
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

TAMAMLAYICI REVAN İNDEKSLERİ

Selma KAPLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2025

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Selma KAPLAN

26/06/2025

REVAN TAMAMLAYICI İNDEKSLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Selma KAPLAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2025

ÖZET

Bu çalışmada öncelikle birinci Revan, ikinci Revan, F-Revan ve Revan Sombor tamamlayıcı indeksleri tanımlanmış ve bu indeksler için alt ve üst sınırlar elde edilmiştir. Daha sonra birleşim, toplam ve kartezyen çarpım graf işlemlerinin bu indeksler için sınırları bulunmuştur. Son olarak Lopinavir ve Ritonavir antiviral ilaçların kimyasal yapısı kullanılarak tanımlanan indeksler için hesaplanmıştır.

BilimKodu	:	20401
AnahtarKelimeler	:	Graf, revan indeks, tamamlayıcı revan indeks
Sayfa Adedi	:	47
Danışman	:	Dr. Öğr. Üyesi Gül ÖZKAN KIZILIRMAK

REVAN COINDICES

(M. Sc. Thesis)

Selma KAPLAN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2025

ABSTRACT

In this study, the first Revan, second Revan, F-Revan, and Revan Sombor coindices are initially defined, and lower and upper bounds for these coindices are obtained. Then, the bounds for these coindices are determined for the union, sum, and Cartesian product graph operations. Finally, the defined coindices are calculated using the chemical structures of the antiviral drugs Lopinavir and Ritonavir.

ScienceCode	:	20401
Key Words	:	Graph, revan index, revan coindex
Page Number	:	47
Supervisor	:	Assist. Prof. Dr. Gül ÖZKAN KIZILIRMAK

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamız boyunca hem tecrübelerini hem de manevi desteğini esirgemeyen saygıdeğer danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Gül ÖZKAN KIZILIRMAK hocama,

Hayatım boyunca her zaman yanımda olan, benden manevi desteklerini esirgemeyen oğullarım H. Mert KAPLAN ve M. Ahmet KAPLAN'a teşekkürlerimi sunuyorum.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

ÇİZELGELERİN LİSTESİ xi

ŞEKİLLERİN LİSTESİ xii

SİMGELER VE KISALTMALAR xiii

1. GİRİŞ 1

2.TEMEL KAVRAMLAR 3

2.1. Temel Graf Kavramları 3

2.1.1. Tanım 3

2.1.2. Tanım 3

2.1.3. Tanım 3

2.1.4. Tanım 4

2.1.5. Tanım 4

2.2. Graf İşlemleri 5

2.2.1. Tanım 5

2.2.2. Tanım 5

2.2.3. Tanım 5

3. REVAN İNDEKSLER VE TAMAMLAYICI İNDEKSLERİ 7

3.1. Revan İndeksler 7

3.1.1. Tanım 7

3.1.2. Tanım 7

3.1.3. Tanım 7

Sayfa

3.1.4. Tanım 8

3.1.5. Tanım 8

3.2. Revan Tamamlayıcı İndeksler 8

4. BİRİNCİ VE İKİNCİ REVAN TAMAMLAYICI İNDEKSLERİNİN İNCELENMESİ 11

4.1. Birinci Revan Tamamlayıcı İndeks için Sınırlar 12

4.1.1. Teorem 12

4.1.2. Teorem 12

4.1.3. Teorem 13

4.2. Bazı Graf İşlemleri ile Birinci Revan Tamamlayıcı İndeksi İçin Sınırlar 14

4.2.1. Teorem 14

4.2.2. Teorem 15

4.2.3. Teorem 16

4.2.4.Teorem 16

4.3. İkinci Revan Tamamlayıcı İndeks için Sınırlar 17

4.3.1. Teorem 17

4.3.2. Teorem 17

4.3.3. Teorem 18

4.4. Bazı Graf İşlemlerinin İkinci Revan Tamamlayıcı İndeksi İçin Sınırlar 19

4.4.1. Teorem 19

4.4.2. Teorem 20

4.4.3. Teorem 21

4.4.4. Teorem 22

5. REVAN SOMBOR TAMAMLAYICI İNDEKSLERİNİN İNCELENMESİ 23

5.1. Revan Sombor Tamamlayıcı İndeks ile Bazı Tamamlayıcı İndeksler Arasındaki İlişkiler 23

Sayfa

5.1.1. Teorem 23
5.1.2. Teorem 23
5.1.3. Teorem 24
5.2. Bazı Graf İşlemleri ile Revan Sombor Tamamlayıcı İndeksi İçin Sınırlar 25
5.2.1. Teorem 25
5.2.2. Teorem 26
5.2.3. Teorem 27
5.2.4. Teorem 28
6. UNUTULMUŞ F-REVAN TAMAMLAYICI İNDEKSİNİN İNCELENMESİ 29
6.1. Unutulmuş F-Revan Tamamlayıcı İndeks için Sınırlar 29
6.1.1. Teorem 29
6.1.2. Teorem 29
6.1.3. Teorem 30
6.2. Bazı Graf İşlemlerinin F-Revan Tamamlayıcı İndeksi İçin Sınırlar 31
6.2.1. Teorem 31
6.2.2. Teorem 32
6.2.3. Teorem 33
6.2.4. Teorem 33
7. ANTİVİRAL İLAÇLARIN KİMYASAL YAPILARININ TAMAMLAYICI REVAN İNDEKSLERLE İNCELENMESİ 35
7.1. Lopinavir için Revan Tamamlayıcı İndeks Hesaplamaları 35
7.1.1. Teorem 36
7.1.2. Teorem 37
7.1.3. Teorem 37
7.1.4. Teorem 38
7.2. Ritonavir için Revan Tamamlayıcı İndeks Hesaplamaları 39

Sayfa

7.2.1. Teorem 40

7.2.2. Teorem 40

7.2.3. Teorem 41

7.2.4. Teorem 42

8. SONUÇ VE ÖNERİLER 43

KAYNAKLAR 45

ÖZGEÇMİŞ 47

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

Çizelge 7.1. GL moleküler grafının kenar-bölümleme kümelerinin kardinalitesi 36

Çizelge 7.2. GR moleküler grafının kenar-bölümleme kümelerinin kardinalitesi..... 39

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

Şekil 2.1. Dört noktalı bir graf 3

Şekil 7.1. Lopinavir ‘in moleküler grafı 36

Şekil 7.2. Ritonavir’in moleküler grafı 39

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$\overline{\boldsymbol{RSO}}(\boldsymbol{G_1}[\boldsymbol{G_2}])$	G_1 ve G_2 graflarının bileşkesinin Revan Sombor tamamlayıcı indeksi
$\overline{\boldsymbol{RSO}}(\boldsymbol{G_1}+\boldsymbol{G_2})$	G_1 ve G_2 graflarının toplamının Revan Sombor tamamlayıcı indeksi
$\overline{\boldsymbol{RSO}}(\boldsymbol{G_1}\cup\boldsymbol{G_2})$	G_1 ve G_2 graflarının birleşiminin Revan Sombor tamamlayıcı indeksi
$\overline{\boldsymbol{RSO}}(\boldsymbol{G_1}\square\boldsymbol{G_2})$	G_1 ve G_2 graflarının kartezyen çarpımının Revan Sombor tamamlayıcı indeksi
$\overline{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{1}}(\boldsymbol{G})$	G grafının birinci Revan tamamlayıcı indeksi
$\overline{\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{2}}}(\boldsymbol{G})$	G grafının ikinci Revan tamamlayıcı indeksi
$\overline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{1}}(\boldsymbol{G})$	G grafının birinci Zagreb tamamlayıcı indeksi
$\overline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{G})$	G grafının ikinci Zagreb tamamlayıcı indeksi
$\overline{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{G})$	G grafının unutulmuş topolojik tamamlayıcı indeksi
$\overline{\boldsymbol{G}}$	G grafının tamamlayıcısı
$\boldsymbol{G_1[G_2]}$	G_1 ve G_2 gibi iki grafın bileşkesi
$\boldsymbol{G_1+G_2}$	G_1 ve G_2 graflarının toplamı
$\boldsymbol{G_1\cup G_2}$	G_1 ve G_2 graflarının birleşimi
$\boldsymbol{G_1\square G_2}$	G_1 ve G_2 graflarının kartezyen çarpımı
$\boldsymbol{M_1(G)}$	G grafının birinci Zagreb indeksi
$\boldsymbol{V}(\overline{\boldsymbol{G}})$	$\bar{G}$ tamamlayıcı grafının noktalar kümesi
$\boldsymbol{V(G)}$	G basit grafının noktalar kümesi
$\boldsymbol{V(G_1\cup G_2)}$	Birleşim grafının nokta kümesi
$\boldsymbol{m}$	G grafının eleman(nokta) sayısı
$\boldsymbol{n}$	G grafının kenar sayısı
$\boldsymbol{\Delta(G)}$	G basit grafının maksimum derecesi
$\boldsymbol{\delta(G)}$	G basit grafının minimum derecesi

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{M_2(G)}$	G grafının ikinci Zagreb indeksi
$\boldsymbol{N_i}$	i'nin komşuluklar kümesi
$\boldsymbol{RKA^1_{a,b}(G)}$	Birinci Revan (a,b)-KA tamamlayıcı indeksi
$\boldsymbol{\overline{RKA}^2_{1,c}(G)}$	İkinci Revan (a,b)-KA tamamlayıcı indeksi
$\boldsymbol{d_G(u)}$	G grafının u noktasının derecesi
$\boldsymbol{e_i \sim e_j}$	e_i ve e_j komşu kenarlar
$\boldsymbol{e_{ij}}$	E nin i ve j noktalarına karşılık gelen elemanları
$\boldsymbol{\bar{m}}$	$\bar{G}$ tamamlayıcı grafının eleman sayısı
$\boldsymbol{E(G)}$	G basit grafının kenarlar kümesi
$\boldsymbol{E(\bar{G})}$	$\bar{G}$ tamamlayıcı grafının kenarlar kümesi
$\boldsymbol{E(G_1 \cup G_2)}$	Birleşim grafının kenar kümesi
$\boldsymbol{F(G)}$	G grafının unutulmuş topolojik indeksi
$\boldsymbol{G}$	Basit graf
$\boldsymbol{G = (V, E)}$	V kenarlı E noktalı bir G grafı
$\boldsymbol{\overline{FR}(G)}$	G grafının unutulmuş Revan tamamlayıcı indeksi
$\boldsymbol{FR(G)}$	G grafının unutulmuş Revan indeksi

1. GİRİŞ

Graf teorisinin kökenleri, 18. yüzyılda Leonhard Euler'in Königsberg köprüleri problemi üzerine yaptığı çalışmalarla şekillenmiştir. Pregel Nehri'nin şehir yapısını dört bölgeye ayırdığı ve bu bölgelerin yedi köprüyle birbirine bağlandığı bu problem, dönem halkının her köprüden yalnızca bir kez geçilerek yürüyüş yapma isteğiyle gündeme gelmiştir. Euler, bu problemin çözümünün geometrik bir mesele değil, yapısal bir bağlantı problemi olduğunu göstermiş ve bu bağlamda "geometriam situs" (konum geometrisi) adını verdiği yeni bir yaklaşım önermiştir. Bu çalışma, modern graf teorisinin temel taşlarından biri olarak kabul edilir.

Zamanla graf teorisi, yalnızca soyut matematiksel yapılarla sınırlı kalmayıp, kimya, bilgisayar bilimi ve biyoinformatik gibi birçok alanda uygulanabilir bir araç haline gelmiştir. Özellikle moleküler yapıların modellenmesinde kullanılan derece tabanlı topolojik indeksler, graf teorisinin kimyasal graflara uygulanmasında kritik bir rol üstlenmiştir. Bu bağlamda geliştirilen Revan, F-Revan ve Revan-Sombor indeksleri, kimyasal ve yapısal özelliklerin daha hassas biçimde incelenmesine olanak sağlamaktadır.

Revan indeksi, bir grafın yapısal çeşitliliğini tanımlamak için geliştirilmiş olup, maksimum ve minimum derecelerin katkısıyla her noktasının "Revan derecesi" üzerinden hesaplanır. Bu indeksin F-Revan ve Revan-Sombor gibi türevleri de, moleküler grafların özelliklerini açıklamada daha güçlü öngörüler sunmaktadır. Literatürde F-Revan indeksinin özellikle benzenoid sistemler üzerindeki etkisi, Revan-Sombor indeksinin ise farmasötik moleküllerin yapısal analizi üzerindeki başarısı dikkat çekicidir.

Bu çalışmada öncelikle Revan ailesine ait dört farklı tamamlayıcı indeks (Birinci Revan, İkinci Revan, F-Revan ve Revan-Sombor) tanımlanmış ve bu indeksler için teorik alt ve üst sınırlar elde edilmiştir. Ayrıca birleşim, toplam ve kartezyen çarpım gibi temel graf işlemlerinin bu indeksler üzerindeki etkileri araştırılmıştır. Son olarak, bu indekslerin pratik geçerliliği Lopinavir ve Ritonavir gibi antiviral ilaçların moleküler yapıları üzerinde yapılan hesaplamalarla ortaya konmuştur. Böylece bu tez, hem kuramsal hem de uygulamalı açıdan yeni nesil topolojik indekslerin etkinliğini ortaya koymaktadır.

2.TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Temel Graf Kavramları

2.1.1. Tanım

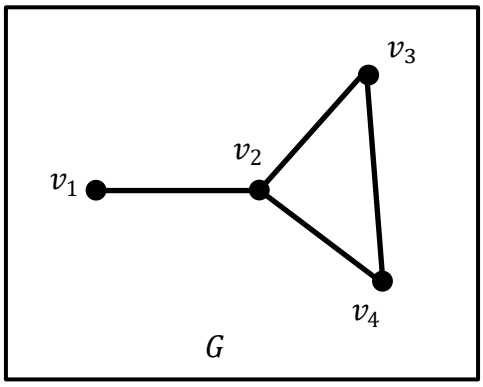
Graf, elemanları nokta olarak adlandırılan sonlu, boş olmayan $V = (1,2, \dots, n)$ noktalar kümesi ve elemanları kenar olarak adlandırılan sonlu E kenarlar kümesinden oluşan (V, E) ikili yapısına denir ve $G = (V, E)$ ya da kısaca G ile gösterilir.

Burada $E = \{\{i, j\} : i, j \in V\}$ şeklinde tanımlıdır. Ayrıca her $i, j \in V$ için E nin i ve j noktalarına karşılık gelen elemanları e_{ij} veya ij şeklinde gösterilir [1].

2.1.2. Tanım

$G = (V, E)$ bir graf olmak üzere, G nin herhangi i ve j noktaları arasında en az bir kenar bulunuyorsa i ve j noktalarına komşudur denir ve $i \sim j$ ile gösterilir. Bir i noktasına komşu olan noktaların kümesine i'nin komşuluklar kümesi denir ve N_i ile gösterilir [1].

Örnek*;*



Şekil 2.1. Dört noktalı bir graf

Şekil 2.1 ile verilen G grafı için,

$v_1 \sim v_2$ olup v_1 noktasının komşuluklar kümesi $N_{v_1} = \{v_2\}$,

$v_2 \sim v_1$, $v_2 \sim v_3$, $v_2 \sim v_4$ olup v_2 noktasının komşuluklar kümesi $N_{v_2} = \{v_1, v_3, v_4\}$,

$v_3 \sim v_2$, $v_3 \sim v_4$ olup v_3 noktasının komşuluklar kümesi $N_{v_3} = \{v_2, v_4\}$,

$v_4 \sim v_2$, $v_4 \sim v_3$ olup v_4 noktasının komşuluklar kümesi $N_{v_4} = \{v_2, v_3\}$ dir.

Ayrıca bir grafın herhangi e_i ve e_j kenarlarının ortak bir noktası bulunuyorsa bu iki kenara komşu kenarlar denir ve $e_i \sim e_j$ ile gösterilir [1].

Şekil 2.1 ile verilen G grafı için $e_1 \sim e_2$, $e_2 \sim e_1$, $e_2 \sim e_3$, $e_2 \sim e_4$, $e_3 \sim e_2$, $e_3 \sim e_4$, $e_4 \sim e_2$ve $e_4 \sim e_3$ dir.

2.1.3. Tanım

$G = (V, E)$ grafının herhangi bir i noktasına bağlı kenar sayısına i'nin derecesi denir ve $d_G(i)$ ya da kısaca d_i ile gösterilir.

Bir G grafının, minimum ve maksimum dereceleri sırasıyla $\delta(G) = \min\{d_i : i \in V\}$ ve $\Delta(G) = \max\{d_i : i \in V\}$ şeklinde tanımlıdır. Bu tanıma göre $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$ bağıntısı da mevcuttur [1].

2.1.4. Tanım

Herhangi iki noktası arasında en fazla bir kenar bulunan ve ilmek içermeyen grafa basit graf denir [1].

2.1.5. Tanım

Herhangi iki noktası arasında bir yol bulunan grafa bağlantılı graf denir [1].

2.2. Graf İşlemleri

2.2.1. Tanım

$\mathrm{G_1} = (\mathrm{V_1}, \mathrm{E_1})$ ve $\mathrm{G_2} = (\mathrm{V_2}, \mathrm{E_2})$ iki graf olmak üzere bu iki grafın birleşiminin noktalar kümesi $\mathrm{V}(\mathrm{G_1} \cup \mathrm{G_2}) = \mathrm{V_1} \cup \mathrm{V_2}$ ve kenarlar kümesi $\mathrm{E}(\mathrm{G_1} \cup \mathrm{G_2}) = \mathrm{E_1} \cup \mathrm{E_2}$ olmak üzere $\mathrm{G_1} \cup \mathrm{G_2} = (\mathrm{V}(\mathrm{G_1} \cup \mathrm{G_2}), \mathrm{E}(\mathrm{G_1} \cup \mathrm{G_2}))$ şeklinde tanımlıdır [2].

2.2.2. Tanım

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ noktalar kümesi ayrık iki graf olmak üzere bu iki grafın toplamı $V_1 \cap V_2$ noktalarından ve G_1'in her bir noktasını G_2'nin her bir noktasına bağlayan kenarlardan oluşan bir graf olup $G_1 + G_2 = (V_1 + V_2, E_1 + E_2)$ şeklinde gösterilir [2].

2.2.3. Tanım

G_1 ve G_2 graflarının kartezyen çarpımı $G_1 \square G_2$, noktalar kümesi $V(G_1) \times V(G_2)$ olan bir graftır. Burada $u_1 = v_1$ ve $u_2v_2 \in E(G_2)$ veya $u_2 = v_2$ ve $u_1v_1 \epsilon E(G_1)$ olması durumunda $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ ye komşudur. Ayrıca $n_i = |V(G_i)|$ ve $m_i = |E(G_i)|$ $(i = 1,2)$ olmak üzere $G_1 \square G_2$'nin kenar sayısı $n_1m_2 + m_1n_2$ ve $G_1 \square G_2$'nin (u_1, u_2) elemanının derecesi $d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2)$ dir [2].

3. REVAN İNDEKSLER VE TAMAMLAYICI İNDEKSLERİ

3.1. Revan İndeksler

Revan indeksleri, son yıllarda özellikle kimyasal graf teori alanında dikkat çeken, derece tabanlı topolojik indekslerdir [3]. Burada Revan derecesi, G grafındaki bir nokta için

$r_G(u) = \Delta(G) + \delta(G) - d_G(u)$ şeklinde tanımlıdır.

3.1.1. Tanım

Bir G grafının birinci Revan indeksi

$$R_1(\mathrm{G}) = \sum_{uv \in E(G)} \left(\mathrm{r}_G(u) + \mathrm{r}_G(v)\right) \tag{3.1}$$

ve ikinci Revan indeksi

$$R_2(\mathrm{G}) = \sum_{\mathrm{uv} \in \mathrm{E(G)}} \mathrm{r_G}(u)\mathrm{r_G}(v) \tag{3.2}$$

olarak tanımlanmıştır [3].

3.1.2. Tanım

Bir G grafının F-Revan indeksi

$$FR(G) = \sum_{uv \in E(G)} (r_G(u)^2 + r_G(v)^2) \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlanmıştır [4].

3.1.3. Tanım

Bir G grafının Revan Sombor indeksi

$$RSO(G) = \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{r_G(u)^2 + r_G(v)^2} \tag{3.4}$$

olarak tanımlanmıştır [5].

3.1.4. Tanım

Bir G grafının birinci Revan (a,b)-KA indeksi

$$RKA^1_{a,b}(G) = \sum_{uv \in E(G)} (r_G(u)^a + r_G(v)^a)^b \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlanmıştır [6].

3.1.5. Tanım

Bir G grafının ikinci Revan (a,b)-KA indeksi

$$RKA^2_{1,c}(G) = \sum_{uv \in E(G)} (r_G(u) r_G(v))^c \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlanmıştır [6].

3.2. Revan Tamamlayıcı İndeksler

Bazı grafların bileşkelerinde nokta ağırlıklı Wiener polinomları hesaplanırken komşu olmayan nokta çiftlerinin katkı sağladığı görülmüş ve tamamlayıcı indeks kavramı ortaya çıkmıştır [7]. Bu tanımlama ışığında sırasıyla birinci Revan, ikinci Revan, Revan Sombor, F-Revan, birinci ve ikinci Revan (a,b)-KA tamamlayıcı indekslerini şu şekilde tanımladık:

$$\overline{R_1}(G) = \sum_{uv \notin E(G)} \left(r_G(u) + r_G(v)\right) \tag{3.6}$$

$$\overline{R_2}(G) = \sum_{uv \notin E(G)} r_G(u) r_G(v) \tag{3.7}$$

$$\overline{RSO}(G) = \sum_{uv \notin E(G)} \sqrt{r_G(u)^2 + r_G(v)^2} \tag{3.8}$$

$$\overline{FR}(G) = \sum_{uv \notin E(G)} (r_G(u)^2 + r_G(v)^2) \tag{3.9}$$

$$RKA^1_{a,b}(G) = \sum_{uv \in E(G)} (r_G(u)^a + r_G(v)^a)^b \tag{3.10}$$

$$\overline{RKA}^2_{1,c}(G) = \sum_{uv \notin E(G)} (r_G(u) r_G(v))^c \tag{3.11}$$

4. BİRİNCİ VE İKİNCİ REVAN TAMAMLAYICI İNDEKSLERİNİN İNCELENMESİ

Bu bölümde, tanımladığımız birinci ve ikinci Revan tamamlayıcı indeksleri için F-tamamlayıcı indeksi, ikinci Revan (a,b)-KA tamamlayıcı ve Revan Sombor tamamlayıcı indekslerine bağlı sınırlar bulunmuştur. Daha sonra birleşim, toplam ve kartezyen çarpım graf işlemlerinin bu indeksler için sınırları elde edilmiştir. Bu bölümde graflar basit bağlantılı graf olarak alınacaktır.

Öncelikle elde edilecek sonuçlar için gerekli olan eşitsizlikleri verelim.

1. Lemma (P′olya-Szegö Eşitsizliği):

$a_1, a_2, \dots a_s$ ve $b_1, b_2, \dots b_s$ pozitif reel sayılar olsun. $k = 1,2, \dots s$ için

$0 < a \leq a_k \leq A < \infty$ ve $0 < b \leq b_k \leq B < \infty$ olacak şekilde a, b, A, B reel sayıları varsa o zaman

$$\frac{\sum_{k=1}^{S} a_k^2 \ \sum_{k=1}^{S} b_k^2}{[\sum_{k=1}^{S} a_k \, b_k]^2} \leq \frac{(a\, b + A\, B)^2}{4\, a\, b\, A\, B} \tag{4.1}$$

dir.

2. Lemma (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)

$a_1, a_2, \dots a_s$ ve $b_1, b_2, \dots b_s$ pozitif reel sayılar olsun. $k = 1,2, \dots s$ için

$$\left(\sum_{k=1}^{S} a_k \ b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{S} a_k^2 \sum_{k=1}^{S} b_k^2 \tag{4.2}$$

dır.

4.1. Birinci Revan Tamamlayıcı İndeks için Sınırlar

Bir G grafının tamamlayıcısı $\bar{G}$ ile gösterilir ve noktalar kümesi G 'nin noktalar kümesi $V(G)$ ile aynı ve kenarlar kümesi $E(\bar{G})$ olan basit bir graftır. $\bar{G}$ grafının kenar sayısı $\overline{m}$ dir.

4.1.1. Teorem

G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman G grafının birinci Revan tamamlayıcı indeksi için alt ve üst sınırlar;

$$\overline{m}(2\delta) \leq \overline{R_1}(G) \leq \overline{m}(2\Delta) \tag{4.3}$$

dir.

İspat;

Birinci Revan tamamlayıcı indeksinde dereceleri en küçük derece olarak alındığında ifade küçülmüş olur ve alt sınırı elde edilir. Benzer şekilde en büyük dereceleri alarak da üst sınır elde edilir. □

4.1.2. Teorem

G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman G grafının birinci Revan tamamlayıcı indeksi için bir alt sınır

$$\sqrt{\frac{32\delta\Delta\left(\overline{FR}(G) + 2\overline{R_2}(G)\right)\overline{m}}{(2\delta + 4\Delta)^2}} \leq \overline{R_1}(G) \tag{4.4}$$

şeklindedir.

İspat;

Lemma 1'de $a_k = r_G(u) + r_G(v)$, $b_k = 1$ alınır ve $a = 2\delta$, $b = 1$, $A = 2\Delta$, $B = 2$ seçilirse $0 < a \leq a_k \leq A < \infty$ ve $0 < b \leq b_k \leq B < \infty$ koşulları sağlanır. Buradan

$$\frac{\sum_{uv\notin E(G)}\ (r_G(u)+r_G(v))^2 \sum_{uv\notin E(G)}\ 1}{(\sum_{uv\notin E(G)}\ (r_G(u)+r_G(v))^2} \leq \frac{(2\delta+4\Delta)^2}{32\delta\Delta}$$

elde edilir. Birinci ve ikinci Revan tamamlayıcı ve F-Revan tamamlayıcı indekslerinin tanımları kullanılarak,

$$\frac{\left(\overline{FR}(G)+2\overline{R_2}(G)\right)\overline{m}}{(\overline{R_1}(G))^2} \leq \frac{(2\delta+4\Delta)^2}{32\delta\Delta}$$

olup buradan

$$\frac{32\delta\Delta\left(\overline{FR}(G)+2\overline{R_2}(G)\right)\overline{m}}{(2\delta+4\Delta)^2} \leq (\overline{R_1}(G))^2$$

bulunur. Böylece

$$\sqrt{\frac{32\delta\Delta\left(\overline{FR}(G)+2\overline{R_2}(G)\right)\overline{m}}{(2\delta+4\Delta)^2}} \leq \overline{R_1}(G)$$

elde edilir. □

4.1.3. Teorem

G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman bir G grafının birinci Revan tamamlayıcı indeksi için bir üst sınır,

$$\overline{R_1}(G) \leq \sqrt{\overline{m}\left(\overline{FR}(G)+2\overline{R_2}(G)\right)} \qquad (4.5)$$

şeklindedir.

İspat;

Lemma 2'de $a_k = r_G(u) + r_G(v)$, $b_k = 1$ alınır ve $a = 2\delta$, $b = 1$, $A = 2\Delta$, $B = 2$ seçilirse $0 < a \leq a_k \leq A < \infty$ ve $0 < b \leq b_k \leq B < \infty$ koşulları sağlanır. Buradan

$$\left[\sum_{uv\notin E(G)}\left(r_G(u)+r_G(v)\right)\right]^2 \leq \sum_{uv\notin E(G)}\left(r_G(u)+r_G(v)\right)^2 \sum_{uv\notin E(G)} 1^2$$

bulunur. Böylece

$$(\overline{R_1}(G))^2 \leq \left(\overline{FR}(G)+2\overline{R_2}(G)\right)\overline{m}$$

olup

$$\overline{R_1}(G) \leq \sqrt{\overline{m}\left(\overline{FR}(G)+2\overline{R_2}(G)\right)}$$

elde edilir.

4.2. Bazı Graf İşlemleri ile Birinci Revan Tamamlayıcı İndeksi İçin Sınırlar

Bu bölümde G_i $(i = 1,2)$ grafının en küçük derecesi δ_i, en büyük derecesi Δ_i olarak alınacaktır.

4.2.1. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı iki graf olsun. O zaman,

$$\bar{R}_1(G_1)+\bar{R}_1(G_2)+n_1n_2(\delta_1+\delta_2) \leq \bar{R}_1(G_1\cup G_2) \leq \bar{R}_1(G_1)+\bar{R}_1(G_2) + n_1n_2(\Delta_1+\Delta_2) \quad (4.6)$$

dir.

İspat;

İki grafın birleşim işlemi ve birinci Revan tamamlayıcı indeksinin tanımından

$$\bar{R}_1(G_1 \cup G_2) = \sum_{uv \notin E(G_1)} \left(r_{G_1}(u) + r_{G_1}(v)\right) + \sum_{uv \notin E(G_2)} \left(r_{G_2}(u) + r_{G_2}(v)\right) + \sum_{u \in v(G_1)} \sum_{v \in v(G_2)} \left(r_{G_1}(u) + r_{G_2}(v)\right)$$

dir. En büyük ve en küçük dereceler kullanılarak

$$\bar{R}_1(G_1) + \bar{R}_1(G_2) + n_1 n_2(\delta_1 + \delta_2) \leq \bar{R}_1(G_1 \cup G_2) \leq \bar{R}_1(G_1) + \bar{R}_1(G_2) + n_1 n_2(\Delta_1 + \Delta_2)$$

elde edilir. □

4.2.2. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı iki graf olsun. O zaman,

$$\bar{R}_1(G_1) + \bar{R}_2(G_2) + 2(n_2\delta_1 + n_1\delta_2) \leq \bar{R}_1(G_1 + G_2) \leq \bar{R}_1(G_1) + \bar{R}_2(G_2) + 2(n_2\Delta_1 + n_1\Delta_2) \quad (4.7)$$

dir.

İspat;

İki grafın toplamı ve birinci revan tamamlayıcı indeksinin tanımından

$$\bar{R}_1(G_1 + G_2) = \sum_{uv \notin E(G_1)} (r_{G_1}(u) + r_{G_1}(v)) + \sum_{\mathrm{uv} \notin \mathrm{E}(G_2)} (\mathrm{r}_{G_2}(u) + \mathrm{r}_{G_2}(v))$$

olup $u \in \mathrm{V}(G_1)$için $r_G(u) = r_{G_1}(u) + n_2$ ve $v \in \mathrm{V}(G_2)$ için $r_G(v) = r_{G_2}(v) + n_1$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\bar{R}_1(G_1 + G_2) = \sum_{uv \notin E(G_1)} (r_{G_1}(u) + n_2) + (r_{G_1}(v) + n_2) + \sum_{uv \notin E(G_2)} (r_{G_2}(u) + n_1) + (r_{G_2}(v) + n_1)$$

elde edilir. En büyük ve en küçük derece kullanılarak

$\bar{R}_1(G_1) + \bar{R}_2(G_2) + 2(n_2\delta_1 + n_1\delta_2) \leq \bar{R}_1(G_1 + G_2) \leq \bar{R}_1(G_1) + \bar{R}_2(G_2) + 2(n_2\Delta_1 + n_1\Delta_2)$

bulunur.

4.2.3. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı, m_1 ve m_2 kenarlı iki graf olsun. O zaman,

$$2(\delta_1 + \delta_2)\alpha \leq \bar{R}_1(G_1 \square G_2) \leq 2(\Delta_1 + \Delta_2)\alpha \quad (4.8)$$

dir. Burada $G_1 \square G_2$ grafının kenar sayısı $\alpha = n_1m_2 + m_1n_2$ dir.

İspat;

İki grafın kartezyen çarpımı ve birinci Revan tamamlayıcı indeksinin tanımından,

$$\bar{R}_1(G_1 \square G_2) = \sum_{u,v\notin E(G_1)} r_{G_1}(u_1) + r_{G_2}(u_2) + \sum_{u,v\notin E(G_2)} r_{G_1}(v_1) + r_{G_2}(v_2)$$

dir. En büyük ve en küçük derece kullanılarak,

$2(\delta_1 + \delta_2)\alpha \leq \bar{R}_1(G_1 \square G_2) \leq 2(\Delta_1 + \Delta_2)\alpha$

elde edilir. □

4.2.4.Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı, m_1 ve m_2 kenarlı iki graf olsun. O zaman,

$$2\beta(n_2\,\delta_1 + \delta_2) \leq \bar{R}_1(G_1[G_2]) \leq 2\beta(n_2\,\Delta_1 + \Delta_2) \quad (4.9)$$

dir. Burada $G_1[G_2]$ grafının kenar sayısı $\beta = n_1m_2 + m_1{n_2}^2$ dir.

İspat;

İki grafın bileşkesi ve birinci Revan tamamlayıcı indeksinin tanımından,

$$\bar{R}_1(G_1[G_2]) = \sum_{u,v\notin E(G_1)} n_2\, r_{G_1}(u_1) + r_{G_2}(u_2) \; + \sum_{u,v\notin E(G_2)} n_2\, r_{G_1}(v_1) + r_{G_2}(v_2)$$

dir. Burada en küçük derece ve en büyük derece göz önüne alındığında

$$2\beta(n_2\,\delta_1 + \delta_2) \le \bar{R}_1(G_1[G_2]) \le 2\beta(n_2\,\Delta_1 + \Delta_2)$$

elde edilir. □

4.3. İkinci Revan Tamamlayıcı İndeks için Sınırlar

4.3.1. Teorem

G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman G grafının ikinci Revan tamamlayıcı indeksi için alt ve üst sınırlar

$$\overline{m}(\delta^2) \le \overline{R_2}(G) \le \overline{m}(\Delta^2) \qquad (4.10)$$

dir.

İspat;

İkinci Revan tamamlayıcı indeksinde dereceleri en küçük derece olarak alındığında ifade küçülmüş olur ve alt sınırı elde edilir. Benzer şekilde en büyük dereceleri alarak da üst sınır elde edilir. □

4.3.2. Teorem

G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman G grafının ikinci Revan tamamlayıcı indeksi için bir alt sınır;

$$\frac{\sqrt{8\delta^2\Delta^2\overline{RKA_{1,2}^2}(G)\overline{m}}}{(\delta^2+2\Delta^2)} \leq \overline{R_2}(G) \tag{4.11}$$

şeklindedir.

İspat;

Lemma 1'de $a_k = r_G(u)\, r_G(v)$, $b_k = 1$ alınır ve $a = \delta^2$, $b = 1$ ve $A = \Delta^2$, $B = 2$ seçilirse $0 < a \leq a_k \leq A < \infty$ ve $0 < b \leq b_k \leq B < \infty$ koşulları sağlanır. Buradan,

$$\frac{\sum_{uv\notin E(G)} (r_G(u)^2 . r_G(v)^2) \sum_{uv\notin E(G)} 1^2}{(\sum_{uv\notin E(G)} (r_G(u) . r_G(v)))^2} \leq \frac{(\delta^2+2\Delta^2)^2}{8\delta^2\Delta^2}$$

elde edilir. İkinci Revan tamamlayıcı indeksi ve ikinci Revan (a,b)-KA tamamlayıcı indeksinin tanımları kullanılarak,

$$\frac{\overline{RKA_{1,2}^2}(G)\overline{m}}{\left(\overline{R_2}(G)\right)^2} \leq \frac{(\delta^2+2\Delta^2)^2}{8\delta^2\Delta^2}$$

bulunur ve buradan

$$\frac{\sqrt{8\delta^2\Delta^2\overline{RKA_{1,2}^2}(G)\overline{m}}}{(\delta^2+2\Delta^2)} \leq \overline{R_2}(G)$$

elde edilir. □

4.3.3. Teorem

G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman G grafının ikinci Revan tamamlayıcı indeksi için bir üst sınır;

$$\overline{R_2}(G) \leq \sqrt{\overline{RKA_{1,2}^2}(G)\overline{m}} \tag{4.12}$$

dır.

İspat;

Lemma 2'de $a_k = r_G(u)r_G(v),\ b_k = 1$ alınır ve $a = \delta^2, b = 1$ ve $A = \Delta^2, B = 2$ seçilirse $0 < a \leq a_k \leq A < \infty$ ve $0 < b \leq b_k \leq B < \infty$ sağlanır. Buradan,

$$\left[\sum_{uv \notin E(G)} r_G(u)r_G(v)\right]^2 \leq \sum_{uv \notin E(G)} (r_G(u)^2 r_G(v)^2) \sum_{uv \notin E(G)} 1^2$$

olup

$$\overline{RKA_{1,2}^2}(G) = \sum_{uv \notin E(G)} (r_G(u)^2 r_G(v)^2)$$

tanımı kullanılarak

$$\overline{R_2}(G) \leq \overline{RKA_{1,2}^2}(G)\ \overline{m}$$

bulunur. Buradan

$$\overline{R_2}(G) \leq \sqrt{\overline{RKA_{1,2}^2}(G)\overline{m}}$$

elde edilir. □

4.4. Bazı Graf İşlemlerinin İkinci Revan Tamamlayıcı İndeksi İçin Sınırlar

Bu bölümde G_i $(i = 1,2)$ grafının en küçük derecesi δ_i, en büyük derecesi Δ_i olarak alınacaktır.

4.4.1. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı iki graf olsun. O zaman,

$$\bar{R}_2(G_1) + \bar{R}_2(G_2) + n_1 n_2 \delta_1 \delta_2 \leq \bar{R}_2(G_1 \cup G_2) \leq \bar{R}_2(G_1) + \bar{R}_2(G_2) + n_1 n_2 \Delta_1 \Delta_2 \quad (4.13)$$

dir.

İspat;

İki grafın birleşim işlemi ve ikinci Revan tamamlayıcı indeksinin tanımından

$$\bar{R}_2(G_1 \cup G_2) = \sum_{uv \notin (G_1)} \left(r_{G_1}(u) r_{G_1}(v)\right) + \sum_{uv \notin E(G_2)} \left(r_{G_2}(u) r_{G_2}(v)\right) + \sum_{u \in v(G_1)} \sum_{v \in v(G_2)} \left(r_{G_1}(u) r_{G_2}(v)\right)$$

dir. Burada en büyük ve en küçük dereceler kullanılarak

$$\bar{R}_2(G_1) + \bar{R}_2(G_2) + n_1 n_2 \delta_1 \delta_2 \leq \bar{R}_2(G_1 \cup G_2) \leq \bar{R}_2(G_1) + \bar{R}_2(G_2) + n_1 n_2 \Delta_1 \Delta_2$$

elde edilir. □

4.4.2. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı iki graf olsun. O zaman,

$$\bar{R}_2(G_1) + \bar{R}_2(G_2) + n_2(2\delta_1 + n_2) + n_1(2\delta_2 + n_1) \leq \bar{R}_2(G_1 + G_2) \leq \bar{R}_2(G_1) + \bar{R}_2(G_2) + n_2(2\Delta_1 + n_2) + n_1(2\Delta_2 + n_1) \quad (4.14)$$

dir.

İspat;

İki grafın toplamı ve ikinci Revan tamamlayıcı indeksinin tanımından

$$\bar{R}_2(G_1 + G_2) = \sum_{uv \notin E(G_1)} \left(r_{G_1}(u) + n_2\right)\left(r_{G_1}(v) + n_2\right)$$

$$+ \sum_{uv \notin E(G_2)} (r_{G_2}(u) + n_1)(r_{G_2}(v) + n_1)$$

olup $u \in \mathrm{V}(G_1)$ için $r_G(u) = r_{G_1}(u) + n_2$ ve $v \in \mathrm{V}(G_2)$ için $r_G(v) = r_{G_2}(v) + n_1$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\bar{R}_2(G_1 + G_2) = \sum_{uv \notin E(G_1)} (r_{G_1}(u)r_{G_1}(v) + n_2 r_{G_1}(u) + n_2 r_{G_1}(v) + n_2^2)$$

$$+ \sum_{uv \notin E(G_2)} (r_{G_2}(u)r_{G_2}(v) + n_1 r_{G_2}(u) + n_1 r_{G_2}(v) + n_1^2)$$

elde edilir. En küçük ve en büyük derece kullanılarak istenilen elde edilir. □

4.4.3. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı, m_1 ve m_2 kenarlı iki graf olsun. O zaman,

$$2\alpha(\Delta_1\Delta_2) \leq \bar{R}_2(G_1 \square G_2) \leq 2\alpha(\delta_1\delta_2) \qquad (4.15)$$

dir. Burada $G_1 \square G_2$ grafının kenar sayısı $\alpha = n_1m_2 + m_1n_2$ dir.

İspat;

İki grafın kartezyen çarpımı ve ikinci Revan tamamlayıcı indeksinin tanımından,

$$\bar{R}_2(G_1 \square G_2) = \sum\nolimits_{u,v \notin E(G_1)} r_{G_1}(u_1)r_{G_2}(u_2) + \sum\nolimits_{u,v \notin E(G_2)} r_{G_1}(v_1)r_{G_2}(v_2)$$

dir. En küçük ve en büyük derece kullanılarak

$$2\alpha(\Delta_1\Delta_2) \leq \bar{R}_2(G_1 \square G_2) \leq 2\alpha(\delta_1\delta_2)$$

elde edilir. □

4.4.4. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı, m_1 ve m_2 kenarlı iki graf olsun. O zaman,

$$\beta(n_2\,\Delta_1+\Delta_2)^2 \le \bar{R}_2(G_1[G_2]) \le \beta(n_2\,\delta_1+\delta_2)^2 \qquad (4.16)$$

dir. Burada $G_1[G_2]$ grafının kenar sayısı $\beta = n_1m_2 + m_1{n_2}^2$ dir.

İspat;

İki grafın bileşkesi ve ikinci Revan tamamlayıcı indeksinin tanımından,

$$\bar{R}_2(G_1[G_2]) = \sum_{u,v\notin E(G_1)} n_2\, r_{G_1}(u_1) + r_{G_2}(u_2) \sum_{u,v\notin E(G_2)} n_2\, r_{G_1}(v_1) + r_{G_2}(v_2)$$

dir.

Burada en küçük derece ve en büyük derece göz önüne alındığında

$$\beta(n_2\,\Delta_1+\Delta_2)^2 \le \bar{R}_2(G_1[G_2]) \le \beta(n_2\,\delta_1+\delta_2)^2$$

elde edilir. □

5. REVAN SOMBOR TAMAMLAYICI İNDEKSLERİNİN İNCELENMESİ

Bu bölümde, tanımladığımız Revan Sombor tamamlayıcı indeksleri ile F-Revan tamamlayıcı indeksleri arasındaki ilişkiler elde edilmiş olup bazı graf işlemlerinin bu indeksler için sınırları bulunmuştur. Ayrıca burada G(n noktalı, m kenarlı) ve çalışılan diğer graflar basit bağlantılı graf olarak kabul edilecektir.

5.1. Revan Sombor Tamamlayıcı İndeks ile Bazı Tamamlayıcı İndeksler Arasındaki İlişkiler

5.1.1. Teorem

G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman G grafının Revan Sombor tamamlayıcı indeksi için alt ve üst sınırlar

$$\bar{m}\left(\sqrt{2\delta^2}\right) \leq \overline{RSO}(G) \leq \bar{m}\left(\sqrt{2\Delta^2}\right) \tag{5.1}$$

dir.

İspat;

Revan Sombor tamamlayıcı indeksinde dereceleri en küçük derece olarak alındığında ifade küçülmüş olur ve alt sınırı elde edilir. Benzer şekilde en büyük dereceleri alarak da üst sınır elde edilir. □

5.1.2. Teorem

G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman G grafının Revan Sombor tamamlayıcı indeksi için bir alt sınır;

$$\sqrt{\frac{8\delta\Delta\overline{FR}(G)\bar{m}}{(\delta+2\Delta)^2}} \leq \overline{RSO}(G) \tag{5.2}$$

şeklindedir.

İspat;

Lemma 1'de $a_k = \sqrt{r_G(u)^2 + r_G(v)^2}, b_k = 1$ alınır ve $a = \sqrt{2\delta^2}$, $b = 1$, $A = \sqrt{2\Delta^2}$, $B = 2$ seçilirse $0 < a \leq a_k \leq A < \infty$ ve $0 < b \leq b_k \leq B < \infty$ sağlanır. Lemma 1, G'nin komşu olmayan kenarlarının toplamı üzerinden uygulanırsa,

$$\frac{\sum_{uv \notin E(G)} (r_G(u)^2 + r_G(v)^2) \sum_{uv \notin E(G)} 1^2}{(\overline{RSO}(G))^2} \leq \frac{(\sqrt{2}\delta + 2\sqrt{2}\Delta)^2}{16\delta\Delta}$$

elde edilir. F-Revan tamamlayıcı indeksinin tanımı kullanılarak,

$$\frac{\overline{FR}(G)\overline{m}}{(\overline{RSO}(G))^2} \leq \frac{(\delta + 2\Delta)^2}{8\delta\Delta}$$

bulunur. Böylece

$$\sqrt{\frac{8\delta\Delta\overline{FR}(G)\overline{m}}{(\delta + 2\Delta)^2}} \leq \overline{RSO}(G)$$

elde edilir. □

5.1.3. Teorem

G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman,

$$\overline{RSO}(G) \leq \sqrt{\overline{FR}(G)\overline{m}} \tag{5.3}$$

dir.

İspat;

Lemma 2'de $a_k = \sqrt{r_G(u)^2 + r_G(v)^2}$, $b_k = 1$ alınır ve $a = \sqrt{2\delta^2}$, $b = 1$, $A = \sqrt{2\Delta^2}$, $B = 2$ seçilirse $0 < a \leq a_k \leq A < \infty$ ve $0 < b \leq b_k \leq B < \infty$ sağlanır. Buradan,

$$(\overline{RSO}(G))^2 \leq \sum_{uv \notin E(G)} (r_G(u)^2 + r_G(v)^2) \sum_{uv \notin E(G)} 1^2$$

elde edilir. Burada F-Revan tamamlayıcı indeksi tanımından

$$(\overline{RSO}(G))^2 \leq \overline{FR}(G)\bar{m}$$

olup,

$$\overline{RSO}(G) \leq \sqrt{\overline{FR}(G)\bar{m}}$$

elde edilir. □

5.2. Bazı Graf İşlemleri ile Revan Sombor Tamamlayıcı İndeksi İçin Sınırlar

Bu bölümde G_i $(i = 1,2)$ grafının en küçük derecesi δ_i, en büyük derecesi Δ_i olarak alınacaktır.

5.2.1. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı iki graf olsun. O zaman,

$$\overline{RSO}(G_1) + \overline{RSO}(G_2) + n_1 n_2 \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2} \leq \overline{RSO}(G_1 \cup G_2) \leq \overline{RSO}(G_1) + \overline{RSO}(G_2) + n_1 n_2 \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2} \tag{5.4}$$

dir.

İspat;

İki grafın birleşim işlemi ve Revan Sombor tamamlayıcı indeksinin tanımından

$$\overline{RSO}(G_1 \cup G_2) = \sum_{uv \notin E(G_1)} \sqrt{(r_{G_1}(u)^2 + r_{G_1}(v)^2} + \sum_{uv \notin E(G_2)} \sqrt{(r_{G_2}(u)^2 + r_{G_2}(v)^2} + \sum_{u \in v(G_1)} \sum_{v \in v(G_2)} \sqrt{(r_{G_1}(u)^2 + r_{G_2}(v)^2}$$

dir. En büyük ve en küçük dereceler kullanılarak

$$\overline{RSO}(G_1) + \overline{RSO}(G_2) + n_1 n_2 \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2} \leq \overline{RSO}(G_1 \cup G_2) \leq \overline{RSO}(G_1) + \overline{RSO}(G_2) + n_1 n_2 \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}$$

elde edilir. □

5.2.2. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı, m_1 ve m_2 kenarlı iki graf olsun. O zaman,

$$\sqrt{2}\big((\delta_1 + n_2)\overline{m}_1 + (\delta_2 + n_1)\overline{m}_2\big) \leq \overline{RSO}(G_1 + G_2) \leq \sqrt{2}((\Delta_1 + n_2)\overline{m}_1 + (\Delta_2 + n_1)\overline{m}_2) \quad (5.5)$$

dir. Burada $i = 1,2$ için $\bar{G}_i$ grafının kenar sayısı $\overline{m_i}$ dir.

İspat;

İki grafın toplamı ve Revan Sombor tamamlayıcı indeksinin tanımından

$$\overline{RSO}(G_1 + G_2) = \sum_{\mathrm{uv} \notin \mathrm{E}(G_1)} \sqrt{(\mathrm{r}_{G_1}(u) + \mathrm{n}_2)^2 + (\mathrm{r}_{G_1}(v) + \mathrm{n}_2)^2} + \sum_{\mathrm{uv} \notin \mathrm{E}(G_2)} \sqrt{(\mathrm{r}_{G_2}(u) + \mathrm{n}_1)^2 + (\mathrm{r}_{G_2}(v) + \mathrm{n}_1)^2}$$

olup $u \in \mathrm{V}(G_1)$için $r_G(u) = r_{G_1}(u) + n_2$ ve $v \in \mathrm{V}(G_2)$ için $r_G(v) = r_{G_2}(v) + n_1$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\overline{RSO}(G_1 + G_2) = \sum_{uv \notin E(G_1)} \sqrt{(r_{G_1}(u)^2 + 2r_{G_1}(u)n_2 + n_2^2 + r_{G_1}(v)^2 + 2r_{G_1}(v)n_2 + n_2^2}$$
$$+ \sum_{uv \notin E(G_2)} \sqrt{(r_{G_2}(u)^2 + 2r_{G_2}(u)n_1 + n_1^2 + r_{G_2}(v)^2 + 2r_{G_2}(v)n_1 + n_1^2}$$

elde edilir. En küçük ve en büyük derece kullanılarak

$$\sqrt{2}\big((\delta_1 + n_2)\overline{m}_1 + (\delta_2 + n_1)\overline{m}_2\big) \leq \overline{RSO}(G_1 + G_2) \leq \sqrt{2}((\Delta_1 + n_2)\overline{m}_1 + (\Delta_2 + n_1)\overline{m}_2)$$

bulunur. □

5.2.3. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı, m_1 ve m_2 kenarlı iki graf olsun. O zaman,

$$2\sqrt{{\Delta_1}^2 + {\Delta_2}^2}\alpha \leq \overline{RSO}(G_1 \square G_2) \leq 2\sqrt{{\delta_1}^2 + {\delta_2}^2}\alpha \qquad (5.6)$$

dir. Burada $G_1 \square G_2$ grafının kenar sayısı $\alpha = n_1m_2 + m_1n_2$ dir.

İspat;

İki grafın kartezyen çarpımı ve Revan Sombor tamamlayıcı indeksinin tanımından

$$\overline{RSO}(G_1 \square G_2) = \sum_{\mathrm{u,v} \notin \mathrm{E}(\mathrm{G}_1)} \sqrt{\mathrm{r}_{\mathrm{G}_1}(\mathrm{u}_1)^2 + \mathrm{r}_{\mathrm{G}_2}(\mathrm{u}_2)^2} + \sum_{u,v \notin E(G_2)} \sqrt{r_{G_1}(v_1)^2 + r_{G_2}(v_2)^2}$$

dir. En küçük ve en büyük derece kullanılarak

$$2\sqrt{{\Delta_1}^2 + {\Delta_2}^2}\alpha \leq \overline{RSO}(G_1 \square G_2) \leq 2\sqrt{{\delta_1}^2 + {\delta_2}^2}\alpha$$

elde edilir. □

5.2.4. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı, m_1 ve m_2 kenarlı iki graf olsun. O zaman,

$$\sqrt{2}\,\beta(n_2\,\Delta_1+\Delta_2)\le \overline{RSO}(G_1[G_2])\le \sqrt{2}\,\beta(n_2\,\delta_1+\delta_2) \tag{5.7}$$

dir. Burada $G_1[G_2]$ grafının kenar sayısı $\beta = n_1m_2 + m_1{n_2}^2$ dir.

İspat;

İki grafın bileşkesi ve Revan Sombor tamamlayıcı indeksinin tanımından

$$\overline{RSO}(G_1[G_2]) = \sum_{u,v\notin E(G)} \sqrt{\left(n_2\,r_{G_1}(u_1)+r_{G_2}(u_2)\right)^2+\left(n_2\,r_{G_1}(v_1)+r_{G_2}(v_2)\right)^2}$$

dir. Burada en küçük derece ve en büyük derece göz önüne alındığında

$$\sqrt{2}\,\beta(n_2\,\Delta_1+\Delta_2)\le \overline{RSO}(G_1[G_2])\le \sqrt{2}\,\beta(n_2\,\delta_1+\delta_2)$$

olduğu görülmektedir. □

6. UNUTULMUŞ F-REVAN TAMAMLAYICI İNDEKSİNİN İNCELENMESİ

Bu bölümde, daha önce tanımladığımız unutulmuş Revan tamamlayıcı indeksi ile (a,b)-KA Revan tamamlayıcı indeksleri arasındaki ilişkiler elde edilmiş olup bazı graf işlemlerinin bu indeks için sınırları bulunmuştur.

6.1. Unutulmuş F-Revan Tamamlayıcı İndeks için Sınırlar

6.1.1. Teorem

G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman G grafının F-Revan tamamlayıcı indeksi için alt ve üst sınırlar;

$$\overline{m}(2\delta^2) \leq \overline{FR}(G) \leq \overline{m}(2\Delta^2) \tag{6.1}$$

dir.

İspat;

F-Revan tamamlayıcı indeksinde dereceleri en küçük alarak alt sınır ve dereceleri en büyük alarak da üst sınır elde edilir. □

6.1.2. Teorem

G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman G grafının F-Revan tamamlayıcı indeksi için bir alt sınır

$$\frac{\sqrt{8\delta^2\Delta^2\left(\overline{RKA^1_{4,1}}(G) + 2\overline{RKA^2_{1,2}}(G)\right)\overline{m}}}{\delta^2 + 2\Delta^2} \leq \overline{FR}(G) \tag{6.2}$$

şeklindedir.

İspat;

Lemma 1'de $a_k = r_G(u)^2 + r_G(v)^2$ ve $b_k = 1$ alınır ve $a = 2\delta^2,\ b = 1$ ve $A = 2\Delta^2$, $B = 2$ seçilirse $0 < a \leq a_k \leq A < \infty$ ve $0 < b \leq b_k \leq B < \infty$ sağlanır. Buradan,

$$\frac{\sum_{uv\notin E(G)} (r_G(u)^2 + r_G(v)^2)^2 \sum_{uv\notin E(G)} 1^2}{\left(\sum_{uv\notin E(G)} (r_G(u)^2 + r_G(v)^2)\right)^2} \leq \frac{(2\delta^2 + 4\Delta^2)^2}{32\delta^2\Delta^2}$$

elde edilir. Düzenleme yapıldığında

$$\frac{\sum_{uv\notin E(G)} (r_G(u)^4 + r_G(v)^4 + 2r_G(u)^2 r_G(v)^2)\overline{m}}{(\overline{FR}(G))^2} \leq \frac{(\delta^2 + 2\Delta^2)^2}{8\delta^2\Delta^2}$$

elde edilir. Burada birinci ve ikinci (a,b)-KA Revan tamamlayıcı indekslerinin tanımları kullanılarak,

$$\frac{\left(\overline{RKA^1_{4,1}}(G) + 2\overline{RKA^2_{1,2}}(G)\right)\overline{m}}{(\overline{FR}(G))^2} \leq \frac{(\delta^2 + 2\Delta^2)^2}{8\delta^2\Delta^2}$$

ve böylece

$$\frac{\sqrt{8\delta^2\Delta^2\left(\overline{RKA^1_{4,1}}(G) + 2\overline{RKA^2_{1,2}}(G)\right)\overline{m}}}{\delta^2 + 2\Delta^2} \leq \overline{FR}(G)$$

elde edilir. □

6.1.3. Teorem

G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman,

$$\overline{FR}(G) \leq \sqrt{\left(\overline{RKA^1_{4,1}}(G) + 2\overline{RKA^2_{1,2}}(G)\right)\overline{m}} \qquad (6.3)$$

dır.

İspat;

Lemma 2'de $a_k = r_G(u)^2 + r_G(v)^2$ ve $b_k = 1$ alınır ve $a = 2\delta^2$, $b = 1$ ve $A = 2\Delta^2$, $B = 2$ seçilirse $0 < a \leq a_k \leq A < \infty$ ve $0 < b \leq b_k \leq B < \infty$ sağlanır. Buradan

$$\left(\sum_{uv \notin E(G)} (r_G(u)^2 + r_G(v)^2) \right)^2 \leq \sum_{uv \notin E(G)} (r_G(u)^2 + r_G(v)^2)^2 \sum_{uv \notin E(G)} 1^2$$

bulunur. Böylece

$$\overline{FR}(G) \leq \sqrt{\left(\overline{RKA^1_{4,1}}(G) + 2\overline{RKA^2_{1,2}}(G) \right) \overline{m}}$$

elde edilir. □

6.2. Bazı Graf İşlemlerinin F-Revan Tamamlayıcı İndeksi İçin Sınırlar

Bu bölümde G_i $(i = 1,2)$ grafının en küçük derecesi δ_i, en büyük derecesi Δ_i olarak alınacaktır.

6.2.1. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı iki graf olsun. O zaman,

$$\overline{FR}(G_1) + \overline{FR}(G_2) + n_1 n_2(\delta_1^2 + \delta_2^2) \leq \overline{FR}(G_1 \cup G_2) \leq \overline{FR}(G_1) + \overline{FR}(G_2) + n_1 n_2(\Delta_1^2 + \Delta_2^2) \quad (6.4)$$

dir.

İspat;

İki grafın birleşim işlemi ve F-Revan tamamlayıcı indeksinin tanımından,

$$\overline{FR}(G_1 \cup G_2) = \sum_{uv \notin E(G_1)} (r_{G_1}(u)^2 + r_{G_1}(v)^2) + \sum_{uv \in E(G_2)} (r_{G_2}(u)^2 + r_{G_2}(v)^2) + \sum_{u \in v(G_1)} \sum_{v \in v(G_2)} (r_{G_1}(u)^2 + r_{G_2}(v)^2)$$

dir. En küçük ve en büyük dereceler kullanılarak istenilen sonuç elde edilir. □

6.2.2. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı iki graf olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} \overline{FR}(G_1) + \overline{FR}(G_2) + 2n_2(2\delta_1 + n_2) + 2n_1(2\delta_2 + n_1) &\leq \overline{FR}(G_1 + G_2) \\ &\leq \overline{FR}(G_1) + \overline{FR}(G_2) + 2n_2(2\Delta_1 + n_2) + 2n_1(2\Delta_2 + n_1) \end{aligned} \tag{6.5}$$

dir.

İspat;

İki grafın toplamı ve F-Revan tamamlayıcı indeksinin tanımından,

$$\overline{FR}(G_1 + G_2) = \sum_{uv \notin E(G_1)} [(r_{G_1}(u) + n_2)^2 + (r_{G_1}(v) + n_2)^2] + \sum_{uv \notin E(G_2)} [(r_{G_2}(u) + n_1)^2 + (r_{G_2}(v) + n_1)^2]$$

olup $u \in \mathrm{V}(G_1)$ için $r_G(u) = r_{G_1}(u) + n_2$ ve $v \in \mathrm{V}(G_2)$ için $r_G(v) = r_{G_2}(v) + n_1$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \overline{FR}(G_1 + G_2) &= \sum_{uv \notin E(G_1)} [(r_{G_1}(u)^2 + 2r_{G_1}(u)n_2 + n_2^2 + r_{G_1}(v)^2 + 2r_{G_1}(v)n_2 + n_2^2) \\ &= \sum_{uv \notin E(G_1)} [(r_{G_1}(u)^2 + 2r_{G_1}(u)n_2 + n_2^2 + r_{G_1}(v)^2 + 2r_{G_1}(v)n_2 + n_2^2) \end{aligned}$$

elde edilir. En küçük ve en büyük derece kullanılarak

$$\overline{FR}(G_1) + \overline{FR}(G_2) + 2n_2(2\delta_1 + n_2) + 2n_1(2\delta_2 + n_1) \leq \overline{FR}(G_1 + G_2)$$
$$\leq \overline{FR}(G_1) + \overline{FR}(G_2) + 2n_2(2\Delta_1 + n_2) + 2n_1(2\Delta_2 + n_1)$$

bulunur. □

6.2.3. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı, m_1 ve m_2 kenarlı iki graf olsun. O zaman,

$$2\left({\Delta_1}^2 + {\Delta_2}^2\right)\alpha \leq \overline{FR}(G_1 \square G_2) \leq 2\left({\delta_1}^2 + {\delta_2}^2\right)\alpha \quad (6.6)$$

dir. Burada $G_1 \square G_2$ grafının kenar sayısı $\alpha = n_1m_2 + m_1n_2$ dir.

İspat;

İki grafın kartezyen çarpımı ve F-Revan tamamlayıcı indeksinin tanımından,

$$\overline{FR}(G_1 \square G_2) = \sum_{u,v \notin E(G_1)} r_{G_1}(u_1)^2 + r_{G_2}(u_2)^2 + \sum_{u,v \notin E(G_2)} r_{G_1}(v_1)^2 + r_{G_2}(v_2)^2$$

dir. En küçük ve en büyük derece kullanılarak

$$2\left({\Delta_1}^2 + {\Delta_2}^2\right)\alpha \leq \overline{FR}(G_1 \square G_2) \leq 2\left({\delta_1}^2 + {\delta_2}^2\right)\alpha$$

elde edilir. □

6.2.4. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı, m_1 ve m_2 kenarlı iki graf olsun. O zaman,

$$2(n_2\,\Delta_1 + \Delta_2)^2\,\beta \leq \overline{FR}(G_1[G_2]) \leq 2(n_2\,\delta_1 + \delta_2)^2\,\beta \quad (6.7)$$

dir. Burada $G_1[G_2]$ grafının kenar sayısı $\beta = n_1m_2 + m_1{n_2}^2$ dir.

İspat;

İki grafın bileşkesi ve F-Revan tamamlayıcı indeksinin tanımından,

$$\overline{FR}(G_1[G_2]) = \sum_{u,v \notin E(G)} \left(n_2\, r_{G_1}(u_1) + r_{G_2}(u_2)\right)^2 + \left(n_2\, r_{G_1}(v_1) + r_{G_2}(v_2)\right)^2$$

dir. Burada en küçük derece ve en büyük derece göz önüne alındığında

$$2\,\beta(n_2\,\Delta_1 + \Delta_2)^2 \leq \overline{FR}(G_1[G_2]) \leq 2\beta(n_2\,\delta_1 + \delta_2)^2$$

elde edilir. □

7. ANTİVİRAL İLAÇLARIN KİMYASAL YAPILARININ TAMAMLAYICI REVAN İNDEKSLERLE İNCELENMESİ

Antiviral ilaçlar, virüs kaynaklı enfeksiyonların tedavisinde kullanılan ve enfekte hücrelere girerek virüsün çoğalmasını engelleyen özel farmasötik bileşiklerdir. Kimyasal yapıları bakımından karmaşık moleküler özelliklere sahip olan bu ilaçlar, matematiksel kimya ve kimyasal graf kuramı gibi disiplinlerle derinlemesine analiz edilebilmektedir. Kimyasal graf kuramı, ilaçların moleküler yapılarını bir graf modeli ile temsil ederek, topolojik indeksler aracılığıyla sayısal olarak tanımlanmasına olanak tanır. Bu bağlamda geliştirilen Revan tamamlayıcı topolojik indeksler, ilaçların fizikokimyasal özelliklerini öngörmede oldukça etkin araçlardır.

Bu bölümde, Lopinavir ve Ritonavir'in kimyasal yapılarına ait moleküler graflar kullanılarak tanımladığımız Revan tamamlayıcı indeksleri için hesaplamaları yapılmıştır.

$$E_{ij} = \{\, uv \in E(G) : d_G(u) = i \ ve \ d_G(v) = j \,\}$$

ve

$$\bar{E}_{ij} = \{\, uv \notin E(G) \ d_G(u) = i \ ve \ d_G(v) = j \,\}$$

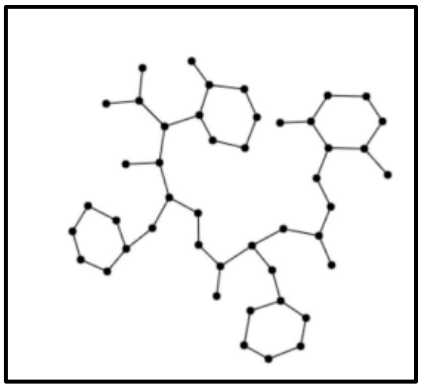
olmak üzere $m_{ij} = |E_{ij}|$ ve $\bar{m}_{ij} = |\bar{E}_{ij}|$ olup n_i derecesi i olan noktaların sayısı ve

$$\bar{m}_{ij} = \begin{cases} \frac{n_i(n_i-1)}{2} & , \ i = j \\ n_i n_j - m_{ij} & , \ i < j \end{cases}$$

dir.

7.1. Lopinavir için Revan Tamamlayıcı İndeks Hesaplamaları

G_L, Lopinavir 'in moleküler grafı olsun (bkz. Şekil 7.1).



Şekil 7.1. Lopinavir ‘in moleküler grafı

G_L moleküler grafının kenar-bölümleme kümelerinin kardinalitesi Çizelge 7.1'de gösterilmiştir.

Çizelge 7.1. G_L moleküler grafının kenar-bölümleme kümelerinin kardinalitesi

$\bar{E}_{ij}(G_L)$	$\bar{E}_{13}$	$\bar{E}_{22}$	$\bar{E}_{23}$	$\bar{E}_{33}$
$\bar{m}_{ij}$	104	262	316	84

7.1.1. Teorem

G_L, Lopinavir ‘in moleküler grafı olsun. O zaman,

$$\bar{R}_1(G_L) = 2580$$

dir.

İspat;

$\bar{R}_1(G_L) = \sum_{u,v \notin E(G_L)} r_{G_L}(u) + r_{G_L}(v)$ olduğundan $r_G(u) = \Delta + \delta - d(u)$ ve buradan $r_G(u) = 4 - d(u)$ dir. Benzer şekilde $r_G(v) = 4 - d(v)$ olmak üzere, Çizelge 7.1 kullanılarak,

$$\bar{R}_1(G_L) = \sum_{uv \notin E(G_L)} \big(4 - d(u)\big) + \big(4 - d(v)\big)$$

$$= |\bar{E}_{13}|(3+1) + |\bar{E}_{22}|(2+2) + |\bar{E}_{23}|(2+1) + |\bar{E}_{33}|(1+1)$$

$$= 104.4 + 262.4 + 316.3 + 84.2$$

$$= 2580$$

elde edilir. □

7.1.2. Teorem

G_L, Lopinavir ‘in moleküler grafı olsun. O zaman,

$$\bar{R}_2(G_L) = 2076$$

dir.

İspat;

$\bar{R}_2(G_L) = \sum_{u,v \notin E(G)} r_G(u) r_G(v)$ olup $r_G(u) = 4 - d(u)$ ve $r_G(v) = 4 - d(v)$ olduğundan Çizelge 7.1 kullanılarak

$$\bar{R}_2(G_L) = \sum_{u,v \notin E(G_L)} \big(4 - d(u)\big)\big(4 - d(v)\big)$$

$$= |\bar{E}_{13}|(3.1) + |\bar{E}_{22}|(2.2) + |\bar{E}_{23}|(2.1) + |\bar{E}_{33}|(1.1)$$

$$= 104.3 + 262.4 + 316.2 + 84.1$$

$$= 2076$$

elde edilir. □

7.1.3. Teorem

G_L, Lopinavir ‘in moleküler grafı olsun. O zaman,

$$\overline{FR}(G_L) = 4884$$

dir.

İspat;

$\overline{FR}(G_L) = \sum_{u,v\notin E(G)} r_G(u)^2 + r_G(v)^2$ ve $r_G(u) = 4 - d(u), r_G(v) = 4 - d(v)$

olmak üzere Çizelge 7.1'den

$$\overline{FR}(G_L) = \sum_{u,v\notin E(G_L)} \big(4 - d(u)\big)^2 + \big(4 - d(v)\big)^2$$

$$= |\bar{E}_{13}|(3^2 + 1^2) + |\bar{E}_{22}|(2^2 + 2^2) + |\bar{E}_{23}|(2^2 + 1^2) + |\bar{E}_{33}|(1^2 + 1^2)$$

$$= 104.10 + 262.8 + 316.5 + 84.2$$

$$= 4884$$

elde edilir. □

7.1.4. Teorem

G_L, Lopinavir 'in moleküler grafı olsun. O zaman,

$\overline{RSO}(G_L) = 1895{,}29$

dir.

İspat;

$\overline{RSO}(G_L) = \sum_{u,v\notin E(G)} \sqrt{r_G(u)^2 + r_G(v)^2}$ ve $r_G(u) = 4 - d(u), r_G(v) = 4 - d(v)$

olmak üzere

$$\overline{RSO}(G_L) = \sum_{u,v \notin E(G_L)} \sqrt{\left(4 - d(u)\right)^2 + \left(4 - d(v)\right)^2}$$

$$= |\bar{E}_{13}|\left(\sqrt{3^2 + 1^2}\right) + |\bar{E}_{22}|\left(\sqrt{2^2 + 2^2}\right) + |\bar{E}_{23}|\left(\sqrt{2^2 + 1^2}\right) + |\bar{E}_{33}|\left(\sqrt{1^2 + 1^2}\right)$$

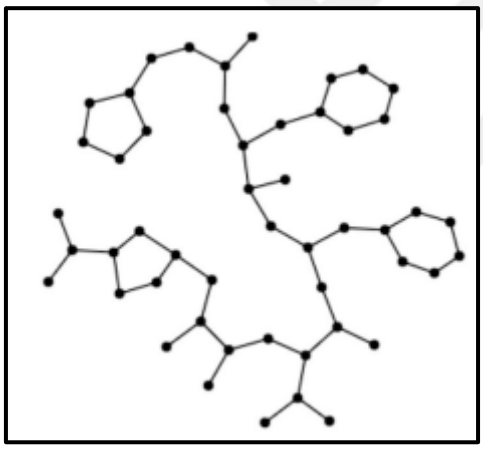
$$= 104.\sqrt{10} + 262.\sqrt{8} + 316.\sqrt{5} + 84.\sqrt{2}$$

$$= 1895{,}29$$

elde edilir.

7.2. Ritonavir için Revan Tamamlayıcı İndeks Hesaplamaları

G_R, Ritonavir'in moleküler grafı olsun (bkz. Şekil 7.2).



Şekil 7.2. Ritonavir'in moleküler grafı

G_R moleküler grafının kenar-bölümleme kümelerinin kardinalitesi Çizelge 7.2'de gösterilmiştir.

Çizelge 7.2. G_R moleküler grafının kenar-bölümleme kümelerinin kardinalitesi

$\bar{E}_{ij}(G_L)$	$\bar{E}_{13}$	$\bar{E}_{22}$	$\bar{E}_{23}$	$\bar{E}_{33}$
$\bar{m}_{ij}$	126	312	364	100

7.2.1. Teorem

G_R, Ritonavir'in moleküler grafı olmak üzere

$\bar{R}_1(G) = 3044$

dir.

İspat;

$r_G(u) = 4 - d(u)$ ve $r_G(v) = 4 - d(v)$, $\bar{R}_1(G) = \sum_{u,v \notin E(G)} r_G(u) + r_G(v)$ tanımında yerine yazılır ve Çizelge 7.2 kullanılırsa

$$\bar{R}_1(G) = \sum_{u,v \notin E(G_R)} \big(4 - d(u)\big) + \big(4 - d(v)\big)$$

$$= |\bar{E}_{13}|(3+1) + |\bar{E}_{22}|(2+2) + |\bar{E}_{23}|(2+1) + |\bar{E}_{33}|(1+1)$$

$$= 126.4 + 312.4 + 364.3 + 100.2$$

$$= 3044$$

elde edilir. □

7.2.2. Teorem

G_R, Ritonavir'in moleküler grafı olmak üzere

$\bar{R}_2(G) = 2454$

dir.

İspat; $\bar{R}_2(G) = \sum_{u,v \notin E(G)} r_G(u) r_G(v)$ tanımında $r_G(u) = 4 - d(u)$ ve $r_G(v) = 4 - d(v)$

yerine yazılır ve Çizelge 7.2 kullanılırsa

$$\bar{R}_2(G) = \sum_{u,v\notin E(G_R)} \big(4 - d(u)\big)\big(4 - d(v)\big)$$

$$= |\bar{E}_{13}|(3.1) + |\bar{E}_{22}|(2.2) + |\bar{E}_{23}|(2.1) + |\bar{E}_{33}|(1.1)$$

$$= 126.3 + 312.1 + 364.2 + 100.1$$

$$= 2454$$

elde edilir. □

7.2.3. Teorem

G_R, Ritonavir'in moleküler grafı olmak üzere

$$\overline{FR}(G) = 5578$$

dir.

İspat;

$\overline{FR}(G) = \sum_{u,v\notin E(G)} r_G(u)^2 + r_G(v)^2$ tanımında $r_G(u) = 4 - d(u)$ ve $r_G(v) = 4 - d(v)$

yerine yazılır ve Çizelge 7.2 kullanılırsa

$$\overline{FR}(G) = \sum_{u,v\notin E(G_R)} \big(4 - d(u)\big)^2 + \big(4 - d(v)\big)^2$$

$$= |\bar{E}_{13}|(3^2 + 1^2) + |\bar{E}_{22}|(2^2 + 2^2) + |\bar{E}_{23}|(2^2 + 1^2) + |\bar{E}_{33}|(1^2 + 1^2)$$

$$= 126.10 + 312.8 + 364.5 + 100.2$$

$$= 5578$$

elde edilir. □

7.2.4. Teorem

G_R, Ritonavir'in moleküler grafı olmak üzere

$$\overline{RSO}(G) = 2236{,}27$$

dir.

İspat;

$r_G(u) = 4 - d(u)$ ve $r_G(v) = 4 - d(v)$, $\overline{RSO}(G) = \sum_{u,v \notin E(G)} \sqrt{r_G(u)^2 + r_G(v)^2}$

tanımında yerine yazılır ve Çizelge 7.2 kullanılırsa

$$\overline{RSO}(G) = \sum_{u,v \notin E(G_R)} \sqrt{\left(4 - d(u)\right)^2 + \left(4 - d(v)\right)^2}$$

$$= |\bar{E}_{13}|\sqrt{(3^2 + 1^2)} + |\bar{E}_{22}|\sqrt{(2^2 + 2^2)} + |\bar{E}_{23}|\sqrt{(2^2 + 1^2)} + |\bar{E}_{33}|\sqrt{(1^2 + 1^2)}$$

$$= 126.\sqrt{10} + 312.\sqrt{8} + 364.\sqrt{5} + 100.\sqrt{2}$$

$$= 2236{,}27$$

elde edilir. □

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında birinci ve ikinci Revan tamamlayıcı indeksleri, Revan Sombor tamamlayıcı indeksi ve Unutulmuş Revan tamamlayıcı indeksleri için F-tamamlayıcı, birinci ve ikinci(a,b)-KA tamamlayıcı indekslerine bağlı sınırlar elde edildi. Daha sonra birleşim, toplam ve kartezyen çarpım graf işlemleriyle Revan tamamlayıcı indeksleri için sınırlar bulundu. Ayrıca Lopinavir ve Ritonavir antiviral ilaçların kimyasal yapısı kullanılarak tanımlanan indeksler için hesaplandı. Elde edilen sonuçlar kimyasal maddelerin fizikokimyasal özelliklerini tahmin etmede oldukça elverişlidir.

KAYNAKLAR

1. Büyükköse, Ş., Kaya Gök, G., Özkan Kızılırmak, G. ve Eren, S. (2021). *Graf teori*. Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık, 1-10.

2. Alameri, A. (2016). New binary operations on graphs. *Journal of Science & Technology,* 21(1), 97-116.

3. Kulli, V. R. (2017). Revan indices of oxide and honeycomb networks. *International Journal of Mathematics and its Applications,* 5(4-E), 663-667.

4. Kulli, V. R. (2018). F-Revan index and F-Revan polynomials of some families of benzenoid systems. *Journal of Global Research in Mathematical Archives,* 5(11), 1-6.

5. Kulli, V. R. ve Gutman, I. (2022). Revan Sombor index. *Journal of Mathematics and Informatics,* 22, 23-27.

6. Kulli, V. R. (2019). The (a, b)-KA indices of polycyclic aromatic hydrocarbons and benzenoid systems. *International Journal of Mathematics Trends and Technology,* 65, 115–120.

7. Doslic, T. (2008). Vertex-weighted wiener polynomials for composite graphs. *ARS Mathematica Contemporanea,* 1(1), 66-81.

8. De, N., Nayeem, S. ve Pal, A., 2016). The F-coindex of some graph operations. *SpringerPlus,* 5(221), 1-13.

9. Alameri, A., Al-Rumaima, M. ve Almazah, M., (2020). Y-coindex of graph operations and its applications of molecular descriptors. *Journal of Molecular Structure,* 1221(1), 1-8.



Gazili olmak ayrıcalıktır