflar arasında aktarılabilir olduğunu bilinmektedir. Örnekte, H grafinin diyagramı incelendiğinde, bu grafin $V_1(H)=\{w_1, w_2, w_3\}$ ve $V_2(H)=\{w_4, w_5, w_6\}$ sınıfları ile bir 2-parçalı graf olduğu açıkça görülmektedir. Eşyapılı olan G grafinin da, diyagramı yeniden düzenlendiği takdirde $V_1(G)=\{v_1, v_3, v_6\}$ ve $V_2(G)=\{v_2, v_5, v_4\}$ sınıfları ile bir 2-parçalı graf olduğu görülebilir (Bkz. Şekil 19).



Şekil 19: G grafinin yeniden düzenlenmesi

Örnek 4: Graflar arasındaki “eşyapılı olma” özelliğinin daha iyi anlaşılabilmesi için, bir örneğin tersten ele alınması yeterli olacaktır. Başlangıç olarak ele alınan G grafinde, düğümlerin bağları koparılmadan çeşitli şekilsel deformasyonlar gerçekleştirilir ve G^* grafi elde edilir (Bkz. Şekil 20).

Elde edilen G^* grafinin diyagramı, G grafinin diyagramından farklı gözüktse de, bu deformasyonlar sonucunda bağ yapısı korunmuştur. Dolayısıyla bu graflar eşyapılıdır. Gerçekte, bu deformasyonun her aşamasında elde edilen graflar birbirlerine eşyapılıdır.



Şekil 20: G grafindan şekilsel deformasyonla G^* grafinin elde edilmesi

2.5. Graflar Arasındaki İkili İşlemler

Bu kesimde, graflar arasındaki bazı ikili işlemler ve altgraf kavramı tanıtılacaktır. Bunun için $G=(V(G),E(G),I_G)$ ve $H=(V(H),E(H),I_H)$ graflarını göz önüne alınarak öncelikle ikili işlemlerde kullanılacak temel kavramlar tanımlanacaktır:

$V(G)=\emptyset$ ise G grafına *boş graf* denir ve bu graf “ 0_G ” ile gösterilir. Tek bir düğümden oluşan graf ise *birim graf* adını alır ve “ 1_G ” ya da K_1 ile gösterilir. $V(G)\cap V(H)=\emptyset$ ise G ve H graflarına *ayrık graflar* denir.

2.5.1. İki Grafın Arakesiti ve Birleşimi

● $I_{G\cap H}\equiv I_G$ veya $I_{G\cap H}\equiv I_H$ olmak üzere, G ve H graflarının *arakesiti*,

$$G\cap H=(V(G)\cap V(H), E(G)\cap E(H), I_{G\cap H})$$

biçiminde tanımlanır (Bkz. Şekil 21).

- Her $e \in E(G) \cup E(H)$ için,

$$I_{G \cup H}(e) = \begin{cases} I_G(e) & e \in E(G) \\ I_H(e) & e \in E(H) \end{cases}$$

olmak üzere, G ve H graflarının *birleşimi*,

$$G \cup H = (V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H), I_{G \cup H})$$

olarak tanımlanır. Birleşim grafinin mertebe ve büyüklüğü ise,

$$|G \cup H| = |G| + |H| - |G \cap H|$$

$$\|G \cup H\| = \|G\| + \|H\| - \|G \cap H\|$$

eşitlikleri kullanılarak hesaplanabilir (Bkz. Şekil 21).

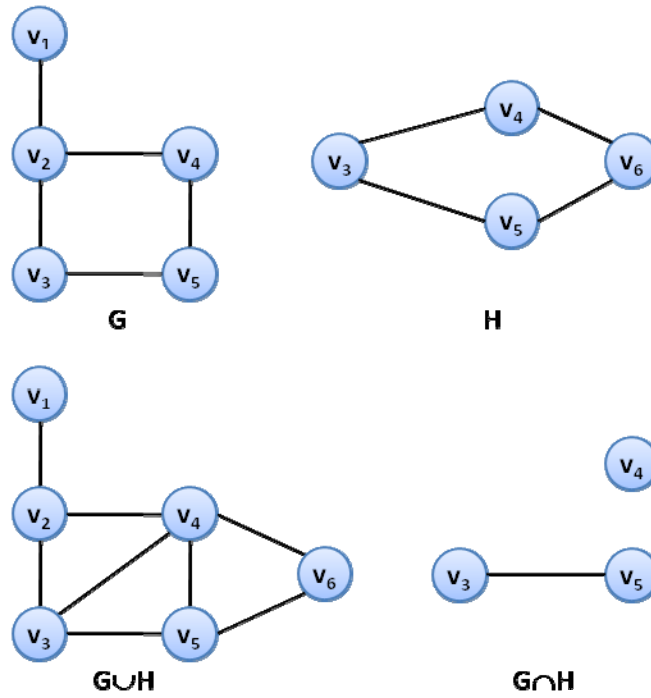
2.5.2. İki Grafın Toplamı

- Eğer G ve H ayrık graflar ise $G \cup H$ birleşimi $G+H$ biçiminde gösterilir ve grafların *toplamı* adını alır. Bu durumda,

$$|G+H| = |G| + |H|$$

$$\|G+H\| = \|G\| + \|H\|$$

olur.



Şekil 21: Birleşim ve arakesit grafları

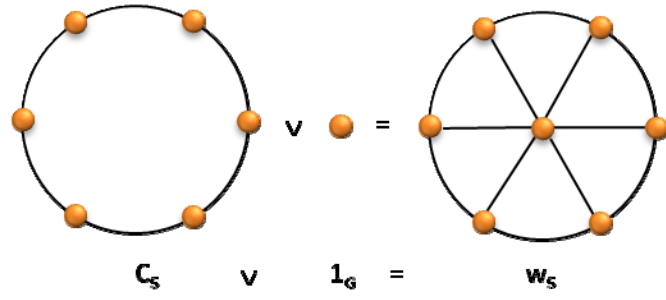
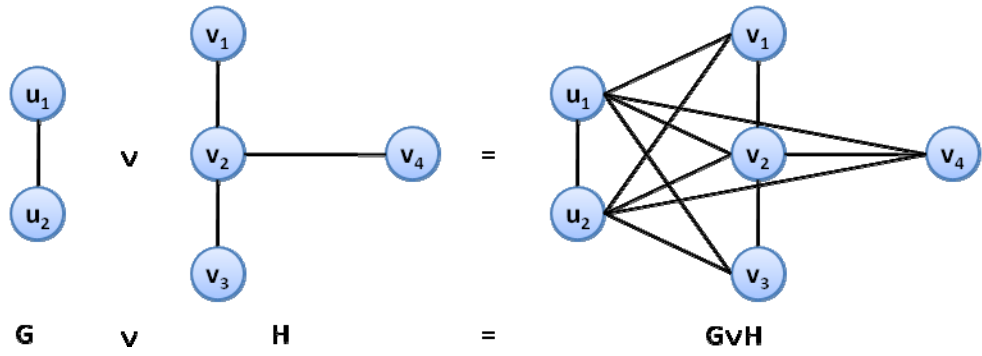
2.5.3. Grafların Birbirlerine Katılması

G ve H ayrık graflar olsun. $G \vee H$, G ve H graflarının karşılıklı olarak her bir düğümünün bağlı olduğu özel bir birleşiminden oluşur ve G 'nin H 'ye *katılması* (ya da H 'nin G 'ye katılması) olarak adlandırılır. Bu durumda,

$$|G \vee H| = |G| + |H|$$

$$||G \vee H|| = ||G|| + ||H|| + |G| \cdot |H|$$

olur. $W_n = I_G \vee C_n$ grafi özel olarak tekerlek adını alır (Bkz. Şekil 22-23).

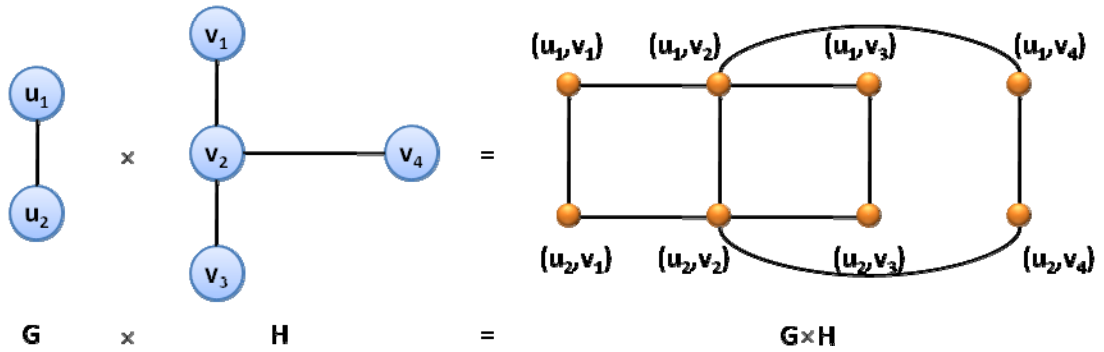
Şekil 22: W_5 grafi

Şekil 23: İki grafin birbirine katılması

2.5.4. İki Grafin Kartezyen Çarpımı

G ve H basit graflar olmak üzere, bu iki grafin *kartezyen çarpımı* olan $G \times H$ grafi, düğüm kümesi $V(G) \times V(H)$ olan bir graftır. Bu grafta bir (u_i, v_j) düğümü ile diğer bir (u_k, v_m) düğümünün bağlı olması için aşağıda verilen koşullardan birinin sağlanması yeterlidir:

- i. $u_i = u_k$ ve v_j ile v_m H 'de bağlıdır.
- ii. $v_j = v_m$ ve u_i ile u_k G 'de bağlıdır (Bkz. Şekil 24).

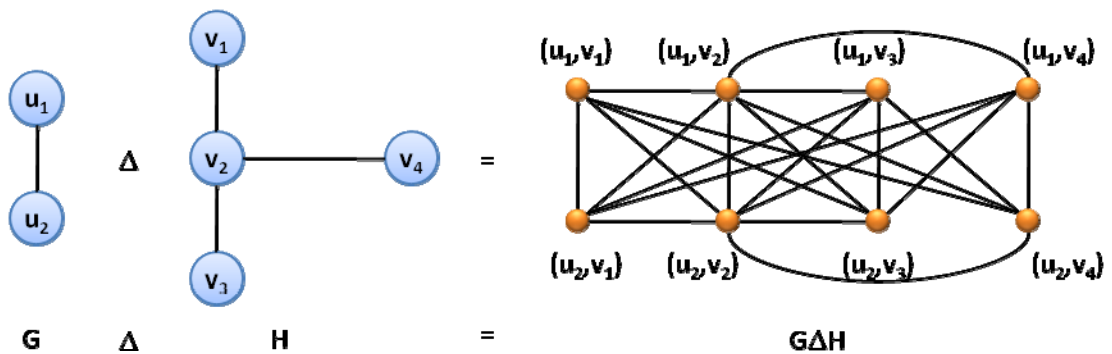


Şekil 24: İki grafin kartezyen çarpımı

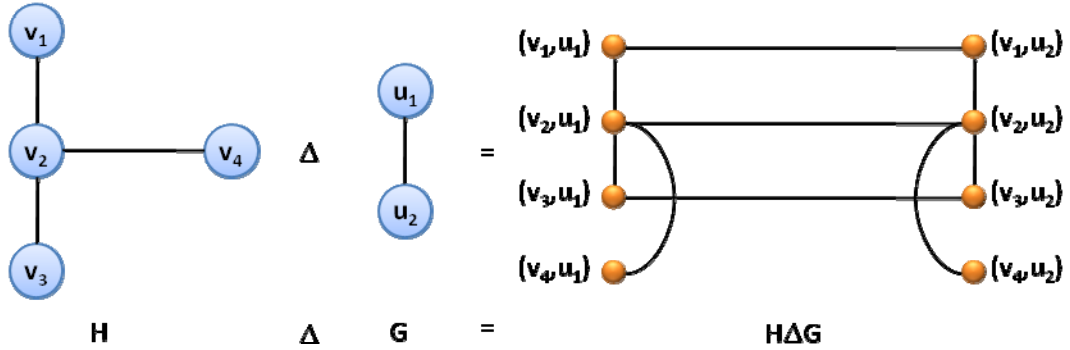
2.5.5. İki Grafin Sözlük Çarpımı

G ve H basit graflar olmak üzere, bu iki grafin *sözlük (lexicographic) çarpımı* olan $G \Delta H$ grafi, düğüm kümesi $V(G) \times V(H)$ olan bir graftır. Bu grafta bir (u_i, v_j) düğümü ile diğer bir (u_k, v_m) düğümünün bağlı olması için aşağıda verilen koşullardan birinin sağlanması yeterlidir:

- i. u_i ile u_k G 'de bağlıdır.
- ii. $u_i = u_k$ ve v_j ile v_m H 'de bağlıdır. (Bkz. Şekil 25-26).



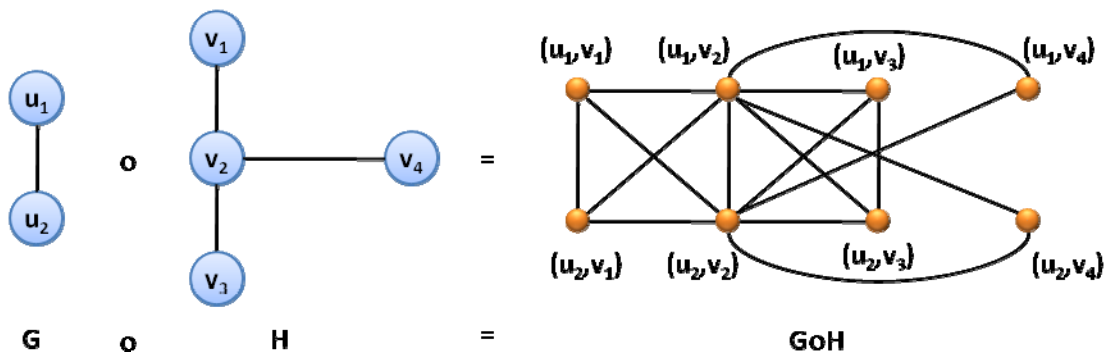
Şekil 25: İki grafin sözlük çarpımı

Şekil 26: $G \Delta H \neq H \Delta G$

2.5.6. İki Grafın Normal Çarpımı

G ve H basit graflar olmak üzere, bu iki grafın *normal çarpımı* olan $G \circ H$ grafı, düğüm kümesi $V(G) \times V(H)$ olan bir graftır. Bu grafta bir (u_i, v_j) düğümü ile diğer bir (u_k, v_m) düğümünün bağlı olması için aşağıda verilen koşullardan birinin sağlanması yeterlidir:

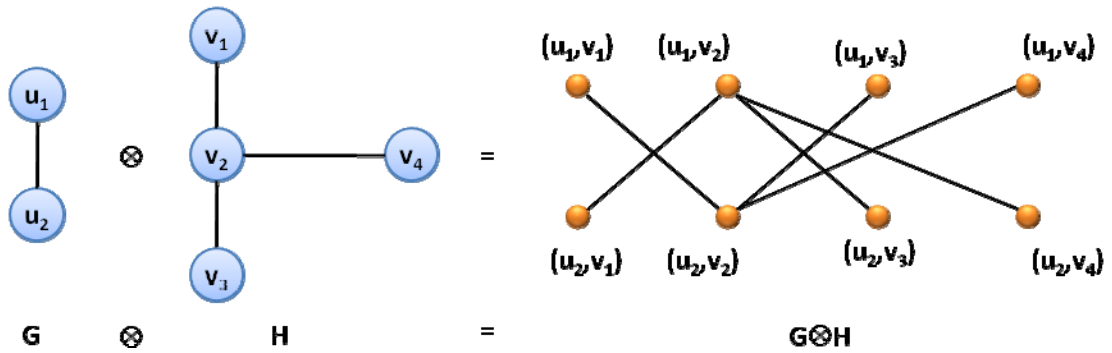
- i. $u_i = u_k$ ve v_j ile v_m H 'de bağlıdır.
- ii. $v_j = v_m$ ve u_i ile u_k G 'de bağlıdır.
- iii. u_i ile u_k G 'de; v_j ile v_m H 'de bağlıdır (Bkz. Şekil 27).



Şekil 27: İki grafın normal çarpımı

2.5.7. İki Grafın Tensör (Kronecker) Çarpımı

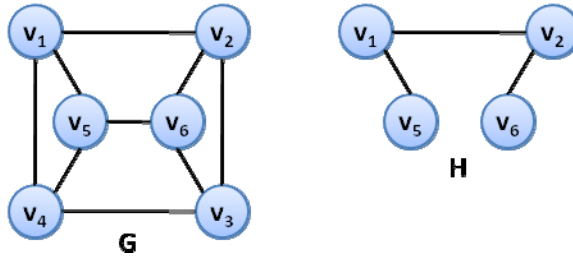
G ve H basit graflar olmak üzere, bu iki grafın *tensör (kronecker) çarpımı* olan $G \otimes H$ grafı, düğüm kümesi $V(G) \times V(H)$ olan bir graftır. Bu grafta bir (u_i, v_j) düğümü ile diğer bir (u_k, v_m) düğümünün bağlı olması için gerekli ve yeterli koşul, u_i ile u_k G 'de; v_j ile v_m H 'de bağlıdır (Bkz. Şekil 28).



Şekil 28: İki grafın tensör (kronecker) çarpımı

2.6. Altgraflar

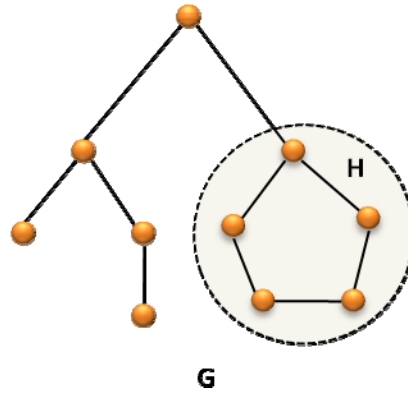
Eğer $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ ve $I_H = I_G|_{E(H)}$ (I_H, I_G 'nin $E(H)$ kümesi üzerine kısıtlanması) ise H grafına, G grafının *altgrafı* adı verilir ve bu durum $H \subseteq G$ şeklinde gösterilir (Bkz. Şekil 29).



Şekil 29: H, G grafinin altgrafıdır

2.6.1. Altgraflarla İlgili Bazı Özellikler

Tanım 4: $H \subseteq G$ ve H devirli graf ise H'ye G'de bir *devir (cycle)* adı verilir (Bkz. Şekil 30).

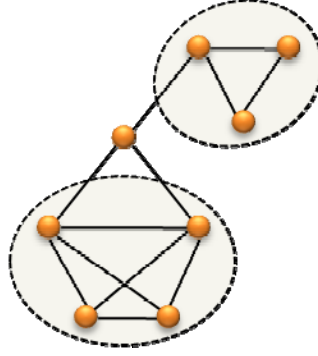


Şekil 30: H, G grafinde bir devirdir

Bir devir, uzunluğunun, yani içerdiği bağ sayısının tek ya da çift olmasına göre *tek devir* ya da *çift devir* adını alır.

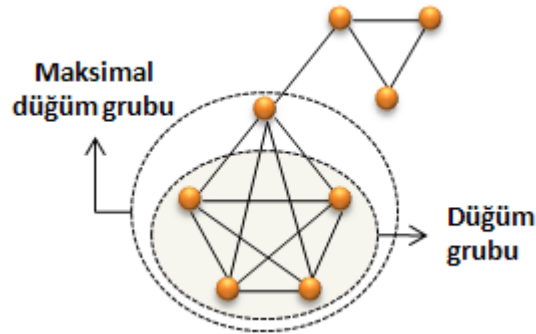
Teorem 3: Bir grafin iki-parçalı olması için gerekli ve yeterli koşul, hiç tek devir içermemesidir.

Tanım 5: $H \subseteq G$ ve H tam graf ise H 'ye G 'de bir *düğüm grubu* (*clique*) adı verilir (Bkz. Şekil 31).



Şekil 31: Döğüm grupları

Eğer G grafi içersindeki bir döğüm grubu, G 'deki başka bir döğüm grubu tarafından içermiyor ise *maksimal döğüm grubu* adını alır (Bkz. Şekil 32).



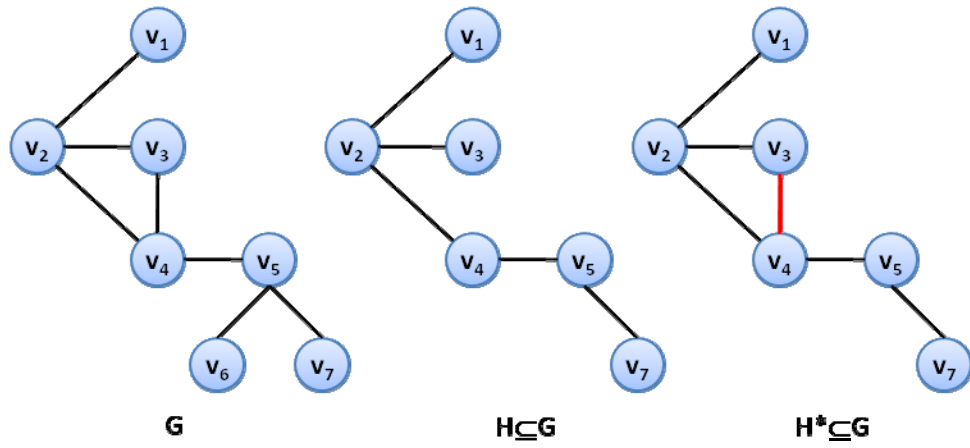
Şekil 32: Maksimal döğüm grubu

Tanım 6: $H \subseteq G$ ve $V(H)=V(G)$ ise H 'ye G 'yi *geren altgraf* adı verilir. G 'yi geren ve en az bir bağa sahip olan grafa G 'nin bir *çarpanı* denir.

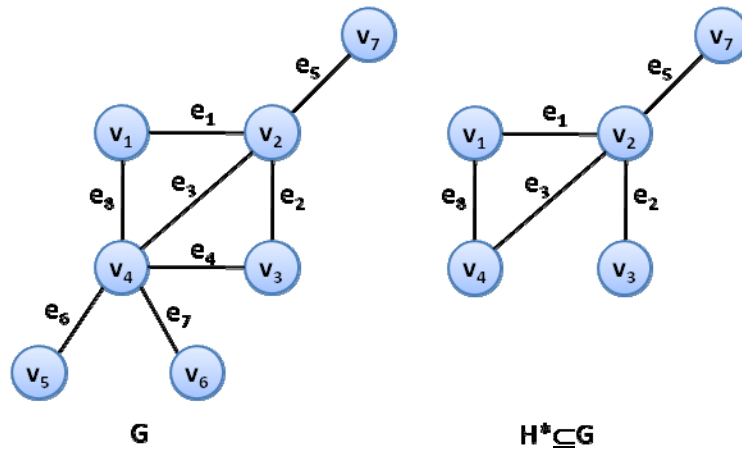
Tanım 7: $H \subseteq G$ olsun. Eğer $E(G)$ kümesindeki bağlardan, uçları $V(H)$ kümesinde yer alan döğümler olan her bir bağ, aynı zamanda $E(H)$ kümesi tarafından içeriiliyorsa,

H' 'ye G 'nin bir *düğüm-indirgenmiş altgrafı* denir. G 'nin $S \subseteq V(G)$ kümesi ile düğüm-indirgenmiş altgrafı, G 'nin S tarafından indirgenmiş altgrafı denir ve bu graf $G[S]$ ile gösterilir (Bkz. Şekil 33).

$T \subseteq E(G)$ ve $S, V(G)$ 'nin T kümesinde yer alan bağların uç düğümlerinden oluşan altkütmesi olsun. Bu durumda $(S, T, I_{G|T})$ grafına G 'nin T tarafından *bağ-indirgenmiş altgrafı* adı verilir (Bkz. Şekil 34).



Şekil 33: H , G 'nin bir altgrafı, H^* ise G 'nin $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_7\}$ kümesi tarafından düğüm-indirgenmiş altgrafıdır



Şekil 34: H^* , G 'nin $T = \{e_1, e_2, e_3, e_5, e_8\}$ kümesi tarafından bağ-indirgenmiş altgrafıdır

Tanım 8: $G=(V(G),E(G),I_G)$ grafını göz önüne alalım. $T \subseteq E(G)$ olmak üzere, G 'nin $G-T$ altgrafı,

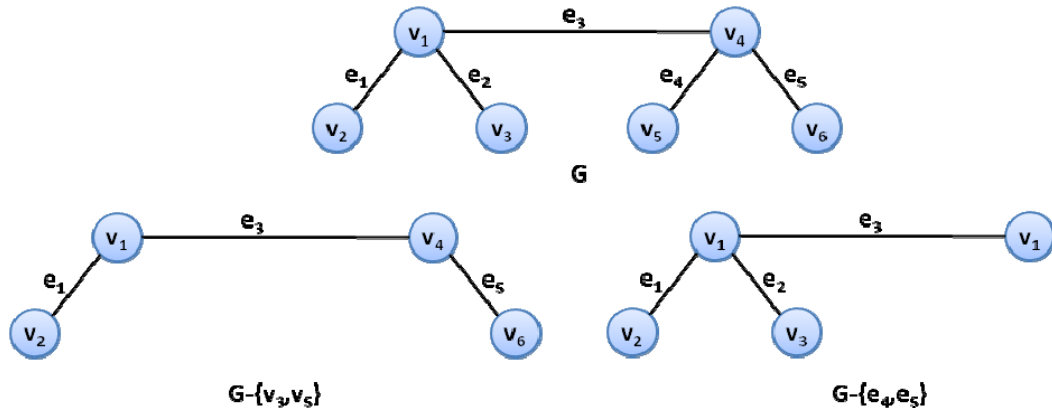
$$G-T=(V(G),E(G)-T, I_{G-T})$$

olarak tanımlanır.

$S \subseteq V(G)$ ve $T, E(G)$ 'den, uçları S kümesinde yer alan düğümler olan bağların silinmesi ile elde edilen bağ kümesi olmak üzere, G 'nin $G-S$ altgrafı,

$$G-S=(V(G)-S, T, I_{G-S})$$

olarak tanımlanır (Bkz. Şekil 35).



Şekil 35: G grafi ve özel altgrafları

2.7. Bir Grafın Tümleyeni

$G=(V(G),E(G),I_G)$ basit grafını göz önüne alalım. $V(G) \times V(G) = V^2(G)$ kartezyen çarpımı, $V(G)$ kümesindeki düğümlerin oluşturduğu bütün düğüm ikililerinin kümesi olacaktır. Örneğin $V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$ kümesi için,

$$V^2(G) = \{(v_1, v_1), (v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_1), (v_2, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_1), (v_3, v_2), (v_3, v_3)\}$$

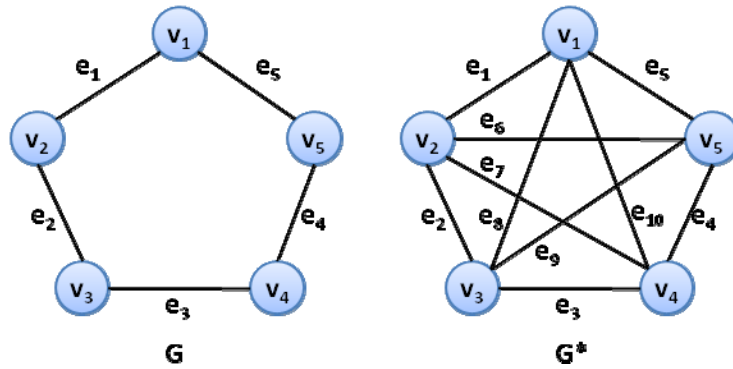
olacaktır. Şimdi, $V^2(G)$ kümesinden aynı düğümlerin oluşturduğu ikilileri silerek $[V^2(G)]$ kümesi elde edilir. Aynı örnek üzerinden devam edilirse:

$$[V^2(G)] = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_3, v_1), (v_3, v_2)\}$$

$[V^2(G)]$ kümesindeki sıralama bağıntısı kaldırılırsa, $(a,b)=(b,a)$ olacaktır. Bu durumda, kümeden aynı olan ikililer çıkartılarak elde edilecek küme $[V^2(G)]$ ile gösterilirse,

$$[V^2(G)] = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3)\}$$

olur. $[V^2(G)]$ kümesinin eleman sayısını n ile gösterirsek, $E(G) \subseteq E$ olacak şekilde oluşturulan $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ kümesi ve bire-bir $I_G: E \rightarrow [V^2(G)]$ dönüşümü göz önüne alındığında, $G^* = (V(G), E, I_G^*)$ grafi, $V(G)$ kümesindeki düğümler kullanılarak elde edilebilecek en büyük (basit) tam graf olacaktır (Bkz. Şekil 36).

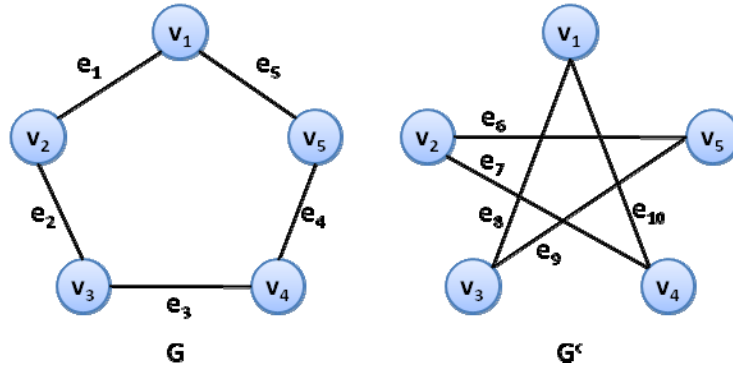


Şekil 36: G grafi ve $V(G)$ kümesi kullanılarak elde edilebilecek en büyük tam graf olan G^* grafi

Elde edilen G^* grafi, G grafi için *evrensel graf* olacaktır. Bu durumda, genel tümleyenlik ilkesi gereğince G grafini evrensel grafa tamamlayan graf G'nin tümleyeni olarak adlandırılır ve

$$G^C = (V(G), E - E(G), I_G^*|_{E - E(G)})$$

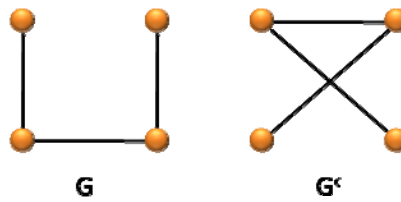
olarak tanımlanır (Bkz. Şekil 37).



Şekil 37: G grafi ve tümleyeni

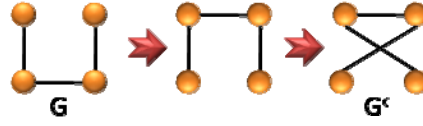
2.7.1. Tümleyenle İlgili Bazı Özellikler

- $|G|=n$ ise, $\|G\| + \|G^c\| = \|K_n\| = \frac{n(n-1)}{2}$ olur.
- G basit bir graf olduğundan, G^c 'de basit graftır ve $(G^c)^c = G$ olur.
- $G \cong G^c$ oluyorsa G'ye *kendine tümleyen* (self complementary) graf adı verilir (Bkz. Şekil 38).



Şekil 38: $G \cong G^c$ olduğundan, G grafi kendine-tümleyendir

Şekil 38'de $G \cong G^c$ olduğunu şekilsel olarak görmek kolaydır. Bunun için, G grafindan yola çıkarak (ya da G^c grafindan yola çıkarak), şekilsel dönüşümlerle G^c grafi (ya da G grafi) elde edilebilir (Bkz. Şekil 39).

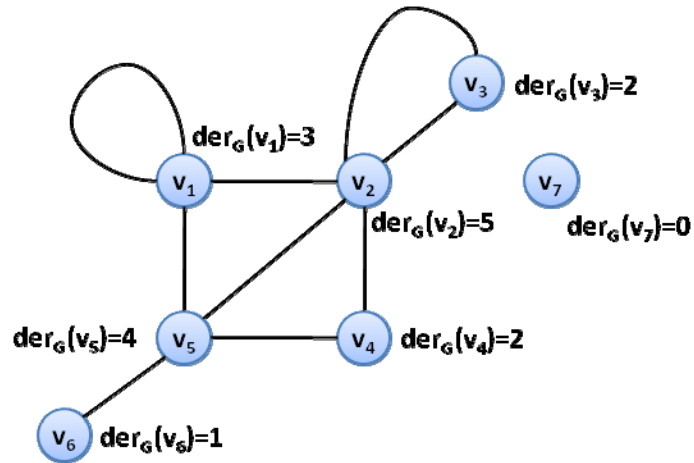


Şekil 39: $G \cong G^C$

2.8. Bir Düğümün Derecesi

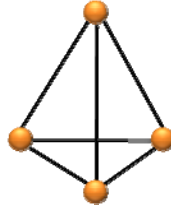
G bir graf ve $v \in V(G)$ olsun. v düğümünün ilişkili olduğu bağların sayısına v 'nin G 'deki *derecesi* denir ve $\text{der}_G(v)$ ya da kısaca $\text{der}(v)$ ile gösterilir. Eğer v bir döngü içersinde yer alıyorsa derece hesaplanırken bu bağ iki birim olarak hesaplanır. Bağımsız düğümlerin dereceleri sıfıra eşittir.

Örnek 5: Şekil 40'da verilen G grafında, her bir düğümün derecesi yanında verilmiştir.



Şekil 40: Bir grafa düğümlerin dereceleri

k negatif-olmayan bir tamsayı olmak üzere, her düğümün derecesi k olan grafa *k-düzenli graf* denir. Özel olarak, 3-düzenli graflar kübik graf olarak adlandırılırlar (Bkz. Şekil 41).



Şekil 41: Bir kübik graf

Bir G grafinin minimum düğüm derecesi $\delta(G)$ ile, maksimum düğüm derecesi ise $\Delta(G)$ ile gösterilir. Şekil 41’de verilen graf için, $\delta(G)=3$, $\Delta(G)=3$ olur. Aşağıdaki teorem, graf teorisinin ilk önemli teoremi olarak bilinir ve Euler tarafından kanıtlanmıştır:

Teorem 4: Bir grafın bütün düğümlerinin derecelerinin toplamı, grafın bağ sayısının iki katına eşittir.

Bu teoremin ilginç bir sonucu olarak, “Herhangi bir grafta tek düğümlerin sayısı her zaman çifttir.” ifadesi de doğru olacaktır.

$|G|=n$ olmak üzere, her bir d_i ($i=1,2,\dots,n$) $V(G)$ ’deki düğümlerin derecelerini gösterebilir. Bu durumda, bileşenleri artmayan sırada yazılan $\vec{d}=[d_1,d_2,\dots,d_n]$ vektörüne G ’nin *derece vektörü* adı verilir. Örneğin, Şekil 40’da verilen grafın derece vektörü $\vec{d}=[5,4,4,2,2,1,0]$ olacaktır. Eğer iki graf eşyapılı ise, bu grafların derece vektörleri aynı olur. Ancak bunun tersi her zaman doğru olmayabilir. Yani derece vektörleri aynı olan iki graf eşyapılı olmayabilir.

Bileşenleri artmayan sırada yazılmış negatif-olmayan tamsayılardan oluşmuş bir $\vec{v}$ vektörünün *grafiksel* olması demek, derece vektörü $\vec{v}$ olan bir grafın inşa edilebilmesi demektir. Herhangi bir vektörün grafiksel olup olmadığını belirleyen bir algoritma, aşağıda verilmiştir.

Algoritma 1: Verilen negatif-olmayan tamsayı bileşenli bir $\vec{v}$ vektörünün grafiksel olup olmadığını belirlenmesi.

Girdi :	Negatif-olmayan tamsayı bileşenli $\vec{v}$ vektörü.
Adım-1 :	k , $\vec{v}$ 'nin bileşen sayısı olmak üzere, eğer $\vec{v}$ 'nin $(k-1)$ 'den büyük bir bileşeni varsa Adım-5'e, aksi halde Adım-2'ye git.
Adım-2 :	Eğer $\vec{v}$ 'nin negatif bir bileşeni varsa Adım-5'e, aksi halde Adım-3'e git.
Adım-3 :	Eğer $\vec{v}$ sıfır vektörü ise Adım-6'ya git.
Adım-4 :	$\vec{v}$ vektörünü bileşenleri artmayan sırada olacak şekilde yeniden düzenle. İlk bileşen olan d_1 bileşenini vektörden sil. Sıradaki ilk d_1 sayıda bileşenden 1 çıkart ve $\vec{v}_1$ vektörünü elde et. $\vec{v}_1$ vektörünü $\vec{v}$ vektörü olarak güncelle ($\vec{v} \leftarrow \vec{v}_1$) ve Adım-1'e git.
Adım-5 :	Girdi vektörü grafiksel değildir; dur.
Adım-6 :	Girdi vektörü grafikselidir; dur.

Örnek 6: $\vec{v}=[5,4,4,3,3,3,2]$ vektörünün grafiksel olup olmadığını Algoritma 1'i kullanarak araştıralım.

1. $\vec{v}=[5,4,4,3,3,3,2]$, $\vec{v}_1=[3,3,2,2,2,2]$.
2. $\vec{v}=[3,3,2,2,2,2]$, $\vec{v}_1=[2,1,1,2,2]$.
3. $\vec{v}=[2,1,1,2,2]$, $\vec{v}_1=[1,1,1,1]$.
4. $\vec{v}=[1,1,1,1]$, $\vec{v}_1=[0,1,1]$.

5. $\vec{v}=[1,1,0]$, $\vec{v}_1=[0,0]$.

Sıfır vektörüne ulaşıldığından, algoritma 6. adımda durur; $\vec{v}$ vektörü grafikseldir. Yani derece vektörü $[5,4,4,3,3,3,2]$ olan bir graf inşa edilebilir.

Örnek 7: $\vec{v}=[3,3,3,1]$ vektörünün grafiksel olup olmadığını Algoritma 1'i kullanarak araştıralım.

1. $\vec{v}=[3,3,3,1]$, $\vec{v}_1=[2,2,0]$.

2. $\vec{v}=[2,2,0]$, $\vec{v}_1=[1,-1]$.

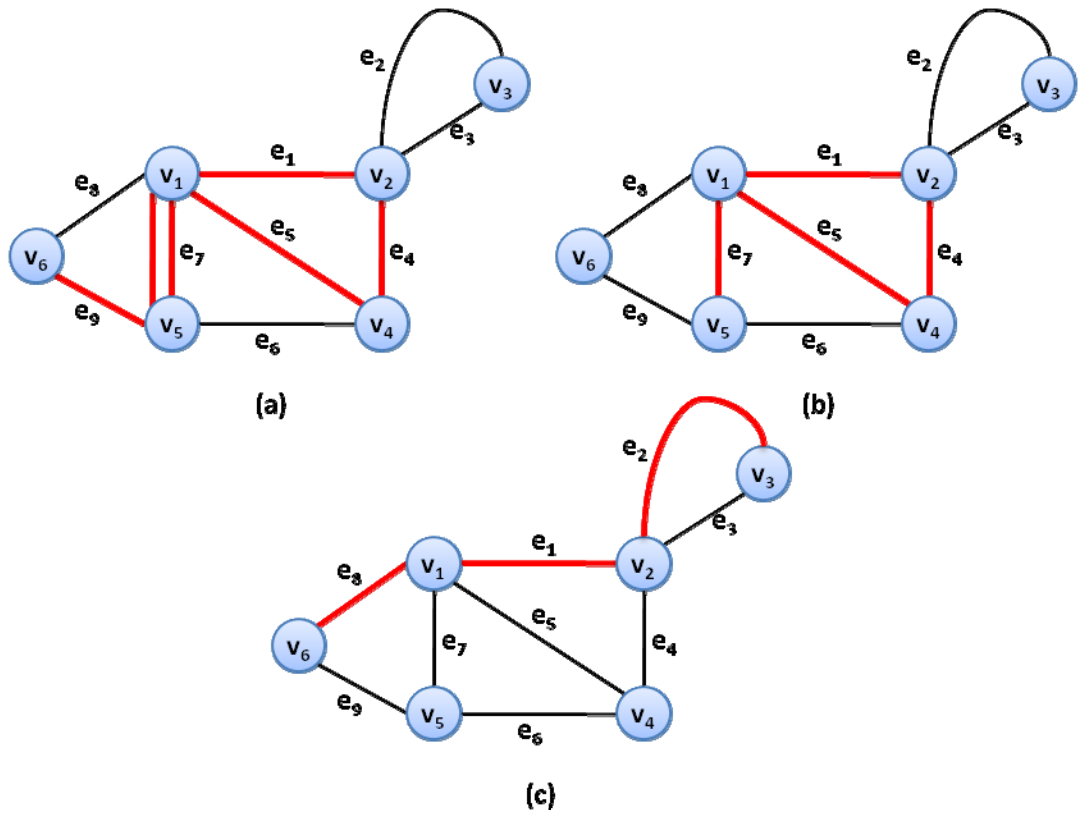
Vektör negatif bileşen içerdiğinden, algoritma 5. adımda durur; $\vec{v}$ vektörü grafiksel değildir.

2.9. Graflarda Yol Kavramı ve Bağlantılılık

$G=(V(G),E(G),IG)$ grafini göz önüne alalım. $u,v \in V(G)$ düğümleri arasında bir *yürüme* (walk), her bir e_i bağı v_{i-1}, v_i düğümlerini bağlayacak şekilde tanımlanan $w := (u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n = v)$ dizisidir. $v_0=v_n$ ise yürümeye *kapalı yürüme*, aksi halde *açık yürüme* adı verilir. Bir w yürümesinin uzunluğu, yürümeyi tanımlayan dizideki bağların toplam sayısı olarak tanımlanır ve $uz(w)$ ile gösterilir.

Eğer tekrarlanan hiçbir bağ yoksa yani bütün bağlar ayrıksa diziye bir *iz* (trail) denir. Tekrarlanan hiçbir düğümün bulunmaması durumunda ise diziye bir *yol* (path) adı verilir. Yol tanımlayan dizilerde genellikle bağlar yazılmaz. Her yolun aynı zamanda bir iz olduğu açıktır, ancak bunun tersi her zaman doğru değildir. Benzer şekilde, eğer u ve v düğümlerinden geçen bir yürüme tanımlanabiliyorsa, bu düğümler arasında mutlaka bir yol tanımı vardır.

Örnek 8: Şekil 42a’da verilen graf üzerinde $w=(v_5, e_7, v_1, e_1, v_2, e_4, v_4, e_5, v_1, e_7, v_5, e_9, v_6)$ dizisi bir yürümedir, ancak bir iz değildir. Çünkü e_7 bağı dizide iki defa tekrarlanmıştır. Şekil 42b’de tanımlanan $t=(v_1, e_1, v_2, e_4, v_4, e_5, v_1, e_7, v_5)$ dizisi ise bir iz tanımlar, ancak bir yol değildir. Çünkü v_1 düğümü dizide iki defa tekrarlanmıştır. Şekil 42c’de tanımlanan $p=(v_6, e_8, v_1, e_1, v_2, e_2, v_3)$ dizisi v_6 ve v_3 düğümleri arasında bir yol tanımlar, ancak bu, iki düğüm arasındaki tek yol değildir.



Şekil 42: Grafa (a) bir yürüme, (b) bir iz ve (c) bir yol

Bir G grafında, herhangi iki $v_i, v_j \in V(G)$ düğümleri arasında bir yol varsa bu düğümler *bağlantılıdır* denir. Bağlantılık, $V(G)$ 'de bir denklik bağıntısıdır. Buna göre denklik sınıfları,

$$V_1 = \{v \in V(G) : v \text{ ile } v_1 \text{ bağlantılıdır}\}$$

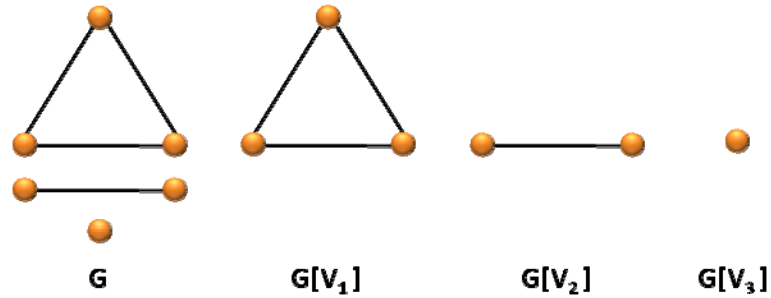
$$V_2 = \{v \in V(G) : v \text{ ile } v_2 \text{ bağlantılıdır}\}$$

⋮

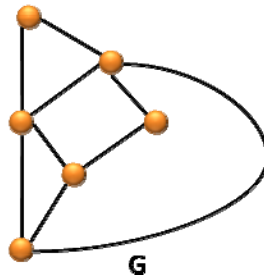
$$V_k = \{v \in V(G) : v \text{ ile } v_k \text{ bağlantılıdır}\}$$

şeklinde olacaktır.

Sırasıyla $V_1, V_2, \dots, V_k$ düğüm kümelerinin indirgediği graflar olan $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_k]$ altgraflarına G 'nin *bileşenleri* (components) adı verilir. G 'nin bileşen sayısı $\omega(G)$ ile gösterilir. Burada $k \leq n$ olur. $k=n$ durumu, ancak tümüyle bağlantısız bir grafa mümkündür. $k=1$ ise, yani G grafi tek bir bileşenden oluşuyorsa, bu durumda G grafinin *bağlantılıdır* denir (Bkz. Şekil 43-44).



Şekil 43: G grafi ve bileşenleri. $\omega(G)=3 \neq 1$ olduğundan G bağlantısızdır



Şekil 44: $\omega(G)=1$, dolayısıyla G bağlantılıdır

Teorem 5: G basit bir graf ve $n=|G|$ olmak üzere, $\delta(G) \geq \frac{n-1}{2}$ ise G bağlantılıdır.

Teorem 6: G basit grafi bağlantılı değilse G^C bağlantılıdır.

Teorem 7: G basit bir graf, $n=|G|$ ve $\omega=\omega(G)$ olmak üzere,

$$\|G\| \leq \frac{(n-\omega)(n-\omega+1)}{2}$$

olur.

2.10. Uzaklık Fonksiyonu ve Uzaklık Matrisi

G bağlantılı grafını göz önüne alalım. Herhangi iki $v_1, v_2 \in V(G)$ düğümü için, bir metrik olan uzaklık fonksiyonu $d(v_1, v_2)$, aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$d(v_1, v_2) = \begin{cases} \text{En kısa } v_1-v_2 \text{ yolunun uzunluğu} & \text{eğer bir } v_1-v_2 \text{ yolu varsa.} \\ \infty & \text{eğer bir } v_1-v_2 \text{ yolu yoksa.} \end{cases}$$

Bu durumda G grafının *çapı*, G'deki en büyük uzaklık olarak tanımlanır. Diğer bir deyişle,

$$R(G) = \max \{d(u, v) : u, v \in V(G)\}$$

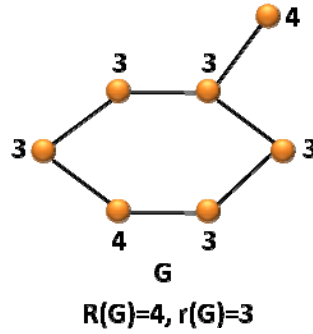
olur. Bir $u \in V(G)$ düğümünün *dış merkezi* ise,

$$dm(u) = \max \{d(u, v) : v \in V(G)\}$$

olarak tanımlanır (Bkz. Şekil 45). Buna bağlı olarak G grafinin *yarıçapı*,

$$r(G) = \min \{dm(u) : u \in V(G)\}$$

olarak tanımlanır. Herhangi bir G grafinin yarıçapı ve çapı arasında $r(G) \leq R(G) \leq 2r(G)$ eşitsizlikleri geçerli olacaktır.



Şekil 45: G grafi ve her düğümün dış merkez sayıları

Bir G grafinin komşuluk matrisi A_G 'nin kuvvetleri ve birim matris kullanılarak oluşturulan,

$$S_k = I - A_G + A_G^2 - \dots + A_G^k$$

matrisi, G grafinde bağlantılılık, dış merkez, yarıçap ve çap kavramları ile ilgili bir çok bilginin matris model üzerinden elde edilmesine olanak sağlamaktadır. Aşağıda verilen teoremler, S_k matrisi ile bu kavramlar arasındaki ilişkileri göstermektedir.

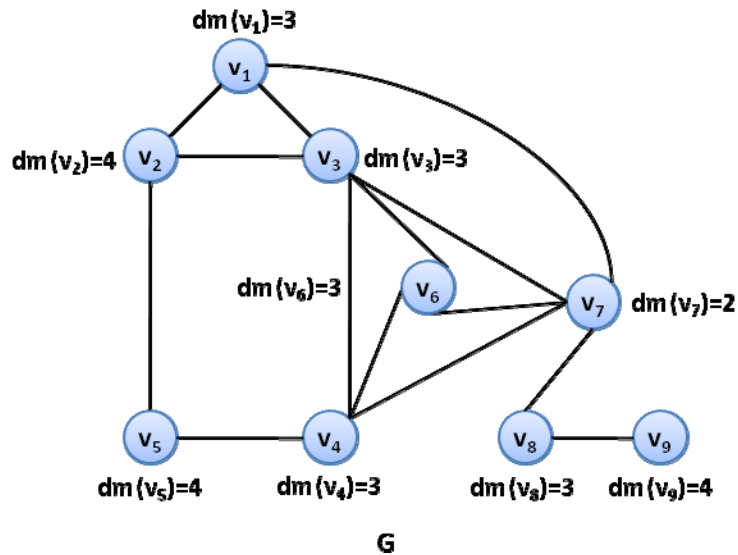
Teorem 8: G , düğüm kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olan bir graf olsun. Bu durumda $dm(v_i)$, k 'nın, S_k matrisinde i 'nci satırı sıfırı içermeyen minimum değerini verir.

Teorem 9: Mertebesi n olan bir G grafinin bağlantılı olması için gerekli ve yeterli koşul, S_{n-1} matrisinin hiç sıfır girdi içermemesidir.

Teorem 10: Herhangi bir bağlantılı G grafi için, $r(G)$, S_k 'nin en az bir satırının sıfır girdi içermediği en küçük k değerini verir.

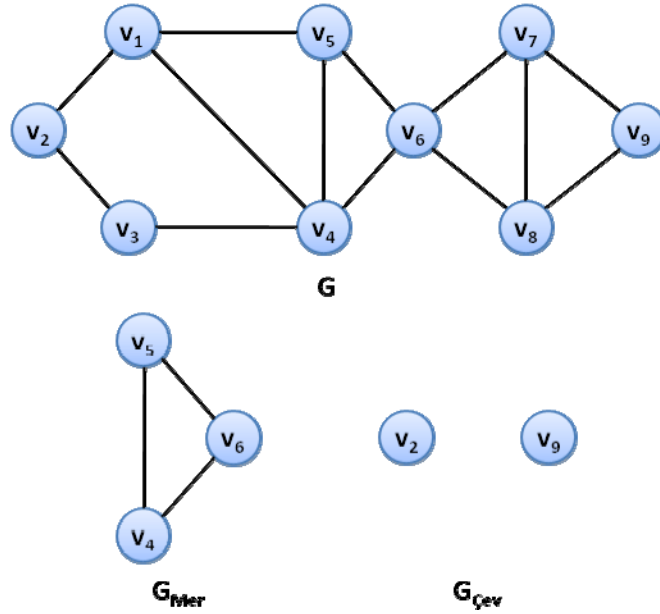
Teorem 11: Herhangi bir bağlantılı G grafi için, $R(G)$, S_k 'nin hiçbir girdisinin sıfır olmadığı en küçük k değerini verir.

Bir $u \in V(G)$ düğümü için $dm(u)=r(u)$ oluyorsa bu düğüme bir *merkezcil düğüm* denir. G grafinin bütün merkezcil düğümlerinin indirgediği altgrafına G 'nin *merkezi* adı verilir ve G_{Mer} ile gösterilir (Bkz. Şekil 46). G_{Mer} grafi bir tek düğümden oluşabileceği gibi birden çok sayıda eleman da içerebilir. Ancak her zaman $V(G_{Mer}) \neq \emptyset$ olacaktır. Ayrıca her graf, en az bir bağlantılı grafın merkezidir.



Şekil 46: $r(G)=2$, dolayısıyla $G_{Mer}=\{v_7\}$ olacaktır

Bir $u \in V(G)$ düğümü için $dm(u) = R(u)$ oluyorsa bu düğüme bir *çevresel düğüm* denir. G grafinın bütün çevresel düğümlerinin indirgediği altgrafına G 'nin *çevresi* adı verilir ve $G_{Çev}$ ile gösterilir (Bkz. Şekil 47).

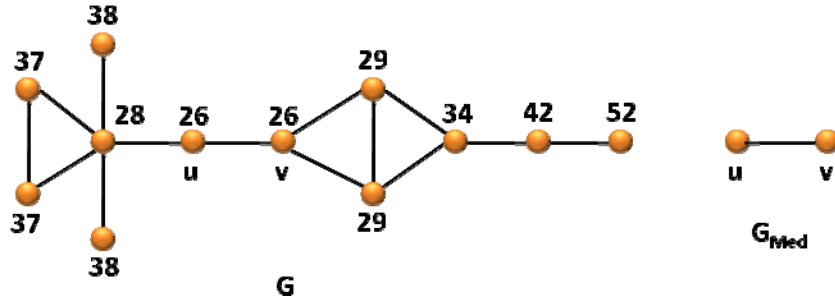


Şekil 47: G grafi, merkezi ve çevresi

Bir $u \in V(G)$ düğümünün toplam uzaklık değeri,

$$tu(u) = \sum_{v \in V(G)} d(u, v)$$

şeklinde tanımlanır. Diğer düğümler arasında minimum toplam uzaklık değerine sahip olan bir düğüme *medyan düğüm* adı verilir. G grafinın bütün medyan düğümlerinin indirgediği altgrafına G 'nin *medyanı* adı verilir ve G_{Med} ile gösterilir. Şekil 48'de, G grafinın her bir düğümünün toplam uzaklık değeri belirlenmiş ve medyan altgrafı elde edilmiştir.



Şekil 48: G grafi ve medyanı

Slater (1980) göstermiştir ki, her graf en az bir bağlantılı grafın medyanıdır. Ayrıca her G_1 ve G_2 graf ikilisi için, $H_{Mer}=G_1$ ve $H_{Med}=G_2$ olacak şekilde bağlantılı bir H grafi her zaman bulunabilir (Hendry, 1985).

Merkez ya da medyanda olduğu gibi, her graf, koşulsuz olarak başka bir grafın çevresi değildir. Bir G grafının, herhangi bir grafın çevresi olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul, ya G'nin her düğümünün dış merkezinin 1 olması, ya da G'nin dış merkezi 1 olan hiçbir düğümünün bulunmamasıdır (Bielak ve Syslo, 1983).

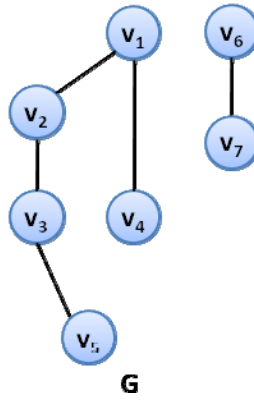
Her bir girdisi düğümler arasındaki uzaklıklar tarafından belirlenen matrise, G grafının *uzaklık matrisi* adı verilir. Diğer bir deyişle, her $v_i, v_j \in V(G)$ için,

$$d_{ij} = \begin{cases} d(v_i, v_j) & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

olmak üzere, G grafının uzaklık matrisi $D_G=[d_{ij}]$ biçiminde oluşturulacaktır. Dolayısıyla uzaklık matrisinin köşegeni her zaman sıfır olacaktır. Örnek olarak Şekil 49'da verilen G grafının uzaklık matrisi,

$$D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \infty & \infty \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 1 & \infty & \infty \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & \infty & \infty \\ 3 & 3 & 1 & 4 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde hesaplanabilir.



Şekil 49: G grafi

Verilen herhangi bir G grafinin uzaklık matrisini elde etmek her zaman mümkündür, ancak bunun tersi, yani köşegeni sıfır girdilerinden oluşan herhangi bir $n \times n$ kare matrisin mertebesi n olan bir grafin karşılık gelip gelmediğinin belirlenmesi ve bu grafin diyagramının çizilmesi, büyük n değerleri için kolay bir işlem değildir. Ancak uzaklık matrisi verilen bir graf hakkında, diyagramını çizilmeden birçok yorum yapılabilir. Örneğin,

$$D_{G_1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } D_{G_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

uzaklık matrislerini göz önüne alalım. G_1 grafinin mertebesi 6'dır ve bu grafta düğümlerin dış merkezleri $dm(v_1)=2$, $dm(v_2)=3$, $dm(v_3)=2$, $dm(v_4)=3$, $dm(v_5)=2$ ve $dm(v_6)=3$ olarak belirlenir. Bu değerler, satırların en büyük değerleridir.

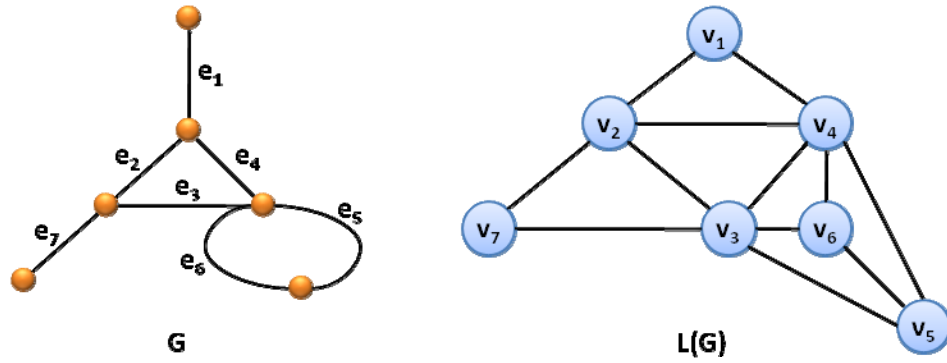
$r(G_1)=2$, $R(G_1)=3$, sırasıyla en küçük ve en büyük dış merkez değerleri olarak belirlenebilir. Bu durumda G_1 grafinin merkezi, $G_{1,Mer} = \{v_1, v_3, v_5\}$ olacaktır.

Benzer şekilde, G_2 grafinin mertebesi 7, düğümlerin dış merkezleri $dm(v_1)=4$, $dm(v_2)=3$, $dm(v_3)=2$, $dm(v_4)=3$, $dm(v_5)=4$, $dm(v_6)=4$ ve $dm(v_7)=3$ olacaktır. Yine uzaklık matrisi kullanılarak, $r(G_2)=2$, $R(G_2)=4$ ve $G_{2,Mer} = \{v_3\}$ olarak belirlenebilir.

2.11. Doğrusal Graflar

Döngü içermeyen bir G grafini göz önüne alalım. G grafini kullanarak bir $L(G)$ grafini aşağıdaki şekilde oluşturalım:

$L(G)$ grafinin düğüm kümesi ile G grafinin bağ kümesi arasında bire-bir bir eşleştirmeyi, “ $L(G)$ grafinde v_i ve v_j düğümleri komşudur. $\Leftrightarrow G$ grafinde e_i ve e_j bağları ortak bir düğümle ilişkilidir.” kuralına göre kuralım. Bu şekilde elde edilen $L(G)$ grafına, G grafinin *doğrusal grafi* adı verilir (Bkz. Şekil 50).



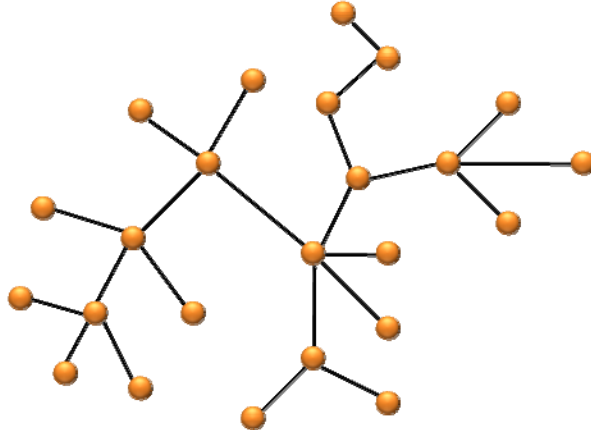
Şekil 50: G grafi ve L(G) doğrusal grafi

Bir G grafi ile doğrusal grafi L(G) arasındaki bağlantılılık, altgraf ve eşyapılı olma ile ilgili ilişkileri gösteren üç önemli özellik aşağıda verilmiştir:

1. G bağlantılıdır. $\Leftrightarrow$ L(G) bağlantılıdır.
2. $H \subseteq G \Rightarrow L(H) \subseteq L(G)$
3. G_1 ve G_2 basit grafları eşyapılıdır. $\Rightarrow$ L(G_1) ve L(G_2) grafları eşyapılıdır.

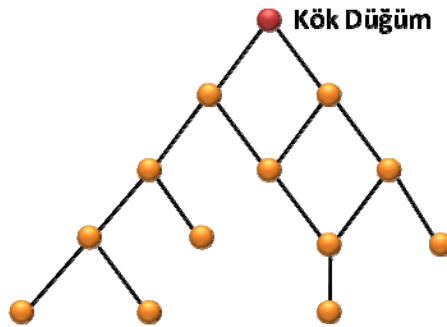
2.12. Ağaçlar

Devir içermeyen bağlantılı bir grafa bir *orman* (forest) adı verilir. Bağlantılı ormana *ağaç* (tree) adı verilir. Dolayısıyla orman, bileşenleri ağaçlar olan bir graf olacaktır. Derecesi 1 olan düğümlere, ağacın *yaprakları* (leaves) ya da uç düğümler adı verilir (Bkz. Şekil 51).



Şekil 51: Ağaç türünde bir graf

Bir v düğümünün derecesi 2 olan, v dışındaki uç düğüm olmayan diğer bütün düğümlerinin derecesi ise 3 olan ağaca bir *ikili ağaç* (binary tree) denir (Bkz. Şekil 52). v düğümüne ağacın *kök düğümü* (root) adı verilir. Ağacın satır sayısı ise, ağacın *yüksekliği* olarak adlandırılır. Kök düğümün bulunduğu satır, yükseklik değerine katılmaz. Örneğin Şekil 52’de verilen ikili ağacın yüksekliği 4 dür.



Şekil 52: Bir ikili ağaç

T bir ağaç olmak üzere, ağaçlarla ilgili bazı önemli teoremler ve bu teoremlerden elde edilen sonuçlar aşağıda maddeler halinde verilmiştir:

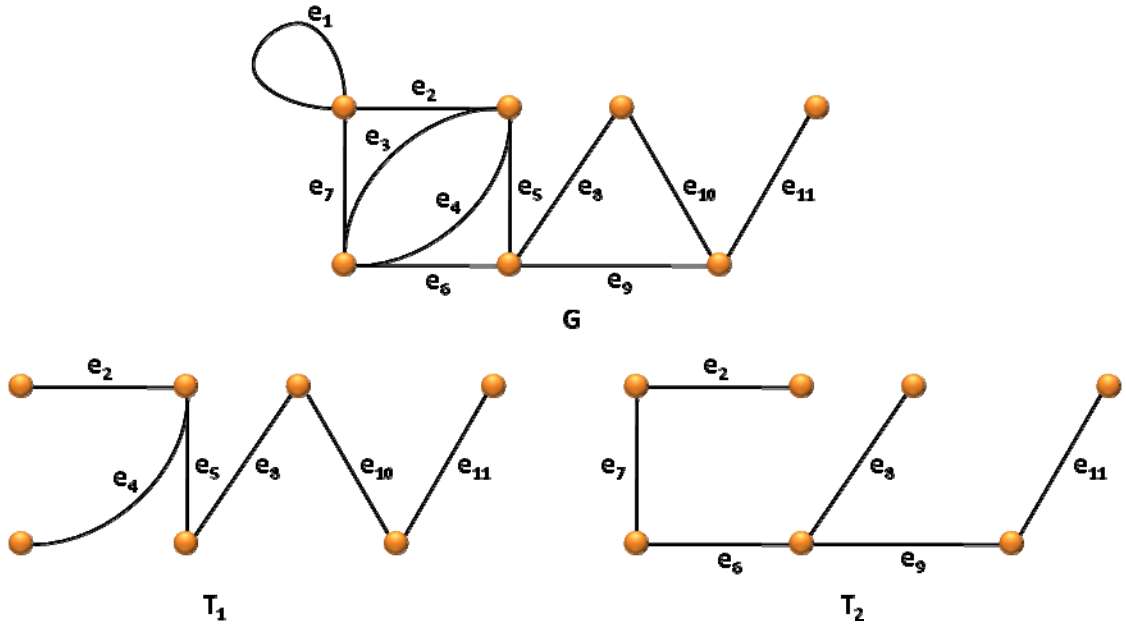
1. T’de herhangi iki düğüm, bir tek yol ile bağlıdır.
2. T minimal bağlantılı bir graftır; yani herhangi bir $e \in E(T)$ bağı için, T-e bağlantılı değildir.
3. T maksimal devirsiz bir graftır; yani T hiçbir devir içermezken, herhangi iki $v_1, v_2 \in V(T)$ düğümleri için, v_1v_2 bu düğümleri bağlayan bağı olmak üzere, $T+v_1v_2$ grafi devir içerecektir.
4. G herhangi bir graf olmak üzere, eğer $\delta(G) \geq |T|-1$ ise $T \subseteq G$ olur. Diğer bir deyişle T grafi ya da T grafına eşyapılı olan başka bir graf, G grafının altgrafı olur.
5. n sayıda düğümlü herhangi bir bağlantılı grafın ağaç olması için gerekli ve yeterli koşul, n-1 sayıda bağına sahip olmasıdır.
6. En az iki düğüme sahip olan bir G grafının ağaç olması için gerekli ve yeterli koşul, G’nin derece vektörü olan $[d_1, d_2, \dots, d_n]$ vektörünün $\sum_{i=1}^n d_i = 2n-1$ eşitliğini sağlamasıdır.
7. T bir ağaç, n_i , bu ağacın i dereceli düğümlerinin sayısını gösterebilir. Bu durumda ağacın yaprak sayısı, yani n_1 değeri,

$$n_1 = 2 + n_3 + 2n_4 + 3n_5 + \dots$$

$$- 2 + \sum_{i=3}^{\infty} (i-2)n_i$$

eşitliği kullanılarak hesaplanır.

Bir G grafının geren altgrafı, aynı zamanda bir ağaç ise bu altgrafa G’nin *geren ağacı* adı verilir. Bir grafın geren ağacı, birden çok sayıda olabilir (Bkz. Şekil 53) Bağlantılı her graf, bir geren ağaç içerir.



Şekil 53: G grafi ve geren ağaçları T_1 ve T_2

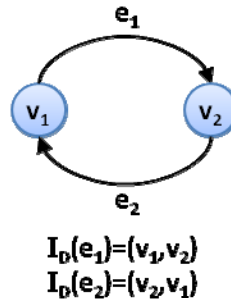
2.13. Yönlü Graflar

Yönlü graflar, graflarda yer alan bağların yerinin ark olarak da adlandırılan yönlü bağların aldığı özel bir graf türüdür. Şehirlerin trafik planlamaları, bilgisayar ağlarının akış yoğunluğu gibi analizlerinin gerçekleştirilmesi ya da bilgisayar programlarının teorik gösterimleri gibi düğümler arasında yer alan bağlar için bir “yöne” gereksinim duyulduğu birçok alanda, modelleme için yönlü graflar tercih edilmektedirler. Hiperortamın modellenmesinde, sayfalar arasındaki bağlantıların yönlerinin gösterilmesi gerektiğinden, yönlü bağların kullanılmaları gerekecektir. Aynı şekilde, gezinme kavramı da belirli bir yöne bağlı olduğundan, gezinmenin modellenmesinde de yönlü graflarda yer alan yürüme kavramının kullanılması kaçınılmaz olacaktır.

Graflar için verilen bütün özellik ve kavramlar, yönlü graflar için de geçerli olacaktır. Ancak bağlar yönlü olduğundan, ilişki dönüşümünün değer kümesinde yer alan düğüm ikilileri sıralı olacaktır. Yani, D bir yönlü grafi temsil etmek üzere,

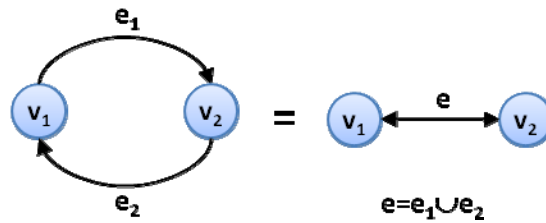
$$I_D: E(D) \rightarrow V(D) \times V(D)$$

dönüşümü için, $V(D) \times V(D)$ kümesinde (v_i, v_j) ile (v_j, v_i) farklı elemanlar olacaktır (Bkz. Şekil 54).



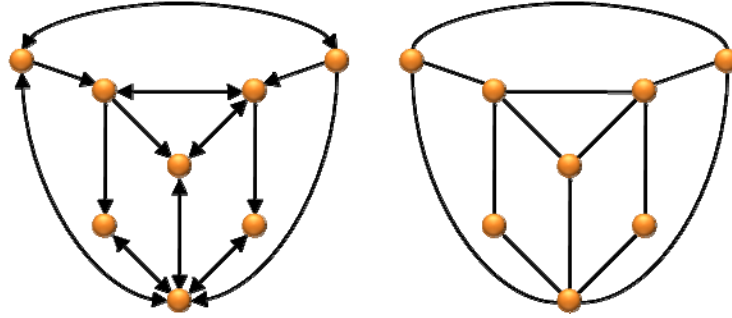
Şekil 54: Yönlü graflarda düğüm ikilileri sıralıdır

Diyagram gösterimlerinde, eğer iki düğüm arasında her iki yönde de bağ varsa, bu durum genellikle çift yönlü tek bir bağ ile gösterilir. Ancak bütün işlemlerde, iki yönlü bağların aslında iki farklı bağdan oluştukları dikkate alınmalıdır (Bkz. Şekil 55).



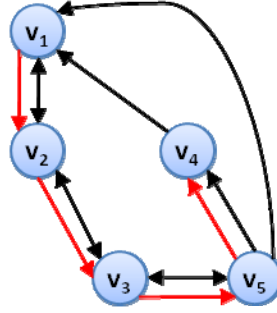
Şekil 55: Yönlü graflarda iki yönlü bağlar

Her yönlü graf için, bu grafın “çatısını” oluşturan bir graf bulunmaktadır. Bu graf, yönlü bağların yönlerinin kaldırılması ile elde edilen graftır (Bkz. Şekil 56).



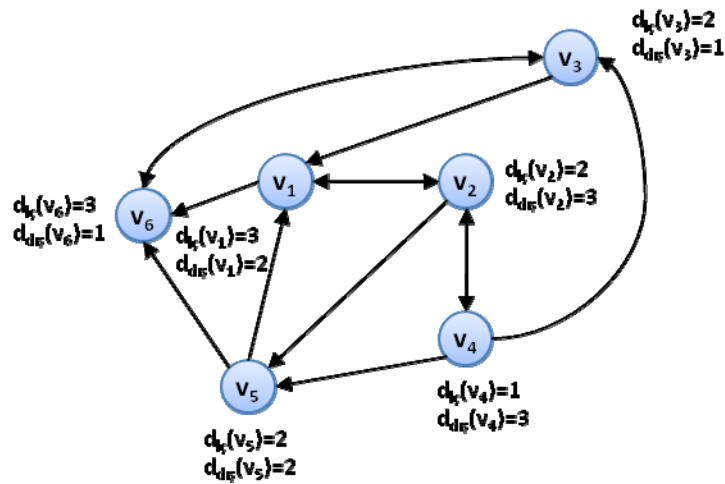
Şekil 56: Bir yönlü graf ve onun çatı grafi

Yürüme kavramının temelini oluşturan yol ve iz kavramları yönlü graflarda, graflardan biraz daha farklı bir yaklaşımla tanımlanırlar. Yönlü graflarda *yönlü yürüme*, *yönlü yol* ve *yönlü iz* adlarını alan bu kavramlar, bağların yönleri tarafından belirlenirler. Diğer bir deyişle, bir yönlü grafta v_1 ve v_2 düğümleri arasında bir yol bulunabilmesi için bu düğümler arasında bulunan bağın v_1 düğümünden v_2 düğümüne doğru olması gereklidir; aksi halde, yani bu düğümler arasındaki bağın yönü v_2 düğümünden v_1 düğümüne doğru ise bu iki düğüm arasında bir yol yoktur (Bkz. Şekil 57). Dolayısıyla, yönlü bir grafta tanımlanacak bir yönlü yürüme, yönlü yol ya da yönlü iz, başlangıç ve bitiş düğümlerinin belirtildiği *u-v yürümesi*, *u-v yolu* ya da *u-v izi* biçiminde adlandırılacaktır. Bu farklılığın dışında, yönlü yürüme, yönlü yol ve yönlü iz tanımlarını birbirlerinden ayıran özellikler, graflardaki eşdeğer tanımları ile aynıdır.



Şekil 57: v_1 ve v_4 düğümleri arasında bir yol tanımı. Ancak tersi yönde bir yol tanımlamak mümkün değildir

Graflarda tanımlanan bir düğümün derecesi kavramı, yönlü graflarda iki alt tür olarak karşımıza çıkar. Graflarda, bir düğümün ilişkili olduğu bağ sayısı olarak tanımlanan derece, yönlü graflarda, bağın yönüne bağlı olarak *iç derece* ya da *dış derece* adını alır. Diğer bir deyişle, bir düğümün iç derecesi, o düğümle ilişkili olan ve yönü düğüme doğru olan bağları sayısı; dış derecesi ise, o düğümle ilişkili olan ve yönü düğümünden dışarıya doğru olan bağları sayısıdır (Bkz. Şekil 58). Bir v düğümünün iç derecesi ve dış derecesi sırasıyla $d_{iç}(v)$ ve $d_{dış}(v)$ ile gösterilir. Her devirsiz yönlü graf, dış derecesi sıfır olan en az bir düğüme ve iç derecesi sıfır olan en az bir düğüme sahiptir.

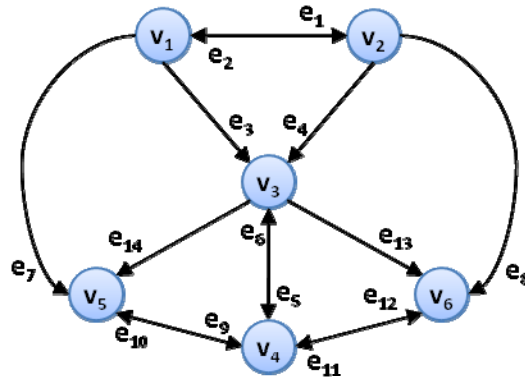


Şekil 58: İç derece ve dış derece kavramları

0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$d_{d_2}(v_1)$
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	2	$d_{d_2}(v_2)$
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	4	$d_{d_2}(v_3)$
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$d_{d_2}(v_4)$
0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	4	$d_{d_2}(v_5)$
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	$d_{d_2}(v_6)$
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	$d_{d_2}(v_7)$
0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	2	$d_{d_2}(v_8)$
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	$d_{d_2}(v_9)$
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	$d_{d_2}(v_{10})$
0	3	4	2	4	1	1	1	1	1		
$d_{d_2}(v_1)$	$d_{d_2}(v_2)$	$d_{d_2}(v_3)$	$d_{d_2}(v_4)$	$d_{d_2}(v_5)$	$d_{d_2}(v_6)$	$d_{d_2}(v_7)$	$d_{d_2}(v_8)$	$d_{d_2}(v_9)$	$d_{d_2}(v_{10})$		

Teorem 13: $V(D)=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olmak üzere, D grafının komşuluk matrisi A_D 'yi göz önüne alalım. $k \geq 1$ olmak üzere, $[A_D]^k$ matrisinde (i, j) indisli terim, k uzunluğundaki farklı v_i - v_j yürümlerinin sayısını verir.

Örnek olarak, Şekil 60'da verilen D yönlü grafını göz önüne alalım.



Şekil 60: D yönlü grafi

D grafının komşuluk matrisi ve bu matrisin 3. dereceye kadar kuvvetleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$A_D^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_D^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_D^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A_D^2 matrisinde, birinci köşegen üzerinde yer alan (i,i) 'nci girdiler v_i düğümünün içderecelerini göstermektedir. Bunların dışında kalan (i,j) 'nci girdiler ise uzunluğu, yani içerdiği yönlü bağ sayısı 2 olan v_i-v_j yürümlerinin sayısını verecektir. Örneğin, A_D^2 matrisinin $(2,4)$ 'ncü girdi değeri olan 2, içerdiği yönlü bağ sayısı 2 olan v_2-v_4 yürümlerinin sayısıdır. Bu yürümler,

$$(v_2, e_4, v_3, e_5, v_4), (v_2, e_8, v_6, e_{11}, v_4)$$

olarak belirlenebilir.

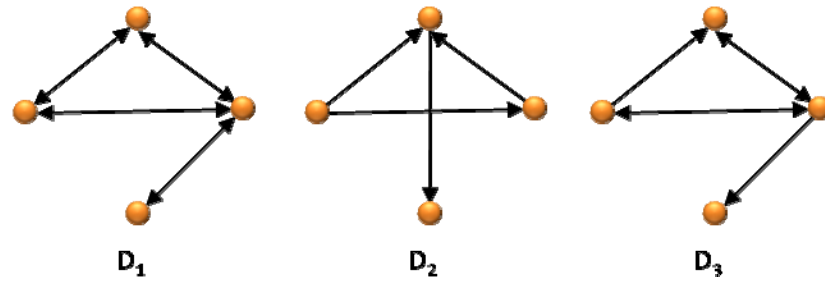
Benzer şekilde, A_D^3 matrisindeki (i,j) 'nci girdiler ise uzunluğu 3 olan v_i-v_j yürümlerinin sayısını verecektir. Örneğin, $(2,3)$ 'ncü girdi değeri olan 3, içerdiği yönlü bağ sayısı 3 olan v_2-v_3 yürümlerinin sayısıdır. Bu yürümler ise,

$$(v_2, e_8, v_6, e_{11}, v_4, e_6, v_3), (v_2, e_2, v_1, e_1, v_2, e_4, v_3), (v_2, e_4, v_3, e_5, v_4, e_6, v_3),$$

olarak belirlenebilir.

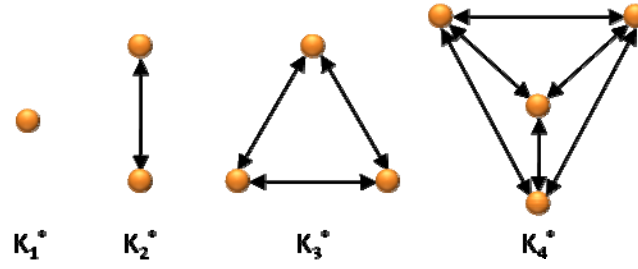
$(D, V(D), E(D))$ bir yönlü graf olsun. Eğer $V(D_1) \subseteq V(D)$ ve $E(D_1) \subseteq E(D)$ oluyorsa $(D_1, V(D_1), E(D_1))$ yönlü grafına D yönlü grafının *alt yönlü grafi* adı verilir ve bu durum $D_1 \subseteq D$ şeklinde gösterilir. $D_1 \subseteq D$ ve $|D| - |D_1|$ ise D_1 yönlü grafına D 'yi *geren alt yönlü graf* adı verilir.

Bir D yönlü grafi, eğer $(u, v) \in E(D) \Leftrightarrow (v, u) \in E(D)$ oluyor ise *simetrik* olarak adlandırılır. Simetrik olmayan yönlü grafa *asimetrik* denir (Bkz. Şekil 61). Bir asimetrik yönlü grafta, en büyük dış dereceye sahip düğümden, herhangi başka bir düğüme olan uzaklık en fazla 2 olabilir.



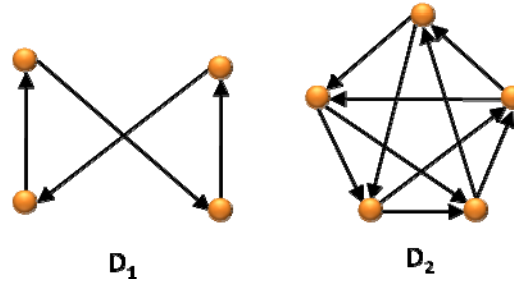
Şekil 61: Simetrik (D_1) ve asimetrik (D_2 ve D_3) yönlü graflar

Bir D yönlü grafi simetrik ve her $u, v \in V(D)$ ikilisi bağlı ise *tam simetrik yönlü graf* adını alır. Mertebesi n olan tam simetrik yönlü graf K_n^* ile gösterilir. Genel olarak bir G grafında, her bağa karşılık iki yönlü bağ atanması ile elde edilen yönlü grafa, G grafından elde edilen simetrik yönlü graf denir ve G^* ile gösterilir. Bu durumda G , G^* yönlü grafının çatı grafi olacaktır (Bkz. Şekil 62).



Şekil 62: Tam simetrik graflar

D yönlü grafi, her $v \in V(D)$ için $d_{\text{dış}}(v) = d_{\text{iç}}(v) = r \in \mathbb{Z}^+$ oluyor ise r -düzenli yönlü graf adını alır (Bkz. Şekil 63).

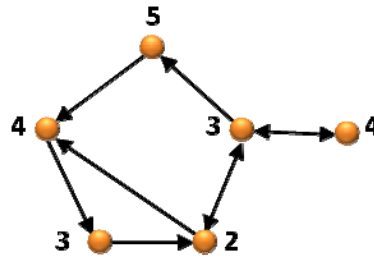


Şekil 63: 1-düzenli ve 2-düzenli yönlü graflar

Bir D yönlü grafının çatı grafi bağlantılı ise D yönlü grafına bağlantılıdır denir. Eğer her $u, v \in V(D)$ düğüm ikilisi için D grafında bir $u-v$ yolu ve bir $v-u$ yolu tanımlanabiliyorsa D grafına kuvvetli bağlantılıdır denir (Bkz. Şekil 64).

Yönlü graflarda $d(u, v)$ uzaklık fonksiyonu, u ve v düğümleri arasındaki en kısa yönlü yolun uzunluğu olarak tanımlanır. $d(u, v)$, yönlü graflarda bir metrik olmaz, çünkü yönlü graf simetrik değilse $d(u, v)$ fonksiyonu da simetrik olmayacaktır.

Dış merkez, yarıçap ve çap tanımları, graflardaki tanımlarına benzer olarak yapılırlar. Bir u düğümünün dış merkezi olan $e(u)$, u düğümünden en uzaktaki düğümün u 'dan uzaklığı olarak tanımlanır. Bir yönlü graftaki en küçük dış merkez uzaklığı yönlü grafin yarıçapı, en büyük dış merkez uzaklığı ise yönlü grafin çapı olarak adlandırılır.



Şekil 64: Kuvvetli bağlantılı bir yönlü graf ve düğümlerin dış merkez değerleri

2.14. Ağırlıklı Yönlü Graflar

Yönlü graflarda, her bir bağ için bir ağırlık değerinin atanması ile elde edilen graflara *ağırlıklı yönlü graf* adı verilir. Diğer bir deyişle, mertebesi n olan ve büyüklüğü m olan bir ağırlıklı yönlü graf, her bir w_i değeri e_i bağına karşılık gelen ağırlık değerini göstermek üzere, yönlü graflara ek olarak $W(W)=\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ ağırlıklar kümesi ile,

$$W=(V(W), E(W), W(W), I_W)$$

şeklinde belirlenir.

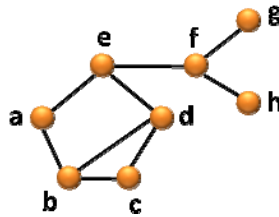
Yönlü graflarda yol uzunluğu hesaplanırken, her bir bağ 1 birim uzunluğunda olarak değerlendirilir. Ancak yönlü grafların, bilgisayar ağları, şehir planlama ya da trafik denetimi gibi gerçek problemlere uygulamalarında, bu yaklaşım tek başına yeterli olmamaktadır. Örneğin, şehirler arasındaki yolları ve bu yolların uzunluklarını

gösteren bir haritada, herhangi iki şehir arasındaki uzaklığın belirlenmesi probleminin çözümünde kullanılması gereken model, ağırlıklı yönlü graf olacaktır.

Ağırlıklı yönlü graflarda düğümler arasındaki uzaklık, bağların ağırlık değerlerine göre hesaplanır. Dolayısıyla iki düğüm arasındaki en kısa yol, her zaman en az bağa sahip olan yol olmayabilir. En küçük toplam ağırlık değerine sahip olan yol olacaktır.

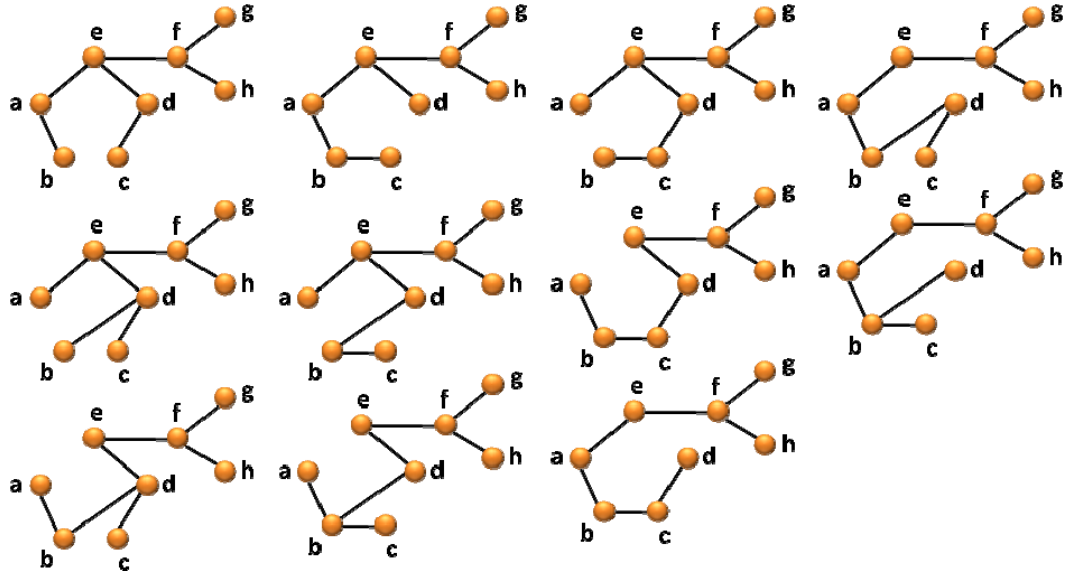
2.14.1. Ağırlıklı Yönlü Graflarda Bazı Algoritmalar

G , mertebesi n ve büyüklüğü q olan bir graf olsun. G 'nin geren ağacı, Düğüm sayısı n olan bir ağaçta $n-1$ sayıda bağ olacağından, $E(G)$ kümesinden $q-(n-1)=q-n+1$ sayıda bağın silinmesi ile elde edilecektir. Ancak bağ silme işlemi, ağaçların özelliklerinden dolayı, altgraf bağlantılı olacak ve devir içermeyecek şekilde yapılmalıdır.



Şekil 65: Geren ağaç için graf örneği

Şekil 65’de verilen grafın olası bütün geren ağaçları, verilen kurallar dâhilinde Şekil 66’daki gibi elde edilebilir.



Şekil 66: Şekil 65’de verilen grafın bütün geren ağaçları

Bir G grafının herhangi bir T geren ağacında, bir v düğümü için,

$$\text{der}_G(v) - \text{der}_T(v) = k$$

eşitliğini sağlayan k tamsayısına v düğümünün *eksikliği*, v düğümüne ise *k-eksik düğüm* adı verilir. Eğer $k=0$ ise v düğümüne *derece-koruyan düğüm* adı verilir. Bu durumda $\text{der}_G(v) = \text{der}_T(v)$ olacaktır.

Teorem 14: G , mertebesi n , büyüklüğü q olan bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda, G ’nin herhangi bir geren ağacındaki düğümlerin eksiklerinin toplamı $2(q-n+1)$ olacaktır.

Ağırlıklı graflarda geren ağaçlar, çok sayıda alana uygulanabilen bazı problemlerin odağında yer alırlar. Bu problemlerin en önemlilerinden birisi de, minimum geren ağacın bulunmasıdır. Diğer bir deyişle bu problem, G grafının geren ağaçları içersinden, toplam ağırlık değeri en küçük olan ağacın bulunması olarak

ifade edilebilir. Algoritma 2, Kruskal (1956) tarafından geliştirilmiştir ve ağırlıklı bir grafın minimum geren ağacını hesaplamaktadır.

Algoritma 2: Mertebesi n olan bağlantılı bir G grafının minimum geren ağacının bulunması (Kruskal, 1956).

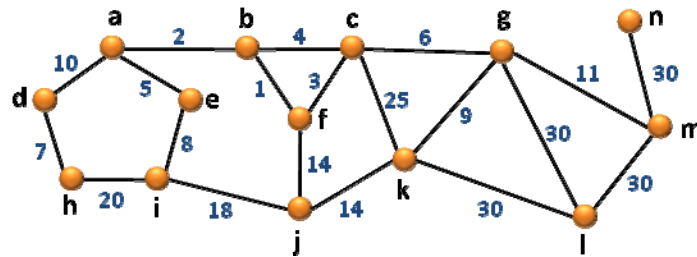
Girdi : G : Bağlantılı ağırlıklı graf, $|G|=n$.

Adım-1 : $S=\emptyset$, $L:E(G)$ 'de yer alan bağların ağırlık değerlerine göre küçükten büyüğe doğru birincil sıralı, alfabetik olarak ikincil sıralı listesi.

Adım-2 : e , L listesinde yer alan bağlardan, $e \notin S$ ve $\langle S \cup \{e \rangle$ bağ-indirgenmiş altgrafi devirli olmayacak şekilde seçilen, sıradaki bağ olsun. $S=S \cup \{e\}$ alalım.

Adım-3 : $|S|=n-1$ ise dur; sonuç S kümesidir. Aksi halde 2. Adıma git.

Kruskal algoritmasını, günlük hayattan alınmış bir örnek üzerinde çalıştıralım. Şekil 67'de verilen ağırlıklı graf, belirli bir bölgede yer alan yerleşim merkezleri ile bunlar arasındaki mesafeleri gösteren yerleşim planını gösterebilir.



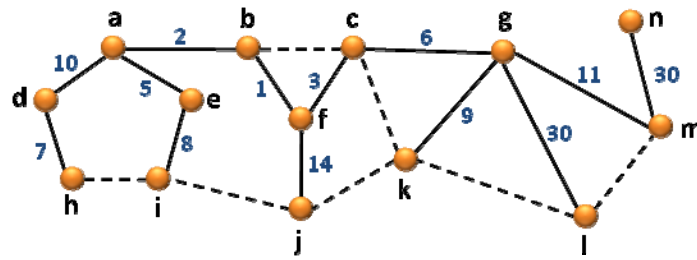
Şekil 67: Bir yerleşim planını gösteren ağırlıklı graf

Problem, bu planda yer alan düğümlerin gösterdiği yerleşim merkezlerinin hepsini birbirine bağlayacak, ancak maliyetin minimum olması açısından en kısa yolların seçilmesi ile oluşturulacak yol haritasının elde edilmesidir. Bu da, planın

tamamına karşılık gelen ağırlıklı grafın minimum geren ağacının hesaplanması problemine karşılık gelecektir.

$L=[bf(1), ab(2), cf(3), \underline{bc(4)}, ae(5), cg(6), dh(7), ei(8), gk(9), ad(10), gm(11), fj(14), \underline{jk(14)}, \underline{ij(18)}, \underline{hi(20)}, \underline{ck(25)}, gl(30), \underline{kl(30)}, \underline{lm(30)}, mn(30)]$

L listesinde altı çizili olan bağlar, devir oluşturdıklarından algoritmanın ikinci adımında S kümesine dâhil olmayan bağlardır. Buna göre, algoritma 3. adımda sonlandığında S kümesi, yani verilen ağırlıklı grafın minimum geren ağacı, Şekil 68'deki gibi olacaktır. Diyagramda, elenen bağlar kesikli çizgilerle gösterilmiştir.



Şekil 68: Şekil 67’de verilen ağırlıklı grafın hesaplanan minimum geren ağacı

Probleme dönülecek olursa, elde edilen minimum geren ağaç, ağırlıklı grafta yerleşim merkezleri arasında en düşük maliyetle gerçekleştirilecek yol planına karşılık gelecektir.

Ağırlıklı yönlü graflarda bir diğer önemli problem, iki düğüm arasındaki en kısa yolun hesaplanmasıdır. Bu yol, düğümler arasındaki, toplam ağırlık değeri en küçük olan, dolayısıyla da birçok uygulama için en fazla tercih edilebilir olan yola

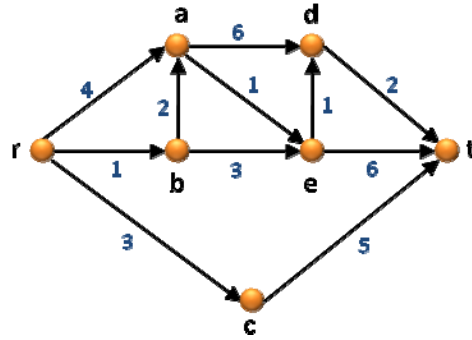
karşılık gelecektir. Bu problemin çözümü için birçok algoritma geliştirilmiştir, ancak bunların ilki, 1959 yılında Dijkstra tarafından verilmiştir.

Dijkstra algoritması, hem ağırlıklı graflara, hem de ağırlıklı yönlü graflara uygulanabilmektedir. Algoritmanın amacı, t ile gösterilen bir hedef düğümün, r ile gösterilen bir kök düğüme olan uzaklıkları arasında, en kısa olanını hesaplamaktır. $d(v)$, v düğümünün r düğüme uzaklığını, $N(v)$ ise v düğümünün komşu düğümlerinin listesini göstermektedir.

Algoritma 3: Bir W ağırlıklı yönlü grafında r kök düğümü ile t hedef düğümü arasındaki en kısa yolun hesaplanması (Dijkstra, 1959). Algoritmada yer alan $d(v)$, v düğümünün kök düğüme uzaklığını; $N(v)$ ise v düğüme komşu olan düğümlerin kümesini göstermektedir.

Girdi :	W : Ağırlıklı yönlü graf; r : kök düğümü; t : hedef düğümü.
Adım-1 :	$d(r)=0$, $v \neq r$ için $d(v)=\infty$ olarak belirlenir.
Adım-2 :	$T=V(W)$, $u=r$.
Adım-3 :	$u \neq t$ olduğu sürece yap: Her $v \in N(u)$ için yap: Eğer $v \in T$ ve $d(v) > d(u) + w(uv)$ ise $d(v) = d(u) + w(uv)$ $T = T - \{u\}$ u, T kümesinde $d(u)$ 'nin minimum olduğu düğüm olsun.
Adım-4 :	Dur. Sonuç $d(t)$ 'dir.

Örnek olarak, Şekil 69'da verilen ağırlıklı yönlü grafa, r ve t düğümleri arasındaki en kısa yolu Dijkstra algoritmasını kullanarak hesaplayalım.



Şekil 69: Dijkstra algoritması için örnek bir ağırlıklı yönlü graf

$T = \{a, b, c, d, e, r, t\}$, $u = r$ ve $N(r) = \{a, b, c\}$ olur. İlk olarak bu düğümlerin hepsinin r düğümünden uzaklıkları ∞ olarak tanımlandığından, algoritmanın 3. adımı uzaklıkları $d(a)=4$, $d(b)=1$ ve $d(c)=3$ biçiminde yeniden tanımlar ve r , T kümesinden silinir. $d(b)=1$, T 'deki en küçük uzaklık olduğundan, $u=b$ olur ve $b \neq t$ olduğundan 3. adım tekrarlanır.

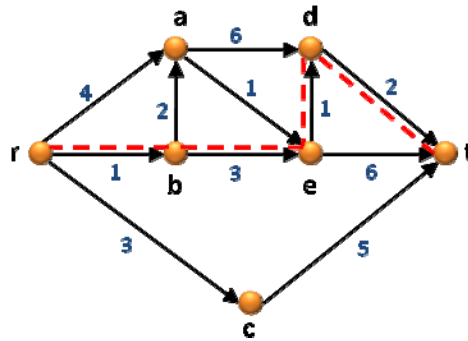
b düğümünü merkez kabul edersek, uzaklıkları araştırılacak düğümler $N(b) = \{a, e\}$ olacaktır. $d(a)=4 > 1+2=3$ olduğundan, $d(a)=3$ olur. Benzer şekilde $d(e)=\infty > 1+3$ olduğundan, $d(e)=4$ olarak yeniden değer alır. b , T kümesinden silinir. T 'deki düğümlerden en küçük uzaklık değerine sahip olanlar a ve c düğümleridir. a düğümü aynı zamanda $N(b)$ 'de yer aldığından, $u=a$ olur.

$N(a) = \{d, e\}$, $d(d)=\infty > 3+6=9$ ve $d(e)=4=3+1=4$ olduğundan, $d(d)=9$ olarak hesaplanır. Ancak $d(e)$ değeri bu adımda yeniden değer almaz, eski değerini korur. a , T kümesinden silinir. $d(c)=3$, T 'deki en küçük uzaklıktır. Dolayısıyla bir sonraki adımda $u=c$ olacaktır.

$N(c)=\{t\}$ olduğundan, sadece $d(t)$ değerine bakılacaktır. $d(t)=\infty > 3+5=8$ olduğundan, $d(t)=8$ olarak hesaplanır ve c , T kümesinden silinir. T kümesinde geriye kalan d, e ve t düğümlerinden en küçük uzaklığı sahip olanı, e düğümüdür ($d(e)=4$). Dolayısıyla $u=e$ alınır. $N(e)=\{d, t\}$ için, $d(d)=9 > 4+1=5$ olduğundan $d(d)=5$ olarak değer alacaktır. Ancak $d(t)=8 < 4+6=10$ olduğundan, t düğümünün uzaklığı bu adımda hesaplanmaz. e düğümü de T kümesinden silinir ve $u=d$ alınır.

T kümesinde geriye kalan tek düğüm t olduğundan ve $d(t)=8 > 5+2=7$ olduğundan, $d(t)=7$ değerini alacaktır. $u=t$ olduğundan döngü ve algoritma sonlanır, r ve t düğümleri arasındaki en kısa uzaklık 7 birimdir.

Dijkstra algoritması, iki düğüm arasındaki en kısa yolun uzaklığını hesaplar, ancak bu yolu belirlemez. Örnekte, r ve t düğümleri arasındaki, uzaklığı 7 birim olarak hesaplanan en kısa yol, Şekil 70’de verilmiştir.



Şekil 70: Şekil 69’da verilen grafa, r ve t düğümleri arasındaki en kısa yol

BÖLÜM 3

HİPERORTAM VE GEZİNMENİN MODELLENMESİ

Hiperortam ve hiperortamda gezinmenin graf teorisinde modellenmesi, birbirlerine çok benzer de olsalar, ayrı ayrı ele alınmaları gereken konulardır. Graflar hiperortamın, genel anlamda ise web'in modellenmesi için son derece uygun bir yapı oluştururlar. Dolayısıyla, bilgisayar ağları ve web üzerinde yapılan çeşitli araştırmalarda kullanılan başlıca araçlar olmuşlardır.

3.1. Hiperortamın Modellenmesi

Bir hiperortam, evreni internet olan bir örneklem olarak düşünülebilir. Bu durumda sonlu mertebeli bir yönlü graf, basit bir hiperortamın modellenmesi için yeterli olacaktır. Aşağıda, hiperortam modelinin tanımı verilmiştir. Graf tanımı ile oldukça benzerlik gösteren bu tanım, daha sonra tanımlanacak olan ölçü ve metrikler için de yeterli bir taban oluşturacaktır.

Graflarda, grafin tanımlanması ile başlayan bütün kavramların tanımlanmasında ve teoremlerde, graf teorisinin kendine özgü dilinin kullanılması, doğal olarak bir zorunluluk olmuştur. Ancak hiperortamlarda, benzer kavramlar için isimlendirme yapılırken internetin mevcut kavramları uygun oldukları ölçüde kullanılmışlardır. Örneğin, graflarda yer alan ve bağlara özgü bir kavram olan “döngü” yerine, bunun internet jargonundaki karşılığı olan “çapa” (anchor) terimi tercih edilmiştir.

Tanım 8: Bir H hiperortamı, $S[H]$ ve $B[H]$ kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanmak üzere, $H=(S[H],B[H])$ biçiminde gösterilir.

- i. $S[H] = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ kümesi hiperortamın *sayfalar kümesini* oluşturur. Bu kümede s_1 sayfası, anasayfayı gösterir.
- ii. $1 \leq i, j \leq m$ için $s_i, s_j \in S[H]$ ve $1 \leq k \leq n$ için $b_k = (s_i, s_j)$ ikilileri değişmeli olmasın. Yani $b_k = (s_i, s_j) \neq (s_j, s_i) = b_t$ ($1 \leq t \leq n$) olduğunu varsayalım. Bu durumda $B[H] = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ kümesi hiperortamın *bağlantılar kümesini* oluşturur. Burada, $b_k = (s_i, s_j)$ bağlantısı için s_i ve s_j sayfalarına b_k bağlantısının *uçları* adı verilir.
- iii. $S[H]$ ve $B[H]$ kümelerinin eleman sayıları olan m ve n tamsayıları sırasıyla hiperortamın sayfa sayısı ve bağlantı sayısıdır ve $s(S[H]) = |H| = m$ ve $s(B[H]) = ||H|| = n$ şeklinde gösterilirler.

Graf tanımından farklı olarak hiperortamın tanımında, sayfalar arasındaki bağlantıları gösteren bağlantılar kümesi değişmeli olmayan sayfa ikililerinden oluşur. Dolayısıyla hiperortam tanımında, graflardaki etki dönüşümünün kullanılmasına gerek kalmamaktadır. Bunun yerine değişmeli olmayan sayfa ikilileri, bağlantıların yönlerinin belirlenmesini sağlamaktadır. Örneğin bağlantılar kümesinde yer alan (s_3, s_4) ikilisi, s_3 sayfasından s_4 sayfasına doğru tek yönlü bir bağlantıyı göstermektedir. Buna karşılık, eğer kümede (s_4, s_3) ikilisi bulunmuyorsa bunun anlamı, s_4 sayfasından s_3 sayfasına herhangi bir bağlantının bulunmadığıdır.

Graflarda düğümler özdeştir. Diğer bir deyişle her düğümün, diğer düğümlerle aynı özelliklere sahip olduğu varsayılır. Ancak hiperortamda bu durum her zaman geçerli olmayabilir. Sayfaların birbirlerinden farklı özelliklerinin, hiperortamın tanımında vurgulanmaları gerekebilir. Sayfalar bir sayı ile değerlendirildikleri ve ileride bahsedilecek olan sayfa ağırlığı gibi nicel özelliklerin yanı sıra, çoğunlukla bazı nitel özelliklere de sahip olurlar. Bunlardan en önemlileri, sayfanın anasayfa olup olmadığı ve o sayfadan internet evrenine bir bağlantı bulunup bulunmadığıdır. İlk özellik, bir hiperortamda ana sayfanın her zaman s_1 adı ile etiketlenmesi ile çözülmüştür. Diğer nitel özellik, bir sayfada yer alan ve internet ortamındaki herhangi başka bir hiperortama olan bağlantının belirtilmesidir. Bu özellik, hiperortamın dış dünyaya kapalı olup olmadığını belirleyen önemli bir

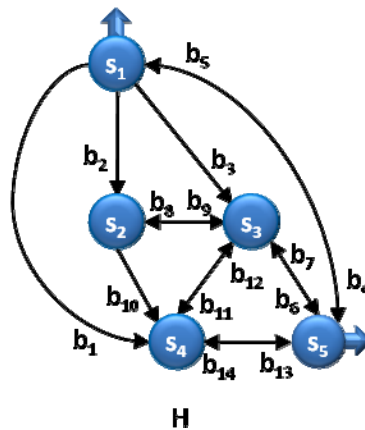
özelliktir. Bu özelliğe sahip olan sayfalar, hiperortamın tanımında belirtilirler ve diyagramda dışarıya doğru bir ok simgesi ile işaretlenirler (Şekil 71).

Uygulamanın niteliğine göre video içerme, çevrimiçi test sayfası olma ya da form gönderme sayfası olma gibi sayfaların sahip olabilecekleri farklı özellikler, hiperortamın diyagramında farklı şekil ve/veya renklerde gösterilebilirler. Bu durumda, grafiklerde olduğu gibi diyagramla birlikte verilecek bir gösterge şeması yeterince açıklayıcı olacaktır.

Örnek 9: Şekil 71’de diyagramı verilen H hiperortamını göz önüne alalım. Bu hiperortamı, s_1 anasayfa ve $b_1=(s_1,s_4)$, $b_2=(s_1,s_2)$, $b_3=(s_1,s_3)$, $b_4=(s_1,s_5)$, $b_5=(s_5,s_1)$, $b_6=(s_3,s_5)$, $b_7=(s_5,s_3)$, $b_8=(s_3,s_2)$, $b_9=(s_2,s_3)$, $b_{10}=(s_2,s_4)$, $b_{11}=(s_3,s_4)$, $b_{12}=(s_4,s_3)$, $b_{13}=(s_4,s_5)$, $b_{14}=(s_5,s_4)$ olmak üzere,

$$S[H]=\{s_1,s_2,s_3,s_4,s_5\} \text{ ve } B[H]=\{b_2,b_3,b_4,b_5,b_6,b_7,b_8,b_9,b_{10},b_{11},b_{12},b_{13},b_{14}\}$$

kümeleri kullanılarak $H=(S[H],B[H])$ şeklinde gösterilebilir. Burada s_1 ve s_5 sayfaları internet çıkışına sahiptirler. Ayrıca bu hiperortamın sayfa sayısı ve bağlantı sayısı sırasıyla $|H|=5$ ve $||H||=14$ olacaktır.



Şekil 71: H hiperortamının diyagramı

Bir hiperortamda, sayfalara ya da bağlantılara birer değer atanmasının gerektiği durumla olabilir. Örneğin uyarlanabilir hiperortamlarda sıklıkla kullanılan Bayes ağlarında, ağda yer alan her bir bağlantının hesaplanan bir koşullu olasılık değeri bulunmaktadır. Benzer şekilde, web üzerinde çalışan arama motorlarında karşılaştığımız “sayfa popülaritesi” kavramı da, sayfalara atanan bir tür değer olarak düşünülebilir. Bu gibi durumlara karşılık, graflarda yer alan “ağırlıklı graf” kavramından yola çıkılarak, sayfa-ağırlıklı, bağlantı-ağırlıklı ya da her ikisinin birden bulunduğu *ağırlıklı hiperortam* tanımı aşağıdaki gibi yapılabilir.

Tanım 10: $|H|=m$ ve $\|H\|=n$ olmak üzere, $H=(S[H],B[H])$ hiperortamını göz önüne alalım.

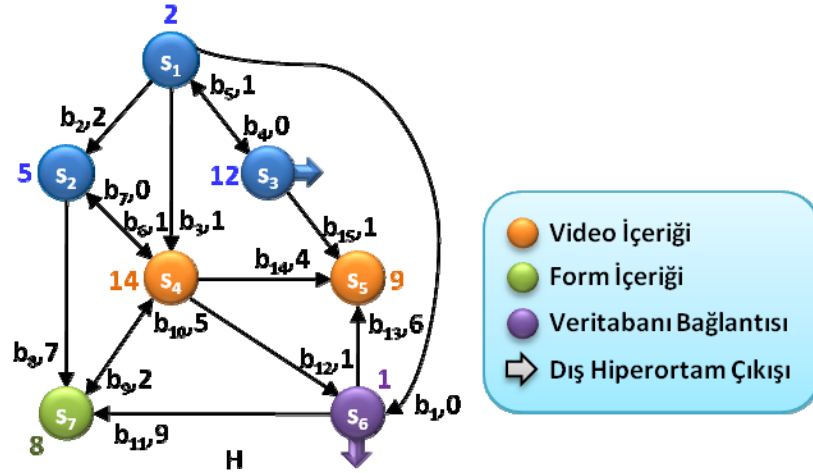
- i. $1 \leq i \leq m$ için her bir s_i sayfasına karşılık bir d_i ağırlık değerinin atandığı $Sa[H]=\{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ *sayfa ağırlıkları kümesi* ile $H=(S[H], B[H], Sa[H])$ hiperortamına *sayfa-ağırlıklı hiperortam* adı verilir.
- ii. $1 \leq j \leq n$ için her bir b_j bağlantısına karşılık bir a_j ağırlık değerinin atandığı $Ba[H]=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ *bağlantı ağırlıkları kümesi* ile $H=(S[H], B[H], Ba[H])$ hiperortamına *bağlantı-ağırlıklı hiperortam* adı verilir.
- iii. $1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq n$ için her bir s_i sayfasına ve b_j bağlantısına karşılık sırasıyla bir d_i ve bir a_j ağırlık değerinin atandığı $Sa[H]=\{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ *sayfa ağırlıkları kümesi* ve $Ba[H]=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ *bağlantı ağırlıkları kümesi* ile $H=(S[H], B[H], Sa[H], Ba[H])$ hiperortamına *sayfa&bağlantı-ağırlıklı hiperortam* adı verilir.

Örnek 10: Şekil 72’de verilen $H=(S[H], B[H], Sa[H], Ba[H])$ hiperortamı, açık bir sayfa&bağlantı-ağırlıklı hiperortamdır. Diyagramla birlikte verilen gösterge şeması, sayfaların farklı nitel özelliklerini göstermektedir. Bu hiperortamı oluşturan kümeleri, $b_1=(s_1, s_6)$, $b_2=(s_1, s_2)$, $b_3=(s_1, s_4)$, $b_4=(s_1, s_3)$, $b_5=(s_3, s_1)$, $b_6=(s_2, s_4)$, $b_7=(s_4, s_2)$, $b_8=(s_2, s_7)$, $b_9=(s_4, s_7)$, $b_{10}=(s_7, s_4)$, $b_{11}=(s_6, s_7)$, $b_{12}=(s_4, s_6)$, $b_{13}=(s_6, s_5)$, $b_{14}=(s_4, s_5)$, $b_{15}=(s_3, s_5)$ olmak üzere,

$$S[H]=\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7\}, B[H]=\{b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9, b_{10}, b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{14}, b_{15}\},$$

$$Sa[H]=\{2,5,12,14,9,1,8\}, Ba[H]=\{0,2,1,0,1,1,0,7,2,5,9,1,6,4,1\}$$

biçiminde yazılabilir.



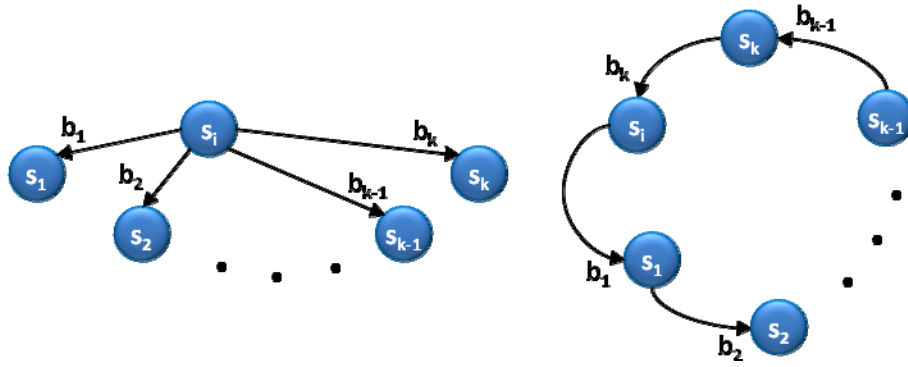
Şekil 72: Sayfa&Bağlantı-Ağırlıklı örnek bir H hiperortamının diyagramı

3.1.1. Hiperortamlarla İlgili Temel Kavramlar

Bir $H=(S[H],B[H])$ hiperortamının bütün sayfaları arasında bağlantı varsa bu hiperortama *tam hiperortam* denir. Böyle bir hiperortamda, $|H|=m$ olmak üzere $m(m-1)$ tane bağlantı bulunacaktır. Diğer bir deyişle sayfa sayısı m olan bir tam hiperortam, m tane sayfa ile oluşturulabilecek en kapsamlı hiperortam olacaktır.

Eğer $S[H]$ kümesi bir dış hiperortam bağlantısına sahip olan hiçbir sayfa içermiyorsa *kapalı hiperortam*, aksi halde *açık hiperortam* adını alır. H hiperortamında, uçları aynı sayfa olan bağlantılara *çapa* (anchor) adı verilir. Aynı sayfa ikilisi arasında yer alan birden çok sayıdaki bağlantılara ise *paralel bağlantılar* denir. Hiçbir çapa ya da paralel bağlantı içermeyen kapalı hiperortamlara *basit hiperortam* adı verilir.

$s_i, s_1, s_2, \dots, s_{k-1}, s_k \in S[H]$ olmak üzere ($i, k \leq |H|$), bu sayfalardan ve $b_1=(s_i, s_1)$, $b_2=(s_i, s_2), \dots, b_{k-1}=(s_i, s_{k-1}), b_k=(s_i, s_k)$ bağlantı dizisinden oluşan yapıya H hiperortamında bir *dallanma* adı verilir. Benzer şekilde, $s_i, s_1, s_2, \dots, s_{k-1}, s_k$ sayfalarından ve $b_1=(s_i, s_1), b_2=(s_1, s_2), \dots, b_{k-1}=(s_{k-1}, s_k), b_k=(s_k, s_i)$ bağlantı dizisinden oluşan yapıya ise H hiperortamında bir *devir* adı verilir. (Şekil 73).



Şekil 73: Hiperortamlarda ‘Dallanma’ ve ‘Devir’ yapıları

En az bir dallanma içeren hiperortama *dallanmalı hiperortam*, hiçbir dallanma içermeyen hiperortama ise *doğrusal hiperortam* adı verilir. Eğer hiperortamın kendisi bir bütün olarak devir yapısında ise bu hiperortama *devirli hiperortam* denir.

H ve J iki hiperortam olsun. $S(J) \subseteq S(H)$ ve $B(J) \subseteq B(H)$ ise J hiperortamına H hiperortamının *alt hiperortamı* adı verilir ve bu durum $J \subseteq H$ şeklinde gösterilir. Eğer $J \subseteq H$ ve $S[J] = S[H]$ ise J 'ye H 'yi *geren alt hiperortam* adı verilir. Eğer $J \subseteq H$ ve J bir tam hiperortam ise J 'ye H hiperortamında bir *tam sayfa grubu* adı verilir.

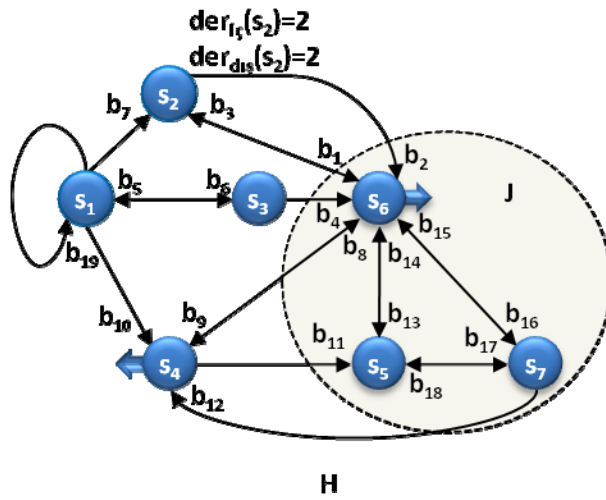
Herhangi bir $s \in S[H]$ sayfası için, s sayfasına bağlantısı olan sayfaların sayısına s 'nin *iç derecesi* denir ve $der_{iç}(s)$ ile gösterilir. Benzer şekilde, s sayfasından diğer sayfalara olan bağlantı sayısına ise s 'nin *dış derecesi* denir ve $der_{dış}(s)$ ile

gösterilir. s sayfasının iç ve dış derecelerinin toplamına s sayfasının *derecesi* denir ve $der(s)$ ile gösterilir. Diğer bir deyişle,

$$der(s) = der_{iç}(s) + der_{dış}(s)$$

olur.

İki sayfa arasındaki uzaklığı sayfalar arasındaki bağlantı sayısı olarak tanımlarsak, bir s sayfasının *dış sayfa uzaklığı* olan $dsu(s)$, s sayfasından en uzaktaki sayfanın, s 'den uzaklığı olarak tanımlanır. Bir hiperortamdaki en küçük dış sayfa uzaklığı hiperortamın yarıçapı, en büyük dış sayfa uzaklığı ise hiperortamın çapı olarak adlandırılır. H hiperortamının yarıçapı ve çapı sırasıyla $r(H)$ ve $R(H)$ ile gösterilir.

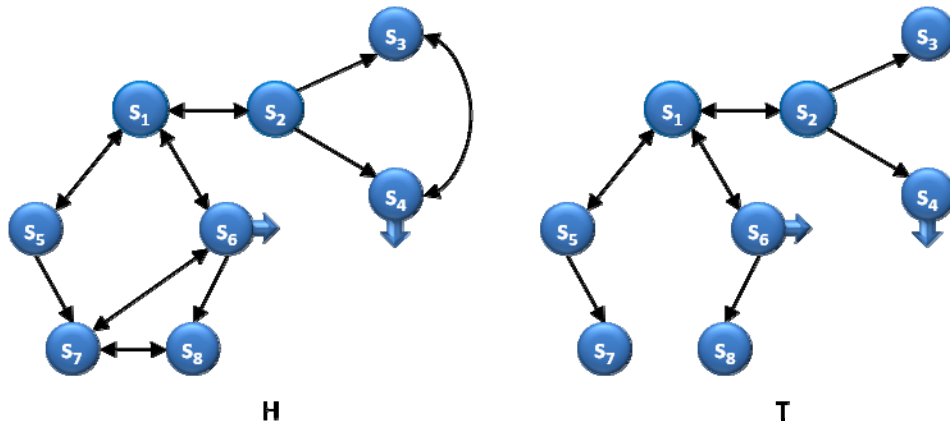


Şekil 74: $J \subseteq H$ “tam sayfa grubu”, b_1 ve b_2 “paralel bağlantılar” ve b_{19} “çapa”dır

Geren alt hiperortam ile geren altgraflar ve ağaçlar arasındaki ilişkiye paralel bir ilişki de hiperortamlar için kurulabilir. Graflarda ağaç tanımında yer alan

“bağlantılılık” kavramı, hiperortamlar için çok uygun bir tanımlama olmayacaktır. Bir hiperortamda, bağımsız bir sayfanın bulunması, hiperortamın bütünlüğü açısından anlamlı değildir. Diğer bir deyişle hiçbir hiperortam, bağlantısız bir sayfa içermeyecektir. Dolayısıyla graflardaki ağaç tanımı hiperortamlarda, “hiçbir devir ve çapa içermeyen hiperortamlara *ağaç-türünde hiperortam* denir” biçimine indirgenecektir.

Bir hiperortamın geren alt hiperortamı ağaç türünde ise, bu hiperortamı geren ağaç denir. Geren ağaçlar, hiperortamlar için önemli bir değerlendirme ya da inşa etme aracı olabilirler. Sonuç olarak bir hiperortamın geren ağacı, o hiperortam için minimum sayıda bağlantı içeren modeli olacaktır. Bağlantı-ağırlıklı hiperortamlarda ise minimum geren ağaç algoritmaları, aynen graflarda olduğu biçimleriyle çalıştırılabilirler. Bir hiperortamın böyle bir algorithmadan elde edilen geren ağacı ise, söz konusu hiperortamın yapısında olan, ancak en az toplam ağırlık değerine sahip olan hiperortamı verecektir.



Şekil 75: Bir H hiperortamı ve onun bir geren ağacı olan T hiperortamı

3.2. Gezinmenin Modellenmesi

Hiperortamda gezinme, bir kullanıcının sayfalar arasındaki bağlantıları izleyerek gerçekleştirdiği hareketliliğe verilen isimdir. Diğer bir deyişle gezinme, bir sayfadan diğer bir sayfaya, bu sayfaların aralarında yer alan bağlantı kullanılarak gerçekleştirilen yer değiştirmelerin bir dizisidir. Parunak’a (1989) göre ise gezinme, bir kişinin nerede olduğunu, nereye gitmek istediğini ve oraya nasıl gideceğini bilmesi demektir. Gezinme kavramının modellenmesinde dikkat edilmesi gereken nokta, gezinme bilgisinin özel olarak hazırlanmış bir hiperortamda gerçekleştirilen izleme verileri kullanılarak oluşturulması gerekliliğidir. Herhangi bir kullanıcının internetin bütünü üzerindeki gezinmesi, gezinme bilgisi ortamın bütünü ile beraber ele alındığında anlamlı olduğundan, yapılacak deneysel bir araştırma için çok da kullanışlı bir bilgi kaynağı olmayacaktır. Çünkü internetin bütünü, yoğunluk, doğrusallık gibi kavramlar için değil, pek de güvenilir olmayan “ağa bağlı toplam bilgisayar sayısı” gibi nicelikler için ölçülebilir bir yapıdadır.

Gezinmede göz önünde bulundurulması gereken diğer bir önemli nokta, gezinmenin gerçekleştirildiği hiperortamda yer alan, tasarımcı tarafından geliştirilmiş özel araçlar olan “gezinti yardımcıları”nın yanı sıra, kullanıcının, internet tarayıcı yazılımının sunduğu, gezinmeyi kolaylaştıran olanaklardan da yararlanabilip yararlanamayacağının belirlenmesidir. Ham veri anlamında, kullanıcı tarafından gerçekleştirilen bütün davranışlar, gerçekleştirilme şekli nasıl olursa olsun gezinmeyi modelleyecek birer bilgi kaynağı olarak değerlendirilmelidir. Dolayısıyla bu gibi kısıtlamalar, doğrudan tasarımcı/eğitimci tarafından önceden belirlenecek esaslara dayalı olarak gerçekleştirilebilir. Örneğin, bütün internet tarayıcı yazılımlarında bulunan ileri ve geri düğmeleri, sayfalar arasında doğrusal olarak gezinmeyi kolaylaştıran araçlardır. Ancak doğrusalın yanı sıra dallanmalı olarak gezinmeye olanak tanıyan bir tasarımda, gezinmede tarayıcı yazılımının ileri ve geri düğmelerinin kullanılması gezinme kontrolünün uygulamacının elinden çıkmasına

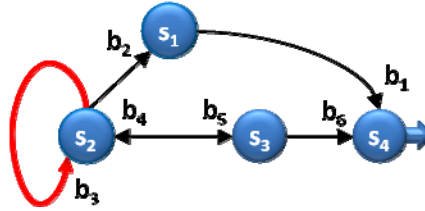
yol açabilir. Bu gibi durumlarda, tarayıcı yazılımının bu olanaklarının iptal edilmesi uygun olacaktır.

Gezinme, genel anlamda sayfa&bağlantı-ağırlıklı bir hiperortam modeli olarak düşünülebilir. Gezinmenin değerlendirilmesi genellikle, bağlantılı olduğu hiperortamla birlikte yapılmaktadır. Yani gezinmenin kendisi kadar, ne üzerinde gezinildiği de aynı ölçüde anlamlı olmaktadır. Bu durumda gezinme modelinin tanımının, bir hiperortam üzerinde yapılması uygun olacaktır.

Tanım 11: Herhangi bir H hiperortamını göz önüne alalım. $s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_m} \in S[H]$; $b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_{m-1}} \in B[H]$ ve b_{j_m} bağlantısı s_{i_m} ve $s_{i_{m+1}}$ sayfaları arasındaki bağlantı olmak üzere,

- i. $G = \{(s_{i_1}, b_{j_1}, s_{i_2}), (s_{i_2}, b_{j_2}, s_{i_3}), \dots, (s_{i_{n-2}}, b_{j_{n-2}}, s_{i_{n-1}}), (s_{i_{n-1}}, b_{j_{n-1}}, s_{i_n})\}$ şeklinde tanımlanan G kümesine H hiperortamı üzerinde bir *gezinme* adı verilir. $s_{i_m} = s_{i_{m+1}}$ olması durumunda, aynı sayfa içerisinde gerçekleştirilen bu gezinme adımına bir *çapa gezinmesi* adı verilir. Bu durumda s_{i_m} ve $s_{i_{m+1}}$ sayfaları arasında bulunan bağlantı da bir çapa olacaktır (Şekil 76).
- ii. d_{i_m} sayısı s_{i_m} sayfasının ağırlık değerini göstermek üzere, $G_S = \{(s_{i_1}, d_{i_1}, b_{j_1}, s_{i_2}), (s_{i_2}, d_{i_2}, b_{j_2}, s_{i_3}), \dots, (s_{i_{n-2}}, d_{i_{n-2}}, b_{j_{n-2}}, s_{i_{n-1}}), (s_{i_{n-1}}, d_{i_{n-1}}, b_{j_{n-1}}, s_{i_n})\}$ şeklinde tanımlanan G_S dizisine H hiperortamı üzerinde bir *sayfa-ağırlıklı gezinme* adı verilir.
- iii. a_{j_m} sayısı b_{j_m} sayfasının ağırlık değerini göstermek üzere, $G_B = \{(s_{i_1}, b_{j_1}, a_{j_1}, s_{i_2}), (s_{i_2}, b_{j_2}, a_{j_2}, s_{i_3}), \dots, (s_{i_{n-2}}, b_{j_{n-2}}, a_{j_{n-2}}, s_{i_{n-1}}), (s_{i_{n-1}}, b_{j_{n-1}}, a_{j_{n-1}}, s_{i_n})\}$ şeklinde tanımlanan G_B dizisine H hiperortamı üzerinde bir *bağlantı-ağırlıklı gezinme* adı verilir.
- iv. d_{i_m} sayısı s_{i_m} sayfasının ağırlık değerini ve a_{j_m} sayısı b_{j_m} sayfasının ağırlık değerini göstermek üzere, $G_{SB} = \{(s_{i_1}, d_{i_1}, b_{j_1}, a_{j_1}, s_{i_2}), (s_{i_2}, d_{i_2}, b_{j_2}, a_{j_2}, s_{i_3}), \dots,$

$(s_{i_{n-2}}, d_{i_{n-2}}, b_{i_{n-2}}, a_{i_{n-2}}, s_{i_{n-1}}), (s_{i_{n-1}}, d_{i_{n-1}}, b_{i_{n-1}}, a_{i_{n-1}}, s_{i_n})\}$ şeklinde tanımlanan G_{SB} dizisine H hiperortamı üzerinde bir *sayfa&bağlantı-ağırlıklı gezinme* adı verilir.



Şekil 76: b_3 bağlantısı bir çapa, (s_2, b_3, s_2) gezinme adımı ise bir çapa gezinmesidir

Gezinme modelinin tanımında dikkat edilmesi gereken nokta, gezinmenin ağırlık değerlerinin, eğer varsa hiperortamın sayfa ve bağlantı ağırlıklarından bağımsız olabilecekleridir. Diğer bir deyişle, bir gezinmenin sayfa ve/veya bağlantı ağırlıkları, üzerinde tanımlandığı hiperortamın sayfa ve/veya bağlantı ağırlıkları ile ilişkili olabileceği gibi, bunlardan tümüyle bağımsız olarak da düşünülebilir. Ağırlık değerlerinin gezinmenin tanımında yer almalarının gerekliliği de buradan doğmaktadır.

Örnek 11: Bir H hiperortamı ve bu ortamda aşağıdaki şekilde tanımlanan G gezinmesi, Şekil 77’de gösterilmiştir.

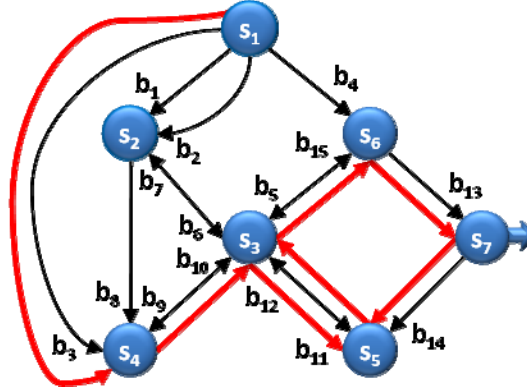
$$G = \{(s_1, b_3, s_4), (s_4, b_{10}, s_3), (s_3, b_{11}, s_5), (s_5, b_{12}, s_3), (s_3, b_{15}, s_6), (s_6, b_{13}, s_7), (s_7, b_{14}, s_5)\}$$

Benzer şekilde aynı hiperortam üzerinde, sırasıyla sayfa-ağırlıklı, bağlantı ağırlıklı ve sayfa&bağlantı-ağırlıklı gezinmeleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$G_S = \{(s_1, 2, b_3, s_4), (s_4, 2, b_{10}, s_3), (s_3, 1, b_{11}, s_5), (s_5, 14, b_{12}, s_3), (s_3, 0, b_{15}, s_6), (s_6, 7, b_{13}, s_7), (s_7, 9, b_{14}, s_5)\};$$

$$G_B = \{(s_1, b_3, 1, s_4), (s_4, b_{10}, 5, s_3), (s_3, b_{11}, 12, s_5), (s_5, b_{12}, 11, s_3), (s_3, b_{15}, 1, s_6), (s_6, b_{13}, 7, s_7), (s_7, b_{14}, 9, s_5)\};$$

$$G_{SB} = \{(s_1, 3, b_3, 1, s_4), (s_4, 2, b_{10}, 5, s_3), (s_3, 1, b_{11}, 12, s_5), (s_5, 3, b_{12}, 11, s_3), (s_3, 10, b_{15}, 1, s_6), (s_6, 7, b_{13}, 12, s_7), (s_7, 8, b_{14}, 0, s_5)\}.$$



Şekil 77: Bir gezinme örneği

3.2.1. Gezinmeyle İlgili Temel Kavramlar

H hiperortamı üzerinde geręekleřtirilen bir $G = \{(s_{i_1}, \dots, s_{i_2}), (s_{i_2}, \dots, s_{i_3}), \dots, (s_{i_{n-2}}, \dots, s_{i_{n-1}}), (s_{i_{n-1}}, \dots, s_{i_n})\}$ gezinmesini göz önüne alalım. G kümesinin eleman sayısına G gezinmesinin uzunluğu denir ve $|G|$ ile gösterilir. Örneğin şekil 77’de verilen gezinmenin uzunluğu $|G|=7$ olarak hesaplanır.

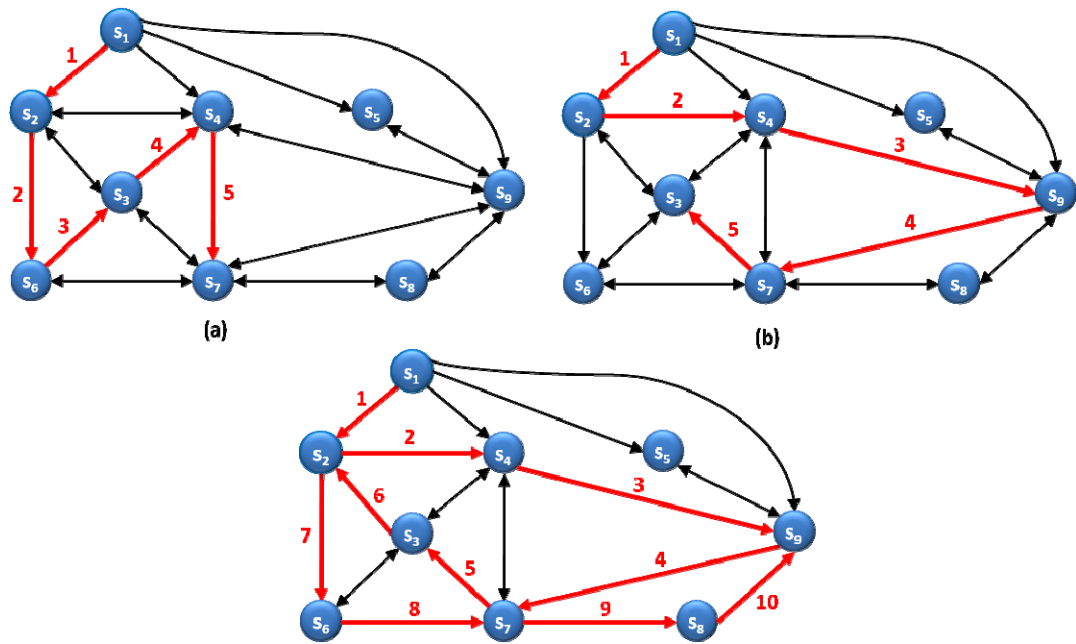
$J \subseteq G$ altkümesine, G gezinmesinin bir *alt gezinmesi* adı verilir.

3.2.2. Gezinmenin Sınıflandırılması

Hiperortamda gezinme kavramı, geręekleřtirilen araştırmaların niteliğine uygun olarak çeşitli şekillerde sınıflandırılmıştır. Gezinme stratejileri olarak da adlandırılan bu sınıflandırmaların başında, daha çok yapay zekâ alanında bilgi arama

yöntemi olarak kullanılan algoritmalarından esinlenilerek yapılan ve dört kısımdan oluşan sınıflandırma gelir. Bu sınıflandırmaya göre hiperortamda gezinen bir kullanıcı, derinlemesine (depth-first), genişlemesine (breadth-first), derinlemesine- genişlemesine ya da rastgele stratejilerden birisine göre hareket edecektir (Şekil 78).

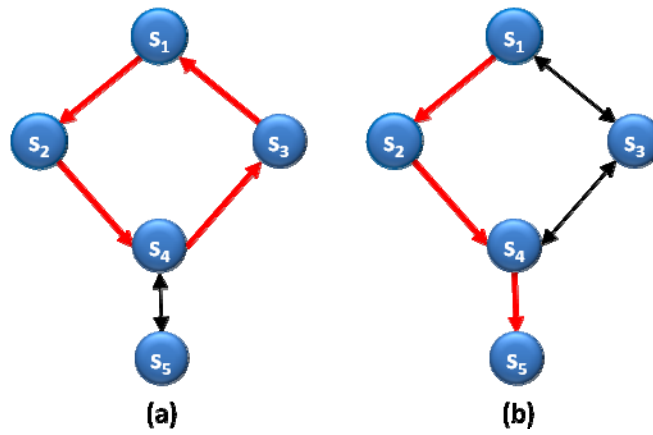
Literatürde yer alan sınıflandırmaların dışında graf teorisinde var olan “yürüme” kavramından esinlenilerek, model üzerinde gerçekleştirilecek yapısal analizlerde kullanılabilecek, açık-kapalı gezinme ve izlence-yol biçimindeki iki farklı sınıflandırma aşağıdaki şekilde yapılabilir.



Şekil 78: (a) Derinlemesine, (b) Genişlemesine, (c) Derinlemesine-Genişlemesine gezinme stratejileri

3.2.2.1. Açık ve Kapalı Gezinme

$G=\{(s_{i_1}, \dots, s_{i_2}), (s_{i_2}, \dots, s_{i_3}), \dots, (s_{i_{n-2}}, \dots, s_{i_{n-1}}), (s_{i_{n-1}}, \dots, s_{i_1})\}$ şeklinde tanımlanan, yani ilk ve son sayfası aynı olan bir gezinmeye *kapalı gezinme* adı verilir. Bir gezinme kapalı değilse *açık gezinme* adını alır (Şekil 79).



Şekil 79: (a) Kapalı ve (b) açık gezinmeler

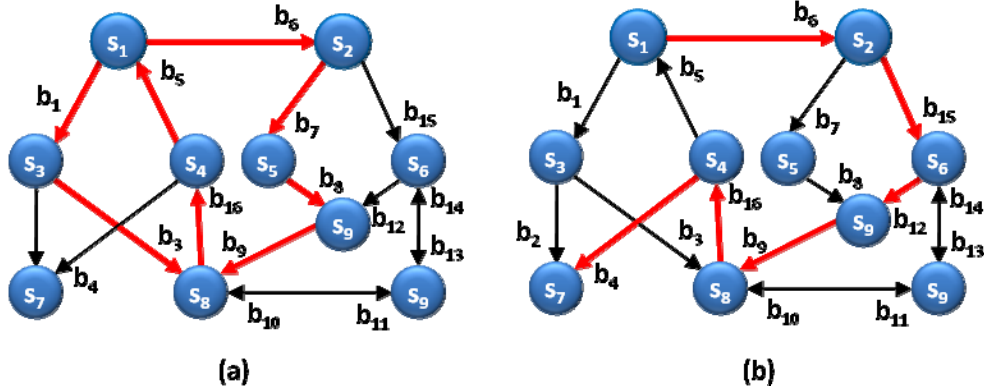
3.2.2.2. İzlençe ve Yol Türünde Gezinmeler

Bir $G=\{(s_{i_1}, b_{j_1}, s_{i_2}), (s_{i_2}, b_{j_2}, s_{i_3}), \dots, (s_{i_{n-2}}, b_{j_{n-2}}, s_{i_{n-1}}), (s_{i_{n-1}}, b_{j_{n-1}}, s_{i_1})\}$ gezinmesini göz önüne alalım. Bu gezinmede her bir b_{j_m} bağlantısı birbirlerinden farklıysa bu gezinmeye bir *izlençe* adı verilir. Diğer bir deyişle izlençe, tekrarlanan hiçbir bağlantının bulunmadığı gezinme türü olarak tanımlanır (Şekil 80).

H hiperortamı üzerindeki $G=\{(s_{i_1}, \dots, s_{i_2}), (s_{i_2}, \dots, s_{i_3}), \dots, (s_{i_{n-2}}, \dots, s_{i_{n-1}}), (s_{i_{n-1}}, \dots, s_{i_1})\}$ gezinmesini ele alalım. Bu gezinmede, kümenin ilk elemanından başlayarak ardışık elemanlardan ilkinin son sayfası ve ikincinin ilk sayfası,

gezinmenin doğası gereği aynı olacaktır. Bu şekildeki $s_{i_2}, s_{i_3}, \dots, s_{i_{n-1}}$ sayfalarının her birinin, küme içerisinde yalnızca bir ardışık ikilinin son ve ilk sayfası olduğu gezinmelere *yol* adı verilir (Şekil 80). Örneğin $\{(s_1, b_1, s_2), (s_2, b_2, s_3), (s_3, b_3, s_6), (s_6, b_4, s_7), (s_7, b_5, s_5)\}$ gezinmesi bir yol tanımlarken, $\{(s_1, b_1, s_2), (s_2, b_2, s_3), (s_3, b_2, s_2), (s_2, b_4, s_5), (s_5, b_4, s_4)\}$ gezinmesi bir yol tanımlamaz. Çünkü bu gezinmede koyu renkle gösterildiği gibi s_2 sayfası iki farklı elemanın son ve ilk sayfasıdır.

Şekil 80 (a)'da verilen $\{(s_1, b_1, s_3), (s_3, b_3, s_8), (s_8, b_{16}, s_4), (s_4, b_5, s_1), (s_1, b_6, s_2), (s_2, b_7, s_5), (s_5, b_8, s_9), (s_9, b_9, s_8)\}$ gezinmesi bir izlencedir. Koyu renkle gösterilen ve tekrarlanan s_1 ve s_8 sayfaları nedeniyle bu gezinme bir yol tanımlamaz. (b)'de verilen $\{(s_1, b_6, s_2), (s_2, b_{15}, s_6), (s_6, b_{12}, s_9), (s_9, b_9, s_8), (s_8, b_{16}, s_4), (s_4, b_4, s_7)\}$ gezinmesi ise bir yoldur.



Şekil 80: (a) İzlençe ve (b) yol türünde gezinmeler

Her yolun aynı zamanda bir izlençe olduğu açıktır. Ayrıca hiçbir kapalı gezinme ya da kapalı bir alt gezinmeye sahip olan bir gezinme, yol olamaz. Eğer s_i ve s_j sayfaları arasında yol türünde bir gezinme varsa bu gezinme bir s_i-s_j yolu olarak adlandırılır.

3.3. Matris Gösterimler

Hiperortam ve gezinmenin modellenmesi, matematiksel olarak yapılandırılmış bu ortamda ölçü ve metrik olarak sınıflandırılabilen çeşitli formüllerin tanımlanmasına olanak vermektedir. Modellemenin ilk aşaması, ele alınan konuda yer alan bütün kavramların, tartışmaya açık herhangi bir nokta içermeyen matematiksel kesinlikteki tanımlarının yapılmasıdır. İkinci aşamada ise, tanımlanan kavramların bilinen matematiksel nesnelerle ilişkilendirilmeleri konusu üzerinde durulur. Böyle bir ilişkilendirme, üzerlerinde cebirsel ya da algoritmik yapıların tanımlanabildiği matematiksel nesnelerin bu özelliklerinin tümünü ya da bir kısmını, modelde yer alan kavramlara aktarabilme özgürlüğü sağlayacaktır.

Graf-temelli hiperortam ve gezinme modelde kullanılabilecek en uygun matematiksel nesneler, doğal olarak matrislerdir. Matrisler, gerek cebirsel yapıları, gerek üzerlerinde her türlü algoritmanın tanımlanabilmesine olanak veren biçimsel özellikleri sayesinde graf teorisi, dolayısıyla da hiperortam ve gezinme modeli için oldukça uygun bir altyapı oluştururlar.

3.3.1. Bağlantılılık Matrisi

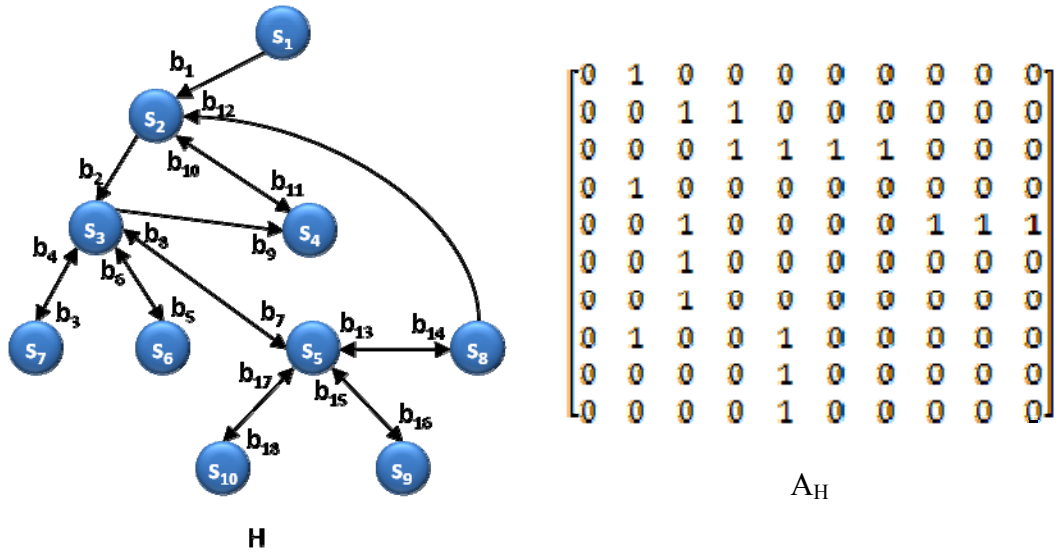
Bir $H=(S[H],B[H])$, $|H|=n$, hiperortamı için, sayfaların birbirleri ile bağlantılılık durumlarını veren *bağlantılılık matrisi*,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Eğer } s_i \text{ ve } s_j \text{ sayfaları arasında en az bir bağlantı varsa;} \\ 0 & \text{Aksi halde.} \end{cases}$$

olmak üzere,

$$A_H = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. Şekil 81’de bir H hiperortamı ve onun bağlantılılık matrisi verilmiştir.



Şekil 81: H hiperortamı ve A_H bağlantılılık matrisi

Sayfa-ağırlıklı, bağlantı-ağırlıklı ya da sayfa&bağlantı-ağırlıklı hiperortamlarda da bağlantılılık matrisi aynı şekilde tanımlanır. Diğer bir deyişle bu hiperortamlar için matrisin girdileri, bağlantı değerlerinden bağımsız olarak ele alınır.

Sayfaların iç ve dış dereceleri ile bağlantılılık matrisi arasında, graflardakine benzer bir ilişki kurulabilir. Buna göre bir hiperortamın bağlantılılık matrisinde her bir i’nci satır toplamı s_i sayfasının dış derecesini, her bir j’nci sütun toplamı ise s_j sayfasının iç derecesini verecektir.

3.3.2. Uzaklık Matrisi

Bir H hiperortamında, herhangi iki $s_i, s_j \in S[H]$ sayfası için, bu sayfaların birbirlerine olan uzaklığının ölçülmesinde kullanılacak uzaklık metriği aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$d(s_i, s_j) = \begin{cases} \text{En kısa } s_i - s_j \text{ yolunun uzunluğu} & \text{eğer bir } s_i - s_j \text{ yolu varsa.} \\ \infty & \text{eğer bir } s_i - s_j \text{ yolu yoksa.} \end{cases}$$

Girdileri bir H hiperortamının sayfaları arasındaki uzaklıklar tarafından belirlenen matrise, H hiperortamının *uzaklık matrisi* adı verilir. Diğer bir deyişle her bir $s_i, s_j \in S[H]$ sayfa ikilisi için,

$$d_{ij} = \begin{cases} d(s_i, s_j) & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

olmak üzere, H hiperortamının uzaklık matrisi $D_H = [d_{ij}]$ biçiminde oluşturulacaktır. Buna göre şekil 81’de verilen H hiperortamının uzaklık matrisi,

$$D_H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ \infty & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ \infty & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ \infty & 1 & 2 & 0 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ \infty & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ \infty & 3 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ \infty & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ \infty & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ \infty & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ \infty & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır.

3.3.3. Dönüştürülmüş Uzaklık Matrisleri

Uzaklık matrisi kullanılarak elde edilen dönüştürülmüş uzaklık matrislerinin oluşturulmasında temel yöntem, uzaklık matrisinde yer alan ancak aritmetik işlemlerde kullanılamayacak olan sonsuz (∞) sembolünün, amaca uygun olarak bir K sabiti ile değiştirilmesi biçimindedir. D_H^K simgesi ile gösterilen bu matrislerden en çok kullanılanlar, sonsuz sembolünün hiperortamın sayfa sayısı ile değiştirildiği $D_H^{[H]} = [d_{ij}^{[H]}]$ ve sıfır ile değiştirildiği $D_H^0 = [d_{ij}^0]$ matrisleridir. Örneğin bir sonraki bölümde ele alınacak dallanma (stratum) ve sıklık (compactness) ölçülerinin hesaplanmasında, sırasıyla D_H^0 ve $D_H^{[H]}$ dönüştürülmüş uzaklık matrisleri kullanılmaktadır.

Şekil 81’de verilen H hiperortamının D_H^0 ve $D_H^{[H]}$ dönüştürülmüş uzaklık matrisleri, aşağıda verilmiştir:

$$\begin{array}{cc}
 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 10 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 10 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 0 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 10 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 3 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 10 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 10 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 10 & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\
D_H^0 & D_H^{[H]}
\end{array}$$

BÖLÜM 4

ÖLÇÜ VE METRİKLER

Hiperortam ve hiperortamda gezinmenin yapısal olarak analiz edilmesiyle ilgili olarak yapılan çeşitli çalışmalarda ele alınan ölçü ve metrikler, bu bölüm kapsamında ele alınmışlardır. Bazı ölçü ve metrikler sadece hiperortam için geçerli iken, bazı ölçü ve metriklerin hem hiperortamın kendisi üzerinde, hem de hiperortamda gezinme için kullanılabildiği durumlar olabilmektedir. Dolayısıyla bu bölümde ele alınan formüller iki farklı başlık altında toplanmamış, tamamı hiperortam üzerinde tanımlanmıştır. Bir H hiperortamı üzerinde gerçekleştirilen her gezinmeyi, bu hiperortamın bir althiperortamı gibi düşünülebileceğinden, bu araçların büyük bir kısmı gezinme için de kullanılabilir.

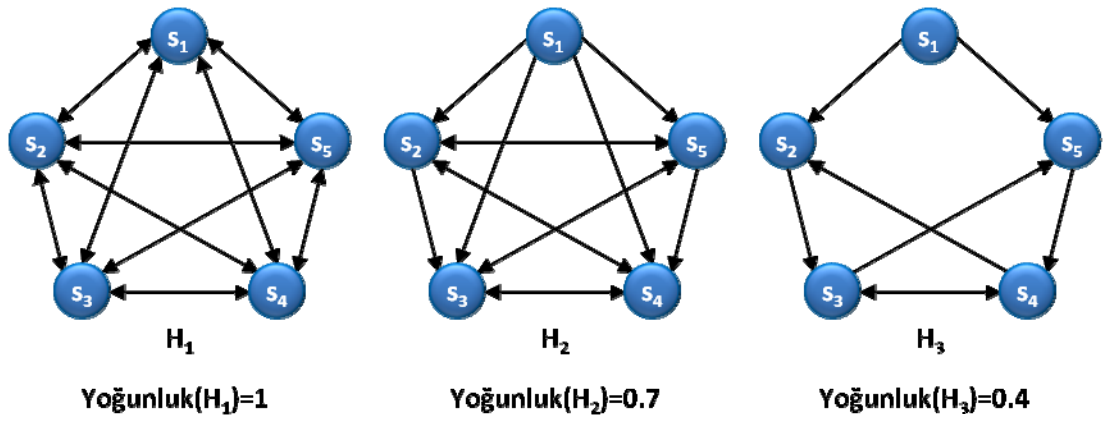
Sonuç olarak bir hiperortam ya da gezinmenin bütününün, bir kısmının veya hiperortam ya da gezinmede yer alan tek bir sayfanın veya bağlantının yapısal özelliklerinin belirlenmesinde kullanılacak ölçü ve metrikler, bu bölüm kapsamında ele alınmıştır.

4.1. Yoğunluk (Density)

En genel anlamda bir $H=(S[H],B[H])$ hiperortamının yoğunluğu, mevcut bağlantı sayısının, olası en fazla bağlantı sayısına oranı olarak hesaplanır. Olası en fazla bağlantı sayısı, $|H|=m$ olan bir tam H hiperortamı için $m(m-1)$ şeklinde hesaplandığından yoğunluk ölçüsü,

$$\text{Yoğunluk}(H) = \frac{||II||}{m(m-1)}$$

olacaktır. En büyük yoğunluk değeri, $\|H\|=m(m-1)$ olduğunda elde edilecek olan 1 değeridir. Bu durumda H hiperortamı bir tam hiperortam olacaktır. Bunun dışındaki bütün yoğunluk değerleri 0 ile 1 arasında, hiperortamın yoğunluğu arttıkça yoğunluk değeri 1'e yaklaşacak şekilde değişecektir (Şekil 82).



Şekil 82: Farklı hiperortamların yoğunluk değerleri

4.2. Merkezilik (Centrality)

Merkezilik ölçüsü, bir sayfanın hiperortamın ne kadar merkezinde yer aldığını belirlemek için kullanılabilecek bir değer üretir. Farklı bakış açılarına göre çeşitli şekillerde ele alınabilecek bu kavram, en temel yaklaşım ile sayfanın derecesi olarak düşünülebilir. Bir sayfanın derecesi ne kadar büyükse, o sayfa hiperortam içerisinde yoğunluğun o kadar yüksek olduğu bir konumda olacaktır.

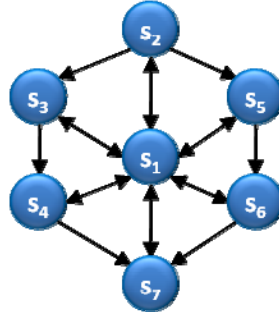
Ancak bu yaklaşım, bir hiperortamdaki bütün sayfaların derecelerinin hesaplandığı durumda anlamlı olacaktır. Diğer bir deyişle bir sayfanın merkeziliğinden bahsedilebilmesi için, o hiperortamdaki bütün sayfaların derecelerinin bilinmesi gerekir. Farklı hiperortamlardaki iki sayfanın merkeziliklerini ise bu şekilde karşılaştırmamız mümkün olmaz. Bunun anlamlı bir şekle getirilebilmesi için formülün normalleştirilmesi gerekir. Başka bir deyişle bir sayfanın merkeziliği, o sayfanın derecesinin, hiperortamdaki diğer sayfaların dereceleri içerisinde en büyük olanına bölünmesiyle hesaplanmalıdır.

Bu durumda bir s_i sayfasının merkezilik değerini verecek ölçü, $M = \max\{\text{der}(s_1), \text{der}(s_2), \dots, \text{der}(s_m)\}$ olmak üzere,

$$\text{Merkezilik}(s_i) = \frac{\sum_{j=1}^m (n_{ij} + n_{ji}) - n_{ii}}{M}$$

biçiminde elde edilir.

Örnek 12: Şekil 83’de verilen hiperortam için sayfaların hesaplanan merkezilik değerleri Tablo-1’de verilmiştir.



Şekil 83: Örnek 12 için verilen hiperortam

Tablodan da görüldüğü gibi en yüksek merkezilik değeri s_1 sayfasına aittir ki bu da Şekil 83 incelendiğinde oldukça doğal bir sonuçtur. Diğer sayfaların merkezilik değerleri aynıdır.

Tablo 1

Şekil 83’de verilen hiperortam için hesaplanan merkezilik değerleri

Sayfa	Merkezilik
S_1	1
S_2	0.3
S_3	0.3
S_4	0.3
S_5	0.3
S_6	0.3
S_7	0.3

4.3. Statü, Kontrastatü ve Prestij

Ağırlıklı olmayan bir hiperortamda uzaklık matrisinin girdileri kullanılarak hesaplanan sayfa prestiji ölçüsü, bir sayfanın diğer sayfalar tarafından ne kadar kolay ulaşılabilir olduğunu belirleyen statü ölçüsü ile, bunun tersi olan kontrastatü ölçüsü arasındaki farka eşittir (Harary, 1959).

Bir $s_i \in S[H]$ sayfasının statüsü, $|H|=m$ ve H hiperortamının dönüştürülmüş uzaklık matrisi $D_H^0 = [d_{ij}^0]$ olmak üzere,

$$\text{Statü}(s_i) = \sum_{j=1}^m d_{ij}^0$$

şeklinde hesaplanır. Bir başka deyişle s_i sayfasının statüsü, s_i sayfasının bağlantısının olduğu diğer bütün sayfaların, s_i sayfasına uzaklıklarının toplamına eşittir. Dolayısıyla bu değer ne kadar küçük olursa, sayfanın hiperortamdaki statüsü de o kadar güçlü olacaktır.

Bunun tersi olan kontrastatü ise, sayfaya bağlantısı olan diğer sayfaların, ele alınan sayfaya olan uzaklıklarının toplamı şeklinde hesaplanır. Bu değer büyük olması, sayfanın diğer sayfalarca ulaşılabilirliğini azaltacaktır. Bir s_i sayfasının kontrastatüsü aşağıdaki formül kullanılarak hesaplanır.

$$\text{Kontrastatü}(s_i) = \sum_{j=1}^m d_{ji}^0$$

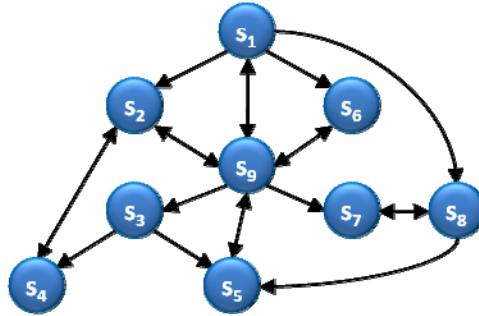
Bu durumda s_i sayfasının prestiji,

$$\text{Prestij}(s_i) = \text{Statü}(s_i) - \text{Kontrastatü}(s_i)$$

olacaktır. Dolayısıyla küçük bir statü değerine karşılık, büyük bir kontrastatü değerine sahip olan bir sayfanın prestiji de o oranda yüksek olmalıdır. Diğer bir

değişle bir sayfa, yukarıda verilen formül kullanılarak ölçülen değer ile ters orantılı bir prestije sahip olacaktır.

Örnek 13: Şekil 84’de verilen hiperortamı göz önüne alalım.



Şekil 84: Örnek 13 için verilen hiperortam

Bu hiperortam için hesaplanan, sayfaların statü, kontrastatü ve prestij değerleri Tablo 2’de verilmiştir.

Tablo 2

Şekil 84’de verilen hiperortam için hesaplanan prestij değerleri

Sayfa	Statü	Kontrastatü	Prestij
S ₁	12	20	-8
S ₂	15	16	-1
S ₃	19	19	0
S ₄	22	21	1
S ₅	17	14	3
S ₆	17	19	-2
S ₇	27	16	11
S ₈	20	21	-1
S ₉	10	13	-3
Toplam:	159	159	0

Buna göre en yüksek prestije sahip olan sayfa s₁ olacaktır. Bu sayfayı sırasıyla s₉, s₆, s₂, s₃, s₄, s₈, s₅ ve s₇ izlemektedir.

4.4. Dallanma (Stratum)

Bir hiperortamda, bütün sayfaların toplam statü değeri, toplam kontrastatü değerine eşit olacağından, bir hiperortamın toplam prestij değeri her zaman sıfır olacaktır (Tablo 2). Diğer bir deyişle,

$$\sum_{i=1}^m \text{Prestij}(s_i) = 0$$

olur. Ancak yukarıdaki toplamda prestij değerlerinin mutlak değerleri alınarak elde edilen büyüklük, bir hiperortamın hiyerarşik yapısının ölçülebileceği oldukça kullanışlı bir ölçü olan dallanma ölçüsünü verecektir (Botafogo vd., 1992). Bu toplam,

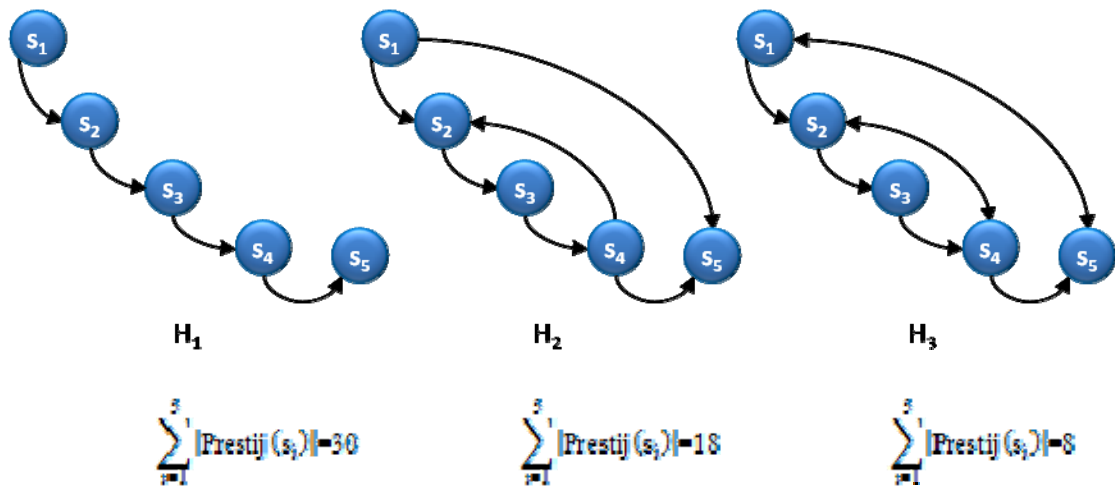
$$\sum_{i=1}^m |\text{Prestij}(s_i)|$$

biçiminde ifade edilebilir. Diğer bir deyişle bir hiperortam için sayfalarının prestij değerlerinin mutlak toplamı ne kadar küçük olursa, o hiperortamda sayfalar arasındaki “ulaşılabilirlik” de o oranda fazla olacaktır. Örneğin Örnek 13’de ele alınan hiperortam için bu toplam 28 olarak hesaplanabilir.

Bir ölçünün anlamlı olarak kullanılabilmesi için, ürettiği değerlerin alt ve üst sınırının belirlenmesi gerekir. Bu sınırlar belirlendikten sonra formüle, “normalleştirme” adı verilen bir işlem uygulanır. Bu işlem formülün, o formülden elde edilecek en büyük değerin genel ifadesine bölünmesi şeklinde tanımlanabilir. Böylece en büyük değer 1 olmak üzere bütün değerler, $[0,1]$ aralığına kısıtlanmış

olur. Bu, aynı yapı üzerinde farklı ölçülerle çalışılırken, her ölçünün kendi sınırlarının bilinmesine gerek kalmaksızın karşılaştırmalar yapılmasını kolaylaştıran bir tür standartlaştırma işlemidir. Normalleştirme sonucu o formülden elde edilecek en büyük değer her zaman 1 olur, ancak alt sınır olan 0 değerine, yapının kendisi sıfır ölçümlü olmadığı sürece ulaşamaz.

Sonuç olarak, bir hiperortamın hiyerarşik yapılanmasının derecesini verecek olan ve hiperortamda yer alan sayfaların prestij değerlerinin mutlak değerlerinin toplamı biçiminde hesaplanan dallanma formülünün gerçek bir “ölçü” sıfatı kazanabilmesi için, sayfa sayısı m olan bir hiperortamdan elde edilebilecek en büyük dallanma değerinin yine m 'ye bağlı olarak bilinmesi gerekir. Tümüyle doğrusal olan bir hiperortam yapısında, bu formül en büyük değerini alır. Şekil 85’de bu durum, üç farklı hiperortam kullanılarak örneklenmiştir.



Şekil 85: Farklı hiperortamların mutlak prestij toplamaları

Sayfa sayısı m olan ve tam olarak doğrusal yapıda olan, yani sayfaların sırayla ve tek yönlü bağlantılarla bağlı olduğu bir yapıdaki hiperortamın sayfa sayısı ile bu hiperortamı oluşturan sayfaların mutlak prestijlerinin toplamı olan ve DMPT

(Doğrusal Mutlak Prestijler Toplamı) olarak gösterilen değer arasında, sayfa sayısının tek ya da çift olmasına bağlı olarak aşağıdaki gibi bir ilişki vardır:

$$m \text{ tek ise DMPT} = \frac{m^3 - m}{4};$$

$$m \text{ çift ise DMPT} = \frac{m^3}{4} \text{ olur.}$$

Diğer bir deyişle, yukarıda verilen değerler bir hiperortamın sayfa sayısının tek ya da çift olmasına bağlı olarak sahip olabilecekleri en büyük mutlak prestij toplamlarıdır. Bu durumda, hiperortama ait sayfaların mutlak prestijler toplamı kullanılarak elde edilen dallanma ölçüsü, aşağıdaki şekilde olacaktır:

$$\text{Dallanma (H)} = \frac{\sum_{i=1}^m |\text{Prestij}(s_i)|}{\text{DMPT}}$$

Bu formülü daha açık olarak ifade edersek, dallanma ölçüsünün son biçimi aşağıdaki biçimde oluşturulabilir:

$$\begin{aligned} \text{Dallanma (H)} &= \frac{\sum_{i=1}^m |\text{Statü}(s_i) - \text{Kontrastatü}(s_i)|}{\text{DMPT}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^m |\sum_{j=1}^m d_{ij} - \sum_{j=1}^m d_{ji}|}{\text{DMPT}} \\ &= \begin{cases} \frac{4 \sum_{i=1}^m |\sum_{j=1}^m d_{ij} - \sum_{j=1}^m d_{ji}|}{m^3 - m} & m \text{ tek ise;} \\ \frac{4 \sum_{i=1}^m |\sum_{j=1}^m d_{ij} - \sum_{j=1}^m d_{ji}|}{m^3} & m \text{ çift ise.} \end{cases} \end{aligned}$$

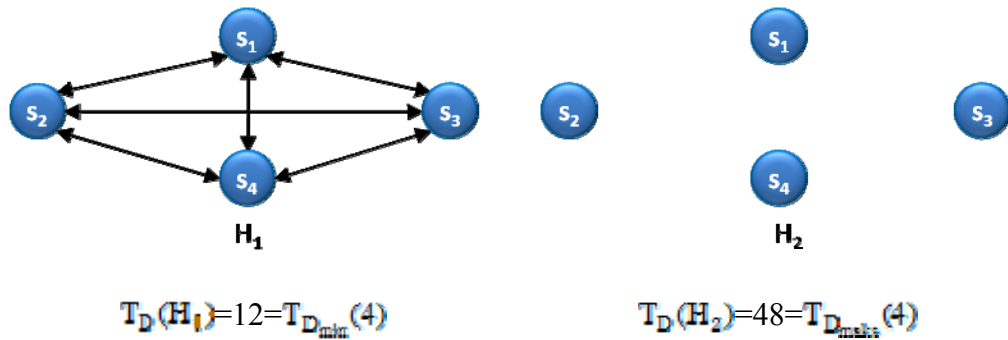
Buna göre, Şekil 85’de verilen üç farklı hiperortamın dallanma ölçümleri $Dallanma(H_1)=1$, $Dallanma(H_2)=0.6$ ve $Dallanma(H_3)=0.26$ biçiminde elde edilebilir. Hiperortamlar göz önüne alındığında bu sonuçların oldukça tutarlı olduğu görülebilir.

4.5. Sıklık (Compactness)

Bir hiperortamın bağlantılılık derecesini ölçmek için kullanılan sıklık ölçüsü, yoğunluk ve stratum ölçüleri ile uyumlu bir sonuç üretir. Bu ölçüye göre, bütün sayfalar arasında iki yönlü bağlantının bulunduğu tam bir hiperortamın sıklık değeri 1, hiçbir sayfa arasında bir bağlantının bulunmadığı bir hiperortamın sıklık değeri ise 0 olacaktır. Diğer bütün hiperortamlar, bağlantılılık durumlarına göre bu iki değer arasında bir sıklık değerine sahip olurlar.

Sıklık ölçüsü, dönüştürülmüş uzaklık matrisinin girdilerinin toplamı kullanılarak hesaplanmaktadır. Bu toplam değerini $T_D(H)$ ile gösterirsek, $T_D(H)$ ’nin en küçük olduğu durum, H hiperortamının tam hiperortam olduğu, yani bütün sayfaları arasında iki yönlü bağlantının bulunduğu durumdur. Diğer bir deyişle $|H|=m$ olan tam bir H hiperortamı için $T_{D_{min}}(m)=m^2-m$ değeri, bütün hiperortamların uzaklık matrislerinin girdi toplamaları arasında elde edilebilecek en küçük değerdir. Bu değer aynı zamanda, tam hiperortamın sahip olduğu bağlantı sayısıdır.

Diğer yandan, $T_{D_{max}}(m)=K(m^2-m)$ değeri, bütün hiperortamların uzaklık matrislerinin girdi toplamaları arasında elde edilebilecek en büyük değerdir. Bu değer, tümüyle bağlantısız bir hiperortam için elde edilebilir (Şekil 86). K sabiti, uzaklık matrisindeki dönüşüm sabitidir ve genellikle $K=m$ olarak alınır.



Şekil 86: Tam ve bağlantısız hiperortamların uzaklık matrislerinin girdi toplamaları

Bir hiperortamın sıklığı, uzaklık matrisinin girdilerinin toplamının, sayfa sayısına bağlı olarak elde edilen maksimum değere, yani $T_{D_{\max}}(m)$ değerine oranı şeklinde ifade edilebilir.

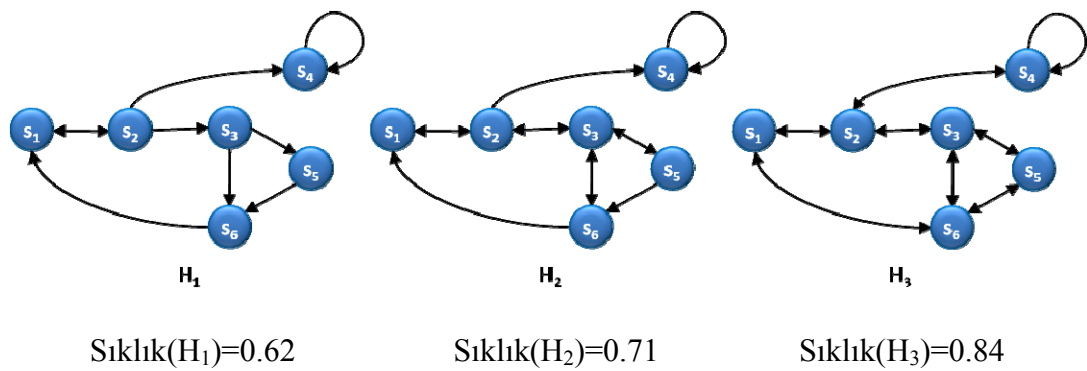
$$\frac{T_D(H)}{T_{D_{\max}}(m)}$$

Ancak bu formülden, en büyük değer olan 1 değeri, $T_D(H)=T_{D_{\max}}(m)$ olduğunda elde edilir ki bu da tümünden bağlantısız olan bir hiperortamın sıklık değerinin 1 olması anlamına gelecektir. Diğer yandan bu ölçü kullanılarak mutlak sıfır değerine hiçbir zaman ulaşılamaz. Çünkü tam bir H hiperortamı için her zaman $T_D(H)$ değeri sıfırdan farklı olacaktır. Dolayısıyla bu formülün kullanışlı bir sıklık ölçüsü biçimine gelebilmesi için, biraz düzenleme yapılması gerekmektedir.

Maksimum ve minimum değerleri kullanarak sıklık formülünü, tam hiperortam için 1, sadece sayfalardan oluşan bağlantısız bir hiperortam için de 0 değerini verecek şekilde düzenlersek, sıklık ölçüsünün son şekli aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
 \text{Sıklık}(H) &= \frac{T_{D_{\max}}(m) - T_D(H)}{T_{D_{\max}}(m) - T_{D_{\min}}(m)} \\
 &= \frac{m(m^2 - m) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m d_{ij}^{[H]}}{m(m-1)^2}
 \end{aligned}$$

Örnek 14: Şekil 87’de üç farklı hiperortam ve bu hiperortamların sıklık değerleri verilmiştir.



Şekil 87: Farklı hiperortamların sıklık değerleri

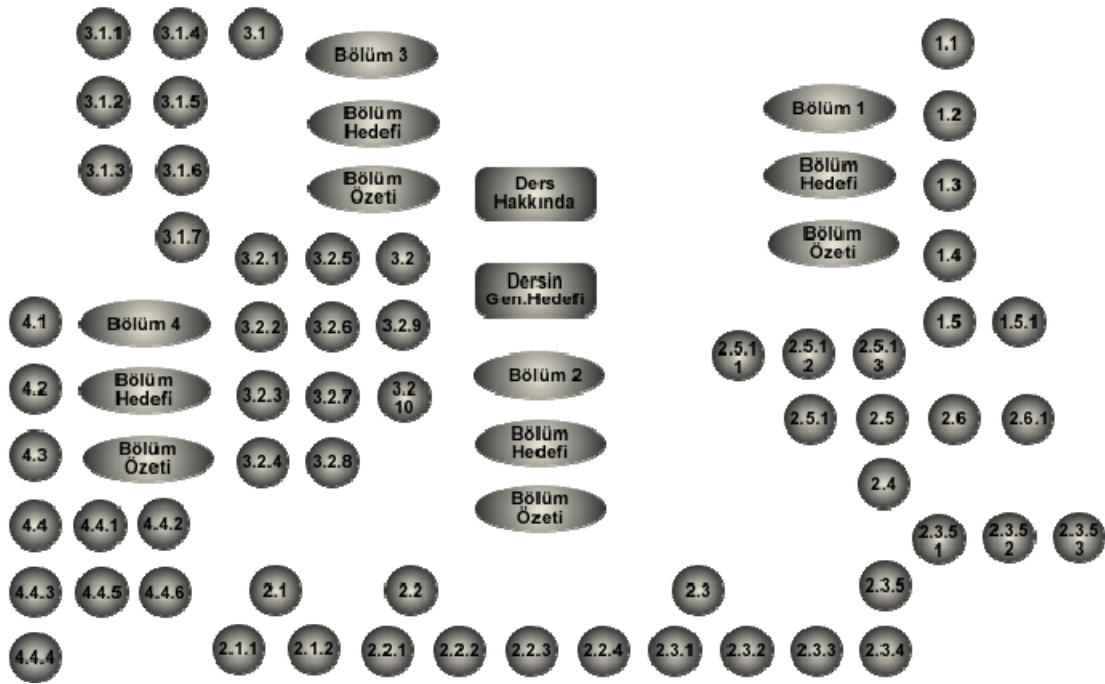
4.6. Örnek Uygulama

Ölçü ve metrikler örneklerle ele alınmış olsa da, gerçek bir hiperortam üzerinde denemeleri anlaşılabilirliklerini daha da artıracaktır. Dolayısıyla bu bölümde, tez kapsamında incelenen formüller, uygulanmakta olan öğretim amaçlı bir hiperortam üzerinde kullanılarak elde edilen sonuçlar verilmiştir. Ele alınan hiperortam, Gazi Üniversitesi Atatürk Meslek Yüksekokulu bünyesinde yürütülmekte olan Bilgisayar Teknolojileri ve Programlama programında yer alan Yapay Zekâya Giriş dersinin içerik ortamıdır (Bkz. Şekil 88).



Şekil 88: Yapay Zekâyâ Giriş ders içeriğine ait hiperortam

Sol tarafta yer alan dizin yapısı, bu hiperortamda bütün sayfalara doğrudan ulaşımı sağlamaktadır. Dolayısıyla hiperortamın şematik gösteriminde bütün sayfalar birbirleri ile ikili olarak bağlantılı olacaktır. Diğer bir deyişle bu hiperortam, bir tam hiperortamdır. Hiperortama ait diyagram, Şekil 89’da verilmiştir. Ancak bu diyagramda sadece sayfalar yer almaktadır. Gerçekte bütün sayfa ikilileri arasında bir bağlantı çizgisi bulunmaktadır. Ancak 75 adet sayfadan oluşan bu tam hiperortam, m sayfa sayısını göstermek üzere $m(m-1)$ formülüne göre toplam 5550 bağlantı içereceğinden, bu çizgilerin tamamının aynı diyagram üzerinde gösterilmesi mümkün olmamaktadır.



Şekil 89: Örnek uygulamaya ait hiperortamın diyagramı

Ele alınan hiperortam tam hiperortam türünde olduğundan, diğer bir deyişle hiperortamda yer alan bütün sayfa ikilileri iki yönlü olarak birbirlerine bağlantı içerdiklerinden, yoğunluk ve sıklık ölçülerinin her ikisi de 1 sonucunu verecektir. Bunun sebebi tam hiperortamlarda, hiperortama ait uzaklık ve bağlantı matrislerinin aynı matrisler olmasından dolayı, yoğunluk ve sıklık ölçülerinin çakışmasıdır. Dizin yapısı içermeyen öğretim amaçlı bir hiperortamda, bu ölçülerin değerleri birbirlerinden farklı olacaktır. Bu durumda, ele alınan hiperortamın yoğunluğu ya da sıklık değeri ile, bu ortamı kullanan öğrencilerin bireysel farklılıklarına göre başarıları, doyumlari ya da başarılarının kalıcılığı arasındaki ilişkiler araştırılabilir.

Aynı gerekçeyle, ele alınan hiperortamın dallanma değeri de 0 olacaktır. Çünkü bu hiperortama ait dönüştürülmüş uzaklık matrisinde satır ve sütun toplamaları birbirlerine eşit olacaktır.

Diğer yandan, bu hiperortamda yer alan bütün sayfaların merkezilik değerleri birbirine eşittir. Bu değer, sayfa sayısı m olan bir tam hiperortam için $2(m-1)$ formülü ile hesaplanır. Dolayısıyla bu site için her bir sayfanın merkezilik değeri,

$$2(m-1)=2(75-1)=148$$

olarak hesaplanacaktır. Diğer bir deyişle ele alınan öğretim amaçlı hiperortamda bütün sayfalar, ortamın bir tam hiperortam olmasının doğal bir sonucu olarak, merkezilik açısından aynı yapıdadırlar.

Öğretim amaçlı hiperortamlarda öğrencilere genellikle doğrusal gezinme olanağının yanı sıra, dizin yapısı da sağlanır. Böylece bütün sayfalar arasında birbirlerine doğrudan geçiş olanağı sağlanmış olur. Dolayısıyla bu tür ortamların sıklık ve dallanma değerlerinin sırasıyla 1 ve 0 olarak hesaplanması beklenen bir sonuçtur. Ancak uyarlanabilir ortamlar gibi öğrencilerin gezinmelerinin daha denetimli olarak sağlandığı hiperortamlarda, sıklık ve dallanma değerleri karşımıza çok farklı şekillerde çıkabilir. Bu gibi durumlar, gezinen öğrencileri öğrenme stilleri ya da cinsiyet gibi birbirlerinden ayıran bireysel farklılıklarının, ortamın yapısıyla ilişkilerinin incelenmesi açısından uygun birer araştırma zemini sunabilirler.

Tez kapsamında incelenen ölçü ve metrikler, hiperortamın kendisi üzerinde çalışmalarının yanı sıra, öğrencilerin ortamda gezinmeleri sonucunda elde edilen verilere de uygulanabilir niteliktedir. İlgili literatürde, öğrencilerin gezinmelerinin yapısal analizleri ile öğrenme stilleri gibi bireysel farklılıklarının aralarındaki ilişkileri inceleyen birçok araştırma mevcuttur. Ancak bu araştırmalar daha çok dallanma ve sıklık ölçüleri çevresinde yoğunlaşmış, bunların dışında yer alan ve gezinmenin modellenmesinde kullanılan bazı ölçülerle, öğrencilerin kaybolma ya da gezinme stratejileri gibi değişkenlerle ilişkileri incelenmemiştir. Dolayısıyla, böyle bir ortamda gezinmenin, daha iyi bir öğrenme ortamının hazırlanabilmesi açısından ölçülmesi ve bu ölçümlerin gezinen bireye ait çeşitli değişkenlerle ilişkilerinin incelenmesi, oldukça büyük bir önem taşımaktadır.

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Hiperortamın yapısal olarak analiz edilmesi, internet teknolojilerinin kullanıldığı bütün uygulamalarda oldukça faydalı veriler sağlamaktadır. Günümüzde, gerek internet üzerinde çalışsın gerekse yerel uygulamalar olsun, yazılımların büyük bir çoğunluğunun ağ temelli olarak yapılandırıldıkları düşünülürse, bu şekilde gerçekleştirilecek analizlerin ne kadar önemli olduğu ortaya çıkacaktır.

Konuya öğretim teknolojileri çerçevesinden bakıldığında, bu tür analizlerin özellikle 2000’li yıllardan sonra öğretim amaçlı hiperortamların ve bu ortamlarda gerçekleştirilen öğrenci gezinmelerinin analiz edilmelerinde kullanıldığı birçok disiplinler arası çalışmaya rastlanmaktadır. Bu çalışmalar incelenmesi sonucunda, gerçekleştirilen yapısal analizlerin gerekçelerinin iki ana başlık altında toplandığı görülmüştür.

1. Öğretim amaçlı bir hiperortamın analizinden elde edilen veriler, ortamın kullanılabilirliğini artırmak için tasarımcıya önemli ipuçları sağlar. Kullanılabilirlik ana çerçevesinde amaçlanan, ortamı kullanarak öğrenen bireyin, konuyu daha iyi öğrenebileceği en iyi yapının tasarımının gerçekleştirilmesidir. Bu doğrultuda, özellikle dallanma ve sıklık ölçülerinin daha iyi anlaşılması ve öğrenenlerin bireysel farklılıkları gibi diğer değişkenlerle ilişkilerinin incelenmesi, alana farklı bir bakış açısı kazandırmaktadır.
2. Öğretim amaçlı bir hiperortamda, öğrenen bireyin gezinmesinin analizinden elde edilen veriler, son yıllarda popülariteleri giderek artan ve bireysel

farklılıklarına göre ortamın her kullanıcıya özel arayüzlerle görüntülenmesini sağlayan uyarlanabilir hiperortamların geliştirilmesinde kullanılmaktadır. Dolayısıyla gezinmenin modellenmesi ve analizi, geliştirilen hiperortamda hangi bireyin hangi stratejiyi kullanarak daha iyi öğrenebileceğinin belirlenmesinde önemli bir rol oynamaktadır.

5.2. Öneriler

Bu kesimde, gelecekte yapılabilecek benzer içerikli çalışmalar için öneriler, kuramsal ve uygulamaya yönelik olarak iki başlık altında verilmiştir.

5.2.1. Kuramsal Öneriler

Ölçü ve metriklerin tanımlandığı model, sonlu ya da ayrık matematik olarak adlandırılan bir matematik disiplini içerisinde yer alan graf teorisi kullanılarak oluşturulmuştur. Teori, birbirlerine bağlarla bağlı durumda olan düğümlerin oluşturduğu her türlü yapı için son derece elverişli bir model ortamı sunmaktadır.

İlgili literatürdeki, hiperortam ve gezinmenin modellenmesi ve bu model üzerinde çeşitli formüllerin geliştirilmesi yönündeki çalışmaların, daha çok yönlü graflar kullanılarak gerçekleştirildiği görülmektedir. Ağırlıklı yönlü grafların daha çok bilgisayar ağlarına uygulandığı, ancak bu kavramın hiperortam, özellikle de gezinme üzerinden çok fazla kullanılmadığı açıktır. Tez çalışması kapsamında sayfa ve bağlantı ağırlıklı hiperortam ve gezinme tanımlamaları yapılırken ağırlıklı yönlü graflar esas alınmıştır. Bu tanımlar temelinde, ağırlıklı yönlü graflar üzerinde çalışan çeşitli algoritmalar, hiperortam ve gezinmenin analiz edilmesi amacıyla uygun olarak kullanılabilirler ya da yeniden düzenlenebilirler.

5.2.2. Uygulamaya Yönelik Öneriler

Öğretim teknolojileri alanında gerçekleştirilen deneysel çalışmaların büyük bir çoğunluğunda, araştırmaya özgü bir hiperortam uygulamasının da geliştirildiği görülmektedir. Geliştirilen uygulamanın niteliğine ve içeriğine bağlı olarak, hiperortam ve gezinme için tanımlanan ölçü ve metrikler, kullanıcılara daha iyi bir ortamın sağlanması için kullanılabilecekleri gibi, öğrenen bireyin davranışlarının modellenmesi amacıyla birer değişken olarak analiz edilebilirler.

Bununla birlikte, örnek uygulamanın ele alındığı bölümde olduğu gibi uzaktan eğitim sistemi içersinde yer alan içerik ortamlarının, doğrudan ortam ya da ortamda gezinme temel alınarak gerçekleştirilen bu tür araştırmalardan elde edilen bulgular dikkate alınarak geliştirilmeleri, sistemi kullanan öğrencilerin verimliliklerinin artırılması açısından önem taşımaktadır.

KAYNAKÇA

- Anderson, C.R., Domingos, P., Weld, D.S. (2001). Personalizing Web Sites for Mobile Users. **Proc. Of the 10th Intl. WWW Conference**. ACM, 2001. 565–575.
- Balakrishnan, R., Ranganathan, K. (1999). **A Textbook of Graph Theory**, Springer.
- Balakrishnan, V. K. (1997). **Graph Theory**, McGraw-Hill.
- Berendt, B., Brenstein, E. (2001). Visualizing individual differences in web navigation: STRATDYN, a tool for analyzing navigation patterns. **Behaviour Research Methods, Instruments & Computers**, 33(2), 243–257.
- Bielak, H., Syslo, M. M. (1983). Peripheral vertices in graphs, **Studia Sci. Math. Hungar**, 18, 269–275.
- Botafogo, R., Rivlin, E. & Shneiderman, B. (1992). Structural analysis of hypertexts: Identifying hierarchies and useful metrics. **ACM Trans. Information Systems**, 10 (2), 142–180.
- Brandes, U., Erlebach, T. (2005). **Network Analysis, Methodological Foundations**, Springer.
- Buckley, F., Lewinter, M. (2003). **A Friendly Introduction to Graph Theory**, Prentice-Hall.
- Chartrand, G., Lesniak, L. (2004). **Graphs & Digraphs**, Chapman & Hall/CRC.
- Claypool, M., Le, P., Waseda, M. & Brown, D. (2001). Implicit interest indicators. **Proc. Intelligent User Interfaces**.
- Conklin, J. (1987). Hypertext: An introduction and survey. **IEEE Computer**, 20 (9), 17–41.
- Diestel, R. (2000). **Graph Theory**, Springer-Verlag.
- Dijkstra, E. W. (1959). A note on two problems in connection with graphs. **Numeriske Math**, 1, 269-271.
- Harary, F. (1959). Status and contrastatus. **Sociometry**, 22, 23-43.

- Heer, J. & Chi, E. (2002). Separating the swarm: Categorization methods for user sessions on the web. **Proc. CHI**, 243–250.
- Hendry, G.R.T. (1985). On graphs with prescribed median, **I. J. Graph Theory**, 9, 477–481.
- Herder, E. (2002). *Metrics* for the Adaptation of Site Structure. **Proc. of the German Workshop on Adaptivity and User Modeling in Interactive Systems**, ABIS02 Hannover, 22–26.
- Herder, E. (2003a). Modeling User Navigation. **User Modeling 2003, Proc. of the 9th Intl. Conference. Springer LNAI 2702**, 417–419.
- Herder, E. (2003b). Utility-Based Evaluation of Adaptive Systems. **Proc. of Workshop on Empirical Evaluation of Adaptive Systems, User Modeling 2003**, Johnstown PA, 25–30.
- Herder, E. and Van Dijk, B. (2003c). From Browsing Behavior to Usability Matters. **Proc. of Workshop on Human Information Processing and Web Navigation**, HCI 2003, Crete.
- Herder, E. (2006). *Forward*, Back and Home Again Analyzing User Behavior on the Web, Dissertation to obtain the doctor's degree at the University of Twente.
- Kleinberg, J. (1999). Authoritative sources in a hyperlinked environment. **Journal of the ACM**, 46 (5), 604–632.
- Kruskal, Jr., J. B. (1956). On the shortest spanning subtree of a graph and the Travelling Salesman Problem, **Proc. of the American Mathematical Society**, 7, 48–50.
- McEneaney, J. E. (2001). Graphic and numerical methods to assess navigation in hypertext. **Intl. Journal of Human-Computer Studies** 55, 761–786.
- Nielsen, J. (2005). Mental models for search are getting firmer, Alertbox. <http://www.useit.com/alertbox/20050509.html> adresinden 11.09.2007 tarihinde alınmıştır.

- Park, J. & Kim, J. (2000). Contextual navigation aids for two world wide web systems. **Intl. J. Human-Computer Interaction**, 12 (2), 193–217.
- Parunak, H. (1989). Hypermedia topologies and user navigation, **In Proc. Hypertext’89**, Pittsburgh, PA, 43-50, ACM.
- Parunak, H. (1991). Don’t link me in: set based hypermedia for taxonomic reasoning, **In Proc. Hypertext’91**, San Antonio, CA, 233-242, ACM.
- Pirolli, P., Pitkow, J. & Rao, R. (1996). Silk from a sow’s ear: Extracting usable structures from the web. **Proc. CHI 1996**, 118–125.
- Pitkow, J., Bharat, K. (1994). WEBWIZ: A tool for world-wide-web access log visualization. **Proceedings of the First International World-Wide-Web Conference**, Geneva, Switzerland.
- Schenker, A., Bunke, H., Last, M., Kandel, A. (2005). **Graph-Theoretic Techniques for Web Content Mining**, World Scientific.
- Sedgewick, R. (1983). **Algorithms**, Addison-Wesley.
- Smyth, B., Cotter, P. (2002). **The Plight of the Navigator: Solving the Navigation Problem for Wireless Portals**. In: De Bra, P., Brusilovsky, P., Ricardo Conejo, R. (eds): Adaptive Hypermedia and Adaptive Web-Based Systems. Springer Verlag, 328–337
- Slater, P.J. (1980). Medians for arbitrary graphs, **J. Graph Theory**, 4, 389–392.