
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

q −FİBONACCİ VE q −LUCAS POLİNOMLARI

Sevgi ESEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ŞUBAT 2018

Sevgi ESEN tarafından hazırlanan "q −FİBONACCİ VE q −LUCAS POLİNOMLARI" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Naim TUĞLU

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ...……

Başkan: Prof. Dr. Dursun TAŞÇI

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ……...

Üye: Doç. Dr. Miraç ÇETİN FİRENGİZ

Matematik Anabilim Dalı, Başkent Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ……...

Tez Savunma Tarihi: 01/02/2018

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

……..…….

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Sevgi ESEN

01/02/2018

q −FİBONACCİ VE q −LUCAS POLİNOMLARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Sevgi ESEN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Şubat 2018

ÖZET

Bu çalışmada, Carlitz'in tanımladığı q −Fibonacci polinomlarına benzer şekilde q −Lucas polinomları tanımlandı ve q −Lucas polinomlarının açık (explicit) formülü elde edildi. Daha sonra, bu polinomların üreteç fonksiyonları, aralarındaki ilişki, q −türevli ilişkileri, toplam formülleri elde edildi. Ayrıca, başta q −Cassini özdeşliği ve q −Honsberger özdeşliği olmak üzere bazı özdeşlikler elde edildi. x, q özel durumları için, literatürdeki bilinen polinom ve özellikler elde edildi.

Bilim Kodu : 20401

Anahtar Kelimeler : q −Fibonacci polinomları, q −Lucas polinomları, Fibonacci polinomları, Lucas polinomları

Sayfa Adedi : 55

Danışman : Prof. Dr. Naim TUĞLU

q −FIBONACCI AND q −LUCAS POLYNOMIALS

(M. Sc. Thesis)

Sevgi ESEN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

February 2018

ABSTRACT

In this study, q −Lucas polynomials are defined like Carlitz's q −Fibonacci polynomials as well as explicit formula are obtained for these polynomials. Also, generating functions and relations between them, summation formula, q −Cassini identity, q −Honsberger identity and some other identities are obtained for q −Fibonacci and q −Lucas polynomials. Moreover, the well-known polynomials and formulas are obtained for special case of x, q.

Science Code : 20401

Key Words : q −Fibonacci polynomials, q −Lucas polynomials, Fibonacci polynomials, Lucas polynomials

Page Number : 55

Supervisor : Prof. Dr. Naim TUĞLU

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın, konusunun belirlenme ve hazırlanma sürecinin her aşamasında bilgi ve zamanını benimle paylaşarak her fırsatta çalışmamla yakından ilgilenen, her sorun yaşadığımda yanına çekinmeden gidebildiğim, sonsuz sabrı ve enerjisiyle her zaman beni dinleyip sorunlarıma çözüm bulan danışman hocam Prof. Dr. Naim TUĞLU'ya teşekkürlerimi sunarım. Maddi ve manevi destekleriyle, beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan, hayattaki en büyük şansım olan aileme sevgilerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

ÇİZELGELERİN LİSTESİ viii

ŞEKİLLERİN LİSTESİ ix

SİMGELER VE KISALTMALAR x

1. GİRİŞ 1

2. ÖN BİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR 3

2.1. q −Binomiyel Katsayılar 8

3. q −FİBONACCİ VE q −LUCAS POLİNOMLARI 11

4. q −FİBONACCİ VE q −LUCAS POLİNOMLARIN ÖZELLİKLERİ 25

5. SONUÇ VE ÖNERİLER 51

KAYNAKLAR 53

ÖZGEÇMİŞ 55

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

Çizelge 2.1. Bazı Fibonacci sayıları 3

Çizelge 2.2. Bazı Lucas sayıları 3

Çizelge 2.3. Bazı Fibonacci polinomları 4

Çizelge 2.4. Bazı iki değişkenli Fibonacci polinomları 4

Çizelge 2.5. Bazı Lucas polinomları 5

Çizelge 2.6. Bazı iki değişkenli Lucas polinomları 5

Çizelge 2.7. İki değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomları ile diğer polinomlar arasındaki ilişkiler 7

Çizelge 3.1. Bazı $Fib_n(x,y)$ polinomları 12

Çizelge 3.2. Bazı $Luc_n(x,y)$ polinomları 14

Çizelge 3.3. $t(s)$ fonksiyonuna bağlı bazı $F_n(x,s,q)$ polinomları 15

Çizelge 3.4. Carlitz'in bazı $F_n(x,s,q)$ polinomları 15

Çizelge 3.5. Cigler'in bazı $F_n(x,s,q)$ polinomları 16

Çizelge 3.6. Bazı $F_n(x,q)$ polinomları 17

Çizelge 3.7. Bazı $L_n(x,q)$ polinomları 19

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

Şekil 3.1. Bazı $F_n(x,q)$ polinomları 18

Şekil 3.2. Bazı $L_n(x,q)$ polinomları 19

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$[\boldsymbol{n}]$	$n.\ q$ −tamsayısı
$[\boldsymbol{n}]!$	n! in q −benzeri
$\begin{bmatrix}\boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{k}\end{bmatrix}$	q −binomiyel katsayılar
$\boldsymbol{F_n}$	Fibonacci sayısı
$\boldsymbol{F_n(x)}$	Fibonacci polinomu
$\boldsymbol{F_n(x,y)}$	İki değişkenli Fibonacci polinomu
$\boldsymbol{F_n(x,q)}$	q −Fibonacci polinomu
$\boldsymbol{J_n(y)}$	Jacobsthal polinomu
$\boldsymbol{j_n(y)}$	Jacobsthal-Lucas polinomu
$\boldsymbol{L_n}$	Lucas sayısı
$\boldsymbol{L_n(x)}$	Lucas polinomu
$\boldsymbol{L_n(x,y)}$	İki değişkenli Lucas polinomu
$\boldsymbol{L_n(x,q)}$	q −Lucas polinomu
$\boldsymbol{P_n}$	Pell sayısı
$\boldsymbol{P_n(x)}$	Pell polinomu
$\boldsymbol{Q_n}$	Pell-Lucas sayısı
$\boldsymbol{Q_n(x)}$	Pell-Lucas polinomu

1. GİRİŞ

Parçacık teorisinin çalışılması ile ortaya çıkan $q-$analiz, eliptik ve hipergeometrik fonksiyonların etkili olduğu çalışma alanlarında, parçalanış teorisinde, fark denklemleri teorisinde, analitik sayılar teorisi ve teorik fizikte önemli bir yere sahiptir. $q-$analiz kavramından faydalanarak pek çok polinomun $q-$benzerinin elde edilmesinin yanı sıra bazı fonksiyonlar için de daha genel ve kullanışlı özellikler elde edilmiştir. Analizdeki temel kavram ve ifadelerden bazılarının $q-$benzerleri, Aral ve arkadaşları tarafından çalışılmıştır [2]. Elde edilen ifadeler, $q \to 1^{-}$ seçilmesi durumunda analizdeki bilinen ifadelere dönüşmektedir [2, 20].

İlk iki terimi 0 ve 1 olmak üzere, her terimi kendisinden önce gelen iki terimin toplamı olan sayı dizisine Fibonacci sayıları denir. Fibonacci sayıları ile ilgili pek çok çalışma yapılıp, ilginç özelliklerinin elde edilmesinin yanı sıra farklı genelleştirmeleri üzerine de çalışılmıştır [4, 18, 21, 25, 26].

Catalan, literatürde Fibonacci polinomları olarak bilinen polinomları tanımlamış ve daha sonra benzer biçimde pek çok yazar tarafından Fibonacci ve Lucas tipi polinomlar ile bu polinomların genelleştirmeleri çalışılmıştır [7, 22 − 24].

Bazı yazarlar tarafından, çeşitli şekillerde $q-$Fibonacci ve $q-$Lucas polinomları tanımlanmıştır. Bu polinomlarda genellikle, $q \to 1^{-}$ seçilmesi durumunda Fibonacci ve Lucas polinomları elde edilmektedir. Bu anlamda, $q-$Fibonacci ve $q-$Lucas polinomları için Fibonacci ve Lucas polinomlarının genelleştirmesi denebilir. Cigler, çoğu makalesinde $q-$Fibonacci ve $q-$Lucas polinomlarını konu edinmiş, bu polinomları çeşitli şekillerde tanımlayarak, pek çok ilginç özellik elde etmiş, mors kod uygulamalarını çalışmış ve ayrıca Catalan sayıları ile bağlantılarına değinmiştir [8 − 17]. Carlitz, $q-$Fibonacci ve $q-$Lucas polinomlarının farklı genelleştirmelerini incelemiştir [5, 6]. Andrews, bir operatör yardımıyla $q-$Fibonacci polinomları için üreteç fonksiyonlarını elde etmiştir [1]. Ayrıca, başka pek çok yazar da çeşitli şekillerde Fibonacci ve Lucas polinomlarının $q-$benzerleri üzerine çalışmıştır [3, 19].

Bu çalışmanın ikinci bölümünde, çalışma için gerekli ön bilgiler ve temel kavramlardan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde, literatürde var olan bazı $q-$Fibonacci ve $q-$Lucas polinomlarından bahsedilip, Carlitz'in tanımladığı $q-$Fibonacci polinomlarına benzer şekilde $q-$Lucas polinomları tanımlanarak bu polinomların açık (explicit) formülü elde edilmiştir. Dördüncü bölümde ise, Carlitz'in tanımladığı $q-$Fibonacci polinomları ve bu polinomlara benzer şekilde tanımlanan $q-$Lucas polinomlarının, üreteç fonksiyonları elde edilmiştir. Daha sonra, bu polinomların aralarındaki ilişki, $q-$türevli ilişkileri, toplam formülleri edilmiştir. Ayrıca, başta $q-$Cassini özdeşliği ve $q-$Honsberger özdeşliği olmak üzere bazı özdeşlikler elde edilmiştir. x, q özel durumları için literatürdeki bilinen polinom ve özellikler elde edilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışma boyunca ihtiyaç duyulacak olan bazı temel tanım ve kavramlara yer verilecektir.

2.1. Tanım

Başlangıç koşulları $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olan ve her $n \geq 2$ doğal sayısı için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{2.1}$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlanan sayılara Fibonacci sayıları denir.

Çizelge 2.1. Bazı Fibonacci sayıları

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

2.2. Tanım

Başlangıç koşulları $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ olan ve her $n \geq 2$ doğal sayısı için

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \tag{2.2}$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlanan sayılara Lucas sayıları denir.

Çizelge 2.2. Bazı Lucas sayıları

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123

2.3. Tanım

Başlangıç koşulları $F_0(x) = 0$, $F_1(x) = 1$ olan ve her $n \geq 2$ doğal sayısı için

$$F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x) \tag{2.3}$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlanan polinomlara Fibonacci polinomları denir.

Çizelge 2.3. Bazı Fibonacci polinomları

n	$F_n(x)$
0	0
1	1
2	x
3	$x^2 + 1$
4	$x^3 + 2x$
5	$x^4 + 3x^2 + 1$

2.4. Tanım

Başlangıç koşulları $F_0(x, y) = 0$, $F_1(x, y) = 1$ olan ve her $n \geq 2$ doğal sayısı için

$$F_n(x, y) = xF_{n-1}(x, y) + yF_{n-2}(x, y) \tag{2.4}$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlanan polinomlara iki değişkenli Fibonacci polinomları denir.

Çizelge 2.4. Bazı iki değişkenli Fibonacci polinomları

n	$F_n(x, y)$
0	0
1	1
2	x
3	$x^2 + y$
4	$x^3 + 2xy$
5	$x^4 + 3x^2y + y^2$

2.5. Tanım

Başlangıç koşulları $L_0(x) = 2$, $L_1(x) = x$ olan ve her $n \geq 2$ doğal sayısı için

$$L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x) \tag{2.5}$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlanan polinomlara Lucas polinomları denir.

Çizelge 2.5. Bazı Lucas polinomları

n	$L_n(x)$
0	2
1	x
2	$x^2 + 2$
3	$x^3 + 3x$
4	$x^4 + 4x^2 + 2$
5	$x^5 + 5x^3 + 5x$

2.6. Tanım

Başlangıç koşulları $L_0(x, y) = 2$, $L_1(x, y) = x$ olan ve her $n \geq 2$ doğal sayısı için

$$L_n(x, y) = xL_{n-1}(x, y) + yL_{n-2}(x, y) \tag{2.6}$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlanan polinomlara iki değişkenli Lucas polinomları denir.

Çizelge 2.6. Bazı iki değişkenli Lucas polinomları

n	$L_n(x, y)$
0	2
1	x
2	$x^2 + 2y$
3	$x^3 + 3xy$
4	$x^4 + 4x^2y + 2y^2$
5	$x^5 + 5x^3y + 5xy^2$

Eş.2.4 ifadesinde; $y = 1$ alınırsa Fibonacci polinomları, $x = y = 1$ alınırsa Fibonacci dizisi $\{F_n\}$ elde edilir.

x yerine $2x$ ve $y = 1$ alınırsa; $P_0(x) = 0$, $P_1(x) = 1$ başlangıç koşulları ve her $n \geq 2$ doğal sayısı için

$$P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlı Pell polinomları elde edilir. Pell polinomlarında $x = 1$ alınırsa Pell dizisi $\{P_n\}$ elde edilir.

y yerine $2y$ ve $x = 1$ alınırsa; $J_0(y) = 0, J_1(y) = 1$ başlangıç koşulları ve her $n \geq 2$ doğal sayısı için

$$J_n(y) = J_{n-1}(y) + 2yJ_{n-2}(y)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlı Jacobsthal polinomları elde edilir. Jacobsthal polinomlarında $y = 1$ seçilirse Jacobsthal dizisi $\{J_n\}$ elde edilir.

x yerine $2x$ ve $y = -1$ alınırsa; $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$ başlangıç koşulları ve her $n \geq 2$ doğal sayısı için

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlı ikinci çeşit Chebyshev polinomları elde edilir.

Eş.2.5 ifadesinde; $y = 1$ seçilirse Lucas polinomları, $x = y = 1$ seçilirse Lucas dizisi $\{L_n\}$ elde edilir.

x yerine $2x$ ve $y = 1$ alınırsa; $Q_0(x) = 2$, $Q_1(x) = 2x$ başlangıç koşulları ve her $n \geq 2$ doğal sayısı için

$$Q_n(x) = 2xQ_{n-1}(x) + Q_{n-2}(x)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlı Pell-Lucas polinomları elde edilir. Pell-Lucas polinomlarında $x = 1$ alınırsa Pell-Lucas dizisi $\{Q_n\}$ elde edilir.

y yerine $2y$ ve $x = 1$ alınırsa; $j_0(y) = 2$, $j_1(y) = 1$ başlangıç koşulları ve her $n \geq 2$ doğal sayısı için

$$j_n(y) = j_{n-1}(y) + 2yj_{n-2}(y)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlı Jacobsthal-Lucas polinomları elde edilir. Jacobsthal-Lucas polinomlarında $y = 1$ seçilirse Jacobsthal-Lucas dizisi $\{j_n\}$ elde edilir.

x yerine $2x$ ve $y = -1$ alınırsa; $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ başlangıç koşulları ve her $n \geq 2$ doğal sayısı için

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlı birinci çeşit Chebyshev polinomları elde edilir.

Çizelge 2.7. İki değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomları ile diğer polinomlar arasındaki ilişkiler

x	y	$F_n(x,y)$	$L_n(x,y)$
x	1	$F_n(x)$	$L_n(x)$
1	1	F_n	L_n
$2x$	1	$P_n(x)$	$Q_n(x)$
2	1	P_n	Q_n
$2x$	-1	$U_n(x)$	$T_n(x)$
1	$2y$	$J_n(y)$	$j_n(x)$
1	2	J_n	j_n

2.1. q −Binomiyel Katsayılar

n bir pozitif tamsayı ve $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$ olmak üzere

$$[n] = \frac{1-q^n}{1-q}$$

ifadesine n tamsayısının q −benzeri denir.

$n!$ in q −benzeri,

$$[n]! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ [n][n-1] \dots [1], & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

$n < k$ için $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0$ olmak üzere $n \geq k \geq 0$ için

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[n-k]!\,[k]!}$$

ile tanımlı katsayılara Gaussian veya q −binomiyel katsayıları denir [2].

Her $0 \leq k \leq n$ için,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}$$

özelliği sağlanır.

Örnekler

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [1] = \frac{1-q}{1-q} = 1$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = [2] = \frac{1-q^2}{1-q} = 1+q$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = [3] = \frac{1-q^3}{1-q} = 1+q+q^2$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = [3] = \frac{(1-q^3)(1-q^2)}{(1-q)(1-q^2)} = 1+q+q^2$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{(1-q^4)(1-q^3)}{(1-q)(1-q^2)} = 1+q+2q^2+q^3+q^4$$

Ayrıca,

$$\lim_{q\to 1^-}[n] = n \text{ ve } \lim_{q\to 1^-}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n}{k}$$

şeklinde bilinen binomiyel katsayılara dönüşür.

q −binomiyel katsayıları için q −Pascal kuralları aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

$$\frac{[n]}{[n-k]} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} = q^k \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

$$\frac{[n]}{[n-k]}\begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} + q^{n-k}\begin{bmatrix} n-k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Ayrıca aşağıdaki toplam formülü sağlanır.

$$[n] = [k] + q^k[n-k] \tag{2.11}$$

$x \neq 0$ için q −fark operatörü,

$$\mathcal{D}_q f(x) = \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x} \tag{2.12}$$

olarak tanımlıdır.

3. q −FİBONACCİ VE q −LUCAS POLİNOMLARI

Bu bölümde; literatürde var olan q −Fibonacci ve q −Lucas polinomlarından bahsedilip, bu çalışmada baz alınacak olan q −Lucas polinomları tanımlanarak, bu polinomların açık (explicit) formülü elde edilecektir.

Fibonacci ve Lucas polinomlarının q −benzerleri pek çok makalede çalışılmıştır [3, 6, 8 − 17].

Cigler, [8] makalesinde Fibonacci polinomlarının q −benzerini $F_0(x,y,s)=0$, $F_1(x,y,s)=1$ başlangıç koşulları ve her $n \geq 2$ doğal sayısı için

$$F_n(x,y,s)=\left(x-\frac{y}{x}\right)F_{n-1}\left(x,y,\frac{s}{q}\right)+\frac{sy}{q^{n-1}x}F_{n-1}\left(qx,y,\frac{s}{q}\right)+yF_{n-2}\left(x,y,\frac{s}{q^2}\right) \qquad (3.1)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlamış ve bu polinomları genel q −Fibonacci polinomları olarak adlandırmıştır.

Burada $q \to 1^-$ ve $s=1$ seçilirse iki değişkenli Fibonacci polinomları elde edilir.

Aynı makalede Fibonacci polinomlarının farklı bir q −benzerini $Fib_0(x,y)=0$, $Fib_1(x,y)=1$ başlangıç koşulları ve her $n \geq 2$ doğal sayısı için

$$Fib_n(x,y)=xFib_{n-1}(x,y)+(q-1)y\mathcal{D}Fib_{n-1}(x,y)+yFib_{n-2}(x,y) \qquad (3.2)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlamış ve bu polinomları özel q −Fibonacci polinomları olarak adlandırmıştır [8].

Burada $q \to 1^-$ seçilirse iki değişkenli Fibonacci polinomları, $q \to 1^-$ ve $y=1$ seçilirse Fibonacci polinomları elde edilir.

Çizelge 3.1. Bazı $Fib_n(x,y)$ polinomları

n	$Fib_n(x,y)$
0	0
1	1
2	x
3	x^2+qy
4	$x^3+(1+q)qxy$
5	$x^4+(1+q+q^2)qx^2y+q^3y^2$
6	$x^5+(1+q+q^2+q^3)qx^3y+(1+q+q^2)q^3xy^2$

Özel q −Fibonacci polinomlarının açık (explicit) formülünü her $n>0$ doğal sayısı için

$$Fib_n(x,y)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\begin{bmatrix}n-k-1\\k\end{bmatrix}q^{\binom{k+1}{2}}x^{n-2k-1}y^k \tag{3.3}$$

olarak elde etmiştir [8].

Yine bu makalede, Lucas polinomlarının q −benzeri olan ve genel q −Lucas polinomları adını verdiği

$$L_0(x,y,s)=2,\ L_1(x,y,s)=x+\left(\frac{s}{q}-1\right)\frac{y}{x}$$

başlangıç koşulları ve her $n\geq 2$ doğal sayısı için

$$L_n(x,y,s)=\left(x-\frac{y}{x}\right)L_{n-1}\left(x,y,\frac{s}{q}\right)+\frac{sy}{q^nx}L_{n-1}\left(qx,y,\frac{s}{q}\right)+yL_{n-2}\left(x,y,\frac{s}{q^2}\right) \tag{3.4}$$

veya

$$L_n(x,y,s)=\left(x-\frac{y}{x}\right)L_{n-1}\left(x,y,\frac{s}{q}\right)+\frac{sy}{qx}L_{n-1}\left(x,\frac{y}{q^2},\frac{s}{q}\right)+yL_{n-2}\left(x,y,\frac{s}{q^2}\right) \tag{3.5}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımladığı polinomlardan bahsetmiştir [8].

Burada $q \to 1^{-}$ ve $s = 1$ seçilirse iki değişkenli Lucas polinomları elde edilir.

Genel q −Lucas polinomlarında $s = q^n$ seçilirse,

$$L_n(x, y, q^n) = \left(x - \frac{y}{x}\right) L_{n-1}(x, y, q^{n-1}) + \frac{y}{x} L_{n-1}(qx, y, q^{n-1}) + yL_{n-2}(x, y, q^{n-2}) \quad (3.6)$$

elde edilir [8].

Özel olarak $Luc_n(x, y) = L_n(x, y, q^n)$ seçilirse, $Luc_0(x, y) = 2$, $Luc_1(x, y) = x$ başlangıç koşulları ve her $n \geq 2$ doğal sayısı için

$$Luc_n(x, y) = \left(x - \frac{y}{x}\right) Luc_{n-1}(x, y) + \frac{y}{x} Luc_{n-1}(qx, y) + yLuc_{n-2}(x, y) \quad (3.7)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlı q −Lucas polinomları elde edilir [8].

Cigler'in özel q −Lucas polinomları ise $Luc_0(x, y) = 2$, $Luc_1(x, y) = x$ başlangıç koşulları ve her $n \geq 2$ doğal sayısı için

$$Luc_n(x, y) = xLuc_{n-1}(x, y) + (q - 1)y\mathcal{D}Luc_{n-1}(x, y) + yLuc_{n-2}(x, y) \quad (3.8)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlıdır [8].

Burada $q \to 1^{-}$ seçilirse iki değişkenli Lucas polinomları elde edilir.

Çizelge 3.2. Bazı $Luc_n(x,y)$ polinomları

n	$Luc_n(x,y)$
0	2
1	x
2	$x^2+(1+q)y$
3	$x^3+(1+q+q^2)xy$
4	$x^4+(1+q+q^2+q^3)x^2y+(1+q^2)qy^2$
5	$x^5+(1+q+q^2+q^3+q^4)x^3y+(1+q+q^2+q^3+q^4)qxy^2$
6	$x^6+(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5)x^4y$ $+(1+q+2q^2+q^3+2q^4+q^5+q^6)qx^2y^2+(1+q^3)q^3y^3$

Özel q −Lucas polinomlarının açık (explicit) formülünü her $n>0$ doğal sayısı için

$$Luc_n(x,y)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\begin{bmatrix}n-k\\k\end{bmatrix}\frac{[n]}{[n-k]}q^{\binom{k}{2}}x^{n-2k}y^k \tag{3.9}$$

olarak elde etmiştir [8].

Cigler, [10] makalesinde ise Fibonacci polinomlarının q −benzerini $q\neq 0$ bir reel sayı ve s reel değerleri için $t(s)\neq 0$ bir fonksiyon olmak üzere, $F_0(x,s,q)=0$, $F_1(x,s,q)=1$ başlangıç şartları ve her $n\geq 2$ doğal sayısı için

$$F_n(x,s,q)=xF_{n-1}(x,s,q)+t(q^{n-2}s)F_{n-2}(x,s,q) \tag{3.10}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlamıştır.

Çizelge 3.3. $t(s)$ fonksiyonuna bağlı bazı $F_n(x,s,q)$ polinomları

n	$F_n(x,s,q)$
0	0
1	1
2	x
3	$x^2+t(qs)$
4	$x^3+t(qs)x+t(q^2s)x$
5	$x^4+t(qs)x^2+t(q^2s)x^2+t(q^3s)x^2+t(qs)t(q^3s)$
6	$x^5+t(qs)x^3+t(q^2s)x^3+t(q^3s)x^3+t(q^4s)x^3+t(q^4s)t(qs)x$ $+t(q^4s)t(q^2s)x+t(q^3s)t(qs)x$

Burada $t(s)=\frac{s}{q}$ seçilirse, Carlitz'in $F_0(x,s,q)=0$, $F_1(x,s,q)=1$ başlangıç koşulları ve her $n\geq 2$ doğal sayısı için

$$F_n(x,s,q)=xF_{n-1}(x,s,q)+q^{n-3}sF_{n-2}(x,s,q) \tag{3.11}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımladığı q −Fibonacci polinomları elde edilir [6].

Burada $q\to 1^-$ seçilirse iki değişkenli Fibonacci polinomları elde edilir.

Çizelge 3.4. Carlitz'in bazı $F_n(x,s,q)$ polinomları

n	$F_n(x,s,q)$
0	0
1	1
2	x
3	x^2+s
4	$x^3+(1+q)xs$
5	$x^4+(1+q+q^2)x^2s+q^2s^2$
6	$x^5+(1+q+q^2+q^3)x^3s+(1+q+q^2)q^2xs^2$

Eş.3.11 ifadesinde verilen Carlitz'in tanımladığı q −Fibonacci polinomlarının açık (explicit) formülü Cigler tarafından, her $n > 0$ doğal sayısı için

$$F_n(x,s,q) = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix} q^{2\binom{k}{2}} x^{n-2k-1} s^k \tag{3.12}$$

olarak elde edilmiştir [10].

Cigler, [9] makalesinde Fibonacci polinomlarının q −benzerini $F_0(x,s,q) = 0$, $F_1(x,s,q) = 1$ başlangıç koşulları ve her $n \geq 2$ doğal sayısı için

$$F_n(x,s,q) = xF_{n-1}(x,s,q) + q^{n-2} s F_{n-2}\left(x, \frac{s}{q}, q\right) \tag{3.13}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlamıştır.

Burada $q \to 1^-$ ve $s = 1$ seçilirse Fibonacci polinomları elde edilir.

Çizelge 3.5. Cigler'in bazı $F_n(x,s,q)$ polinomları

n	$F_n(x,s,q)$
0	0
1	1
2	x
3	$x^2 + qs$
4	$x^3 + (1+q)qxs$
5	$x^4 + (1+q+q^2)qx^2s + q^3s^2$
6	$x^5 + (1+q+q^2+q^3)qx^3s + (1+q+q^2)q^3xs^2$

Eş.3.13 ifadesinde verilen q −Fibonacci polinomlarının açık (explicit) formülünü her $n > 0$ doğal sayısı için

$$F_n(x,s,q)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\begin{bmatrix}n-k-1\\k\end{bmatrix}q^{\binom{k+1}{2}}x^{n-2k-1}s^k \tag{3.14}$$

olarak elde etmiştir [9].

Carlitz'in Eş.3.11 ifadesinde verilen q −Fibonacci polinomlarında $s=q$ seçilirse, $F_0(x,q)=0$, $F_1(x,q)=1$ başlangıç koşulları ve her $n\geq 2$ doğal sayısı için

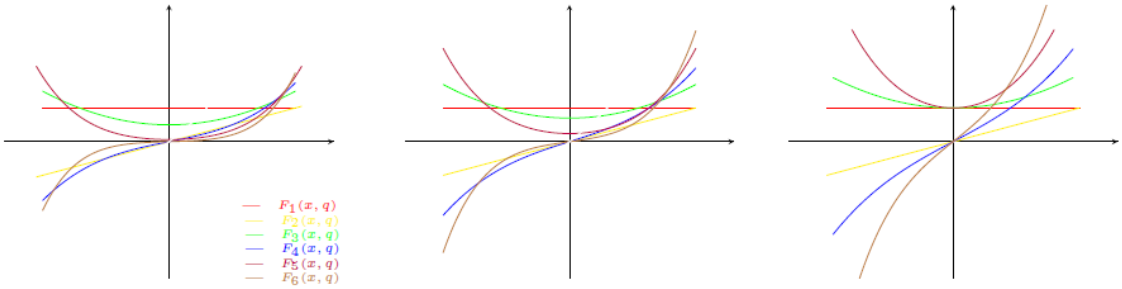
$$F_n(x,q)=xF_{n-1}(x,q)+q^{n-2}F_{n-2}(x,q) \tag{3.15}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımladığı q −Fibonacci polinomları elde edilir [6].

Çizelge 3.6. Bazı $F_n(x,q)$ polinomları

n	$F_n(x,q)$
0	0
1	1
2	x
3	x^2+q
4	$x^3+(1+q)qx$
5	$x^4+(1+q+q^2)qx^2+q^4$
6	$x^5+(1+q+q^2+q^3)qx^3+(1+q+q^2)q^4x$

Burada, $q\to 1^-$ seçilirse Fibonacci polinomları, $q\to 1^-$ ve x yerine $2x$ seçilirse Pell polinomları, $q\to 1^-$ ve $x=1$ seçilirse Fibonacci sayıları, $q\to 1^-$ ve $x=2$ seçilirse Pell sayıları elde edilir.



a) $q = 0.5$ b) $q = 0.7$ c) $q = 0.9999$

Şekil 3.1. Bazı $F_n(x,q)$ polinomları

q −Fibonacci polinomlarının açık (explicit) formülü her $n > 0$ doğal sayısı için

$$F_n(x,q) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix} q^{k^2} x^{n-2k-1} \tag{3.16}$$

olarak elde edilmiştir [6].

Belbachir ve Benmezai, Cigler tarafından tanımlanan Lucas polinomlarının q −benzerlerine alternatif olarak daha basit indirgeme bağıntısına sahip q −Lucas polinomlarını tanımlamışlardır [3].

Bu tez çalışmasında, Belbachir ve Benmezai'nin çalışmasından esinlenilerek, Carlitz'in tanımladığı Eş.3.15 ifadesinde verilen q −Fibonacci polinomlarının indirgeme bağıntısına benzer şekilde q −Lucas polinomları tanımlanmıştır.

3.1. Tanım

$L_0(x,q) = 2$, $L_1(x,q) = x$ başlangıç şartları ve her $n \geq 2$ doğal sayısı için

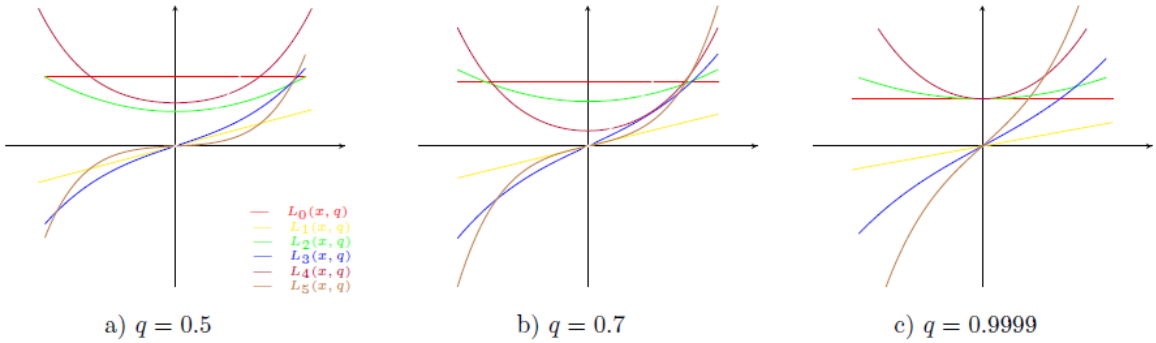
$$L_n(x,q) = xL_{n-1}(x,q) + q^{n-1}L_{n-2}(x,q) \tag{3.17}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlı polinomlara q −Lucas polinomları denir.

Çizelge 3.7. Bazı $L_n(x,q)$ polinomları

n	$L_n(x,q)$
0	2
1	x
2	x^2+2q
3	$x^3+(2+q)qx$
4	$x^4+(2+q+q^2)qx^2+2q^4$
5	$x^5+(2+q+q^2+q^3)qx^3+(2+2q+q^2)q^4x$
6	$x^6+(2+q+q^2+q^3+q^4)qx^4$ $+(2+2q+3q^2+q^3+q^4)q^4x^2+2q^9$

Burada, $q\to 1^-$ seçilirse Lucas polinomları, $q\to 1^-$ ve x yerine $2x$ seçilirse Pell-Lucas polinomları, $q\to 1^-$ ve $x=1$ seçilirse Lucas sayıları, $q\to 1^-$ ve $x=2$ seçilirse Pell-Lucas sayıları elde edilir.



a) $q=0.5$ b) $q=0.7$ c) $q=0.9999$

Şekil 3.2. Bazı $L_n(x,q)$ polinomları

Özellik

Her $n>0$ doğal sayısı için q −Lucas polinomlarının açık formülü

$$L_n(x,q)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\begin{bmatrix}n-k\\k\end{bmatrix}\left(1+\frac{[k]}{[n-k]}\right)q^{k^2}x^{n-2k} \tag{3.18}$$

şeklindedir.

İspat

Teoremin ispatını tümevarım yöntemi ile yapalım.

$n = 1$ için

$$L_1(x,q) = \sum_{k=0}^{0} \begin{bmatrix} 1-k \\ k \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[k]}{[1-k]}\right) q^{k^2} x^{1-2k} = x$$

olup, eşitlik doğrudur.

$n = 2$ için

$$L_2(x,q) = \sum_{k=0}^{1} \begin{bmatrix} 2-k \\ k \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[k]}{[2-k]}\right) q^{k^2} x^{2-2k} = x^2 + 2q$$

olup, eşitlik doğrudur.

$m \geq 3$ olmak üzere, $n = m-1$ ve $n = m$ için eşitlik doğru olsun. $n = m+1$ için eşitliğin doğru olduğunu gösterelim.

$L_{m+1}(x,q) = xL_m(x,q) + q^m L_{m-1}(x,q)$ ifadesinde $L_m(x,q)$ ve $L_{m-1}(x,q)$ e karşılık gelen açık (explicit) formüllerin yerlerine yazılmasıyla

$$L_{m+1}(x,q) = x \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} \begin{bmatrix} m-k \\ k \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[k]}{[m-k]}\right) q^{k^2} x^{m-2k} + q^m \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor} \begin{bmatrix} m-1-k \\ k \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[k]}{[m-1-k]}\right) q^{k^2} x^{m-1-2k}$$

elde edilir.

Bu eşitliğin sağlandığını göstermek için m nin tek ve çift olduğu durumları inceleyelim.

$m = 2t$ olsun. O halde,

$$L_{2t+1}(x,q) = \sum_{k=0}^{t} \begin{bmatrix} 2t-k \\ k \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[k]}{[2t-k]}\right) q^{k^2} x^{2t-2k+1} + \sum_{k=0}^{t-1} \begin{bmatrix} 2t-1-k \\ k \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[k]}{[2t-1-k]}\right) q^{k^2+2t} x^{2t-1-2k}$$

elde edilir. Elde edilen toplam sembolü içeren ifadelerin açılmasıyla;

$$\begin{aligned} L_{2t+1}(x,q) &= \begin{bmatrix} 2t \\ 0 \end{bmatrix} x^{2t+1} + \begin{bmatrix} 2t-1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[1]}{[2t-1]}\right) q x^{2t-1} + \begin{bmatrix} 2t-2 \\ 2 \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[2]}{[2t-2]}\right) q^4 x^{2t-3} \\ &+ \begin{bmatrix} 2t-3 \\ 3 \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[3]}{[2t-3]}\right) q^9 x^{2t-5} + \cdots + \begin{bmatrix} t+2 \\ t-2 \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[t-2]}{[t+2]}\right) q^{(t-2)^2} x^5 \\ &+ \begin{bmatrix} t+1 \\ t-1 \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[t-1]}{[t+1]}\right) q^{(t-1)^2} x^3 + \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[t]}{[t]}\right) q^{t^2} x + \begin{bmatrix} 2t-1 \\ 0 \end{bmatrix} q^{2t} x^{2t-1} \\ &+ \begin{bmatrix} 2t-2 \\ 1 \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[1]}{[2t-2]}\right) q^{2t+1} x^{2t-3} + \begin{bmatrix} 2t-3 \\ 2 \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[2]}{[2t-3]}\right) q^{2t+4} x^{2t-5} \\ &+ \cdots + \begin{bmatrix} t+2 \\ t-3 \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[t-3]}{[t+2]}\right) q^{(t-3)^2+2t} x^5 + \begin{bmatrix} t+1 \\ t-2 \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[t-2]}{[t+1]}\right) q^{(t-2)^2+2t} x^3 \\ &+ \begin{bmatrix} t \\ t-1 \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[t-1]}{[t]}\right) q^{(t-1)^2+2t} x \\ &= \begin{bmatrix} 2t \\ 0 \end{bmatrix} x^{2t+1} + \begin{bmatrix} 2t-1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[0]+[1]}{[2t-1]}\right) q x^{2t-1} + \begin{bmatrix} 2t-1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[0]}{[2t-1]}\right) q^{2t} x^{2t-1} \\ &+ \begin{bmatrix} 2t-2 \\ 2 \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[1]+q}{[2t-2]}\right) q^4 x^{2t-3} + \begin{bmatrix} 2t-2 \\ 1 \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[1]}{[2t-2]}\right) q^{2t+1} x^{2t-3} \\ &+ \cdots + \begin{bmatrix} t+1 \\ t-1 \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[t-2]+q^{t-2}}{[t+1]}\right) q^{(t-1)^2} x^3 \\ &+ \begin{bmatrix} t+1 \\ t-2 \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[t-2]}{[t+1]}\right) q^{(t-2)^2+2t} x^3 + \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[t-1]+q^{t-1}}{[t]}\right) q^{t^2} x \\ &+ \begin{bmatrix} t \\ t-1 \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[t-1]}{[t]}\right) q^{(t-1)^2+2t} x \end{aligned}$$

dır.

Burada gerekli düzenlemelerin yapılıp, Eş.2.8 ifadesinin kullanılmasıyla,

$$L_{2t+1}(x,q) = \begin{bmatrix}2t\\0\end{bmatrix} x^{2t+1} + \begin{bmatrix}2t\\1\end{bmatrix}\left(1+\frac{[0]}{[2t-1]}\right) qx^{2t-1} + \begin{bmatrix}2t-1\\1\end{bmatrix}\frac{[1]}{[2t-1]} qx^{2t-1}$$
$$+ \begin{bmatrix}2t-1\\2\end{bmatrix}\left(1+\frac{[1]}{[2t-2]}\right) q^4 x^{2t-3} + \begin{bmatrix}2t-2\\2\end{bmatrix}\frac{q}{[2t-2]} q^4 x^{2t-3}$$
$$+ \cdots + \begin{bmatrix}t+2\\t-1\end{bmatrix}\left(1+\frac{[t-2]}{[t+1]}\right) q^{(t-1)^2} x^3 + \begin{bmatrix}t+1\\t-1\end{bmatrix}\frac{q^{t-2}}{[t+1]} q^{(t-1)^2} x^3$$
$$+ \begin{bmatrix}t+1\\t\end{bmatrix}\left(1+\frac{[t-1]}{[t]}\right) q^{t^2} + \begin{bmatrix}t\\t\end{bmatrix}\frac{q^{t-1}}{[t]} q^{t^2} x$$
$$= \begin{bmatrix}2t\\0\end{bmatrix} x^{2t+1} + \left\{\left(1+\frac{[0]}{[2t-1]}\right)\begin{bmatrix}2t\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2t-1\\1\end{bmatrix}\frac{[1]}{[2t-1]}\right\} qx^{2t-1}$$
$$+ \left\{\left(1+\frac{[1]}{[2t-2]}\right)\begin{bmatrix}2t-1\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2t-2\\2\end{bmatrix}\frac{q}{[2t-2]}\right\} q^4 x^{2t-3}$$
$$+ \cdots + \left\{\left(1+\frac{[t-2]}{[t+1]}\right)\begin{bmatrix}t+2\\t-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}t+1\\t-1\end{bmatrix}\frac{q^{t-2}}{[t+1]}\right\} q^{(t-1)^2} x^3$$
$$+ \left\{\left(1+\frac{[t-1]}{[t]}\right)\begin{bmatrix}t+1\\t\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}t\\t\end{bmatrix}\frac{q^{t-1}}{[t]}\right\} q^{t^2} x$$

elde edilir.

Parantez içleri düzenlenirse,

$$L_{2t+1}(x,q) = \begin{bmatrix}2t\\0\end{bmatrix} x^{2t+1} + \begin{bmatrix}2t\\1\end{bmatrix}\left(1+\frac{[1]}{[2t]}\right) qx^{2t-1} + \begin{bmatrix}2t-1\\2\end{bmatrix}\left(1+\frac{[2]}{[2t-1]}\right) q^4 x^{2t-3}$$
$$+ \cdots + \begin{bmatrix}t+2\\t-1\end{bmatrix}\left(1+\frac{[t-1]}{[t+2]}\right) q^{(t-1)^2} x^3 + \begin{bmatrix}t+1\\t\end{bmatrix}\left(1+\frac{[t]}{[t+1]}\right) q^{t^2} x$$
$$= \sum_{k=0}^{t} \begin{bmatrix}2t-k+1\\k\end{bmatrix}\left(1+\frac{[k]}{[2t-k+1]}\right) q^{k^2} x^{2t-2k+1} \qquad (3.19)$$

elde edilir.

Eş.3.19 ifadesinde $t = \frac{m}{2}$ alınmasıyla,

$$L_{m+1}(x,q) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor} \begin{bmatrix} m-k+1 \\ k \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[k]}{[m-k+1]}\right) q^{k^2} x^{m-2k+1}$$

elde edilir.

Böylece, m nin çift olduğu durum için eşitlik doğrudur. $m = 2t+1$ olsun.

O halde,

$$L_{2t+2}(x,q) = \sum_{k=0}^{t} \begin{bmatrix} 2t+1-k \\ k \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[k]}{[2t+1-k]}\right) q^{k^2} x^{2t+2-2k} + \sum_{k=0}^{t} \begin{bmatrix} 2t-k \\ k \end{bmatrix} \left(1 + \frac{k}{[2t-k]}\right) q^{k^2+2t+1} x^{2t-2k}$$

elde edilir.

Elde edilen toplam sembolü içeren ifadenin açılmasıyla,

$$\begin{aligned} L_{2t+2}(x,q) = {} & \begin{bmatrix} 2t+1 \\ 0 \end{bmatrix} x^{2t+2} + \begin{bmatrix} 2t \\ 1 \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[1]}{[2t]}\right) q x^{2t} + \begin{bmatrix} 2t-1 \\ 2 \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[2]}{[2t-1]}\right) q^4 x^{2t-2} \\ & + \begin{bmatrix} 2t-2 \\ 3 \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[3]}{[2t-2]}\right) q^9 x^{2t-4} + \cdots + \begin{bmatrix} t+2 \\ t-1 \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[t-1]}{[t+2]}\right) q^{(t-1)^2} x^4 \\ & + \begin{bmatrix} t+1 \\ t \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[t]}{[t+1]}\right) q^{t^2} x^2 + \begin{bmatrix} 2t \\ 0 \end{bmatrix} q^{2t+1} x^{2t} \\ & + \begin{bmatrix} 2t-1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[1]}{[2t-1]}\right) q^{2t+2} x^{2t-2} + \begin{bmatrix} 2t-2 \\ 2 \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[2]}{[2t-2]}\right) q^{2t+5} x^{2t-4} \\ & + \cdots + \begin{bmatrix} t+2 \\ t-2 \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[t-2]}{[t+2]}\right) q^{(t-2)^2+2t+1} x^4 \\ & + \begin{bmatrix} t+1 \\ t-1 \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[t-1]}{[t+1]}\right) q^{(t-1)^2+2t+1} x^2 + \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[t]}{[t]}\right) q^{t^2+2t+1} \\ = {} & \begin{bmatrix} 2t+1 \\ 0 \end{bmatrix} x^{2t+2} + \begin{bmatrix} 2t+1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[1]}{[2t+1]}\right) q x^{2t} + \begin{bmatrix} 2t \\ 2 \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[2]}{[2t]}\right) q^4 x^{2t-2} \end{aligned}$$

$$+\begin{bmatrix}2t-1\\3\end{bmatrix}\left(1+\frac{[3]}{[2t-1]}\right)q^{9}x^{2t-4}+\cdots+\begin{bmatrix}t+4\\t-2\end{bmatrix}\left(1+\frac{[t-2]}{[t+4]}\right)q^{(t-2)^2}x^{6}$$
$$+\begin{bmatrix}t+3\\t-1\end{bmatrix}\left(1+\frac{[t-1]}{[t+3]}\right)q^{(t-1)^2}x^{4}+\begin{bmatrix}t+2\\t\end{bmatrix}\left(1+\frac{[t]}{[t+2]}\right)q^{t^2}x^{2}$$
$$+\begin{bmatrix}t\\t\end{bmatrix}\left(1+\frac{[t]}{[t]}\right)q^{(t+1)^2}$$

olup,

$$L_{2t+2}(x,q)=\sum_{k=0}^{t+1}\begin{bmatrix}2t+2-k\\k\end{bmatrix}\left(1+\frac{[k]}{[2t+2-k]}\right)q^{k^2}x^{2t+2-2k} \tag{3.20}$$

elde edilir.

Eş.3.20 ifadesinde $t=\frac{m-1}{2}$ alınmasıyla,

$$L_{m+1}(x,q)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor}\begin{bmatrix}m-k+1\\k\end{bmatrix}\left(1+\frac{[k]}{[m-k+1]}\right)q^{k^2}x^{m-2k+1}$$

elde edilir. Böylece m nin tek olduğu durum için de eşitlik doğru olup, ispat tamamlanır.

Örnekler

$$L_3(x,q)=\sum_{k=0}^{1}\begin{bmatrix}3-k\\k\end{bmatrix}\left(1+\frac{[k]}{[3-k]}\right)q^{k^2}x^{3-2k}=x^3+(2+q)qx$$

$$L_4(x,q)=\sum_{k=0}^{2}\begin{bmatrix}4-k\\k\end{bmatrix}\left(1+\frac{[k]}{[4-k]}\right)q^{k^2}x^{4-2k}=x^4+(2+q+q^2)qx^2+2q^4$$

4. q −FİBONACCİ VE q −LUCAS POLİNOMLARIN ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, Carlitz'in tanımladığı, indirgeme bağıntısı Eş.3.15 de verilen q −Fibonacci polinomları ve indirgeme bağıntısı Eş.3.17 de verilen q −Lucas polinomları baz alınarak; bu polinomların üreteç fonksiyonları, aralarındaki ilişkiler, türevli ilişkileri, toplam formülleri elde edilmiştir. Ayrıca Cassini ve Honsberger özdeşlikleri başta olmak üzere bazı özdeşlikler elde edilmiştir. Elde edilen bağıntı ve özelliklerde x, q değişkenlerinin özel değerleri için, Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas polinom ve sayılarının bilinen bağıntı ve özelliklerinin elde edilebildiği görülmüştür.

$f(z)$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere, Andrews η_z operatörünü $\eta_z\big(f(z)\big) = f(qz)$ şeklinde tanımlamıştır [1].

4.1. Teorem

q −Fibonacci polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$\mathrm{S}(z) = \frac{z}{1 - xz - z^2\eta_z} \tag{4.1}$$

dir.

İspat

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x,q)\, z^n$$

olsun. Bu durumda,

$(1 - xz - z^2\eta_z)S(z) = z$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanır.

$$T(x) = S(z) - xzS(z) - z^2\eta_z S(z)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x,q)z^n - x\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x,q)z^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x,q)\, z^2\eta_z(z^n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x,q)z^n - x\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x,q)z^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x,q)\, z^{n+2}q^n$$

$$= F_0(x,q) + F_1(x,q)z + \sum_{n=2}^{\infty} F_n(x,q)\, z^n - xzF_0(x,q) - x\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x,q)z^{n+1}$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x,q)\, z^{n+2}q^n$$

$$= F_0(x,q) + F_1(x,q)z + \sum_{n=2}^{\infty} F_n(x,q)\, z^n - xzF_0(x,q) - x\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1}(x,q)z^n$$

$$- \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2}(x,q)\, z^n q^{n-2}$$

$$= F_0(x,q) + F_1(x,q)z - xzF_0(x,q)$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \{F_n(x,q) - xF_{n-1}(x,q) - q^{n-2}F_{n-2}(x,q)\}z^n$$

olur. Burada Eş.3.15 ifadesi göz önüne alınıp, $F_0(x,q) = 0$ ve $F_1(x,q) = 1$ başlangıç değerleri yerlerine yazılırsa

$$S(z) - xzS(z) - z^2\eta_z S(z) = z$$

elde edilir.

4.2. Teorem

q −Lucas polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$\mathrm{G}(z) = \frac{2 - xz}{1 - xz - qz^2\eta_z} \tag{4.2}$$

dir.

İspat

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x,q)\, z^n$$

olsun. Bu durumda,

$(1 - xz - qz^2\eta_z)G(z) = 2 - xz$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanır.

$$\begin{aligned}
K(x) &= G(z) - xzG(z) - qz^2\eta_z G(z) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x,q)z^n - x\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x,q)z^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x,q)\, qz^2\eta_z(z^n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x,q)z^n - x\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x,q)z^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x,q)\, z^{n+2}q^{n+1} \\
&= L_0(x,q) + L_1(x,q)z + \sum_{n=2}^{\infty} L_n(x,q)\, z^n - xzL_0(x,q) - x\sum_{n=1}^{\infty} L_n(x,q)z^{n+1} \\
&\quad - \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x,q)\, z^{n+2}q^{n+1} \\
&= L_0(x,q) + L_1(x,q)z + \sum_{n=2}^{\infty} L_n(x,q)\, z^n - xzL_0(x,q) - x\sum_{n=2}^{\infty} L_{n-1}(x,q)z^n \\
&\quad - \sum_{n=2}^{\infty} L_{n-2}(x,q)\, z^n q^{n-1} \\
&= L_0(x,q) + L_1(x,q)z - xzL_0(x,q) \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \{L_n(x,q) - xL_{n-1}(x,q) - q^{n-1}L_{n-2}(x,q)\}z^n
\end{aligned}$$

olur. Burada Eş.3.17 ifadesi göz önüne alınıp, $L_0(x,q) = 2$ ve $L_1(x,q) = x$ başlangıç değerleri yerlerine yazılırsa

$$G(z) - xzG(z) - qz^2\eta_z G(z) = 2 - xz$$

elde edilir.

Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas polinomlarının üreteç fonksiyonları Eş.4.1 ve Eş.4.2 de sırasıyla;

$q \to 1^{-}$ alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)z^n = \frac{z}{1-xz-z^2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)z^n = \frac{2-xz}{1-xz-z^2}$$

$q \to 1^{-}$ ve x yerine $2x$ alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n = \frac{z}{1-2xz-z^2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x)z^n = \frac{2-2xz}{1-2xz-z^2}$$

Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas sayılarının üreteç fonksiyonları Eş.4.1 ve Eş.4.2 de sırasıyla;

$q \to 1^{-}$ ve $x = 1$ alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n = \frac{z}{1-z-z^2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} L_n z^n = \frac{2-z}{1-z-z^2}$$

$q \to 1^{-}$ ve x yerine 2 alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n = \frac{z}{1-2z-z^2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} Q_n z^n = \frac{2-2z}{1-2z-z^2}$$

elde edilir.

4.1. Lemma

Her $0 \leq k \leq n$ doğal sayıları için

$$\begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[k]}{[n-k]}\right)$$

dir.

İspat

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} &= \frac{[n-k]!}{[n-2k]!\,[k]!} + \frac{[n-k-1]!\,[k]}{[n-2k]!\,[k-1]!\,[k]} \\ &= \frac{[n-k]! + [n-k-1]!\,[k]}{[n-2k]!\,[k]!} \\ &= \frac{[n-k][n-k-1]! + [n-k-1]!\,[k]}{[n-2k]!\,[k]!} \\ &= \frac{[n-k-1]!\,([n-k]+[k])[n-k]}{[n-2k]!\,[k]!\,[n-k]} \\ &= \frac{[n-k]!\,([n-k]+[k])}{[n-2k]!\,[k]!\,[n-k]} \\ &= \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[k]}{[n-k]}\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

4.3. Teorem

Her $n > 0$ doğal sayısı için q −Fibonacci ve q −Lucas polinomlarının aralarındaki ilişki

$$L_n(x,q) = F_{n+1}(x,q) + q^{n-1} F_{n-1}\left(\frac{x}{q}, q\right) \tag{4.3}$$

dir.

İspat

$$F_{n+1}(x,q) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} q^{k^2}\, x^{n-2k}$$

$$q^{n-1}F_{n-1}\left(\frac{x}{q},q\right)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor}\begin{bmatrix}n-k-2\\k\end{bmatrix}q^{(k+1)^2}\,x^{n-2k-2}$$

olduğu kullanılarak,

$$F_{n+1}(x,q)+q^{n-1}F_{n-1}\left(\frac{x}{q},q\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\begin{bmatrix}n-k\\k\end{bmatrix}q^{k^2}\,x^{n-2k}+\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor}\begin{bmatrix}n-k-2\\k\end{bmatrix}q^{(k+1)^2}\,x^{n-2k-2}$$

$$=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\begin{bmatrix}n-k\\k\end{bmatrix}q^{k^2}\,x^{n-2k}+\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\begin{bmatrix}n-k-1\\k-1\end{bmatrix}q^{k^2}\,x^{n-2k}$$

$$=x^n+\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\begin{bmatrix}n-k\\k\end{bmatrix}q^{k^2}\,x^{n-2k}+\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\begin{bmatrix}n-k-1\\k-1\end{bmatrix}q^{k^2}\,x^{n-2k}$$

$$=x^n+\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\left(\begin{bmatrix}n-k\\k\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n-k-1\\k-1\end{bmatrix}\right)q^{k^2}\,x^{n-2k}$$

elde edilir. Lemma.4.1 den,

$$F_{n+1}(x,q)+q^{n-1}F_{n-1}\left(\frac{x}{q},q\right)=x^n+\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\begin{bmatrix}n-k\\k\end{bmatrix}\left(1+\frac{[k]}{[n-k]}\right)q^{k^2}\,x^{n-2k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\begin{bmatrix}n-k\\k\end{bmatrix}\left(1+\frac{[k]}{[n-k]}\right)q^{k^2}\,x^{n-2k}$$

$$=L_n(x,q)$$

elde edilir.

Fibonacci ve Lucas polinomlarının aralarındaki ilişki Eş.4.3 de $q\to 1^{-}$ alınmasıyla,

$$L_n(x)=F_{n+1}(x)+F_{n-1}(x)$$

Fibonacci ve Lucas sayılarının aralarındaki ilişki Eş.4.3 de $q \to 1^{-}$ ve $x = 1$ alınmasıyla,

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$$

Pell ve Pell-Lucas polinomlarının aralarındaki ilişki Eş.4.3 de $q \to 1^{-}$ ve x yerine $2x$ alınmasıyla,

$$Q_n(x) = P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x)$$

Benzer şekilde Pell ve Pell-Lucas sayılarının aralarındaki ilişki

$$Q_n = P_{n+1} + P_{n-1}$$

elde edilir.

4.2. Lemma

Her $0 \leq k \leq n$ doğal sayıları için

$$\begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[k]}{[n-k]}\right) [n-2k] = \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix} ([n-k] + [k])$$

dir.

İspat

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[k]}{[n-k]}\right) [n-2k] &= \frac{[n-k]!}{[n-2k]!\,[k]!} \left(\frac{[n-k]+[k]}{[n-k]}\right) [n-2k] \\ &= \frac{[n-k-1]!}{[n-2k-1]!\,[k]!} ([n-k]+[k]) \\ &= \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix} ([n-k]+[k]) \end{aligned}$$

dir.

4.3. Lemma

Her $0 \leq k \leq n$ doğal sayıları için

$$\begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix} [n-k] = \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} [n-2k]$$

dir.

İspat

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix} [n-k] &= \frac{[n-k-1]!}{[n-2k-1]!\,[k]!} [n-k] \frac{[n-2k]}{[n-2k]} \\ &= \frac{[n-k]!}{[n-2k]!\,[k]!} [n-2k] \\ &= \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} [n-2k] \end{aligned}$$

dir.

4.4. Teorem

q −Fibonacci ve q −Lucas polinomlarının q −türevli ilişkileri, her $n > 0$ doğal sayısı için,

$$\mathcal{D}_q L_n(x,q) = [n] F_n(x,q) + \mathcal{D}_q F_{n+1}(x,q) - \sqrt{q}^{\,n} \mathcal{D}_q F_{n+1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}}, q\right) \tag{4.4}$$

dir.

İspat

$$\mathcal{D}_q L_n(x,q) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[k]}{[n-k]}\right) [n-2k] q^{k^2} x^{n-2k-1}$$

dir.

Lemma.4.2 kullanılarak,

$$\mathcal{D}_q L_n(x,q) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix} ([n-k]+[k]) q^{k^2} x^{n-2k-1}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_q L_n(x,q) &= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix} ([n-k]+[k]) q^{k^2} x^{n-2k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix} ([n-k]+[k] \pm q^k[n-k]) q^{k^2} x^{n-2k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix} ([k]+q^k[n-k]+[n-k]-q^k[n-k]) q^{k^2} x^{n-2k-1} \end{aligned}$$

olup, Eş.2.11 ifadesinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_q L_n(x,q) &= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix} \left([n]+[n-k](1-q^k) \right) q^{k^2} x^{n-2k-1} \\ &= [n]F_n(x,q) + \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix} [n-k]\,(1-q^k) q^{k^2} x^{n-2k-1} \\ &= [n]F_n(x,q) + \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix} [n-k]\, q^{k^2} x^{n-2k-1} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix} [n-k]\, q^{k^2} q^k x^{n-2k-1} \end{aligned}$$

dir.

Lemma.4.3 ün kullanılmasıyla,

$$\mathcal{D}_q L_n(x,q) = [n]F_n(x,q) + \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} [n-2k]\, q^{k^2} x^{n-2k-1}$$

$$- \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix} [n-k]\, q^{k^2} q^k x^{n-2k-1}$$

$$= [n]F_n(x,q) + \mathcal{D}_q F_{n+1}(x,q) - \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix} [n-k]\, q^{k^2} q^k x^{n-2k-1}$$

dir.

Lemma.4.3 ve $q^k = \left(\frac{1}{\sqrt{q}}\right)^{-2k} \left(\frac{1}{\sqrt{q}}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{q}}\right)^{-n+1}$ eşitliği kullanıldığında,

$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix} [n-k]\, q^{k^2} q^k x^{n-2k-1} = \sqrt{q}^{n-1} \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} [n-2k]\, q^{k^2} \left(\frac{x}{\sqrt{q}}\right)^{n-2k-1}$$

$$= \sqrt{q}^{n} \mathcal{D}_q F_{n+1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}}, q\right)$$

olduğu görülür.

Böylece,

$$\mathcal{D}_q L_n(x,q) = [n]F_n(x,q) + \mathcal{D}_q F_{n+1}(x,q) - \sqrt{q}^{n} \mathcal{D}_q F_{n+1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}}, q\right)$$

elde edilir.

Fibonacci ve Lucas polinomlarının türevli ilişkileri Eş.4.4 de $q \to 1^-$ alınmasıyla,

$$\frac{dL_n(x)}{dx} = nF_n(x)$$

Pell ve Pell-Lucas polinomlarının türevli ilişkileri Eş.4.4 de $q \to 1^{-}$ ve x yerine $2x$ alınmasıyla,

$$\frac{dQ_n(x)}{dx} = nP_n(x)$$

olarak elde edilir.

Cigler, Fibonacci polinomlarının q −benzerleri için yeni bir yöntem kullanarak literatürde olmayan q −Cassini formülünü elde etmiştir [10]. Bu çalışmada da, bu yöntemden faydalanılarak baz alınan q −Fibonacci polinomları için q −Cassini formülü elde edilmiştir.

4.5. Teorem

Her $k > 0$ doğal sayısı için

$$A_k = \begin{bmatrix} x & 1 \\ q^{k-1} & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlı 2×2 tipinde kare matrisler olmak üzere,

$$M_n = \begin{bmatrix} F_{n+1}(x,q) & F_n(x,q) \\ \sqrt{q}^{n-1} F_n\left(\frac{x}{\sqrt{q}}, q\right) & \sqrt{q}^{n-2} F_{n-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}}, q\right) \end{bmatrix} = A_1 A_2 A_3 \dots A_n \qquad (4.5)$$

dir.

İspat

Teoremin ispatını tümevarım yöntemi ile yapalım.

$n = 1$ için

$$M_1 = \begin{bmatrix} F_2(x,q) & F_1(x,q) \\ F_1\left(\frac{x}{\sqrt{q}},q\right) & F_0\left(\frac{x}{\sqrt{q}},q\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A_1$$

olup eşitlik doğrudur.

$n = 2$ için

$$M_2 = \begin{bmatrix} F_3(x,q) & F_2(x,q) \\ \sqrt{q}F_2\left(\frac{x}{\sqrt{q}},q\right) & F_1\left(\frac{x}{\sqrt{q}},q\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2+q & x \\ x & 1 \end{bmatrix} = A_1A_2$$

olup eşitlik doğrudur..

$n\ (n > 2)$ için eşitlik doğru olsun. Yani,

$$M_n = \begin{bmatrix} F_{n+1}(x,q) & F_n(x,q) \\ \sqrt{q}^{n-1}F_n\left(\frac{x}{\sqrt{q}},q\right) & \sqrt{q}^{n-2}F_{n-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}},q\right) \end{bmatrix} = A_1A_2A_3 \dots A_n$$

olsun.

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= \begin{bmatrix} F_{n+2}(x,q) & F_{n+1}(x,q) \\ \sqrt{q}^{n}F_{n+1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}},q\right) & \sqrt{q}^{n-1}F_n\left(\frac{x}{\sqrt{q}},q\right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} xF_{n+1}(x,q)+q^nF_n(x,q) & F_{n+1}(x,q) \\ \sqrt{q}^{n}\frac{x}{\sqrt{q}}F_n\left(\frac{x}{\sqrt{q}},q\right)+\sqrt{q}^{n}q^{n-1}F_{n-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}},q\right) & \sqrt{q}^{n-1}F_n\left(\frac{x}{\sqrt{q}},q\right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{n+1}(x,q) & F_n(x,q) \\ \sqrt{q}^{n-1}F_n\left(\frac{x}{\sqrt{q}},q\right) & \sqrt{q}^{n-2}F_{n-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}},q\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 1 \\ q^n & 0 \end{bmatrix} \\ &= M_nA_{n+1} \\ &= A_1A_2A_3 \dots A_{n+1} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $n+1$ için iddia doğru olup, ispat tamamlanır.

4.6. Teorem

Her $n > 0$ doğal sayısı için q −Fibonacci polinomlarının q −Cassini formülü

$$F_{n+1}(x,q)F_{n-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}},q\right) - \sqrt{q}F_n(x,q)F_n\left(\frac{x}{\sqrt{q}},q\right) = (-1)^n q^{\frac{(n-1)^2+1}{2}} \tag{4.6}$$

şeklindedir.

İspat

Teorem.4.5 den,

$M_n = A_1A_2A_3 \dots A_n$

dir. Determinant fonksiyonunun özelliğinden

$det(M_n) = det(A_1)det(A_2)det(A_3) \dots det(A_n)$

olduğu kullanılarak,

$$detM_n = \sqrt{q}^{n-2}F_{n+1}(x,q)F_{n-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}},q\right) - \sqrt{q}^{n-1}F_n(x,q)F_n\left(\frac{x}{\sqrt{q}},q\right)$$

ve

$$det(A_1)det(A_2)det(A_3) \dots det(A_n) = (-1)(-q)(-q^2)(-q^3) \dots (-q^{n-1})$$
$$= (-1)^n q^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

elde edilir. Böylece,

$$\sqrt{q}^{n-2}F_{n+1}(x,q)F_{n-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}},q\right) - \sqrt{q}^{n-1}F_n(x,q)F_n\left(\frac{x}{\sqrt{q}},q\right) = (-1)^n q^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

olur. Bu son eşitlikte her iki taraf $\sqrt{q}^{2-n}$ ile çarpılırsa,

$$F_{n+1}(x,q)F_{n-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}},q\right)-\sqrt{q}F_n(x,q)F_n\left(\frac{x}{\sqrt{q}},q\right)=(-1)^n q^{\frac{(n-1)^2+1}{2}}$$

elde edilir.

Fibonacci polinomlarının Cassini formülü Eş.4.6 da $q\to 1^-$ alınmasıyla,

$$F_{n+1}(x)F_{n-1}(x)-F_n(x)^2=(-1)^n$$

Fibonacci sayılarının Cassini formülü Eş.4.6 da $q\to 1^-$ ve $x=1$alınmasıyla,

$$F_{n+1}F_{n-1}-{F_n}^2=(-1)^n$$

olarak elde edilir.

4.7. Teorem

Her $k,n>0$ doğal sayıları için

$$A_{n+1}A_{n+2}A_{n+3}\dots A_{n+k}$$
$$=\begin{bmatrix}\sqrt{q}^{kn}F_{k+1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}^n},q\right) & \sqrt{q}^{(k-1)n}F_k\left(\frac{x}{\sqrt{q}^n},q\right)\\ \sqrt{q}^{(k-1)(n+1)+2n}F_{k+1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n+1}},q\right) & \sqrt{q}^{(k-2)(n+1)+2n}F_{k-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n+1}},q\right)\end{bmatrix} \qquad (4.7)$$

dir.

İspat

Teoremin ispatını tümevarım yöntemi ile yapalım. $k=1$ için

$$A_{n+1}=\begin{bmatrix} x & 1 \\ q^n & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{q}^{n}F_2\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n}},q\right) & F_1\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n}},q\right) \\ \sqrt{q}^{2n}F_2\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n+1}},q\right) & \sqrt{q}^{n-1}F_0\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n+1}},q\right) \end{bmatrix}$$

olup eşitlik doğrudur. $k=2$ için

$$A_{n+1}A_{n+2}=\begin{bmatrix} x^2+q^{n+1} & x \\ q^n x & q^n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{q}^{2n}F_3\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n}},q\right) & \sqrt{q}^{n}F_2\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n}},q\right) \\ \sqrt{q}^{(n+1)+2n}F_2\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n+1}},q\right) & \sqrt{q}^{2n}F_1\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n+1}},q\right) \end{bmatrix}$$

olup eşitlik doğrudur. Eşitliğin k $(k>2)$ için doğru olduğu kabul edilsin. Yani,

$$A_{n+1}A_{n+2}A_{n+3}\dots A_{n+k}=\begin{bmatrix} \sqrt{q}^{kn}F_{k+1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n}},q\right) & \sqrt{q}^{(k-1)n}F_k\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n}},q\right) \\ \sqrt{q}^{(k-1)(n+1)+2n}F_{k+1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n+1}},q\right) & \sqrt{q}^{(k-2)(n+1)+2n}F_{k-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n+1}},q\right) \end{bmatrix}$$

olsun.

$A_{n+1}A_{n+2}A_{n+3}\dots A_{n+k}A_{n+k+1}$

$$=\begin{bmatrix} \sqrt{q}^{kn}F_{k+1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n}},q\right) & \sqrt{q}^{(k-1)n}F_k\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n}},q\right) \\ \sqrt{q}^{(k-1)(n+1)+2n}F_{k+1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n+1}},q\right) & \sqrt{q}^{(k-2)(n+1)+2n}F_{k-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n+1}},q\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 1 \\ q^{n+k} & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \sqrt{q}^{(k+1)n}F_{k+2}\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n}},q\right) & \sqrt{q}^{kn}F_{k+1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n}},q\right) \\ \sqrt{q}^{k(n+1)+2n}F_{k+1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n+1}},q\right) & \sqrt{q}^{(k-1)(n+1)+2n}F_k\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n+1}},q\right) \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece $n+1$ için iddia doğru olup, ispat tamamlanır.

Teorem.4.5 den,

$$M_{n+k} = A_1A_2A_3 \dots A_nA_{n+1}A_{n+2}A_{n+3} \dots A_{n+k}$$
$$= M_nA_{n+1}A_{n+2}A_{n+3} \dots A_{n+k}$$

olup, bu eşitlikteki matrislerin yerlerine yazılmasıyla;

$$M_{n+k} = \begin{bmatrix} F_{n+k+1}(x,q) & F_{n+k}(x,q) \\ \sqrt{q}^{n+k-1}F_{n+k}\left(\frac{x}{\sqrt{q}},q\right) & \sqrt{q}^{n+k-2}F_{n+k-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}},q\right) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} F_{n+1}(x,q) & F_n(x,q) \\ \sqrt{q}^{n-1}F_n\left(\frac{x}{\sqrt{q}},q\right) & \sqrt{q}^{n-2}F_{n-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}},q\right) \end{bmatrix}$$
$$\times \begin{bmatrix} \sqrt{q}^{kn}F_{k+1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}^n},q\right) & \sqrt{q}^{(k-1)n}F_k\left(\frac{x}{\sqrt{q}^n},q\right) \\ \sqrt{q}^{(k-1)(n+1)+2n}F_{k+1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n+1}},q\right) & \sqrt{q}^{(k-2)(n+1)+2n}F_{k-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n+1}},q\right) \end{bmatrix}$$

elde edilir.

$$M_{n+k} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

olarak alalım. Bu durumda,

$$a_{11} = \sqrt{q}^{kn}F_{k+1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}^n},q\right)F_{n+1}(x,q) + \sqrt{q}^{kn+k+n-1}F_k\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n+1}},q\right)F_n(x,q)$$

$$a_{12} = \sqrt{q}^{(k-1)n}F_k\left(\frac{x}{\sqrt{q}^n},q\right)F_{n+1}(x,q) + \sqrt{q}^{(k-2)(n+1)+2n}F_{k-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n+1}},q\right)F_n(x,q)$$

$$a_{21} = \sqrt{q}^{kn+n-1} F_{k+1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n}}, q\right) F_n\left(\frac{x}{\sqrt{q}}, q\right) + \sqrt{q}^{kn+k+2n-3} F_k\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n+1}}, q\right) F_{n-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}}, q\right)$$

$$a_{22} = \sqrt{q}^{kn-1} F_k\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n}}, q\right) F_n\left(\frac{x}{\sqrt{q}}, q\right) + \sqrt{q}^{kn+k+n-4} F_{k-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n+1}}, q\right) F_{n-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}}, q\right)$$

olacaktır.

4.8. Teorem

Her $n, k > 0$ doğal sayıları için q −Fibonacci polinomlarının Honsberger formülü

$$\sqrt{q}^{(1-k)n} F_{n+k}(x,q) = F_k\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n}}, q\right) F_{n+1}(x,q) + \sqrt{q}^{k+n-2} F_{k-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n+1}}, q\right) F_n(x,q) \qquad (4.9)$$

dir.

İspat

Eş.4.8 ifadesinde eşitliği verilen matrislerin, birinci satır ve ikinci sütuna denk gelen elemanları da birbirine eşit olacağından,

$$F_{n+k}(x,q) = \sqrt{q}^{(k-1)n} F_k\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n}}, q\right) F_{n+1}(x,q) + \sqrt{q}^{(k-2)(n+1)+2n} F_{k-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n+1}}, q\right) F_n(x,q)$$

olur. Eşitliğin her iki tarafı $\sqrt{q}^{(1-k)n}$ ile çarpılırsa,

$$\sqrt{q}^{(1-k)n} F_{n+k}(x,q) = F_k\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n}}, q\right) F_{n+1}(x,q) + \sqrt{q}^{k+n-2} F_{k-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n+1}}, q\right) F_n(x,q)$$

elde edilir.

Fibonacci polinomlarının Honsberger formülü Eş.4.9 da $q \to 1^{-}$ alınmasıyla,

$$F_{n+k}(x) = F_k(x)F_{n+1}(x) + F_{k-1}(x)F_n(x)$$

Fibonacci sayılarının Honsberger formülü Eş.4.9 da $q \to 1^{-}$ ve $x = 1$ alınmasıyla,

$$F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1}F_n$$

olarak elde edilir.

4.9. Teorem

Her $n, k > 0$ doğal sayıları için

$$\sqrt{q}^{-kn} F_{n+k+1}(x,q) = F_{k+1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n}}, q\right) F_{n+1}(x,q) + \sqrt{q}^{k+n-1} F_k\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n+1}}, q\right) F_n(x,q) \qquad (4.10)$$

dir.

İspat

Eş.4.8 ifadesinde eşitliği verilen matrislerin, birinci satır ve sütuna denk gelen elemanları da birbirine eşit olacağından,

$$F_{n+k+1}(x,q) = \sqrt{q}^{kn} F_{k+1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n}}, q\right) F_{n+1}(x,q) + \sqrt{q}^{kn+k+n-1} F_k\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n+1}}, q\right) F_n(x,q)$$

olur.

Eşitliğin her iki tarafı $\sqrt{q}^{-kn}$ ile çarpılırsa,

$$\sqrt{q}^{-kn} F_{n+k+1}(x,q) = F_{k+1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n}}, q\right) F_{n+1}(x,q) + \sqrt{q}^{k+n-1} F_k\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n+1}}, q\right) F_n(x,q)$$

elde edilir.

Eş.4.10 da $q \to 1^{-}$ ve $x = 1$ alınmasıyla Fibonacci sayıları için geçerli olan,

$$F_{n+k+1} = F_{k+1}F_{n+1} + F_k F_n$$

formülü elde edilir.

4.1. Sonuç

Her $n > 0$ doğal sayısı için,

$$\sqrt{q}^{-n^2} F_{2n+1}(x,q) = F_{n+1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n}}, q\right) F_{n+1}(x,q) + \sqrt{q}^{2n-1} F_n\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n+1}}, q\right) F_n(x,q) \qquad (4.11)$$

dir.

İspat

Eş.4.10 ifadesinde k yerine n alınırsa yukarıdaki eşitlik elde edilir.

Eş.4.11 ifadesinde $q \to 1^{-}$ ve $x = 1$ alınmasıyla Fibonacci sayıları için geçerli olan,

$$F_{2n+1} = {F_{n+1}}^2 + {F_n}^2$$

formülü elde edilir.

4.10. Teorem

Her $n, k > 0$ doğal sayıları için

$$\sqrt{q}^{k(1-n)} F_{n+k}\left(\frac{x}{\sqrt{q}}, q\right) = F_{k+1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n}}, q\right) F_n\left(\frac{x}{\sqrt{q}}, q\right) + \sqrt{q}^{k+n-2} F_k\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n+1}}, q\right) F_{n-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}}, q\right) \qquad (4.12)$$

dir.

İspat

Eş.4.8 ifadesinde eşitliği verilen matrislerin, ikinci satır ve birinci sütuna denk gelen elemanları da birbirine eşit olacağından,

$$\sqrt{q}^{n+k-1} F_{n+k}\left(\frac{x}{\sqrt{q}}, q\right)$$
$$= \sqrt{q}^{kn+n-1} F_{k+1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n}}, q\right) F_n\left(\frac{x}{\sqrt{q}}, q\right) + \sqrt{q}^{kn+k+2n-3} F_k\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n+1}}, q\right) F_{n-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}}, q\right)$$

olur.

Eşitliğin her iki tarafı $\sqrt{q}^{1-n-kn}$ ile çarpılırsa,

$$\sqrt{q}^{k(1-n)} F_{n+k}\left(\frac{x}{\sqrt{q}}, q\right) = F_{k+1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n}}, q\right) F_n\left(\frac{x}{\sqrt{q}}, q\right) + \sqrt{q}^{k+n-2} F_k\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n+1}}, q\right) F_{n-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}}, q\right)$$

elde edilir.

Eş.4.12 ifadesinde $q \to 1^{-}$ ve $x = 1$ alınmasıyla Fibonacci sayıları için geçerli olan,

$$F_{n+k} = F_{k+1} F_n + F_k F_{n-1}$$

formülü elde edilir.

4.2. Sonuç

Her $n > 0$ doğal sayısı için,

$$\sqrt{q}^{n(1-n)} F_{2n}\left(\frac{x}{\sqrt{q}}, q\right) = F_{n+1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n}}, q\right) F_n(x,q) + \sqrt{q}^{2(n-1)} F_n\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n+1}}, q\right) F_{n-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}}, q\right) \quad (4.13)$$

olur.

İspat

Eş.4.12 ifadesinde k yerine n alınırsa, yukarıdaki eşitlik elde edilir.

Eş.4.13 ifadesinde $q \to 1^{-}$ ve $x = 1$ alınmasıyla Fibonacci sayıları için geçerli olan,

$$F_{2n} = F_{n+1}F_n + F_nF_{n-1}$$

formülü elde edilir.

4.11. Teorem

q −Fibonacci polinomlarının toplam formülü

$$\sum_{k=0}^{n} F_k(x,q)(x - 1 + q^k) = F_{n+1}(x,q) + q^n F_n(x,q) - 1 \quad (4.14)$$

dir.

İspat

Eş.3.15 ifadesinden yola çıkarak,

$$xF_{n-1}(x,q) = F_n(x,q) - q^{n-2}F_{n-2}(x,q)$$

yazılabilir.

Elde edilen ifadenin açılmasıyla,

$$xF_0(x,q) = F_1(x,q) - 1$$
$$xF_1(x,q) = F_2(x,q) - q^0F_0(x,q)$$
$$xF_2(x,q) = F_3(x,q) - q^1F_1(x,q)$$
$$xF_3(x,q) = F_4(x,q) - q^2F_2(x,q)$$
$$\vdots$$
$$xF_{n-4}(x,q) = F_{n-3}(x,q) - q^{n-5}F_{n-5}(x,q)$$
$$xF_{n-3}(x,q) = F_{n-2}(x,q) - q^{n-4}F_{n-4}(x,q)$$
$$xF_{n-2}(x,q) = F_{n-1}(x,q) - q^{n-3}F_{n-3}(x,q)$$
$$xF_{n-1}(x,q) = F_n(x,q) - q^{n-2}F_{n-2}(x,q)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerin taraf tarafa toplanmasıyla,

$$\sum_{k=0}^{n-1} xF_k(x,q) = F_n(x,q) + F_{n-1}(x,q) - 1 + F_1(x,q) - qF_1(x,q) + F_2(x,q) - q^2F_2(x,q) + F_3(x,q) - q^3F_3(x,q) + \cdots + F_{n-2}(x,q) - q^{n-2}F_{n-2}(x,q)$$

elde edilir.

Eşitliğin sağ tarafına $q^{n-1}F_{n-1}(x,q)$ ve $xF_n(x,q)$ eklenip çıkarılırsa,

$$\sum_{k=0}^{n-1} xF_k(x,q) = xF_n(x,q) + q^{n-1}F_{n-1}(x,q) - 1 + F_1(x,q) - qF_1(x,q) + F_2(x,q) - q^2F_2(x,q) + F_3(x,q) - q^3F_3(x,q) + \cdots + F_{n-1}(x,q) - q^{n-1}F_{n-1}(x,q)$$
$$= F_{n+1}(x,q) - 1 + (1-x)F_n(x,q) + \sum_{k=0}^{n-1} F_k(x,q)\,(1-q^k)$$

olup, burada çeşitli düzenlemeler yapılırsa,

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_k(x,q)\,(x - 1 + q^k) = F_{n+1}(x,q) - 1 + (1-x)F_n(x,q)$$

eşitliği elde edilir.

Eşitliğin sağ tarafına $q^n F_n(x,q)$ eklenip çıkarıldığında,

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_k(x,q)\,(x-1+q^k) = F_{n+1}(x,q) + q^n F_n(x,q) - 1 - (x-1+q^n)F_n(x,q)$$

olup, bu ifade düzenlendiğinde de,

$$\sum_{k=0}^{n} F_k(x,q)\,(x-1+q^k) = F_{n+1}(x,q) + q^n F_n(x,q) - 1$$

elde edilir.

Burada,

$q \to 1^-$ seçilmesiyle Fibonacci polinomlarının toplam formülü

$$\sum_{k=0}^{n} F_k(x) = \frac{1}{x}\left[F_{n+1}(x) + F_n(x) - 1\right]$$

$q \to 1^-$ ve $x = 1$ seçilmesiyle Fibonacci sayılarının toplam formülü

$$\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$$

$q \to 1^-$ ve x yerine $2x$ seçilmesiyle Pell polinomlarının toplam formülü

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(x) = \frac{1}{2x}\left[P_{n+1}(x) + P_n(x) - 1\right]$$

$q \to 1^-$ ve $x = 2$ seçilmesiyle Pell sayılarının toplam formülü

$$\sum_{k=0}^{n} P_k = \frac{1}{2}[P_{n+1} + P_n - 1]$$

olarak elde edilir.

4.12. Teorem

q −Lucas polinomlarının toplam formülü

$$\sum_{k=0}^{n} L_k(x,q)(x - 1 + q^{k+1}) = L_{n+1}(x,q) + q^{n+1}L_n(x,q) + x - 2 \qquad (4.15)$$

dir.

İspat

Eş.3.17 ifadesinden yola çıkarak,

$$xL_{n-1}(x,q) = L_n(x,q) - q^{n-1}L_{n-2}(x,q)$$

yazılabilir.

Elde edilen ifadenin açılmasıyla,

$$xL_0(x,q) = L_1(x,q) - (-x)$$
$$xL_1(x,q) = L_2(x,q) - qL_0(x,q)$$
$$xL_2(x,q) = L_3(x,q) - q^2L_1(x,q)$$
$$xL_3(x,q) = L_4(x,q) - q^3L_2(x,q)$$
$$\vdots$$
$$xL_{n-4}(x,q) = L_{n-3}(x,q) - q^{n-4}L_{n-5}(x,q)$$
$$xL_{n-3}(x,q) = L_{n-2}(x,q) - q^{n-3}L_{n-4}(x,q)$$
$$xL_{n-2}(x,q) = L_{n-1}(x,q) - q^{n-2}L_{n-3}(x,q)$$
$$xL_{n-1}(x,q) = L_n(x,q) - q^{n-1}L_{n-2}(x,q)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerin taraf tarafa toplanmasıyla,

$$\sum_{k=0}^{n-1} xL_k(x,q) = L_n(x,q) + L_{n-1}(x,q) + x - 2q + L_1(x,q) - q^2L_1(x,q) + L_2(x,q) - q^3L_2(x,q) + L_3(x,q) - q^4L_3(x,q) + \cdots + L_{n-2}(x,q) - q^{n-1}L_{n-2}(x,q)$$

elde edilir.

Eşitliğin sağ tarafına $xL_n(x,q)$, $q^nL_{n-1}(x,q)$, x ve 2 eklenip çıkarılırsa,

$$\sum_{k=0}^{n-1} xL_k(x,q) = L_{n+1}(x,q) - x + (1-x)L_n(x,q) + 2x - 2 + \sum_{k=0}^{n-1} L_k(x,q)\,(1-q^{k+1})$$

elde edilir.

Buradan,

$$\sum_{k=0}^{n-1} L_k(x,q)(x-1+q^{k+1}) = L_{n+1}(x,q) - x + (1-x)L_n(x,q) + 2x - 2$$

eşitliği elde edilir.

Eşitliğin sağ tarafına $q^{n+1}L_n(x,q)$ eklenip çıkarılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\sum_{k=0}^{n} L_k(x,q)(x-1+q^{k+1}) = L_{n+1}(x,q) + q^{n+1}L_n(x,q) + x - 2$$

elde edilir.

Burada,

$q \to 1^-$ seçilmesiyle Lucas polinomlarının toplam formülü

$$\sum_{k=0}^{n} L_k(x) = \frac{1}{x}[L_{n+1}(x) + L_n(x) + x - 2]$$

$q \to 1^-$ ve $x = 1$ seçilmesiyle Lucas sayılarının toplam formülü

$$\sum_{k=0}^{n} L_k = L_{n+2} - 1$$

$q \to 1^-$ ve x yerine $2x$ seçilmesiyle Pell-Lucas polinomlarının toplam formülü

$$\sum_{k=0}^{n} Q_k(x) = \frac{1}{2x}[Q_{n+1}(x) + Q_n(x) + 2x - 2]$$

$q \to 1^-$ ve $x = 2$ seçilmesiyle Pell-Lucas sayılarının toplam formülü

$$\sum_{k=0}^{n} Q_k = \frac{1}{2}[Q_{n+1} + Q_n]$$

olarak elde edilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, $q-$analiz, $q-$Fibonacci ve $q-$Lucas polinomları, Fibonacci ve Lucas polinomları, Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili bilgi verilmiştir. İkinci bölümde, tezde kullanılacak temel kavramlardan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde, literatürdeki $q-$Fibonacci ve $q-$Lucas polinomlarından bahsedilip, Carlitz'in $q-$Fibonacci polinomları baz alınarak, bu polinomlara benzer şekilde $q-$Lucas polinomları tanımlanmıştır. Ayrıca bu polinomların açık (explicit) formülü elde edilmiştir. Dördüncü bölümde ise bu polinomların üreteç fonksiyonları, aralarındaki ilişki, $q-$türevli ilişkileri, toplam formülleri elde edilmiştir. Ayrıca, başta $q-$Cassini özdeşliği ve $q-$Honsberger özdeşliği olmak üzere bazı özdeşlikler elde edilmiştir.

x, q özel durumları için literatürdeki bilinen polinom ve özelliklerin elde edilmesi bu çalışmanın Fibonacci ve Lucas polinomlarının bir genelleştirmesi olduğunu göstermektedir. Fibonacci ve Lucas polinomlarının bir genelleştirmesi yapılması nedeniyle bu çalışma önem taşımaktadır.

KAYNAKLAR

1. Andrews, G. E. (2004). Fibonacci numbers and the Rogers-Ramanujan identities. ***The Fibonacci Quarterly***, 42, 3-19.

2. Aral, A., Gupta, V. and Agarwal, R. (2013). *Applications of $q-$calculus in Operator Theory* (First edition). New York: Springer, 1-11.

3. Belbachir, H. and Benmezai, A. (2014). An alternative approach to Cigler's $q-$Lucas polynomials. ***Applied Mathematics and Computation***, 226, 691-698.

4. Carlitz, L. (1964). A note on Fibonacci numbers. ***The Fibonacci Quarterly***, 2(1), 15-28.

5. Carlitz, L. (1974). Fibonacci Notes-3: $q-$Fibonacci Numbers. ***The Fibonacci Quarterly***, 12(4), 317-322.

6. Carlitz, L. (1975). Fibonacci notes 4: $q-$Fibonacci polynomials. ***The Fibonacci Quarterly***, 13(2), 97-102.

7. Catalani, M. (2004). Some formulae for bivariate Fibonacci and Lucas polynomials. ***arXiv preprint math/0406323.***

8. Cigler, J. (2002). Einige $q-$analoga der Lucas-und Fibonacci-polynome. ***Sitzungsber, AW*** 211, 3-20.

9. Cigler, J. (2003). A new class of $q-$Fibonacci polynomials. ***The Electronic Journal of Combinatorics***, 10.

10. Cigler, J. (2003). $q-$Fibonacci polynomials. ***The Fibonacci Quarterly***, 41, 31-40.

11. Cigler, J. (2008). Some conjectures about $q-$Fibonacci polynomials. ***arXiv preprint arXiv:0805.0415.***

12. Cigler, J. (2008). Recurrence relations for powers of $q-$Fibonacci polynomials. ***arXiv preprint arXiv:0806.0805.***

13. Cigler, J. (2009). $q-$Fibonacci polynomials and $q-$Genocchi numbers. ***arXiv preprint arXiv:0908.1219.***

14. Cigler, J. (2009). $q-$Lucas polynomials and associated Rogers-Ramanujan type identities. ***arXiv preprint arXiv:0907.0165.***

15. Cigler, J. (2011). Some beautiful $q-$analogues of Fibonacci and Lucas polynomials. ***arXiv preprint arXiv:1104.2699.***

16. İnternet: Cigler, J Some $q-$analogues of Fibonacci, Lucas and Chebyshev polynomials with nice moments. URL: http://www.webcitation.org/query?url=http%3A%2F%2Fhomepage.univie.ac.at%2Fjo

hann.cigler%2Fpreprints%2Fcheb-survey.pdf&date=2017-11-13, Son Erişim Tarihi: 13.11.2017.

17. İnternet: Cigler, J q −Fibonacci polynomials and q −Catalan numbers. URL: http://www.webcitation.org/query?url=http%3A%2F%2Fhomepage.univie.ac.at%2Fjohann.cigler%2Fpreprints%2Fcat-fib1.pdf&date=2017-11-13, Son Erişim Tarihi: 13.11.2017.

18. Hoggatt Jr., V. E. (1969). *The Fibonacci and Lucas Numbers* (First edition). Boston: Houghton Mifflin, 1-70.

19. Jia, C.Z., Liu, H.M. and Wang, T.M. (2007). q −analogs of generalized Fibonacci and Lucas polynomials. ***The Fibonacci Quarterly***, 45(1), 26-34.

20. Kac, V. and Cheung, P. (2001). *Quantum Calculus.* New York: Springer, 1-90.

21. Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications.* New Jersey: A Wiley-Interscience Publication.

22. MacHenry, T. (2000). Generalized Fibonacci and Lucas polynomials and multiplicative arithmetic functions. ***Fibonacci Quarterly***, 38(2), 167-173.

23. Swamy, M. N. S. (1999). Generalized Fibonacci and Lucas polynomials, and their associated diagonal polynomials. ***Fibonacci Quarterly***, 37, 213-222.

24. Tan, M. and Zhang, Y. (2005). A note on bivariate and trivariate Fibonacci polynomials. ***Southeast Asian Bulletin of Mathematics***, 29(5).

25. Vajda, S. (1989). *Fibonacci and Lucas Numbers, and the Golden Section: Theory and Applications* (First edition). New York: Halsted Press, 10-100.

26. Vorobyov, N.N. (1961). *Fibonacci Numbers.* Moscow (in Russian): Publishing House "Nauka".

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler



Soyadı, adı	: ESEN, Sevgi
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 22.07.1991, Antalya
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: 0 (534) 454 71 01
e-mail	: sevgii.esenn@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Ankara Üniversitesi Matematik Böl.	2015
Lise	Antalya Anadolu Lisesi	2009

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Esen, S. ve Tuğlu, N. (2017, 22-23 Aralık). *$q-$Fibonacci ve $q-$Lucas Polinomları Üzerine*. 1. Uluslararası Sosyal Beşeri ve Eğitim Bilimleri Kongresinde sunuldu, İstanbul.

Hobiler

Kitap okumak, müzik dinlemek, satranç oynamak.



GAZİ GELECEKTİR...