
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

q–RİORDAN GÖSTERİMLER

Fatma YEŞİL

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KASIM 2015

Fatma YEŞİL tarafından hazırlanan "q −Riordan Gösterimler" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Naim TUĞLU

Matematik, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Başkan : Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU

Matematik, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye : Prof. Dr. Dursun TAŞCI

Matematik, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye : Prof. Dr. Adnan TERCAN

Matematik, Hacettepe Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye : Prof. Dr. Cengiz ÇİNAR

Matematik Eğitimi, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Tez Savunma Tarihi: 24/11/2015

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Metin GÜRÜ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalısmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Fatma YEŞİL

07/12/2015

q–RİORDAN GÖSTERİMLER

(Doktora Tezi)

Fatma YEŞİL

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KASIM 2015

ÖZET

Bu çalışmada var olan Riordan kavramı genelleştirilerek Riordan kavramının $q-$benzeri elde edilmiştir. Bu amaçtan hareketle ilk olarak $*_q$ ve $*_{1/q}$ işlemleri tanımlanmıştır. Bu işlemler yardımıyla fonksiyonlar için yeni kuvvetler elde edilmiştir. Bu kuvvetler ve fonksiyonların bileşkesinin $q-$benzeri kullanılarak yeni Riordan matrisler tanımlanmıştır. Bu matrisler kullanılarak ise Riordan çiftinin temel teoreminin $q-$benzeri elde edilmiştir. Daha sonra verilen herhangi iki $q-$Riordan matrisinin çarpımının ne olacağı incelenmiştir. Çalışmanın son kısmında ise $q-$Pascal matrisinin ve tersinin bu kurala uyduğu gösterilmiştir. Tez genelinde elde edilen tüm $q-$kavramların $q \to 1^-$ iken bilinen kavramlara dönüştüğü gözlemlenmiştir.

Bilim Kodu : 204.1.025
Anahtar Kelimeler : Riordan grup, $q-$Pascal matris, $q-$binomiyel katsayılar
Sayfa Adedi : 54
Danışman : Doç. Dr. Naim TUĞLU

q–RIORDAN REPRESENTATIONS

(Ph. D. Thesis)

Fatma YEŞİL

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

NOVEMBER 2015

ABSTRACT

In this study, generalizing usual Riordan concept, $q-$analogue of Riordan array is obtained. Firstly in line with this target, operations of $*_q$ and $*_{1/q}$ are defined. Using these operations, new powers for functions are delivered. Considering these power and $q-$analogue of composition, new matrices are defined. Using these matrices, $q-$analogue of Fundamental Theorem of Riordan Array is obtained. Then we analyse that what kind of matrix will be after the matrix product of $q-$Riordan matrices. In the last part of study, it is showed that $q-$Pascal matrix and its inverse matrix abided by this rule. Through of the thesis, it is observed that when $q \to 1^{-}$, all of $q-$concepts turn to usual concepts.

Science Code : 204.1.025
Key Words : Riordan group, $q-$Pascal matrix, $q-$binomial coefficients
Page Number : 54
Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Naim TUĞLU

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli katkılarıyla beni yönlendiren ve her safhasında bilgisine başvurduğum Sayın Hocam Doç. Dr. Naim TUĞLU'ya, görüş ve önerileri ile beni yönlendiren Sayın Prof. Dr. Dursun TAŞCI'ya teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca kıymetli tecrübelerinden faydalandığım Amasya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi'ndeki bütün hocalarıma şükranlarımı sunarım. Eğitimim boyunca bana her türlü desteği veren TÜBİTAK kurumuna teşekkür ederim. Manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme ve daima yanımda olan Seyit BARAN'a sevgilerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

ÇİZELGELERİN LİSTESİ viii

SİMGELER VE KISALTMALAR ix

1. GİRİŞ 1

2. ÖN BİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR 5

2.1. q–Binomiyel Katsayılar 5

2.2. Bazı Özel Matrisler 10

2.3. Riordan Kavramı 11

2.4. q–Bileşke ve q–Lagrange İnversion 16

3. RİORDAN GÖSTERİMLERİN q–BENZERİ 19

4. q–RİORDAN GÖSTERİME SAHİP MATRİSLERİN YAPISI . . 31

5. SONUÇ VE ÖNERİLER 47

KAYNAKLAR 49

ÖZGEÇMİŞ 53

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

Çizelge 4.1. $q-$Riordan matrislerin çarpımı 37

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler	Açıklamalar
$[n]_q$	n. $q-$tamsayısı
$[n]_q!$	$n!$ in $q-$benzeri
$\binom{n}{k}_q$	$q-$binomiyel katsayılar
$D_q f(x)$	$f(x)$ fonksiyonunun $q-$türevi
$(x+a)_q^n$	$(x+a)^n$ polinomunun $q-$benzeri
P_n	$n \times n$ tipinden Pascal matrisi
$\mathcal{P}_{n,q}$	$n \times n$ tipinden $q-$Pascal matrisi
(g, f)	j. sütununun üreteç fonksiyonu $g(x)f(x)^j$ olan matris
$(g, f)_q$	j. sütununun üreteç fonksiyonu $g(x) *_q f(x)^{\overline{[j]}}$ olan matris
$(g, f)_{1/q}$	j. sütununun üreteç fonksiyonu $g(x) *_{1/q} f(x)^{\overline{[j]}}$ olan matris

1. GİRİŞ

Problem Durumu / Konunun Tanımı

$q-$Analiz kavramı eliptik ve hipergeometrik fonksiyonların etkin olduğu çalışma alanında, parçalanış teorisinde ve fark denklemleri teorisinde önemli rol oynamaktadır. Ayrıca $q-$ kalkülüs araştırmacılar için analitik sayılar teorisinde ve teorik fizikte önemli rol oynar. Bilgisayar bilimleri ve parçacık fiziği gibi alanlarda geniş çaplı uygulama alanı vardır. $q-$kalkülüs hesaplamalarda ve $q-$özel fonksiyonların sınıflandırılmasında bir metottur. $q-$kalkülüs sayesinde birçok polinomun $q-$benzerleri ve bazı fonksiyonlar için klasik anlamda bilinen formüllerden daha faydalı yeni formüller elde edilmiştir. $q-$kalkülüs Gamma fonksiyonu ve umbral hesaplama açısından da önem teşkil etmektedir. Özellikle $q \to 1^{-}$ iken elde edilen verilerin bilinen verilere dönüşmesi matematikte var olan çoğu kavramların genelleştirilmesine katkı sağlamıştır. $q-$Analiz'in gelişimi ise Euler'in parçalanış teorisini ilk kez tanıttığı 1740 yılında başlamıştır [35]. $q-$kalkülüsün gelişimi hipergeometrik seriler ve onların birbirleriyle ilişkilerini inceleyen Carl Friedrich Gauss tarafından devam ettirilmiştir. Gauss daha sonra $q-$binomiyel katsayıları tanıtmış ve bu katsayılar için $q-$Analize temel teşkil eden Rothe-von Grüson olarak adlandırılan teoremi ispatlamıştır. Heine ise $q-$hipergeometrik fonksiyonları tanıtmış ve sürekli kesirler aracılığıyla bu fonksiyonlar için dönüşüm formülleri elde etmiştir [29]. Ayrıca Agarwal ve Srivastava $q-$üreteç fonksiyonları için birçok formüller elde etmişlerdir [24, 31, 32].

Riordan kavramı kombinatorik özdeşliklerin elde edilmesinde, kombinatorik problemlerde ortaya çıkan sayı dizilerinin araştırılmasında ve sayılar teorisindeki bazı problemlerin çözülmesinde önemli rol oynamaktadır. Cebir, analiz ve sayılar teorisinde uygulama alanlarına sahiptir. Riordan kavramı Roman [30] tarafından tanımlanan $1-$umbral kalkülüsün formülüze edilmiş halidir. İki çeşit Riordan kavramı mevcuttur. Bunlardan birisi formal Laurent serileri aracılığıyla $(d_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ ($j > i$ için $d_{i,j} = 0$) şeklindeki matrislerin cebirsel özelliklerini incelerken, diğeri formal kuvvet serileri aracılığıyla $(d_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ ($j > i$ için $d_{i,j} = 0$) şeklindeki alt üçgen matrislerin kombinatoriyel özelliklerini inceler. John Riordan kombinatoriyel özelliklerin gelişmesinde güçlü bir etkiye sahip Amerikalı matematikçidir [23]. 1991 yılında Riordan grup kavramı ilk olarak

John Riordan'ın onuruna Shapiro, Getu, Woon ve Woodson tarafından tanıtılmıştır [1]. Ardından Shapiro ve meslektaşları Paul Peart, Wen-Jin Woon, Riordan yapısı ve uygulamaları üzerine çalışmaya devam etmişlerdir. Ayrıca Riordan kavramı Renzo Sprugnoli tarafından cebirsel olarak daha detaylı incelenmeye devam edilmiştir [15, 2]. Hennesy ise tezinde sürekli kesirler aracılığıyla Riordan çiftinin birçok uygulamasına değinmiş ve latisler yardımıyla ortogonal polinomlar için birçok eşitlik ve özellik elde etmiştir [19]. Üreteç kavramı ile Riordan kavramı arasındaki bağıntı kullanılarak birçok teorem, özellik ve çeşitli örnekler elde edilmiştir [22, 21, 17, 20]. Son günlerde ise bu konuya olan ilgi daha da artmıştır. İlki Güney Kore'de olup her iki yılda bir Riordan Kavramı ve İlişkili Konular başlıklı sempozyumlar düzenlenmektedir.

Sonsuz alt üçgen matrisler kombinatorikte ve matris teoride önemli rol oynar. Özellikle Pascal matrisler matris teorinin temel taşıdır. Pascal matrisler binomiyel katsayılar yardımıyla tanımlanan özel matrislerdir. Birçok yazar tarafından Pascal matrisinin özellikleri incelenmiştir [4, 6, 14]. Riordan matrisler ise iki üreteç fonksiyonu yardımıyla tanımlanan sonsuz alt üçgen matrislerdir. Barry Riordan çifti yardımıyla tanımlı özel matrisleri kullanarak Pascal matrisi ve tersi için birçok özellik elde etmiştir [16, 5, 18]. Gaussian katsayılar veya $q-$binomiyel katsayılar olarak adlandırılan katsayılar ise binomiyel katsayıların $q-$benzeridir. Limitsiz kalkülüs olarak adlandırılan $q-$kalkülüs matematiğin bir çok dalında kullanılmaktadır. Özellikle Ernst $q-$kalkülüs için gerekli önbilgilerin ve metotların elde edilmesinde öncülük etmiştir [28, 27]. Pascal matrisine benzer olarak, binomiyel katsayılar yerine $q-$binomiyel katsayılar kullanılarak $q-$ Pascal matrisi tanımlanır. $q-$Pascal matrisinin kombinatoriyel özellikleri Ernst tarafından çalışılmıştır [7].

Tuğlu ve arkadaşları binomiyel katsayılar yerine fibonomiyel katsayılar kullanarak Riordan kavramı ile fibonomiyel kavramını birleştirmişlerdir [9]. Benzer olarak, Riordan kavramı ile $q-$binomiyel katsayıları birleştirerek ise yeni bir çalışma alanı yaratılır. Cheon ve arkadaşları $q-$Riordan matrisin Eulerian üreteç fonksiyonu ve alışılmış işlemler kullanarak temsil edilebilceğini göstermişlerdir ve $q-$Riordan matrislerin kombinatoriyel özelliklerini incelemişlerdir [36, 8].

Araştırmanın Amacı

Yukarıda belirtilen çalışmalar ışığında bu çalışmada öncelikle Riordan kavramının temel teoremi olarak bilinen teoremin iki çeşit $q-$benzeri elde edilmiştir. Daha sonra ise bu teoremler yardımıyla herhangi iki $q-$matrisin çarpımı incelenmiştir. Bu matrislerin çarpımı sonucunda oluşan 4 farklı durum irdelenmiştir.

İkinci bölümde, tez için gerekli olan tanımlara ve önbilgilere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, $*_q, *_{1/q}$ işlemleri tanıtılmış ve bu işlemler yardımıyla herhangi bir fonksiyonun yeni bir kuvveti elde edilmiştir. Bu işlemler yardımıyla elde edilen matrislerin keyfi elemanlarının bulunması için formüller hesaplanmıştır. Riordan kavramı için gerekli olan Riordan kavramının temel teoreminin $q-$benzeri ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde ise, $q-$Riordan gösterime sahip matrislerin çarpımlarının sonucunda nasıl bir matris elde edildi ği gözlemlenmiş ve 4 farklı durum için teoremler elde elde edilmiştir. Ayrıca $q-$Pascal matrisinin ve tersinin bu durumlardan ilkine uyduğu ispatlanmıştır.

Araştırmanın Önemi

Bu çalışma ile bilinen Riordan gösterim kavramı genelleştirilerek yeni bir gösterim elde edilmiştir. Bu gösterim sayesinde $q-$matrislerin Riordan gösterimleri elde edilmiştir. Böylece sonsuz boyutlu alt üçgen $q-$matrislerin tersinin hesaplanabilmesi için yeni bir yöntem geliştirilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamızda ihtiyaç duyacağımız bazı tanım ve kavramlara yer vereceğiz. İlk olarak $q-$binomiyel katsayılar tanımından bahsedelim.

2.1. q–Binomiyel Katsayılar

$n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ ve $q \in (0,1)$ olmak üzere n tamsayısının $q-$benzeri

$$[n]_q = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \dfrac{1-q^n}{1-q}, & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

olarak tanımlanmıştır ve n. $q-$tamsayısı olarak adlandırılır. $q-$tamsayısının tanımından hareketle $n!$'in $q-$benzeri

$$[n]_q! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ [n]_q [n-1]_q \cdots [1]_q, & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

olarak tanımlanmıştır. Gaussian katsayılar veya $q-$binomiyel katsayılar olarak adlandırılan katsayılar $n \geq k \geq 1$ için

$$\binom{n}{k}_q = \frac{[n]_q!}{[n-k]_q! \, [k]_q!}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $\binom{n}{0}_q = 1$ ve $n < k$ için $\binom{n}{k}_q = 0$ olarak tanımlıdır [3].

$q \to 1^-$ iken, $q-$binomiyel katsayılar binomiyel katsayılara dönüşür. Yani;

$$\binom{n}{k}_q \to \binom{n}{k}.$$

q-binomiyel katsayıları için $q-$Pascal kuralı

$$\binom{n}{j}_q = \binom{n-1}{j-1}_q + q^j \binom{n}{j-1}_q$$

$$\binom{n}{j}_q = q^{n-j}\binom{n-1}{j-1}_q + \binom{n}{j-1}_q$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca bu katsayılar

$$\binom{n}{j}_q = \binom{n}{n-j}_q \tag{2.1}$$

şeklindeki simetri özelliğini de sağlar. $q-$binomiyel katsayıları

$$\sum_{j\geq k}\binom{n}{j}_q\binom{j}{k}_q q^{\binom{j-k}{2}}(-1)^{j-k} = \delta_{n,k} \tag{2.2}$$

şeklindeki inversiyon formülünü sağlar ve

$$\binom{n+1}{k+1}_q = \sum_{j=k}^{n} q^{j-k}\binom{j}{k}_q \tag{2.3}$$

dir.

2.1 Tanım

$f(x)$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere

$$D_q f(x) = \frac{f(qx_0) - f(x_0)}{(q-1)x_0}$$

ifadesine $f(x)$ in $q-$türevi denir. Ayrıca

$$\lim_{q\to 1^-} D_q f(x) = \frac{df}{dx} = f'(x)$$

dir.

Örneğin $n \in \mathbb{Z}^+$ için $f(x) = x^n$ fonksiyonunun $q-$türevi

$$D_q f(x) = \frac{(qx)^n - x^n}{(q-1)x} = \frac{(q^n-1)x^n}{(q-1)x} = [n]_q x^{n-1}$$

şeklinde hesaplanır.

2.2 Tanım

$(x+a)^n$ polinomunun $q-$benzeri ise aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$(x+a)_q^n = \begin{cases} 1, & n=0 \\ (x+a)(x+qa)\cdots(x+q^{n-1}a), & n \geq 1. \end{cases} \tag{2.4}$$

Ayrıca herhangi m ve n tamsayıları için

$$(x+a)_q^{m+n} = (x+a)_q^m (x+q^m a)_q^n$$

eşitliği doğrudur. $n \geq 1$ için

$$D_q (x+a)_q^n = [n]_q (x+a)_q^{n-1}$$

önermesi geçerlidir. $f(x)$ mertebesi n olan keyfi bir polinom ve c herhangi bir sayı olmak üzere

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \left(D_q^j f\right)(c) \frac{(x-c)_q^j}{[j]_q!}$$

ifadesi $f(x)$'in $q-$Taylor gösterilişi olarak tanımlanmıştır.

Örnek

n negatif olmayan bir tamsayı ve a herhangi bir sayı olmak üzere $f(x) = (x+a)_q^n$ nin $x=0$ civarındaki $q-$Taylor formülünü bulalım.

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \left(D_q^j f\right)(c) \frac{(x-c)_q^j}{[j]_q!}$$

olup $j \leq n$ için

$$\begin{aligned} D_q f(x) &= [n]_q (x+a)_q^{n-1} \\ D_q^2 f(x) &= [n]_q [n-1]_q (x+a)_q^{n-2} \\ &\vdots \\ D_q^j f(x) &= [n]_q [n-1]_q \cdots [n-j+1]_q (x+a)_q^{n-j} \end{aligned}$$

dir. Eş. 2.4 ifadesinde $x = 0$ alınırsa

$$a_q^n = a(qa) \cdots \left(q^{n-1}a\right) = q^{\binom{n}{2}} a^n$$

elde edilir. Buradan

$$\left(D_q^j f\right)(0) = [n]_q [n-1]_q \cdots [n-j+1]_q \, q^{\binom{n-j}{2}} a^{n-j}$$

dir. O halde $(x+a)_q^n$ nin $q-$Taylor formülü

$$\begin{aligned} (x+a)_q^n &= \sum_{j=0}^{n} [n]_q [n-1]_q \cdots [n-j+1]_q \, q^{\binom{n-j}{2}} a^{n-j} \frac{x^j}{[j]_q!} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}_q q^{\binom{n-j}{2}} a^{n-j} x^j \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu formülde j yerine $n-j$ alınıp Eş. 2.1 kullanılırsa

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}_q q^{\binom{j}{2}} a^j x^{n-j}$$

elde edilir. Bu formüle Gauss Binom Formülü adı verilir [33].

Örnek

$f(x) = \dfrac{1}{(1-x)_q^n}$ fonksiyonunun $q-$Taylor formülünü bulalım.

Bu seri $x = 0$ civarında yakınsak olduğu için $x = 0$ noktası civarında seriye açılırsa

$$\begin{aligned} D_q f(x) &= \frac{[n]_q}{(1-x)_q^{n+1}} \\ &\vdots \\ D_q^j f(x) &= \frac{[n]_q [n+1]_q \cdots [n+j-1]_q}{(1-x)_q^{n+j}} \end{aligned}$$

elde edilir. $x = 0$ için

$$\left(D_q^j f\right)(0) = [n]_q [n+1]_q \cdots [n+j-1]_q$$

dir. O halde

$$\frac{1}{(1-x)_q^n} = \sum_{j=0}^{\infty} [n]_q [n+1]_q \cdots [n+j-1]_q \frac{x^j}{[j]_q!}$$

veya

$$\frac{1}{(1-x)_q^n} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{j}_q x^j \tag{2.5}$$

dir. Bu formül ise Heine Binomiyel Formülü olarak adlandırılır [34].

Ayrıca

$$x^k = \sum_{n \geq k} (-1)^{n-k} \binom{n+m}{n-k}_q q^{\binom{n-k}{2}} \frac{x^n}{(1-x)_q^{n+m+1}} \tag{2.6}$$

eşitliği geçerlidir [11].

2.2. Bazı Özel Matrisler

$n \times n$ tipinden Pascal matrisi $P_n = (p_{i,j})_{i,j\geq 0}$

$$p_{i,j} = \begin{cases} \binom{i}{j}, & i \geq j \\ 0, & i < j \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır [14]. Pascal matrisinin $q-$benzerini $\mathcal{P}_{n,q} = (p_{i,j})_{i,j\geq 0}$

$$p_{i,j} = \begin{cases} q^{\binom{j+1}{2}} \binom{i}{j}_q, & i \geq j \\ 0, & i < j \end{cases} \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Eş. 2.2 kullanılarak

$$\begin{aligned} \left(q^{\binom{k+1}{2}} \binom{n}{k}_q \right)^{-1}_{n,k\geq 0} &= \left((-1)^{n-k} q^{\binom{n-k}{2} - \binom{n+1}{2}} \binom{n}{k}_q \right)_{n,k\geq 0} \\ &= \left((-1)^{n-k} q^{\binom{k+1}{2} - n(k+1)} \binom{n}{k}_q \right)_{n,k\geq 0} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikler yardımıyla, $q-$Pascal matrisinin tersi $\mathcal{P}^{-1} = (a_{i,j})_{i,j\geq 0}$

$$a_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i-j} q^{\binom{j+1}{2} - i(j+1)} \binom{i}{j}_q, & i \geq j \\ 0, & i < j \end{cases} \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlanabilir.

2.3. Riordan Kavramı

2.3 Tanım

$\mathbb{R}$; reel sayılar cismi ve x bir reel degişken olsun. $\mathbb{R}$ üzerinde x'in bir formal kuvvet serisi aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n.$$

Bu eşitlikteki f_n'ler reel sayılardır.

2.4 Tanım

(a_n) herhangi bir dizi olsun. Eğer

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

şeklinde bir formal kuvvet serisiyle tanımlanabiliyorsa $f(x)$ fonksiyonuna (a_n) dizisinin üreteç fonksiyonu denir ve

$$a_n = [x^n] f(x)$$

şeklinde sembolize edilir.

Örnek

Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu $f(x) = \dfrac{1}{1-x-x^2}$, Jacobsthal sayılarının üreteç fonksiyonu $g(x) = \dfrac{x}{1-x-2x^2}$ dir.

2.5 Tanım

$g_0 \neq 0$ ve $f_1 \neq 0$ olmak üzere $g(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \cdots$ ve $f(x) = f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + \cdots$

iki üreteç fonksiyonu olsun. j. sütunu üreteç fonksiyonu

$$g(x)f(x)^j\,, \qquad j=0,1,2,\ldots \tag{2.9}$$

olan dizinin elemanlarından oluşan matris (g,f) ikilisi ile gösterilsin. Eş. 2.9 ile tanımlanan bütün sonsuz boyutlu alt üçgen matrislerin kümesi $\mathcal{R}$ olmak üzere, $\forall\ (g,f)$, $(u,v)\in\mathcal{R}$ için

$$(g,f)*(u,v) := (g\,(u\circ f)\,, v\circ f)$$

şeklinde tanımlanan işlem ile birlikte bir gruptur. Bu gruba Riordan grup denir. Burada tanımlı (g,f) ikilisine de Riordan çifti denir. Grubun birim elemanı

$$I=(1,x)$$

Riordan çifti ile tanımlıdır. Verilen bir (g,f) Riordan çiftinin tersi ise

$$(g,f)^{-1}=\left(\frac{1}{g\circ\bar{f}},\bar{f}\right)$$

şeklindedir. Burada $\bar{f}$, f'in bileşke tersidir [1].

R matrisi

$$R=(g\,(x)\,,f\,(x))=[d_{i,j}]_{i,j\geq 0}$$

şeklinde bir Riordan gösterime sahip olsun. O takdirde

$$d_{i,j}=\left[x^i\right]g\,(x)\,f\,(x)^j \tag{2.10}$$

dir. Burada $[x^i]$; x^i li terimin katsayısını ifade etmektedir. Üreteç fonksiyonu $h\,(x)$ olan

herhangi bir $\{h_j\}$ dizisi için

$$\sum_{j=0}^{i} d_{i,j}h_j = \left[x^i\right] g(x)\, h(f(x)) \tag{2.11}$$

eşitliği geçerlidir [15]. Özel olarak $R = (g(x), xh(x)) = [d_{i,j}]_{i,j\geq 0}$ şeklinde bir matris ise $\alpha_0 \neq 0$ olmak üzere öyle bir $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ...)$ ve $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, ...)$ dizileri vardır ki bu diziler aşağıdaki özellikleri sağlar:

i) 0. sütundaki her eleman kendinden önceki satırdaki elemanların lineer kombinasyonu biçiminde yazılır. Yani;

$$d_{i+1,0} = \xi_0 d_{i,0} + \xi_1 d_{i,1} + \xi_2 d_{i,2} + \cdots$$

dir.

ii) $d_{i+1,j+1}$ $(i, j \geq 0)$ elemanı kendinden önceki sütundan başlayarak kendinden önceki satırın elemanlarının lineer kombinasyonu biçiminde yazılır. Yani

$$d_{i+1,j+1} = \alpha_0 d_{i,j} + \alpha_1 d_{i,j+1} + \alpha_2 d_{i,j+2} + \cdots$$

dir [12, 13].

Aşağıda verilecek olan teorem Riordan Kavramının Temel Teoremi olarak adlandırılır.

2.6 Teorem

$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$, $A := (a_0, a_{1,} a_2, ...)^T$ ve $B := (b_0, b_{1,} b_2, ...)^T$ olsun. O zaman

$$(g, f)\, A = B \Leftrightarrow B(x) = g(x)\, A(f(x))$$

dir.

Örnek

Riordan gösterimi

$$\left(\frac{1}{1-x}, \frac{x}{1-x}\right)$$

olan matrisi bulalım.

Çözüm

0. sütun üreteç fonksiyonu $\frac{1}{(1-x)}$ olan dizinin elemanlarından oluşur. O halde

$$\frac{1}{(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{n} x^n$$

olduğundan $\frac{1}{(1-x)}$, $(1,1,1,1,1,1...)$ dizisinin üreteç fonksiyonudur. Yani 0. sütun $(1,1,1,...)^T$ şeklindedir. 1. sütun üreteç fonksiyonu

$$\frac{1}{(1-x)}\frac{x}{(1-x)} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

olan dizinin elemanlarından oluşur.

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{n} x^{n+1}$$

olduğundan 1. sütun $(0,1,2,3,4,5,...)^T$ şeklindedir. 2. sütunun üreteç fonksiyonu

$$\frac{1}{(1-x)}\frac{x^2}{(1-x)^2} = \frac{x^2}{(1-x)^3}$$

olan dizinin elemanlarından oluşur.

$$\frac{x^2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{n} x^{n+2}$$

olduğundan 2. sütun $(0,0,1,3,6,10,...)^T$ şeklindedir. 3. sütun ise üreteç fonksiyonu

$$\frac{1}{(1-x)}\frac{x^3}{(1-x)^3}=\frac{x^3}{(1-x)^4}$$

olan dizinin elemanlarından oluşur.

$$\frac{x^3}{(1-x)^4}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3}{n}x^{n+3}$$

olduğundan 3. sütun $(0,0,0,1,4,10,...)^T$ şeklindedir. Aynı işlemler diğer sütunlar için yapılırsa Pascal matrisi elde edilir. Bu matrisin genel elemanı

$$\begin{aligned}
d_{i,j} &= \left[x^i\right] g(x) f(x)^j \\
&= \left[x^i\right] \frac{1}{1-x}\left(\frac{x}{1-x}\right)^j \\
&= \left[x^i\right] \frac{x^j}{(1-x)^{j+1}} \\
&= \left[x^i\right] \sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+j}{i}x^{i+j} \\
&= \binom{i}{i-j} \\
&= \binom{i}{j}
\end{aligned}$$

dir. Açıkça görüldüğü üzere Pascal matrisinin Riordan gösterimi $P=\left(\frac{1}{1-x},\frac{x}{1-x}\right)$ dir.

$$P=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\
1 & 3 & 3 & 1 & 0 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{bmatrix}$$

Örnek

Pascal matrisinin tersinin Riordan gösterimi ise

$$P^{-1} = \left(\frac{1}{1+x}, \frac{x}{1+x}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

2.4. q–Bileşke ve q–Lagrange İnversion

2.7 Tanım

$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k$ ve $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k$ şeklinde formal kuvvet serileri olsun. Eğer

$$\begin{aligned} F \underline{\circ} f &= \sum_{n\geq 1} F_n f(x) f(x/q) \dots f\left(x/q^{n-1}\right) = x \\ f \overline{\circ} F &= \sum_{n\geq 1} f_n F(x) F(qx) \dots F\left(q^{n-1}x\right) = x \end{aligned}$$

koşullarından biri sağlanırsa $f(x)$'e $F(x)$'in sağ tersi yada $F(x)$'e $f(x)$'in sol tersi denir [10].

$\theta(z) = \sum_{n\geq 0} \theta_n x^n$ olarak verilsin. Roofing and starring operatörleri sırasıyla

$$\begin{aligned} \overset{\wedge}{\theta}(x) &= \sum_{n\geq 0} \theta_n q^{-\binom{n}{2}} x^n \\ \theta^*(x) &= \theta(x)\theta(qx)\theta(q^2x)\cdots \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır. q yerine $1/q$ alınırsa da bu operatörlerin reciprocalı elde edilir. Yani

bu operatörlerin reciprocalları

$$\overset{\vee}{\theta}(x) = \sum_{n\geq 0} \theta_n q^{\binom{n}{2}} x^n$$

$${}^{*}\theta(x) = \theta(x)\theta(x/q)\theta(x/q^2)\cdots$$

şeklinde tanımlıdır.

$r(x) = 1 + r_1 x + r_2 x + \cdots$ ve $R(x) = R_0 + R_1 x + R_2 x^2 + \cdots$, $(R_0 \neq 0)$ olmak üzere $f(x) = \dfrac{x}{r(x)}$ fonksiyonu $F(x) = \dfrac{x}{R(x)}$ fonksiyonunun bileşke tersi olsun. Bu durumda yukarıdaki operatörler kullanılarak fonksiyonel bileşkenin $q-$benzeri

$$\phi \overline{\circ} F = \sum_{n\geq 0} \phi_n F(x)F(qx)\ldots F(q^{n-1}x) = \frac{(\phi(x)^{*} r(x))^{\vee}}{{}^{*}\overset{\vee}{r}(x)} \tag{2.12}$$

$$\phi \underline{\circ} f = \sum_{n\geq 0} \phi_n f(x)f(x/q)\ldots f(x/q^{n-1}) = \frac{(\phi(x)R^{*}(x))^{\wedge}}{\hat{R}^{*}(x)} \tag{2.13}$$

şeklinde tanımlanır [10].

$F(x) = \sum_{k\geq 1} F_k x^k$ $(F_1 \neq 0)$ ve $f(x) = \sum_{k\geq 1} f_k x^k$ $(f_1 \neq 0)$ şeklinde formal kuvvet serileri olsun.

$$F(f(x)) = f(F(x)) = x$$

koşulunu sağlayan F ve f fonksiyonlarının bulunması klasik Lagrange ters formülü olarak isimlendirilir. F, f'in tersi ise o takdirde

$$\beta_{i,j} = F^j(x)|_{x^i}$$

$$\alpha_{i,j} = f^j(x)|_{x^i}$$

olarak tanımlanan $\alpha = \left(\alpha_{i,j}\right)$ ve $\beta = \left(\beta_{i,j}\right)$ matrisleri birbirlerinin tersi matrisler olurlar.

Yukarıda tanımlanan Lagrange ters formülü ile matris arasındaki ilişkinin $q-$benzeri aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$F(x) = \sum_{k\geq 1} F_k x^k$ $(F_1 \neq 0)$ ve $f(x) = \sum_{k\geq 1} f_k x^k$ $(f_1 \neq 0)$ şeklinde formal kuvvet serileri ve

$$(F \underline{\circ} f)(x) = x$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar olsun. O takdirde

$$\beta_{i,j} = F(x)F(qx)\dots F(q^{j-1}x)|_{x^i}$$

$$\alpha_{i,j} = f(x)f(x/q)\dots f(x/q^{j-1})|_{x^i}$$

şeklinde tanımlı $\alpha = (\alpha_{i,j})$ ve $\beta = (\beta_{i,j})$ matrisler birbirlerinin tersi matrislerdir.

Lagrange ters formülünün $q-$benzeri Carlitz[11] tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

c_n, z'den bağımsız bir katsayı ve $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} c_n \frac{z^n}{(1-z)_q^n}$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon olsun.

$$\Delta f(x) = (f(x) - f(qx))/x$$

$$\Delta^n f(x) = \Delta.\Delta^{n-1} f(x)$$

$$\Delta_0^n f(x) = [\Delta^n f(x)]_{x=0}$$

olmak üzere,

$$f(z) = f(0) + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(1-q)_q^n} \frac{z^n}{(1-z)_q^n} \Delta_0^{n-1} \{\Delta f(x)(x)_n\} \tag{2.14}$$

dir. Carlitz bu formülün $q-$Lagrange ters formülünün özel bir durumu olduğunu belirtmiştir.

3. RİORDAN GÖSTERİMLERİN q–BENZERİ

Bu bölümde öncelikle Riordan gösterimlerin $q-$benzerlerinden bahsedilecektir. Daha sonra Riordan kavramının temel teoremi olarak adlandırılan teoremin $q-$benzeri elde edilecektir.

3.1 Tanım

$a_n(q) \neq 0$ olmak üzere

$$a_n(q)x^n + a_{n+1}(q)x^{n+1} + a_{n+2}(q)x^{n+2} + \cdots \tag{3.1}$$

şeklindeki kuvvet serilerinin kümesi $F_q(n)$ olsun. $g(x) \in F_q(0)$ ve $f(x) \in F_q(1)$ olmak üzere

$$g(x) *_q f(x) \coloneqq g(x) \cdot f(qx)$$

ve

$$g(x) *_{1/q} f(x) \coloneqq g(x) \cdot f(x/q)$$

şeklinde tanımlı $*_q, *_{1/q} : F_q(0) \times F_q(1) \to F_q(1)$ işlemleri verilsin. Bu işlemler yardımıyla bir fonksiyonun $m.$ kuvveti ardışık olarak $f(x)^{\bar{[0]}} = 1$ olmak üzere

$$f(x)^{\bar{[m]}} \coloneqq f(x) *_q f(x)^{\bar{[m-1]}}, \qquad (m \geq 1)$$

şeklinde tanımlıdır. Benzer olarak $f(x)^{\bar{[0]}} = 1$ olmak üzere

$$f(x)^{\bar{[m]}} \coloneqq f(x) *_{1/q} f(x)^{\bar{[m-1]}}, \qquad (m \geq 1)$$

şeklinde tanımlıdır. $j.$ sütununun elemanları, üreteç fonksiyonu

$$g(x) *_q f(x)^{\bar{[j]}}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$$

olan dizinin elemanları olarak düşünüldüğünde elde edilen Riordan çifti $(g,f)_q$ ile gösterilirse Riordan gösterimin bir $q-$benzeri elde edilir. Benzer şekilde $*_q$ yerine $*_{1/q}$ işlemi kullanılarak, j. sütununun elemanları, üreteç fonksiyonu

$$g(x) *_{1/q} f(x)^{\overline{[j]}}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$$

olan dizinin elemanları kullanılarak elde edilen Riordan çifti $(g,f)_{1/q}$ ile gösterilir. O halde $(g,f)_q$ ve $(g,f)_{1/q}$ Riordan çiftlerinin temsil ettiği matrisler sırasıyla

$$(g,f)_q = \begin{bmatrix} | & & & & \\ | & | & & & \\ g & g *_q f & g *_q f^{\overline{2}} & g *_q f^{\overline{3}} & \cdots \\ | & | & | & | & \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$(g,f)_{1/q} = \begin{bmatrix} | & & & & \\ | & | & & & \\ g & g *_{1/q} f & g *_{1/q} f^{\underline{2}} & g *_{1/q} f^{\underline{3}} & \cdots \\ | & | & | & | & \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

şeklinde olacaktır.

Örnek

$g(x) = \dfrac{1}{1-x-x^2}$ ve $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ fonksiyonlarının temsil ettiği $(g,f)_q$ matrisini bulalım.

Çözüm

$$g(x) = \frac{1}{1-x-x^2} = \sum_{n\geq 0} F_n x^n = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \cdots$$

olup, $(g,f)_q$ matrisinin 0. sütunu üreteç fonksiyonu $g(x)$ olan dizinin elemanlarından oluşur. O halde 0. sütun $(1,1,2,3,5,\ldots)^T$ şeklindedir.

1. sütunu üreteç fonksiyonu $g(x) *_q f(x)$ olan dizinin elemanlarından oluşur.

$$\begin{aligned} g(x) *_q f(x) &= \frac{1}{1-x-x^2} *_q \frac{x}{1-x} \\ &= \frac{1}{1-x-x^2}\frac{qx}{1-qx} \\ &= \sum_{n\geq 0} F_n x^n \sum_{n\geq 0} q^{n+1}x^{n+1} \\ &= x\sum_{n\geq 0}\left\{\sum_{k=0}^{n} F_k q^{n-k+1}\right\}x^n \\ &= qx+\left(q+q^2\right)x^2+\left(2q+q^2+q^3\right)x^3+\left(3q+2q^2+q^3+q^4\right)x^4+\cdots \end{aligned}$$

olduğundan 1. sütun $(0,q,q+q^2,2q+q^2+q^3,3q+2q^2+q^3+q^4,\ldots)^T$ şeklindedir.

2. sütun ise üreteç fonksiyonu $g(x) *_q f(x)^{\bar{[2]}}$ olan dizinin elemanlarından oluşur.

$$\begin{aligned} g(x) *_q f(x)^{\bar{[2]}} &= \frac{1}{1-x-x^2} *_q \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\bar{[2]}} \\ &= \frac{1}{1-x-x^2}\frac{qx}{1-qx}\frac{q^2x}{1-q^2x} \\ &= q^3x^2\frac{1}{1-x-x^2}\frac{1}{(1-qx)_q^2} \\ &= x^2\sum_{n\geq 0}\left\{\sum_{k=0}^{n} F_k \binom{1+n-k}{1}_q q^{n-k+3}\right\}x^n \\ &= q^3x^2+\left(q^3+q^4+q^5\right)x^3+\left(2q^3+q^4+2q^5+q^6+q^7\right)x^4+\cdots \end{aligned}$$

olduğundan 2. sütun $\left(0,0,q^3,q^3+q^4+q^5,2q^3+q^4+2q^5+q^6+q^7,\ldots\right)^T$ şeklindedir. Diğer sütunlarda benzer şekilde hesaplanabilir. O halde aranılan matris

$$\left(\frac{1}{1-x-x^2},\frac{x}{1-x}\right)_q=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & q & 0 & \dots \\ 2 & q+q^2 & q^3 & \dots \\ 3 & 2q+q^2+q^3 & q^3+q^4+q^5 & \dots \\ 5 & 3q+2q^2+q^3+q^4 & 2q^3+q^4+2q^5+q^6+q^7 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Örnek

$g(x)=\dfrac{1}{1-x}$ ve $f(x)=-\ln(1-x)$ olmak üzere $(g,f)_{1/q}$ matrisini bulalım.

Çözüm

$(g,f)_{1/q}$ matrisinin 0. sütunu üreteç fonksiyonu $g(x)$ olan dizinin elemanlarından oluşur.

$$g(x)=\frac{1}{1-x}=\sum_{n\geq 0}x^n=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots$$

olup, 0. sütun $\left(1,1,1,1,1,\dots\right)^T$ şeklindedir. 1. sütunu üreteç fonksiyonu $g(x)*_{1/q}f(x)$ olan dizinin elemanlarından oluşur.

$$\begin{aligned} g(x)*_{1/q}f(x) &= \frac{1}{1-x}*_{1/q}-\ln(1-x) \\ &= \frac{1}{1-x}\left(-\ln\left(1-\frac{x}{q}\right)\right) \\ &= \sum_{n\geq 0}x^n\sum_{n\geq 1}\frac{1}{nq^n}x^n \\ &= x\sum_{n\geq 0}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k+1)\,q^{n-k+1}}\right\}x^n \\ &= \frac{1}{q}x+\left(\frac{1+2q}{2q^2}\right)x^2+\left(\frac{2+3q+6q^2}{3q^3}\right)x^3+\cdots \end{aligned}$$

olduğundan 1. sütun $\left(0,\dfrac{1}{q},\dfrac{1+2q}{2q^2},\dfrac{2+3q+6q^2}{3q^3},\dots\right)^T$ şeklindedir. 2. sütunu üreteç

fonksiyonu $g(x) *_{1/q} f(x)^{\underline{2}}$ olan dizinin elemanlarından oluşur.

$$\begin{aligned} g(x) *_{1/q} f(x)^{\underline{2}} &= \frac{1}{1-x} *_{1/q} (-\ln(1-x))^{\underline{2}} \\ &= \frac{1}{1-x}\left(-\ln\left(1-\frac{x}{q}\right)\right)\left(-\ln\left(1-\frac{x}{q^2}\right)\right) \\ &= x^2 \sum_{n\geq 0}\left\{\sum_{k=0}^{n}\sum_{t=0}^{k} \frac{1}{q^{k-t+1}(k-t+1)\,q^{2(n-k)+2}(n-k+1)}\right\} x^n \\ &= \frac{1}{q^3}x^2 + \left(\frac{1+q+2q^3}{2q^5}\right)x^3 + \cdots \end{aligned}$$

olduğundan 2. sütun $\left(0, 0, \frac{1}{q^3}, \frac{1+q+2q^3}{2q^5}, \ldots\right)^T$ şeklindedir. Bu şekilde devam edilerek diğer sütunlar hesaplanabilir. O halde aranılan matris

$$\left(\frac{1}{1-x}, -\ln(1-x)\right)_{1/q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & \frac{1}{q} & 0 & \cdots \\ 1 & \frac{1+2q}{2q^2} & \frac{1}{q^3} & \cdots \\ 1 & \frac{2+3q+6q^2}{3q^3} & \frac{1+q+2q^3}{2q^5} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

3.2 Lemma

$f(x) = \sum_{n\geq 0} f_n x^n$ şeklinde bir fonksiyon olsun. $m \geq 2$ olmak üzere

$$f^{\overline{[m]}}(x) = \sum_{k_m\geq 0}\sum_{k_1+k_2+\cdots k_{m-1}=k_m} f_{k_1}\prod_{i=1}^{m-1} f_{k_{i+1}-k_i} q^{i(k_{i+1}-k_i)} x^{k_m} \tag{3.2}$$

$$f^{\underline{[m]}}(x) = \sum_{k_m\geq 0}\sum_{k_1+k_2+\cdots k_{m-1}=k_m} f_{k_1}\prod_{i=1}^{m-1} f_{k_{i+1}-k_i} \left(\frac{1}{q}\right)^{i(k_{i+1}-k_i)} x^{k_m} \tag{3.3}$$

dir.

İspat

Eş. 3.2 ifadesini m üzerinden tümevarım uygulayarak ispatlayalım.

$$\begin{aligned} f^{\overline{[2]}}(x) &= f(x) *_q f(x) \\ &= f(x) f(qx) \\ &= \sum_{n\geq 0} f_n x^n \sum_{n\geq 0} f_n q^n x^n \\ &= \sum_{n\geq 0} \sum_{k=0}^{n} f_k f_{n-k} q^{n-k} x^n \end{aligned}$$

olup, $m = 2$ için iddia doğrudur. $2 \leq t \leq m-1$ koşulunu sağlayan her t tamsayısı için iddianın doğru olduğunu kabul edelim. Tümevarım hipotezinden

$$f^{\overline{[m-1]}}(x) = \sum_{k_{m-1}\geq 0} \sum_{k_1+k_2+\cdots k_{m-2}=k_{m-1}} f_{k_1} \prod_{i=1}^{m-2} f_{k_{i+1}-k_i} q^{i(k_{i+1}-k_i)} x^{k_{m-1}}$$

eşitliğinin sağlandığı açıktır.

$$f^{\overline{[m]}}(x) = f^{\overline{[m-1]}}(x) f\left(q^{m-1}x\right)$$

olup

$$\begin{aligned} f^{\overline{[m]}}(x) &= \sum_{k_{m-1}\geq 0} \sum_{k_1+k_2+\cdots k_{m-2}=k_{m-1}} f_{k_1} \prod_{i=1}^{m-2} f_{k_{i+1}-k_i} q^{i(k_{i+1}-k_i)} x^{k_{m-1}} \sum_{k\geq 0} f_k q^{(m-1)k} x^k \\ &= \sum_{k_m\geq 0} \sum_{k_{m-1}=0}^{k_m} \sum_{k_1+k_2+\cdots k_{m-2}=k_{m-1}} f_{k_1} \prod_{i=1}^{m-2} f_{k_{i+1}-k_i} q^{i(k_{i+1}-k_i)} x^{k_{m-1}} f_{k_m-k_{m-1}} \\ &\qquad \times q^{(m-1)k_m-k_{m-1}} x^{k_m} \\ &= \sum_{k_m\geq 0} \sum_{k_1+k_2+\cdots k_{m-1}=k_m} f_{k_1} \prod_{i=1}^{m-1} f_{k_{i+1}-k_i} q^{i(k_{i+1}-k_i)} x^{k_m} \end{aligned}$$

elde edilir ki bu, iddianın m için de doğruluğunu gösterir. Dolayısıyla her $m \geq 2$

tamsayısı için iddia doğrudur. Eş. 3.3 ifadesinin ispatı da benzer biçimde görülür.

$L=(l_{i,j})=(g,f)$ şeklinde Riordan matrisi verildiğinde matrisin herhangi bir elemanı

$$\sum_{i\geq j} l_{i,j}x^i = g(x)\,f(x)^j \text{ veya } l_{i,j}=\left[x^i\right] g(x)\,f(x)^j$$

formülü ile hesaplanabilir. Bu formülün $q-$benzeri ise aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$L=(l_{i,j})=(g,f)_q$ şeklinde $q-$Riordan matrisi ise

$$\sum_{i\geq j} l_{i,j}x^i = g(x) *_q f^{\overline{[j]}}(x) \text{ veya } l_{i,j}=\left[x^i\right] g(x) *_q f^{\overline{[j]}}(x) \tag{3.4}$$

dir. $L=(l_{i,j})=(g,f)_{1/q}$ şeklinde $q-$Riordan matrisi ise

$$\sum_{i\geq j} l_{i,j}x^i = g(x) *_{1/q} f^{\underline{[j]}}(x) \text{ veya } l_{i,j}=\left[x^i\right] g(x) *_{1/q} f^{\underline{[j]}}(x) \tag{3.5}$$

dir.

3.3 Lemma

$L=(l_{i,j})=(g,f)_q$ şeklinde $q-$Riordan matrisi ise

$$l_{i,j}=\left[x^i\right]\sum_{i\geq 0}\sum_{t_1+t_2+\cdots t_k=i} g_{t_1}\prod_{m=1}^{k-1} f_{t_{m+1}-t_m}\; q^{m\left(t_{m+1}-t_m\right)}x^i.$$

İspat

Eş. 3.4 ifadesinden,

$$\sum_{i\geq j} l_{i,j}x^i = g(x) *_q f^{\overline{[j]}}(x) \tag{3.6}$$

dir. Eş. 3.2 ifadesinin ispat yöntemi kullanılarak

$$g(x) *_q f^{\overline{[j]}}(x) = \sum_{t_{k+1}\geq 0} \sum_{t_1+t_2+\cdots t_k=t_{k+1}} g_{t_1} \prod_{m=1}^{k-1} f_{t_{m+1}-tm}\ q^{m(t_{m+1}-t_m)} x^{t_{k+1}} \tag{3.7}$$

olduğu görülür. Eş 3.6 ve 3.7 denklemlerinden istenilen elde edilir.

3.4 Lemma

$L = (l_{i,j}) = (g, f)_{1/q}$ şeklinde $q-$Riordan matrisi

$$l_{i,j} = [x^i] \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{t_1+t_2+\cdots t_k=i} g_{t_1} \prod_{m=1}^{k-1} f_{t_{m+1}-t_m} \left(\frac{1}{q}\right)^{m(t_{m+1}-t_m)} x^i$$

dir.

İspat

Lemma 3.3 ifadesinin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

3.5 Teorem

$g(x) \in F_q(0)$ ve $f(x) \in F_q(1)$ olsun. $A(x) = \sum_{k\geq 0} a_k(q)\, x^k$ ve $B(x) = \sum_{k\geq 0} b_k(q)\, x^k$ olmak üzere

$$(g(x), f(x))_q \begin{bmatrix} a_0(q) \\ a_1(q) \\ a_2(q) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0(q) \\ b_1(q) \\ b_2(q) \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

olsun. O halde

$$g(x) *_q (A \overline{\circ} f)(x) = B(x) \tag{3.9}$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat

$g(x) \in F_q(0)$ ve $f(x) \in F_q(1)$ olduğundan $F_q(0)$ ve $F_q(1)$ kümelerinin tanımı gereğince

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(q)x^k, \qquad f\,(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(q)x^k$$

şeklinde yazabiliriz. Eş. 3.8 denkleminin sol tarafı

$$\begin{bmatrix} | & & & & \cdots \\ | & | & & & \\ g & g *_q \bar{f}^{[1]} & g *_q \bar{f}^{[2]} & & \\ | & | & | & | & \\ | & | & | & | & | \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

olur. Fonksiyonların kuvveti tanımından

$$\begin{bmatrix} g_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ g_1 & g_0 f_1 q & 0 & 0 & \\ g_2 & g_0 f_2 q^2 + g_1 f_1 q & g_0 f_1^2 q^3 & 0 & \\ g_3 & g_0 f_3 q^3 + g_1 f_2 q^2 + g_2 f_1 q & g_0 f_1 f_2 q^5 + g_0 f_1 f_2 q^4 + g_1 f_1^2 q^3 & g_0 f_1^3 q^6 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

olup, matris çarpımından

$$\begin{bmatrix} g_0 a_0 \\ g_1 a_0 + g_0 f_1 q a_1 \\ g_2 a_0 + \left(g_0 f_2 q^2 + g_1 f_1 q\right) a_1 + g_0 f_1^2 q^3 a_2 \\ g_3 a_0 + \left(g_0 f_3 q^3 + g_1 f_2 q^2 + g_2 f_1 q\right) a_1 + \left(g_0 f_1 f_2 q^5 + g_0 f_1 f_2 q^4 + g_1 f_1^2 q^3\right) a_2 + g_0 f_1^3 q^6 a_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

sütun matrisi elde edilir. Yukarıdaki matrisin satırları bir serinin katsayıları olarak düşünülürse

$$
\begin{aligned}
L = & g_0 a_0 \\
& + \left[g_1 a_0 + g_0 f_1 q a_1\right] x \\
& + \left[g_2 a_0 + \left(g_0 f_2 q^2 + g_1 f_1 q\right) a_1 + g_0 f_1^2 q^3 a_2\right] x^2 \\
& + \left[g_3 a_0 + \left(g_0 f_3 q^3 + g_1 f_2 q^2 + g_2 f_1 q\right) a_1 + \left(g_0 f_1 f_2 q^5 + g_0 f_1 f_2 q^4 + g_1 f_1^2 q^3\right) a_2 + g_0 f_1^3 q^6 a_3\right] x^3 \\
& + \cdots
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan sırasıyla $a_0, a_1, \ldots$ parantezlerine alınırsa

$$
\begin{aligned}
L = & a_0 \cdot \left[g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + g_3 x^3 \cdots\right] \\
& + a_1 \cdot \left[g_0 f_1 q x + \left(g_0 f_2 q^2 + g_1 f_1 q\right) x^2 + \left(g_0 f_3 q^3 + g_1 f_2 q^2 + g_2 f_1 q\right) x^3 + \cdots\right] \\
& + a_2 \cdot \left[g_0 f_1^2 q^3 x^2 + \left(g_0 f_1 f_2 q^5 + g_0 f_1 f_2 q^4 + g_1 f_1^2 q^3\right) x^3\right] + \cdots \\
= & a_0 \cdot g(x) + a_1 \cdot \left[g(x) *_q f(x)^{\bar{[1]}}\right] + a_2 \cdot \left[g(x) *_q f(x)^{\bar{[2]}}\right] + a_3 \cdot \left[g(x) *_q f(x)^{\bar{[3]}}\right] + \cdots \\
= & g(x) *_q \left[a_0 + a_1 \cdot f(x)^{\bar{[1]}} + a_2 \cdot f(x)^{\bar{[2]}} + a_3 \cdot f(x)^{\bar{[3]}} + \cdots\right] \\
= & g(x) *_q \left(A \bar{\circ} f\right)(x)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.6 Teorem

$g(x) \in F_q(0)$ ve $f(x) \in F_q(1)$ olsun. $A(x) = \sum_{k\geq 0} a_k(q)\, x^k$ ve $B(x) = \sum_{k\geq 0} b_k(q)\, x^k$ olmak üzere

$$
\left(g(x), f(x)\right)_{1/q} \begin{bmatrix} a_0(q) \\ a_1(q) \\ a_2(q) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0(q) \\ b_1(q) \\ b_2(q) \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{3.10}
$$

olsun. O halde

$$g(x) *_{1/q} (A \underline{\circ} f)(x) = B(x) \tag{3.11}$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat

$g(x) \in F_q(0)$ ve $f(x) \in F_q(1)$ olduğundan $F_q(0)$ ve $F_q(1)$ kümelerinin tanımı gereğince

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(q) x^k, \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(q) x^k$$

şeklinde yazabiliriz. Eş. 3.10 ifadesinin sol tarafı

$$\begin{bmatrix} | & & & & \cdots \\ | & | & & & \\ g & g *_{1/q} f^{\underline{[1]}} & g *_q f^{\underline{[2]}} & & \\ | & | & | & | & \\ | & | & | & | \ | & \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

olur, buradan

$$\begin{bmatrix} g_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ g_1 & \frac{g_0 f_1}{q} & 0 & 0 & \cdots \\ g_2 & \frac{g_0 f_2}{q^2} + \frac{g_1 f_1}{q} & \frac{g_0 f_1^2}{q^3} & 0 & \cdots \\ g_3 & \frac{g_0 f_3}{q^3} + \frac{g_1 f_2}{q^2} + \frac{g_2 f_1}{q} & \frac{g_0 f_1 f_2}{q^5} + \frac{g_0 f_1 f_2}{q^4} + \frac{g_1 f_1^2}{q^3} & \frac{g_0 f_1^3}{q^6} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

elde edilir. Matris çarpımından

$$\begin{bmatrix} g_0a_0 \\ g_1a_0+\frac{g_0f_1}{q}a_1 \\ g_2a_0+\left(\frac{g_0f_2}{q^2}+\frac{g_1f_1}{q}\right)a_1+\frac{g_0f_1^2}{q^3}a_2 \\ g_3a_0+\left(\frac{g_0f_3}{q^3}+\frac{g_1f_2}{q^2}+\frac{g_2f_1}{q}\right)a_1+\left(\frac{g_0f_1f_2}{q^5}+\frac{g_0f_1f_2}{q^4}+\frac{g_1f_1^2}{q^3}\right)a_2+\frac{g_0f_1^3}{q^6}a_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

sütun matrisi elde edilir. Bu matrisin satırları bir serinin katsayıları olarak düşünülürse

$$\begin{aligned} L = & g_0a_0+\left[g_1a_0+\frac{g_0f_1}{q}a_1\right]x \\ & +\left[g_2a_0+\left(\frac{g_0f_2}{q^2}+\frac{g_1f_1}{q}\right)a_1+\frac{g_0f_1^2}{q^3}a_2\right]x^2 \\ & +\left[g_3a_0+\left(\frac{g_0f_3}{q^3}+\frac{g_1f_2}{q^2}+\frac{g_2f_1}{q}\right)a_1+\left(\frac{g_0f_1f_2}{q^5}+\frac{g_0f_1f_2}{q^4}+\frac{g_1f_1^2}{q^3}\right)a_2+\frac{g_0f_1^3}{q^6}a_3\right]x^3 \\ & +\cdots \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan sırasıyla $a_0, a_1, \ldots$ elemanlarının parantezlerine alınırsa

$$\begin{aligned} L = & \ a_0\cdot\left[g_0+g_1x+g_2x^2+g_3x^3\cdots\right] \\ & +a_1\cdot\left[\frac{g_0f_1}{q}x+\left(\frac{g_0f_2}{q^2}+\frac{g_1f_1}{q}\right)x^2+\left(\frac{g_0f_3}{q^3}+\frac{g_1f_2}{q^2}+\frac{g_2f_1}{q}\right)x^3+\cdots\right] \\ & +a_2\cdot\left[\frac{g_0f_1^2}{q^3}x^2+\left(\frac{g_0f_1f_2}{q^5}+\frac{g_0f_1f_2}{q^4}+\frac{g_1f_1^2}{q^3}\right)x^3\right] \\ & +\cdots \\ = & \ a_0\cdot g(x)+a_1\cdot\left[g(x)*_{1/q}f(x)^{\underline{[1]}}\right]+a_2\cdot\left[g(x)*_{1/q}f(x)^{\underline{[2]}}\right]+a_3\cdot\left[g(x)*_{1/q}f(x)^{\underline{[3]}}\right] \\ & +\cdots \\ = & \ g(x)*_{1/q}\left[a_0+a_1\cdot f(x)^{\underline{[1]}}+a_2\cdot f(x)^{\underline{[2]}}+a_3\cdot f(x)^{\underline{[3]}}+\cdots\right] \\ = & \ g(x)*_{1/q}\left(A\underline{\circ}f\right)(x) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

4. q–RİORDAN GÖSTERİME SAHİP MATRİSLERİN YAPISI

Bu bölümde $q-$Riordan gösterime sahip matrislerin çarpımları incelenecektir. Bu çarpımlar sonucunda oluşan 4 farklı durum irdelenecektir.

4.1 Teorem

$A = (g, f)_q$ ve $B = (u, v)_{1/q}$ şeklinde Riordan gösterime sahip iki matris olsun. Bu takdirde

$$(g, f)_q . (u, v)_{1/q} = (g(x), h(qx)) \tag{4.1}$$

dir. Burada

$$h^j(x) = \left(\left(u *_{1/q} v^{\underline{j}}\right) \overline{\circ} f\right)(x) \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat

İki matrisin çarpımı sonucunda oluşan matrisin $j.$ sütununun üreteç fonksiyonunun $g(x) h^j(qx)$ $(j \geq 0)$ şeklinde olduğunu göstermeliyiz. $(g, f)_q$ matrisi

$$(g, f)_q = \begin{bmatrix} g|_{x^o} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ g|_x & g *_q f|_x & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ g|_{x^2} & g *_q f|_{x^2} & g *_q f^{\overline{2}}|_{x^2} & 0 & 0 & \cdots \\ g|_{x^3} & g *_q f|_{x^3} & g *_q f^{\overline{2}}|_{x^3} & g *_q f^{\overline{3}}|_{x^3} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Burada $|_{x^n}$ ile gösterilen ifade x^n li terimin katsayısına karşılık gelmektedir. Buradan bu matrisinin $(i, j).$ elemanı $a_{i,j}$ olmak üzere $a_{i,j} = g *_q f^{\overline{j}}|_{x^i}$ dir.

$(u,v)_{1/q}$ matrisi

$$(u,v)_{1/q} = \begin{bmatrix} u\mid_{x^o} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ u\mid_{x} & u *_{1/q} v\mid_{x} & 0 & 0 & \cdots \\ u\mid_{x^2} & u *_{1/q} v\mid_{x^2} & u *_{1/q} v^{\underline{2}}\mid_{x^2} & 0 & \cdots \\ u\mid_{x^3} & u *_{1/q} v\mid_{x^3} & u *_{1/q} v^{\underline{2}}\mid_{x^3} & u *_{1/q} v^{\underline{3}}\mid_{x^3} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan $(u,v)_{1/q}$ matrisinin (i,j). elemanı $b_{i,j}$ ile temsil edilirse $b_{i,j} = u *_{1/q} v^{\underline{j}}\mid_{x^i}$ olur. Bu iki matrisin çarpımı $D = (d_{i,j})_{i,j\geq 0}$ ile gösterilen bir matris olmak üzere

$$\begin{aligned} d_{i,j} &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k} b_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(g *_q f^{\overline{k}}\mid_{x^i}\right)\left(u *_{1/q} v^{\underline{j}}\mid_{x^k}\right) \end{aligned}$$

dir. Matris çarpımından $i<j$ iken $d_{i,j}=0$ dır. D matrisinin j. sütunu

$$(0,0,\ldots,0,d_{j,j},d_{j+1,j},d_{j+2,j},\ldots)^T$$

şeklindedir. L matrisi yukarıdaki matris ile $\left(1,x,x^2,\ldots\right)$ satır vektörünün çarpımı olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} L &= d_{j,j}x^j + d_{j+1,j}x^{j+1} + d_{j+2,j}x^{j+2} + \cdots \\ &= \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(g *_q f^{\overline{k}}\mid_{x^j}\right)\left(u *_{1/q} v^{\underline{j}}\mid_{x^k}\right)\right\}x^j + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(g *_q f^{\overline{k}}\mid_{x^{j+1}}\right)\left(u *_{1/q} v^{\underline{j}}\mid_{x^k}\right)\right\} \\ &\quad \times x^{j+1} + \cdots \\ &= \left\{\left(g *_q f^{\overline{1}}\mid_{x^j}\right)\left(u *_{1/q} v^{\underline{j}}\mid_{x^1}\right) + \left(g *_q f^{\overline{2}}\mid_{x^j}\right)\left(u *_{1/q} v^{\underline{j}}\mid_{x^2}\right) + \cdots\right\}x^j \\ &\quad + \left\{\left(g *_q f^{\overline{1}}\mid_{x^{j+1}}\right)\left(u *_{1/q} v^{\underline{j}}\mid_{x^1}\right) + \left(g *_q f^{\overline{2}}\mid_{x^{j+1}}\right)\left(u *_{1/q} v^{\underline{j}}\mid_{x^2}\right) + \cdots\right\}x^{j+1} \\ &\quad + \left\{\left(g *_q f^{\overline{1}}\mid_{x^{j+2}}\right)\left(u *_{1/q} v^{\underline{j}}\mid_{x^1}\right) + \left(g *_q f^{\overline{2}}\mid_{x^{j+2}}\right)\left(u *_{1/q} v^{\underline{j}}\mid_{x^2}\right) + \cdots\right\}x^{j+2} + \cdots \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} L &= u *_{1/q} v^{\underline{j}} \mid_{x^1} \left\{ \left(g *_q f^{\overline{1}} \mid_{x^j} \right) x^j + \left(g *_q f^{\overline{1}} \mid_{x^{j+1}} \right) x^{j+1} + \left(g *_q f^{\overline{1}} \mid_{x^{j+2}} \right) x^{j+2} + \cdots \right\} \\ &\quad + u *_{1/q} v^{\underline{j}} \mid_{x^2} \left\{ \left(g *_q f^{\overline{2}} \mid_{x^j} \right) x^j + \left(g *_q f^{\overline{2}} \mid_{x^{j+1}} \right) x^{j+1} + \left(g *_q f^{\overline{2}} \mid_{x^{j+2}} \right) x^{j+2} + \cdots \right\} \\ &\quad + \cdots \\ &= u *_{1/q} v^{\underline{j}} \mid_{x^1} \left(g *_q f^{\overline{1}} \right) + u *_{1/q} v^{\underline{j}} \mid_{x^2} \left(g *_q f^{\overline{2}} \right) + \cdots \\ &= g *_q \left\{ u *_{1/q} v^{\underline{j}} \mid_{x^1} f^{\overline{1}} + u *_{1/q} v^{\underline{j}} \mid_{x^2} f^{\overline{2}} + \cdots \right\} \\ &= g *_q \left(\left(u *_{1/q} v^{\underline{j}} \right) \overline{\circ} f \right) (x) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} g *_q \left(\left(u *_{1/q} v^{\underline{j}} \right) \overline{\circ} f \right) (x) &= g(x) *_q h^j (x) \\ &= g(x) h^j (qx) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan D matrisinin j. sütununun üreteç fonksiyonunun $g(x) h^j (qx)$ olduğu görülür. Böylece D matrisinin Riordan gösterimi

$$(g(x), h(qx))$$

olarak elde edilir.

4.2 Teorem

$(g, f)_q$ ve $(u, v)_q$ şeklinde Riordan gösterime sahip iki matris olsun. Bu taktirde

$$(g, f)_q . (u, v)_q = (g(x), k(qx))$$

dir. Burada $k^j (x) = ((u *_q v^{\overline{j}}) \overline{\circ} f)(x)$ şeklinde tanımlıdır.

İspat

İki matrisin çarpımı sonucunda oluşan matrisin j. sütununun üreteç fonksiyonunun

$g(x)\,k^{j}(qx)$ $(j \geq 0)$ şeklinde olduğunu göstermeliyiz. $(g,f)_q$ matrisi

$$(g,f)_q = \begin{bmatrix} g\mid_{x^o} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ g\mid_{x} & g *_q f\mid_{x} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ g\mid_{x^2} & g *_q f\mid_{x^2} & g *_q f^{\overline{2}}\mid_{x^2} & 0 & 0 & \cdots \\ g\mid_{x^3} & g *_q f\mid_{x^3} & g *_q f^{\overline{2}}\mid_{x^3} & g *_q f^{\overline{3}}\mid_{x^3} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Buradan bu matrisinin (i,j). elemanı $a_{i,j}$ olmak üzere $a_{i,j} = g *_q f^{\overline{j}}\mid_{x^i}$ dir. $(u,v)_q$ matrisi

$$(u,v)_q = \begin{bmatrix} u\mid_{x^o} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ u\mid_{x} & u *_q v\mid_{x} & 0 & 0 & \cdots \\ u\mid_{x^2} & u *_q v\mid_{x^2} & u *_q v^{\overline{2}}\mid_{x^2} & 0 & \cdots \\ u\mid_{x^3} & u *_q v\mid_{x^3} & u *_q v^{\overline{2}}\mid_{x^3} & u *_q v^{\overline{3}}\mid_{x^3} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan $(u,v)_q$ matrisinin (i,j). elemanı $b_{i,j}$ olmak üzere $b_{i,j} = u *_q v^{\overline{j}}\mid_{x^i}$ dir. Bu iki matrisin çarpımı $D = (d_{i,j})_{i,j\geq 0}$ ile gösterilen bir matris olmak üzere

$$\begin{aligned} d_{i,j} &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k} b_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(g *_q f^{\overline{k}}\mid_{x^i}\right)\left(u *_q v^{\overline{j}}\mid_{x^k}\right) \end{aligned}$$

dir. Matris çarpımından $i < j$ iken $d_{i,j} = 0$ dır. D matrisinin j. sütunu

$$\left(0,0,\ldots,0,d_{j,j},d_{j+1,j},d_{j+2,j},\ldots\right)^T$$

şeklindedir. L matrisi yukarıdaki matrisi ile $\left(1,x,x^2,\ldots\right)$ satır vektörünün çarpımı olsun. Bu takdirde

$$
\begin{aligned}
L &= d_{j,j}x^j + d_{j+1,j}x^{j+1} + d_{j+2,j}x^{j+2} + \cdots \\
&= \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(g *_q f^{\overline{k}} \mid_{x^j}\right)\left(u *_q v^{\overline{j}} \mid_{x^k}\right)\right\}x^j + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(g *_q f^{\overline{k}} \mid_{x^{j+1}}\right)\left(u *_q v^{\overline{j}} \mid_{x^k}\right)\right\}x^{j+1} \\
&\quad + \cdots \\
&= \left\{\left(g *_q f^{\overline{1}} \mid_{x^j}\right)\left(u *_q v^{\overline{j}} \mid_{x^1}\right) + \left(g *_q f^{\overline{2}} \mid_{x^j}\right)\left(u *_q v^{\overline{j}} \mid_{x^2}\right) + \cdots\right\}x^j \\
&\quad + \left\{\left(g *_q f^{\overline{1}} \mid_{x^{j+1}}\right)\left(u *_q v^{\overline{j}} \mid_{x^1}\right) + \left(g *_q f^{\overline{2}} \mid_{x^{j+1}}\right)\left(u *_q v^{\overline{j}} \mid_{x^2}\right) + \cdots\right\}x^{j+1} \\
&\quad + \left\{\left(g *_q f^{\overline{1}} \mid_{x^{j+2}}\right)\left(u *_q v^{\overline{j}} \mid_{x^1}\right) + \left(g *_q f^{\overline{2}} \mid_{x^{j+2}}\right)\left(u *_q v^{\overline{j}} \mid_{x^2}\right) + \cdots\right\}x^{j+2} \\
&\quad + \cdots
\end{aligned}
$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
L &= u *_q v^{\overline{j}} \mid_{x^1}\left\{\left(g *_q f^{\overline{1}} \mid_{x^j}\right)x^j + \left(g *_q f^{\overline{1}} \mid_{x^{j+1}}\right)x^{j+1} + \left(g *_q f^{\overline{1}} \mid_{x^{j+2}}\right)x^{j+2} + \cdots\right\} \\
&\quad + u *_q v^{\overline{j}} \mid_{x^2}\left\{\left(g *_q f^{\overline{2}} \mid_{x^j}\right)x^j + \left(g *_q f^{\overline{2}} \mid_{x^{j+1}}\right)x^{j+1} + \left(g *_q f^{\overline{2}} \mid_{x^{j+2}}\right)x^{j+2} + \cdots\right\} \\
&\quad + \cdots \\
&= u *_q v^{\overline{j}} \mid_{x^1}\left(g *_q f^{\overline{1}}\right) + u *_q v^{\overline{j}} \mid_{x^2}\left(g *_q f^{\overline{2}}\right) + \cdots \\
&= g *_q \left\{u *_q v^{\overline{j}} \mid_{x^1} f^{\overline{1}} + u *_q v^{\overline{j}} \mid_{x^2} f^{\overline{2}} + \cdots\right\} \\
&= g *_q \left\{\left(u *_q v^{\overline{j}}\right)\overline{\circ} f\right\}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece

$$\left(g *_q \left\{(u *_q v^{\overline{j}})\overline{\circ} f\right\}\right)(x) = g(x)\, k^j(qx)$$

yazabiliriz. Buradan D matrisinin j. sütununun üreteç fonksiyonunun $g(x)\, k^j(qx)$ olduğu görülür. Böylece D matrisinin Riordan gösterimi

$$(g(x), k(qx))$$

olarak elde edilmiş olur. Böylece ispat tamamlanır.

4.3 Teorem

$(g,f)_{1/q}$ ve $(u,v)_q$ şeklinde Riordan gösterime sahip iki matris olsun.

$$t^j(x) = \left(\left(u *_q v^{\bar{j}}\right) \underline{\circ} f\right)(x)$$

şekilde tanımlı olmak üzere

$$(g,f)_{1/q} \,.\, (u,v)_q = \left(g(x), t(qx)\right)$$

dir.

İspat

$\underline{\circ}$, $(g,f)_{1/q}$, $(u,v)_q$ tanımları kullanılarak Teorem 4.2 'nin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

4.4 Teorem

$(g,f)_{1/q}$ ve $(u,v)_{1/q}$ şeklinde Riordan gösterime sahip iki matris olsun. Bu taktirde

$$(g,f)_{1/q} \,.\, (u,v)_{1/q} = \left(g(x), l(qx)\right)$$

dir. Burada

$$l^j(x) = \left(\left(u *_{1/q} v^{\underline{j}}\right) \underline{\circ} f\right)(x)$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat

Teorem 4.2 'nin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Çizelge 4.1: $q-$Riordan matrislerin çarpımı

	$(u,v)_q$	$(u,v)_{1/q}$
$(g,f)_q$	$\left(g(x), k(qx)\right)$ $k^j(x) = \left((u *_q v^{\overline{j}})\overline{\circ} f\right)(x)$	$\left(g(x), h(qx)\right)$ $h^j(x) = \left((u *_{1/q} v^{\underline{j}})\overline{\circ} f\right)(x)$
$(g,f)_{1/q}$	$(g(x), t(qx))$ $t^j(x) = \left((u *_q v^{\overline{j}})\underline{\circ} f\right)(x)$	$\left(g(x), l(qx)\right)$ $l^j(x) = \left((u *_{1/q} v^{\underline{j}})\underline{\circ} f\right)(x)$

$q \to 1^-$ iken Teorem 4.1-4.4 bilinen Riordan grup kavramındaki teoremlere dönüşür.

Örnek

$\mathcal{P}$, Eş. 2.7 ile tanımlı $q-$Pascal matrisi olsun. $\mathcal{P}$ matrisinin Riordan gösteriminin $q-$benzeri ($q-$Riordan gösterimi)

$$\mathcal{P} = \left(\frac{1}{1-x}, \frac{x}{1-x}\right)_q \tag{4.3}$$

şeklindedir.

İspat

$\mathcal{P}$ matrisi

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \binom{0}{0}_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \binom{1}{0}_q & q\binom{1}{1}_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \binom{2}{0}_q & q\binom{2}{1}_q & q^3\binom{2}{2}_q & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \binom{3}{0}_q & q\binom{3}{1}_q & q^3\binom{3}{2}_q & q^6\binom{3}{3}_q & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \binom{4}{0}_q & q\binom{4}{1}_q & q^3\binom{4}{2}_q & q^6\binom{4}{3}_q & q^{10}\binom{4}{4}_q & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu matrisin (i,j). elemanı

$$r_{i,j} = \left[x^i\right] \sum_{i=0}^{\infty} q^{\binom{j+1}{2}} \binom{i}{j}_q x^i$$

şeklinde olup, matrisin j. sütununun elemanları

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^{\binom{j+1}{2}} \binom{i}{j}_q x^i$$

kuvvet serisinin katsayılarının sırasıyla yazılmasıyla oluşur.

$$g(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f(x) = \frac{x}{1-x}$$

şeklinde iki fonksiyon olmak üzere

$$g(x) *_q f(x)^{\overline{[j]}} = \frac{q^{\binom{j+1}{2}} x^j}{(1-x)_q^{j+1}}$$

eşitliği elde edilir. Eş. 2.5 kullanılarak

$$\begin{aligned} g(x) *_q f(x)^{\overline{[j]}} &= q^{\binom{j+1}{2}} x^j \sum_{k=0}^{\infty} \binom{j+k}{j}_q x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} q^{\binom{j+1}{2}} \binom{j+k}{j}_q x^{k+j} \\ &= \sum_{k=j}^{\infty} q^{\binom{j+1}{2}} \binom{k}{j}_q x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} q^{\binom{j+1}{2}} \binom{k}{j}_q x^k \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır, bu ise $\mathcal{P}$ matrisinin j. sütununun üreteç fonksiyonunun

$$\frac{q^{\binom{j+1}{2}} x^j}{(1-x)_q^{j+1}}$$

olduğunu gösterir. Sonuç olarak $\mathcal{P}$ matrisinin $q-$Riordan gösterimi

$$\left(\frac{1}{1-x}, \frac{x}{1-x} \right)_q$$

olarak elde edilmiş olur.

Sonuç

Riordan gösterimi

$$\mathcal{P} = \left(\frac{1}{1-x}, \frac{x}{1-x} \right)_q$$

olan $\mathcal{P} = (p_{i,j})$ matrisinin genel terimi

$$p_{i,j} = q^{\binom{j+1}{2}} \binom{i}{j}_q$$

dir.

İspat

Eş. 3.4 ifadesinde $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$ ve $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
p_{i,j} &= \left[x^i\right] \left\{ \frac{1}{1-x} *_q \left(\frac{x}{1-x} \right)^{\bar{[j]}} \right\} \\
&= \left[x^i\right] \left\{ \frac{1}{1-x} *_q \left(\frac{q^{\binom{j}{2}} x^j}{(1-x)_q^j} \right) \right\} \\
&= \left[x^i\right] \left\{ \frac{1}{1-x} . \frac{q^{\binom{j+1}{2}} x^j}{(1-qx)_q^j} \right\} \\
&= \left[x^i\right] \left\{ \frac{q^{\binom{j+1}{2}} x^j}{(1-x)_q^{j+1}} \right\} \\
&= \left[x^i\right] \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} q^{\binom{j+1}{2}} \binom{k}{j}_q x^k \right\} \\
&= q^{\binom{j+1}{2}} \binom{i}{j}_q .
\end{aligned}$$

Şimdi $q-$Pascal matrisinin tersinin Riordan gösterimini elde etmek için gerekli lemmalar verilecektir.

4.5 Lemma

$f(x)=\dfrac{x}{1-x}\in F_q(1)$ olsun. $f(x)$ fonksiyonunun $q-$bileşke tersi $h(x)=\dfrac{x}{1+\frac{x}{q}}$ dir.

İspat

$f(x)=\dfrac{x}{1-x}\in F_q(1)$ olduğundan $h(x)=\sum\limits_{n\geq 1}h_n(q)\,x^n$ şeklinde yazabilir. Eş. 2.12 ifadesinden

$$\begin{aligned}(h\overline{\circ}f)(x)=x &\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1}h_n(q)\,f(x)^{\overline{[n]}}=x\\ &\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1}h_n(q)\,f(x)f(qx)\cdots f(q^{n-1}x)=x\\ &\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1}h_n(q)\left(\frac{x}{1-x}\right)\left(\frac{qx}{1-qx}\right)\cdots\left(\frac{q^{n-1}x}{1-q^{n-1}x}\right)=x\\ &\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1}h_n(q)\,\frac{q^{\binom{n}{2}}x^n}{(1-x)_q^n}=x\end{aligned}$$

yazılabilir. Eş. 2.14 kullanılarak bazı hesaplamalardan sonra

$h_n(q)=\dfrac{(-1)^{n-1}}{q^{n-1}}$

olduğu görülür. Bu ise

$$h(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{q^{n-1}}x^n=\frac{x}{1+\frac{x}{q}}$$

demektir. Böylece istenen elde edilmiş olur.

4.6 Lemma

$g(x)=\dfrac{1}{1-x}$ ve $h(x)=\dfrac{x}{1+\frac{x}{q}}$ ile tanımlı fonksiyonlar olsun. O halde $(g\underline{\circ}h)(x)=1+x$ dir.

İspat

Lemma 4.5'den, $f(x) = \dfrac{x}{1+\frac{x}{q}}$ fonksiyonu, $F(x) = \dfrac{x}{1-x}$ fonksiyonunun tersi olup, Eş. 2.13 ifadesi bu fonksiyonlara uygulanırsa

$$R^*(x) = (1-x)(1-qx)\left(1-q^2x\right)\cdots,$$

$$\hat{R}^*(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(1-q)_q^n} x^n,$$

$$\Phi(x)R^*(x) = (1-qx)\left(1-q^2x\right)\cdots,$$

$$(\Phi(x)R^*(x))^{\wedge} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n q^n}{(1-q)_q^n} x^n$$

elde edilir. Bulunan bu değerler bileşkede yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}(g\underline{\circ}h)(x) =& \frac{\sum\limits_{n\geq 0} \frac{(-1)^n q^n}{(1-q)_q^n} x^n}{\sum\limits_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(1-q)_q^n} x^n} \\ =& \frac{(1+x)(1+qx)(1+q^2x)\cdots}{(1+qx)(1+q^2x)\cdots} \\ =& (1+x)\end{aligned}$$

elde edilir.

4.7 Tanım

$f(x) \in F_q(n)$ olmak üzere, eğer $f(x) *_q \dfrac{1}{f\left(\frac{x}{q}\right)} = 1$ ise $\dfrac{1}{f\left(\frac{x}{q}\right)}$ fonksyonuna $f(x)$ fonksiyonunun $q-$reciprocalı denir.

Örnek

$\mathcal{P}^{-1}$ matrisi Eş. 2.8 ifadesindeki gibi tanımlı olsun. Bu durumda $q-$Pascal matrisinin tersinin $q-$Riordan gösterimi

$$\mathcal{P}^{-1} = \left(\frac{1}{1+\frac{x}{q}}, \frac{x}{1+\frac{x}{q}} \right)_{1/q}$$

şeklindedir.

İspat

Eş. 2.6 ifadesinden, $\mathcal{P}$ matrisinin $q-$Riordan gösterimi

$$\mathcal{P}= \left(\frac{1}{1-x}, \frac{x}{1-x} \right)_{q}$$

şeklindedir. $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$ ve $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ olarak ele alalım. $q-$Lagrange inversion formülü ve Lemma 4.5'den f fonksiyonunun $q-$fonksiyonel tersi h olmak üzere

$$h(x) = \frac{x}{1+\frac{x}{q}}$$

dir. Lemma 4.6'dan

$$(g \underline{\circ} h)(x) = 1 + x$$

dir. Buradan $(g \underline{\circ} h)(x)$'in $q-$reciprocalı

$$\frac{1}{(g \underline{\circ} h)(x)} = \frac{1}{1+\frac{x}{q}}$$

olur. Böylece

$$\frac{1}{(g \underline{\circ} h)(x)} *_{1/q} h(x)^{\overline{[j]}} = \frac{1}{1+\frac{x}{q}} *_{1/q} \left(\frac{x}{1+\frac{x}{q}} \right)^{\overline{[j]}} = \left(\frac{1}{q} \right)^{\binom{j+1}{2}} x^j \prod_{i=1}^{j+1} \frac{1}{\left(1+\frac{x}{q^i}\right)} \tag{4.4}$$

eşitliği elde edilir. Diğer yandan $\mathcal{P}^{-1}$ matrisinin j. sütununun

$$\sum_{i\geq 0}(-1)^{i-j}q^{\binom{j+1}{2}-i(j+1)}\binom{i}{j}_q x^i$$

kuvvet serisinin katsayılarından oluştuğunu biliyoruz. $q-$binomiyel teoreminden

$$\sum_{i\geq 0}(-1)^{i-j}q^{\binom{j+1}{2}-i(j+1)}\binom{i}{j}_q x^i = \left(\frac{1}{q}\right)^{\binom{j+1}{2}} x^j \prod_{t=1}^{j+1}\frac{1}{\left(1+\frac{x}{q^t}\right)} \tag{4.5}$$

eşitliği elde edilir. Eş. 4.4 ve Eş. 4.5 göz önüne alınırsa

$$\sum_{i\geq 0}(-1)^{i-j}q^{\binom{j+1}{2}-i(j+1)}\binom{i}{j}_q x^i = \frac{1}{(g\underline{\circ}h)(x)} *_{1/q} h(x)^{\overline{[j]}}$$

elde edilir.Bu ise

$$\mathcal{P}^{-1} = \left(\frac{1}{1+\frac{x}{q}}, \frac{x}{1+\frac{x}{q}}\right)_{1/q}$$

demektir.

Örnek

Riordan gösterimi kullanılarak

$$\left(\frac{1}{1-x}, \frac{x}{1-x}\right)_q \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{x}{q}}, \frac{x}{1+\frac{x}{q}}\right)_{1/q} = (1, x)$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm

Eş. 4.1 ifadesinde

$$g(x) = \frac{1}{1-x},\ f(x) = \frac{x}{1-x},\ u(x) = \frac{1}{1+\frac{x}{q}},\ v(x) = \frac{x}{1+\frac{x}{q}}$$

seçelim. Bu takdirde Eş. 4.2 ifadesinden

$$\begin{aligned} h^{j}(x) &= \left(\left(u *_{1/q} v^{\underline{j}}\right) \overline{\circ} f\right)(x) \\ &= \left(\frac{1}{1+\frac{x}{q}} *_{1/q} \left(\frac{x}{1+\frac{x}{q}}\right)^{\underline{j}} \overline{\circ} f\right)(x) \end{aligned}$$

dir. j. sütun üreteç fonksiyonu $g(x) *_q h^{j}(x)$ olan dizinin elemanlarından oluşur.

$$\begin{aligned} \left(u *_{1/q} v^{\underline{j}}\right)(x) &= \frac{1}{1+\frac{x}{q}} \cdot \frac{\frac{x}{q}}{1+\frac{x}{q^2}} \cdots \frac{\frac{x}{q^j}}{1+\frac{x}{q^{j+1}}} \\ &= \sum_{n\geq j} \frac{(-1)^{n-j}}{q^{n(j+1)-\binom{j+1}{2}}} \binom{n}{j}_q x^n \end{aligned}$$

$$\left(\left(u *_{1/q} v^{\underline{j}}\right) \overline{\circ} f\right)(x) = \sum_{n\geq j} \frac{(-1)^{n-j}}{q^{n(j+1)-\binom{j+1}{2}}} \binom{n}{j}_q (f(x))^{\overline{n}}$$

$$\begin{aligned} g(x) *_q \left(\left(u *_{1/q} v^{\underline{j}}\right) \overline{\circ} f\right)(x) &= \frac{1}{1-x} *_q \sum_{n1\geq j} \frac{(-1)^{n-j}}{q^{n(j+1)-\binom{j+1}{2}}} \binom{n}{j}_q (f(x))^{\overline{n}} \\ &= \frac{1}{1-x} \sum_{n\geq j} \frac{(-1)^{n-j}}{q^{n(j+1)-\binom{j+1}{2}}} \binom{n}{j}_q (f(qx))^{\overline{n}} \\ &= \sum_{n\geq j} \frac{(-1)^{n-j}}{q^{n(j+1)-\binom{j+1}{2}}} \binom{n}{j}_q \frac{1}{1-x} \frac{qx}{1-qx} \cdots \frac{q^n x}{1-q^n x} \\ &= \sum_{n\geq j} \frac{(-1)^{n-j}}{q^{n(j+1)-\binom{j+1}{2}}} \binom{n}{j}_q q^{\binom{n+1}{2}} \frac{x^n}{(1-x)_q^{n+1}} \\ &= \sum_{n\geq j} (-1)^{n-j} \binom{n}{j}_q q^{\binom{n-j}{2}} \frac{x^n}{(1-x)_q^{n+1}} \end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 2.6 ifadesinde $k = j$ ve $m = 0$ alındığında yukarıdaki eşitlik elde edilir. O halde

$$g(x) *_q \left(\left(u *_{1/q} v^{\underline{j}}\right) \overline{\circ} f\right)(x) = x^j$$

dir. Yani j. sütun $(0,0,\ldots,0,1,0,\ldots)^T$ şeklindedir. O halde buradan

$$\left(\frac{1}{1-x},\frac{x}{1-x}\right)_q \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{x}{q}},\frac{x}{1+\frac{x}{q}}\right)_{1/q} = (1,x)$$

dir.

Yukarıdaki örnek $q-$Pascal matrisi ile tersinin çarpımının birim matris olduğunu $q-$Riordan kavramı yardımıyla elde edildiğini göstermektedir. Ayrıca $q \to 1^-$ iken

$$\left(\frac{1}{1-x},\frac{x}{1-x}\right) \cdot \left(\frac{1}{1+x},\frac{x}{1+x}\right) = (1,x)$$

olur. Bu bilinen Pascal matrisi ve tersinin çarpımının birim matris olduğunu Riordan kavramı yoluyla elde edilişine dönüştürmektedir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, $q-$kalkülüs ve Riordan grup kavramlarının gelişimi hakkında bilgi verilmiştir. Ayrıca bu iki kavramın kombine edilmesi sonucu yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir. İkinci bölümde, gelecek bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlara ve bazı tanımlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, sonsuz alt üçgen matrisleri belli bir kurala göre sembolize eden Riordan gösterimin $q-$benzeri elde edilmiştir. Dördüncü bölümde, $q-$Riordan gösterime sahip matrislerin çarpımı sonucu oluşabilecek 4 farklı durum incelenmiştir ve bu duruma uyan örnekler verilmiştir.

Yapılan çalışma, Riordan gösterimlerin daha genelini elde etme bakımından önem taşımaktadır. Üstelik $q \to 1^{-}$ iken elde edilen bu yeni $q-$gösterim kavramının bilinen Riordan gösterime dönüşmesi matematiksel açıdan daha genelinin elde edildiğinin kanıtıdır. Bu genelleştirme $q-$kalkülüs kullanılarak yapılan bir genelleştirmedir. Umbral kalkülüs kullanılarak yapılabilecek genelleştirme ise bir araştırma konusudur.

KAYNAKLAR

1. Shapiro, L., Getu, W. S., Woan, W. J. and Woodson, L. C. (1991). The Riordan group. ***Discrete Applied Mathematics***, 34, 229-239.

2. Sprugnoli, R. (1994). Riordan arrays and combinatorial sums. ***Discrete Mathematics***, 132, 267-290.

3. Carlitz, L. (1970). Sequences and inversions. ***Duke Mathematical Journal***, 37(1), 193-198.

4. Lee, G. Y. and Cho, S. H. (2008). The generalized Pascal matrix via the generalized Fibonacci matrix and the generalized Pell matrix. ***Journal of the Korean Mathematical Society***, 45(2), 479-491.

5. İnternet: Barry, P. A study of integer sequences, Riordan arrays, Pascal-like arrays and hankel transforms. URL: http://www.webcitation.org/query?url=http://repository.wit.ie/id/eprint/1379.

6. Lawden, G. H. (1972). Pascal matrices. ***Mathematical Gazette***, 56(398), 325-327.

7. İnternet: Ernst, T. $q-$Pascal and $q-$Bernoulli matrices and umbral approach. URL: http://www.webcitation.org/query?url=http%3A%2F%2Fwww2.math.uu.se%2Fresearch%2F+pub%2FErnst16.pdf.&date=2015-12-09. Son Erişim Tarihi: 09.12.2015.

8. Cheon, G., Jung, J. and Lim, Y. (2013). A $q-$analogue of the Riordan group. ***Linear Algebra and its Applications***, 439(12), 4119–4129.

9. Tuglu, N., Yesil, F., Kocer, G. E. and Dziemianczuk, M. (2014). The F-analogue of Riordan representation of Pascal matrices via fibonomial coefficients. ***Journal of Applied Mathematics***, Article ID 841826.

10. Garsia, A. (1981). A $q-$analogue of the Lagrange inversion formula. ***Houston Journal of Mathematics***, 7, 205–237.

11. Carlitz, L. (1973). Some $q-$expansion formulas. ***Glasnik Matematicki Serija***, 8, 205–214.

12. Merlini, D., Rogers, D. G., Sprugnoli, R. and Verri, M. C. (1997). On some alternative characterizations of Riordan arrays. ***Canadian Journal of Mathematics***, 49(2), 301–320.

13. Rogers, D. G. (1978). Pascal triangles, Catalan numbers and renewal arrays. ***Discrete Mathematics***, 22, 301–310.

14. Call, G. S. and Velleman, D. J. (1993). Pascal's matrices. ***The American Mathematical Monthly***, 100, 372-376.

15. İnternet: Sprugnoli, R. An introduction to mathematical methods in combinatorics. URL: http://www.webcitation.org/query?url=http%3A%2F%2Fwww.dsi.unifi.+it%2F%7Eresp%2FHandbook.pdf.&date=2015-12-09. Son Erişim Tarihi: 09.12.2015.

16. Barry, P. (2006). On integer-sequence-based constructions of generalized Pascal triangles. ***Journal of Integer Sequences***, 9, Article 06.2.4.

17. Fürst, C. (2011). *Combinatorial sums: Egorychev's method of coefficients and Riordan arrays*. M.Sc. Thesis, Research Institute for Symbolic Computation, Johannes Kepler University, Linz, Austria.

18. Barry, P. (2013). A note on a family of generalized Pascal matrices defined by Riordan arrays. ***Journal of Integer Sequences***, 16, Article 13.5.4.

19. Hennessy, A. (2011).*A study of Riordan arrays with applications to continued fractions, orthogonal polynomials and lattice paths*, Ph.D. Thesis, Waterford Institute of Technology, Waterford, Ireland.

20. Luzon, A., Merlini, D., Moron, M. A. and Sprugnoli, R. (2012). Identities induced by Riordan arrays. ***Linear Algebra and its Applications***, 436, 631-647.

21. Merlini, D. and Sprugnoli, R. (2002). A Riordan array proof of a curious identity. ***Electronic Journal of Combinatorial Number Theory,*** 2:A08.

22. Merlini, D. and Verri, M.C. (2000). Generating trees and proper Riordan arrays. ***Discrete Mathematics***, 218, 167-183.

23. Riordan, J. (1958). *An Introduction to Combinatorial Analysis*. John Wiley&Sons Inc., New Jersey, USA.

24. Agarwal, A. K. and Srivastava, H. M. (1989). Generating functions for a class of $q-$polynomials. ***Annali di Matematica Pura ed Applicata***, 154(4), 99–109.

25. Bailey, W. N. (1941). A note on certain $q-$identities. ***Quarterly Journal of Mathematics***, 12, 173–175.

26. Cigler, J. (1982). Elementare $q-$identitäten. ***Publications Institut de Recherche Mathématique Avancée***, 23–57.

27. Ernst, T. (2002). *A new method for $q-$calculus*. Uppsala Dissertations, Uppsala, Sweden.

28. Ernst, T. (2012). *A Comprehensive Treatment of q−Calculus*, Birkhäuser, New York, USA.

29. Heine, E. (1860). Über die Zähler und nenner der Näherungswerte von Kettenbrüchen. ***Journal für die reine und angewandte Mathematik***, 57, 231–247.

30. Roman, S. (1984). *The Umbral Calculus*. Pure and Applied Mathematics series, Academic Press, New York, USA.

31. Srivastava, H. M. (1986). A class of finite $q-$series. ***Rendiconti del Seminario matematico della Università di Padova***, 75, 15–24.

32. Srivastava, H. M. (1984). A family of $q-$generating functions. ***Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica***, 12, 327–336.

33. Cauchy, A. (1843). Mémoire sur les fonctions dont plusiers valeurs sont liées entre elles par une équation linéaire, et sur diverses transformations de produits composés d'un nombre indéfinie de facteurs. ***Comptes Rendus de l'Académie des Sciences***, 17, 526–534.

34. Kac, V. and Cheung, P. (2001). *Quantum Calculus*, Springer, New York, USA.

35. Euler, L. (1748). *Introductio in Analysin Infinitorum*, Lausanne, Switzerland.

36. Cheon, G. and Jung, J. (2015). Some combinatorial applications of the $q-$Riordan matrix. ***Linear Algebra and its Applications***, 482, 241–260.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	:	YEŞİL, Fatma
Uyruğu	:	T.C.
Doğum tarihi ve yeri	:	25.01.1987, Ankara
Medeni hali	:	Bekar
Telefon	:	0 (312) 335 76 44
e-mail	:	ftm1618ysl@gmail.com



Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi Matematik Bölümü	2011
Lisans	GÜ Kırşehir Fen Ed. Fak. Matematik Böl.	2009
Lise	Halide Edip Lisesi	2005

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2010-1011	Amasya Üniversitesi Matematik Bölümü	Araştırma Görevlisi
2011-	Gazi Üniversitesi Matematik Bölümü	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Tuglu, N., Yesil, F., Kocer, G. E. and Dziemianczuk, M. (2014). The F-Analogue of Riordan Representation of Pascal Matrices via Fibonomial Coeffcients. ***Journal of Applied Mathematics***, Article ID 841826.

2. Yesil, F., Tuglu, N., Kızılateş, C. (2015). Some $q-$Matrices Related to Z-Transform. ***Mathematical Sciences and Applications E-Notes***, 3 (1), 18-24.

Hobiler

Tenis oynamak, gitar çalmak, halk oyunları oynamak.



GAZİ GELECEKTİR...