
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

k-KESİRLİ MERTEBEDEN TÜREVLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ULAM TİPİ KARARLILIĞI

Emine CENGİZHAN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2025

Emine CENGİZHAN tarafından hazırlanan "k-KESİRLİ MERTEBEDEN TÜREVLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ULAM TİPİ KARARLILIĞI" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Adil MISIR
Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. .....

Başkan: Unvan Ad Soyad
..... Ana Bilim Dalı, ... Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. .....

Üye: Unvan Ad SOYAD
..... Ana Bilim Dalı, ... Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. .....

Üye: Unvan Ad SOYAD
.....Ana Bilim Dalı, ... Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. .....

Üye: Unvan Ad SOYAD
..... Ana Bilim Dalı, ... Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. .....

Tez Savunma Tarihi: 20/06/2025

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Uğur GÖKMEN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Emine CENGİZHAN

20/06/2025

k-KESİRLİ MERTEBEDEN TÜREVLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ULAM TİPİ KARARLILIĞI

(Doktora Tezi)

Emine CENGİZHAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2025

ÖZET

Bu tezde, (k,ψ)-genelleştirilmiş Laplace dönüşümü (GLD) yöntemiyle, çeşitli genelleştirilmiş kesirli diferensiyel denklemlerin Hyers-Ulam tipi kararlılığı incelenmiştir. Çalışma kapsamında, ψ-Riemann–Liouville, (k,ψ)-Hilfer ve Tempered (k,ψ)-Hilfer kesirli türevlerine sahip kesirli diferensiyel denklemler ele alınmış; literatürdeki klasik yöntemler genişletilerek yeni kararlılık analizleri sunulmuştur. Geliştirilen teorik yapı doğrultusunda elde edilen teoremler analitik çözümlerle desteklenmiş ve örneklerle pekiştirilmiştir. Parametre ve fonksiyon seçimleri sayesinde elde edilen sonuçların literatürdeki birçok özel durumu kapsadığı ve daha genel bir bakış açısı sunduğu gösterilmiştir. Bu yönüyle çalışma, kesirli diferensiyel denklemlerin çözüm ve kararlılık analizlerine katkı sağlayan kapsamlı ve esnek bir yaklaşım ortaya koymaktadır.

Bilim Kodu	:	20406
Anahtar Kelimeler	:	Kesirli diferensiyel denklemler, Genelleştirilmiş kesirli diferensiyel denklemler, Genelleştirilmiş Laplace dönüşümü, Hyers-Ulam tipi kararlılık,
Sayfa Adedi	:	93
Danışman	:	Prof. Dr. Adil MISIR

ULAM TYPE STABİLİTİES OF k-FRACTİONAL DİFFERENTİAL EQUATİONS
(Ph. D. Thesis)

Emine CENGİZHAN

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
Haziran 2025

ABSTRACT

In this thesis, the Hyers-Ulam stability of various generalized fractional differential equations is investigated using the (k,ψ)-generalized Laplace transform (GLD) method. The study considers differential equations involving ψ-Riemann–Liouville, (k,ψ)-Hilfer, and tempered (k,ψ)-Hilfer fractional derivatives, and extends classical methods from the literature to introduce new stability analyses. The developed theoretical framework is supported by analytical solutions and reinforced with illustrative examples. It is demonstrated that the results obtained, through appropriate choices of parameters and functions, encompass many special cases found in the literature and provide a broader perspective. In this regard, the study presents a comprehensive and flexible approach that contributes to the solution and stability analysis of fractional differential equations.

Science Code	:	20406
Keywords	:	Fractional Differential Equations, Generalized Fractional Differential Equations, Generalized Laplace Transform, Hyers-Ulam Type Stability
Number of pages	:	93
Supervisor	:	Prof. Dr. Adil MISIR

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında bana yol gösteren, değerli bilgi ve tecrübeleriyle her aşamada destek olan saygıdeğer danışmanım Prof. Dr. Adil Mısır'a en içten teşekkürlerimi sunuyorum. Tez sürecinde kıymetli katkıları ve yapıcı değerlendirmeleriyle bana rehberlik eden tez izleme komitesi üyeleri Prof. Dr. Fatma Ayaz ve Doç. Dr. Yasemin Başçı'ya teşekkürü bir borç bilirim.

Hayatım boyunca yanımda olan, sevgisi ve desteğiyle bana daima güç veren değerli annem Şemsinur Cengizhan'a en derin şükranlarımı sunarım. Her zaman kalbimde yaşattığım, desteğini ve inancını daima hissettiğim merhum babam İbrahim Cengizhan'a minnettarım.

Bu süreçte bana destek olan değerli arkadaşım Canan Sarıkaya'ya teşekkür ederim.

Doktora eğitimim sırasında "2211-A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı 2022/2" ile maddi destek sağlayan TÜBİTAK-BİDEB'e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

SİMGELER VE KISALTMALAR viii

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL TANIMLAR VE KAVRAMLAR 5

2.1. Tanım ve Teoremler 5

3. KLASİK LAPLACE VE GENLLEŞTİRİLMİŞ LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ 15

3.1. Klasik Laplace Dönüşümü 15

3.2. Genelleştirilmiş Laplace Dönüşümü 17

3.3. ρ-Laplace Dönüşümü 18

3.4. (k,ψ)-genelleştirilmiş Laplace dönüşümü ve özellikleri 19

3.5. Bazı Fonksiyonlar İçin (k,ψ)-Genelleştirilmiş Laplace Dönüşümü 21

4. KESİRLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİM ULAM TİPİ KARARLILIĞI 39

4.1. ψ-Riemann-Liouville Kesirli Diferensiyel Denkleminin Ulam tipi Kararlılığı 39

4.2. (k,ψ)-Hilfer Kesirli Diferensiyel Denkleminin Ulam tipi Kararlılığı 51

4.3. Tempered (k,ψ)-Hilfer Kesirli Diferensiyel Denkleminin Ulam Tipi Kararlılığı 65

5. SONUÇ VE ÖNERİLER 83

KAYNAKLAR 85

ÖZGEÇMİŞ 91

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$C^n[a,b]$	$[a,b]$ aralığında tanımlı olan ve n defa türevlenebilen fonksiyonların kümesi
$AC[a,b]$	$[a,b]$ aralığında tanımlı olan mutlak sürekli fonksiyonların kümesi
$\Gamma(\cdot)$	Gama fonksiyonu
$B(\cdot,\cdot)$	Beta fonksiyonu
$\Gamma_k(\cdot)$	k-gama fonksiyonu
$B_k(\cdot,\cdot)$	k-beta fonksiyonu
$\varphi(\cdot,\cdot)$	Birinci eksik gama fonksiyonu
$\Gamma(\cdot,\cdot)$	İkinci eksik gama fonksiyonu
$E_u(\cdot)$	Tek parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu
$(\xi)_{m,k}$	k-Pochhammer sembolü
$E^{\xi}_{k,u,v}(z)$	k-Mittag-Leffler fonksiyonu

1. GİRİŞ

Matematiksel analizde türev ve integral işlemleri genellikle tam sayı mertebelerinde ele alınmaktadır. Ancak bu kavramlar, kesirli, irrasyonel ve karmaşık mertebelerle genelleştirildiğinde ortaya çıkan alan kesirli hesap olarak adlandırılmaktadır. Kesirli hesap, klasik diferensiyel ve integral hesap yöntemlerinin genişletilmesiyle elde edilen ve özellikle bellek etkisi ve uzun menzilli etkileşimler içeren sistemlerin modellenmesinde önemli bir yere sahip olan bir matematiksel disiplindir. Kesirli hesap kavramının kökenleri 17. yüzyıla kadar uzanmaktadır. Leibniz, 1695 yılında L'Hôpital ile yaptığı yazışmalarda, kesirli mertebeli türevlerin anlamını sorgulamış ve bu fikir ilerleyen yıllarda Euler, Fourier, Liouville ve Riemann gibi matematikçilerin çalışmalarıyla şekillenmiştir [1–6]. 19. yüzyılda Joseph Liouville ve Hermann Riemann, kesirli türev ve integral tanımlarını geliştirerek bu alana matematiksel bir temel kazandırmıştır. 20. yüzyılda ise kesirli diferensiyel denklemlerin stokastik süreçler ve fiziksel sistemlerin modellenmesi gibi birçok alanda uygulanabilirliği araştırılmıştır. Kesirli diferensiyel denklemler (KDD) üzerine yapılan çalışmalar, kesirli türevlerin çeşitliliğinin artmasıyla birlikte daha geniş bir analiz çerçevesine kavuşmuştur. Riemann-Liouville, Caputo, Hadamard, Hilfer, Grünwald-Letnikov, Riesz, Katugampola, Caputo-Fabrizio, Atangana-Baleanu-Caputo gibi birçok farklı türev türü geliştirilmiş, fiziksel ve mühendislik problemlerine uygulanabilmesi açısından büyük bir esneklik sağlamıştır [7–12]. Klasik (pozitif tam sayı mertebeli) türevlerin belirli özelliklerini korumak ve literatüre katkı sağlamak amacıyla üretilen bu kesirli türev tanımları çoğu zaman birbirleriyle tam olarak örtüşmemektedir. Bu durum, mevcut kesirli türev tanımlarını kapsayan daha genel bir kesirli türev kavramına duyulan ihtiyacı ortaya çıkarmaktadır. Bu bağlamda, Sousa ve Oliveira [13] önemli bir katkı sunarak bir başka fonksiyona bağlı olan $\psi-$Hilfer kesirli türevini (HKT) tanımlamışlardır. $\psi-$HKT, farklı bir fonksiyon temeline dayanan yeni bir kesirli türev tanımı olup hem doğrusal hem de doğrusal olmayan KDD'in nitel çözüm özelliklerinin analizinde uygulanmıştır [14–17]. 2007 yılında Diaz ve Pariguan [18], k-gamma ve k-beta fonksiyonları gibi matematiksel yapıları tanıtmışlardır. Bu fonksiyonlar, kesirli diferensiyel denklemlerin çözüm yöntemlerini genişletmiş ve analitik tekniklerin geliştirilmesine katkıda bulunmuştur. k-gamma fonksiyonunun tanımını kullanılarak, Mubeen ve Habibullah [19] tarafından Riemann Liouville (RL) kesirli integral operatörünün

genişletilmiş bir versiyonu olan k-RL kesirli integral operatörü tanıtılmıştır. Bu yaklaşımdan ilham alarak, Romero ve arkadaşları [20], Riemann Liouville kesirli türev (RLKT) operatörünün genelleştirilmiş bir versiyonu olan k-(RLKT) ve bu türevin temel özelliklerini ortaya koymuştur. 2015 yılında Dorrego [21], [20]'de tanımlanan k-RLKT, [21]'te tanımlanan k-Hilfer kesirli türevini (HKT) kapsamadığını göstermiş ve bu eksikliği gidermek adına alternatif bir tanım geliştirilmesi gerektiğini ortaya koymuştur. Çeşitli araştırmacılar, farklı k-kesirli türev türlerini inceleyerek, bunların doğrusal olmayan KDD üzerindeki uygulamalarını araştırmıştır. Bu konuda yapılmış çalışmaların bazıları [14, 17, 19–33] ve ilgili referanslarda bulunabilir. Daha sonra Kucche ve Mali [14], Hilfer türevinin genelleştirilmiş versiyonu olan (k, ψ)-HKT operatörünü tanıtmıştır. Son olarak Salim ve diğerleri [34] (k, ψ)-HKT'i daha da genişleterek tempered (k, ψ)-HKT operatörünü tanıtmışlardır. Bu yeni operatör, kesirli kalkülüsün kapsamını genişletmekle kalmayıp, aynı zamanda KDD'lerin sürekli olarak geliştiğini de ortaya koymaktadır.

KDD'in giderek artan çeşitliliği, onların hem teorik önemini hem de mühendislik ve fen bilimleri gibi çeşitli alanlardaki pratik uygulamalarını vurgulamaktadır. Bu tür genelleştirilmiş operatörlerin tanıtılması, matematiksel modellemeye esneklik kazandırarak, bellek ve kalıtımsal özellikler sergileyen karmaşık dinamik sistemlerin daha hassas bir şekilde tanımlanmasını sağlamaktadır. KDD giderek daha fazla önem kazanırken, bu tür gelişmeler uygulamalı matematikte yeni araştırma alanlarının ortaya çıkmasına katkıda bulunmaktadır. KDD, yalnızca fiziksel ve muhendislik sistemlerini modellemekle kalmaz, aynı zamanda bu modellerin çözümlerinin kararlılığı açısından da incelenmesi gereken önemli matematiksel problemlerdir. Kararlılık analizleri içinde, Hyers-Ulam kararlılığı özel bir yer tutar. 1940 yılında Stanisław Ulam, fonksiyonel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin gerçek çözümlere olan yakınlığını sorgulamış ve 1941'de Donald Hyers bu soruya doğrusal fonksiyonel denklemler icin bir çözüm sunmuştur. [35] Daha sonra, 1978 yılında Themistocles Rassias bu sonucu genelleştirerek doğrusal olmayan denklemleri de kapsamıştır. Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı olarak bilinen bu kavram, KDD'in analizinde de kullanılmıştır [33, 36–43]. Bu tür kararlılık analizlerinde klasik ve genelleştirilmiş Laplace dönüşüm (GLD) operatörleri kritik bir rol oynamaktadır [44]. Rezaei ve arkadaşları [45] ve Algifiary ve arkadaşları [46] Lineer diferensiyel denklemlerin, Wang ve arkadaşları [47] Caputo kesirli türevini içeren KDD'in ve [48] Riemann Liouville kesirli

türevini içeren KDD'in, Wang ve arkadaşları [49] bazı lineer KDD'in, Shen ve arkadaşları [50] sabit katsayılı bazı KDD'in, Liu ve arkadaşları [51] Caputo-Fabrizio kesirli türevini içeren KDD'in, Başçı ve arkadaşları [52] yeni Caputo Fabrizio kesirli türevini içeren KDD'in, Sayyari ve arkadaşları [53] diferensiyel denklem sistemlerinin Hyers-Ulam kararlılığını klasik Laplace dönüşümünü kullanarak ispatlamışlardır. KDD'in ve genelleştirilmiş kesirli türev ve integral operatörlerinin çeşitliliği arttıkça bu denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığını incelemede klasik Laplace operatörü eksik kaldığından genelleştirilmiş Laplace operatörleri bulunmuştur. Abdeljawad ve Jarad tarafından bazı türevler içeren diferensiyel denklemlerin çüzümü için ortaya konan [54] ve daha sonra Jarad ve arkadaşlarının genelleştirilmiş kesirli diferensiyel denklemlerin (GKDD) çözümü için kullandığı genelleştirilmiş ρ-Laplace operatörünü [55, 56], Liu ve arkadaşları [57] Genelleştirilmiş Liouville-Caputo kesirli türevi içeren KDD'in Hyers-Ulam kararlılığını, Wang [58] genelleştirilmiş kesirli sistemlerin Hyers-Ulam Rassias kararlılığını, Zada ve arkadaşları [59] Genelleştirilmiş Liouville-Caputo kesirli türevini içeren integro KDD'in kararlılık analizlerinde kullanmışlardır.

Son yıllarda Başçı ve arkadaşları [60] (k,ψ)-HKT ve integrallerini incelemek için (k,ψ)-GLD'ünü geliştirmişlerdir. Bu dönüşüm, mevcut Laplace dönüşümü türlerinin kapsamlı bir genellemesi olup, klasik Laplace dönüşümünü $k,\rho > 0$ ve ψ-fonksiyonu gibi ek parametreler aracılığıyla genişletmektedir. Bu sayede, çeşitli KDD'in çözümlerinin elde edilmesine olanak tanımaktadır. (k,ψ)-GLD, mühendislik, fizik, biyoloji ve ekonomi gibi alanlarda KDD'e analitik çözümler üretmek amacıyla kullanılan oldukça esnek ve güçlü bir matematiksel araçtır. Klasik Laplace dönüşümünün temel prensiplerini korurken, bu genelleştirme kesirli mertebeli türevler ve integral operatörlerinin kavramsal olarak genişletilmesine olanak tanımaktadır. $k,> 0$ reel sayıların ve ψ-fonksiyonunun dahil edilmesi, çeşitli kesirli türev ve integral türlerini birleşik bir çerçevede bir araya getirerek KDD'in analizini daha kapsamlı bir araç seti ile geliştirmektedir. Bu yaklaşım, farklı KDD'in çözümlerinin keşfedilmesini daha bütüncül bir yöntemle kolaylaştırmaktadır. (k,ψ)-HKT'ni içeren KDD'in Ulam tipi kararlılığı, kesirli hesap ve dinamik sistemler alanındaki geniş literatürün bir parçasını oluşturmaktadır. (k,ψ)-Hilfer kesirli hesap, klasik RL kesirli hesabının genişletilmiş bir versiyonu olarak, bu tür sistemlerin karakterizasyonu için sağlam bir çerçeve sunmaktadır. Hilfer türü diferensiyel denklemlerin Ulam

kararlılığını incelemek için çeşitli yöntemler kullanılmaktadır. Örneğin, ardışık yaklaşım yöntemi [25, 33, 61] ve ilgili kaynaklarda uygulanmıştır. Sabit nokta teoremleri, [14, 15, 17, 25, 26, 33, 43, 62, 63] ve ilgili kaynaklarda kullanılmış, Gronwall eşitsizliği yöntemi ise [64, 65] ve ilgili kaynaklarda incelenmiştir.

Başçı ve arkadaşları tarafından önerilen (k,ψ)-GLD, klasik Laplace dönüşümünü, ψ-fonksiyonunun entegrasyonu yoluyla genişleterek (k,ψ)-HKT'ni içeren KDD'in çözümünü kolaylaştırmaktadır. Kesirli hesap literatürü, kararlılık analizleri, nümerik yöntemler ve fizik, biyoloji ve mühendislik alanındaki uygulamalar gibi birçok konuyu içermektedir. Ancak, (k,ψ)-HKT'ni içeren KDD için Ulam tipi kararlılık kriterlerinin (k,ψ)-GLD çerçevesinde incelenmesi göreceli olarak az çalışılmış bir konudur. Bu nedenle, bu çalışma Ulam türü kararlılık kriterlerini kapsamlı bir şekilde ele almayı ve bunları (k,ψ)-HKT'ni içeren KDD'e uygulamayı amaçlayarak, hem kesirli hesap teorisinin hem de pratik uygulamaların ilerlemesine katkı sağlamayı hedeflemektedir.

Bu çalışmada (k,ψ)-GLD dönüşümünü kullanılarak genelleştirilmiş kesirli türev içeren KDD'in Hyers-Ulam kararlılıkları incelenmiştir. Aynı zamanda bu çalışma, literatürdeki mevcut çalışmaların bir genellemesini içermekte olup, belirli değişkenlere uygun değerler atanarak bu çalışmalar yeniden elde edilebilebildiğinden GKDD için kararlılık analizine yönelik genel bir çerçeve sunması nedeniyle literatüre önemli katkılar sağlayacaktır.

2. TEMEL TANIMLAR VE KAVRAMLAR

2.1. Tanım ve Teoremler

Bu bölümde tez boyunca kullanılacak olan bazı tanımları, notasyonları, lemmaları ve teoremleri tanıtacağız. Bazı sonuçların ispatını ve bazı notasyonları basitleştirmek için $z_{k,\psi}^{[n]} = \left(\frac{k}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n z$, $\varphi_\psi^n(z) = \left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt} + \lambda\right)^n z$ ve $\zeta_y(x) = \psi(x) - \psi(y)$ notasyonlarını kullanacağız. Burada $k = 1$ ise $z_\psi^{[n]} = \left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n z$ dir.

2.1.1. Tanım

$[a,b]$ reel eksen üzerinde bir kapalı aralık olmak üzere ψ fonksiyonu $\psi \in C^n[a,b]$ ve her $t \in (a,b)$ için $\psi'(t) > 0$ koşulunu sağlıyorsa, $n \in \mathbb{N}$ için

$$AC_\psi^n = \left\{ g : (a,b) \to \mathbb{R} \text{ and } g_{k,\psi}^{[n-1]} \in AC[a,b] \right\}$$

biçiminde tanımlanır [66].

2.1.2. Tanım

$I = [a,b]$ $(0 < a < b < \infty)$ sonlu bir aralık olmak üzere, $\psi : I \to \mathbb{R}$ ve her $t \in I$ için $\psi'(t) > 0$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $0 \leq \sigma < 1$ için I üzerinde g fonksiyonunun $C_{\sigma;\psi}(I,\mathbb{R})$ ağırlıklı fonksiyonlar uzayı

$$C_{\sigma;\psi}[a,b] = \left\{ g : (a,b] \to \mathbb{R} \text{ ve } (\psi(\cdot) - \psi(a))^\sigma g(\cdot) \in C[a,b] \right\}$$

ve

$$C_{\sigma;\psi}^n[a,b] = \left\{ g : g_\psi^{[n-1]} \in C[a,b] \text{ ve } g_\psi^{[n]} \in C_{\sigma;\psi}[a,b] \right\}, n \in \mathbb{N}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $C_{0,\psi}(I,\mathbb{R}) = C[a,b]$ ve $C_{0;\psi}^n[a,b] = C^n[a,b]$ dır [60].

2.1.3. Tanım

Eğer $\mathrm{Re}(u) > 0$, $\mathrm{Re}(v) > 0$ ise, gamma fonksiyonu $\Gamma(u) = \int_0^\infty e^{-z} z^{u-1} dz$ biçiminde tanımlanır ve $u \in \mathbb{N}$ için $\Gamma(u+1) = u!$ özelliği sağlanır. Beta fonksiyonu ise $B(u,v) = \int_0^1 z^{u-1} (1-z)^{v-1} dz$ biçiminde tanımlanır ve $B(u,v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$ özelliği sağlanır [67]. 2007 yılında Diaz ve Pariguan [18], $k > 0$ için genelleştirilmiş k-gamma ve k-beta fonksiyonlarını sırasıyla

$$\Gamma_k(u) = \int_0^\infty e^{-\frac{z^k}{k}} z^{u-1} dz \tag{2.1}$$

ve

$$B_k(u,v) = \frac{1}{k} \int_0^1 z^{\frac{u}{k}-1} (1-z)^{\frac{v}{k}-1} dz \tag{2.2}$$

biçiminde tanımlamıştır. Bu noktada, k-gamma ve k-beta fonksiyonları

1. $\Gamma_k(u) = k^{\frac{u}{k}-1} \Gamma\left(\frac{u}{k}\right)$, $\lim_{k\to 1} \Gamma_k(u) = \Gamma(u)$, $\Gamma_k(k) = 1$ $\Gamma_k(u+k) = u\Gamma_k(u)$
2. $B_k(u,v) = \frac{\Gamma_k(u)\Gamma_k(v)}{\Gamma_k(u+v)}$ ve $B_k(u,v) = \frac{1}{k} B\left(\frac{u}{k}, \frac{v}{k}\right)$

özelliklerini sağlarlar.

2.1.4. Tanım

19. yüzyılda Prym [68], $x = 1$ durumu için eksik gamma fonksiyonunun teorisini incelemiştir. Hipergeometrik yakınsak bir fonksiyon, eksik gamma fonksiyonlarının genelleştirilmiş bir biçimi olup, Tricomi tarafından 1950 yılında sistematik olarak ele alınmıştır [69]. Eksik (incomplete) gamma fonksiyonları $\varphi(x,y)$ ve $\Gamma(x,y)$

$$\varphi(x,y) = \int_0^y e^{-z} z^{x-1} dz, \quad \mathrm{Re}(x) > 0, \quad y \geq 0 \tag{2.3}$$

ve

$$\Gamma(x,y) = \int_y^\infty e^{-z} z^{x-1} dz, \quad \mathrm{Re}(x) > 0, \quad y \geq 0 \tag{2.4}$$

biçiminde tanımlanır. Bu fonksiyonlar

$$\varphi(x,y)+\Gamma(x,y)=\Gamma(x),\quad \mathrm{Re}(x)>0 \tag{2.5}$$

eşitliğini sağlar. Burada $\Gamma(x)$, bilinen gamma fonksiyonudur [70].

2.1.5. Tanım

Eğer $\mathrm{Re}(u)>0$, $\mathrm{Re}(v)>0$ ve $z\in\mathbb{C}$ ise, tek parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_u(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{\Gamma(um+1)}$$

ve çift parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_{u,v}(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{\Gamma(um+v)} \tag{2.6}$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca, [71]'da k-Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_{k,u,v}^{\xi}(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\xi)_{m,k}z^m}{\Gamma(um+v)}\frac{z^m}{m!}$$

biçiminde tanımlanmıştır. Burada, $(\xi)_{m,k}$

$$(\xi)_{m,k}=\xi(\xi+k)(\xi+2k)\cdots(\xi+(m-1)k)$$

biçiminde tanımlanan k-Pochhammer sembolüdür. Ayrıca

$$E_{k,u,v}^{\xi}(z)=k^{1-\frac{u}{k}}E_{\frac{u}{k},\frac{v}{k}}^{\frac{\xi}{k}}\left(k^{1-\frac{u}{k}}z\right)$$

özelliği sağlanır.

2.1.6. Tanım

(a,b) $(-\infty\le a<b\le\infty)$, reel eksen üzerinde sonlu veya sonsuz bir aralık ve $\alpha>0$ olsun. Ayrıca $\psi(t)$, $(a,b]$ üzerinde artan ve pozitif monoton bir fonksiyon olup (a,b) üzerinde

sürekli türevi $\psi^{'}(t)$ bulunan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir bir g fonksiyonunun başka bir fonksiyon olan ψ fonksiyonuna bağlı olarak α. mertebeden ψ-Riemann-Liouville kesirli integrali,

$$I_{a+}^{\alpha;\psi}g(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{t}(\zeta_{u}(t))^{\alpha-1}g(u)\,\psi^{'}(u)\,du \tag{2.7}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\Gamma(\cdot)$ gama fonksiyonudur. $\alpha=0$ olduğunda $I_{a+}^{0;\psi}g(t)=g(t)$ olur [8].

2.1.7. Lemma

$\alpha,\beta>0$ olsun. Bu durumda

$$I_{a+}^{\alpha;\psi}I_{a+}^{\beta;\psi}g(t)=I_{a+}^{\alpha+\beta;\psi}g(t)$$

yarı grup özelliği sağlanır [64].

2.1.8. Lemma

$\alpha>0$ ve $\delta>0$ olsun. Eğer $g(t)=(\psi(t)-\psi(a))^{\delta-1}=(\zeta_{a}(t))^{\delta-1}$ ise

$$I_{a+}^{\alpha;\psi}g(t)=\frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha+\delta)}(\zeta_{a}(t))^{\alpha+\delta-1} \tag{2.8}$$

eşitliği sağlanır [64].

2.1.9. Tanım

$n-1<\alpha\leq n,n\in\mathbb{N}$ ve $t\in[a,b]$ için $\psi\in C^{n}[a,b]$, $\psi'(t)\neq 0$, ve $g\in C[a,b]$ olsun. Bu durumda, g fonksiyonunun başka bir ψ fonksiyonuna göre α. mertebeden ψ-Rieman-Liouville kesirli türevi (ψ-RLKT)

$$D_{a+}^{\alpha;\psi}g(t) = \left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n} I_{a+}^{n-\alpha;\psi}g(t)$$
$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n}\int_{a}^{t}(\zeta_u(t))^{n-\alpha-1}g(u)\psi'(u)du \tag{2.9}$$

biçiminde tanımlanır [8].

2.1.10. Lemma

$\alpha > 0$ ve $\delta > 0$ olsun. Eğer $g(t) = (\zeta_a(t))^{\delta-1}$ ise

$$D_{a+}^{\alpha;\psi}g(t) = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta-\alpha)}(\zeta_a(t))^{\delta-\alpha-1} \tag{2.10}$$

olur [64].

2.1.11. Tanım

$(k-$genelleştirilmiş $\psi-$kesirli integral$)$ $[a,b]$, $\mathbb{R}$ reel eksende sonlu veya sonsuz bir aralık olmak üzere $g \in L^1[a,b]$ ve $\psi(t) > 0$, $(a,b]$ aralığında artan bir fonksiyon ve (a,b) aralığında sürekli bir fonksiyon, $k > 0$ ve $\alpha > 0$ olsun. Bu durumda g fonksiyonunun α. mertebeden sağdan ve soldan genelleştirilmiş $k-$kesirli integral operatörleri sırasıyla

$$I_{k,a+}^{\alpha;\psi}g(t) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_{a}^{t}(\zeta_u(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}\psi'(u)g(u)du \tag{2.11}$$

ve

$$I_{k,b-}^{\alpha;\psi}g(t) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_{t}^{b}(\zeta_t(u))^{\frac{\alpha}{k}-1}\psi'(u)g(u)du \tag{2.12}$$

biçiminde tanımlanır [72].

2.1.12. Teorem

$\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ olsun. Bu durumda

$$I_{k,a+}^{\alpha;\psi} I_{k,a+}^{\beta;\psi} g(t) = I_{k,a+}^{\alpha+\beta;\psi} g(t)$$

yarı grup özelliği sağlanır [14].

2.1.13. Teorem

$k > 0$ ve $Re(\alpha) > 0$, $Re(\beta) > 0$ olsun. Bu durumda

$$I_{k,a+}^{\alpha;\psi} \left((\zeta_a(t))^{\frac{\beta}{k}-1} \right) = \frac{\Gamma_k(\beta)}{\Gamma_k(\beta+\alpha)} (\zeta_a(t))^{\frac{\beta}{k}+\frac{\alpha}{k}-1} \tag{2.13}$$

olur [14].

2.1.14. Tanım

$k, \alpha > 0$ ve $\nu \in [0,1]$ olsun. Ayrıca, (a,b) üzerinde $\psi \in C^n[a,b]$, $(n \in \mathbb{N})$ $\psi'(t) > 0$ ve $g \in C^n[a,b]$ olsun. Bu durumda $[a,b]$ üzerinde g fonksiyonunun başka bir ψ fonksiyonuna göre α. mertebeden (k,ψ)-Hifer kesirli türevi ((k,ψ)-HKT)

$${}^{H}D_{k,a+}^{\alpha,\nu;\psi} g(t) = I_{k,a+}^{\nu(kn-\alpha);\psi} \left(\frac{k}{\psi'(t)} \frac{d}{dt} \right)^n I_{k,a+}^{(1-\nu)(kn-\alpha);\psi} g(t), \; n = \left\lceil \frac{\alpha}{k} \right\rceil \tag{2.14}$$

biçiminde tanımlanır. Özel olarak Eş. 2.14 'te $\nu = 0$ alırsak (k,ψ)-HKT operatörü (k,ψ)-RLKT operatörüne indirgenir ve

$${}^{H}D_{k,a+}^{\alpha;\psi} g(t) = \frac{\left(\frac{k}{\psi'(t)} \frac{d}{dt} \right)^n}{k\Gamma_k(kn-\alpha)} \int_a^t (\zeta_u(t))^{n-\frac{\alpha}{k}-1} g(u) \psi'(u) du \tag{2.15}$$

biçiminde yazılır [14].

2.1.15. Teorem

$\alpha, k \in \mathbb{R}^+$ ve $\beta \in \mathbb{R}$ sayısı $\frac{\beta}{k} > -1$ biçiminde olsun. Bu durumda

$$ {}^{H}D_{k,a+}^{\alpha,\nu;\psi}\left((\zeta_a(t))^{\frac{\beta}{k}}\right) = \frac{\Gamma_k(\beta+k)}{\Gamma_k(\beta+k-\alpha)}(\zeta_a(t))^{\frac{\beta-\alpha}{k}} \tag{2.16} $$

eşitliği sağlanır [14].

2.1.16. Tanım

((k,ψ)-tempered kesirli integral) $[a,b]$, $\mathbb{R}$ eksende sonlu veya sonsuz bir aralık olmak üzere $g \in L^1[a,b]$ ve $\psi(t) > 0$, $(a,b]$ aralığında artan bir fonksiyon ve (a,b) aralığında sürekli bir fonksiyon, $k > 0$ ve $\alpha > 0$ olsun. Bu durumda g fonksiyonunun α. mertebeden ve λ indeksli genelleştirilmiş $(k,\psi)-$ tempered kesirli integral ($(k,\psi)-$TKI) operatörleri

$$ \begin{aligned} {}^{T}I_{k,a+}^{\alpha,\lambda;\psi}g(t) &= e^{-\lambda\psi(t)}I_{k,a+}^{\alpha;\psi}\left(f(t)e^{\lambda\psi(t)}\right) \\ &= \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (\zeta_u(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}e^{-\lambda\zeta_u(t)}\psi'(u)g(u)du \end{aligned} \tag{2.17} $$

ve

$$ \begin{aligned} {}^{T}I_{k,b-}^{\alpha,\lambda;\psi}g(t) &= e^{\lambda\psi(t)}I_{k,b-}^{\alpha;\psi}\left(f(t)e^{-\lambda\psi(t)}\right) \\ &= \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_t^b (\zeta_t(u))^{\frac{\alpha}{k}-1}e^{-\lambda\zeta_t(u)}\psi'(u)g(u)du \end{aligned} \tag{2.18} $$

biçiminde tanımlanır. Burada $\Gamma_k(\cdot)$, k-gama fonksiyonudur.

Eğer $k = 1$ alınırsa $(k,\psi)-$ tempered kesirli integrali ${}^{T}I_{k,a+}^{\alpha,\lambda;\psi}$, [72] deki $\psi-$tempered kesirli integraline ${}^{T}I_{a+}^{\alpha,\lambda;\psi}$ indirgenir [72].

2.1.17. Teorem

$\alpha > 0$, $\beta > 0$ ve $k > 0$ olsun. Bu durumda

$$ {}^{T}I_{k,a+}^{\alpha,\lambda;\psi T}I_{k,a+}^{\beta,\lambda;\psi}g(t) = {}^{T}I_{k,a+}^{\alpha+\beta,\lambda;\psi}g(t) = {}^{T}I_{k,a+}^{\beta,\lambda;\psi T}I_{k,a+}^{\alpha,\lambda;\psi}g(t) \tag{2.19} $$

ve

$$ {}^{T}I_{k,b-}^{\alpha,\lambda;\psi T}I_{k,b-}^{\beta,\lambda;\psi}g(t) = {}^{T}I_{k,b-}^{\alpha+\beta,\lambda;\psi}g(t) = {}^{T}I_{k,b-}^{\beta,\lambda;\psi T}I_{k,b-}^{\alpha,\lambda;\psi}g(t) \tag{2.20} $$

yarı grup özellikleri sağlanır [72].

2.1.18. Tanım

(Tempered $(k,\psi)-$HKT) $\alpha > 0$, $j-1 < \frac{\alpha}{k} < j$, $j \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\lambda \in \mathbb{R}$, $k > 0$, ve $[a,b]$ $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ aralığı verilsin. Ayrıca her $t \in [a,b]$ için $g, \psi \in C^{j}([a,b],\mathbb{R})$ öyleki ψ artan, $\psi^{'}(t) \neq 0$ koşulunu sağlayan iki fonksiyon olsun. Bu durumda g fonksiyonunun α. mertebeden, λ indeksli, $0 \leq \nu \leq 1$ tipinde sağ taraf tempered (k,ψ)-HKT ${}^{TH}D_{k,a+}^{\alpha,\nu,\lambda;\psi}(.)$ ve sol taraf tempered (k,ψ)-HKT ${}^{TH}D_{k,b-}^{\alpha,\nu,\lambda;\psi}(.)$ operatörleri sırasıyla

$$ \begin{aligned} {}^{TH}D_{k,a+}^{\alpha,\nu,\lambda;\psi}f(t) &= \left({}^{T}I_{k,a+}^{\nu(kn-\alpha),\lambda;\psi}\left(\frac{1}{\psi^{'}(t)}\frac{d}{dt}+\lambda\right)^{n}\left(k^{nT}I_{k,a+}^{(1-\nu)(kn-\alpha),\lambda;\psi}f\right)\right)(t) \\ &= \left({}^{T}I_{k,a+}^{\nu(kn-\alpha),\lambda;\psi}\varphi_{\psi}^{n}\left(k^{nT}I_{k,a+}^{(1-\nu)(kn-\alpha);\psi}f\right)\right)(t) \\ &= e^{-\lambda\psi(t)H}D_{k,a+}^{\alpha,\nu;\psi}\left(f(t)e^{\lambda\psi(t)}\right) \end{aligned} \tag{2.21} $$

ve

$$ \begin{aligned} {}^{TH}D_{k,b-}^{\alpha,\nu,\lambda;\psi}f(t) &= \left({}^{T}I_{k,b-}^{\nu(kn-\alpha),\lambda;\psi}\left(-\frac{1}{\psi^{'}(t)}\frac{d}{dt}+\lambda\right)^{n}\left(k^{nT}I_{k,b-}^{(1-\nu)(kn-\alpha),\lambda;\psi}f\right)\right)(t) \\ &= \left({}^{T}I_{k,b-}^{\nu(kn-\alpha),\lambda;\psi}(-1)^{n}\varphi_{\psi}^{n}\left(k^{nT}I_{k,b-}^{(1-\nu)(kn-\alpha);\psi}f\right)\right)(t) \\ &= e^{\lambda\psi(t)H}D_{k,b-}^{\alpha,\nu;\psi}\left(f(t)e^{-\lambda\psi(t)}\right) \end{aligned} \tag{2.22} $$

biçiminde tanımlanır. Burada $\varphi_{\psi}^{j} = \left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{j}$ dır. Eğer $k = 1$ ise tempered $(k,\psi)-$HKT ${}^{TH}D_{k,a+}^{\alpha,\nu,\lambda;\psi}(\cdot)$, [72] deki tempered $\psi-$HKT ${}^{TH}D_{a+}^{\alpha,\nu,\lambda;\psi}(\cdot)$ ne indirgenir [72].

3. KLASİK LAPLACE VE GENLLEŞTİRİLMİŞ LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ

KDD, yalnızca fiziksel ve muhendislik sistemlerini modellemekle birlikte bu modellerin çözümlerinin kararlılığı açısından incelenmesi gereken önemli matematiksel problemlerdir. Bu tür kararlılık analizlerinde klasik ve genelleştirilmiş Laplace dönüşüm operatörleri kritik bir rol oynamaktadır [44]. KDD'lerin Hyers-Ulam kararlılığı klasik Laplace dönüşümü ile incelenirken [45–53] genelleştirilmiş kesirli türev ve integral operatörlerinin çeşitliliği arttıkça bu denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığını incelemede klasik Laplace operatörü eksik kaldığından genelleştirilmiş Laplace operatörleri bulunmuş [54–56] ve KDD'lerin Hyers-Ulam kararlılığı bu genelleştirilmiş Laplace operatörü [57–59] kullanılarak incelenmiştir.

Son yıllarda Başçı ve arkadaşları [60] (k,ψ)-HKT ve integrallerini incelemek için genelleştirilmiş (k,ψ)-GLD'ünü geliştirmişlerdir. Bu dönüşüm, mevcut Laplace dönüşümü türlerinin kapsamlı bir genellemesi olup, geleneksel Laplace dönüşümünü $k,\rho > 0$ ve ψ-fonksiyonu gibi ek parametreler aracılığıyla genişletmektedir. Bu sayede, çeşitli KDD'in çözümlerinin elde edilmesine olanak tanımaktadır.

Bu bölümde klasik Laplace dönüşümü ve özellikleri, ardından Jarad ve Abdeljawad tarafından bazı türevler içeren diferensiyel denklemlerin çüzümü için ortaya koydukları [66] genelleştirilmiş Laplace dönüşümü ve daha sonra Jarad ve Abdeljawad'ın GKDD'in çözümü için kullandığı genelleştirilmiş ρ-Laplace dönüşümü [56] ve özelliklerini verildikten sonra, Başçı ve diğerlerinin [60] geliştirdiği (k,ψ)-GLD'ünün tanımı ve özellikleri verilip bu dönüşümü kullanarak bulduğumuz lemma, teorem ve notlar verilecektir.

3.1. Klasik Laplace Dönüşümü

İlk olarak olasılık teorisinde Pierre-Simon Laplace (1749-1827) [73] tarafından kullanılan bu dönüşüm matematikte başlangıç ve sınır değer problemlerinde, olasılık teorisinde ve KDD'in kararlılık analizlerinde kullanılmaktadır.

3.1.1. Tanım

Bir t_0 sabit sayısı verilsin. Eğer $t > t_0$ için tanımlı bir $f(t)$ fonksiyonu için

$$e^{-\alpha t}\,|f(t)| < M$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde M ve α pozitif sayıları bulunabiliyor ise, $f(t)$ fonksiyonuna α-üstel mertebeli veya kısaca üstel mertebeden bir fonksiyon denir [74].

3.1.2. Tanım

Kabul edelim ki $f(t)$, $t > 0$ için reel değerli bir fonksiyon olup her sonlu $a \le t \le b$ alt aralığında parçalı sürekli ve üstel mertebeli olsun. Bu durumda, $s > \alpha$ için

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \tag{3.1}$$

Laplace dönüşümü mevcuttur.

Laplace dönüşümünün bazı özellikleri Lemma 3.1.3 de verilmiştir [74].

3.1.3. Lemma

1) $\mathscr{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}, s > 0$

2) $\mathscr{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, s > 0 \quad n \in \mathbb{N}$

3) $\mathscr{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}, s > a$

4) $\mathscr{L}\{\sin at\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}, s > a$

5) $\mathscr{L}\{\cos at\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}, s > a$

3.2. Genelleştirilmiş Laplace Dönüşümü

3.2.1. Tanım

$f, \psi : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyonlar olsun. $\psi(t)$ fonksiyonu sürekli olup $\psi'(t) > 0$ koşulunu $[a,\infty)$ aralığında sağlasın. Bu durumda f fonksiyonunun genelleştirilmiş Laplace dönüşümü aşağıdaki integralin yakınsadığı tüm s değerleri için

$$\mathscr{L}_\psi\{f(t)\}(s) = \int_a^\infty e^{-s(\zeta_a(t))} f(t)\psi'(t)\,dt, \tag{3.2}$$

biçiminde tanımlanır [66].

3.2.2. Teorem

$f, \psi : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyonlar olsun. $\psi(t)$ fonksiyonu sürekli olup ve $\psi'(t) > 0$ koşulunu $[a,\infty)$ aralığında sağlasın. Ayrıca f fonksiyonunun genelleştirilmiş Laplace dönüşümü mevcut olsun. O zaman

$$\mathscr{L}_\psi\{f(t)\}(s) = \mathscr{L}\left\{f\left(\psi^{-1}(t+\psi(a))\right)\right\}(s) \tag{3.3}$$

eşitliği sağlanır. Burada $\mathscr{L}\{f\}$, f fonksiyonunun klasik Laplace dönüşümüdür [66].

Genelleştirilmiş Laplace dönüşümünün bazı özellikleri Lemma 3.2.3'te verilmiştir. [66].

3.2.3. Lemma

1. $\mathscr{L}_\psi\{1\}(s) = \dfrac{1}{s}, \quad s > 0.$
2. $\mathscr{L}_\psi\left\{(\zeta_a(t))^\beta\right\}(s) = \frac{\Gamma(\beta)}{s^\beta}, \operatorname{Re}(\beta) > 0, \quad s > 0.$
3. $\mathscr{L}_\psi\left\{e^{\lambda\psi(t)}\right\}(s) = \frac{e^{\lambda\psi(a)}}{s-\lambda} \quad s > \lambda.$

3.3. ρ-Laplace Dönüşümü

3.3.1. Tanım

$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ gerçel değerli bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun ρ-Laplace dönüşümü

$$\mathscr{L}_\rho\{f(t)\}(s)=\int_0^\infty e^{-st^\rho/\rho}f(t)\frac{dt}{t^{1-\rho}},\quad \rho>0, \tag{3.4}$$

biçiminde tanımlanır [56].

3.3.2. Teorem

$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ gerçel değerli bir fonksiyon ve f'nin ρ-Laplace dönüşümü mevcut olsun. O zaman

$$\mathscr{L}_\rho\{f(t)\}(s)=\mathscr{L}\{f((\rho t)^{\frac{1}{\rho}})\}(s) \tag{3.5}$$

eşitliği sağlanır. Burada $\mathscr{L}\{f\}$, f fonksiyonunun klasik Laplace dönüşümüdür [56].

ρ-Laplace dönüşümünün bazı özellikleri Lemma 3.3.3' de verilmiştir [56].

3.3.3. Lemma

1) $\mathscr{L}_\rho\{1\}(s)=\dfrac{1}{s},\quad s>0.$

2) $\mathscr{L}_\rho\{t^p\}(s)=\rho^{\frac{p}{\rho}}\dfrac{\Gamma\left(1+\frac{p}{\rho}\right)}{s^{1+\frac{p}{\rho}}},\quad p\in\mathbb{R},\ s>0.$

3) $\mathscr{L}_\rho\left\{e^{\lambda\frac{t^\rho}{\rho}}\right\}(s)=\dfrac{1}{s-\lambda},\quad s>\lambda.$

3.4. (k,ψ)-genelleştirilmiş Laplace dönüşümü ve özellikleri

3.4.1. Tanım

$0 \leq a < b < \infty$ olmak üzere $g, \psi : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, gerçel değerli fonksiyonlar ψ fonksiyonu (a,b)'da sürekli ve $\psi'(t) > 0$ olsun. Ayrıca $\rho, k > 0$ olsun. Bu durumda g' nin (k,ψ)-genelleştirilmiş Laplace dönüşümü ((k,ψ)-GLD) aşağıdaki integralin yakınsadığı tüm s değerleri için

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{g(t)\}(s) = \int_a^{\infty} e^{-s(\zeta_a(t))k^{1-\frac{\rho}{k}}} g(t)\,\psi'(t)\,dt \tag{3.6}$$

biçiminde tanımlanır [60].

Bu genelleme, operasyonel alanı tanımlayan ψ-fonksiyonunu ve daha fazla esneklik ve hassasiyet sağlayan k, ρ parametresini içeren klasik Laplace dönüşümüne dayanır. Bu tür iyileştirmeler, türevlerin ve integralin sıklıkla fonksiyonlar ile ilgili olduğu kesirli hesaplama (fractional calculus) alanında özellikle yararlıdır.

Not

Eş. 3.6'da $k = 1$ ya da $\rho = k$ ve $a = 0$, $\psi(t) = t$ alındığında (k,ψ)-GLD'ü, klasik Laplace dönüşümüne [73] indirgenir.

Not

Eş. 3.6'da $k = 1$ ya da $\rho = k$ ve $a = 0$ alındığında (k,ψ)-GLD'ü, genelleştirilmiş Laplace dönüşümüne [66] indirgenir.

Not

Eş. 3.6'da $k = 1$ ya da $\rho = k$ ve $a = 0$, $\psi(t) = \frac{t^{\rho}}{\rho}$ alındığında (k,ψ)-GLD'ü, ρ-Laplace dönüşümüne [56] indirgenir.

(k,ψ)-GLD bir dizi avantaja sahiptir:

1. **Klasik ve Kesirli Operatörlerin Birleştirilmesi:** Bu dönüşüm, klasik Laplace dönüşümünü özel bir durum olarak kapsar ve Riemann–Liouville, Caputo ve Hilfer türevleri gibi kesirli operatörler için doğal bir çerçeve sunar.
2. **Farklı Uygulamalara Uygunluk:** $\psi(t)$ aracılığıyla özelleştirilebilir bir çekirdek sağlaması sayesinde, bu dönüşüm, logaritmik veya üstel büyüme desenleri gibi karmaşık davranışlarla yönetilen sistemlerin modellenmesini kolaylaştırır.
3. **Verimli Problem Çözme:** Bu dönüşüm, KDD'in çözümünü basitleştirir ve uygulamalı matematik, fizik ve mühendislik alanlarında problemler için açık çözümler sunar.

3.4.2. Teorem

$g,\psi \in C[a,\infty)$ reel değerli fonksiyonlar olsun ve $\psi(t)$ fonksiyonu sürekli olup $\psi'(t) > 0$ koşulunu $[a,\infty)$ aralığında sağlasın. Ayrıca, $\rho,k > 0$ olmak üzere g fonksiyonunun (k,ψ)-genelleştirilmiş Laplace dönüşümü mevcut olsun. O zaman

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{g(t)\}(s) = \frac{1}{k^{1-\frac{\rho}{k}}}\mathscr{L}\left\{g\left(\psi^{-1}\left(\frac{t}{k^{1-\frac{\rho}{k}}} + \psi(a)\right)\right)\right\} \tag{3.7}$$

olur. Burada, $\mathscr{L}\{f\}$, f fonksiyonunun klasik Laplace dönüşümüdür [60].

3.4.3. Teorem

Eğer $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ parçalı sürekli bir fonksiyon ve ψ-üstel mertebeden bir fonksiyon ise yani, her $t \geq T$ için $|f(t)| < Me^{c\psi(t)}$ olacak şekilde M,c,T pozitif sabitleri mevcut ise, o zaman f fonksiyonunun (k,ψ)-genelleştirilmiş Laplace dönüşümü, $s > c$ için mevcuttur [60].

3.4.4. Teorem

Eğer $g_1 : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun (k,ψ)-genelleştirilmiş Laplace dönüşümü $s > d_1$ için mevcut ve $g_2 : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun (k,ψ)-genelleştirilmiş Laplace dönüşümü $s > d_2$ için mevcut ise, herhangi c_1 ve c_2 sabitleri için $c_1g_1 + c_2g_2$ fonksiyonunun

(k,ψ)-genelleştirilmiş Laplace dönüşümü de her $s > \max\{d_1, d_2\}$ için mevcuttur ve

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t)\}(s) = c_1 \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{g_1(t)\}(s) + c_2 \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{g_2(t)\}(s) \tag{3.8}$$

sağlanır [60].

3.4.5. Tanım

g ve h, her $[a,T]$ aralığında parçalı sürekli olan iki üstel mertebeli fonksiyonlar olsunlar. O zaman, g ve h fonksiyonlarının genelleştirilmiş konvolüsyonu

$$\left(g *_{\psi} h\right)(t) = \int_a^t g(u)\, h\left(\psi^{-1}\left(\psi(t) - \psi(u) + \psi(a)\right)\right) \psi'(u)\, du \tag{3.9}$$

biçiminde tanımlanır. Bu tanıma göre, $\left(g *_{\psi} h\right)(t) = \left(h *_{\psi} g\right)(t)$ bağıntısı elde edilir [66].

3.4.6. Teorem

g ve h üstel mertebeli iki fonksiyon olsun ve her $[a,T]$ aralığında parçalı sürekli olsunlar. O zaman

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\left(g *_{\psi} h\right)(t)\right\}(s) = \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{g(t)\}(s)\, \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{h(t)\}(s) \tag{3.10}$$

eşitliği sağlanır [60].

3.5. Bazı Fonksiyonlar İçin (k,ψ)-Genelleştirilmiş Laplace Dönüşümü

Aşağıda bazı temel fonksiyonların (k,ψ)-genelleştirilmiş Laplace dönüşümlerini sunuyoruz. Bu özellikler sonuncusu hariç 2023 yılında [60] kaynağında ve sonunucusu 2024 yılında [75] kaynağında kanıtlanmıştır.

1) $s > 0$ için,

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{1\}(s) = \frac{1}{s k^{1-\frac{\rho}{k}}}.$$

2) Eğer $s>0$ ve $\mathrm{Re}(\beta)>0$ ise,

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{(\zeta_a(t))^{\beta}\right\}(s)=\frac{\Gamma_k((\beta+1)k)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\beta+1}k^{\beta}}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\beta+1}}. \tag{3.11}$$

3) $s>\frac{\lambda}{k^{1-\frac{\rho}{k}}}$ için

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{e^{\lambda\psi(t)}\right\}(s)=\frac{e^{\lambda\psi(a)}}{sk^{1-\frac{\rho}{k}}-\lambda}.$$

4) Eğer $\mathrm{Re}(\alpha)>0$ ve $\left|\frac{\lambda}{s^{\alpha}}\right|<1$ ise,

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{(\zeta_a(t))^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(\lambda\left(k^{1-\frac{\rho}{k}}\zeta_a(t)\right)^{\alpha}\right)\right\}(s)=\frac{1}{\left(k^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\beta}}\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-\lambda}. \tag{3.12}$$

5) Eğer $\mathrm{Re}(\alpha)>0$, $\mathrm{Re}(\beta)>0$ ve $\left|\frac{\lambda}{s^{\alpha}}\right|<1$ ise,

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{(\zeta_a(t))^{\beta-1}E_{k,\alpha,\beta}^{\xi}\left(\lambda\left(k^{1-\frac{\rho}{k}}\zeta_a(t)\right)^{\alpha}\right)\right\}(s)=\frac{1}{\left(k^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\beta}}\frac{s^{\alpha\xi-\beta}}{(s^{\alpha}-\lambda)^{\xi}}.$$

6) Eğer $\mathrm{Re}(\alpha)>0$, $\mathrm{Re}(\beta)>0$, $\mathrm{Re}(\xi)>0$, $\mathrm{Re}(s)>0$ ve $\left|\frac{\lambda}{s^{\alpha}}\right|<1$ ise,

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{(\zeta_a(t))^{\frac{\beta}{k}-1}E_{\alpha,\beta}^{\xi}\left(k^{\frac{\alpha}{k}-1}\lambda\left(k^{1-\frac{\rho}{k}}\zeta_a(t)\right)^{\alpha}\right)\right\}(s)=\frac{k^{1-\frac{\beta}{k}}}{\left(k^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\beta}}\frac{s^{\frac{\alpha}{k}\frac{\xi}{k}-\frac{\beta}{k}}}{(s^{\alpha}-\lambda)^{\xi}}.$$

3.5.1. Teorem

Kabul edelim ki $g\in C_{\psi}[a,T]$ olsun öyleki $g_{k,\psi}^{[1]}$ fonksiyonu ψ-üstel mertebeli olup her sonlu $[a,T]$ aralığı üzerinde parçalı sürekli olsun. O zaman

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{g_{k,\psi}^{[1]}(t)\right\}(s)=k\left[sk^{1-\frac{\rho}{k}}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{g(t)\}(s)-g(a)\right] \tag{3.13}$$

eşitliği sağlanır [60].

3.5.2. Sonuç

Kabul edelim ki $g \in C_{\psi}^{n-1}[a,T]$ olsun öyleki, $g_{k,\psi}^{[j]}$ $(j=0,1,...,n-1)$ fonksiyonları ψ-üstel mertebeye sahip ve her sonlu $[a,T]$ aralığı üzerinde parçalı sürekli olsun. O zaman

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{g_{k,\psi}^{[n]}(t)\right\}(s)=k^{n}\left[\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{g(t)\}-\sum_{j=0}^{n-1}\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n-j-1}g_{k,\psi}^{[j]}(a)\right] \tag{3.14}$$

eşitliği sağlanır [60].

3.5.3. Teorem

g fonksiyonu her sonlu $[a,T]$ aralığı üzerinde parçalı sürekli ve ψ-üstel mertebeli olsun. Ayrıca, $\alpha>0$ ve $\psi'(t)>0$ olduğunu varsayalım. O zaman

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{I_{k,a+}^{\alpha;\psi}g(t)\right\}(s)=\frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{g(t)\}}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\frac{\alpha}{k}}k^{\frac{\alpha}{k}}} \tag{3.15}$$

eşitliği sağlanır [60].

3.5.4. Sonuç

$\alpha>0$ ve her $b>a$ için $g \in AC_{\psi}^{n}[a,b]$, $\psi \in C_{\sigma;\psi}^{n}[a,b]$, öyle ki $\psi'(t)>0$ ayrıca $I_{k,a^{+}}^{kn-\alpha-kj;\psi}g$, $j=0,1,...,n-1$ fonksiyonları ψ-üstel mertebeli olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{{}^{H}D_{k,a+}^{\alpha;\psi}g(t)\right\}(s)=k^{n}\Bigg[&\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n}\frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{g(t)\}(s)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\frac{kn-\alpha}{k}}k^{\frac{kn-\alpha}{k}}}\\&-\sum_{j=0}^{n-1}\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n-j-1}\left(I_{k,a^{+}}^{kn-\alpha;\psi}g\right)^{[j]}(a)\Bigg]\end{aligned} \tag{3.16}$$

dır [60].

3.5.5. Lemma

Eğer $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ ve $\left| \frac{\lambda}{sk^{1-\frac{\rho}{k}}} \right| < 1$ ise,

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi} \left\{ (\zeta_a(t))^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(\lambda (\zeta_a(t))^{\alpha} \right) \right\} (s) = \frac{1}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}} \right)^{\alpha} - \lambda} \tag{3.17}$$

eşitliği sağlanır [75].

3.5.6. Lemma

$\psi \in C[a,\infty)$, $[a,b)$ üzerinde reel değerli sürekli bir fonksiyon ve $\psi'(t) > 0$, $k > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman $s > 0$ ve $\mathrm{Re}(\beta) > -1$ için

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi} \left\{ e^{-\lambda(\zeta_a(t))} (\zeta_a(t))^{\beta} \right\} (s) = \frac{\Gamma_k((\beta+1)k)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}} + \lambda \right)^{\beta+1} k^{\beta}} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}} + \lambda \right)^{\beta+1}} \tag{3.18}$$

eşittliği sağlanır.

İspat

Eş. 3.6'da verilen (k,ψ)-GLD'ü kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi} \left\{ e^{-\lambda(\zeta_a(t))} (\zeta_a(t))^{\beta} \right\} (s) &= \int_a^{\infty} e^{-s(\zeta_a(t))k^{1-\frac{\rho}{k}}} e^{-\lambda(\zeta_a(t))} (\zeta_a(t))^{\beta} \psi'(t)\, dt \\ &= \int_a^{\infty} e^{-(\zeta_a(t))(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda)} (\zeta_a(t))^{\beta} \psi'(t)\, dt \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte $(\zeta_a(t))(sk^{1-\frac{\rho}{k}} + \lambda) = u$ değişken değistirmesi uygulanır ve gama

fonksiyonunun tanımı kullanılırsa

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{e^{-\lambda(\zeta_a(t))}\left(\zeta_a(t)\right)^{\beta}\right\}(s)=\int_0^{\infty}e^{-u}\left(\frac{u}{sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda}\right)^{\beta}\frac{du}{sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\beta+1}}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Not

Eğer Lemma 3.5.6' da $\lambda=0$ alınırsa

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\left(\psi(t)-\psi(a)\right)^{\beta}\right\}(s)=\frac{\Gamma_k\left((\beta+1)k\right)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\beta+1}k^{\beta}}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\beta+1}},s>0,Re\beta>-1 \qquad (3.19)$$

eşitliği elde edilir.

3.5.7. Lemma

Eğer $\mathrm{Re}(\alpha)>0$, $\mathrm{Re}(\delta)>0$ ve $\left|\frac{\eta k^{-\frac{\alpha}{k}}}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{\alpha}{k}}}\right|<1$ ise,

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{e^{-\lambda(\zeta_a(t))}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{\delta}{k}-1}E_{\frac{\alpha}{k},\frac{\delta}{k}}\left(\eta k^{-\frac{\alpha}{k}}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{\alpha}{k}}\right)\right\}(s)=\frac{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{\alpha-\delta}{k}}}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{\alpha}{k}}-\eta k^{-\frac{\alpha}{k}}} \qquad (3.20)$$

olur.

İspat

Eş. 3.6'da verilen (k,ψ)-GLD kullanılırsa

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{e^{-\lambda(\zeta_a(t))}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{\delta}{k}-1}E_{\frac{\alpha}{k},\frac{\delta}{k}}\left(\eta k^{-\frac{\alpha}{k}}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{\alpha}{k}}\right)\right\}(s)\\ =&\int_a^{\infty}e^{-s(\zeta_a(t))k^{1-\frac{\rho}{k}}}e^{-\lambda(\zeta_a(t))}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{\delta}{k}-1}E_{\frac{\alpha}{k},\frac{\delta}{k}}\left(\eta k^{-\frac{\alpha}{k}}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{\alpha}{k}}\right)\psi'(t)\,dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_a^{\infty} e^{-(\zeta_a(t))(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda)} \left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{\delta}{k}-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\eta k^{-\frac{\alpha}{k}} \left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{\alpha}{k}}\right)^m}{\Gamma\left(m\frac{\alpha}{k}+\frac{\delta}{k}\right)} \psi'(t)\,dt \\
&= \int_a^{\infty} e^{-(\zeta_a(t))(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\eta k^{-\frac{\alpha}{k}}\right)^m \left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{m\alpha+\delta}{k}-1}}{\Gamma\left(m\frac{\alpha}{k}+\frac{\delta}{k}\right)} \psi'(t)\,dt \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\eta k^{-\frac{\alpha}{k}}\right)^m}{\Gamma\left(m\frac{\alpha}{k}+\frac{\delta}{k}\right)} \int_a^{\infty} e^{-(\zeta_a(t))(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda)} \left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{m\alpha+\delta}{k}-1} \psi'(t)\,dt \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\eta k^{-\frac{\alpha}{k}}\right)^m}{\Gamma\left(m\frac{\alpha}{k}+\frac{\delta}{k}\right)} \mathscr{L}_{k,a}^{\rho;\psi}\left\{e^{-\lambda(\zeta_a(t))} \left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{m\alpha+\delta}{k}-1}\right\}(s)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Lemma 3.5.6'da $\beta \to \frac{m\alpha+\delta}{k} - 1$ için uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{e^{-\lambda(\zeta_a(t))} \left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{\delta}{k}-1} E_{\frac{\alpha}{k},\frac{\delta}{k}}\left(\eta k^{-\frac{\alpha}{k}} \left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{\alpha}{k}}\right)\right\}(s) \\
&= \frac{1}{(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda)^{\frac{\delta}{k}}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\eta k^{-\frac{\alpha}{k}}}{\left((sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda)^{\frac{\alpha}{k}}\right)}\right)^m \\
&= \frac{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{\alpha-\delta}{k}}}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{\alpha}{k}} - \eta k^{-\frac{\alpha}{k}}}
\end{aligned}
$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Not

Lemma 3.5.7'de $\lambda = 0$ alınırsa

$$
\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{\delta}{k}-1} E_{\frac{\alpha}{k},\frac{\delta}{k}}\left(\eta k^{-\frac{\alpha}{k}} \left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{\alpha}{k}}\right)\right\}(s) = \frac{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\frac{\alpha-\delta}{k}}}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\frac{\alpha}{k}} - \eta k^{-\frac{\alpha}{k}}} \tag{3.21}
$$

eşitliği elde edilir.

Not

Lemma 3.5.7'de $\alpha = \delta$ alınırsa

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{e^{-\lambda(\zeta_a(t))}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{\alpha}{k}-1}E_{\frac{\alpha}{k},\frac{\alpha}{k}}\left(\eta k^{-\frac{\alpha}{k}}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{\alpha}{k}}\right)\right\}(s) = \frac{1}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{\alpha}{k}}-\eta k^{-\frac{\alpha}{k}}}. \tag{3.22}$$

eşitliği elde edilir.

Not

Lemma 3.5.7'de $\alpha = \delta$ ve $\lambda = 0$ alınırsa

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{\alpha}{k}-1}E_{\frac{\alpha}{k},\frac{\alpha}{k}}\left(\eta k^{-\frac{\alpha}{k}}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{\alpha}{k}}\right)\right\}(s) = \frac{1}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\frac{\alpha}{k}}-\eta k^{-\frac{\alpha}{k}}}. \tag{3.23}$$

eşitliği elde edilir.

3.5.8. Lemma

Kabul edelim ki $g \in C_\psi[a,T]$ fonksiyonu ψ-üstel mertebeli olsun. Ayrıca, her sınırlı $[a,T]$ aralığında $g_\psi^{[1]}$ parçalı sürekli olsun. Bu durumda

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{g_\psi^{[1]}(t)\right\}(s) = sk^{1-\frac{\rho}{k}}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{g(t)\right\}(s) - g(a) \tag{3.24}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$g_\psi^{[1]}$, $a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < T$ olacak biçimde $[a,T]$ aralığında parçalı sürekli olsun. O

zaman

$$\begin{aligned}\int_a^T e^{-s(\zeta_a(t))k^{1-\frac{\rho}{k}}} g_{\psi}^{[1]}(t)\,\psi'(t)\,dt &= \int_a^T e^{-s(\zeta_a(t))k^{1-\frac{\rho}{k}}} g'(t)\,dt \\ &= \int_a^{t_1} e^{-s(\zeta_a(t))k^{1-\frac{\rho}{k}}} g'(t)\,dt + \sum_{j=1}^{n-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{-s(\zeta_a(t))k^{1-\frac{\rho}{k}}} g'(t)\,dt \\ &\quad + \int_{t_n}^{T} e^{-s(\zeta_a(t))k^{1-\frac{\rho}{k}}} g'(t)\,dt \qquad (3.25)\end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Eş. 3.25'te kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}\int_a^T e^{-s(\zeta_a(t))k^{1-\frac{\rho}{k}}} g_{\psi}^{[1]}(t)\,\psi'(t)\,dt &= e^{-s(\zeta_a(t))k^{1-\frac{\rho}{k}}} g(t)\Big|_a^{t_1} + \sum_{j=1}^{n-1} e^{-s(\zeta_a(t))k^{1-\frac{\rho}{k}}} g(t)\Big|_{t_j}^{t_{j+1}} \\ &\quad + e^{-s(\zeta_a(t))k^{1-\frac{\rho}{k}}} g(t)\Big|_{t_n}^{T} \\ &\quad + sk^{1-\frac{\rho}{k}}\int_a^{t_1} e^{-s(\zeta_a(t))k^{1-\frac{\rho}{k}}} g(t)\,\psi'(t)\,dt \\ &\quad + sk^{1-\frac{\rho}{k}}\sum_{j=1}^{n-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{-s(\zeta_a(t))k^{1-\frac{\rho}{k}}} g(t)\,\psi'(t)\,dt \\ &\quad + sk^{1-\frac{\rho}{k}}\int_{t_n}^{T} e^{-s(\zeta_a(t))k^{1-\frac{\rho}{k}}} g(t)\,\psi'(t)\,dt \qquad (3.26)\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 3.26 yeniden yazılırsa

$$\int_a^T e^{-s(\zeta_a(t))k^{1-\frac{\rho}{k}}} g_{\psi}^{[1]}(t)\,\psi'(t)\,dt = e^{-s(\zeta_a(T))k^{1-\frac{\rho}{k}}} g(T) - g(a)$$

$$+sk^{1-\frac{\rho}{k}}\int_a^T e^{-s(\zeta_a(t))k^{1-\frac{\rho}{k}}}g(t)\,\psi'(t)\,dt \tag{3.27}$$

eşitliği elde edilir. Eş. 3.27' nin $T\to\infty$ iken her iki tarafının limiti alınırsa

$$\begin{aligned}\int_a^\infty e^{-s(\zeta_a(t))k^{1-\frac{\rho}{k}}}g_\psi^{[1]}(t)\,\psi'(t)\,dt &= sk^{1-\frac{\rho}{k}}\int_a^\infty e^{-s(\zeta_a(t))k^{1-\frac{\rho}{k}}}g(t)\,\psi'(t)\,dt-g(a)\\ &= sk^{1-\frac{\rho}{k}}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{g(t)\}(s)-g(a)\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Şimdi Lemma 3.5.8'i genelleştirelim.

3.5.9. Sonuç

Kabul edelim ki $g\in C_\psi^{n-1}[a,T]$ öyle ki $g_\psi^{[j]}(j=0,1,...,n-1)$, ψ-üstel mertebeli olsun. Ayrıca her sınırlı $[a,T]$ aralığında $g_\psi^{[j]}$ parçalı sürekli olsun. Bu durumda

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{g_\psi^{[n]}(t)\right\}(s)=\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^n\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{g(t)\}(s)-\sum_{j=1}^{n-1}\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n-j-1}g_\psi^{[j]}(a) \tag{3.28}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Bu ispat matematiksel tümevarım ile yapılır.

3.5.10. Lemma

$g\in C_\psi[a,T]$ fonksiyonu $\psi-$üstel mertebeli ve φ_ψ^1 fonksiyonu her sonlu $[a,T]$ aralığı

üzerinde parçalı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\varphi_{\psi}^{1}\left(g\left(t\right)\right)\right\}\left(s\right)=\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{g\left(t\right)\right\}\left(s\right)-g\left(a\right) \tag{3.29}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 3.6'da verilen $(k,\psi)-$GLD'ü ve $\varphi_{\psi}^{1}\left(\left(g\left(t\right)\right)\right)=\left(\frac{1}{\psi^{'}(t)}\frac{d}{dt}+\lambda\right)^{1}g\left(t\right)$ notasyonu kullanılırsa

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\varphi_{\psi}^{1}\left(g\left(t\right)\right)\right\}\left(s\right) &= \int_{a}^{\infty}e^{-s\zeta_{a}(t)k^{1-\frac{\rho}{k}}}\left(\frac{1}{\psi^{'}\left(t\right)}\frac{d}{dt}+\lambda\right)g\left(t\right)\psi^{'}\left(t\right)dt \\ &= \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{g_{\psi}^{[1]}\left(t\right)\right\}\left(s\right)+\lambda\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{g\left(t\right)\right\}\left(s\right)\end{aligned} \tag{3.30}$$

elde edilir. Eş. 3.30' da Eş. 3.24 kullanılırsa

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\varphi_{\psi}^{1}\left(g\left(t\right)\right)\right\}\left(s\right) = \left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{g\left(t\right)\right\}\left(s\right)-g\left(a\right)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Şimdi Lemma 3.5.10'u genelleştirelim.

3.5.11. Sonuç

Kabul edelim ki $g\in C_{\psi}^{n-1}\left[a,T\right]$ öyle ki $\varphi_{\psi}^{j}\ \left(j=0,1,...,n-1\right)$ fonksiyonları $\psi-$ üstel

mertebeli olsun. Ayrıca, φ_{ψ}^{j} her sonlu $[a,T]$ aralığı üzerinde parçalı sürekli olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\varphi_{\psi}^{n}\left(g\left(t\right)\right)\right\}\left(s\right) &= \left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{n}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{g\left(t\right)\right\}\left(s\right)\\ &\quad -\sum_{j=0}^{n-1}\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{n-j-1}\varphi_{\psi}^{j}\left(g\left(a\right)\right)\end{aligned} \tag{3.31}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Bu ispat matematiksel tümevarım ile yapılır.

3.5.12. Teorem

$g\left(t\right)$ her sınırlı $[a,T]$ aralığında parçalı sürekli ve ψ-üstel mertebeli olsun. Ayrıca $\alpha>0$ ve $\psi^{'}\left(t\right)>0$ olsun. O zaman

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{I_{a+}^{\alpha;\psi}g\left(t\right)\right\}\left(s\right)=\frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{g\left(t\right)\right\}\left(s\right)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\alpha}} \tag{3.32}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 2.7'deki $I_{a+}^{\alpha;\psi}$ kesirli integralinin tanımı kullanılarak $\tau=\psi^{-1}\left(\zeta_{u}\left(t\right)+\psi\left(a\right)\right)$ değişken değiştirmesi uygulanılırsa

$$I_{a+}^{\alpha;\psi}g(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{t}\left(\zeta_{a}\left(\tau\right)\right)^{\alpha-1}g\left(\psi^{-1}\left(\zeta_{\tau}\left(t\right)+\psi\left(a\right)\right)\right)\psi^{'}\left(\tau\right)d\tau \tag{3.33}$$

elde edilir. Eğer Eş. 3.33'ün her iki tarafının (k,ψ)-GLD alınırsa

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{I_{a+}^{\alpha;\psi}g(t)\right\}(s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\int_a^t\left(\zeta_a(\tau)\right)^{\alpha-1}g\left(\psi^{-1}\left(\zeta_\tau(t)+\psi(a)\right)\right)\psi'(\tau)\,d\tau\right\}(s)$$

eşitliği elde edilir. Üstelik Eş. 3.9, Eş. 3.10 ve Eş. 3.19 son eşitlikte kullanılırsa

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{I_{a+}^{\alpha;\psi}g(t)\right\}(s) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\left(\zeta_a(t)\right)^{\alpha-1}*_\psi g(t)\right\}(s)\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^\alpha}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{g(t)\right\}(s)=\frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{g(t)\right\}(s)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^\alpha}\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

3.5.13. Sonuç

$\alpha>0$ ve herhangi bir $b>a$ için $g\in AC_\psi^n[a,b]$, $\psi\in C_{\sigma;\psi}^n[a,b]$, $\psi'(t)>0$ ve $I_{a+}^{n-\alpha-j}g$ ψ-üstel mertebeli olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{D_{a+}^{\alpha;\psi}g(t)\right\}(s) &= \left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^\alpha\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{g(t)\right\}(s)\\ &\quad-\sum_{j=0}^{n-1}\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n-j-1}\left(I_{a+}^{n-\alpha;\psi}g\right)^{[j]}(a)\end{aligned}\tag{3.34}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 2.9'un her iki tarafının (k,ψ)-GLD 'ünü alınırsa

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{D_{a+}^{\alpha;\psi}g(t)\right\}(s) &= \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n} I_{a+}^{n-\alpha;\psi}g(t)\right\}(s)\\ &= \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\left(I_{a+}^{n-\alpha;\psi}g(t)\right)^{[n]}\right\}(s) \qquad (3.35)\end{aligned}$$

elde edilir. Üstelik Eş. 3.28 ve Eş. 3.32, Eş. 3.35'te kullanılırsa

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{D_{a+}^{\alpha;\psi}g(t)\right\}(s) &= \left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{I_{a+}^{n-\alpha;\psi}g(t)\right\}(s)\\ &\quad -\sum_{j=0}^{n-1}\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n-j-1}\left(I_{a+}^{n-\alpha;\psi}g\right)^{[j]}(a)\\ &= \left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n}\frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{g(t)\right\}(s)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n-\alpha}}-\sum_{j=0}^{n-1}\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n-j-1}\left(I_{a+}^{n-\alpha;\psi}g\right)^{[j]}(a)\\ &= \left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\alpha}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{g(t)\right\}(s)-\sum_{j=0}^{n-1}\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n-j-1}\left(I_{a+}^{n-\alpha;\psi}g\right)^{[j]}(a)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

3.5.14. Lemma

$\alpha>0$ olsun ve $g\in AC_{\psi}^{n}[a,b]$ herhangi bir $b>a$ için tanımlı olsun. Ayrıca $\psi\in C_{\sigma;\psi}^{n}[a,b]$, $\psi'(t)>0$ ve $I_{k,a+}^{(1-\nu)(kn-\alpha)-kj;\psi}g$, $j=0,1,...,n-1$ fonksiyonları ψ-üstel mertebeli olsun. Bu durumda

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{{}^{H}D_{k,a+}^{\alpha,\nu;\psi}g(t)\right\}(s) = k^{n}\left[\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n}\frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{g(t)\right\}(s)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\frac{kn-\alpha}{k}}k^{\frac{kn-\alpha}{k}}}\right.$$

$$-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n-j-1}\left(I_{k,a+}^{(1-\nu)(kn-\alpha);\psi}g\right)_{k,\psi}^{[j]}(a)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}k^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}}\Bigg] \tag{3.36}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 2.14'de tanımlanan ${}^{H}D_{k,a+}^{\alpha,\nu;\psi}$ kesirli türevinin her iki tarafına (k,ψ)-GLD uygulanırsa

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{{}^{H}D_{k,a+}^{\alpha,\nu;\psi}g(t)\right\}(s) &= \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{I_{k,a+}^{\nu(kn-\alpha);\psi}\left(\frac{k}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n}I_{k,a+}^{(1-\nu)(kn-\alpha);\psi}g(t)\right\}(s)\\ &= \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{I_{k,a+}^{\nu(kn-\alpha);\psi}\left(I_{k,a+}^{(1-\nu)(kn-\alpha);\psi}\right)_{k,\psi}^{[n]}g(t)\right\}(s)\end{aligned} \tag{3.37}$$

eşitliği elde edilir. Eğer Eş. 3.14 ve Eş. 3.15, Eş. 3.37' de kullanılırsa

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{{}^{H}D_{k,a+}^{\alpha,\nu;\psi}g(t)\right\}(s) &= \frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\left(I_{k,a+}^{(1-\nu)(kn-\alpha);\psi}\right)_{k,\psi}^{[n]}g(t)\right\}(s)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}k^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}}\\ &= \frac{k^{n}\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\left(I_{k,a+}^{(1-\nu)(kn-\alpha);\psi}\right)g(t)\right\}(s)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}k^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}}\\ &\quad -\frac{k^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n-j-1}\left(I_{k,a+}^{(1-\nu)(kn-\alpha);\psi}g\right)_{k,\psi}^{[j]}(a)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}k^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}}\\ &= k^{n}\Bigg[\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n}\frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{g(t)\}(s)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\frac{kn-\alpha}{k}}k^{\frac{kn-\alpha}{k}}}\end{aligned}$$

$$-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n-j-1}\left(I_{k,a+}^{(1-\nu)(kn-\alpha);\psi}g\right)_{k,\psi}^{[j]}(a)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}k^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}}\Bigg]$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

3.5.15. Lemma

$g(t)$ fonksiyonu her sonlu $[a,T]$ aralığı üzerinde parçalı sürekli ve ψ-üstel mertebeli olsun. Ayrıca, $\alpha>0$ ve $\psi'(t)>0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{{}^{T}I_{k,a+}^{\alpha,\lambda;\psi}g(t)\right\}(s)=\frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{g(t)\}(s)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{\alpha}{k}}k^{\frac{\alpha}{k}}} \tag{3.38}$$

eşirliği sağlanır.

İspat

Eş. 2.17'deki

$${}^{T}I_{k,a+}^{\alpha,\lambda;\psi}g(t)=\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(\zeta_u(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}e^{-\lambda\zeta_u(t)}\psi'(u)\,g(u)\,du$$

kesirli integral eşitliğinde $\tau=\psi^{-1}(\zeta_u(t)+\psi(a))$ değişken değiştirmesi kullanılırsa

$${}^{T}I_{k,a+}^{\alpha,\lambda;\psi}g(t)=\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(\zeta_a(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}e^{-\lambda\zeta_a(\tau)}\psi'(\tau)\,g\left(\psi^{-1}(\zeta_\tau(t)+\psi(a))\right)d\tau \tag{3.39}$$

elde edilir.

Eş. 3.39'un her iki tarafına (k,ψ)-GLD'ü uygulanır ve Eş. 3.9, Eş. 3.10 kullanılırsa

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{{}^{T}I_{k,a+}^{\alpha,\lambda;\psi}g(t)\right\}(s) &= \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(\zeta_a(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}e^{-\lambda\zeta_a(\tau)}g(\phi)\,\psi'(\tau)\,d\tau\right\}(s)\\ &= \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{(\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}e^{-\lambda\zeta_a(t)}\right\}(s)\,\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{g(t)\}(s)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\phi=\psi^{-1}(\zeta_u(t)+\psi(a))$ dır. Son eşitlikte $\frac{\alpha}{k}-1>-1$ olduğundan Eş. 3.18 kullanılırsa

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{{}^{T}I_{k,a+}^{\alpha,\lambda;\psi}g(t)\right\}(s) &= \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\frac{\Gamma_k(\alpha)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{\alpha}{k}}k^{\frac{\alpha}{k}-1}}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{g(t)\}(s)\\ &= \frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{g(t)\}(s)}{k^{\frac{\alpha}{k}}\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{\alpha}{k}}}\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

3.5.16. Lemma

$\alpha>0$ ve herhangi bir $b>a$ olmak üzere $g\in AC_{\psi}^{n}[a,b]$, $\psi\in C_{\sigma;\psi}^{n}[a,b]$, $\psi'(t)>0$ ve $\varphi_{\psi}^{n}\left(I_{k,a+}^{(1-\nu)(kn-\alpha)-kj,\lambda;\psi}g\right)$, $j=0,1,...,n-1$ fonksiyonları ψ-üstel mertebeye sahip olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{{}^{TH}D_{k,a+}^{\alpha,\nu,\lambda;\psi}g(t)\right\}(s) &= k^{n}\left[\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{n}\frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{g(t)\}(s)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{kn-\alpha}{k}}k^{\frac{kn-\alpha}{k}}}\right.\\ &\quad\left.-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{n-j-1}\varphi_{\psi}^{n}\left({}^{T}I_{a+}^{(1-\nu)(kn-\alpha),\lambda;\psi}g\right)(a)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}k^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}}\right]\end{aligned}\tag{3.40}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 2.21'de tanımlanan ${}^{TH}D_{k,a+}^{\alpha,\nu,\lambda;\psi}$ kesirli türevinin her iki tarafına (k,ψ)-GLD'ü uygulanırsa

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{{}^{TH}D_{k,a+}^{\alpha,\nu,\lambda;\psi}g(t)\right\}(s) &= \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{{}^{T}I_{k,a+}^{\nu(kn-\alpha),\lambda;\psi}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}+\lambda\right)^{n}\left(k^{nT}I_{a+}^{(1-\nu)(kn-\alpha),\lambda;\psi}\right)g(t)\right\}(s)\\ &= \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{{}^{T}I_{k,a+}^{\nu(kn-\alpha),\lambda;\psi}\varphi_{\psi}^{n}\left(k^{nT}I_{a+}^{(1-\nu)(kn-\alpha),\lambda;\psi}\right)g(t)\right\}(s) \qquad (3.41)\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 3.31 ve Eş. 3.38, Eş. 3.41'de kullanılırsa

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{{}^{TH}D_{k,a+}^{\alpha,\nu,\lambda;\psi}g(t)\right\}(s) &= \frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\varphi_{\psi}^{n}\left(k^{nT}I_{a+}^{(1-\nu)(kn-\alpha),\lambda;\psi}\right)g(t)\right\}(s)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}k^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}}\\ &= \frac{k^{n}\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{n}}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}k^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}}\frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{g(t)\}(s)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{(1-\nu)(kn-\alpha)}{k}}k^{\frac{(1-\nu)(kn-\alpha)}{k}}}\\ &\quad -\frac{\sum_{j=0}^{n-1}\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{n-j-1}\left(\varphi_{\psi}^{j}\left(k^{nT}I_{a+}^{(1-\nu)(kn-\alpha),\lambda;\psi}\right)g\right)(a)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}k^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}}\\ &= k^{n}\left[\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{n}\frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{g(t)\}(s)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{kn-\alpha}{k}}k^{\frac{kn-\alpha}{k}}}\right.\\ &\quad \left.-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{n-j-1}\left(\varphi_{\psi}^{j}\left({}^{T}I_{a+}^{(1-\nu)(kn-\alpha),\lambda;\psi}\right)g\right)(a)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}k^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}}\right]\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

4. KESİRLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİM ULAM TİPİ KARARLILIĞI

KDD'in kararlılık analizleri içinde, Hyers-Ulam kararlılığı özel bir yer tutar. 1940 yılında Stanisław Ulam, fonksiyonel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin gerçek çözümlere olan yakınlığını sorgulamış ve 1941'de Donald Hyers bu soruya doğrusal fonksiyonel denklemler icin bir çözüm sunmuştur [35]. Daha sonra, 1978 yılında Themistocles Rassias bu sonucu genelleştirerek doğrusal olmayan denklemleri de kapsamıştır. Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı olarak bilinen bu kavram, KDD'in analizinde de kullanılmıştır [33, 36–43]. Bu tür KDD'lerin kararlılık analizlerinde klasik Laplace dönüşümü kullanılırken [45–53] zamanla KDD'in ve genelleştirilmiş kesirli türev ve integral operatörlerinin çeşitliliği arttıkça bu denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığını incelemede klasik Laplace operatörü eksik kalmıştır. GKDD'lerin Ulam tipi kararlılığı, ardışık yaklaşım yöntemi [25, 33, 61], sabit nokta teoremleri [14, 15, 17, 25, 26, 33, 43, 62], Grönwall eşitsizliği yöntemleri [64, 65] ile incelenirken Abdeljawad tarafından bazı türevler içeren diferensiyel denklemlerin çüzümü için ortaya konan [54] ve daha sonra Jarad ve arkadaşlarının [56, 66] geliştirdiği ρ-Laplace operatörü kullanılarak GKDD'in çözümü için yeni çalışmalar ortaya konulmuştur [57–59]. 3. bölümde tanıtılan Başçı ve arkadaşlarının geliştirdiği (k,ψ)-GLD ise mevcut Laplace dönüşümü türlerinin kapsamlı bir genellemesi olduğu için farklı KDD'in çözümlerinin keşfedilmesini daha bütüncül bir yöntemle kolaylaştırsa da bu alanda yapılan çalışmalar sayıca azdır. Bu nedenle bu bölümde bazı genelleştirilmiş kesirli türev içeren KDD'lerin kararlılığı (k,ψ)-GLD kullanılarak incelenecektir.

4.1. ψ-Riemann-Liouville Kesirli Diferensiyel Denkleminin Ulam tipi Kararlılığı

Bu bölümde,

$$\left(D_{a+}^{\alpha;\psi}y\right)(t) = f(t) \tag{4.1}$$

ve

$$\left(D_{a+}^{\alpha;\psi}y\right)(t) - \lambda y(t) = f(t) \tag{4.2}$$

ψ-Riemann-Liouville kesirli diferensiyel denklemlerini

$$\left(I_{a+}^{n-\alpha;\psi} y\right)^{[m]}(a) = c_m,\ m = 0,1,\ldots,n-1 \tag{4.3}$$

başlangıç koşulu ile ele alacağız. Burada $0 < T < +\infty$, λ, c_m, $\mathbb{C}$ de skaler değerler, $f \in C((0,T]\times\mathbb{C})$, $\psi \in C^n[a,b]$ öyle ki $[a,b]$ üzerinde $\psi'(t) > 0$ ve $D_{a+}^{\alpha;\psi}$, $\alpha > 0$ mertebeden ψ-RLKT' dir. Bu bölümdeki teorem ve lemmalarla, Eş. 4.3 başlangıç koşulu ile verilen ve Eş. 4.1, Eş. 4.2 kesirli diferensiyel denklemlerinin Hyers-Ulam kararlılığını (k,ψ)-GLD'ünü kullanarak ispatlayacağız.

4.1.1. Tanım

$f \in C((0,T]\times\mathbb{C})$ olmak üzere verilen bir $\varepsilon > 0$ ve $\left|\left(D_{a+}^{\alpha;\psi} y\right)(t) - f(t)\right| \leq \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir y foksiyonu için Eş. 4.1 kesirli diferensiyel denkleminin bir y_e çözümü var ve $|y(t) - y_e(t)| \leq \varepsilon K$ eşitsizliğini sağlayan bir $K > 0$ pozitif sabiti varsa Eş. 4.3 başlangıç koşullu Eş. 4.1 kesirli diferensiyel denklemine Hyers-Ulam kararlılığına sahiptir denir.

4.1.2. Tanım

$f \in C((0,T]\times\mathbb{C})$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ de bir sabit olmak üzere verilen bir $\varepsilon > 0$ ve $\left|\left(D_{a+}^{\alpha;\psi} y\right)(t) - \lambda y(t) - f(t)\right| \leq \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir y foksiyonu için Eş. 4.2 kesirli diferensiyel denkleminin bir y_e çözümü var ve $|y(t) - y_e(t)| \leq \varepsilon K$ eşitsizliğini sağlayan bir $K > 0$ pozitif sabiti varsa Eş. 4.3 başlangıç koşullu Eş. 4.2 kesirli diferensiyel denklemine Hyers-Ulam kararlılığına sahiptir denir.

4.1.3. Teorem

$\alpha > 0$, $0 < T < +\infty$ ve $\psi(t)$, $(a,b]$ $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ aralığında pozitif artan bir fonksiyon olsun. Eğer her $t \in (0,T]$ ve bazı $\varepsilon > 0$ için $y : (0,T] \to \mathbb{C}$ fonksiyonu Eş. 4.3 başlangıç koşulu ile

$$\left|D_{a+}^{\alpha;\psi} y(t) - f(t)\right| \leq \varepsilon \tag{4.4}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, Eş. 4.1 kesirli diferensiyel denkleminin

$$|y(t)-y_e(t)| \leq \varepsilon \frac{(\zeta_a(T))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \tag{4.5}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $y_e : (0,T] \to \mathbb{C}$ çözümü vardır.

İspat

$t \in (0,T]$ için

$$Y_1(t) = \left(D_{a+}^{\alpha;\psi} y\right)(t) - f(t) \tag{4.6}$$

olsun. Eş. 4.6 nın her iki tarafının (k,ψ)-GLD'ü alınır ve Eş. 3.34 kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{Y_1(t)\}(s) &= \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{D_{a+}^{\alpha;\psi} y(t)\right\}(s) - \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{f(t)\}(s) = \left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\alpha} \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{y(t)\}(s) \\ &\quad - \sum_{j=0}^{n-1} \left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n-j-1} \left(I_{a+}^{n-\alpha;\psi} y(t)\right)^{[j]}(a) - \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{f(t)\}(s) \end{aligned} \tag{4.7}$$

elde edilir. Eş. 4.3 başlangıç koşulu kullanılarak Eş. 4.7 yeniden yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{y(t)\}(s) &= \left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{-\alpha} \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{f(t)\}(s) + \sum_{j=0}^{n-1} c_j \left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n-\alpha-j-1} \\ &\quad + \left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{-\alpha} \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{Y_1(t)\}(s) \end{aligned} \tag{4.8}$$

eşitliği elde edilir. Eş. 3.19' da β yerine sırasıyla $\beta = \alpha + j - n$, $\beta = \alpha - 1$ ve $\beta = -n + j$

değerleri yazılırsa

$$\left.\begin{array}{rl} \left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n-\alpha-j-1} & = \frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{(\zeta_a(t))^{\alpha+j-n}\right\}(s)}{\Gamma(\alpha+j-n+1)}, \\ \left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{-\alpha} & = \frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{(\zeta_a(t))^{\alpha-1}\right\}(s)}{\Gamma(\alpha)}, \\ \left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n-j-1} & = \frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{(\zeta_a(t))^{-n+j}\right\}(s)}{\Gamma(-n+j+1)} \end{array}\right\} \tag{4.9}$$

eşitlikleri elde edilir. Eş. 4.8'de Eş. 4.9 kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{y(t)\}(s) &= \frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{(\zeta_a(t))^{\alpha-1}\right\}(s)\,\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{f(t)\}(s)}{\Gamma(\alpha)} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{c_j \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{(\zeta_a(t))^{\alpha+j-n}\right\}(s)}{\Gamma(\alpha+j-n+1)} \\ &\quad + \frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{Y_1(t)\}(s)\,\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{(\zeta_a(t))^{\alpha-1}\right\}(s)}{\Gamma(\alpha)} \end{aligned} \tag{4.10}$$

eşitliği elde edilir. $y_e(t)$ değeri

$$y_e(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left((\zeta_a(t))^{\alpha-1} *_\psi f(t)\right) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{c_j (\zeta_a(t))^{\alpha+j-n}}{\Gamma(\alpha+j-n+1)} \tag{4.11}$$

olsun. Eş. 4.11'in her iki tarafının (k,ψ)-GLD'ünü alınır ve ardından Eş. 3.10 ile Eş. 4.9 kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{y_e(t)\}(s) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{(\zeta_a(t))^{\alpha-1})\right\}(s)\,\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{f(t)\}(s) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{c_j \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{(\zeta_a(t))^{\alpha+j-n})\right\}(s)}{\Gamma(\alpha+j-n+1)} \\ &= \left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{-\alpha} \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{f(t)\}(s) + \sum_{j=0}^{n-1} c_j \left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n-\alpha-j-1} \end{aligned} \tag{4.12}$$

eşitliği elde edilir. Eş. 3.34, Eş. 4.3 başlangıç koşulu ve Eş. 4.12 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{D_{a+}^{\alpha;\psi}y_e(t)\right\}(s) &= \left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\alpha}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{y_e(t)\right\}(s)-\sum_{j=0}^{n-1}c_j\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n-j-1}\\
&= \left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\alpha}\left\{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{-\alpha}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{f(t)\right\}(s)+\sum_{j=0}^{n-1}c_j\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n-\alpha-j-1}\right\}\\
&\quad -\sum_{j=0}^{n-1}c_j\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n-j-1}\\
&= \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{f(t)\right\}(s)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlikte $\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}$ operatörünün bire-bir olduğu kullanılırsa

$$\left(D_{a+}^{\alpha;\psi}y_e\right)(t)=f(t) \tag{4.13}$$

elde edilir. Buradan $y_e(t)$, Eş. 4.1 'in bir çözümü olur. Eş. 4.10 ve Eş. 4.12 kullanılırsa

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{y(t)-y_e(t)\right\}(s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{Y_1(t)*_{\psi}\left(\zeta_a(t)\right)^{\alpha-1}\right\}(s) \tag{4.14}$$

eşitliği elde edilir. Eş. 4.14'te $\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}$ operatörünün bire-bir olduğu tekrar kullanılırsa

$$y(t)-y_e(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[Y_1(t)*_{\psi}\left(\zeta_a(t)\right)^{\alpha-1}\right] \tag{4.15}$$

eşitliği elde edilir. Eş. 4.15'in her iki tarafının mutlak değeri alınır ve Eş. 3.9, Eş. 4.4 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|y(t)-y_e(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_a^t Y_1(u)\left(\zeta_u(t)\right)^{\alpha-1}\psi'(u)\,du\right|\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t |Y_1(u)|\left|\left(\zeta_u(t)\right)^{\alpha-1}\right|\psi'(u)\,du\\
&\leq \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left|\left(\zeta_u(t)\right)^{\alpha-1}\right|\psi'(u)\,du\\
&= \frac{\varepsilon\left(\zeta_a(t)\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\leq\varepsilon\frac{\left(\zeta_a(T)\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Not

Eğer $T<\infty$ ise $K=\frac{(\zeta_a(T))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$ için Eş. 4.1 kesirli diferensiyel denklemi Hyers–Ulam kararlıdır.
Eğer $T=\infty$ ise Eş. 4.1 kesirli diferensiyel denklemi Hyers-Ulam kararlı değildir.

Örnek

Aşağıdaki başlangıç değer problemini ele alalım:

$$D_{a+}^{\frac{1}{2};\psi}y(t)=\frac{16}{5\sqrt{\pi}}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{20},\left(I_{a+}^{\frac{1}{2};\psi}y(t)\right)^{[0]}(a)=0. \tag{4.16}$$

Burada $\alpha=\frac{1}{2}$ ve $f(t)=\frac{16}{5\sqrt{\pi}}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{20}$ dir.

$\frac{1}{20}<\varepsilon\leq 1$ ve $y_1(t)=\left(\zeta_a(t)\right)^3$ fonksiyonu için, Eş. 2.10 kullanılırsa

$$\left|D_{a+}^{\frac{1}{2};\psi}y_1(t)-f(t)\right|=\left|\frac{16}{5\sqrt{\pi}}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{5}{2}}-\frac{16}{5\sqrt{\pi}}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{20}\right|=\left|\frac{1}{20}\right|<\varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, $y_1(t)$ fonksiyonunun başlangıç değeri $\left(I_{a+}^{\frac{1}{2};\psi}y_1\right)^{[0]}(a)=0$'dır.

$f(t)=\frac{16}{5\sqrt{\pi}}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{20}$ ve $\alpha=\frac{1}{2}$ için Eş. 4.11 ve Eş. 3.9 kullanılırsa

$$\begin{aligned} y_e(t) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_a^t\left(\zeta_a(u)\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{16}{5\sqrt{\pi}}\left(\zeta_u(t)\right)^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{20}\right]\psi'(u)\,du \\ &\quad+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{c_j\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{1}{2}+j-n}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+j-n+1\right)} \end{aligned}$$

elde edilir.

$\alpha = \frac{1}{2}$ olduğundan $n = 1$ ve $c_0 = 0$ bulunur. Bu nedenle

$$y_e(t) = \frac{16}{5\pi}\int_a^t (\zeta_a(u))^{-\frac{1}{2}} (\zeta_u(t))^{\frac{5}{2}} \psi'(u)\,du + \frac{1}{20\sqrt{\pi}}\int_a^t (\zeta_a(u))^{-\frac{1}{2}} \psi'(u)\,du \tag{4.17}$$

eşitliği elde edilir. Eş. 4.17'deki ilk integrale $u = \psi^{-1}(\psi(t) - \xi(\zeta_a(t)))$ değişken değiştirmesi uygulanır ve ikinci integral çözülürse

$$y_e(t) = (\zeta_a(t))^3 + \frac{1}{10\sqrt{\pi}} (\zeta_a(t))^{\frac{1}{2}}$$

eşitliği elde edilir. $y_1(t)$ ve $y_e(t)$ fonksiyonlarının farkının mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_e(t)| &= \left| (\zeta_a(t))^3 - \left((\zeta_a(t))^3 + \frac{1}{10\sqrt{\pi}} (\zeta_a(t))^{\frac{1}{2}} \right) \right| \\ &= \frac{1}{10\sqrt{\pi}} |\zeta_a(t)|^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{10} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \sqrt{\zeta_a(t)} \\ &= \frac{2}{20} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \sqrt{\zeta_a(t)} = \frac{1}{20} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \sqrt{\zeta_a(t)} \\ &< \varepsilon \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \sqrt{\zeta_a(t)} < \varepsilon \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \sqrt{\zeta_a(T)} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde Eş. 4.16 kesirli diferensiyel denklemi $\varepsilon = \frac{1}{20}$ ve $K = \frac{\sqrt{\zeta_a(T)}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$ için Teorem 4.1.3'ü sağladığından Hyers-Ulam kararlıdır.

4.1.4. Teorem

$\alpha > 0$, $0 < T < +\infty$, $\lambda \in \mathbb{C}$ de bir sabit, $\psi(t)$ $(a,b]$ $(-\infty \leq a < b < +\infty)$ aralığında artan ve pozitif değerli bir fonksiyon ve $f(t)$, $[0,\infty)$ reel değerli sürekli fonksiyon olsun. Eğer $y : (0,T] \to \mathbb{C}$ fonksiyonu her $t \in (0,T]$ ve bazı $\varepsilon > 0$ için Eş. 4.3 başlangıç koşulu ile

$$\left| D_{a+}^{\alpha;\psi} y(t) - \lambda y(t) - f(t) \right| \leq \varepsilon \tag{4.18}$$

eşitsizliğini sağlarsa, Eş. 4.2 kesirli diferensiyel denkleminin

$$|y(t)-y_e(t)| \leq \varepsilon \left(\zeta_a(T)\right)^{\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}\left(|\lambda|\left(\zeta_a(T)\right)^{\alpha}\right) \tag{4.19}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $y_e : (0,T] \to \mathbb{C}$ çözümü vardır.

İspat

$t \in (0,T]$ için

$$Y_2(t) = \left(D_{a+}^{\alpha;\psi} y\right)(t) - \lambda y(t) - f(t) \tag{4.20}$$

olsun. Eş. 4.20' in her ki tarafının (k,ψ)-GLD'ü alınıp Eş. 3.34 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{Y_2(t)\right\}(s) &= \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{D_{a+}^{\alpha;\psi} y(t)\right\}(s) - \lambda \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{y(t)\right\}(s) - \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{f(t)\right\}(s) \\
&= \left[\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\alpha} - \lambda\right] \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{y(t)\right\}(s) \\
&\quad - \sum_{j=0}^{n-1} \left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n-j-1} \left(I_{a+}^{n-\alpha;\psi} y(t)\right)^{[j]}(a) - \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{f(t)\right\}(s)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

eşitliği elde edilir. Eş. 4.3 başlangıç koşulu, Eş. 3.17, Eş. 4.9 ve Eş. 3.10 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{y(t)\right\}(s) &= \frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{f(t)\right\}(s)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\alpha} - \lambda} + \frac{1}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\alpha} - \lambda} \sum_{j=0}^{n-1} c_j \left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n-j-1} \\
&\quad + \frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{Y_2(t)\right\}(s)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\alpha} - \lambda} \\
&= \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\left(\left(\zeta_a(t)\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda\left(\zeta_a(t)\right)^{\alpha}\right)\right) *_{\psi} f(t)\right\}(s) \\
&\quad + \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\left(\left(\zeta_a(t)\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda\left(\zeta_a(t)\right)^{\alpha}\right)\right) *_{\psi} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{c_j \left(\zeta_a(t)\right)^{-n+j}}{\Gamma(-n+j+1)}\right\}(s) \\
&\quad + \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\left(Y_2(t)\right) *_{\psi} \left(\zeta_a(t)\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda\left(\zeta_a(t)\right)^{\alpha}\right)\right\}(s)
\end{aligned} \tag{4.22}$$

eşitliği elde edilir. $y_e(t)$

$$\begin{aligned} y_e(t) &= \left((\zeta_a(t))^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda(\zeta_a(t))^{\alpha}\right)\right) *_\psi f(t) \\ &\quad + \left((\zeta_a(t))^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda(\zeta_a(t))^{\alpha}\right)\right) *_\psi \sum_{j=0}^{n-1} \frac{c_j(\zeta_a(t))^{-n+j}}{\Gamma(-n+j+1)}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

olsun. Eş. 4.23' ün her iki tarafının (k,ψ)-GLD'ü alınırsa

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{y_e(t)\}(s) &= \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\left((\zeta_a(t))^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda(\zeta_a(t))^{\alpha}\right)\right) *_\psi \sum_{j=0}^{n-1} \frac{c_j(\zeta_a(t))^{-n+j}}{\Gamma(-n+j+1)}\right\}(s) \\ &\quad + \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\left((\zeta_a(t))^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda(\zeta_a(t))^{\alpha}\right)\right) *_\psi f(t)\right\}(s) \end{aligned} \tag{4.24}$$

eşitliği elde edilir. Eş. 3.34 ve Eş. 4.3 başlangıç koşulu kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{D_{a+}^{\alpha;\psi} y_e(t) - \lambda y_e(t)\right\}(s) &= \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{D_{a+}^{\alpha;\psi} y_e(t)\right\}(s) - \lambda \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{y_e(t)\}(s) \\ &= \left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\alpha} \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{y_e(t)\}(s) - \sum_{j=0}^{n-1} c_j \left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n-j-1} \\ &\quad - \lambda \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{y_e(t)\}(s) \\ &= \left[\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\alpha} - \lambda\right] \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{y_e(t)\}(s) \\ &\quad - \sum_{j=0}^{n-1} c_j \left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n-j-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte Eş. 3.10, Eş. 3.17, Eş. 4.9 ve Eş. 4.24 kullanılırsa

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{D_{a+}^{\alpha;\psi} y_e(t) - \lambda y_e(t)\right\}(s) = \left[\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\alpha} - \lambda\right] \left[\left\{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\left((\zeta_a(t))^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda(\zeta_a(t))^{\alpha}\right)\right)\right\}(s)\right.\right.$$

$$
\begin{aligned}
&\times \sum_{j=0}^{n-1} \frac{c_j \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\left(\zeta_a(t)\right)^{-n+j}\right\}(s)}{\Gamma(-n+j+1)} \\
&+\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\left(\left(\zeta_a(t)\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda\left(\zeta_a(t)\right)^{\alpha}\right)\right)\right\}(s)\, \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{f(t)\right\}(s)\Big] \\
&-\sum_{j=0}^{n-1} c_j \left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n-j-1} \\
= \;& \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{f(t)\right\}(s)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}$ operatörünün bire-bir olduğu kullanılırsa

$$\left(D_{a+}^{\alpha;\psi} y_e\right)(t) - \lambda y_e(t) = f(t) \tag{4.25}$$

eşitliği elde edilir. Böylece $y_e(t)$, Eş. 4.2 kesirli diferensiyel denkleminin bir çözümü olur. Eş. 4.22 ve Eş. 4.24 kullanılırsa

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{y(t) - y_e(t)\right\}(s) = \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\left(Y_2(t)\right) *_{\psi} \left(\zeta_a(t)\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda\left(\zeta_a(t)\right)^{\alpha}\right)\right\}(s) \tag{4.26}$$

eşitliği elde edilir. $\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}$ operatörünün bire-bir olduğu tekrar kullanılırsa

$$y(t) - y_e(t) = Y_2(t) *_{\psi} \left(\left(\zeta_a(t)\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda\left(\zeta_a(t)\right)^{\alpha}\right)\right)$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafının mutlak değerini alınır ve Eş. 3.9 kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\left|y(t) - y_e(t)\right| &= \left|\int_a^t Y_2(u)\left(\zeta_u(t)\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda\left(\zeta_u(t)\right)^{\alpha}\right)\psi'(u)\,du\right| \\
&\leq \int_a^t \left|Y_2(u)\right|\left|\left(\zeta_u(t)\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda\left(\zeta_u(t)\right)^{\alpha}\right)\psi'(u)\right| du
\end{aligned} \tag{4.27}
$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece Eş. 4.18'den

$$\left|y(t) - y_e(t)\right| \leq \varepsilon \int_a^t \left|\left(\zeta_u(t)\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda\left(\zeta_u(t)\right)^{\alpha}\right)\psi'(u)\right| du$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^m}{\Gamma(m\alpha+\alpha)} \int_a^t \left| (\zeta_u(t))^{m\alpha+\alpha-1} \psi'(u) \right| du \\
&= \varepsilon \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^m}{\Gamma(m\alpha+\alpha+1)} (\zeta_a(t))^{m\alpha+\alpha} \\
&= \varepsilon (\zeta_a(t))^{\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(|\lambda| (\zeta_a(t))^{\alpha}\right)^m}{\Gamma(m\alpha+\alpha+1)} \\
&= \varepsilon (\zeta_a(t))^{\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}\left(|\lambda| (\zeta_a(t))^{\alpha}\right) \\
&\leq \varepsilon (\zeta_a(T))^{\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}\left(|\lambda| (\zeta_a(T))^{\alpha}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilerek ispat tamamlanır.

Not

Eğer $T < \infty$ ise Eş. 4.2 kesirli diferensiyel denklemi $K = (\zeta_a(T))^{\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}\left(|\lambda| (\zeta_a(T))^{\alpha}\right)$ sabiti için Hyers–Ulam kararlıdır. Ancak $T = \infty$ için Eş. 4.2 kesirli diferensiyel denklemi Hyers-Ulam kararlı değildir.

Not

Teorem 4.1.4'ün sonuçlarında $a = 0$ ve $\psi(t) = t$ alındığında [48] deki Teorem 3.2 'nin sonuçlarını içerir.

Not

$y(t) = W(t) = (w_1(t), w_2(t), \ldots, w_n(t))^T$ bilinmeyen bir vektör fonksiyon, λ reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı $n \times n$ tipinde bir matris ve $f(t)$ kapalı $[a,T]$ aralığında yerel olarak integrallenebilir n-boyutlu bir sütun vektör fonksiyonu olmak üzere Teorem 4.1.4'ün sonuçlarında $k = 1$ veya $\rho = k$, ve ve $a = 0$, $\psi(t) = \frac{t^{\rho}}{\rho}$ olarak alınırsa [59]'daki Teorem 3.1'in sonuçlarını içerir.

Örnek

Aşağıdaki başlangıç değer problemini ele alalım:

$$D_{a+}^{\frac{1}{2};\psi} y(t) + 7y(t) = \frac{16}{5\sqrt{\pi}} (\zeta_a(t))^{\frac{5}{2}} + 7(\zeta_a(t))^3 + \frac{1}{20}, \left(I_{a^+}^{\frac{1}{2};\psi} y(t) \right)^{[0]} (a) = 0. \tag{4.28}$$

Burada $\lambda = -7$, $\alpha = \frac{1}{2}$ ve $f(t) = \frac{16}{5\sqrt{\pi}} (\zeta_a(t))^{\frac{5}{2}} + 7(\zeta_a(t))^3 + \frac{1}{20}$ dir.

$\frac{1}{20} < \varepsilon \leq 1$ ve $y_1(t) = (\zeta_a(t))^3$ fonksiyonu için, Eş. 2.10 kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left| D_{a+}^{\frac{1}{2};\psi} y_1(t) + 7y_1(t) - f(t) \right| &= \left| \frac{16}{5\sqrt{\pi}} (\zeta_a(t))^{\frac{5}{2}} + 7(\zeta_a(t))^3 - \frac{16}{5\sqrt{\pi}} (\zeta_a(t))^{\frac{5}{2}} - 7(\zeta_a(t))^3 - \frac{1}{20} \right| \\ &= \left| \frac{1}{20} \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca, $y_1(t)$ fonksiyonunun başlangıç değeri $\left(I_{a^+}^{\frac{1}{2};\psi} y_1 \right)^{[0]} (a) = 0$ olur. $\alpha = \frac{1}{2}$ olduğundan $n = 1$ ve $c_0 = 0$ elde edilir. $f(t) = \frac{16}{5\sqrt{\pi}} (\zeta_a(t))^{\frac{5}{2}} + 7(\zeta_a(t))^3 + \frac{1}{20}$ için Eş. 4.23 ve Eş. 3.9 kullanılırsa

$$\begin{aligned} y_e(t) &= \int_a^t (\zeta_a(u))^{-\frac{1}{2}} E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \left(-7(\zeta_a(u))^{\frac{1}{2}} \right) \left[\frac{16}{5\sqrt{\pi}} (\zeta_u(t))^{\frac{5}{2}} + 7(\zeta_u(t))^3 + \frac{1}{20} \right] \psi'(u)\, du \\ &= \frac{16}{5\sqrt{\pi}} \int_a^t (\zeta_a(u))^{-\frac{1}{2}} (\zeta_u(t))^{\frac{5}{2}} E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \left((-7)(\zeta_a(u))^{\frac{1}{2}} \right) \psi'(u)\, du \\ &+ 7 \int_a^t (\zeta_a(u))^{-\frac{1}{2}} (\zeta_u(t))^3 E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \left((-7)(\zeta_a(u))^{\frac{1}{2}} \right) \psi'(u)\, du \\ &+ \frac{1}{20} \int_a^t (\zeta_a(u))^{-\frac{1}{2}} E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \left((-7)(\zeta_a(u))^{\frac{1}{2}} \right) \psi'(u)\, du \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte birinci ve ikinci integralde $u = \psi^{-1}(\psi(t) - \xi(\zeta_a(t)))$ değişken değiştirmesi yapılır, üçüncü integral çözülürse

$$y_e(t) = (\zeta_a(t))^3 + \frac{1}{20} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 7^m (\zeta_a(t))^{\frac{m+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2} + 1\right)}$$

elde edilir. $y_1(t)$ ve $y_e(t)$ fonksiyonlarının farklarının mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned}
|y_1(t)-y_e(t)| &= \left|(\zeta_a(t))^3-(\zeta_a(t))^3-\frac{1}{20}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m 7^m(\zeta_a(t))^{\frac{m+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}+1\right)}\right| \\
&= \frac{1}{20}(\zeta_a(t))^{\frac{1}{2}}E_{\frac{1}{2},\frac{3}{2}}\left(|-7|(\zeta_a(t))^{\frac{1}{2}}\right) \\
&< \varepsilon(\zeta_a(t))^{\frac{1}{2}}E_{\frac{1}{2},\frac{3}{2}}\left(|-7|(\zeta_a(t))^{\frac{1}{2}}\right) \\
&< \varepsilon\sqrt{\zeta_a(T)}E_{\frac{1}{2},\frac{3}{2}}\left(|-7|\sqrt{\zeta_a(T)}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Eş. 4.28, $\frac{1}{20}<\varepsilon\leq 1$ ve $K=(\zeta_a(T))^{\frac{1}{2}}E_{\frac{1}{2},\frac{3}{2}}\left(|-7|(\zeta_a(T))^{\frac{1}{2}}\right)$ için Teorem 4.1.4'ün koşullarını sağladığından Hyers–Ulam kararlıdır.

Not

Verilen örnekte $k=1$ veya $\rho=k$, $\psi(t)=t$, $a=0$ ve $\varepsilon=\frac{1}{10}$ alınırsa, [48]'deki Örnek 3.5'in sonuçlarına indirgenir.

4.2. (k,ψ)-Hilfer Kesirli Diferensiyel Denkleminin Ulam tipi Kararlılığı

Bu bölümde

$$\left({}^{H}D_{k,a+}^{\alpha,\nu;\psi}y\right)(t)=f(t) \tag{4.29}$$

ve

$$\left({}^{H}D_{k,a+}^{\alpha,\nu;\psi}y\right)(t)-\lambda y(t)=f(t) \tag{4.30}$$

(k,ψ)- Hilfer kesirli diferensiyel denklemlerini

$$\left(I_{k,a+}^{(1-\nu)(kn-\alpha);\psi}y\right)^{[m]}(a)=c_m \tag{4.31}$$

başlangıç koşulu ile ele alacağız. Burada $0 < T < +\infty, \nu \in [0,1]$, λ, c_m, $\mathbb{C}$' de skaler değerler, $f \in C((0,T)\times\mathbb{C})$, $\psi \in C^n[a,b]$ öyle ki $[a,b]$ üzerinde $\psi'(t) > 0$ ve ${}^H D_{k,a+}^{\alpha,\nu;\psi}$ $\alpha > 0$ mertebeden (k,ψ)-HKT'dir. Bu bölümdeki teorem ve lemmalarla, Eş. 4.31 başlangıç koşulu ile verilen Eş. 4.29, Eş. 4.30 kesirli diferensiyel denklemlerinin Hyers-Ulam kararlılığını (k,ψ)-GLD'ünü kullanarak ispatlayacağız.

4.2.1. Tanım

$f \in C((0,T]\times\mathbb{C})$ olmak üzere verilen bir $\varepsilon > 0$ ve $\left|\left({}^H D_{k,a+}^{\alpha,\nu;\psi} y\right)(t) - f(t)\right| \leq \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir y foksiyonu için Eş. 4.29 kesirli diferensiyel denkleminin Eş. 4.31 koşulunu sağlayan bir y_e çözümü var ve $|y(t) - y_e(t)| \leq \varepsilon K$ eşitsizliğini sağlayan bir $K > 0$ pozitif sabiti varsa Eş. 4.31 başlangıç koşullu Eş. 4.29 kesirli diferensiyel denklemine Hyers-Ulam kararlıdır denir.

4.2.2. Tanım

$f \in C((0,T]\times\mathbb{C})$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ de bir sabit olmak üzere $\varepsilon > 0$ için $\left|\left({}^H D_{k,a+}^{\alpha,\nu;\psi} y\right)(t) - \lambda y(t) - f(t)\right| \leq \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir y fonksiyonu ve Eş. 4.30 kesirli diferensiyel denkleminin Eş. 4.31 koşulunu sağlayan bir y_e çözümü için $|y(t) - y_e(t)| \leq \varepsilon K$ eşitsizliğini sağlayan bir $K > 0$ pozitif sabiti varsa Eş. 4.31 başlangıç koşullu Eş. 4.30 kesirli diferensiyel denklemine Hyers-Ulam kararlıdır denir.

4.2.3. Teorem

$\alpha > 0, 0 < T < +\infty$ ve $\psi(t)$, $(a,b]$ $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ aralığında pozitif artan bir fonksiyon olsun. Eğer her $t \in (0,T]$ ve bazı $\varepsilon > 0$ için $y : (0,T] \to \mathbb{C}$ fonksiyonu Eş. 4.31 başlangıç koşulu ile

$$\left|\left({}^H D_{k,a+}^{\alpha,\nu;\psi} y\right)(t) - f(t)\right| \leq \varepsilon \tag{4.32}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, Eş. 4.29 kesirli diferensiyel denkleminin

$$|y(t) - y_e(t)| \leq \varepsilon \frac{(\zeta_a(T))^{\frac{\alpha}{k}}}{\alpha\Gamma_k(\alpha)} \tag{4.33}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $y_e : (0,T] \to \mathbb{C}$ çözümü vardır.

İspat

$t \in (0,T]$ için

$$Y_1(t) = \left({}^{H}D^{\alpha,\nu;\psi}_{k,a+} y\right)(t) - f(t) \tag{4.34}$$

olsun. Eş. 4.34 ün her iki tarafının (k,ψ)-GLD'ü alınır ve Eş. 3.36 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{\rho;\psi}_{k,a+}\{Y_1(t)\}(s) &= \mathscr{L}^{\rho;\psi}_{k,a+}\left\{\left({}^{H}D^{\alpha,\nu;\psi}_{k,a+} y\right)(t)\right\}(s) - \mathscr{L}^{\rho;\psi}_{k,a+}\{f(t)\}(s) \\
&= k^n \left[\frac{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^n \mathscr{L}^{\rho;\psi}_{k,a+}\{y(t)\}(s)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\frac{kn-\alpha}{k}} k^{\frac{kn-\alpha}{k}}} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n-j-1} \left(I^{(1-\nu)(kn-\alpha);\psi}_{k,a+} y\right)^{[j]}_{k,\psi}(a)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}} k^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}} \right] \\
&\quad - \mathscr{L}^{\rho;\psi}_{k,a+}\{f(t)\}(s)
\end{aligned} \tag{4.35}$$

elde edilir. Eş. 4.31 başlangıç koşulu ile Eş. 4.35 yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{\rho;\psi}_{k,a+}\{y(t)\}(s) &= \frac{\mathscr{L}^{\rho;\psi}_{k,a+}\{f(t)\}(s)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\frac{\alpha}{k}} k^{\frac{\alpha}{k}}} + k^n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{c_j \left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n-j-1}}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}} k^{\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}}} \\
&\quad + \frac{\mathscr{L}^{\rho;\psi}_{k,a+}\{Y_1(t)\}(s)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\frac{\alpha}{k}} k^{\frac{\alpha}{k}}}
\end{aligned} \tag{4.36}$$

elde edilir. Eş. 3.19' da β yerine sırasıyla $\beta = \frac{\alpha}{k} - 1$ ve $\beta = \frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k} - n + j$

$(j=0,1,2,...,n-1)$ yazılırsa

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\frac{\alpha}{k}}k^{\frac{\alpha}{k}}} = \dfrac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{(\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}\right\}(s)}{k\Gamma_k(\alpha)}, \\ \dfrac{1}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}-n+j+1}} = \dfrac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{(\zeta_a(t))^{\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}-n+j}\right\}(s)}{\Gamma\left(\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}-n+j+1\right)} \end{cases} \tag{4.37}$$

elde edilir. Eş. 4.37, Eş. 4.36 da kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{y(t)\}(s) &= \frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{f(t)\}(s)\,\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{(\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}\right\}(s)}{k\Gamma_k(\alpha)} \\ &+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{c_j\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{(\zeta_a(t))^{\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}+j-n}\right\}(s)}{\Gamma\left(\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}+j-n+1\right)k^{\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}-n}} \\ &+\frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{Y_1(t)\}(s)\,\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{(\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}\right\}(s)}{k\Gamma_k(\alpha)} \end{aligned} \tag{4.38}$$

elde edilir. $y_e(t)$

$$y_e(t)=\frac{(\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}*_\psi f(t)+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{c_j(\zeta_a(t))^{\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}+j-n}}{\Gamma\left(\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}+j-n+1\right)k^{\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}-n}} \tag{4.39}$$

olsun. Eş. 4.39' un her iki tarafının (k,ψ)-GLD'ü alınır ve Eş. 3.10, Eş. 4.37 kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{y_e(t)\}(s) &= \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\frac{(\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}\right\}(s)\,\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{f(t)\}(s) \\ &+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{c_j\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{(\zeta_a(t))^{\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}+j-n}\right\}(s)}{\Gamma\left(\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}+j-n+1\right)k^{\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}-n}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{f(t)\}(s)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\frac{\alpha}{k}} k^{\frac{\alpha}{k}}} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{c_j \left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n-\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}-j-1}}{k^{\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}-n}} \tag{4.40}$$

elde edilir. Eş. 3.36, Eş. 4.31 başlangıç koşulu, Eş. 4.37 ve Eş. 4.40 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{{}^{H}D_{k,a+}^{\alpha,\nu;\psi} y_e(t)\right\}(s) &= k^n \left[\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n} \frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{y_e(t)\}(s)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\frac{kn-\alpha}{k}} k^{\frac{kn-\alpha}{k}}} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{c_j \left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n-j-1}}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}} k^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}} \right] \\
&= \frac{1}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{-\frac{\alpha}{k}} k^{-\frac{\alpha}{k}}} \left\{ \frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{f(t)\}(s)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\frac{\alpha}{k}} k^{\frac{\alpha}{k}}} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{c_j \left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n-\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}-j-1}}{k^{\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}-n}} \right\} \\
&\quad - k^n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{c_j \left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n-j-1}}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}} k^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}} \\
&= \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{f(t)\}(s).
\end{aligned}$$

elde edilir. $\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}$ operatörünün bire-bir olduğu kullanılırsa

$$\left({}^{H}D_{k,a+}^{\alpha,\nu;\psi} y_e\right)(t) = f(t)$$

elde edilir. Böylece $y_e(t)$, Eş. 4.29 kesirli diferensiyel denkleminin bir çözümü olur. Eş. 4.38 ve Eş. 4.40 kullanılırsa

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{y(t)-y_e(t)\}(s) = \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{ Y_1(t) *_{\psi} \frac{(\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)} \right\}(s)$$

elde edilir. $\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}$ operatörünün bire-bir olduğu tekrar kullanılırsa

$$y(t)-y_e(t)=\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\left[Y_1(t)*_\psi(\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}\right]$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınır ve Eş. 3.9, Eş. 4.32 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|y(t)-y_e(t)| &\leq \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\left|\int_a^t Y_1(u)(\zeta_u(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}\psi'(u)\,du\right| \\
&\leq \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t |Y_1(u)|\left|(\zeta_u(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}\psi'(u)\right|du \\
&\leq \frac{\varepsilon}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t \left|(\zeta_u(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}\psi'(u)\right|du \\
&= \frac{\varepsilon(\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}}}{\alpha\Gamma_k(\alpha)} \leq \varepsilon\frac{(\zeta_a(T))^{\frac{\alpha}{k}}}{\alpha\Gamma_k(\alpha)}
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Not

$T<\infty$ ise Eş. 4.29 kesirli diferensiyel denklemi $K=\frac{(\zeta_a(T))^{\frac{\alpha}{k}}}{\alpha\Gamma_k(\alpha)}$ sabiti için Hyers-Ulam kararlıdır. Ancak $T=\infty$ ise Eş. 4.29 kesirli diferensiyel denklemi Hyers-Ulam kararlı değildir.

Not

Teorem 4.2.3' te ${}^HD_{k,a+}^{\alpha,\nu;\psi}$ kesirli türevinde $k=1$ ve $\nu=0$ alınırsa kesirli türev $D_{a+}^{\alpha;\psi}$ kesirli türevine indirgeneceğinden [75]'deki Theorem 3.8' in sonuçları elde edilir.

Örnek

Aşağıdaki başlangıç değer problemini ele alalım:

$${}^HD_{k,a+}^{\frac{1}{2},\nu;\psi}y(t)=f(t),\ \left(I_{k,a+}^{(1-\nu)\left(k-\frac{1}{2}\right);\psi}y\right)^{[0]}(a)=0. \tag{4.41}$$

Burada $\alpha = \frac{1}{2}$ ve $f(t) = \frac{\Gamma_k(4)}{\Gamma_k\left(\frac{7}{2}\right)} (\zeta_a(t))^{\frac{7}{2k}-1} + \frac{1}{20}$ dır.

$\frac{1}{20} < \varepsilon \leq 1$ ve $y_1(t) = (\zeta_a(t))^{\frac{4}{k}-1}$ fonksiyonu için, Eş. 2.16 kullanılırsa

$$\left| {}^{H}D^{\frac{1}{2},\nu;\psi}_{k,a+} y_1(t) - f(t) \right| = \left| \frac{\Gamma_k(4)}{\Gamma_k\left(\frac{7}{2}\right)} (\zeta_a(t))^{\frac{7}{2k}-1} - \frac{\Gamma_k(4)}{\Gamma_k\left(\frac{7}{2}\right)} (\zeta_a(t))^{\frac{7}{2k}-1} - \frac{1}{20} \right| = \left| \frac{1}{20} \right| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, $y_1(t)$ fonksiyonunun başlangıç değeri $\left(I^{(1-\nu)\left(k-\frac{1}{2}\right);\psi}_{k,a+} y_1 \right)^{[0]}(a) = 0$'dır.

$f(t) = \frac{\Gamma_k(4)}{\Gamma_k\left(\frac{7}{2}\right)} (\zeta_a(t))^{\frac{7}{2k}-1} + \frac{1}{20}$ ve $\alpha = \frac{1}{2}$ Eş. 4.39'da kullanılırsa

$$\begin{aligned} y_e(t) &= \frac{1}{k\Gamma_k\left(\frac{1}{2}\right)} \left((\zeta_a(t))^{\frac{1}{2k}-1} *_{\psi} \left(\frac{\Gamma_k(4)}{\Gamma_k\left(4-\frac{1}{2}\right)} (\zeta_a(t))^{\frac{7}{2k}-1} + \frac{1}{20} \right) \right) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{c_j (\zeta_a(t))^{\frac{\nu\left(kn-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{k}+j-n}}{\Gamma\left(\frac{\nu\left(kn-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{k} + j - n + 1 \right) k^{\frac{\nu\left(kn-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{k}-n}} \end{aligned}$$

elde edilir. $\alpha = \frac{1}{2}$ olduğundan $n = 1$ ve $c_0 = 0$ elde edilir. Son eşitlikte bu değerler ve Eş. 3.9 kullanılırsa

$$\begin{aligned} y_e(t) &= \frac{\Gamma_k(4)}{\Gamma_k\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma_k\left(\frac{7}{2}\right)} \frac{1}{k} \int_a^t (\zeta_a(u))^{\frac{1}{2k}-1} (\zeta_u(t))^{\frac{7}{2k}-1} \psi'(u)\, du \\ &\quad + \frac{1}{20k\Gamma_k\left(\frac{1}{2}\right)} \int_a^t (\zeta_a(u))^{\frac{1}{2k}-1} \psi'(u)\, du \end{aligned} \tag{4.42}$$

elde edilir. Eş. 4.42'deki birinci integralde $u = \psi^{-1}(\psi(t) - \xi(\zeta_a(t)))$ değişken değiştirmesi

yapılır ve ikinci integral çözülürse

$$y_e(t) = (\zeta_a(t))^{\frac{4}{k}-1} + \frac{(\zeta_a(t))^{\frac{1}{2k}}}{10\Gamma_k\left(\frac{1}{2}\right)}$$

elde edilir. $y_1(t)$ ve $y_e(t)$ fonksiyonlarının farklarının mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned}
|y_1(t) - y_e(t)| &= \left| (\zeta_a(t))^{\frac{4}{k}-1} - \left((\zeta_a(t))^{\frac{4}{k}-1} + \frac{(\zeta_a(t))^{\frac{1}{2k}}}{10\Gamma_k\left(\frac{1}{2}\right)} \right) \right| \\
&= \frac{1}{10\Gamma_k\left(\frac{1}{2}\right)} |\zeta_a(t)|^{\frac{1}{2k}} = \frac{1}{10\Gamma_k\left(\frac{1}{2}\right)} \sqrt{(\zeta_a(t))^k} \\
&= \frac{2}{20} \frac{1}{\Gamma_k\left(\frac{1}{2}\right)} \sqrt{(\zeta_a(t))^k} = \frac{1}{20} \frac{1}{\frac{1}{2}\Gamma_k\left(\frac{1}{2}\right)} \sqrt{(\zeta_a(t))^k} \\
&< \varepsilon \frac{\sqrt{(\zeta_a(t))^k}}{\frac{1}{2}\Gamma_k\left(\frac{1}{2}\right)} < \varepsilon \frac{\sqrt{(\zeta_a(T))^k}}{\frac{1}{2}\Gamma_k\left(\frac{1}{2}\right)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 4.41 $\varepsilon = \frac{1}{20}$ ve $K = \frac{\sqrt{(\zeta_a(T))^k}}{\frac{1}{2}\Gamma_k\left(\frac{1}{2}\right)}$ için Teorem 4.2.3'ün şartlarını sağladığından Hyers-Ulam kararlıdır.

Not

Verilen örnekte $k = 1$ ve $\nu = 0$ alınırsa [75] kaynağındaki Örnek 3.10'un sonuçlarına ulaşılır.

4.2.4. Teorem

$\alpha > 0$, $0 < T < +\infty$, $\lambda \in \mathbb{C}$ de bir sabit, $\psi(t)$, $(a,b](-\infty \leq a < b < +\infty)$ aralığında artan ve pozitif değerli bir fonksiyon ve $f(t)$, $[0,\infty)$ üzerinde reel değerli sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $y : (0,T] \to \mathbb{C}$ her $t \in (0,T]$ ve bazı $\varepsilon > 0$ için Eş. 4.31 başlangıç koşulu ile

$$\left| \left({}^{H}D_{k,a+}^{\alpha,\nu;\psi} y \right)(t) - \lambda y(t) - f(t) \right| \leq \varepsilon \tag{4.43}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, Eş. 4.30 kesirli diferensiyel denkleminin

$$|y(t)-y_e(t)| \leq \frac{\varepsilon\left(\zeta_a(T)\right)^{\frac{\alpha}{k}} E_{\frac{\alpha}{k},\frac{\alpha}{k}+1}\left(\left|\lambda k^{-\frac{\alpha}{k}}\right|\left(\zeta_a(T)\right)^{\frac{\alpha}{k}}\right)}{k^{\frac{\alpha}{k}}} \tag{4.44}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $y_e : (0,T] \to \mathbb{C}$ çözümü vardır.

İspat

$t \in (0,T]$ için

$$Y_2(t) = \left({}^{H}D^{\alpha,\nu;\psi}_{k,a+}y\right)(t) - \lambda y(t) - f(t) \tag{4.45}$$

olsun. Eş. 4.45'in her iki tarafının (k,ψ)-GLD'ü alınır ve Eş. 3.36 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{\rho;\psi}_{k,a+}\{Y_2(t)\}(s) &= \mathscr{L}^{\rho;\psi}_{k,a+}\left\{{}^{H}D^{\alpha,\nu;\psi}_{k,a+}y(t)\right\}(s) - \lambda\mathscr{L}^{\rho;\psi}_{k,a+}\{y(t)\}(s) - \mathscr{L}^{\rho;\psi}_{k,a+}\{f(t)\}(s) \\
&= k^n\left[\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^n \frac{\mathscr{L}^{\rho;\psi}_{k,a+}\{y(t)\}(s)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\frac{kn-\alpha}{k}} k^{\frac{kn-\alpha}{k}}}\right. \\
&\quad \left. -\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n-j-1}}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}} k^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}}\left(I^{(1-\nu)(kn-\alpha);\psi}_{k,a+}y\right)^{[j]}_{k,\psi}(a)\right] \\
&\quad -\lambda\mathscr{L}^{\rho;\psi}_{k,a+}\{y(t)\}(s) - \mathscr{L}^{\rho;\psi}_{k,a+}\{f(t)\}(s)
\end{aligned} \tag{4.46}$$

elde edilir. Eş. 4.46' da $\beta = \alpha + \nu(kn-\alpha) - k(n-j-1)$ yazılır ve Eş. 4.31 başlangıç koşulları kullanılırsa

$$\mathscr{L}^{\rho;\psi}_{k,a+}\{y(t)\}(s) = \frac{\mathscr{L}^{\rho;\psi}_{k,a+}\{f(t)\}(s)}{k^{\frac{\alpha}{k}}\left(\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\frac{\alpha}{k}} - \lambda k^{-\frac{\alpha}{k}}\right)} + \sum_{j=0}^{n-1}\frac{k^{n-\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}} c_j\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{k}}}{k^{\frac{\alpha}{k}}\left(\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\frac{\alpha}{k}} - \lambda k^{-\frac{\alpha}{k}}\right)}$$

$$+\frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{Y_2(t)\}(s)}{k^{\frac{\alpha}{k}}\left(\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\frac{\alpha}{k}}-\lambda k^{-\frac{\alpha}{k}}\right)} \tag{4.47}$$

elde edilir. Eş. 3.10, Eş. 3.21 ve Eş. 3.23'den

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{y(t)\}(s) &= \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\frac{f(t)}{k^{\frac{\alpha}{k}}}*_{\psi}\left((\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}E_{\frac{\alpha}{k},\frac{\alpha}{k}}\left(\lambda k^{-\frac{\alpha}{k}}(\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}}\right)\right)\right\}(s)\\ &+\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\sum_{j=0}^{n-1}k^{n-\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}}c_j\left((\zeta_a(t))^{\frac{\beta}{k}-1}E_{\frac{\alpha}{k},\frac{\beta}{k}}\left(\lambda k^{-\frac{\alpha}{k}}(\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}}\right)\right)\right\}(s)\\ &+\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\frac{Y_2(t)}{k^{\frac{\alpha}{k}}}*_{\psi}\left((\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}E_{\frac{\alpha}{k},\frac{\alpha}{k}}\left(\lambda k^{-\frac{\alpha}{k}}(\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}}\right)\right)\right\}(s)\end{aligned} \tag{4.48}$$

elde edilir. $y_e(t)$

$$y_e(t)=\frac{f(t)}{k^{\frac{\alpha}{k}}}*_{\psi}g(t)+\sum_{j=0}^{n-1}k^{n-\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}}c_jk(t) \tag{4.49}$$

olsun. Burada $g(t) = (\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}E_{\frac{\alpha}{k},\frac{\alpha}{k}}\left(\lambda k^{-\frac{\alpha}{k}}(\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}}\right)$, $k(t) = (\zeta_a(t))^{\frac{\beta}{k}-1}E_{\frac{\alpha}{k},\frac{\beta}{k}}\left(\lambda k^{-\frac{\alpha}{k}}(\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}}\right)$ ve $\beta = \alpha+\nu(kn-\alpha)-k(n-j-1)$ dır. Eş. 4.49'un her iki tarafının (k,ψ)-GLD'ü alınır ve Eş. 3.10 kullanılırsa

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{y_e(t)\}(s) &= \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\frac{f(t)}{k^{\frac{\alpha}{k}}}\right\}(s)\,\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{g(t)\}(s)\\ &+\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\sum_{j=0}^{n-1}k^{n-\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}}c_jk(t)\right\}(s)\end{aligned} \tag{4.50}$$

elde edilir. Eş. 3.36 ve Eş. 4.31 başlangıç koşulundan

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{{}^{H}D_{k,a+}^{\alpha,\nu;\psi}y_e(t)-\lambda y_e(t)\right\}(s) = \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{{}^{H}D_{k,a+}^{\alpha,\nu;\psi}y_e(t)\right\}(s)-\lambda\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{y_e(t)\}(s)$$

$$
\begin{aligned}
&= k^n \left[\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^n \frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{y_e(t)\}(s)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\frac{kn-\alpha}{k}} k^{\frac{kn-\alpha}{k}}} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n-j-1} c_j}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}} k^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}} \right] - \lambda \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{y_e(t)\}(s) \\
&= \left[\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{\frac{\alpha}{k}} k^{\frac{\alpha}{k}} - \lambda \right] \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{y_e(t)\}(s) \\
&\quad - \sum_{j=0}^{n-1} k^{n-\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}} \left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}\right)^{n-\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}-j-1} c_j
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu denklemin sağ tarafında Eş. 4.50, Eş. 3.21 ve Eş. 3.23 kullanılırsa

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{ {}^{H}D_{k,a+}^{\alpha,\nu;\psi} y_e(t) - \lambda y_e(t) \right\}(s) = \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{f(t)\}(s)$$

elde edilir. $\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}$ operatörünün bire-bir olduğu kullanılırsa

$$\left({}^{H}D_{k,a+}^{\alpha,\nu;\psi} y_e \right)(t) - \lambda y_e(t) = f(t)$$

elde edilir. Böylece $y_e(t)$, Eş. 4.30 kesirli diferensiyel denkleminin bir çözümü olur. Eş. 4.48 ve Eş. 4.50 kullanılırsa

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{y(t) - y_e(t)\}(s) = \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{ \frac{Y_2(t)}{k^{\frac{\alpha}{k}}} *_\psi \left((\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}-1} E_{\frac{\alpha}{k},\frac{\alpha}{k}}\left(\lambda k^{-\frac{\alpha}{k}} (\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}} \right) \right) \right\}(s) \tag{4.51}$$

elde edilir. $\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}$ operatörünün bire-bir olduğu tekrar kullanılırsa

$$y(t) - y_e(t) = \frac{Y_2(t) *_\psi \left((\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}-1} E_{\frac{\alpha}{k},\frac{\alpha}{k}}\left(\lambda k^{-\frac{\alpha}{k}} (\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}} \right) \right)}{k^{\frac{\alpha}{k}}} \tag{4.52}$$

elde edilir. Eş. 4.52 nin her iki tarafının mutlak değeri alınır ve Eş. 3.9 kullanılırsa

$$\begin{aligned}|y(t)-y_e(t)| &= \frac{1}{k^{\frac{\alpha}{k}}}\left|\int_a^t Y_2(u)\left(\zeta_u(t)\right)^{\frac{\alpha}{k}-1}E_{\frac{\alpha}{k},\frac{\alpha}{k}}\left(\lambda k^{-\frac{\alpha}{k}}\left(\zeta_u(t)\right)^{\frac{\alpha}{k}}\right)\psi'(u)\,du\right| \\ &\leq \frac{1}{k^{\frac{\alpha}{k}}}\int_a^t |Y_2(u)|\left|\left(\zeta_u(t)\right)^{\frac{\alpha}{k}-1}E_{\frac{\alpha}{k},\frac{\alpha}{k}}\left(\lambda k^{-\frac{\alpha}{k}}\left(\zeta_u(t)\right)^{\frac{\alpha}{k}}\right)\psi'(u)\right|du\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Eş. 4.43'ten

$$\begin{aligned}|y(t)-y_e(t)| &\leq \frac{\varepsilon}{k^{\frac{\alpha}{k}}}\int_a^t\left|\left(\zeta_u(t)\right)^{\frac{\alpha}{k}-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda k^{-\frac{\alpha}{k}}\right)^m}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{k}m+\frac{\alpha}{k}\right)}\left(\zeta_u(t)\right)^{\frac{\alpha}{k}m}\psi'(u)\right|du \\ &= \frac{\varepsilon}{k^{\frac{\alpha}{k}}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left|\lambda k^{-\frac{\alpha}{k}}\right|^m}{\Gamma\left(\frac{\alpha m+\alpha}{k}\right)}\int_a^t\left|\left(\zeta_u(t)\right)^{\frac{\alpha}{k}m+\frac{\alpha}{k}-1}\psi'(u)\right|du \\ &= \frac{\varepsilon}{k^{\frac{\alpha}{k}}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left|\lambda k^{-\frac{\alpha}{k}}\right|^m}{\Gamma\left(\frac{\alpha m+\alpha}{k}\right)}\frac{\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{\alpha}{k}m+\frac{\alpha}{k}}}{\frac{\alpha}{k}m+\frac{\alpha}{k}} \\ &= \frac{\varepsilon\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{\alpha}{k}}}{k^{\frac{\alpha}{k}}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\left|\lambda k^{-\frac{\alpha}{k}}\right|\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{\alpha}{k}}\right)^m}{\Gamma\left(\frac{\alpha m+\alpha}{k}+1\right)} \\ &= \frac{\varepsilon\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{\alpha}{k}}E_{\frac{\alpha}{k},\frac{\alpha}{k}+1}\left(\left|\lambda k^{-\frac{\alpha}{k}}\right|\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{\alpha}{k}}\right)}{k^{\frac{\alpha}{k}}} \\ &\leq \frac{\varepsilon\left(\zeta_a(T)\right)^{\frac{\alpha}{k}}E_{\frac{\alpha}{k},\frac{\alpha}{k}+1}\left(\left|\lambda k^{-\frac{\alpha}{k}}\right|\left(\zeta_a(T)\right)^{\frac{\alpha}{k}}\right)}{k^{\frac{\alpha}{k}}}\end{aligned}$$

elde edilerek ispat tamamlanır.

Not

$T<\infty$ ise Eş. 4.30 kesirli diferensiyel denklemi $K=\frac{\left(\zeta_a(T)\right)^{\frac{\alpha}{k}}E_{\frac{\alpha}{k},\frac{\alpha}{k}+1}\left(\left|\lambda k^{-\frac{\alpha}{k}}\right|\left(\zeta_a(T)\right)^{\frac{\alpha}{k}}\right)}{k^{\frac{\alpha}{k}}}$ için Hyers-Ulam kararlıdır. Ancak $T=\infty$ ise Eş. 4.30 kesirli diferensiyel denklemi Hyers-Ulam kararlı değildir.

Not

Teorem 4.2.4'de $k=1$ ve $\nu=0$ alınırsa ${}^{H}D_{k,a+}^{\alpha,\nu;\psi}$ kesirli türevi $D_{a+}^{\alpha;\psi}$ kesirli türevine indirgeneceğinden [75]'deki Teorem 3.10'un sonuçları elde edilir.

Not

Teorem 4.2.4'ün sonuçlarında $k=1$ ya da $\rho=k$ ve $a=0$, $\psi(t)=t$ alındığında [48] deki Teorem 3.2 'nin sonuçlarını içerir.

Not

$y(t)=W(t)=(w_1(t),w_2(t),\ldots,w_n(t))^T$ bilinmeyen bir vektör fonksiyon, λ reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı $n\times n$ tipinde bir matris ve $f(t)$ kapalı $[a,T]$ aralığında yerel olarak integrallenebilir n-boyutlu bir sütun vektör fonksiyonu olmak üzere Teorem 4.2.4'ün sonuçlarında $k=1$ veya $\rho=k$, ve ve $a=0$, $\psi(t)=\frac{t^{\rho}}{\rho}$ olarak alınırsa [59]'daki Teorem 3.1'in sonuçlarını içerir.

Örnek

Aşağıdaki başlangıç değer problemini ele alalım:

$$ {}^{H}D_{k,a+}^{\frac{1}{2},\nu;\psi}y(t)+7y(t)=f(t),\ \left(I_{k,a+}^{(1-\nu)\left(k-\frac{1}{2}\right);\psi}y\right)^{[0]}(a)=0. \tag{4.53}$$

Burada $\lambda=-7$, $\alpha=\frac{1}{2}$ ve $f(t)=\frac{\Gamma_k(4)}{\Gamma_k\left(\frac{7}{2}\right)}(\zeta_a(t))^{\frac{7}{2k}-1}+7(\zeta_a(t))^{\frac{4}{k}-1}+\frac{1}{20}$ dır. $\frac{1}{20}<\varepsilon\leq 1$ ve $y_1(t)=(\zeta_a(t))^{\frac{4}{k}-1}$ fonksiyonu için, Eş. 2.16 kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left|{}^{H}D_{k,a+}^{\frac{1}{2},\nu;\psi}y_1(t)+7y_1(t)-f(t)\right| &= \left|\frac{\Gamma_k(4)}{\Gamma_k\left(\frac{7}{2}\right)}(\zeta_a(t))^{\frac{7}{2k}-1}+7(\zeta_a(t))^{\frac{4}{k}-1}\right.\\ &\quad \left.-\frac{\Gamma_k(4)}{\Gamma_k\left(\frac{7}{2}\right)}(\zeta_a(t))^{\frac{7}{2k}-1}-7(\zeta_a(t))^{\frac{4}{k}-1}-\frac{1}{20}\right|\\ &= \left|\frac{1}{20}\right|<\varepsilon\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, $y_1(t)$ fonksiyonunun başlangıç değeri $\left(I_{k,a+}^{(1-\nu)\left(k-\frac{1}{2}\right);\psi} y_1\right)^{[0]}(a) = 0$ dır. $\alpha = \frac{1}{2}$ olduğundan, $n = 1$ ve $c_0 = 0$ elde edilir. Bu değerler Eş. 4.49'da kullanılırsa

$$\begin{aligned} y_e(t) &= \frac{1}{k^{\frac{1}{2k}}}\left(\frac{\Gamma_k(4)}{\Gamma_k\left(4-\frac{1}{2}\right)}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{7}{2k}-1} + 7\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{4}{k}-1} + \frac{1}{20}\right) *_\psi \left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{1}{2k}-1} E_{\frac{1}{2k},\frac{1}{2k}}\left((-7)k^{-\frac{1}{2k}}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{1}{2k}}\right) \\ &= \frac{\Gamma_k(4)}{\Gamma_k\left(\frac{7}{2}\right)k^{\frac{1}{2k}}}\int_a^t \left(\zeta_a(u)\right)^{\frac{7}{2k}-1}\left(\zeta_u(t)\right)^{\frac{1}{2k}-1} E_{\frac{1}{2k},\frac{1}{2k}}\left((-7)k^{-\frac{1}{2k}}\left(\zeta_u(t)\right)^{\frac{1}{2k}}\right)\psi'(u)\,du \\ &+ \frac{7}{k^{\frac{1}{2k}}}\int_a^t \left(\zeta_a(u)\right)^{\frac{4}{k}-1}\left(\zeta_u(t)\right)^{\frac{1}{2k}-1} E_{\frac{1}{2k},\frac{1}{2k}}\left((-7)k^{-\frac{1}{2k}}\left(\zeta_u(t)\right)^{\frac{1}{2k}}\right)\psi'(u)\,du \\ &+ \frac{1}{20k^{\frac{1}{2k}}}\int_a^t \left(\zeta_u(t)\right)^{\frac{1}{2k}-1} E_{\frac{1}{2k},\frac{1}{2k}}\left((-7)k^{-\frac{1}{2k}}\left(\zeta_u(t)\right)^{\frac{1}{2k}}\right)\psi'(u)\,du \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte birinci ve ikinci integralde $u = \psi^{-1}\left(\psi(t) - \xi\left(\zeta_a(t)\right)\right)$ değişken değiştirmesi yapılır, üçüncü integral çözülürse

$$y_e(t) = \left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{4}{k}-1} + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-7)^m\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{m+1}{2k}}}{k^{\frac{m+1}{2k}}20\Gamma\left(\frac{m+1}{2k}+1\right)}$$

elde edilir. $y_1(t)$ ve $y_e(t)$ fonksiyonlarının farklarının mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_e(t)| &= \left|\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{4}{k}-1} - \left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{4}{k}-1} - \frac{1}{20}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-7)^m\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{m+1}{2k}}\left(k^{\frac{-1}{2k}}\right)^m}{k^{\frac{1}{2k}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2k}+1\right)}\right| \\ &= \frac{1}{20}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-7)^m\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{m+1}{2k}}\left(k^{\frac{-1}{2k}}\right)^m}{k^{\frac{1}{2k}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2k}+1\right)} \\ &< \varepsilon\frac{\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{1}{2k}} E_{\frac{1}{2k},\frac{1}{2k}+1}\left(\left|-7k^{\frac{-1}{2k}}\right|\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{1}{2k}}\right)}{k^{\frac{1}{2k}}} \\ &< \varepsilon\frac{\left(\zeta_a(T)\right)^{\frac{1}{2k}} E_{\frac{1}{2k},\frac{1}{2k}+1}\left(\left|-7k^{\frac{-1}{2k}}\right|\left(\zeta_a(T)\right)^{\frac{1}{2k}}\right)}{k^{\frac{1}{2k}}} \end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 4.53 $\frac{1}{20} < \varepsilon \leq 1$ ve $K = \frac{(\zeta_a(T))^{\frac{1}{2k}} E_{\frac{1}{2k},\frac{1}{2k}+1}\left(\left|-7k^{\frac{-1}{2k}}\right|(\zeta_a(T))^{\frac{1}{2k}}\right)}{k^{\frac{1}{2k}}}$ için Teorem 4.2.4'ün koşullarını sağladığından Hyers–Ulam kararlıdır.

Not

Verilen örnekte $k = 1$ veya $\rho = k$, $\psi(t) = t$ ve $a = 0$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$ alınırsa, [48] makalesindeki Örnek 3.8'e indirgenmiş olur.

Not

Verilen örnekte $k = 1$ ve $\nu = 0$ alınırsa, [75] makalesindeki Örnek 3.11'e indirgenmiş olur.

4.3. Tempered (k,ψ)-Hilfer Kesirli Diferensiyel Denkleminin Ulam Tipi Kararlılığı

$$\left({}^{TH}D^{\alpha,\nu,\lambda;\psi}_{k,a+}y\right)(t) = f(t) \tag{4.54}$$

ve

$$\left({}^{TH}D^{\alpha,\nu,\lambda;\psi}_{k,a+}y\right)(t) - \eta y(t) = f(t) \tag{4.55}$$

tempered (k,ψ)- Hilfer kesirli diferensiyel denklemlerini

$$\varphi^n_\psi\left(I^{(1-\nu)(kn-\alpha);\psi}_{k,a+}y\right)(a) = c_m \tag{4.56}$$

başlangıç koşulu ile ele alacağız. Burada $0 < T < +\infty, \nu \in [0,1]$, η, c_m $\mathbb{C}$ de skaler değerler, $\psi \in C^n[a,b]$ öyle ki $[a,b]$ üzerinde $\psi'(t) > 0$ ve ${}^{TH}D^{\alpha,\nu,\lambda;\psi}_{k,a+}$, $\alpha > 0$ mertebeden tempered (k,ψ)-HKT'dir [34]. Bu bölümdeki teorem ve lemmalarla, Eş. 4.56 başlangıç koşulu ile verilen Eş. 4.54, Eş. 4.55 denklemlerinin Hyers-Ulam kararlılığını (k,ψ)-GLD'ünü kullanarak ispatlayacağız.

4.3.1. Tanım

$f \in C((0,T]\times\mathbb{C})$ olmak üzere verilen bir $\varepsilon > 0$ ve $\left|\left({}^{TH}D^{\alpha,\nu,\lambda;\psi}_{k,a+}y\right)(t) - f(t)\right| \leq \varepsilon$

eşitsizliğini sağlayan bir y foksiyonu için Eş. 4.54 kesirli diferensiyel denkleminin Eş. 4.56 koşulunu sağlayan bir y_e çözümü var ve $|y(t)-y_e(t)| \leq \varepsilon K$ eşitsizliğini sağlayan bir $K>0$ pozitif sabiti varsa Eş. 4.56 başlangıç koşullu Eş. 4.54 kesirli diferensiyel denklemine Hyers-Ulam kararlıdır denir.

4.3.2. Tanım

$f \in C((0,T]\times\mathbb{C})$ ve $\eta \in \mathbb{C}$ de bir sabit olmak üzere $\varepsilon > 0$ için $\left|\left({}^{TH}D^{\alpha,\nu,\lambda;\psi}_{k,a+}y\right)(t)-\eta y(t)-f(t)\right| \leq \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir y fonksiyonu ve Eş. 4.55 kesirli diferensiyel denkleminin Eş. 4.56 koşulunu sağlayan bir y_e çözümü var ve $|y(t)-y_e(t)| \leq \varepsilon K$ eşitsizliğini sağlayan bir $K>0$ pozitif sabiti varsa Eş. 4.56 başlangıç koşullu Eş. 4.55 kesirli diferensiyel denklemine Hyers-Ulam kararlıdır denir.

4.3.3. Lemma

$[a,b]$ aralığı, gerçel eksen $\mathbb{R}$ üzerinde sonlu ya da sonsuz bir aralık olsun. $\psi(t)>0$ fonksiyonu $(a,b]$ aralığında artan bir fonksiyon ve (a,b) aralığında sürekli olsun. Ayrıca $\lambda>0$, $k>0$ ve $\alpha>0$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\int_a^t e^{-\lambda\zeta_u(t)}\left(\zeta_u(t)\right)^{\frac{\alpha}{k}-1}\psi'(u)\,du &= \int_a^t e^{-\lambda\zeta_a(u)}\left(\zeta_a(u)\right)^{\frac{\alpha}{k}-1}\psi'(u)\,du \\ &= \frac{1}{\lambda^{\frac{\alpha}{k}}}\left(\Gamma\left(\frac{\alpha}{k}\right)-\Gamma\left(\frac{\alpha}{k},\lambda\zeta_a(t)\right)\right) \qquad (4.57)\end{aligned}$$

dir. Burada $\Gamma\left(\frac{\alpha}{k},\lambda\zeta_a(t)\right)$ ifadesi, eksik gamma fonksiyonunu göstermektedir.

İspat

$$\int_a^t e^{-\lambda\zeta_u(t)}\left(\zeta_u(t)\right)^{\frac{\alpha}{k}-1}\psi'(u)\,du$$

integralinde $\xi = \lambda\,\zeta_u(t)$ değişken değiştirmesi ve

$$\int_a^t e^{-\lambda\,\zeta_a(u)}\,(\zeta_a(u))^{\frac{\alpha}{k}-1}\,\psi'(u)\,du$$

integralinde $\xi = \lambda\,\zeta_a(u)$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned}\int_a^t e^{-\lambda\,\zeta_u(t)}\,(\zeta_u(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}\,\psi'(u)\,du &= \int_a^t e^{-\lambda\,\zeta_a(u)}\,(\zeta_a(u))^{\frac{\alpha}{k}-1}\,\psi'(u)\,du \\ &= \frac{1}{\lambda^{\frac{\alpha}{k}}}\int_0^{\lambda\,\zeta_a(t)} e^{-\xi}\,\xi^{\frac{\alpha}{k}-1}d\xi \end{aligned} \tag{4.58}$$

elde dilir. Gama ve eksik gama fonksiyonunun tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{\alpha}{k}\right) &= \int_0^{\infty} e^{-\xi}\,\xi^{\frac{\alpha}{k}-1}d\xi = \int_0^{\lambda\,\zeta_a(t)} e^{-\xi}\,\xi^{\frac{\alpha}{k}-1}d\xi + \int_{\lambda\,\zeta_a(t)}^{\infty} e^{-\xi}\,\xi^{\frac{\alpha}{k}-1}d\xi \\ &= \int_0^{\lambda\,\zeta_a(t)} e^{-\xi}\,\xi^{\frac{\alpha}{k}-1}d\xi + \Gamma\left(\frac{\alpha}{k},\lambda\,\zeta_a(t)\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\int_0^{\lambda\,\zeta_a(t)} e^{-\xi}\,\xi^{\frac{\alpha}{k}-1}d\xi = \Gamma\left(\frac{\alpha}{k}\right) - \Gamma\left(\frac{\alpha}{k},\lambda\,\zeta_a(t)\right) \tag{4.59}$$

elde edilir. Eş. 4.59, Eş. 4.58'de kullanılırsa

$$\begin{aligned}\int_a^t e^{-\lambda\,\zeta_u(t)}\,(\zeta_u(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}\,\psi'(u)\,du &= \int_a^t e^{-\lambda\,\zeta_a(u)}\,(\zeta_a(u))^{\frac{\alpha}{k}-1}\,\psi'(u)\,du \\ &= \frac{1}{\lambda^{\frac{\alpha}{k}}}\left(\Gamma\left(\frac{\alpha}{k}\right) - \Gamma\left(\frac{\alpha}{k},\lambda\,\zeta_a(t)\right)\right)\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

4.3.4. Teorem

$\frac{\alpha}{k} \in \mathbb{R} \setminus (1,2)$, $0 < T < +\infty$, $\psi(t)$, $(a,b]$, $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ aralığı üzerinde artan ve pozitif değerli bir fonksiyon ve $\lambda > 0$ olsun. Eğer $y : (0,T] \to \mathbb{C}$ fonksiyonu her $t \in (0,T]$ ve bazı $\varepsilon > 0$ için Eş. 4.56 başlangıç koşulu ile

$$\left| \left({}^{TH}D^{\alpha,\nu,\lambda;\psi}_{k,a+} y \right)(t) - f(t) \right| \leq \varepsilon \tag{4.60}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa Eş. 4.54 kesirli diferensiyel denkleminin

$$|y(t) - y_e(t)| \leq \frac{\varepsilon}{k\Gamma_k(\alpha)\lambda^{\frac{\alpha}{k}}} \left(\Gamma\left(\frac{\alpha}{k}\right) - \Gamma\left(\frac{\alpha}{k}, \lambda\zeta_a(T)\right) \right) \tag{4.61}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $y_e : (0,T] \to \mathbb{C}$ çözümü vardır.

İspat

$t \in (0,T]$ için

$$Y_1(t) = \left({}^{TH}D^{\alpha,\nu,\lambda;\psi}_{k,a+} y \right)(t) - f(t) \tag{4.62}$$

olsun. Eş. 4.62'nin her iki tarafının (k,ψ)-GLD'ü alınır ve Eş. 3.40 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{\rho;\psi}_{k,a+}\{Y_1(t)\}(s) &= \mathscr{L}^{\rho;\psi}_{k,a+}\left\{ \left({}^{TH}D^{\alpha,\nu,\lambda;\psi}_{k,a+} y \right)(t) \right\}(s) - \mathscr{L}^{\rho;\psi}_{k,a+}\{f(t)\}(s) \\
&= k^n \left[\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}} + \lambda \right)^n \frac{\mathscr{L}^{\rho;\psi}_{k,a+}\{y(t)\}(s)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}} + \lambda \right)^{\frac{kn-\alpha}{k}} k^{\frac{kn-\alpha}{k}}} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}} + \lambda \right)^{n-j-1} \left(\varphi^j_\psi \left({}^{T}I^{(1-\nu)(kn-\alpha),\lambda;\psi}_{a+} \right) g \right)(a)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}} + \lambda \right)^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}} k^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}} \right] \\
&\quad - \mathscr{L}^{\rho;\psi}_{k,a+}\{f(t)\}(s)
\end{aligned} \tag{4.63}$$

elde edilir. Eş. 4.63, Eş. 4.56 başlangıç koşulu ile yeniden yazılırsa

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{y(t)\}(s) &= \frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{f(t)\}(s)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{\alpha}{k}}k^{\frac{\alpha}{k}}}+k^n\sum_{j=0}^{n-1}\frac{c_j\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{n-j-1}}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}}k^{\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}}}\\ &\quad+\frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{Y_1(t)\}(s)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{\alpha}{k}}k^{\frac{\alpha}{k}}}\end{aligned} \tag{4.64}$$

elde edilir. Eş. 3.18' de sırasıyla $\beta=\frac{\alpha}{k}-1$ ve $\beta=\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}-n+j$ $(j=0,1,2,...,n-1)$ yazılırsa

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{\alpha}{k}}k^{\frac{\alpha}{k}}} &= \frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{e^{-\lambda(\zeta_a(t))}(\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}\right\}(s)}{k\Gamma_k(\alpha)},\\ \frac{1}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}-n+j+1}k^{\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}-n+j}} &= \frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{e^{-\lambda(\zeta_a(t))}(\zeta_a(t))^{\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}-n+j}\right\}(s)}{\Gamma_k\left(\left(\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}-n+j+1\right)k\right)}\end{aligned}\right\} \tag{4.65}$$

elde edilir. Eş. 4.64'te Eş. 4.65 kullanılırsa

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{y(t)\}(s) &= \frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{f(t)\}(s)\,\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{e^{-\lambda(\zeta_a(t))}(\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}\right\}(s)}{k\Gamma_k(\alpha)}\\ &\quad+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{c_jk^j\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{e^{-\lambda(\zeta_a(t))}(\zeta_a(t))^{\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}+j-n}\right\}(s)}{\Gamma_k\left(\left(\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}+j-n+1\right)k\right)}\\ &\quad+\frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{Y_1(t)\}(s)\,\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{e^{-\lambda(\zeta_a(t))}(\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}\right\}(s)}{k\Gamma_k(\alpha)}\end{aligned} \tag{4.66}$$

elde edilir.

$$y_e(t)=f(t)*_\psi\frac{e^{-\lambda(\zeta_a(t))}(\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{k^jc_je^{-\lambda(\zeta_a(t))}(\zeta_a(t))^{\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}+j-n}}{\Gamma_k\left(\left(\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}+j-n+1\right)k\right)} \tag{4.67}$$

olsun. Eş. 4.67 nin her iki tarafının (k,ψ)-GLD' ü alınır ve Eş. 3.10, Eş. 4.65 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{y_e(t)\right\}(s) &= \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{f(t)\right\}(s)\,\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\frac{e^{-\lambda(\zeta_a(t))}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}\right\}(s) \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n-1}\frac{k^j c_j \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{e^{-\lambda(\zeta_a(t))}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}+j-n}\right\}(s)}{\Gamma_k\left(\left(\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}+j-n+1\right)k\right)} \\
&= \frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{f(t)\right\}(s)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{\alpha}{k}}k^{\frac{\alpha}{k}}} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n-1}\frac{c_j}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}-n+j+1}k^{\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}-n}}
\end{aligned} \tag{4.68}$$

elde edilir. Eş. 3.40, Eş. 4.56 başlangıç koşulu ve Eş. 4.68 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{{}^{TH}D_{k,a+}^{\alpha,\nu,\lambda;\psi}y_e(t)\right\}(s) &= k^n\left[\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^n\frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{y_e(t)\right\}(s)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{kn-\alpha}{k}}k^{\frac{kn-\alpha}{k}}}\right. \\
&\quad \left. -\sum_{j=0}^{n-1}\frac{c_j\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{n-j-1}}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}k^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}}\right] \\
&= \frac{1}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{-\frac{\alpha}{k}}k^{-\frac{\alpha}{k}}}\left\{\frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{f(t)\right\}(s)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{\alpha}{k}}k^{\frac{\alpha}{k}}}\right. \\
&\quad \left. +\sum_{j=0}^{n-1}\frac{c_j}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}-n+j+1}k^{\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}-n}}\right\} \\
&\quad -k^n\sum_{j=0}^{n-1}\frac{c_j\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{n-j-1}}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}k^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}} \\
&= \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{f(t)\right\}(s)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}$ operatörünün bire-bir olduğu kullanılırsa

$$\left({}^{TH}D_{k,a+}^{\alpha,\nu,\lambda;\psi}y_e\right)(t)=f(t)$$

elde edilir. Böylece $y_e(t)$, Eş. 4.54 kesirli diferensieyel denkleminin bir çözümü olur. Eş. 4.66 ve Eş. 4.68 kullanılırsa

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{y(t)-y_e(t)\right\}(s)=\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{Y_1(t)*_{\psi}\frac{e^{-\lambda(\zeta_a(t))}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}\right\}(s)$$

elde edilir. $\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}$ operatörünün bire-bir olduğu tekrar kullanılırsa

$$y(t)-y_e(t)=\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\left[Y_1(t)*_{\psi}e^{-\lambda(\zeta_a(t))}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{\alpha}{k}-1}\right]$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınır ve Eş. 3.9, Eş. 4.60 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\left|y(t)-y_e(t)\right| &\leq \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\left|\int_a^t Y_1(u)\,e^{-\lambda(\zeta_u(t))}\left(\zeta_u(t)\right)^{\frac{\alpha}{k}-1}\psi'(u)\,du\right| \\
&= \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t\left|Y_1(u)\right|\left|e^{-\lambda(\zeta_u(t))}\left(\zeta_u(t)\right)^{\frac{\alpha}{k}-1}\psi'(u)\right|du \\
&\leq \frac{\varepsilon}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t\left|e^{-\lambda(\zeta_u(t))}\left(\zeta_u(t)\right)^{\frac{\alpha}{k}-1}\psi'(u)\right|du
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 4.57 kullanılırsa

$$\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t\left|e^{-\lambda(\zeta_u(t))}\left(\zeta_u(t)\right)^{\frac{\alpha}{k}-1}\psi'(u)\right|du=\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)\lambda^{\frac{\alpha}{k}}}\left(\Gamma\left(\frac{\alpha}{k}\right)-\Gamma\left(\frac{\alpha}{k},\lambda\zeta_a(t)\right)\right)$$

elde edilir. O halde

$$\left|y(t)-y_e(t)\right|\leq\frac{\varepsilon}{k\Gamma_k(\alpha)\lambda^{\frac{\alpha}{k}}}\left(\Gamma\left(\frac{\alpha}{k}\right)-\Gamma\left(\frac{\alpha}{k},\lambda\zeta_a(t)\right)\right)<\frac{\varepsilon}{k\Gamma_k(\alpha)\lambda^{\frac{\alpha}{k}}}\left(\Gamma\left(\frac{\alpha}{k}\right)-\Gamma\left(\frac{\alpha}{k},\lambda\zeta_a(T)\right)\right)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Not

Eğer $T < \infty$ ise [76]'teki Teorem 1.1 den $\Gamma\left(\frac{\alpha}{k}, \lambda\zeta_a(T)\right)$ sınırlı olacağından $K = \frac{\left(\Gamma\left(\frac{\alpha}{k}\right) - \Gamma\left(\frac{\alpha}{k}, \lambda\zeta_a(t)\right)\right)}{k\Gamma_k(\alpha)\lambda^{\frac{\alpha}{k}}}$ sabiti için Eş. 4.54 kesirli diferensiyel denklemi Hyers-Ulam kararlıdır. Ancak $T = \infty$ için Eş. 4.54 kesirli diferensiyel denklemi Hyers-Ulam kararlı değildir.

Not

${}^{TH}D_{k,a+}^{\alpha,\nu,\lambda;\psi}$ kesirli türevinde $k = 1$, $\lambda = 0$ ve $\nu = 0$ alındığında $D_{a+}^{\alpha;\psi}$ kesirli türevine indirgeneceğinden Teorem 4.3.4 de elde edilen sonuçlar [75] deki Theorem 3.8 in sonuçlarına indirgenir.

4.3.5. Lemma

$\alpha, k \in \mathbb{R}^+$ ve $\beta \in \mathbb{R}$ sayısı $\frac{\beta}{k} > 0$ biçiminde olsun. Bu durumda

$$ {}^{TH}D_{k,a+}^{\alpha,\nu,\lambda;\psi}\left(e^{-\lambda(\zeta_a(t))}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{\beta}{k}-1}\right) = \frac{\Gamma_k(\beta)}{\Gamma_k(\beta-\alpha)} e^{-\lambda(\zeta_a(t))}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{\beta-\alpha}{k}-1} \tag{4.69} $$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 2.21'de verilen tempered (k,ψ)-HKT'nin tanımı $f(t) = e^{-\lambda(\zeta_a(t))}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{\beta}{k}-1}$ için kullanılırsa

$$ \begin{aligned} & {}^{TH}D_{k,a+}^{\alpha,\nu,\lambda;\psi}\left(e^{-\lambda(\zeta_a(t))}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{\beta}{k}-1}\right) \\ &= e^{-\lambda\psi(t)} {}^{H}D_{k,a+}^{\alpha,\nu;\psi}\left(e^{\lambda\psi(a)}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{\beta}{k}-1}\right) \\ &= e^{-\lambda(\zeta_a(t))} {}^{H}D_{k,a+}^{\alpha,\nu;\psi}\left(\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{\beta}{k}-1}\right) \end{aligned} \tag{4.70} $$

elde edilir. Eş. 2.16 kullanılırsa

$$ {}^{H}D_{k,a+}^{\alpha,\nu;\psi}\left((\zeta_a(t))^{\frac{\beta}{k}-1}\right)=\frac{\Gamma_k(\beta)}{\Gamma_k(\beta-\alpha)}(\zeta_a(t))^{\frac{\beta-\alpha}{k}-1} \tag{4.71} $$

elde edilir. Eş. 4.71, Eş. 4.70'de kullanılırsa

$$ {}^{TH}D_{k,a+}^{\alpha,\nu,\lambda;\psi}\left(e^{-\lambda(\zeta_a(t))}(\zeta_a(t))^{\frac{\beta}{k}-1}\right)=\frac{\Gamma_k(\beta)}{\Gamma_k(\beta-\alpha)}e^{-\lambda(\zeta_a(t))}(\zeta_a(t))^{\frac{\beta-\alpha}{k}-1} \tag{4.72} $$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Örnek

Aşağıdaki başlangıç değer problemini ele alalım:

$$ {}^{TH}D_{k,a+}^{\frac{1}{2},\nu,\lambda;\psi}y(t)=f(t),\quad \varphi_{\psi}^{n}\left(I_{k,a+}^{(1-\nu)\left(k-\frac{1}{2}\right);\psi}y\right)(a)=0. \tag{4.73} $$

Burada $\alpha=\frac{1}{2}$ ve $f(t)=\frac{\Gamma_k(4)}{\Gamma_k\left(\frac{7}{2}\right)}(\zeta_a(t))^{\frac{7}{2k}-1}e^{-\lambda\zeta_a(t)}+\frac{1}{20}$ dır. $\frac{1}{20}<\varepsilon\leq 1$ ve $y_1(t)=e^{-\lambda\zeta_a(t)}(\zeta_a(t))^{\frac{4}{k}-1}$ için Eş. 4.69'da $\beta=4$ alınırsa

$$ \begin{aligned} \left|{}^{TH}D_{k,a+}^{\frac{1}{2},\nu;\psi}y_1(t)-f(t)\right| &= \left|\frac{\Gamma_k(4)}{\Gamma_k\left(\frac{7}{2}\right)}(\zeta_a(t))^{\frac{7}{2k}-1}e^{-\lambda\zeta_a(t)}-\frac{\Gamma_k(4)}{\Gamma_k\left(\frac{7}{2}\right)}(\zeta_a(t))^{\frac{7}{2k}-1}e^{-\lambda\zeta_a(t)}-\frac{1}{20}\right| \\ &= \left|\frac{1}{20}\right|<\varepsilon \end{aligned} $$

eşitsizliği sağlanır. $\alpha=\frac{1}{2}$ olduğundan, $n=1$ ve $c_0=0$ elde edilir. Ayrıca, $y_1(t)$ fonksiyonunun başlangıç değeri de $\varphi_{\psi}^{n}\left(I_{k,a+}^{(1-\nu)\left(k-\frac{1}{2}\right);\psi}y_1\right)(a)=0$ dır. Bu değerler ve $f(t)=\frac{\Gamma_k(4)}{\Gamma_k\left(\frac{7}{2}\right)}(\zeta_a(t))^{\frac{7}{2k}-1}e^{-\lambda\zeta_a(t)}+\frac{1}{20}$ fonksiyonu Eş. 4.67'de kullanılırsa

$$ \begin{aligned} y_e(t) &= \frac{1}{k\Gamma_k\left(\frac{1}{2}\right)}\left((\zeta_a(t))^{\frac{1}{2k}-1}e^{-\lambda\zeta_a(t)}*_{\psi}\left(\frac{\Gamma_k(4)}{\Gamma_k\left(4-\frac{1}{2}\right)}(\zeta_a(t))^{\frac{7}{2k}-1}e^{-\lambda\zeta_a(t)}+\frac{1}{20}\right)\right) \\ &= \frac{1}{k\Gamma_k\left(\frac{1}{2}\right)}\int_a^t(\zeta_a(u))^{\frac{1}{2k}-1}e^{-\lambda\zeta_a(u)}\left[\frac{\Gamma_k(4)}{\Gamma_k\left(4-\frac{1}{2}\right)}(\zeta_u(t))^{\frac{7}{2k}-1}e^{-\lambda\zeta_u(t)}+\frac{1}{20}\right]\psi'(u)\,du \end{aligned} $$

$$= \frac{\Gamma_k(4)\, e^{-\lambda \zeta_a(t)}}{\Gamma_k\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma_k\left(\frac{7}{2}\right)} \frac{1}{k} \int_a^t \left(\zeta_a(u)\right)^{\frac{1}{2k}-1} \left(\zeta_u(t)\right)^{\frac{7}{2k}-1} \psi'(u)\, du$$
$$+ \frac{1}{20k\Gamma_k\left(\frac{1}{2}\right)} \int_a^t \left(\zeta_a(u)\right)^{\frac{1}{2k}-1} e^{-\lambda \zeta_a(u)} \psi'(u)\, du$$

elde edilir. Son eşitlikte birinci integralde $u = \psi^{-1}\left(\psi(t) - \xi\left(\zeta_a(t)\right)\right)$ değişken değiştirmesi yapılır, ikinci integralde Eş. 4.57 kullanılırsa

$$y_e(t) = e^{-\lambda \zeta_a(t)} \left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{4}{k}-1} + \frac{1}{20k\Gamma_k\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2k}}} \left(\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{2k}, \lambda \zeta_a(t)\right)\right)$$

elde edilir. $y_1(t)$ ve $y_e(t)$ fonksiyonlarının farklarının mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_e(t)| &= \left| \frac{1}{20k\Gamma_k\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2k}}} \left(\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{2k}, \lambda \zeta_a(t)\right)\right) \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{k\Gamma_k\left(\frac{1}{2}\right)\lambda^{\frac{1}{2k}}} \left| \Gamma\left(\frac{1}{2k}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{2k}, \lambda \zeta_a(t)\right) \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{k\Gamma_k\left(\frac{1}{2}\right)\lambda^{\frac{1}{2k}}} \left| \Gamma\left(\frac{1}{2k}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{2k}, \lambda \zeta_a(T)\right) \right| \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak, Eş. 4.73 kesirli diferensiyel denklemi $\varepsilon = \frac{1}{20}$ ve $K = \frac{1}{k\Gamma_k\left(\frac{1}{2}\right)\lambda^{\frac{1}{2k}}} \left|\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{2k}, \lambda \zeta_a(T)\right)\right|$ için Teorem 4.3.4'ü sağladığından Hyers-Ulam kararlıdır.

Not

Verilen örnekteki ${}^{TH}D_{k,a+}^{\alpha,\nu,\lambda;\psi}$ kesirli türevinde $k = 1$, $\lambda = 0$ ve $\nu = 0$ alındığında $D_{a+}^{\alpha;\psi}$ kesirli türevi elde edileceğinden [75] 'teki Örnek 3.10'un sonuçlarına indirgenir.

4.3.6. Teorem

$\frac{\alpha}{k} \in \mathbb{R} \setminus (1,2)$, $0 < T < +\infty$, η, $\mathbb{C}$ de bir sabit, $\psi(t)$ $(a,b]$ $(-\infty \leq a < b < +\infty)$ aralığı üzerinde pozitif değerli ve artan bir fonksiyon ve $f(t)$, $[0,\infty)$ üzerinde reel değerli sürekli fonksiyon ve $\lambda > 0$ olsun. Eğer $y : (0,T] \to \mathbb{C}$ her $t \in (0,T]$ ve bazı $\varepsilon > 0$ için Eş. 4.56

başlangıç koşulu ile

$$\left|\left({}^{TH}D_{k,a+}^{\alpha,\nu,\lambda;\psi}y\right)(t)-\eta y(t)-f(t)\right|\leq\varepsilon \tag{4.74}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa Eş. 4.55 kesirli diferensiyel denkleminin

$$|y(t)-y_e(t)|\leq\varepsilon\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left|\eta k^{-\frac{\alpha}{k}}\right|^m}{\Gamma\left(\frac{\alpha m+\alpha}{k}\right)\left(k\lambda^{m+1}\right)^{\frac{\alpha}{k}}}\left(\Gamma\left(\frac{\alpha m+\alpha}{k}\right)-\Gamma\left(\frac{\alpha m+\alpha}{k},\lambda\zeta_a(T)\right)\right) \tag{4.75}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $y_e:(0,T]\to\mathbb{C}$ çözümü vardır.

İspat

$t\in(0,T]$ için

$$Y_2(t)=\left({}^{TH}D_{k,a+}^{\alpha,\nu,\lambda;\psi}y\right)(t)-\eta y(t)-f(t) \tag{4.76}$$

olsun. Eş. 4.76'nın her iki tarafının (k,ψ)-GLD alınır ve Eş. 3.40 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{Y_2(t)\}(s) &= \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{{}^{TH}D_{k,a+}^{\alpha,\nu,\lambda;\psi}y(t)\right\}(s)-\eta\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{y(t)\}(s)-\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{f(t)\}(s)\\
&= k^n\left[\frac{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^n\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{y(t)\}(s)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{kn-\alpha}{k}}k^{\frac{kn-\alpha}{k}}}\right.\\
&\quad\left.-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{n-j-1}\left(\varphi_\psi^j\left({}^{T}I_{k,a+}^{(1-\nu)(kn-\alpha),\lambda;\psi}\right)y\right)(a)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}k^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}}\right]\\
&\quad-\eta\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{y(t)\}(s)-\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{f(t)\}(s)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\beta=\alpha+\nu(kn-\alpha)-k(n-j-1)$ yazılır ve Eş. 4.56 başlangıç koşulu kullanılırsa

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{y(t)\}(s) &= \frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{f(t)\}(s)}{k^{\frac{\alpha}{k}}\left(\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{\alpha}{k}}-\eta k^{-\frac{\alpha}{k}}\right)}+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{k^{n-\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}c_j\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{\alpha-\beta}{k}}}{k^{\frac{\alpha}{k}}\left(\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{\alpha}{k}}-\eta k^{-\frac{\alpha}{k}}\right)}\\ &\quad+\frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{Y_2(t)\}(s)}{k^{\frac{\alpha}{k}}\left(\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{\alpha}{k}}-\eta k^{-\frac{\alpha}{k}}\right)}\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 3.10, Eş. 3.20 ve Eş. 3.22 kullanılırsa

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{y(t)\}(s) &= \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\frac{f(t)}{k^{\frac{\alpha}{k}}}*_{\psi}\left(e^{-\lambda\zeta_a(t)}(\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}E_{\frac{\alpha}{k},\frac{\alpha}{k}}\left(\eta k^{-\frac{\alpha}{k}}(\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}}\right)\right)\right\}(s)\\ &\quad+\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\sum_{j=0}^{n-1}k^{n-\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}}c_j\left(e^{-\lambda\zeta_a(t)}(\zeta_a(t))^{\frac{\beta}{k}-1}E_{\frac{\alpha}{k},\frac{\beta}{k}}\left(\eta k^{-\frac{\alpha}{k}}(\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}}\right)\right)\right\}(s)\\ &\quad+\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\frac{Y_2(t)}{k^{\frac{\alpha}{k}}}*_{\psi}\left(e^{-\lambda\zeta_a(t)}(\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}E_{\frac{\alpha}{k},\frac{\alpha}{k}}\left(\eta k^{-\frac{\alpha}{k}}(\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}}\right)\right)\right\}(s)\end{aligned}\tag{4.77}$$

elde edilir.

$$y_e(t)=\frac{f(t)}{k^{\frac{\alpha}{k}}}*_{\psi}h(t)+\sum_{j=0}^{n-1}k^{n-\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}}c_j\vartheta(t)\tag{4.78}$$

olsun. Burada yazılımın basitliği için $h(t)=e^{-\lambda\zeta_a(t)}(\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}E_{\frac{\alpha}{k},\frac{\alpha}{k}}\left(\eta k^{-\frac{\alpha}{k}}(\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}}\right)$, $\vartheta(t)=\left(e^{-\lambda\zeta_a(t)}(\zeta_a(t))^{\frac{\beta}{k}-1}E_{\frac{\alpha}{k},\frac{\beta}{k}}\left(\eta k^{-\frac{\alpha}{k}}(\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}}\right)\right)$ ve $\beta=\alpha+\nu(kn-\alpha)-k(n-j-1)$ alınmıştır. Eş. 4.78 'ün her iki tarafının (k,ψ)-GLD alınır ve Eş. 3.10 kullanılırsa

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{y_e(t)\}(s) &= \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\frac{f(t)}{k^{\frac{\alpha}{k}}}\right\}(s)\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\{h(t)\}(s)\\ &\quad+\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\sum_{j=0}^{n-1}k^{n-\frac{\nu(kn-\alpha)+\alpha}{k}}c_j\vartheta(t)\right\}(s)\end{aligned}\tag{4.79}$$

elde edilir. Eş. 3.40 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{{}^{TH}D_{k,a+}^{\alpha,\nu,\lambda;\psi}y_e(t)-\eta y_e(t)\right\}(s) &= \mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{{}^{TH}D_{k,a+}^{\alpha,\nu,\lambda;\psi}y_e(t)\right\}(s)-\eta\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{y_e(t)\right\}(s)\\
&= k^n\left[\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^n\frac{\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{y_e(t)\right\}(s)}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{kn-\alpha}{k}}k^{\frac{kn-\alpha}{k}}}\right.\\
&\quad\left.-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{n-j-1}c_j}{\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}k^{\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}}\right]-\eta\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{y_e(t)\right\}(s)\\
&= \left[\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{\frac{\alpha}{k}}k^{\frac{\alpha}{k}}-\eta\right]\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{y_e(t)\right\}(s)\\
&\quad-\sum_{j=0}^{n-1}k^{n-\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}}\left(sk^{1-\frac{\rho}{k}}+\lambda\right)^{n-\frac{\nu(kn-\alpha)}{k}-j-1}c_j
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitliğin sağ tarafında Eş. 4.79, Eş. 3.20 ve Eş. 3.22 kullanılırsa

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{{}^{TH}D_{k,a+}^{\alpha,\nu,\lambda;\psi}y_e(t)-\eta y_e(t)\right\}(s)=\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{f(t)\right\}(s)$$

elde edilir. $\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}$ operatörünün bire-bir olduğu kullanılırsa

$$\left({}^{TH}D_{k,a+}^{\alpha,\nu,\lambda;\psi}y_e\right)(t)-\eta y_e(t)=f(t)$$

elde edilir. Böylece $y_e(t)$, Eş. 4.55 in bir çözümü olur. Eş. 4.77 ve Eş. 4.79' dan

$$\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{y(t)-y_e(t)\right\}(s)=\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}\left\{\frac{Y_2(t)}{k^{\frac{\alpha}{k}}}*_\psi h(t)\right\}(s)$$

elde edilir. $\mathscr{L}_{k,a+}^{\rho;\psi}$'nin bire-bir olduğu tekrar kullanılırsa

$$y(t)-y_e(t)=\frac{Y_2(t)*_\psi h(t)}{k^{\frac{\alpha}{k}}} \tag{4.80}$$

elde edilir. Eş. 4.80 in her iki tarafının mutlak değeri alınır,

$h(t)=e^{-\lambda\zeta_a(t)}(\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}E_{\frac{\alpha}{k},\frac{\alpha}{k}}\left(\eta k^{-\frac{\alpha}{k}}(\zeta_a(t))^{\frac{\alpha}{k}}\right)$ yazılır ve Eş. 3.9 kullanılırsa

$$\begin{aligned}|y(t)-y_e(t)| &= \frac{1}{k^{\frac{\alpha}{k}}}\left|\int_a^t Y_2(u)\,e^{-\lambda\zeta_u(t)}(\zeta_u(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}E_{\frac{\alpha}{k},\frac{\alpha}{k}}\left(\eta k^{-\frac{\alpha}{k}}(\zeta_u(t))^{\frac{\alpha}{k}}\right)\psi'(u)\,du\right| \\ &\leq \frac{1}{k^{\frac{\alpha}{k}}}\int_a^t |Y_2(u)|\left|h(t)\,\psi'(u)\right|du\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Eş. 4.74 'ten

$$\begin{aligned}|y(t)-y_e(t)| &\leq \frac{\varepsilon}{k^{\frac{\alpha}{k}}}\int_a^t\left|e^{-\lambda\zeta_u(t)}(\zeta_u(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\eta k^{-\frac{\alpha}{k}}(\zeta_u(t))^{\frac{\alpha}{k}}\right)^m}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{k}m+\frac{\alpha}{k}\right)}\psi'(u)\right|du \\ &= \frac{\varepsilon}{k^{\frac{\alpha}{k}}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left|\eta k^{-\frac{\alpha}{k}}\right|^m}{\Gamma\left(\frac{\alpha m+\alpha}{k}\right)}\int_a^t\left|e^{-\lambda\zeta_u(t)}(\zeta_u(t))^{\frac{\alpha}{k}m+\frac{\alpha}{k}-1}\psi'(u)\right|du\end{aligned}$$

olur. Eş. 4.57 de $\alpha\to\frac{\alpha}{k}m+\frac{\alpha}{k}$ yazılırsa

$$\int_a^t\left|e^{-\lambda\zeta_u(t)}(\zeta_u(t))^{\frac{\alpha}{k}m+\frac{\alpha}{k}-1}\psi'(u)\right|du=\frac{1}{\lambda^{\frac{\alpha m+\alpha}{k}}}\left(\Gamma\left(\frac{\alpha m+\alpha}{k}\right)-\Gamma\left(\frac{\alpha m+\alpha}{k},\lambda\zeta_a(t)\right)\right)$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}|y(t)-y_e(t)| &\leq \varepsilon\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left|\eta k^{-\frac{\alpha}{k}}\right|^m}{\Gamma\left(\frac{\alpha m+\alpha}{k}\right)(k\lambda^{m+1})^{\frac{\alpha}{k}}}\left(\Gamma\left(\frac{\alpha m+\alpha}{k}\right)-\Gamma\left(\frac{\alpha m+\alpha}{k},\lambda\zeta_a(t)\right)\right) \\ &< \varepsilon\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left|\eta k^{-\frac{\alpha}{k}}\right|^m}{\Gamma\left(\frac{\alpha m+\alpha}{k}\right)(k\lambda^{m+1})^{\frac{\alpha}{k}}}\left(\Gamma\left(\frac{\alpha m+\alpha}{k}\right)-\Gamma\left(\frac{\alpha m+\alpha}{k},\lambda\zeta_a(T)\right)\right)\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Not

$T<\infty$ ise [76]'teki Teorem 1.1 den $\Gamma\left(\frac{\alpha m+\alpha}{k},\lambda\zeta_a(T)\right)$ sınırlı olacağından

$$K=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left|\eta k^{-\frac{\alpha}{k}}\right|^m}{\Gamma\left(\frac{\alpha m+\alpha}{k}\right)\left(k\lambda^{m+1}\right)^{\frac{\alpha}{k}}}\left(\Gamma\left(\frac{\alpha m+\alpha}{k}\right)-\Gamma\left(\frac{\alpha m+\alpha}{k},\lambda\zeta_a(T)\right)\right)$$

sabiti için Eş. 4.55 kesirli diferensiyel denklemi Hyers-Ulam kararlıdır. Ancak $T=\infty$ ise Eş. 4.55 kesirli diferensiyel denklemi Hyers-Ulam kararlı değildir.

Not

${}^{TH}D_{k,a+}^{\alpha,\nu,\lambda;\psi}$ kesirli türevinde $k=1$, $\lambda=0$ ve $\nu=0$ alındığında $D_{a+}^{\alpha;\psi}$ elde edileceğinden Teorem 4.3.6'da elde edilen sonuçlar, [75] Teorem 3.10'daki sonuçları içerir.

Örnek

Aşağıdaki başlangıç değer problemini ele alalım:

$${}^{TH}D_{k,a+}^{\frac{1}{2},\nu,\lambda;\psi}y(t)+7y(t)=f(t),\ \varphi_{\psi}^{n}\left(I_{k,a+}^{(1-\nu)\left(k-\frac{1}{2}\right);\psi}y\right)(a)=0. \tag{4.81}$$

Burada $\lambda=-7$, $\alpha=\frac{1}{2}$ ve $f(t)=\frac{\Gamma_k(4)}{\Gamma_k\left(\frac{7}{2}\right)}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{7}{2k}-1}e^{-\lambda\zeta_a(t)}+7\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{4}{k}-1}e^{-\lambda\zeta_a(t)}+\frac{1}{20}$ dır. $\frac{1}{20}<\varepsilon\leq 1$ ve $y_1(t)=e^{-\lambda\zeta_a(t)}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{4}{k}-1}$ için Eş. 4.69'da $\beta=4$ alınırsa

$$\begin{aligned}\left|{}^{TH}D_{k,a+}^{\frac{1}{2},\nu,\lambda;\psi}y_1(t)+7y_1(t)-f(t)\right| &= \left|\frac{\Gamma_k(4)}{\Gamma_k\left(\frac{7}{2}\right)}e^{-\lambda\zeta_a(t)}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{7}{2k}-1}+7e^{-\lambda\zeta_a(t)}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{4}{k}-1}\right.\\ &\quad\left.-\frac{\Gamma_k(4)}{\Gamma_k\left(\frac{7}{2}\right)}e^{-\lambda\zeta_a(t)}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{7}{2k}-1}-7e^{-\lambda\zeta_a(t)}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{4}{k}-1}-\frac{1}{20}\right|\\ &= \left|\frac{1}{20}\right|<\varepsilon\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, $y_1(t)$ fonksiyonunun başlangıç değeri $\varphi_{\psi}^{n}\left(I_{k,a+}^{(1-\nu)\left(k-\frac{1}{2}\right);\psi}y_1\right)(a)=0$'dır. $\alpha=\frac{1}{2}$ olduğundan $n=1$ ve $c_0=0$ elde edilir. Bu değerler, Eş. 3.9 ve $f(t)=\frac{\Gamma_k(4)}{\Gamma_k\left(\frac{7}{2}\right)}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{7}{2k}-1}e^{-\lambda\zeta_a(t)}+7\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{4}{k}-1}e^{-\lambda\zeta_a(t)}+\frac{1}{20}$

Eş. 4.78'de kullanılırsa

$$\begin{aligned}
y_e(t) &= \frac{1}{k^{\frac{1}{2k}}}\left(\frac{\Gamma_k(4)}{\Gamma_k\left(\frac{7}{2}\right)}e^{-\lambda\zeta_a(t)}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{7}{2k}-1}+7e^{-\lambda\zeta_a(t)}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{4}{k}-1}+\frac{1}{20}\right) \\
&\quad *_\psi\left(e^{-\lambda\zeta_a(t)}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{1}{2k}-1}E_{\frac{1}{2k},\frac{1}{2k}}\left((-7)k^{-\frac{1}{2k}}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{1}{2k}}\right)\right) \\
&= \frac{e^{-\lambda\zeta_a(t)}\Gamma_k(4)}{\Gamma_k\left(\frac{7}{2}\right)k^{\frac{1}{2k}}}\int_a^t\left(\zeta_a(u)\right)^{\frac{7}{2k}-1}\left(\zeta_u(t)\right)^{\frac{1}{2k}-1}E_{\frac{1}{2k},\frac{1}{2k}}\left((-7)k^{-\frac{1}{2k}}\left(\zeta_u(t)\right)^{\frac{1}{2k}}\right)\psi'(u)\,du \\
&+ \frac{7e^{-\lambda\zeta_a(t)}}{k^{\frac{1}{2k}}}\int_a^t\left(\zeta_a(u)\right)^{\frac{4}{k}-1}\left(\zeta_u(t)\right)^{\frac{1}{2k}-1}E_{\frac{1}{2k},\frac{1}{2k}}\left((-7)k^{-\frac{1}{2k}}\left(\zeta_u(t)\right)^{\frac{1}{2k}}\right)\psi'(u)\,du \\
&+ \frac{1}{20k^{\frac{1}{2k}}}\int_a^t e^{-\lambda\zeta_u(t)}\left(\zeta_u(t)\right)^{\frac{1}{2k}-1}E_{\frac{1}{2k},\frac{1}{2k}}\left((-7)k^{-\frac{1}{2k}}\left(\zeta_u(t)\right)^{\frac{1}{2k}}\right)\psi'(u)\,du
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte birinci ve ikinci integralde $u=\psi^{-1}\left(\psi(t)-\xi\left(\zeta_a(t)\right)\right)$ değişken değiştirmesi yapılır, üçüncü integralde Eş. 4.57 kullanılırsa

$$y_e(t) = e^{-\lambda\zeta_a(t)}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{4}{k}-1}+\frac{1}{20k^{\frac{1}{2k}}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(-7k^{-\frac{1}{2k}}\right)^m}{\lambda^{\frac{m+1}{2k}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2k}\right)}\left(\Gamma\left(\frac{m+1}{2k}\right)-\Gamma\left(\frac{m+1}{2k},\lambda\zeta_a(t)\right)\right)$$

elde edilir. $y_1(t)$ ve $y_e(t)$ fonksiyonlarının farkının mutlak değerinden

$$\begin{aligned}
|y_1(t)-y_e(t)| &= \left|e^{-\lambda\zeta_a(t)}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{4}{k}-1}-e^{-\lambda\zeta_a(t)}\left(\zeta_a(t)\right)^{\frac{4}{k}-1}\right. \\
&= \left.-\frac{1}{20k^{\frac{1}{2k}}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(-7k^{-\frac{1}{2k}}\right)^m}{\lambda^{\frac{m+1}{2k}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2k}\right)}\left(\Gamma\left(\frac{m+1}{2k}\right)-\Gamma\left(\frac{m+1}{2k},\lambda\zeta_a(t)\right)\right)\right| \\
&= \frac{1}{20k^{\frac{1}{2k}}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left|-7k^{-\frac{1}{2k}}\right|^m}{\lambda^{\frac{m+1}{2k}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2k}\right)}\left(\Gamma\left(\frac{m+1}{2k}\right)-\Gamma\left(\frac{m+1}{2k},\lambda\zeta_a(t)\right)\right) \\
&< \frac{\varepsilon}{k^{\frac{1}{2k}}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left|-7k^{-\frac{1}{2k}}\right|^m}{\lambda^{\frac{m+1}{2k}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2k}\right)}\left(\Gamma\left(\frac{m+1}{2k}\right)-\Gamma\left(\frac{m+1}{2k},\lambda\zeta_a(t)\right)\right)
\end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{k^{\frac{1}{2k}}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left|-7k^{-\frac{1}{2k}}\right|^m}{\lambda^{\frac{m+1}{2k}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2k}\right)} \left(\Gamma\left(\frac{m+1}{2k}\right) - \Gamma\left(\frac{m+1}{2k}, \lambda\zeta_a(T)\right)\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla, Eş. 4.81, $\frac{1}{20} < \varepsilon \leq 1$ ve $K = \frac{1}{k^{\frac{1}{2k}}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left|-7k^{-\frac{1}{2k}}\right|^m}{\lambda^{\frac{m+1}{2k}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2k}\right)} \left(\Gamma\left(\frac{m+1}{2k}\right) - \Gamma\left(\frac{m+1}{2k}, \lambda\zeta_a(T)\right)\right)$ için Teorem 4.3.6'nın koşullarını sağladığından Hyers–Ulam kararlıdır.

Not

Verilen örnekteki ${}^{TH}D_{k,a+}^{\alpha,\nu,\lambda;\psi}$ kesirli türevinde $k=1$, $\lambda=0$ ve $\nu=0$ alındığında $D_{a+}^{\alpha;\psi}$ kesirli türevi elde edileceğinden [75] deki Örnek 3.11'in sonuçlarına indirgenir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, (k,ψ)-GLD yardımıyla, ψ-RL kesirli diferensiyel denklemlerinin, (k,ψ)-Hilfer kesirli diferensiyel denklemlerinin ve tempered (k,ψ)-Hilfer kesirli diferensiyel denklemlerinin Hyers-Ulam tipi kararlılığı incelenmiştir. Literatürde yer alan klasik ve genelleştirilmiş kesirli türev ve integral operatörleri üzerine kurulu yöntemler genişletilerek, GKDD'lerin kararlılık analizleri yapılmıştır.

Çalışmanın ikinci bölümünde, bu çalışma için kullanılacak literatürdeki tanımlar, lemmalar, teoremler, kesirli türev ve integral operatörleri verilmiştir. Çalışmanın üçüncü bölümünde, (k,ψ)-GLD kullanılarak geliştirilen lemmalar aracılığıyla, kararlılık analizlerinde temel alınacak yapılar ortaya konmuş; dördüncü bölümde ise bu lemmalardan yararlanılarak, söz konusu kesirli diferensiyel denklemlerin Hyers-Ulam tipi kararlılığına ilişkin teoremler ispatlanmış, analitik çözümler sunulmuş ve ilgili örneklerle sonuçlar desteklenmiştir. Ayrıca, kesirli türev operatörlerinde yer alan λ, ν ve k gibi parametreler ile farklı $\psi(t)$ fonksiyonları seçilerek elde edilen sonuçların, literatürdeki birçok çalışmayı kapsadığı ve bu çalışmaların daha genel bir çerçeve altında yeniden üretilebildiği gösterilmiştir. Elde edilen bu sonuçlar, yalnızca mevcut literatürdeki bazı özel durumları kapsamakla kalmayıp, aynı zamanda klasik yöntemlerin ötesine geçen daha kapsayıcı ve esnek bir analiz yöntemi geliştirildiğini göstermiştir.

Sonuç olarak, bu tez kapsamında sunulan yaklaşım, kesirli hesap kuramına dayalı diferensiyel denklemlerin çözüm ve kararlılık analizlerine yönelik güçlü bir teorik altyapı ortaya koymaktadır. Bu yönüyle çalışma, hem kuramsal hem de uygulamalı matematik alanlarına katkı sağlayabilecek nitelikte önemli bir adım olarak değerlendirilmektedir.

Bu çalışmanın bulgularından hareketle, ilerleyen araştırmalarda farklı kesirli türev operatörlerini içeren GKDD ve KDD'lerin bu tezde incelenen Hyers-Ulam tipi kararlılıklarının yanı sıra, başka tür Hyers-Ulam tipi kararlılıklarının da (örneğin Hyres-Ulam-Rassias veya Hyres-Ulam-Rassias-Garvuta kararlılığı) (k,ψ)-GLD yaklaşımıyla analiz edilmesi mümkündür. Ayrıca, bu tezde kullanılan (k,ψ)-GLD'nün dışında literatürde tanıtılmış Laplace tipi operatörlerin bir genellemesi olacak farklı

genelleştirilmiş Laplace dönüşümleri tanıtılarak gerçekleştirilecek analizler yoluyla, mevcut yöntemin avantaj ve dezavantajları karşılaştırmalı olarak değerlendirilebilir.

KAYNAKLAR

1. Leibniz, G. W. (1695). Démonstration de ce que l'on a avancé dans une précédente dissertation, touchant le nombre des fractions, et la manière de faire les différentielles des différentielles. *Histoire de l'Académie Royale des Sciencest*, 3, 226-227.

2. Liouville, J. (1832). Mémoire sur le calcul des différentielles à indices quelconques. *Journal de l'École Polytechnique*, 13, 71-162.

3. Euler, L. (1748). *Introductio in analysin infinitorum*. Marcum-Michaelem Bousquet.

4. Oldham, K. B. and Spanier, J. (1974). *The Fractional Calculus: Theory and Applications.* New York and Londra : Academic Baskı.

5. Fourier, J. (1822). *Théorie analytique de la chaleur*. Paris:Chez Firmin Didot, père et fils.

6. Miller, K. S. and Ross, B. (1993). *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. New York:Wiley.

7. Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations*. California:Academic Press.

8. Kilbas, A.A., Srivastava, H.M. and Trujillo, J.J. (2006). *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. North-Holland, Mathematics Studies, 204, Elsevier Science B.V., Amsterdam.

9. Samko, S. G., Kilbas, A. A. ve Marichev, O. I. (1993). *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers.

10. Dorrego, G.A. (2016). Generalized Riemann-Liouville Fractional Operators Associated with a Generalization of the Prabhakar Integral Operator. *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 2(2), 131-140, doi:10.18576/pfda/020206.

11. Atangana, A. and Baleanu, D. (2016). New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model. *Thermal Science*, 20(2), 763-769.

12. Atangana, A. (2018). *Fractional Operators with Constant and Variable Order with Application to Geo-hydrology*. Academic Press.

13. Oliveira, E. C. and Sousa, J. V. C. (2018). On the ψ-Hilfer fractional derivative. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 60, 72-91, doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.01.005.

14. Kucche, K.D. and Mali, A.D. (2021). On the nonlinear (k,ψ)-Hilfer fractional differential equations. *Chaos, Solutions and Fractals* , 152, 111335, doi.org/10.1016/j.chaos.2021.111335.

15. Kucche, K.D. and Mali, A.D. ve Sousa, J. V. C. (2019). On the nonlinear $\psi-$Hilfer

fractional differential equations. *Computational and Applied Mathematics*, 38(2), 73 doi.org/10.1007/s40314-019-0833-5.

16. Mali, A.D. and Kucche, K.D. (2020). Nonlocal boundary value problem for generalized Hilfer implicit fractional diferential equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 43(15), 8608–8631, doi.org/10.1002/mma.6521.

17. Afshari, H. and Karapınar, E. (2020) A discussion on the existence of positive solutions of the boundary value problems via ψ-Hilfer fractional derivative on b-metric spaces. *Advances in Difference Equations*, 616, doi:10.1186/s13662-020-03076-z.

18. Diaz, R. and Pariguan, E. (2007) On hypergeometric functions and k-Pochhammer symbol. *Divulgaciones Matematicas*, 15(2), 179-192, 2007.

19. Mubeen, S. and Habibullah, G.M. (2012). k-Fractional Integrals and Application. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 7(2), 89 - 94.

20. Romero, L.G., Luque, L.L., Dorrego, G.A. and Cerutti, R.A. (2013) On the $k-$Riemann-Liouville fractional derivative. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 8(1), 41-51. doi.org/10.12988/ijcms.2013.13004.

21. Dorrego, G.A. (2015). An alternative definition for the $k-$ Riemann-Liouville fractional derivative. *Applied Mathematical Sciences*, 9(10), 481-491, doi.org/10.12988/ams.2015.411893.

22. Sousa, J. V. C. and Oliveira, E. C. (2019). A generalized fractional derivative with Mittag-Leffler kernel applied to the fractional diffusion equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 69, 224-237. [DOI: 10.1016/j.cnsns.2018.09.012].

23. Farid, G. (2017) A Javed and A ur Rehman, On Hadamard inequalities for n-times di¤erentiable functions which are relative convex via Caputo k- fractional derivatines. *Nonlinear Analysis Forum*, 22 (2), 17-28.

24. Farid, G., Latif, N., Anwar, M., Imran, A., Ozair, M. and Nawaz, M. (2019). On applications of Caputo k-fractional derivatives *Advances in Difference Equations*, 439, doi:10.1186/s13662-019-2369-9.

25. Kucche, K.D., and Kharade, J.P. (2020) Global Existence and Ulam-Hyers Stability of ψ-Hilfer Fractional Differential Equation. *Kyungpook Mathematical Journal*, 60, 647-671. doi.org/10.5666/KMJ.2020.60.3.647.

26. Sitho, S., Ntouyas, S.K., Samadi, A., and Tariboon, J. (2021). Boundary value problems for ψ-Hilfer type sequential fractional differential equations and inclusions with integral multi-point boundary conditions. *Mathematics*, 9, 1001, doi.org/10.3390/math9091001.

27. Abu-Shady, M. and Kaabar, M.K.A. (2021). A Generalized definition of the fractional

derivative with applications. *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 9444803, 9, doi: 10.1155/2021/9444803.

28. Panchal, S.K., Dole, P.V. and Khandagale, A.D. (2017) k-Hilfer-Prabhakar Fractional Derivatives and its Applications. *Indian Journal of Mathematics*, 59(3), 367-383.

29. Azam, M.K., Farid, G. and Rehman, M.A. (2017). Study of generalized type k-fractional derivatives. *Advances in Difference Equations*, 249, doi: 10.1186/s13662-017-1311-2.

30. Iyiola, O.S. (2014). Solving k-Fractional Hilfer Differential Equations via Combined Fractional Integral Transform Methods. *British Journal of Mathematics and Computer Science*, 4(10), 1427-1436, doi:10.9734/BJMCS/2014/9444.

31. Iqbal, S., Mubeen, S. and Tomar, M. (2018). On Hadamard k-fractional integrals. *Journal of Fractional Calculus and Applications*, 9(2), 266-278.

32. Rahman, G., Mubeen, S. and Nisar, K.S. (2020) On generalized k-fractional derivative operator. *AIMS Mathematics*, 5(3), 1936-1945, doi: 10.3934/math.2020129.

33. Oliveira, E. C. and Sousa, J. V. C. (2020). A new approach for fractional differential equations using $(k,\psi)-$Hilfer Form. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 43(16), 9391-9408. [DOI: 10.1002/mma.6407]

34. Salim, A., Lazreg, J.E. and Benchohra, M. (2024). On tempered (k,ψ)-Hilfer fractional boundary value problems. *Pan-American Journal of Mathematics*, 3, 1. ISSN: 2832-4293. https://doi.org/10.28919/cpr-pajm/3-1.

35. Hyers, D. H. (1941). On the Stability of the Linear Functional Equation. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 27(4), 222–224.

36. Rassias, T. M. (1978). On the stability of the linear mapping in Banach spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 72(2), 297–300.

37. Jung, S. M. (2011). *Hyers-Ulam-Rassias Stability of Functional Equations in Nonlinear Analysis.*. Springer

38. Sousaa, J. V. C., Kucche, K. D. and Oliveira E. C. (2019). Stability of $\psi-$-Hilfer impulsive fractional differential equations. *Applied Mathematics Letters*, 88, 73–80.

39. Abdo, M. S., Thabet, S. T. M. and Ahmad, B. (2020). The existence and Ulam–Hyers stability results for $\psi-$-Hilfer fractional integrodifferential equations. *Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications*, 11(4), 1757–1780. https://doi.org/10.1007/s11868-020-00355-x

40. Zeeshan, A., Akbar, Z. and Kamal, S. (2018). Ulam stability to a toppled systems of nonlinear implicit fractional order boundary value problem. *Boundary Value Problems*, 175. https://doi.org/10.1186/s13661-018-1096-6.

41. Sousa, J. V. C. and Oliveira, E. C. (2018). Ulam–Hyers stability of a nonlinear fractional Volterra integro-differential equation. *Applied Mathematics Letters*, 88, 73–80. https://doi.org/10.1016/j.aml.2018.01.016

42. Oliveira, E. C. and Sousa, J. V. C. (2018) . Ulam–Hyers–Rassias Stability for a Class of Fractional Integro-Differential Equations. *Computational and Applied Mathematics*, 37(1), 1–14. https://doi.org/10.1007/s40314-018-0587-5.

43. Başçı, Y., Mısır, A. ve Öğrekçi, S. (2020). On the Stability Problem of Differential Equations in the Sense of Ulam. *Results in Mathematics*, 75(6), 1–13. https://doi.org/10.1007/s00025-019-1132-6.

44. Abbas, S., Benchohra, M. and Hamani, S. (2012). *Fractional Order Differential Equations and Inclusions : Analysis and Control*. Springer.

45. Rezaei, H., Jung, S. and Rassias, T.M. (2013). Laplace transform and Hyers–Ulam stability of linear differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 403, 244–251.

46. Alqifiary, Q. H. and Jung, S. M. (2014). Laplace Transform and Generalized Hyers-Ulam Stability of Linear Differential Equations. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2014(80). 1–11. ISSN: 1072-6691.

47. Wang, C. and Xu, T.Z. (2015). Hyers-Ulam Stability of Fractional Linear Fractional Linear Differential Equations Involving Caputo Fractional Derivatives. *Applications of Mathematics*, 60(4), 383–393. https://doi.org/10.1007/s10492-015-0102-x.

48. Wang, C.and Xu, T.Z. (2015). Hyers–Ulam stability of a class of fractional linear differential equations. *Kodai Mathematical Journal*, 38(3), 510–520. https://doi.org/10.2996/kmj/1446210592.

49. Wang, J. R. and Li, X. (2016) A Uniform Method to Ulam–Hyers Stability for Some Linear Fractional Equations. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 13, 625-635.

50. Shen, Y. and Chen, W. (2017). Laplace Transform Method for the Ulam Stability of Linear Fractional Differential Equations with Constant Coefficients. . *Mediterranean Journal of Mathematics*, 14(1), 25. DOI 10.1007/s00009-016-0835-0 1660-5446/17/010001-17.

51. Liu, K., Feckan, M., O'Regan, D. and Wang, J.R. (2019). Hyers–Ulam Stability and Existence of Solutions for Differential Equations with Caputo–Fabrizio Fractional Derivative. *Mathematics*, 7(4), 333. https://doi.org/10.3390/math7040333.

52. Başcı, Y., Öğrekçi, S. ve Mısır, A. (2019) On Hyers–Ulam Stability for Fractional Differential Equations Including the New Caputo–Fabrizio Fractional Derivative. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 16(1), 131 https://doi.org/10.1007/s00009-019-1407-x.

53. Sayyari, Y., Dehghanian, M. and Park, C. (2023). Some stabilities of system of differential equations using Laplace transform. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 69, 3113-3129. doi.org/10.1007/s12190-023-01872-w.

54. Abdeljawad, T. (2013). On conformable fractional calculus. *Journal of computational and Applied Mathematics*, 279, 57–66.

55. Jarad, F., Abdeljawad, T. and Baleanu, D. (2017). Caputo-type modification of the Atangana–Baleanu fractional derivative and applications. *Advances in Difference Equations*, 2017(1), 247. [DOI: 10.1186/s13662-017-1305-6].

56. Jarad, F. and Abdeljawad, T. A. (2018). Modified Laplace transform for certain generalized fractional operators. *Results in Nonlinear Analysis*, 1(2), 88–98.

57. Liu, K., Feckan M. and Wang, J.R. (2019) Hyers–Ulam Stability and Existence of Solutions to the Generalized Liouville–Caputo Fractional Differential Equations. *Mathematics*, 7(4), 333. https://doi.org/10.3390/math7040333.

58. Wang, C. (2021). Hyers–Ulam–Rassias Stability of the Generalized Fractional Systems and the $\rho-$Laplace Transform Method. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 18(5), 1-19.

59. Zada, A., Shaleena, S. and Ahmad, M. (2022). Analysis of Solutions of the Integro-Differential Equations with Generalized Liouville–Caputo Fractional Derivative by ρ-Laplace Transform. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 8, 116. doi: 10.1007/s40819-022-01275-8.

60. Başcı, Y., Mısır, A. ve Öğrekçi, S. (2023). Generalized derivatives and Laplace transform in (k,ψ)-Hilfer Form *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 46(9), 10400-10420. doi: 10.1002/mma.9129.

61. Huang, J. and Li, Y. (2016). Hyers-Ulam stability of delay differential equations of first order. *Mathematische Nachrichten*, 289(1), 60-66. doi:10.1002/mana.201400298.

62. Tariboon, J., Samadi, A. and Ntouyas, S.K. (2022). Multi-point boundary value problems for (k,ϕ)-Hilfer fractional differential equations and inclusions. *Axioms*, 11(3), 110. doi.org/10.3390/axioms11030110.

63. Sousa, J. V. C. and Oliveira, E. C. (2018). On the Ulam–Hyers–Rassias stability for nonlinear fractional differential equations using the $\psi-$-Hilfer operator. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 20, 96-116. doi.org/10.1007/s11784-018-0587-5.

64. Sousa, J. V. C. and Oliveira, E. C. (2018). On the ψ-Hilfer fractional derivative *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 60, 72-91.

65. Liu, K., Wang, J.R. and O.Regan, D. (2019). Ulam-Hyers-Mittag-Leffler stability for ψ-Hilfer fractional-order delay differential equations. *Advances in Difference Equations*, 2019(50), 50-70. doi.org/10.1186/s13662-019-1997-4.

66. Jarad, F., Abdeljawad, T. (2020). Generalized fractional derivatives and Laplace transform. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S.*, 13(3), 709–722. doi:10.3934/dcdss.2020039.

67. Abramowitz, M., and Stegun, I. A. (Eds.). (1964). *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, (Vol. 55). National Bureau of Standards.

68. Prym, F. E. (1877). Zur theorie der gamma function. *J. für die Reine und Angewandte Mathematik*, 82, 165-172.

69. Tricomi, F.G. (1950). Sulla funzione gamma incomplete. *Annali di Matematica* , 31(1), 263-279. https://doi.org/10.1007/BF02412274.

70. Sharma, R., Singh, J., Kumar, D., and Singh, Y. (2022). Certain Unified Integrals Associated with Product of the General Class of Polynomials and Incomplete I-Functions. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, (8)7.

71. Prabhakar, T. R. A. (1971). Singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel. *Yokohama Mathematical Journal*, 19, 7-15.

72. Salim, A., Lazreg, J.E. and Benchohra, M. (2024). On Tempered(k,ψ) (k,ψ) -Hilfer Fractional Boundary Value Problems *American Journal of Mathematics*, 3, 1. doi.org/10.28919/cpr-pajm/3-1.

73. Laplace, P.S. (1812). *Théorie analytique des probabilités*. Paris, Courcier.

74. Mısır, A.(2020). *Teori ve Uygulamalı Diferansiyel Denklemler*. Gazi Kitapevi.

75. Mısır, A., Cengizhan E. ve Başcı, Y. (2024). Ulam type stability of ψ-Riemann-Liouville fractional differential equations using (k,ψ)-generalized Laplace transform. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 17(2), 100–114. doi: 10.22436/jnsa.017.02.03.

76. Pinelis, I. (2020). Exact Lower and Upper bounds on the incomplete gamma function. *Mathematical Inequalities and Applications*, 23(4), 1261–1278. https://doi.org/10.7153/MIA-2020-23-95.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler



Soyadı, Adı	:	CENGİZHAN, Emine
Uyruğu	:	T.C.
Doğum tarihi ve yeri	:	09.10.1988, Ankara
Medeni hâli	:	Bekar
e-mail	:	matemine0608@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Doktora	Gazi Üniversitesi, Matematik Ana Bilim Dalı	Devam Ediyor
Yüksek Lisans	Gazi Üniversitesi, Matematik Ana Bilim Dalı	2019
Lisans	İstanbul Üniversitesi, Matematik Bölümü	2010

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2013 – 2019	MEB	Matematik Öğretmeni
2019 – Hâlen	MEB, ÖLÇME, DEĞERLENDİRME VE SINAV HİZMETLERİ GENEL MÜDÜRLÜĞÜ, SORU OLUŞTURMA VE GELİŞTİRME DAİRE BAŞKANLIĞI	Soru Yazarı

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Yılmaz, F. N., Cengizhan, E. (2018). The Stochastic Heat Equation With Ito-Taylor Expansion, *International Journal of Mathematical And Computational Science*, 1, ISSN : 2475-2282.

2. Mısır, A., Cengizhan, E., Başcı, Y., (2024). Ulam type stability of -Riemann-Liouville fractional differential equations using (k,ψ)-generalized Laplace transform . *Journal of Non Linear Sciences and Applications*, 14(2024), 100-114.

Ulusal Bildiriler

1. Cengizhan, E. (2018, 27-28 Haziran). *Stokastik Isı Denklemi ve Itô İntegralleri.* 13. Ankara Matematik Günleri, Ankara, Türkiye.

Hobiler

Seyahat etmek, kitap okumak, tiyatro ve sinemaya gitmek, doğa yürüyüşleri yapmak, müzik dinlemek ve dans etmek.



Gazili olmak ayrıcalıktır