CC – GRUPLARIN
LOKAL İÇ OTOMORFİZMALARI

Neslihan USTA

126728

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2002
ANKARA

126128

Neslihan USTA tarafından hazırlanan CC-GRUPLARIN LOKAL İÇ OTOMORFİZMALARI adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd.Doç.Dr.Aynur ARIKAN
Tez Yöneticisi

Bu çalışma jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof.Dr.Durdun TAŞCI

Üye : Yard.Doç.Dr.Aynur ARIKAN

Üye : Doç.Dr.Ziya Ağcün

Üye : .....

Üye : .....

Üye : .....

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kuralları uygundur.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
SEMBOLLER LİSTESİ iv

1. GİRİŞ 1

2. BAZI HAZIRLIK TANIM VE SONUÇLARI 5

3. INNG'NİN PRO - CHERNİKOV TÜMLEYENİ 15

4. LİNNG'NİN BAZI ALTRGRUPLARININ İNDEKSİ 25

5. LOKAL İÇ OTOMORFİZMALARIN GRUBU 31

6. BİR ALTGRUP İÇEREN LOKAL EŞLENİK SINIF 39

7. ALT GRUPLARIN EŞLENİĞİ 50

KAYNAKLAR 60
ÖZGEÇMİŞ 62

CC-GRUPLARIN
LOKAL İÇ OTOMORFİZMALARI
(Yüksek Lisans Tezi)

Neslihan USTA

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ocak 2002

ÖZET

Bu tezde J. Otal, J. M. Peña ve M. J. Tomkinson'nın "CC-grupların lokal iç otomorfizmaları" adlı makalesi incelendi. J. Otal, J. M. Peña ve M. J. Tomkinson CC-grupların lokal iç otomorfizmalarının bazı temel özellikleri ve özel olarak G, G/Z(G) periyodik bir CC-grup ve H G nin bir altgrubu olduğunda LclH ile LinnG'nin kardinalitesi ele alınmıştır. H yı içeren eşlenik sınıfının H yı içeren lokal eşlenik sınıfı ile hangi şartlar altında eşit olduğu problemi hakkında bazı genel sonuçlar elde edilmiştir. İspatlarda ihtiyaç duyulan önemli temel sonuçlar bir araya getirilmiş ve böylece J. Otal, J. M. Peña ve M. J. Tomkinson'nın bu alandaki çalışması kolay anlaşılır bir hale getirilmiştir.

Bilim Kodu :
Anahtar Kelimeler : **Chernikov Grup, CC- Grup, Lokal İç Otomorfizma, Lokal Eşlenik Sınıf**
Sayfa Adedi : **62**
Tez Yöneticisi : **Yrd. Doç. Dr. Aynur ARIKAN**

LOCALLY INNER AUTOMORPHISMS OF CC-GROUPS

(Master Thesis)

Neslihan USTA

GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
January 2002

ABSTRACT

In this thesis work we have studied the paper written by J. Otal, J. M. Peña and M. J. Tomkinson titled "Locally Inner Automorphisms of CC-Groups". In this paper J. Otal, J. M. Peña and M.J. Tomkinson have considered some of the basic properties of the locally inner automorphisms of a CC – group G; in particular they determined the size of LinnG and LclH when G is a CC – group with G/Z(G) periodic and H is a subgroup of G. They have also obtained some general results of when the local conjugacy class containing H coincide with the conjugacy class containing H. The important preliminary that are needed in the proofs have been gathered together. Thus the researches of J. Otal, J. M. Peña and M. J. Tomkinson in this area made clear more detailed and put in more easliy understandable form.

Science Code :
Key Words :Chernikov Group, CC- Group, Locally Inner Automorphism, Locally Conjugacy Class
Page Number : 62
Supervisor : Yrd. Doç. Dr. Aynur ARIKAN

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

TEŞEKKÜR

Araştırma ve çalışmalarım sırasında bilgi birikimi ve tecrübeleriyle beni yönlendiren danışmanım Yrd. Doç. Dr. Aynur ARIKAN'a en derin saygılarımla teşekkürlerimi sunarım.

SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı semboller anlamları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Sembol	Anlam
$H \leq G$	H, G nin altgrubu
$H \lhd G$	H, G nin normal altgrubu
H char G	H, G nin karakteristik alt grubu
G / H	G nin H ile bölüm grubu
[H, K]	H ve K nın komütatorü
[G: H]	H nın G içindeki indeksi
G′	G nın derived altgrubu
$< x >$	x tarafından üretilen devirli grup
Z(G)	G nin merkezi
$C_G(H)$	H nın G içindeki merkezleyeni
$N_G(H)$	H nın G içindeki normalleyeni
$H \cong K$	H, K ile izomorftur.
FC(G)	G nin FC- merkezi
φ_g	G bir grup ve $h \in G$ ise her $g \in G$ için $\varphi_g(h) = h^g$
InnG	$\{\varphi_g : g \in G\}$
LinnG	G nin lokal iç otomorfizmalarının altgrubu
LclH	H yı içeren lokal eşlenik sınıf
ClH	H nin eşlenik sınıfı
$\varprojlim G_i$	G_i gruplarının ters limiti
$A \rtimes B$	A ile B nin yarıdirekt (semidirekt) çarpımı
H^G	$< x^{-1}Hx : x \in G >$, H nın G içindeki normal kapanışı
H_G	$\bigcap_{x \in G} x^{-1}Hx.$, H nın G deki koru (core)

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

1. GİRİŞ

Chernikov eşlenik sınıflarının grupları ya da CC–gruplar, FC–gruplar kavramının bir genişlemesi olarak ilk kez Polovickii tarafından tanımlanmıştır.

Eğer her $x \in G$ için $G/C_G(x^G)$ bir Chernikov grup ise G ye bir CC–grup denir. G nin bir CC – grup olması için gerek ve yeter şart G nin herbir elemanının normal kapanışı $< x^G >$ Chernikov – by – cyclic ve her $x \in G$ için $G/C_G(x^G)$ periyodik olmasıdır. Bu Polovickii'nin temel bir sonucudur.

φ, G nin bir otomorfizması olsun. Eğer her $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ elemanlarının sonlu kümesi için $\varphi(x_i) = g^{-1}x_i g$ ($\forall$ i = 1, ..., n için) olacak şekilde bir $g \in G$ var ise o zaman φ otomorfizmasına G nin bir lokal iç otomorfizması denir. G nin lokal iç otomorfizmalarının kümesinin AutG nin bir altgrubu olduğu bilinmektedir. G nin lokal iç otomorfizmalarının altgrubu LinnG ile gösterilir.

H ve K, G nin altgrupları olsun. Eğer $\varphi(H) = K$ olacak şekilde bir $\varphi \in$ LinnG otomorfizması var ise H ve K ye lokal eşleniktir denir. H ye lokal eşlenik olan G nin bütün altgruplarının kümesi LclH dir. LclH ye H yi içeren lokal eşlenik sınıfı denir.

FC–gruplarının çok iyi bilinen Sylow teorileri [1,4,13] de CC–gruplara genişletilmiştir. Fitting sınıfların teorisi ve injectorları da [3] de Dixon tarafından benzer olarak genişletilmiştir. FC–gruplarının sınıfında olduğu gibi, bir CC–grubun lokal iç otomorfizmasına ve lokal eşlenik teoremlerine ışık tutan bu durumlar aynı öneme sahiptir.

Bu nedenle burada, bir CC–grup G nin lokal iç otomorfizmalarının temel özelliklerinin bazıları gözönüne alınacaktır; özel olarak, G, G/Z(G) periyodik olan bir CC–grup olduğunda LinnG ve LclH nin büyüklüğü belirlenecektir.

Aynı zamanda H yi içeren eşlenik sınıfı H yi içeren lokal eşlenik sınıfı ile çakıştığında bazı genel sonuçlar elde edilir. FC–grup için [8] 4. bölümdeki tartışma InnG nin profinite tümleyeni olarak LinnG gözönüne alınmıştır. [8] 4. bölümünde ele alınan FC-gruplarındaki yaklaşımlar, CC-gruplara uygulandığında bazı zorluklar olduğu görülmüştür.

Şüphesiz bir CC–grubun iç otomorfizmalarının grubu residually Chernikovdur ve residually Chernikov gruplara bir topolojik yaklaşım, [2] de Dixon tarafından tanımlanmıştır.

G, residually Chernikov grup olduğu zaman aşağıdaki (i), (ii) ve (iii) şartlarını sağlayan G nin bir Chernikov residual sistemini tanımlarız. $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}$ = $\{N_i : i \in I\}$ olacak şekilde G nin normal altgruplarının bir kümesi olsun.

(i) Herbir i, j $\in$ I için $N_k \leq N_i \cap N_j$ olacak şekilde k $\in$ I vardır.

(ii) $\cap\{ N_i : i \in I \} = 1$

(iii) Her i $\in$ I için G/N_i bir Chernikov gruptur.

(i), (ii), (iii) şartlarını sağlayan $\mathcal{N}$, G nin Chernikov residual sistemidir.

G nin $\mathcal{N}$, Chernikov residual sistemi verilsin.

$$\{ Hx : x \in G \text{ ve } H \geq N_i \text{ olacak şekilde } i \in I \text{ vardır}\}$$

şeklinde kosetlerin bir kümesi topolojide kapalı alttaban oluşturur. Dixon bunu bir co–Chernikov topoloji ve G yi de $\mathcal{N}$ ye bağlı bir co–Chernikov grup olarak adlandırır. Bir pro–Chernikov grup açıkça Chernikov grupların ters limitidir ve pro–Chernikov gruplar kesinlikle [2, Teorem 2.8] kompakt co-Chernikov gruplardır. Eğer G, $\mathcal{N}$ ye bağlı bir co–Chernikov grupsa o zaman $L = \varprojlim (G/N_i)$ pro–Chernikov grubu, $\mathcal{N}$ ye bağlı G nin pro–Chernikov tümleyenidir.

Cofinite grupların sonuçları, co–Chernikov gruplara genişletildiğinde elde edilen zorluklardan biri, co–Chernikov grupların genelde topolojik grup olmamasıdır. İkinci önemli zorluk Chernikov grupların çok fazla sayıda altgruplara sahip olmasıdır.

Bir cofinite grupta G/N_i cofinite grubu sonludur ve böylece N_i yi içeren yalnızca sonlu sayıda altgrup vardır, fakat bir co-chernikov grupta G/N_i bir Chernikov gruptur ve N_i yi kapsayan altgruplar sayılamayan sayıda olabilirler. Buna bir örnek verilecek olursa, iki quasicyclic p – grubunun G = A x B direkt çarpımı bunu sağlar.

$$A = < a_1, a_2,..., : (a_1)^p = 1, (a_{n+1})^p = a_n > ,$$
$$B = < b_1, b_2,..., : (b_1)^p = 1, (b_{n+1})^p = b_n > .$$

0 'ın ve 1 'in herhangi bir $\vartheta = (\varepsilon_1, \varepsilon_2,...,)$ dizisi için

$$G_\vartheta = < a_1(b_1)^{\varepsilon_1} , a_2(b_2)^{\varepsilon_1}(b_1)^{\varepsilon_2} , a_3(b_3)^{\varepsilon_1}(b_2)^{\varepsilon_2}(b_1)^{\varepsilon_3} , ...> ,$$

G nin quasicylic altgrubudur ve farklı diziler farklı altgruplar oluştururlar.

Bu zorluğa rağmen, CC–grup G, LinnG için InnG nin bir pro–Chernikov tümleyeni olduğu Teorem 3.5 de ispat edilmiştir. G/Z periyodik olduğu zaman (burada Z = Z(G) dir) ispat için $|\text{LinnG}| = 2^{|G/Z|}$ ve $|\text{LclH}| = 2^{|H/H_c|}$ özellikleri kullanılabilir. Teorem 5.5 ve 6.7 bu sonuçlar altında kesin şartlar verir. Eğer G/Z periyodik değilse bu sonuçların yanlış olduğu Örnek 5.1 de gösterilmiştir.

Kısım 7 de eğer G, residually Chernikov CC–grup ise ClH ile LclH nin çakışması için gerek şart verilmiştir. Bir CC–grup G nin bir H altgrubu verilsin. G/Z residually Chernikov CC–grup olduğu için G/Z nin HZ/Z altgrubu için bu sonuca başvurulabilir ve Sylow altgrupların eşlenik olduğu buradaki gruplar

için kullanılabilir. Bununla birlikte buradaki özel örnekleri ve G nin yapısındaki sınırlamalar gözönünde bulundurulmayacaktır.

(Periyodik) CC–gruplarla çalışmadaki zorluklardan biri [5] de işaret edildiği gibi G/N Chernikov faktör grubunun olabileceği, fakat G=HN olacak şekildeki H Chernikov altgrubunun olmamasıdır. Bununla birlikte eğer C/N = Z(G/N) ise o zaman G=HC olacak şekildeki bir H Chernikov altgrubu olduğu Lemma 5.3 de gösterilir ve bu sonuç M. Gonzalez 'e göre buradaki amaçlar için yeterlidir ve üstelik 6. Kısımdaki diğer ispatlar için kolaylık sağlayacaktır.

[5] de ayrıca $[G/N_G(H)]$ aralığı üzerine minimal şartı yüklendiğinde çalışmanın zorluğu görüldü. (Buradaki minimal şartı, $N_G(H) \leq K \leq G$ olacak şekildeki K altgrupların kümesi üzerindeki minimal şartıdır). 6. Kısımdaki tartışma bu şartın önemine işaret eder.

2. BAZI HAZIRLIK TANIM VE SONUÇLARI

Tanım 2.1. G bir grup ve $x_1, x_2,..., x_n$ G nin elemanları olsun.

$$[x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$$

elemanına x_1 ve x_2 nin komütatörü denir. $n \geq 2$ olsun. O zaman indüksiyon yardımıyla

$$[x_1,..., x_n] = [\,[x_1,..., x_{n-1}], x_n]$$

olarak tanımlanır. Buna, ağırlığı n olan bir basit komütatör denir. Burada $[x_1]=x_1$ olarak tanımlanır.

$X_1, X_2,..., X_n$, bir G grubunun boş olmayan altkümeleri olsun.

$$[X_1, X_2] =< [x_1, x_2] : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 >$$

altgrubuna X_1 ile X_2 nin komütatör grubu denir. Daha genel olarak $n \geq 2$ için, indüksiyon yardımıyla ,

$$[X_1,..., X_n] = [\,[X_1 ,..., X_{n-1}], X_n] \quad \text{ve} \quad [\,X_1\,] = < X_1 >$$

olarak tanımlanır. Buna $X_1, X_2,..., X_n$ nin komütatör grubu denir.

Özel olarak $X_1=X_2 = G$ ise $[G,G] = G'$ ye G nin komütatör grubu veya G nin derived altgrubu denir.

Tanım 2.2. G bir grup ve $N \leq G$ olsun. Her $g \in G$ ve $n \in N$ için $g^{-1}ng \in N$ ise o zaman N ye G nin normal alt grubu denir ve $N \lhd G$ şeklinde gösterilir.

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

Tanım 2.3. G bir grup ve p bir asal sayı olsun. Her $g \in G$ için $g^{p^n} = 1$ olacak şekilde bir $n \geq 0$ tam sayısı varsa, başka bir deyişle G nin her elemanının mertebesi p nin kuvveti ise o zaman G ye bir p-grubu denir.

Tanım 2.4. G bir abelyan grup olsun. Eğer her $x \in G$ için $x^p = 1$ ise G ye elemanter abeliyan grup denir.

Tanım 2.5. G bir grup olsun. Eğer G nin her elemanının mertebesi sonlu ise G ye torsiyon (periyodik) grup denir. Eğer G birimden farklı sonlu mertebeli elemana sahip değilse G ye torsiyonsuz grup denir.

Tanım 2.6. G bir grup, $x, y \in G$ için $x^y = y^{-1}xy$ elemanına x in y ile eşleniği (konjügesi) denir.

X ve Y, G nin boştan farklı altkümeleri olsun. X in Y ile eşleniği olan alt grubu

$$X^Y = \langle x^y : x \in X \text{ ve } y \in Y \rangle$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.7. H, bir G grubunun boş olmayan bir altkümesi olmak üzere G 'nin H'yi içeren bütün normal altgruplarının kesişimine H nin G içindeki normal kapanışı denir ve H^G ile gösterilir.

H^G, H 'yi içeren normal altgrupların en küçüğüdür ve

$$H^G = \langle g^{-1}Hg : g \in G \rangle$$

dir. Ayrıca $H^G \triangleleft G$ dir.

G nin H tarafından içerilen bütün normal altgruplarının bileşimininin ürettiği gruba H nın G deki koru (core) denir ve $Core_GH$ veya H_G ile gösterilir.

$$Core_GH = \bigcap_{g \in G} H^g$$

dir. Böylece H_G, G nin H tarafından içerilen maksimal normal altgrubudur.

Tanım 2.8. G bir grup olmak üzere G nin her elemanıyla değişmeli olan elemanlarının oluşturduğu kümeye G grubunun merkezi denir ve Z(G) ile gösterilir yani $Z(G) = \{ z \in G : \text{her } g \in G \text{ için } gz = zg \text{ dir.} \}$

Bu küme G nin bir normal altgrubudur.
G bir grup $x \in G$ olsun. $C_G(x) = \{ g \in G : gx = xg \}$ kümesine x in G içindeki merkezleyeni denir ve $C_G(x) \leq G$ dir.

Tanım 2.9. $G = < c_i : c_1^p = 1,\ c_{i+1}^p = c_i ,\ i = 1, 2, ... >$ şeklinde tanımlı G grubuna lokal devirli p-grubu veya prüfer grup veya C_{p^∞} tipinde bir grup denir.
C_{p^∞} tipinde bir grup, sonsuz bir p-grubudur. Ayrıca her özaltgrubu sonlu ve devirlidir.

Tanım 2.10. G bir grup ve i = 1, 2,... için $H_i \lhd G$ olmak üzere ... $H_3 \leq H_2 \leq H_1$ şeklinde kurulan seriler her zaman sonlu adımlıysa G ye normal altgrupları üzerinde minimal şartını ya da min n-yi sağlıyor denir.

Bütün sonlu gruplar minimal şartını sağlar. Ayrıca C_{p^∞} tipindeki gruplar, her özaltgrubu sonlu olduğundan minimal şartını sağlar.

Tanım 2.11. Bir G grubunun G içinde sonlu sayıda eşleniği olan elemanına G nin FC-elemanı denir. Bu elemanların oluşturduğu gruba G nin FC-merkezi denir ve FC(G) ile gösterilir. G = FC(G) ise G ye bir FC-grup denir.

Teorem 2.12 ([8] Teorem 1.6, [6] 4.3 sonuç 3) FC-grup olması için gerekli ve yeterli koşul $|G : C_G(x)|$ = sonlu olmasıdır. G, FC-grup ise aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) G, FC-grup ise G′ periyodiktir.

ii) G'nin FC-grup olması için gerekli ve yeterli koşul her $x \in G$ için $< x^G >$'nin sonlu bir grubun devirli bir grupla genişlemesi olmasıdır.

Tanım 2.13. G bir grup ve $g \in G$ olsun. $\tau_g : G \to G$, $\tau_g(x) = x^g$ şeklinde tanımlı fonksiyon G nin bir otomorfizmasıdır. τ_g otomorfizmasına g'nin sebep olduğu iç otomorfizma denir ve G nin iç otomorfizma kümesi InnG ile gösterilir. AutG, G nin bütün otomorfizmalarının grubunu göstermek üzere InnG, AutG nin bir normal altgrubudur.

Teorem 2.14 ([7], 1.5.3) Eğer G herhangi bir grup ise $Z(G) \lhd G$ ve $G/Z(G) \cong InnG$ dir.

Tanım 2.15. G bir grup olsun. Eğer G minimal şartını sağlayan bir abeliyan grubun sonlu genişlemesiyse G ye bir Chernikov grup denir.

Minimal şartını sağlayan bir abeliyan grup sonlu sayıda C_{p^∞} tipindeki grupların direkt çarpımına izomorf olduğundan bir Chernikov grup, sonlu sayıda C_{p^∞} tipindeki grupların direkt çarpımına izomorf grubun sonlu genişlemesi şeklinde de tanımlanabilir.

Tanım 2.16. G bir grup olsun. Her $1 \neq x \in G$ için $x \notin N_x$ ve G / N_x Chernikov olacak şekilde $N_x \lhd G$ varsa G Chernikov kalıntılı (residually) Chernikov grup denir.

Teorem 2.17 ([6] Teorem 4.23) Eğer G bir grup ve G/Z(G) Chernikov ise G' de Chernikovdur.

Teorem 2.18 ([6] Teorem 3.29] Bir Chernikov grubun periyodik otomorfizma grubu da Chernikovdur.

Teorem 2.19 ([6] Teorem 3.29.2) G bir Chernikov grup ve A, G nin otomorfizmalarının bir periyodik grubu olsun. O zaman $A/A\cap InnG$ sonludur.

Sonuç 2.20 ([6] Teorem 3.29.2 ve [7] 1.5.3) G Chernikov ve G/Z(G) sonlu ise o zaman G nin otomorfizmalarının periyodik altgrubu sonludur.

Tanım 2.21. G bir grup ve her $x \in G$ için $G/C_G(< x^G >)$ Chernikov ise G ye bir CC-grup denir.

Teorem 2.22 (Polovickii) ([6] Teorem 4.36). G bir grup olsun. O zaman aşağıdaki koşullar birbirine denktirler.

i) [G, x] Chernikov ve $G/C_G([G, x])$ periyodiktir.
iii) x^G Chernikov bir grubun devirli bir grupla genişlemesi ve $G/C_G(x^G)$ periyodiktir.
iiii) G bir CC-gruptur.

Sonuç 2.23. G bir CC-grup ise G' lokal sonlu, lokal normal ve Chernikov bir gruptur.

İspat. Polovickii teoreminin ispatında G' nün lokal sonlu olduğu gösterilmiştir. Bir grubun lokal normal ve Chernikov olabilmesi için her sonlu üreteçli altgrubunun, bir normal Chernikov altgrubu tarafından kapsanması gerekir. $< x_1, x_2, ..., x_m >$ G' nün sonlu üretilmiş altgrubu olsun. G' lokal sonlu olduğundan periyodiktir. O halde G CC-grup olduğundan her $x \in G$ için $<x^G>$

Chernikovdur.$< x_1, x_2, ..., x_m > < \prod_{j=1}^{m} x_j^G$ ve sonlu sayıda Chernikov grubun çarpımı Chernikov olduğundan G′ lokal normal Chernikov bir gruptur.

Tanım 2.24. G bir grup, N, G nin aşikar olmayan normal altgrubu olsun. Eğer G nin N tarafından içerilen bir aşikar olmayan normal altgrubu yoksa N ye G nin bir minimal normal altgrubu denir.

Tanım 2.25. φ, G nin bir otomorfizması olsun. Eğer her $x_1, x_2, ..., x_n \in G$ elemanlarının sonlu kümesi için $\varphi(x_i) = g^{-1}x_ig$ (her i = 1, ..., n için) olacak şekilde bir $g \in G$ var ise o zaman φ otomorfizmasına G nin bir lokal iç otomorfizması denir ve LinnG ile gösterilir. Açık olarak $InnG \leq LinnG \leq AutG$ dir.

Tanım 2.26. H ve K, G nin altgrupları olsun. Eğer $\varphi(H) = K$ olacak şekilde bir $\varphi \in LinnG$ otomorfizması var ise H ve K lokal eşleniktir denir. H ye lokal eşlenik olan G nin bütün altgruplarının kümesi LclH (ya da Lcl_GH) ile gösterilir. LclH, H yi içeren lokal eşlenik sınıftır.

Tanım 2.27. H, G nin bir altgrubu olsun. G içinde H ye eşlenik olan G nin bütün altgruplarının kümesine, H nin H yi içeren eşlenik sınıfı denir ve ClH (ya da $Cl_G(H)$) ile gösterilir.

Tanım 2.28. G, residually Chernikov grup olsun.

$\mathcal{N}, \mathcal{N} = \{N_i : i \in I\}$ olacak şekilde G nin normal altgruplarının bir kümesi olsun. Eğer

i) Her $i, j \in I$ için $N_k \leq N_i \cap N_j$ olacak şekilde $k \in I$ varsa;

ii) $\cap\{N_i : i \in I\} = 1$;

iii) Her $i \in I$ için G/N_i bir Chernikov grup ise

o zaman bu şartları sağlayan $\mathcal{N}$ ye G nin Chernikov residual sistemi denir.

Tanım 2.29. I kısmi sıralı bir küme olsun. Her i, j∈I için $i \leq k$ ve $j \leq k$ olacak şekilde bir k∈I varsa I ya yönlendirilmiş (directed) küme denir.

Tanım 2.30. $\{G_i : i \in I\}$ yönlendirilmiş I kümesi tarafından indekslenmiş sonlu G_i gruplarının bir ailesi olsun. $i \leq j$ olan her $i, j \in I$ çifti için $\theta_{ji} : G_j \to G_i$ homomorfizmaları var ve eğer;

i) θ_{ii}, G_i üzerinde birim dönüşüm;

ii) her $i \leq j \leq k$ için $\theta_{kj}.\theta_{ji} = \theta_{ki} : G_k \to G_i$,

şartlarını sağlıyorsa, θ_{ji} homomorfizmaları ile birlikte $\{G_i : i \in I\}$ ailesine, sonlu grupların; yani

$$\{(G_i : i \in I) \ ; \ \theta_{ji}\}$$

sistemine sonlu grupların invers sistemi denir.

$\prod_{i \in I} G_i$ kartezyen çarpımının, $i \leq j$ için $\theta_{ji}(x_j) = x_i$ olacak şekildeki bütün $(x_i) \in \prod_{i \in I} G_i$ elemanlarının kümesi L olsun. L ye $\{G_i : i \in I), \theta_{ji}\}$ sisteminin ters (inverse) limiti denir ve $L = \varprojlim G_i$ ile gösterilir.

$$\varprojlim G_i \leq \prod_{i \in I} G_i$$

dir.

Eğer $\pi_i : L \to G_i$ bir doğal projeksiyon ise o zaman açık olarak $i \leq j$ için $\pi_j \theta_{ji} = \pi_i$ dir. G_i sonlu gruplarını, ayrık topoloji ile, topolojik gruplar olarak göz önüne alabiliriz ve o zaman $\prod_{i \in I} G_i$ kartezyen çarpımı üzerinde çarpım

topolojisi alınır. Bu çarpım topolojisinde, U_i, G_i nin bir altkümesi ve G_i sonlu grup olduğundan sonlu sayıda $i \in I$ için, U_i, G_i nin bütün altgrupları olmak üzere $\prod_{i\in I} G_i$, $\prod_{i\in I} U_i$, kümelerinin oluşturduğu bir baza sahiptir. $\prod_{i\in I} G_i$ deki açık kümeler bu bazdaki kümelerin herhangi birleşimidir. $\prod_{i\in I} G_i$ nin altgrubu L indirgenmiş topolojiye sahiptir ve L de bir topolojik grup olur. Böyle bir ters limite bir profinite grup denir.

Eğer $\pi_i : L \to G_i$ bir doğal projeksiyon dönüşümü ise o zaman $K_i = Ker\pi_i = L \cap \prod_{j\neq i} G_i$ olur.

Açık olarak K_i, L de sonlu indeksi olan bir normal açık altgruptur ve aynı zamanda kapalıdır.

Tanım 2.31. G sonlu bir p-grup olmak üzere eğer $G'=Z(G)$ ve $|G'| = |Z(G)| = p$ ise G ye ekstra özel p-grup (extraspecial p -grup) denir.

Tanım 2.32. Sonlu çözülebilir grupların sınıfı E olsun. Eğer;

i) E, S_n-kapalı yani $G \in E$ ve $N \lhd G$ ise o zaman $N \in E$,

ii) E, N_0-kapalı yani H_1 ve H_2, G nin normal E-altgrupları olmak üzere, $G=H_1H_2$ ise o zaman $G \in E$

şartlarını sağlıyorsa Fitting class olarak adlandırılır.

Tanım 2.33. $\mathcal{H}$ grupların herhangi bir sınıfı, G bir grup ve X de G nin $\mathcal{H}$-altgrubu olsun. Eğer G nin her altnormal altgrubu S için $X \cap S$, S nin bir maksimal $\mathcal{H}$-altgrubu oluyorsa X e G nin bir $\mathcal{H}$-injector'i denir.

Tanım 2.34. G bir sonlu çözümlü grup olsun. Eğer C, G nin nilpotent altgrubu ve $N_G(C) = C$ ise C ye G nin Charter altgrubu denir.

Tanım 2.35. G bir grup olmak üzere her $x \in G$ ve her $n \in N^+$ için $x = y^n$ (eğer grup toplamsal ise $x = ny$) olacak şekilde $y \in G$ varsa G ye bir köklü (bölümlü) grup denir.

Teorem 2.36 ([15] Fuchs Teorem 24.1). Her abeliyan grup, bir abeliyan divisible grubun altgrubuna izomorf yapılabilir.

Teorem 2.37 ([15] Fuchs teorem 24.4) Bir abeliyan A grubunu içeren her abeliyan divisible grup, A yı içeren bir minimal divisible abeliyan grubu içerir.

Tanım 2.38. A bir abeliyan grup olsun. A yı içeren bir minimal abeliyan divisible gruba A grubunun divisible hull'u denir.

Tanım 2.39. H, G nin belli bir altgrubu olsun. H nin herbir sol kosetinin (= sağ kosetinin) elemanları seçilsin ve sol koset (= sağ koset) temsilcilerinin kümesi T olarak yazılsın. T ye G içinde H nin sol kosetlerinin (= sağ kosetlerinin) temsilcilerinin kümesi ya da sol transversali (= sağ transversali) denir.

Teorem 2.40 ([7] 5.4.22) G normal altgrupları üzerinde minimal koşulu sağlasın. O zaman G sonlu indeksli bir tek minimal altgruba sahiptir ve bu grup G de karakteristiktir.,

Teorem 2.41 ([7] 1.5.6 (iii)). G bir grup ve H, $K \leq G$ olsun. Eğer Hchar $K \triangleleft G$ ise o zaman $H \triangleleft G$ dir.

Tanım 2.42. G bir grup olsun. Eğer her sonsuz m kardinali ve $|S| < m$ olacak şekilde G nin her S alt kümesi için $|G : C_G(S)| < m$ ise o zaman G ye bir Z – gruptur denir.

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

3. INNG 'NİN PRO-CHERNİKOV TÜMLEYENİ

Aşağıdaki lemmada G nin normal altgrupları üzerindeki iç otomorfizma ile G nin lokal iç otomorfizmalarının hangi şartlarda çakıştığı verilmiştir. Aşağıdaki şekilde verilen normal altgruplar bu çakışmayı sağlayan G nin en geniş normal altgruplarıdır.

Lemma 3.1. $G/C_G(H)$ bir Chernikov grup olacak şekilde H, G nin bir normal altgrubu olsun. Eğer $\varphi \in \text{Inn}G$ ise o zaman her $h \in H$ için $\varphi(h) = g^{-1}hg$ olacak şekilde G nin bir g elemanı vardır.

İspat. $G/C_G(H)$ minimal şartını sağladığından, $C_G(X) \leq C_G(H)$ olacak şekilde H nin sonlu bir X altkümesi vardır. Fakat $X \subseteq H$ ve $C_G(H) \leq C_G(X)$ olduğundan $C_G(H) = C_G(X)$ dir.

$\varphi \in \text{Inn}G$ ve X sonlu olduğundan her $x \in X$ için $\varphi(x) = g^{-1}xg$ olacak şekilde $g \in G$ vardır. Şimdi $h \in H$ olsun ve H nin $Y = X \cup \{h\}$ sonlu altkümesi gözönüne alınsın. Y sonlu olduğundan her $y \in Y$ için $\varphi(y) = a^{-1}ya$ olacak şekilde bir $a \in G$ vardır. Özel olarak her $x \in X$ için $\varphi(x) = a^{-1}xa = g^{-1}xg$ dir. Buradan $(ag^{-1})^{-1}x(ag^{-1}) = x$ olduğundan $(ag^{-1}) \in C_G(X) = C_G(H)$ dir. Böylece $\varphi(h) = a^{-1}ha = g^{-1}hg$ bulunur.

Sonuç 3.2. H, G nin normal altgrubu ve $\varphi \in \text{Inn}G$ olsun.

(a) X, G nin sonlu bir kümesi olmak üzere. $H = \langle X^G \rangle$ ve G bir CC-grup olsun.
(b) H Chernikov ve $G/Z(G)$ periyodik olsun.

(a) ve (b) den en az biri sağlanıyor ise o zaman her $h \in H$ için $\varphi(h) = g^{-1}hg$ olacak şekilde bir $g \in G$ vardır.

İspat.

(a) X, G nin sonlu altkümesi olmak üzere $H = \langle X^G \rangle$ ve G bir CC-grup olsun. G bir CC- grup olduğundan her $x \in G$ için $G/C_G(x^G)$ Chernikovdur. $\langle X^G \rangle = H$ olduğundan $C_G(H) = C_G(X^G)$ dir. Ayrıca X sonlu olduğundan $x_1, ..., x_n \in G$ olmak üzere $X = \{x_1, ..., x_n\}$ şeklinde yazılabilir.

$$X^G = \langle x^g : g \in G, x \in X \rangle$$
$$= \langle x_1^G, ..., x_n^G \rangle$$
$$\cong \prod_{i=1}^{n} x_i^G$$

dir. $\varphi: G/\bigcap_{i=1}^{n} C_G(x_i^G) \rightarrow \prod_{i=1}^{n} G/C_G(x_i^G)$ bir monomorfizma ve ayrıca $C_G(X^G) = \bigcap_{i=1}^{n} C_G(x_i^G)$ olduğundan $G/C_G(X^G) \cong \varphi(G/C_G(X^G)) \leqq \prod_{i=1}^{n} G/C_G(x_i^G)$ dir ve sonlu sayıda Chernikov grubun kartezyen çarpımı Chernikov olduğundan $\prod_{i=1}^{n} G/C_G(x_i^G)$ Chernikovdur ve bundan dolayı $G/C_G(X^G)$ Chernikovdur. Böylece $C_G(X^G) = C_G(H)$ olduğundan $G / C_G(H)$ Chernikovdur. O halde Lemma 3.1 den her $h \in H$ için $\varphi(h) = g^{-1}hg$ olacak şekilde bir $g \in G$ vardır.

(b) H Chernikov ve $G / Z(G)$ periyodik olsun. O zaman $Z(G) \leq C_G(H)$ olduğundan $G/C_G(H)$ de periyodiktir. $A = \{\Psi_g : \Psi_g : H \rightarrow H , \Psi_g(h) = h^g\}$ olsun. O zaman $G/C_G(H) \cong A$ olduğundan A periyodiktir. Ayrıca H Chernikov ve $A \leq Aut(H)$ olduğundan [6] Teorem 3.29 dan dolayı A Chernikovdur. O halde $G/C_G(H)$ Chernikovdur. Lemma 3.1 den dolayı her $h \in H$ için $\varphi(h) = g^{-1}hg$ olacak şekilde bir $g \in G$ vardır.

Örnek 3.3 örnek bu sonucun keyfi bir CC-grubun normal Chernikov altgrubu için doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 3.3. A ve B iki quasicyclic p-grup, H = A x B direkt çarpımı ve ε: A $\rightarrow$ B olmak üzere ε bir izomorfizma olsun. O zaman

$$\gamma : A \times B \rightarrow A \times B$$
$$ab \rightarrow a\varepsilon(a)b$$

olacak şekilde H 'nin bir γ otomorfizması vardır. Gerçekten,

$$\begin{aligned}\gamma(a_1b_1a_2b_2) &= \gamma(a_1a_2b_1b_2)\\ &= a_1a_2\varepsilon(a_1a_2)\, b_1b_2\\ &= a_1a_2\,\varepsilon(a_1)\varepsilon(a_2)\, b_1b_2\\ &= a_1\varepsilon(a_1)\, b_1a_2\varepsilon(a_2)\, b_2\\ &= \gamma(a_1b_1)\,\gamma(a_2b_2)\end{aligned}$$

dir. Her $ab \in A \times B$ için $a\varepsilon(a)^{-1}b \in A \times B$ dir ve

$$\gamma(a\varepsilon(a)^{-1}b) = a\varepsilon(a)\,\varepsilon(a)^{-1}b = ab$$

dir. Böylece γ epimorfizmadır.

$$\begin{aligned}ab \in \mathrm{Ker}\gamma &\Rightarrow \gamma(ab) = 1\\ &\Rightarrow a\varepsilon(a)b = 1\\ &\Rightarrow a = 1 \text{ ve } \varepsilon(a)b = 1\\ &\Rightarrow a = 1 \text{ ve } \varepsilon(1)b = 1\\ &\Rightarrow a = 1 \text{ ve } 1b = 1\\ &\Rightarrow a = 1 \text{ ve } b = 1\end{aligned}$$

Böylece $\mathrm{Ker}\gamma$ = 1 olduğundan γ bir izomorfizmadır. G, H nin $<\gamma>$ tarafından üretilen parçalı genişlemesi (split extension) olsun. O zaman G bir CC-gruptur. Gerçekten, G = H$<\gamma>$ ise G′ = [G, G] ve

$$[h_1\gamma, h_2\gamma] = [h_1, h_2\gamma]^{\gamma}\,[\gamma, h_2\gamma]$$
$$[h_1\gamma, h_2\gamma] = (\,[h_1,\gamma]\,[h_1, h_2]^{\gamma})^{\gamma}\,[\gamma,\gamma\,]\,[\gamma, h_2]^{\gamma}$$

$[h_1, h_2] = 1$ ve $[\gamma, \gamma] = 1$ olduğundan ,

$$\begin{aligned}[h_1\gamma, h_1\gamma] &= (h_1^{-1}h_2^{\gamma})^{\gamma}\,(\,[h_2, \gamma]^{-1})^{\gamma}\\ &= (h_1^{-1}h_1^{\gamma})\,(\,(h_2^{-1}h_2^{\gamma})^{-1})^{\gamma}\\ &= (h_1^{-1}h_1^{\gamma})\,(h_2^{-1}h_2^{\gamma})^{-1}\\ &= [h_1, \gamma]\,[h_2, \gamma]^{-1} \in [H, \gamma]\end{aligned}$$

$[h_1\gamma, h_2\gamma] = [h_1, \gamma]\,[h_2, \gamma]^{-1}$ dir. $h_1 = a_1b_1$, $h_2 = a_2b_2$ ve $h_1, h_2 \in H$ olsun. O zaman $[h_1\gamma, h_2\gamma] = \varepsilon(a_1)\,\varepsilon(a_2)^{-1} \in B$ dir. Böylece $G' \le B = C_{p^\infty}$ olduğundan G' Chernikovdur ve dolayısıyla $[G, x]$ Chernikovdur. $g \in G$ olsun. O zaman $g=h\gamma$ şeklinde alabiliriz.

$$\begin{aligned}(h\gamma)^{-1}\,\varepsilon(a_1)\varepsilon(a_2)^{-1}(h\gamma) &= \gamma^{-1}h^{-1}\,\varepsilon(a_1)\varepsilon(a_2)^{-1}h\gamma\\ &= \varepsilon(a_1)\varepsilon(a_2)^{\gamma}\\ &= \varepsilon(a_1)\varepsilon(a_2)\end{aligned}$$

dir. Böylece $C_G[G, x] = G$ olduğundan $G/C_G[G, x] = 1$ periyodik ve G, Teorem 2.22 den dolayı CC-gruptur. Eğer $A = \langle a_1, a_2,\ldots: (a_1)^p = 1, (a_{n+1})^p = a_n \rangle$ ise o zaman G, $\langle a_{n+1}\rangle$ üzerinde $\gamma^{1+p+\ldots+p^n}$ otomorfizması ile çakışan bir lokal iç otomorfizmaya sahiptir. Fakat bu otomorfizma H üzerindeki iç otomorfizma ile çakışmaz.

Tanım 3.4. G bir grup ve $\{F_i : i \in I\}$ G nin normal altgruplarının bir ailesi olsun. Eğer;

i) $G = \bigcup_{i\in I} F_i$

ii) Her $i, j \in I$ için $F_iF_j \le F_k$ olacak şekilde $k\in I$ varsa

$\{F_i : i\in I\}$ ye G nin normal altgruplarının bir lokal sistemi denir.

G bir CC-grup, X_i, G nin elemanlarının sonlu altkümelerinin bütün normal kapanışları $F_i =< X_i^G >$ nin bir lokal sistemi $\sum = \{F_i : i \in I\}$ olsun. A = InnG ve her $i \in I$ için $C_i = C_A(F_i) = \{\alpha \in A : \alpha(x) = x, \forall x \in F_i\}$ olsun. Z = Z(G) olmak üzere [7] 1.5.3 den dolayı $G/Z \cong A$ dır. Bu izomorfizma altında $C_A(F_i)$, $C_G(F_i)/Z$ ye karşılık gelir.

Teorem 3.5. Notasyonlar yukarıdaki gibi olmak üzere $\zeta = \{C_i : i \in I\}$, A =InnG nin bir Chernikov residual sistemi ve L=LinnG, A nın ζ ye göre pro-Chernikov grubudur. Bundan başka $\pi_i : L \to A / C_i$ doğal homomorfizma ise o zaman

$$K_i = Ker\pi_i = C_L(F_i) = \{\varphi \in L : \varphi(x) = x, \forall x \in F_i \text{ için}\}$$

dir.

İspat. G bir CC-grup olduğundan $G / C_G(F_i)$ bir Chernikov gruptur. $A \cong G/Z$ olduğundan $A/C_A(F_i) \cong \dfrac{G/Z}{C_G(F_i)/Z} \cong G/C_G(F_i)$ dir. Buradan $A/C_A(F_i)$ Chernikov gruptur. $\sum = \{F_i : i \in I\}$, G nin lokal sistemi olduğundan $G = \bigcup_{i \in I} F_i$ dir. $\alpha \in \cap\{C_i : i \in I\}$ olsun. Her $i \in I$ için $\alpha \in C_i$ olduğundan her $i \in I$ ve $x \in F_i$ için $\alpha(x) = x$ tir.

Fakat $G = \bigcup_{i \in I} F_i$ olduğundan her $g \in G$ için $g \in F_i$ olacak şekilde $i \in I$ olduğundan $\alpha g = g$ dir. Yani her $g \in G$ için $\alpha g = g$ olduğundan $\alpha = I$ dır. Bundan dolayı $\cap\{C_i : i \in I\} = 1$ dir. $X_k = X_i \cup X_j$ olsun. O zaman $F_i \leq F_k$ ve $F_j \leq F_k$ olduğundan $F_iF_j \leq F_k$ dır. O halde $C_k \leq C_i \cap C_j$ olacak şekilde $k \in I$ vardır. Bundan dolayı ζ, A nın bir residual Chernikov sistemidir. Eğer $\varphi \in L$ ve $i \in I$ ise o zaman Sonuç 3.2 den $\varphi|_{F_i} = \alpha_i|_{F_i}$ olacak şekilde bir iç otomorfizma $\alpha_i \in A$ vardır. O zaman her $x \in F_i$ için $\varphi(x) = \alpha_i(x)$ olduğundan $\varphi\alpha_i^{-1}(x) = x$ dir. Buradan $\varphi\alpha_i^{-1} \in C_L(F_i) = K_i$ olduğundan $\varphi \in K_i\alpha_i \subseteq AK_i$ ve böylece $L \leq AK_i$ dir.

Fakat $A \leq L$ ve $K_i \leq L$ olduğundan $AK_i \leq L$ dir. Böylece $L=AK_i$ elde edilir. $L/K_i = AK_i/K_i \cong A/A \cap K_i = A / C_A(F_i)$ dir ve böylece $\pi_i: L \to A/C_i$ doğal epimorfizması vardır ve ayrıca $Ker\pi_i = K_i$ dir. π_i homomorfizmaları $\pi : L \to \Pi\{A/C_i \mid i \in I\}$ homomorfizmasına neden olur. Gerçekten, $\varphi \in L$ için $\pi(\varphi) = (\pi_i(\varphi))$ olarak tanımlanırsa $\pi(\varphi) = (\alpha_i C_i)$ dir ve böylece $Im\,\pi \leq \varprojlim (A/C_i)$ dir. Kabul edelim ki θ aşikâr olmayan lokal iç otomorfizma olsun. O zaman bir $x \in G$ için $\theta(x) \neq x$ tir. $G = \bigcup_{i \in I} F_i$ olduğundan $x \in F_i$ olacak şekilde bir $i \in I$ vardır ve $\theta(x) \neq x$ tir. Buradan bir $i \in I$ için $\theta \notin C_i$ olduğundan $\theta C_i \neq C_i$ dir ve böylece $\pi(\theta) \neq I$ olduğu açıktır. Böylece $Ker\pi = 1$ ve dolayısıyla π bir monomorfizmadır. $(\alpha_i C_i) \in \varprojlim (A/C_i)$ olsun. $\varnothing$, G den G ye $x \in F_i$ olmak üzere $\varnothing(x) = g_i^{-1} x g_i$ olarak tanımlansın. Bu tanım iyi tanımlıdır. Gerçekten, $x \in F_i \cap F_j$ ise o zaman $F_i F_j \leq F_k$ olacak şekilde $k \in I$ vardır ve böylece $C_k \leq C_i \cap C_j$ dir. Bundan dolayı $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k \in A$ için $\alpha_k C_i = \alpha_i C_i$ ve $\alpha_k C_j = \alpha_j C_j$ dir. Böylece $\alpha_i^{-1}\alpha_k \in C_i$ ve $\alpha_j^{-1}\alpha_k \in C_j$ dir. Ayrıca $C_k \leq C_i \cap C_j$ olduğundan her $x \in F_k$ için $\alpha_i^{-1}\alpha_k(x) = x$ ve $\alpha_j^{-1}\alpha_k(x) = x$ buradan $\alpha_k x = \alpha_i x$ ve $\alpha_k x = \alpha_j x$ dolayısıyla $g_i^{-1} x g_i = g_k^{-1} x g_k = g_j^{-1} x g_j$ elde edilir. O zaman $\varnothing \in LinnG$ ve $\pi(\varnothing) = (\alpha_i C_i)$ dir. Böylece $Im\pi = \varprojlim (A/C_i)$ ve dolayısıyla $LinnG \cong \varprojlim (A/C_i)$ dir.

Pro-Chernikov grup olarak Linn G nin topolojik tanımı açıklanması ve böyle bir grubun kompakt uzay olması ([8] Teorem 4.3, Linn G nin kompakt olduğu Teorem 4.3 de verilmiştir), $\Sigma = \{F_i : i \in I\}$ standart lokal sistemin altgrupları üzerin de iç otomorfizmaların etkisinden G nin lokal iç otomorfizmalarının inşası için bir metot verir. Daha sonraki sonuçlarda LinnG nin tümleyenini oluşturmada kullanılan $A = InnG$ nin $\zeta = \{C_i : i \in I\}$ özel residual Chernikov sisteminin özelliklerine ayrıca ihtiyaç olacak. LinnG nin residual Chernikov sistemini $\{K_i : i \in I\}$ olduğunu ve LinnG nin standart residual Chernikov sistemi olarak da kullanılabileceğini belirtelim.

Lemma 3.6. G bir CC-grup ve $\sum = \{F_i : i \in I\}$ G nin standart lokal sistemi ve her $i \in I$ için G deki otomorfizma F_i üzerinde de bir otomorfizmaya neden oluyorsa böyle otomorfizmaların boştan farklı kapalı bir altkümesi $\mathcal{A}_i$ olsun. Öyle ki $F_i \geq F_j$ iken $\mathcal{A}_i$ nin herbir elemanı F_j de $\mathcal{A}_j$ den bir otomorfizmaya neden olsun. O zaman G'nin bir lokal iç otomorfizması φ vardır öyle ki φ her F_i üzerinde $\mathcal{A}_i$ den bir otomorfizmaya neden olur.

İspat. Her $i \in I$ için

$$K_i = C_L(F_i) = \{\varphi \in L : \varphi(x) = x, \forall x \in F_i \text{ için}\},$$

$\{K_i : i \in I\}$, L = LinnG nin standart residual Chernikov sistemidir. Bunun için öncelikle L/K_i nin Chernikov grup olduğu gösterilecek. Teorem 3.5 in ispatından dolayı $L/K_i \cong A/C_i$ dir. $L/K_i \cong A/C_i \cong G/C_G(F_i)$ bir Chernikov grup olduğundan L/K_i Chernikov bir gruptur.$\varphi \in \cap \{K_i : i \in I\}$ olsun. O zaman her $i \in I$ için $\varphi \in K_i$ dir. $K_i = C_L(F_i) = \{\varphi \in L : \varphi(x) = x, \forall x \in F_i \text{ için}\}$ ve $\Sigma = \{F_i : i \in I\}$ G nin lokal sistemi olduğundan $G = \bigcup_{i \in I} F_i$ dir. O zaman her $g \in G$ için $g \in F_i$ olacak şekilde $i \in I$ vardır ve her $i \in I$ için $\varphi \in K_i$ ve

$$K_i = C_L(F_i) = \{\varphi \in L : \varphi(x) = x, \forall x \in F_i \text{ için}\}$$

olduğundan $\varphi(g) = g \Rightarrow \varphi = I$ dır. Bundan dolayı $\cap\{K_i : i \in I\} = 1$ dir. Son olarak $\{K_i : i \in I\}$ nin, L nin standart residual Chernikov sistemi olduğunu göstermek için her i, $j \in I$ için $K_k \leq K_i \cap K_j$ olacak şekilde $k \in I$ olduğu gösterilecek. $\sum = \{F_i : i \in I\}$ G nin lokal sistemi olduğundan her i, $j \in I$ için $F_i F_j \leq F_k$ olacak şekilde $k \in I$ vardır. O zaman $F_i \leq F_k$ ve $F_j \leq F_k$ olduğundan $C_L(F_k) \leq C_L(F_i)$ ve $C_L(F_k) \leq C_L(F_j)$ dir. Buradan $C_L(F_k) \leq C_L(F_i) \cap C_L(F_j)$ elde edilir. Böylece her i, $j \in I$ için $K_k \leq K_i \cap K_j$ olacak şekilde $k \in I$ vardır. Böylece $\{K_i : i \in I\}$, L = LinnG nin standart residual Chernikov sistemidir.

θ, A / C_i den F_i de G nin neden olduğu otomorfizma grubuna olan doğal bir izomorfizma ve $\beta_i = \{\varphi \in L : \varphi|_{F_i} \in \mathcal{A}_i\}$ olsun. O zaman $\Pi_i^{-1}\theta^{-1}\mathcal{A}_i = \beta_i$, L nin kapalı bir altkümesidir. Burada $\mathcal{A}_i$ kapalı küme olduğundan β_i de kapalı bir kümedir. $\varphi \in \beta_i$ ise $\varphi|_{F_i} \in \mathcal{A}_i$ dir. O zaman hipotezden dolayı $\mathcal{A}_i$ nin her elemanı $F_j \leq F_i$ için F_j üzerinde de bir otomorfizma olduğundan $\varphi|_{F_j} \in \mathcal{A}_j$ ve dolayısıyla $\varphi \in \beta_j$ dir. Böylece $\beta_i \subseteq \beta_j$ dir.O halde s, r $\in$ I için $\beta_s \cap \beta_r$ boştan farklıdır. Gerçekten, $\{F_i : i \in I\}$ G'nin lokal sistemi olduğundan $F_s F_r \leq F_k$ olacak şekilde k $\in$ I vardır. O zaman $F_s \leq F_k$ ve $F_j \leq F_k$ dir. O zaman yukarıda gösterildiği gibi $\beta_k \subseteq \beta_s$ ve $\beta_k \subseteq \beta_r$ olduğundan $\beta_k \subseteq \beta_s \cap \beta_r$ dir. O halde $\beta_s \cap \beta_r$ boştan farklıdır. Bundan dolayı $\{\beta_i : i \in I\}$ sonlu kesişim özelliğini sağlar. [8] Teorem 4.3 den L kompakt ve [8] sayfa 68 deki sonlu kesişim özelliğinden dolayı $\cap\{\beta_i : i \in I\} \neq \emptyset$ dır. O zaman $\varphi \in \cap\{\beta_i : i \in I\}$ olacak şekilde bir lokal iç otomorfizma vardır. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 3.6 [1,3] deki gibi lokal eşlenik teoremlerini ispatlamakta kullanılabilir. Ancak burada bunun kullanılabilmesi için bir CC-grup G nin faktör gruplar ya da alt gruplarının lokal iç otomorfizmalarının G nin lokal iç otomorfizmaları tarafından belirlendiğini görme gerekir

Teorem 3.7. G bir CC-grup olsun.

(i) Eğer H $\leq$ G ve $\varphi \in$ LinnH ise o zaman $\theta|_H = \varphi$ olacak şekilde bir $\theta \in$ LinnG vardır.

(ii) Eğer N $\trianglelefteq$ G ve $\varphi \in$ LinnG/N ise o zaman θ, G/N de φ ye neden olacak şekilde bir $\theta \in$ LinnG vardır.

İspat. G nin elemanlarının sonlu kümesi X_i nin bütün normal kapanışları $F_i = \langle X_i^G \rangle$ nin oluşturduğu lokal sistem $\Sigma = \{F_i : i \in I\}$ olsun.

(i) $\mathcal{A}_i$, G nin iç otomorfizmalarının neden olduğu ve $H \cap F_i$ üzerinde φ ile çakışan F_i nin otomorfizmalarının kümesi olsun. Sonuç 3.2. 'den dolayı $\mathcal{A}_i \neq \varnothing$ dır. Aynı zamanda

$$\alpha_i \in \mathcal{A}_i \text{ için } \alpha_i|_{H \cap Fi} = \varphi|_{H \cap Fi}$$

dolayısıyla

$$\varphi \alpha_i^{-1}\big|_{H \cap F_i} = I_{H \cap F_i}$$

ve

$$\varphi \alpha_i^{-1} \in C_A(H \cap F_i)$$

olduğundan $\mathcal{A}_i$, $C_A(H \cap F_i)$ / C_i nin bir kosetidir. C_i, G nin bir Chernikov residual sistemi olduğundan $\mathcal{A}_i$ bir kapalı kümedir.

Ayrıca $F_i \cap H \geq F_j \cap H$ için $\mathcal{A}_i$ 'nin her bir elemanı $F_i \cap H$'de $\mathcal{A}_j$ 'den bir otomorfizmaya neden olur. Böylece Lemma 3.6'dan dolayı $\mathcal{A}_i$ 'den bir otomorfizma her bir $F_j \cap H$ üzerinde θ' ya neden olacak şekilde G 'de bir lokal iç otomorfizma vardır. Ayrıca $\{F_i : i \in I\}$ G'nin lokal sistemi olduğundan

$$H = \bigcup_{i \in I} (H \cap F_i)$$

dir. Böylece $\theta|_H = \varphi$ dir.

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

(ii) Şimdi de $\mathcal{A}_i$, G'nin iç otomorfizmalarının neden olduğu ve F_i N / N' de φ ile çakışan bir otomorfizmaya neden olan F_i nin otomorfizmalarının kümesi olsun. Tekrar sonuç 3.2 den dolayı $\mathcal{A} \neq \varnothing$ dir. Eğer

$$\overline{A} = \mathrm{Inn}\,(G/N),\ \overline{F}_i = F_i N/N \text{ ve } \overline{C}_i = C_{\overline{A}}(\overline{F}_i)$$

ise o zaman $\rho : A/C_i \to \overline{A}/\overline{C}_i$ bir doğal homomorfizma vardır. Ayrıca A/C_i ve $\overline{A}/\overline{C}_i$ Chernikov olduğundan [2] nin Lemma 2.2. (iii) den dolayı ρ bir kapalı sürekli fonksiyondur.

Sonuç 3.2'den dolayı bir $\overline{\alpha}|_{\overline{F}_i} = \varphi|_{\overline{F}_i}$ olacak şekilde bir $\overline{\alpha} \in \overline{A}$ vardır ve $a_i = (\overline{\alpha C_i})\rho^{-1}$ dir. $\overline{\alpha C_i}$ kapalı küme olduğundan $\rho^{-1}(\overline{\alpha C_i})$ de kapalı kümedir. Böylece Lemma 3.6'nın şartlarını sağlar. O zaman G/N de φ otomorfizması θ'ya neden olacak şekilde bir $\theta \in$ LinnG vardır.

Sonuç 3.8. G bir CC-grup olsun :

i) $H \le K \le G$ ise o zaman $Lcl_K(H) \subseteq Lcl_G(H)$ dir.

ii) $N \trianglelefteq G$ ve $N \le H$ ise o zaman $Lcl_{G/N}(H/N) = \{K/N : K \in Lcl_G(H)\}$ dir ve özel olarak $|Lcl_{G/N}(H/N)| = |Lcl_G(H)|$ dır.

İspat. i) $H \le K \le G$ ve $A \in Lcl_K(H)$ ise o zaman $\varphi(H) = A$ olacak şekilde bir $\varphi \in$ LinnK vardır. $K \le G$ ve $\varphi \in$ LinnK olduğundan Teorem 3.7(i) den dolayı $\theta|_K = \varphi$ olacak şekilde bir $\theta \in$ LinnG vardır. Böylece $\theta|_K(H) = \varphi(H) = A$ dır. $\theta|_K(H) = A$ olduğundan $A \in Lcl_G(H)$ dir. Böylece $Lcl_K(H) \subseteq Lcl_G(H)$ dir.

ii) $N \trianglelefteq G$ ve $N \le H$ ve $K/N \in Lcl_{G/N}(H/N)$ olsun. O zaman $\varphi(H/N) = K/N$ olacak şekilde $\varphi \in$ LinnG/N vardır. Teorem 3.7 (ii) den dolayı öyle bir $\theta \in$ LinnG vardır ki G/N de θ, φ homomorfizmasına neden olduğundan $K \in Lcl_G(H)$ öyle ki $\theta(H) = K$ dir. Böylece, $Lcl_{G/N}(H/N) = \{K/N : K \in Lcl_G(H)\}$ dir. Özel olarak, $|Lcl_{G/N}(H/N)| = |Lcl_G(H)|$ dir.

4. LİNNG NİN BAZI ALTGRUPLARININ İNDEKSİ

Bir profinite grup için, herhangi kapalı bir altgrubun indeksini belirlemek mümkündür. Ancak, girişte değinilen zorluklardan dolayı genelde bir pro-Chernikov grup için bu mümkün değildir. Fakat standart residual sistemin bir altgrubunu içeren U_λ altgruplarının kesişimi olan LinnG nin bir U altgrubu gözönüne alınırsa |LinnG : U| indeksini belirlemek mümkündür. Bu sonuç ispatlanmadan önce LinnG nin kompakt olmasının teknik bir sonucuna değinilecektir.

Lemma 4.1. Bir H Chernikov grubunun minimal normal altgrupları sonludur.

İspat. M, H 'nin minimal normal altgrubu olsun. M = 1 ise M sonludur. $M \neq 1$ ise $1 \neq x \in M$ vardır. M minimal normal altgrup olduğundan dolayı $M = x^H$ şeklinde olmalıdır. H Chernikov olduğundan dolayı H / R sonlu olacak şekilde sonlu sayıda yarıdevirli grubun bir direkt çarpımına izomorf olan R altgrubu vardır. $M \cap R = 1$ veya $M \cap R = M$ olmalıdır. $M \cap R = 1$ ise $MR / R \cong M / M \cap R \cong M$ sonlu olur. $M \cap R = M$ ise $M \subseteq R$ olur. O halde M periyodik ve abeliyandır. Böylece M sonlu üslü olur. Ancak M bir Chernikov grup olduğundan sonlu olmak zorundadır.

Lemma 4.2. G bir CC-grup ve $\{K_i = C_L(F_i) : i \in I\}$, L = LinnG nin standart residual Chernikov sistemi olsun. $\lambda \in \Lambda$ olmak üzere U_λ, bir $i(\lambda) \in I$ için $K_{i(\lambda)}$ altgrubunu içeren L nin altgrupları olsun. $U_\beta \geq \cap \{ U_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ olacak şekilde $\beta \in \Lambda$ ve $\Gamma \subseteq \Lambda$ olsun. O zaman $U_\beta \geq U_{\gamma_1} \cap ... \cap U_{\gamma_k}$ olacak şekilde $\{\gamma_1, ..., \gamma_k\} \subseteq \Gamma$ bir sonlu altkümesi vardır.

İspat. Sonucun yanlış olduğunu kabul edelim. Ω, Γ nın bütün sonlu altkümelerinin kümesi olsun. Her $\sigma \in \Omega$ için $U_\sigma = \cap \{U_\gamma : \gamma \in \sigma\}$ yazılır. O zaman $U_\beta \geq \cap\{ U_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ olduğundan $U_\beta \geq \cap \{ U_\gamma : \gamma \in \Gamma \} = \cap \{ U_\sigma : \sigma \in \Omega\}$ ve kabulden dolayı her $\sigma \in \Omega$ için $U_\beta \not\geq U_\sigma$ dır. $V_\beta = Core_L(U_\beta) \geq K_{i(\beta)}$ olsun ve

$V = \cap\{U_\sigma V_\beta : \sigma \in \Omega\}$ gözönüne alalım. $K_{i(\beta)} \leq Core_L(U_\beta)$ ve $Core_L(U_\beta) = V_\beta$ olduğundan ve ayrıca Teorem 3.5 in ispatından dolayı $L/K_{i(\beta)} \cong A/C_i \cong G/C_G(F_i)$ ve böylece $L/ K_{i(\beta)}$ Chernikov olduğundan L/V_β Chernikovdur. L/V_β minimal şartını sağladığından $V = U_{\sigma_1} V_\beta \cap \ldots \cap U_{\sigma_n} V_\beta$ olacak şekilde $\{\sigma_1, \ldots,\sigma_n\} \subseteq \Omega$ sonlu kümesi vardır. Ayrıca $\sigma_0 = \sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_n \in \Omega$ olmak üzere

$$V = U_{\sigma_1} V_\beta \cap \ldots \cap U_{\sigma_n} V_\beta \geq (U_{\sigma_1} \cap \ldots \cap U_{\sigma_n}) V_\beta = U_{\sigma_0} V_\beta$$

dır. Şimdi $\Omega_0 = \{ \sigma \in \Omega : \sigma_0 \subseteq \sigma \}$ olsun. O zaman

$$U_\beta \geq \cap \{ U_\sigma : \sigma \in \Omega \} = \cap \{ U_\sigma : \sigma \in \Omega_0 \}$$

dır. Ayrıca $\Omega_0 = \{\sigma \in \Omega : \sigma_0 \subseteq \sigma\}$ olduğundan $\Omega_0 \subseteq \Omega$ dır ve $\cap\{ U_\sigma : \sigma \in \Omega_0\} \leq U_\beta$ olduğundan $\cap \{ U_\sigma : \sigma \in \Omega_0\} V_\beta \leq U_\beta V_\beta$ dır. Böylece $V \leq U_\beta V_\beta$ yani $V \leq U_\sigma V_\beta$ olur.

$$V = U_{\sigma_1} V_\beta \cap \ldots \cap U_{\sigma_n} V_\beta \geq (U_{\sigma_1} \cap \ldots \cap U_{\sigma_n}) V_\beta \text{ ve } (U_{\sigma_1} \cap \ldots \cap U_{\sigma_n}) V_\beta = U_{\sigma_0}$$

olduğundan $V \geq U_{\sigma_0} V_\beta$ böylece $V \geq U_\sigma V_\beta$ dır. O zaman her $\sigma \in \Omega_0$ için $V = U_\sigma V_\beta$ dır. Özel olarak $V \not\leq U_\beta$ dır. Gerçekten, $V = \cap\{U_\sigma V_\beta : \sigma \in \Omega\}$, $V_\beta = Core_L(U_\beta) \leq U_\beta$ ve $Core_L(U_\beta) \lhd L$ olduğundan ve kabulden dolayı $U_\sigma \not\leq U_\beta$ olduğundan $\cap\{U_\sigma V_\beta : \sigma \in \Omega\} \not\leq U_\beta$ dır ve böylece $V \not\leq V_\beta$ dır.

Şimdi L / V_β Chernikov grubunun artan socle serisi $\{S_\alpha / V_\beta : \alpha < 2\omega\}$ olsun. $V \cap S_\alpha \not\leq U_\beta$ olacak şekilde bir en küçük α vardır. α limit ordinal olmadığından α-1 vardır ve $V \cap S_{\alpha-1} \leq U_\beta$ dır. Böylece her

$$\sigma \in \Omega_0 \text{ için } V \cap S_\alpha = U_\sigma V_\beta \cap S_\alpha = (U_\sigma \cap S_\alpha) V_\beta$$

olduğundan $U_\sigma \cap S_{\alpha-1} \leq U_\beta$ ve $U_\sigma \cap S_\alpha \not\leq U_\beta$ dır. Lemma 4.1 ve [14] 1.F.5 den dolayı $S_\alpha / S_{\alpha-1}$ sonludur ve bu yüzden

$$| U_\sigma \cap S_\alpha : U_\sigma \cap S_\alpha \cap U_\beta | \leq | U_\sigma \cap S_\alpha : U_\sigma \cap S_{\alpha-1} |$$

de sonludur. Ayrıca $X = \cup \{ X_{i(\gamma)} : \gamma \in \sigma\} \cup X_{i(\beta)}$ sonlu kümesi verilmek üzere $C_L(F_i) = K_i$, L = LinnG nin standart residual Chernikov sistemi olduğundan $U_\sigma \cap S_\alpha \cap U_\beta \geq \cap \{K_{i(\gamma)} : \gamma \in \sigma\} \cup K_{i(\beta)} = C_L(X^G)$ dir. Ayrıca kapalı alttaban özelliğinden dolayı $U_\sigma \cap S_\alpha \cap U_\beta$, L nin kapalı bir altgrubudur. Böylece $(U_\sigma \cap S_\alpha) - U_\beta$, $U_\sigma \cap S_\alpha \cap U_\beta$ kapalı altgrupların kosetlerinin sonlu bir birleşimidir ve $(U_\sigma \cap S_\alpha) - U_\beta$, $U_\sigma \cap S_\alpha \not\leq U_\beta$ olduğundan L nin boştan farklı kapalı bir altkümesidir. $\sigma = \sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_m \in \Omega_0$ olmak üzere eğer $\sigma_1, \ldots, \sigma_m \in \Omega_0$ ise o zaman

$$\cap \{ (U_{\sigma_i} \cap S_\alpha) - U_\beta : i = 1, \ldots, m \} = (U_\sigma \cap S_\alpha) - U_\beta$$

dır ve böylece $\{(U_{\sigma_i} \cap S_\alpha) - U_\beta : \sigma \in \Omega_0\}$ kapalı altkümelerinin ailesi sonlu kesişim özelliğini sağlar. O zaman L, kompakttır. L kompakt olduğundan $\cap\{(U_{\sigma_i} \cap S_\alpha) - U_\beta : \sigma \in \Omega_0 \} \neq \varnothing$ dır. Fakat $\cap\{U_\sigma : \sigma \in \Omega_0 \} \not\leq U_\beta$ bulunması hipotez ile çelişir.

Şimdi LinnG nin bazı altgruplarının indeksi üzerinde çok genel sonuç ispat edilecektir. Buradaki hipotez, karışıklığa sebep olacak sayılamayan sayıda altgrupları olan Chernikov grupların bu özelliğinden kaçınılarak seçilmiştir. Bununla birlikte takip eden bölümlerde bu hipotezlerin $K_i = C_L(F_i)$ altgruplar için sağlandığı görülecektir.

Teorem 4.3. G bir CC-grup ve $\{K_i = C_L(F_i) : i \in I\}$, L = LinnG nin standart residual-Chernikov sistemi olsun. U_λ ($\lambda \in \Lambda$) aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde L nin farklı altgrupları olsun.

(a) Her U_λ $i(\lambda) \in I$ için bir $K_{i(\lambda)}$ altgrubunu içersin.

(b) Her bir $U_{\lambda_1} \cap ... \cap U_{\lambda_n}$ sonlu kesişimi $\mu \in \Lambda$ olmak üzere yalnızca sayılabilir sayıda $U\mu$ içinde bulunsun.

(c) $i \in I$ için $U = \cap \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, en az bir K_i yi içermesin.

O zaman $|L : U| = 2^\Lambda$ dır.

İspat. İyi sıralama teoreminden Λ yı iyi sıralı bir küme olarak alabiliriz, böylece $|\Lambda|$ kardinalitesinin en küçük ordinali olmak üzere $\Lambda = \{ \lambda : \lambda < \rho \}$ olarak kabul edebiliriz. Λ üzerinde bir ikinci iyi sıralama bağıntısını ordinallerin kümesinden $\{ \lambda : \lambda < \rho \}$ kümesi üzerine birebir – örten bir φ fonksiyonu ile şu şekilde tanımlayalım.

$\varphi(1)$, Λ nın bir elemanı olsun. O zaman her $\beta < \alpha$ için $\varphi(\beta)$ nın tanımlı olduğunu kabul edelim.

$$\Lambda(\alpha) = \{\lambda \in \Lambda : U_\lambda \geq U_{\varphi(\beta_1)} \cap ... \cap U_{\varphi(\beta_k)} \ , \beta_1, ..., \beta_k < \alpha \text{ için } \}$$

olsun

(I) Eğer $\Lambda(\alpha)$, $\{\varphi(\beta) : \beta < \alpha\}$'nın içinde değilse o zaman $\varphi(\alpha)$ en küçük ordinal $\lambda \in \Lambda(\alpha) - \{\varphi(\beta) : \beta < \alpha\}$ olarak tanımlansın.

(II) Eğer $\Lambda(\alpha) \subseteq \{\varphi(\beta) : \beta < \alpha\}$ ise o zaman $\varphi(\alpha)$ en küçük ordinali $\lambda \notin \{\varphi(\beta) : \beta < \alpha \}$ olarak tanımlansın.

Yani burada tanımlanan yeni U_λ, listelenen altgruplarının sonlu kesişimini içeren bütün U_λ ların kümesini kapsar. $\{ \lambda : \lambda < \rho \}$ kümesinin elemanlarını bitirinceye kadar $\varphi(\alpha)$ ları tanımlamayı sürdürebiliriz. Böylece $|J| = |\Lambda|$ olacak şekilde ordinalleri J kümesi üzerinde φ tanımlanır. Eğer,

$$\Lambda(\alpha) \subseteq \{\varphi(\beta) : \beta < \alpha\}$$

ise $\alpha \in J$ ye kapalı diyeceğiz. Eğer $\alpha \in J$ sonlu ise (b) şartından dolayı U_λ nın içerdiği yalnızca sayılabilir sayıda

$$\cap \{ U_{\varphi(\beta)} : \beta < \alpha \}$$

vardır ve böylece $\overline{\alpha} \in J$ kapalı ordinali sayılabilirdir. Aynı zamanda $X_{i(\varphi(\beta))}$, G nin sonlu altkümeleri olmak üzere,

$$X = \cup \{X_{i(\varphi(\beta))} : \beta < \alpha \}$$

olsun. O zaman (a) yı kullanarak

$$\cap \{ U_{\varphi(\beta)} : \beta < \overline{\alpha} \} = \cap \{ U_{\varphi(\beta)} : \beta < \alpha \} \geq \cap \{ K_{i(\varphi(\beta))} : \beta < \alpha \} > C_L(X^G)$$

dir. (c) şartından dolayı

$$\lambda \notin \{\varphi(\beta) : \beta < \overline{\alpha} \}$$

olacak şekilde $\lambda \in \Lambda$ vardır. Eğer $\alpha \in J$ sonsuz ise o zaman (b) şartından dolayı $\beta_1, \ldots \beta_k < \alpha$ olmak üzere $U_{\varphi(\beta_1)} \cap \ldots \cap U_{\varphi(\beta_k)}$ sonlu kesişimini içerecek $|\alpha|$ kardinali kadar U_λ vardır ve böylece $|\overline{\alpha}| = |\alpha|$ dır. Her iki durumda da J nin $|\Lambda|$ kapalı ordinalleri içerdiği anlaşılır. $J = \{\alpha : \alpha < \sigma\}$ olarak alırız. Gerçekten eğer Λ sayılamaz ise $\sigma = \rho$ ve eğer Λ sayılabilir ise $\sigma \leq \omega^2$ dir.

$$\{ U_{\varphi(\alpha)} X_\alpha : \alpha < \sigma \}$$

kosetlerinin bir dizisi $2^{|\Lambda|}$ ile oluşturulan L içinde U nun farklı kosetlerinin sayısının $2^{|\Lambda|}$ olduğunu göstereceğiz. Burada herbir

$$\{ U_{\varphi(\alpha_1)} X_{\alpha_1} , \dots , U_{\varphi(\alpha_k)} X_{\alpha_k} \}$$

sonlu alt kümesi boştan farklı bir kesişmeye sahiptir. $U_{\varphi(\alpha)} X_\alpha$, L kompakt uzayının kapalı altkümeleri olduğundan $x \in \cap \{ U_{\varphi(\alpha)} X_\alpha : \alpha < \sigma \}$ vardır ve böylece $Ux = \cap \{ U_{\varphi(\alpha)} X_\alpha : \alpha < \sigma \}$ L içindeki U nun bir kosetidir. U nun farklı kosetleri, farklı koset dizileri verir. Eğer,

$$\cap \{ U_{\varphi(\alpha)} X_\beta : \beta < \alpha \} \neq \varnothing$$

ise $\{ U_{\varphi(\alpha)} X_\beta : \beta < \alpha \}$ dizisine α uzunluğunun coherent'i denir. α uzunluğunun herbir coherent dizisinin $\alpha+1$ uzunluğunun birisi için bulunabildiğini ve eğer α kapalı ise dizinin iki farklı yolla bulunabildiğini göstereceğiz. (Sonlu kesişim özelliğinden dolayı limit ordinallerin varlığında bir problem olmadığını belirtelim.)

(A) $\{ U_{\varphi(\alpha)} X_\beta : \beta < \alpha \}$ coherent olduğunu kabul edelim. O zaman

$$x \in \cap \{ U_{\varphi(\alpha)} X_\beta : \beta < \alpha \}$$

elemanı vardır. $x \in \cap \{ U_{\varphi(\alpha)} X_\beta : \beta \leq \alpha \}$ olacak şekilde $x_\alpha = x$ olarak alalım ve böylece $\{ U_{\varphi(\alpha)} X_\beta : \beta \leq \alpha \}$ dizisi $\alpha + 1$ uzunluğunun coherentidir.

(B) $\{ U_{\varphi(\alpha)} X_\beta : \beta < \alpha \}$ coherent ve α nın kapalı olduğunu kabul edelim. Yine $x \in \cap \{ U_{\varphi(\alpha)} X_\beta : \beta < \alpha \}$ elemanı vardır. Fakat ayrıca Lemma 4.2'den dolayı $\cap \{ U_{\varphi(\beta)} : \beta < \alpha \} \not\leq U_{\varphi(\alpha)}$ dir ve böylece bir

$$y \in [\cap \{ U_{\varphi(\beta)} X_\beta : \beta < \alpha \}] - U_{\varphi(\alpha)}$$

elemanı varıdır ve $x_\alpha = x$ ya da $x_\alpha = yx$ koyularak dizi bulunabilir. $U_{\varphi(\alpha)} x$ ve $U_{\varphi(\alpha)} yx$ kosetleri farklıdır. Böylece σ uzunluğunun $2^{|\Lambda|}$ kadarki dizilerinin inşası tamamlanmış olur.

5. LOKAL İÇ OTOMORFİZMALARIN GRUBU

Chernikov residual sisteme göre InnG nin pro-Chernikov tümleyeni olarak LinnG nin tanımına sahibiz. Bu bölümdeki amaç LinnG'nin $\{K_i : i \in I\}$ standart residual sisteminin Teorem 4.3.teki U_λ $(\lambda \in \Lambda)$ için sağlanan şartları sağladığını göstermek ve $|LinnG| = 2^{|G/Z|}$ olduğunu göstermektir. Bunu göstermek için ek şartlara ihtiyaç vardır. Aksi taktirde genel durumda aşağıdaki örnekte de gösterildiği gibi her zaman doğru değildir.

Örnek 5.1. A ve B, $Z(p^\infty)$ prüfer grubuna izomorf olsun. O zaman R, p-adic tamsayıların halkası olmak üzere [6] 4.1.5 den dolayı Hom (A, B) $\cong$ R dir. Her $r \in R$ için r ye karşılık gelen homomorfizma η_r ile gösterilsin. O zaman G, R ile A $\oplus$ B nin parçalanma genişlemesi formundadır. Burada R nin A $\oplus$ B üzerine etkisi $(a,b)^r = (a, \eta_r(a) + b)$ ile verilsin. O zaman Z(G) = G′ = B dir. Gerçekten, $r\ (a_1, b_1) \in G$ ve $b \in B$ olsun. $b\ (r(a_1, b_1)) = (r\, b^r + (a_1, b_1)) = r(a_1, b_1 + b) = (r(a_1, b_1))b$ olduğundan $B \leq Z(G)$ dir. Şimdi de $(r(a, b)) \in Z(G)$ olsun. O zaman her $(r_1(a_1, b_1)) \in G$ için

$$(r(a, b))\,(r_1(a_1, b)) = (r_1(a_1, b_1))\,(r(a, b))$$
$$\Rightarrow r\, r_1(a_1, b)^{r_1} + (a_1, b_1) = r_1\, r(a_1, b_1)^r + (a, b)$$
$$\Rightarrow r\, r_1(a + a_1, \eta_{r_1}(a) + b + b_1) = r_1\, r(a_1 + a, \eta_r(a_1) + b_1 + b)$$
$$\Rightarrow \eta_{r_1}(a) + b + b_1 = \eta_r(a_1) + b + b_1$$
$$\Rightarrow \eta_{r_1}(a) = \eta_r(a_1)$$

dir. Her $a_1 \in A$ için $\eta_{r_1}(a) = \eta_r(a_1)$ olduğundan $a_1 = 0$ için $\eta_{r_1}(a) = 0$ dır. Her $r_1 \in R$ için $\eta_{r_1}(a) = 0$ ise $a = 0$ dır. O zaman her $a_1 \in A$ için $\eta_r(a_1) = 0$ olduğundan $\eta_{r_1} = 0$ dır. O zaman $(a, b)^r = (a, \eta_r(a) + b) = (a, 0 + b) = (a, b)$ dir. O zaman r birim ve $a = 0$ olduğundan $r(a, b) = b$ dir. Böylece $Z(G) \leq B$ dir. O halde B = Z (G) dir. Ayrıca Z(G) = G′ = B dir. B Chernikov

olduğundan G′ Chernikov ve her $x \in G$ için $[G, x] \leq G'$ olduğundan $[G, x]$ Chernikovdur. $[G, x] \leq G' = Z(G)$ olduğundan $[G, x] \leq Z(G)$ dir. Böylece $C_G([G, x]) = G$ dir. O halde $G/C_G([G, x]) = 1$ olduğundan Teorem 2.22 (Polovickii) den dolayı G bir CC-gruptur. Eğer i, R nin birim elemanı ise o zaman $B=Z(G)$ olduğundan $BR \leq C_G(i)$ dir. $g \in C_G(i)$ olsun. $g = (r(a, b))$ dir.

$$g^{-1}ig = i \Rightarrow (r^{-1}(-a, -b)^{r^{-1}})\, i\, (r(a, b)) = i$$
$$\Rightarrow (r^{-1}(-a, -b)^{r^{-1}})\, (r(a, b)) = i$$
$$\Rightarrow (i(-a, -b)^{i}) + (a, b) = i$$
$$\Rightarrow (i(-a, \eta_i(-a) - b)) + (a, b) = i$$
$$\Rightarrow i(0, \eta_i(-a)) = i$$

Böylece $\eta_i(-a) = 0$ ve dolayısıyla $a = 0$ dır. $g = (r(0, b))$ olduğundan $C_G(i) \leq BR$ dir. O halde $C_G(i) = BR$ ve benzer şekilde $C_G(R) = BR$ dir. Eğer $\varphi \in LinnG$ ise B ve R i'yi merkezlediğinden $\varphi(i) = a_0^{-1} i a_0$ olacak şekilde $a_0 \in A$ vardır. $C_G(i) = C_G(R)$ olduğundan her $r \in R$ için $\varphi(r) = a_0^{-1} r a_0$ dır. $a \rightarrow a^{-1}(\varphi(a)) \in G' = B$, A dan B ye bir homomorfizmadır. $r \in R$ için $a^{-1}\varphi(a) = \eta_r(a)$ olduğundan $\varphi(a) = (a, \eta_r(a)) = a^r$ dir. Böylece φ nin G üzerine etkisi $a_0 r$ ile eşlenikleme şeklindedir. Dolayısıyla LinnG = InnG dir.

Örnek 5.1 de $G / Z(G) \cong Z(p^\infty) \oplus R$ periyodik değildir ve istenilen sonuçları burada beklemek yanlış olur. Bu bölümde beklenilen, G / Z(G) periyodik olacak şekilde CC-grup G için Teorem 4.3 ün şartlarının sağlanmasıdır.

Lemma 5.2. G bir CC-grup ve $Z = Z(G)$ olsun. T / Z, G / Z nin bir periyodik abeliyan normal altgrubu ise o zaman T, G nin FC - merkezindedir.

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

İspat. aZ, T / Z nin elemanı olsun. T / Z periyodik olduğundan $0(aZ) = n$ sonludur. O zaman $a^n \in Z$ dir. T / Z normal abeliyan, periyodik ve $\langle a^G \rangle Z / Z \leq T / Z$ olduğundan $\langle a^G \rangle Z / Z$, mertebesi n olan elemanlar

tarafından üretilen G / Z nin normal abeliyan altgrubudur. G bir CC-grup olduğundan Teorem 2.22 (Polovickii) den dolayı [G, a] Chernikovdur. Böylece [G, a] Z / Z Chernikovdur. Ayrıca <a> Z / Z sonlu bir grup olduğundan Chernikovdur.

$\frac{a^G Z/Z}{[G,a]Z/Z} \cong <a> Z/Z$, $[G,a]Z/Z$ ve $<a> Z/Z$ Chernikov olduğundan $<a^G> Z/Z$ de Chernikovdur. $<a^G>Z / Z$ nin bütün elemanlarının mertebesi n ve Chernikov olduğundan$< a^G>$ centre-by-finite dır. [8] Teorem 1.2 den dolayı $< a^G>'$ sonludur. Ayrıca$< a^G>$ / $<a^G>'$ abeliyan olduğundan $< a^G>$ finite-by-abeliyandır. F =$< a^G>'$ ve $\bar{G}$ = G/F olsun ve bu durumda $< \bar{a}^{\bar{G}}>$ abeliyan ve $a^n \in Z$ olduğundan $\bar{a}^n \in Z(\bar{G})$ dir. Eğer $\bar{g} \in \bar{G}$ ise o zaman ;

$$
\begin{aligned}
[\bar{a}^n, \bar{g}] &= [\bar{a}^{n-1}\bar{a}, \bar{g}] \\
&= [\bar{a}^{n-1}, \bar{g}]^{\bar{a}} [\bar{a}, \bar{g}] \\
&= \bar{a}^{-1} [\bar{a}^{n-1}, \bar{g}] \bar{a} [\bar{a}, \bar{g}] \\
&= \bar{a}^{-1}\bar{a} [\bar{a}^{n-1}, \bar{g}] [\bar{a}, \bar{g}] \\
&= [\bar{a}, \bar{g}]^{n-1} [\bar{a}, \bar{g}] \\
&= [\bar{a}, \bar{g}]^n
\end{aligned}
$$

dir. Fakat $\bar{a} \in Z$ olduğundan $[\bar{a}, \bar{g}]^n = 1$ dir. Böylece $[\bar{a}, \bar{G}]$ sonlu exponentlidir.

$<a>[\bar{a}, \bar{G}] = <\bar{a}^{\bar{G}}>$ abeliyan olduğundan $[\bar{a}, \bar{G}]$ abeliyandır. Böylece $[\bar{a}, \bar{G}]$ abeliyan ve sonlu exponentli olduğundan sonludur. F = $< \bar{a}>'$ ve $[\bar{a}, \bar{G}]$ sonlu olduğundan [a, G] sonludur ve böylece $a \in FC(G)$ dir. O halde T, G nin FC-merkezindedir.

Lemma 5.3 (M. Gonzalez [12]). G bir CC grup ve G / N Chernikov grup olacak şekilde N, G nin bir normal altgrubu olsun. Eğer C / N = Z (G / N) ise

o zaman X, G nin bir sonlu kümesi ve G = HC olacak şekilde G nin H =< X^G> normal altgrubu vardır.

İspat. G / N Chernikov grup olduğundan divisible kısmı D / N vardır ve $\frac{G/N}{D/N}$ sonludur. $\frac{G/N}{D/N} \cong G/D$ sonlu olduğundan G = SD olacak şekilde G/N, bir sonlu S/N altgrubuna sahiptir. S = < X > N olacak şekilde G nin X sonlu kümesi vardır. G = SD ve S = < X>N olduğundan G = < X>ND = < X>D dir. D/N bölümlü, S/N sonlu ve D/N normal ve dolayısıyla $D/N^{S/N}$ = D/N olduğundan [7] Lemma 3.29.1 den dolayı,

$$D/N = ([D, S] N/N)C_{D/N}(S/N)$$

dir. Ayrıca [D/N, S/N] = [D, S]N/N dir. Dolayısıyla

$$D/N = ([D, S] N/N)C_{D/N}(S/N) \leq [D, S] C/N$$

dir. Bu yüzden G = < X > D = SC [D, S] dir. Fakat [D, S] ≤ < X^G>N ve böylece G = < X^G > C ve H = < X^G > olduğundan G = HC dir.

Lemma 5.4. G, CC-grup, G/Z periyodik ve G/N Chernikov olacak şekilde N, G nin normal altgrubu olsun. O zaman $C_G(N)/Z$ bir Chernikov gruptur.

İspat. Y/N = Z(G/N) ve Y/N nin divisible kısmı R/N olsun. Lemma 5.3 den dolayı X sonlu küme ve G = HR olacak şekilde G nin H = < X^G > normal altgrubu vardır. Bu yüzden $G/C_G(H)$ Chernikovdur. Gerçekten, X sonlu küme, H = < X^G> ve G, CC-grup olduğundan her x ∈ G için $G/C_G(x^G)$ Chernikovdur.< X^G> = H olduğundan $C_G(H) = C_G(X^G)$ dir. Fakat X sonlu küme olduğundan $C_G(H) = C_G(X^G) = \bigcap_{x \in X} C_G(x^G)$ dir. $G/C_G(x^G)$ Chernikov olduğundan $G/\bigcap_{x \in X} C_G(x^G)$ Chernikovdur. Bundan dolayı $G/C_G(H)$

Chernikovdur. Ayrıca $Z = C_G(H) \cap C_G(R)$ dir. Gerçekten, $Z(G) \geq C_G(H) \cap C_G(R)$ olduğu açıktır. $H \leq G$ olduğundan $Z(G) \leq C_G(H)$ ve $R \leq G$ olduğundan $Z(G) \leq C_G(R)$ dir. $Z(G) \leq C_G(H) \cap C_G(R)$ dir. Bundan dolayı $Z(G) = C_G(H) \cap C_G(R)$ dir. G, CC-grup olduğundan $G/C_G(X^G)$ Chernikov dolayısıyla $\frac{C_G(R) \cap C_G(H)}{C_G(X^G)}$ Chernikovdur. Fakat,

$$\frac{C_G(R) \cap C_G(H)}{C_G(X^G)} \cong \frac{C_G(R)}{C_G(H) \cap C_G(R)} \cong \frac{C_G(R)}{Z}$$

olduğundan $C_G(R)/Z$ Chernikovdur. $T = R \cap C_G(N)$ olsun. Hipotezden G/N Chernikov olduğundan $C_G(N)R/N$ Chernikov dolayısıyla $\frac{C_G(N)R/N}{R/N}$ Chernikovdur. Fakat,

$$\frac{C_G(N)R/N}{R/N} \cong C_G(N)R/R \cong C_G(N)/C_G(N) \cap R$$

ve $T = C_G(N) \cap R$ olduğundan $C_G(N)/T$ Chernikovdur. $C_G(N)/Z$ nin Chernikov olduğunu göstermek için $C_G(N)/Z \cong \frac{C_G(N)/T}{T/Z}$ olduğundan T/Z nin Chernikov olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için önce $[T, G] \leq T \cap N$ ve $[T, G, T] = [G, T, T] = 1$ olduğu gösterilecektir. $T \lhd G$ olduğundan $[T, G] = [R \cap C_G(N), G] \leq T$ olduğu açıktır. $Y/N = Z(G/N)$ ve $R/N \leq Y/N$ olduğundan, $[R/N, G/N] = 1$ ise $[R, G] \leq N$ dir. Fakat, $[T, G] = [R \cap C_G(N), G] \leq [R, G] \leq N$ olduğundan $[T, G] \leq T \cap N$ dir. $[T,G,T] = [[T,G], T] = [[G, T], T] = [G, T, T]$ dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}[[T, G], T] \leq [T \cap N, T] &= [R \cap C_G(N) \cap N, T] \\ &= [R \cap Z(N), T] \\ &= [R \cap Z(N), R \cap C_G(N)] \\ &= 1\end{aligned}$$

dir. Three subgroup Lemma'dan dolayı [G, T, T]. [T, T, G] ≤ [T, G, T] dir. [G,T,T] = [T,G,T]= 1 olduğundan [T, T, G] = 1 dir. Böylece T′ ≤ Z dir. Lemma 5.2 den dolayı T ≤ FC(G) dir. a ∈ T ise a ∈ R∩C_G(N) ve N ◁ R olduğundan a ∈ C_G(N) dir. Her n ∈ N için a^{-1}na = n olduğundan N ≤ C_G(a) dır. Şimdi, T≤FC(G), a ∈ T ise [G : C_G(a)] sonludur. Dolayısıyla G/C_G(a^G) sonludur. N≤C_G(a) ve N ◁ G olduğundan N ≤ C_G(a^G) dir. Ayrıca R/N divisible abeliyan olduğundan ve divisible abeliyan her grubun epimorfik görüntüsü de divisible abeliyan olduğundan RC_G(a^G)/C_G(a^G) de divisible abeliyandır. Fakat G/C_G(a^G) sonlu olduğundan RC_G(a^G)/C_G(a^G) de sonludur. Böylece RC_G(a)/C_G(a) = 1 ve buradan R ≤ C_G(a^G) dir. Böylece T ≤ C_G(R) dir. T/Z ≤ C_G(R)/Z ve C_G(R)/Z Chernikov olduğundan T/Z de Chernikovdur.

Teorem 5.5. G bir CC-grup ve G/Z periyodik olsun. Eğer G/Z Chernikov değilse o zaman | LinnG | = $2^{|G/Z|}$ dir.

İspat. L = LinnG nin standart residual Chernikov sistemi {K_i = C_L(F_i) : i ∈ I} yi gözönüne alalım ve Teorem 4.3 ün şartlarını sağlayan U_λ altgrupları için K_i altgrupları göstersin. K_i nin Teorem 4.3 ün şartlarını sağladığı gösterilecek. Her K_i altgrubu kendini içerdiğinden açık olarak (a) şartı sağlanır. G/Z Chernikov olmadığından ve G/Z ≅ AutG ≤ LinnG = L olduğundan L Chernikov değildir. Ayrıca herhangi bir, i ∈ I için K_i = 1 olamaz. Eğer her i ∈ I için K_i = 1 ise {Ki = C_L(F_i) : i ∈I} standart residual Chernikov sistemi olduğundan L/K_i Chernikovdur. Fakat her i ∈ I için K_i = 1 olduğundan L Chernikov olur. Bu bir çelişkidir. Bundan dolayı her i ∈I için K_i ≠ 1 ve ∩ {K_i = C_L(F_i) : i ∈I} = 1 olduğundan K_i ≰ ∩ {K_i = C_L(F_i) : i ∈ I} dır. Böylece (c) şartı sağlanmış olur. Önceki notasyonlara geri dönülürse, A = InnG, C_i = C_A(F_i) ve G/Z ≅ A izomorfizmi altında C_i ≅ C_G(F_i)/Z idi. Şimdi;

$$F_i^* = C_G(K_i) = \{g \in G : \varphi(g) = g, \forall\, \varphi \in K_i \text{ için}\}$$

olarak tanımlansın. $A \leq L$ olduğundan $C_i \leq K_i$ dir. Dolayısıyla $C_G(K_i) \leq C_G(C_i)$ dir. Şimdi de $C_G(C_i) \leq C_G(K_i)$ olduğu gösterilecek. $g \in C_G(C_i)$ olsun. O zaman her $\alpha \in C_i$ için $\alpha(g) = g$ dir. Burada $F_i = \langle X_i^G \rangle$ ve X_i sonludur. O zaman $L = \{X_i, g\}$ sonludur. $H = L^G$ ve $\varphi \in C_L(F_i)$ olsun. $\varphi \in L$ olduğu için Sonuç 3.2 den dolayı $\varphi|_H = \eta|_H$ olacak şekilde $\eta \in A$ vardır. Fakat her $x \in F_i$ için $\varphi(x) = x$ ve $F_i \leq H$ olduğundan $\eta(x) = \varphi(x) = x$ tir. Böylece $\eta(x) = x$ yani $\eta \in C_A(F_i) = C_i$ dir. Fakat $g \in C_G(C_i)$ olduğundan $\eta(g) = g$ dir. Bundan dolayı $\eta \in C_G(K_i)$ ve $C_G(C_i) \leq C_G(K_i)$ dir. O halde $C_G(C_i) = C_G(K_i)$ dir. Bundan dolayı $F_i^* = C_G(K_i) = C_G(C_i) = C_G(C_A(F_i))$ dir. Lemma 5.4 den dolayı F_i^*/Z Chernikovdur. Ayrıca $K_i \leq K_j$ olması için gerek ve yeter şart $F_j \leq F_j^* \leq F_i^*$ dır.

Şimdi de bu çift gerektirme gösterilecek. $K_i \leq K_j$ olsun. O zaman $C_G(K_j) \leq C_G(K_i)$ olduğundan $F_j^* \leq F_i^*$ dır. Ayrıca $x \in F_j$ olsun. O zaman her $\varphi \in K_j$ için $\varphi(x) = x$ olduğundan $x \in F_j^* = \{g \in G : \varphi(g) = g, \forall \varphi \in K_i\}$ o halde $F_j \leq F_j^* \leq F_i^*$ dır. Karşıt olarak kabul edelim ki $F_j \leq F_j^* \leq F_i^*$ ve $\varphi \in K_i$ olsun. $X \in F_j$ için $F_j \leq F_i^*$ olduğundan $x \in F_i^*$ dır. Fakat $\varphi \in K_i = C_L(F_i^*)$ olduğundan $\varphi(x) = x \Rightarrow \varphi \in K_j$ dir. Böylece $K_i \leq K_j$ elde edilir.

F_i^*/Z sayılabilir olduğundan yalnızca sayılabilir sayıda birbirinden farklı sonlu altküme içerir. Fakat $K_i \leq K_j$ olması için gerek ve yeter şart $F_j \leq F_j^* \leq F_i^*$ olduğundan yalnızca sayılabilir sayıda K_i yi içeren farklı K_j altgrupları vardır. Böylece Teorem 4.3 ün (b) şartı sağlanır. Böylece Teorem 4.3 den

$$|L : \cap\{K_i = C_L(F_i) : i \in I\}| = 2^{|I|}$$

dır. Fakat $\cap\{K_i = C_L(F_i) : i \in I\} = 1$ olduğundan $|\text{Linn}G| = 2^{|I|}$ dır. Aynı zamanda

$$G/Z = \langle F_iZ/Z : i \in I \rangle = \langle F_i^*/Z : i \in I \rangle$$

ve böylece F_i^* farklı altgruplarının sayısı $|G/Z|$ kadardır. Buradan farklı K_i altgruplarının sayısı da $|G/Z|$ kadardır. Fakat farklı K_i altgruplarının sayısı $|I|$ olduğundan $|G/Z| = |I|$ ve dolayısıyla $|LinnG| = 2^{|G/Z|}$ dir.

6. BİR ALTGRUP İÇEREN LOKAL EŞLENİK SINIF

Bu bölüme LclH nin sayılabilir olması yerine buna denk olan ender bir tartışma ile başlanacaktır. G nin elemanlarının bir sonlu kümesi X_i nin normal kapanışı $F = < X_i^G >$ için $N_G(H) \geq C_G(F_i)$ olsun. Eğer $N_L(H)=\{\varphi \in L : \varphi(H)=H\}$ ise $N_G(H) \geq C_G(F_i)$ şartı bir $i \in I$ için $N_L(H) \geq K_i$ ye denk olduğu Lemma 6.1'de gösterilmiştir. Ayrıca $N_G(H) \geq C_G(F_i)$ şartı da $[G / N_G(H)]$ minimal şartını sağlamasına denktir. $N_G(H) \geq C_G(F_i)$ ise o zaman G bir CC – grup olduğundan $[G / N_G(H)]$ ın minimal şartını sağladığı açıktır. Karşıt olarak;

(1) $N_G(H) = \cap \{N_G(H \cap X^G) : X, H$ nın sonlu bir alt kümesi $\}$

olduğundan $[G/N_G(H)]$ üzerindeki minimal şartı (Lemma 6.2'den)

$$N_G(H) = N_G(H \cap X^G) \geq C_G(X^G)$$

olacak şekilde G nin bir X sonlu kümesinin olduğunda işart eder ve böylece CC – gruplarda bu iki şartın eşitliği görülür. Yani LclH nın sayılabilir olması yerine daha kullanışlı olan $N_G(H) \geq C_G(X^G)$ denk şartını alabiliriz. Önce (1) eşitliğini gösterelim. $g \in N_G(H)$ olsun. O zaman $g^{-1}Hg = H$ ve $g^{-1}X^Gg = X^G$ olduğundan $g^{-1}(H \cap X^G)g = H \cap X^G$ dir. O halde

$$N_G(H) \leq \cap \{ N_G(H \cap X^G) : X, H \text{ nin sonlu altkümesi}\}$$

dir. $K = \cap \{N_G(H \cap X^G) : X, H$ nin sonlu altkümesi$\}$ olsun. $g \in K$ ise H nin her sonlu X altkümesi için $g \in N_G(H \cap X^G)$ dir. O zaman $h \in H$ olmak üzere $g \in N_G(H \cap h^G)$ dir. Buradan $g^{-1}(H \cap h^G)g = H \cap h^G$ dir. Ayrıca $h \in H$ ve $h \in h^G$ olduğundan $g^{-1}hg \in H \cap h^G \leq H \Rightarrow g^{-1}Hg \subseteq H$ ve dolayısıyla $g^{-1}Hg = H \Rightarrow g \in N_G(H)$ dir. O halde $N_G(H) = K$ dir.

Lemma 6.1. $N_G(H) \geq C_G(F_i)$ şartı $N_L(H) \geq C_L(F_i)$ şartına denktir.

İspat. Önce kabul edelim ki $N_G(H) \geq C_G(F_i)$ olsun. O zaman $\varphi \in C_L(F_i)$ ise $\varphi(H) = H$ olduğunu gösterelim. $h \in H$ olsun. $F_i = < X_i^G >$ ve X_i sonlu olduğundan $Y_i = \{h, X_i\}$ de sonludur. $E_i = < Y_i^G >$ olsun. O zaman Sonuç 3.2 den dolayı her $y \in E_i$ için $\varphi(y) = g^{-1}yg$ olacak şekilde bir $g \in G$ vardır. Fakat $\varphi \in C_L(F_i)$ olduğundan her $x_i \in F_i$ için $\varphi(x_i) = x_i$ ve $F_i \leq E_i$ olduğundan $\varphi(x_i) = g^{-1}x_ig = x_i$ dir. O zaman $g \in C_G(F_i)$ ve $C_G(F_i) \leq N_G(H)$ olduğundan $g \in N_G(H)$ ise $g^{-1}Hg = H$ olduğundan $\varphi(h) = g^{-1}hg \in H$ ve böylece $\varphi(H) \subseteq H$ dir.

Şimdi de $H \subseteq \varphi(H)$ olduğunu gösterelim. $\varphi \in C_L(F_i)$ ise $\varphi^{-1} \in C_L(F_i)$ dir. O zaman ilk durumda olduğu gibi $\varphi^{-1}(H) \subseteq H$ dir. Böylece her $h \in H$ için $\varphi^{-1}(h) \in H$ ve $\varphi(\varphi^{-1}(h)) = h$ olduğundan $\varphi(H) \subseteq H$ dir. Böylece $\varphi(H) = H$ elde edilir.

Karşıt olarak $C_L(F_i) \leq N_L(H)$ ve $g \in C_G(F_i)$ olsun. φ_g, G nin iç otomorfizması olsun. $InnG \leq LinnG = L$ olduğundan $\varphi_g \in L$ ve her $x_i \in F_i$ için $\varphi_g(x_i) = g^{-1}x_ig$, ayrıca $g \in C_G(F_i)$ olduğundan $\varphi_g(x_i) = g^{-1}x_ig = x_i$ ise $\varphi_g \in C_L(F_i) \leq N_L(H)$ ise $\varphi_g \in N_L(H)$ ise $\varphi_g(H) = H$ böylece $H^g = H$ ve sonuç olarak $g \in N_G(H)$ dir. Böylece $C_G(F_i) \leq N_G(H)$ dir.

Lemma 6.2. denklik şartı için LclH sayılabilir olduğundan daha fazla bilgi verir. Bu şart [1,4,13] de görülür. [1,4,13] de p bir asal olmak üzere bir CC-grup G nin Sylow p-altgruplarının eşlenik olması için gerek ve yeter şart G nin sayılabilir sayıda Sylow p- altgruplarının olduğu gösterilmiştir.

Lemma 6.2. G bir CC -grup ve H, G nin bir altgrubu olsun. O zaman LclH nin sayılabilir olması için gerek ve yeter şart $N_G(H) \geq C_G(X^G)$ olacak şekilde G nin elemanlarının bir sonlu X altkümesinin olmasıdır.

İspat. Eğer $N_G(H) \geq C_G(X_i^G)$ ise o zaman Lemma 6.1 den dolayı $N_L(H) \geq K_i$ dir. G bir CC-grup olduğundan $G/C_G(F_i)$ Chernikovdur. $L/Ki \cong A/C_i \cong G/C_G(F_i)$ olduğundan L/K_i Chernikov ve dolayısıyla L/K_i sayılabilirdir. $|L:N_L(H)| \leq |L:K_i|$ ve $|L : K_i|$ sayılabilir olduğundan $|L : N_L(H)|$ sayılabilirdir. Dolayısıyla $|LclH| = |L:N_L(H)|$ sayılabilirdir. Kabul edelim ki X, G nin bir sonlu altkümesi olmak üzere $N_G(H)$, $C_G(X^G)$ yi içermesin. O zaman $Lcl_N(H\cap N)$ nin sayılamaz olacak şekilde G nin bir normal sayılabilir N altgrubunu inşa edersek o zaman $H \cap N \leq N \leq G$ olduğundan Sonuç 3.8 den dolayı $Lcl_N(H \cap N) \subseteq Lcl_G(H \cap N)$ elde edilir. Böylece $Lcl_N(H\cap N)$ sayılamaz olduğundan $Lcl_G(H\cap N)$ sayılamazdır. Dolayısıyla LclH sayılamazdır.

Şimdi yukarıda bahsettiğimiz N yi inşa edelim. Her k için $H\cap N_k$, 2^k faklı eşlenikleri $H^{g_i(k)} \cap N_k$ ye ($i = 1, ..., 2^k$) sahip olacak şekilde N yi $N_k = \langle X_k^G \rangle$ altgruplarının bir zincirinin birleşimi olacak şekilde inşa edelim. Burada ;

(a) $g_i(k) \in N_{k+1}$, $(i = 1, ..., 2)$

(b) $g_{2i-1}(k) = g_i(k-1)$

(c) $g_{2i}(k)g_i(k-1)^{-1} \in C_G(N_{k-1})$

dir. (b) den dolayı $g_{2i-1}(k) = g_i(k-1)$ olduğundan

$$H^{g_i(k-1)} = H^{g_{2i-1}(k)} \Rightarrow H^{g_i(k-1)} \cap N_{k-1} = H^{g_i(k-1)} \cap N_{k-1}$$
$$\Rightarrow H^{g_i(k-1)} \cap N_{k-1} = H^{g_i(k-1)} \cap N_{k-1} \leq H^{g_i(k-1)} \cap N_k$$
$$\Rightarrow H^{g_i(k-1)} \cap N_{k-1} \leq H^{g_i(k-1)} \cap N_k$$

dir. (c) den dolayı $g_{2i}(k)g_i(k-1)^{-1} \in C_G(N_{k-1})$ olduğundan $g_i(k-1)g_{2i}(k)^{-1} \in C_G(N_{k-1})$ dir ve böylece $g_i(k-1) \in g_{2i}(k)C_G(N_{k-1})$ dir. O zaman $g_i(k-1) = g_{2i}(k)c$ olacak şekilde $c \in C_G(N_k-1)$ vardır. $x \in H^{g_i(k-1)} \cap N_{k-1} = H^{g_{2i}(k).c} \cap N_{k-1}$ olduğundan $x \in {}^{g_{2i}(k).c}$ ve $x \in N_{k-1}$ dir. O zaman $x = h^{g_{2i}(k).c}$ olacak şekilde $h \in H$ vardır.

$$x=(g_{2i}(k).c)^{-1}.h.g_{2i}(k).c$$

olduğundan

$$cxc^{-1} = (g_{2i}(k))^{-1}.h.g_{2i}(k)$$

dir. $c\in C_G(N_{k-1})$ ve $x \in N_{k-1}$ olduğundan

$$x = cxc^{-1} = (g_{2i}(k))^{-1}.h.g_{2i}(k) \text{ ve } x = h^{g_{2i}(k)}$$

dir. Dolayısıyla $x\in H^{g_{2i}(k)}$ ve $x \in N_{k-1}$ dir.

Böylece $H^{g_i(k-1)} \cap N_{k-1} \leq H^{g_i(k-1)} \cap N_k$ ve $H^{g_i(k-1)} \cap N_{k-1} \leq H^{g_i(k)} \cap N_k$ olacak şekilde $H^{g_i(k)} \cap N_k$ altgrupları 2^N ° dallı bir ağaç oluşturur. Eğer $H^{g(k)}\cap N_k$ altgrupları bu ağacın dallarından biri formunda ise o zaman $g(k) \in N$ dir ve her k için $g(k)g(k-1)^{-1}\in C_G(N_{k-1})$ dir. Bundan dolayı, $x\in N_k$ ise $\varphi(x) = g(k)^{-1}xg(k)$ olarak N'nin bir lokal iç otomorfizması φ yi tanımlayabiliriz. Açık olarak,

$$\varphi(H\cap N) = \cup\{\varphi\ (H\cap N_k) : k \geq 1\} = \cup\{H^{g(k)}\cap N_k : k \geq 1\}$$

dir. Böylece herbir dalın birleşimi N içinde $H \cap N$ 'nin lokal eşlenik sınıfıdır. Böylece $|\ Lcl_N H\cap N\ | = 2^N$ ° dır. Geriye yalnızca N_k altgruplarını inşa etmek kalır. Kabul edelim ki N_k inşa edilmiş olsun ve $H^{g_i(k-1)}\cap N_{k-1}$ altgrupları 2^{k-1} kadar olsun $N_G(H)\not\geq C_G(N_{k-1})$ olduğundan bir $g\in C_G(N_{k-1})-N_G(H)$ elemanı vardır. $N_k = < X_k^G >$ olarak seçelim böylece her $i = 1, ..., 2^{k-1}$ için $g_i(k-1) \in N_k$ ve $H^g\cap N_k \neq H\cap N_k$ dir. O zaman $g_{2i-1}(k) = g_i(k-1)$ ve $g_{2i}(k) = gg_i(k-1)$ olarak tanımlarız ve böylece (a), (b) ve (c) şartları sağlanmış olur.

Lemma 6.3. G bir CC- grupsa G/Z(G) residually - Chernikovdur.

İspat. $1 \neq \bar{y} \in G/Z(G)$ olsun. $\bar{y} \notin C_G(x^G)/Z(G)$ olacak şekilde en az bir $x \in G$ vardır. Kabul edelim ki her $x \in G$ için $\bar{y} \in C_G(x^G)/Z(G)$ 'dir. Böylece her $x \in G$ için $y \in C_G(x^G)$ bulunur. Bu ise bize $y \in Z(G)$ olduğunu gösterir. Bu ise $1 \neq \bar{y}$ olmasıyla çelişir. O halde $\bar{y} \notin C_G(x^G)/Z(G)$ olacak şekilde en az bir $x \in G$ vardır. Ayrıca $G/C_G(x^G) \cong \frac{G/Z(G)}{C_G(x^G)/Z(G)}$ Chernikov olduğundan dolayı G/Z(G) residually Chernikov olur.

Lemma 6.4. G residually Chernikov CC - grup ve H de G nin Chernikov altgrubu olsun. Bu takdirde $H \cap K = 1$ ve G/K Chernikov olacak şekilde G nin bir K normal altgrubu vardır.

İspat. S, H grubunun socle 'ı olsun. [14] Sonuç 1.F.5 den dolayı H Chernikov olduğundan min-n'yi sağlayacağından S, H nin sonlu sayıda minimal normal altgrubunun direkt çarpımı olur. Ancak bir Chernikov grubun minimal normal altgrubu Lemma 4.1 den dolayı sonlu olduğundan S sonlu olur. $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ olsun. G residually Chernikov olduğundan $i = 1, 2, ..., n$ için $x_i \notin N_{x_i}$ ve G/N_{x_i} Chernikov olacak şekilde $N_{x_i} \lhd G$ vardır. $K = \bigcap_{i=1}^{n} N_{x_i}$ olsun. G/K, $\prod_{i=1}^{n} G/N_{x_i}$ 'nin bir altgrubuna izomorf olduğundan G/K Chernikov olur. Ayrıca $K \cap S = 1$ dir.

Şimdi kabul edelim ki $K \cap H \neq 1$ olsun. Bu durumda $1 \neq x \in K \cap H$ vardır. H Chernikov olduğundan min-n'yi sağlar. $x^H \lhd H$ olduğundan x^H nin [14] Sonuç 1.F.5 den dolayı sonlu sayıda minimal normal altgrubu vardır. Ayrıca minimal normal altgrupların kesişimi trivial olduğundan x^H, G nin sonlu sayıda minimal normal altgrubunu kapsar. Bu gruplardan birine T diyelim. O halde $T \leq S$ dir. Bu ise $K \cap S = 1$ olmasıyla çelişir. O halde $K \cap H = 1$ olmalıdır.

Lemma 6.5. G, residually Chernikov CC-grup ve X, G nin sonlu bir altkümesi olsun. O zaman G nin $G = \langle Y^G \rangle C_G(X^G)$ olacak şekilde bir sonlu Y altkümesi vardır.

İspat. X, G nin sonlu altkümesi ve $T(X^G)$, $\langle X^G \rangle$ nin torsiyon altgrubu olsun. O zaman [1] Lemma 1 den dolayı $T(X^G)$, G nin normal Chernikov altgrubudur. Lemma 6.4 den dolayı $T(X^G) \cap N = 1$ ve G/N Chernikov olacak şekilde G nin bir N normal altgrubu vardır. Lemma 5.3 den G nin $G = \langle Y^G \rangle C_G(G/N)$ olacak şekilde bir sonlu Y altkümesi vardır. Fakat ;

$$\begin{aligned}[C_G (G / N) / N, X^G N / N] &= [C_{G/N} (G / N), X^G N / N] \\ &= [Z (G / N), X^G N / N] \\ &= 1\end{aligned}$$

olduğundan

$$[C_G(G/N)/N, X^G N/N] = 1 \Rightarrow [C_G(G/N), X^G] \leq N$$

dir. Ayrıca $[C_G(G/N), X^G] \leq X^G$ ve G bir CC- grup olduğundan G′ periyodik, dolayısıyla $[C_G(G/N) , X^G]$ periyodik olduğundan $[C_G(G/N) , X^G] \leq T(X^G)$ dir. Böylece, $[C_G(G/N), X^G] \leq T(X^G) \cap N = 1$ olduğundan $[C_G(G/N) , X^G] = 1$ ve $C_G(G/N) \leq C_G(X^G)$ dir. Sonuç olarak, $G = \langle Y^G \rangle C_G(X^G)$ dir.

Teorem 6.6. G/Z periyodik olacak şekilde G bir CC-grup ve $H \leq G$ olsun. O zaman H^G/H_G nin bir Chernikov grup olması için gerek ve yeter şart G nin bir sonlu X kümesi için $N_G(H) \geq C_G(X^G)$ olmasıdır.

İspat. G/Z periyodik ve $\dfrac{G/Z}{C_{G/Z}(H^G/H_G)} \cong \dfrac{G}{C_G(H^G/H_G)}$ olduğundan $G/C_G(H^G/H_G)$ periyodiktir. Ayrıca, $G/C_G(H^G/H_G) \subset \mathrm{Aut}\,(H^G/H_G)$ dir. Eğer H^G/H

Chernikov ise o zaman $G/C_G(H^G/H_G)$, H^G/H_G Chernikov grubunun otomorfizmasının bir periyodik grubuna izomorf olduğundan [6] Teorem 3.29 dan dolayı $G/C_G(H^G/H_G)$ Chernikovdur. Ayrıca $N_G(H) \geq C_G(H^G/H_G)$ dır. Gerçekten, $g \in C_G(H^G/H_G)$ ise $g \in C_G(H/H_G)$ dir. Her $hH_G \in H/H_G$ için $g^{-1}hgH_G = hH_G$ dir. $H_G \leq H$ olduğundan $g^{-1}hgH_G = hH$ dir. $g^{-1}Hg = H$ ve dolayısıyla $g \in N_G(H)$ yani $N_G(H) \geq C_G(H^G/H_G)$ dir. $G/C_G(H^G/H_G)$ Chernikov olduğundan minimal şartını sağlar ve $N_G(H) \geq C_G(H^G/H_G)$ olduğundan $[G/N_G(H)]$ minimal şartını sağlar. O zaman $C_G(X^G) \leq N_G(H)$ olacak şekilde bir sonlu X kümesi vardır.

Karşıt olarak kabul edelim ki G nin sonlu bir X kümesi için $N_G(H) \geq C_G(X^G)$ olsun. G bir CC-grup ve X sonlu küme olduğundan $G/C_G(X^G)$ Chernikovdur ve dolayısıyla minimal şartını sağlar. O halde $[G/N_G(H)]$ ın minimal şartını sağlaması açık olarak $N_G(H) \geq C_G(X^G)$ şartının homomorfik görüntülere geçildiğinde de korunması demektir. Bu yüzden $H_G = 1$ kabul edebiliriz ve özel olarak $H \cap Z = 1$ dir. Kabul edelim ki $H \cap Z \neq 1$ olsun. $H \cap Z \leq H$ ve $H \cap Z \lhd G$ dir. Buradan $H \cap Z \leq H_G$ bulunur. Ancak $H_G = 1$ olduğundan $H \cap Z = 1$ dir.

$\overline{H} = HZ/Z \leq G/Z = \overline{G}$ olsun. $N_{\overline{G}}(\overline{H}) \geq C_{\overline{G}}(\overline{X}^{\overline{G}})$ olacak şekilde bir $\overline{X}$ sonlu kümesi vardır. G, CC-grup olduğundan G/Z(G) residually Chernikovdur. Lemma 6.5 dan dolayı $\overline{G} = \langle \overline{Y}^{\overline{G}} \rangle N_{\overline{G}}(\overline{H})$ olacak şekilde $\overline{G}$ nin $\overline{Y}$ sonlu altkümesi vardır. Bundan dolayı $\overline{H} \cap C_{\overline{G}}(\overline{Y}^{\overline{G}}) \leq \overline{H}_{\overline{G}}$ dir. $C_{\overline{G}}(\overline{Y}^{\overline{G}}) \lhd \overline{G}$ ve $\overline{G} = \langle \overline{Y}^{\overline{G}} \rangle N_{\overline{G}}(\overline{H})$ olduğundan. $\overline{a} \in \overline{H} \cap C_{\overline{G}}(\overline{Y}^{\overline{G}})$ ve $\overline{g} \in \overline{G}$ olsun o zaman $\overline{g}^{-1}\overline{a}\,\overline{g} \in C_{\overline{G}}(\overline{Y}^{\overline{G}})$ dir. Ayrıca $\overline{G} = \langle \overline{Y}^{\overline{G}} \rangle N_{\overline{G}}(\overline{H})$ olduğundan $\overline{y} \in \langle \overline{Y}^{\overline{G}} \rangle$ ve $\overline{h} \in N_{\overline{G}}(\overline{H})$ için $\overline{g} = \overline{y}\,\overline{h}$ olarak yazılabilir. $\overline{a} \in C_{\overline{G}}(\overline{Y}^{\overline{G}})$ ve $\overline{y} \in \langle \overline{Y}^{\overline{G}} \rangle$ olduğunda $\overline{y}^{-1}\overline{a}\,\overline{y} = \overline{a}$ ve böylece ,

$$\overline{a} = \overline{g}^{-1}\overline{a}\,\overline{g} = (\overline{y}\,\overline{h})^{-1}\overline{a}\,(\overline{y}\,\overline{h})$$
$$= (\overline{h})^{-1}(\overline{y})^{-1}\overline{a}\,\overline{y}\,\overline{h}$$

$$= (h)^{-1}\,\bar{a}\,\bar{h} \in \bar{H}$$

dir. Böylece $\bar{g}^{-1}\,\bar{a}\,\bar{g} \in \bar{H} \cap C_{\bar{G}}(\bar{Y}^{\bar{G}})$ dır. O halde $\bar{H} \cap C_{\bar{G}}(\bar{Y}^{\bar{G}}) \lhd \bar{G}$ ve $\bar{H} \cap C_{\bar{G}}(\bar{Y}^{\bar{G}}) \leq \bar{H}$ olduğundan $\bar{H} \cap C_{\bar{G}}(\bar{Y}^{\bar{G}}) \leq \bar{H}_{\bar{G}}$ dir. Böylece G, CC-grup $\bar{G}/C_{\bar{G}}(\bar{Y}^{\bar{G}})$ Chernikov ve $\bar{G}/C_{\bar{G}}(\bar{Y}^{\bar{G}}) \geq \bar{H}C_{\bar{G}}(\bar{Y}^{\bar{G}})/C_{\bar{G}}(\bar{Y}^{\bar{G}})$ olduğundan $\bar{H}C_{\bar{G}}(\bar{Y}^{\bar{G}})/C_{\bar{G}}(\bar{Y}^{\bar{G}})$ Chernikovdur yani $\bar{H}/\bar{H} \cap C_{\bar{G}}(\bar{Y}^{\bar{G}})$ Chernikovdur. $\bar{H} \cap C_{\bar{G}}(\bar{Y}^{\bar{G}}) \leq \bar{H}_{\bar{G}}$ olduğundan $\bar{H}/\bar{H}_{\bar{G}}$ Chernikovdur.

$$\frac{(HZ/Z)}{(HZ/Z)_{G/Z}} \text{ Chernikov ve } \frac{(HZ/Z)}{(HZ/Z)_{G/Z}} \cong \frac{HZ}{(HZ)_G}$$

olduğundan $HZ/(HZ)_G$ Chernikovdur.

$Q = (HZ)_G$ olsun. $Q \leq HZ$, $HQ \leq HZ$ ve HZ/Q Chernikov olduğundan HQ/Q Chernikovdur. $HQ/Q \cong H/H \cap Q$ Chernikovdur. Ayrıca $Q = (HZ)_G$ olduğundan $QZ \leq HZ$ ve $QZ \trianglelefteq G$ dir ve dolayısıyla $QZ \leq (HZ)_G$ dir. $(H \cap Q)Z = HZ \cap QZ = QZ = (HZ)_G = Q$ dur. Böylece $H \cap Q \lhd (H \cap Q)Q = Q$ dur. $Q/H \cap Q = (H \cap Q)Z/H \cap Q \cong Z/Z \cap (H \cap Q)$ olduğundan $Q / H \cap Q$ abeliyandır. Bundan dolayı $Q' \leq H \cap Q$ dur. Fakat $Q' \trianglelefteq G$ ve $H_G = 1$ olduğundan $Q' = 1$ ve böylece Q abeliyandır. Lemma 5.2 den dolayı $Q \leq FC(G)$ dir. Ayrıca $N_G(H \cap Q) \geq N_G(H)$ olduğundan $[G/N_G(H \cap Q)]$ minimal şartını sağlar o zaman. Lemma 6.2.'den dolayı $N_G(H \cap Q) \geq C_G(X^G)$ olacak şekilde $H \cap Q$ nun bir sonlu X altkümesi vardır. Fakat $H \cap Q$, G nin FC-merkezinde olduğundan $G/C_G(X^G)$ sonludur. Dolayısıyla $|G : N_G(H \cap Q)|$ sonludur. Bundan dolayı $G = \langle W^G \rangle N_G(H \cap Q)$ olacak şekilde G nin sonlu bir W altkümesi vardır. $H \cap Q \cap C_G(W^G) \trianglelefteq G$ olduğundan $H \cap Q \cap C_G(W^G) \lhd H_G$ dir. Fakat $H_G = 1$ olduğundan $H \cap Q \cap C_G(W^G) = 1$ dir. $G/C_G(W^G)$ Chernikov ve

$$(H \cap Q)C_G(W^G)/C_G(W^G) \leq G/C_G(W^G)$$

olduğundan $(H\cap Q)C_G(W^G)/C_G(W^G)$ Chernikov dolayısıyla

$$(H\cap Q)C_G(W^G)/C_G(W^G) \cong (H\cap Q)/(H\cap Q)\cap C_G(W^G)$$

olduğundan $(H\cap Q)/(H\cap Q)\cap C_G(W^G)$ Chernikov fakat $(H\cap Q)\cap C_G(W^G) = 1$ olduğundan $H\cap Q$ Chernikovdur. Ayrıca $H/H\cap Q$ Chernikov olduğundan H Chernikovdur. Böylece D, H nin divisible kısmı ve F sonlu olmak üzere $H = DF$ şeklinde yazılabilir. D, H içinde karakteristik altgrup olduğundan $N_G(D) \geq N_G(H) \geq C_G(X^G)$ dir. Ayrıca, G nin radicable kısmı R olsun. H Chernikov olduğundan periyodiktir, dolayısıyla D periyodik olduğundan $D \leq T(R)$ dir. [4] Lemma 2.1 den dolayı $T(R) \leq FC(G)$ dir. Dolayısıyla $D \leq FC(G)$ dir. Böylece $|G : N_G(D)|$ sonlu ve D^G Chernikovdur. Ayrıca F^G Chernikovdur. $H_G = 1$ olduğundan $H^G/H_G = H^G$ dir ve $H^G = D^GF^G$ Chernikovdur.

Teorem 6.7. G/Z periyodik olacak şekilde G bir CC-grup ve H G nin herhangi bir sonlu X altkümesi için $N_G(H) \not\geq C_G(X^G)$ olacak şekilde G nin bir altgrubu olsun. O zaman $|LclH| = 2^{|H/H_G|}$ dir.

İspat. Sonuç 3.8 (ii) yi kullanarak $H_G = 1$ olduğunu kabul edebiliriz. Gerçekten, $H_G \lhd G$ ve $H_G \leq H$ olduğundan $|Lcl_{G/H_G}(H/H_G)| = |Lcl_G(H)|$ ise $H_G = 1$ kabul edebiliriz. Teorem 4.3 ü kullanarak $|L : N_L(H)| = 2^{|H|}$ olduğunu gösterelim. $\lambda \in \Lambda$ olmak üzere X_λ, H nin sonlu altkümeleri ve $U_\lambda = N_L(H\cap X_\lambda^G)$ olsun. O zaman $N_L(H) = \cap \{U_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ dir. U_λ altgruplarının Teorem 4.3 ün şartlarını sağladığını göstermeliyiz. İlk olarak $U_\lambda \geq C_L(X_\lambda^G)$ olduğundan Teorem 4.3 ün (a) şartı sağlanır. Hipotezden herhangi bir X için $N_G(H)\not\geq C_G(X^G)$ olduğundan $\cap\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \not\geq K_i$ dir. Gerçekten, $N_G(H) \geq C_G(X^G)$ ile $N_L(H) \geq K_i$ şartları denk olduğundan

$$\cap \{ U_\lambda : \lambda \in \Lambda \} \not\geq K_i$$

dir. Böylece Teorem 4.3 ün (c) şartı sağlanmış olur. $U_\mu \geq U_{\lambda_1} \cap \ldots \cap U_{\lambda_k}$ ve $X=X_{\lambda_1} \cup \ldots \cup X_{\lambda_k}$ olsun. O zaman X, H nin sonlu bir alt kümesidir. Ayrıca, her i=1, ..., k için (a) şartından dolayı $U_{\lambda_i} \geq C_L(X_{\lambda_i}{}^G)$ dir. O zaman

$$U_\lambda \geq U_{\lambda_1} \cap \ldots \cap U_{\lambda_k} \geq C(X_{\lambda_1}{}^G \cap \ldots \cap X_{\lambda_k}{}^G) \geq C(X_{\lambda_1} \cup \ldots \cup X_{\lambda_k})^G = C_G(X^G)$$

ve böylece $U_\lambda \geq C_L(X^G)$ dir. Şimdi $V = C_L(X^G)$ ve $H_V = \cap\{\varphi(H) : \varphi \in V\}$ olsun. $N_L(H_V) \geq V = C_L(X^G)$ ve böylece denklik şartından dolayı $N_G(H_V) \geq C_G(X^G)$ dir. Teorem 6.6 den dolayı H_V Chernikovdur.

$$N_L(H \cap X_\mu{}^G) = U_\mu \geq C_L(X^G) = V$$

olduğundan $X_\mu \leq X_\mu{}^G \cap H \leq H_V$ dir. Böylece H_G Chernikov dolayısıyla sayılabilir olduğundan V yi içeren yalnızca sayılabilir sayıda U_μ farklı altgrupları vardır. O halde U_μ sayılabilirdir. Böylece Teorem 4.3 ün (b) şartı da sağlanmış olur.

Şimdi $F_\lambda^* = \cap\{\varphi(H) : \varphi \in U_\lambda\} \leq \cap\{\varphi(H) : \varphi \in C_L(X_\lambda{}^G)\}$ olsun. O zaman F_λ^* Chernikov gruptur. Gerçekten, H_V Chernikov olduğundan F_λ^* Chernikovdur. Ayrıca $U_\lambda=N_L(H\cap X_\lambda{}^G)$ ve $H\cap X_\lambda{}^G \leq H$ olduğundan her $\varphi \in U_\lambda$ için $H\cap X_\lambda{}^G = \varphi(H \cap X_\lambda{}^G) \leq \varphi(H)$ olduğundan $H \cap X_\lambda{}^G \leq \cap\{\varphi(H) : \varphi \in U_\lambda\} = F_\lambda^*$dir. Böylece $H \cap X_\lambda{}^G \leq F_\lambda^*$dır. $\lambda \in \Lambda$ olmak üzere X_λ, H nin sonlu altkümeleri olduğundan $H = \langle F_\lambda^* : \lambda \in \Lambda \rangle$ dır. Eğer H, Chernikov değilse $|H|$ kadar F_λ^* farklı altgrupları vardır ve böylece $|H|$ kadar U_λ farklı altgrupları vardır. Eğer H, Chernikov ise $H \neq \langle F_{\lambda_1}^*, \ldots, F_{\lambda_k}^* \rangle$ dır.

Eğer $H = \langle F_{\lambda_1}^*, \ldots, F_{\lambda_k}^* \rangle$ ise bu durumda

$$N_L(H) \geq N_L(F_{\lambda_1}^*) \cap \ldots \cap N_L(F_{\lambda_k}^*) \geq C_L(X^G)$$

yazılabilir. Burada $X = X_{\lambda_1} \cup ... \cup X_{\lambda_k}$ dir. Bu durum hipotezle çelişir. Çünkü $N_L(H) \geq C_L(X^G)$ iken $N_G(H) \geq C_G(X^G)$ olmalıdır. Ancak $N_G(H) \not\geq C_G(X^G)$ dir. Dolayısıyla birbirinden farklı sonsuz F_λ^* altgrupları vardır dolayısıyla sonsuz sayıda U_λ farklı altgrupları vardır Böylece Teorem 4.3 den

$$|\,LclH\,| = |\,L:N_L(H)\,| = 2^{|H|}$$

dir.

7. ALTGRUPLARIN EŞLENİĞİ

FC-gruplar için bir lokal eşlenik sınıfındaki altgrupların hepsinin eşlenik olması için gerek ve yeter şart bu altgrupların yalnızca sayılabilir sayıda olmasıdır. Benzer sorular CC-grupların belli altgrupları için de sorulabilir. (Örnek olarak [4.13] deki Carter altgrupları ve Sylow altgrupları ve [9] daki lokal nilpotent injectorlardır.) CC-grupları için, G grubunun yapısı hakkında üstteki sonuçlara özel durumlarda değinilmesine rağmen, lokal eşlenik sınıfının sayılabilir olması durumu hakkında çok şey bilinmiyor.

Lemma 7.1. G/Z periyodik, G bir CC-grup ve $H \leq G$ olsun. Eğer H^G/H_G Chernikov ise o zaman $Lcl H = Cl H$ dir.

İspat. $\varphi \in LinnG$ olsun. O zaman $H_G \lhd G$ ve $\theta \in LinnG/H_G$ olduğundan Sonuç 3.7 (ii) den dolayı φ yardımıyla G/H_G üzerinde bir lokal iç otomorfizma θ vardır. $H^G/H_G \lhd G/H_G$, H^G/H_G Chernikov ve G/ZH_G periyodik olduğundan Sonuç 3.2 (ii) den dolayı θ, H^G/H_G üzerinde bir iç otomorfizma ile çakışır. G/ZH_G nin periyodik olduğu şu şekilde gösterilebilir.

$$
\begin{aligned}
ZhH \in Z(G)H_G/H_G \quad &\Rightarrow z \in Z(G) \text{ ve } h \in H \\
&\Rightarrow \forall\, g \in G \text{ için } g^{-1}zg = z \\
&\Rightarrow (g^{-1}zg)h = zh \\
&\Rightarrow g^{-1}zgH = zH,\ \forall\, gH \in G/H_G \\
&\Rightarrow zH \in Z\,(G/H_G)
\end{aligned}
$$

dir. Böylece $Z(G)H_G/H_G \leq Z\,(G/H_G)$ bulunur. $G/Z(G)$ periyodik olduğundan $G/Z(G)H_G$ de periyodiktir. O zaman, $\dfrac{G/H_G}{Z(G)H_G/H_G} \cong \dfrac{G}{Z(G/H_G)}$ periyodik yani $\dfrac{G/H_G}{Z(G)H_G/H_G}$ periyodik fakat $Z(G)H_G/H_G \leq Z(G/H_G)$ olduğundan $\dfrac{G}{Z(G/H_G)}$

periyodiktir. Böylece bir $\alpha \in Inn H^G/H_G$ için $\theta \big|_{H^G/H_G} = \alpha\big|_{H^G/H_G}$ dir. Dolayısıyla bir $x \in G$ için $\theta\,(H/H_G) = \alpha\,(H/H_G) = H^x/H_G$ ve böylece $\alpha(H)H_G = H^x$, $\alpha\,(H) = H^x$ tir. Böylece LclH = ClH dir.

Sonuç 3.2 den sonra verilen örnek, eğer G/Z periyodik değilse o zaman H nin lokal eşlenik sınıfının, H nin eşlenik sınıfına eşit olmadığına dair bir örnektir. H nin lokal eşlenik sınıfı, H nin eşlenik sınıfına eşit iken periyodik FC-grupları için H^G/H_G genel durumda Chernikov değildir. [8] 3.8 örneğinde LclH = ClH ve $H_G = 1$ olacak şekilde sayılabilir sonsuz elemanter abeliyan bir H altgrubunu içeren sayılamaz bir extraspecial p-grubu verilmiştir. Bununla birlikte residually-Chernikov CC-gruplar için Lemma 7.1'in karşıtı doğrudur. Yani LclH = ClH ise H^G/H_G Chernikovdur.

Öncelikle residually-Chernikov CC-grupları bazı özellikleri elde edilecektir.

Lemma 7.2. Eğer G, merkezi Z olan, residually-Chernikov CC-grupsa o zaman G/Z periyodiktir.

İspat. $x \in G$ olsun. G, CC-grup olduğundan Teorem 2.22 (Polovickii) den dolayı [G,x] Chernikovdur ve Lemma 6.4 den dolayı $N \cap [G, x] = 1$ ve G/N Chernikov olacak şekilde G nin bir N normal altgrubu vardır. Her Chernikov grup periyodik ve G/N de Chernikov olduğundan $x^n \in N$ olacak şekilde n tamsayısı vardır. Gerçekten, $xN \in G/N$ için $(xN)^n = x^nN = N$ ve $x^n \in N$ dir. $< x^n> \leq < x>$ olduğundan $[G, x^n] \leq [G,x]$ tir. Ayrıca $x^n \in N$ ise N normal olduğundan $[G, x^n] \leq [G, N] \leq N$ dir. Dolayısıyla $[G, x^n] \leq [G, x] \cap N = 1$ ve böylece $x^n \in Z$ dir.

Lemma 7.2'den dolayı Lemma 7.1 residually – Chernikov CC – gruplarına uygulanabilir. Aynı zamanda eğer H bir residually – Chernikov CC – grubun altgrubu ve H^G/H_G Chernikov değilse o zaman Teorem 6.6 dan dolayı G nin

bir X altkümesi için $N_G(H) \not\geq C_G(X^G)$ dir ve böylece Teorem 6.7'den dolayı $|\,LclH\,| = 2^{|H/H_G|}$ olduğu elde edilir.

Ayrıca Lemma 7.1'in karşıtının ispatı için $|\,ClH| \leq |\,H/H_G|$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Bir residually – Chernikov CC – grubun Z- gruplarına benzer bir şartını sağladığı (Sonuç 7.5'de) gösterilerek $|\,ClH| \leq |\,H/H_G|$ olduğu (Sonuç 7.6'da) [8] dekine benzer şekilde elde edilecektir.

Lemma 7.3. I sonsuz ve F_i Chernikov gruplar olmak üzere F nin $\Pi\{F_i : i \in I\}$ kartezyen çarpımının bir altgrubu CC-grup ise o zaman $|\,G/Z\,| \leq |\,I\,|$ dır.

İspat. Λ, $|\,\Lambda\,| = |\,I\,|$ olacak şekildeki I 'nın sonlu altkümelerinin kümesi ve $N_\lambda = G \cap \Pi\{F_i : i \notin \lambda\}$ olsun. Böylece her $\lambda \in \Lambda$ için G/N_λ Chernikov ve

$$\cap\{N_\lambda : \lambda \in \Lambda\} = 1$$

dir. Gerçekten, sonlu tane Chernikov grubun kartezyen çarpımı Chernikov olduğundan ve G/N_λ sonlu tane Chernikov grubun kartezyen çarpımına izomorf olduğundan G/N_λ Chernikovdur. $C_\lambda/N_\lambda = Z\,(G/N_\lambda)$ olsun. O zaman Lemma 5.3 den dolayı $G =< X^G > C_\lambda$ olacak şekilde G nin X sonlu altkümesi vardır. Açık olarak $Z = Z(G) = C_G(C_\lambda) \cap C_G(X^G)$ dir. Böylece $G/C_G(X^G)$ Chernikovdur. Ayrıca her $\lambda \in \Lambda$ için $C_G(C_\lambda)/Z$ Chernikovdur. Gerçekten, $Z = C_G(C_\lambda) \cap C_G(X^G)$ olduğundan,

$$\frac{C_G(C_\lambda)}{Z} = \frac{C_G(C_\lambda)}{C_G(C_\lambda) \cap C_G(X^G)} \cong \frac{C_G(C_\lambda)C_G(X^G)}{C_G(X^G)}$$

G, CC-grup olduğundan $\frac{C_G(C_\lambda)C_G(X^G)}{C_G(X^G)}$ Chernikovdur. Dolayısıyla $C_G(C_\lambda)/Z$ Chernikovdur. $g \in G$ ve $< g^G >$ nin torsiyon altgrubu T olsun. [1] Lemma 1 den dolayı T, G nin normal Chernikov altgrubudur. [7] 2.3.3 den dolayı G nin bir residually-Chernikov grup olması için gerek ve yeter şart Chernikov grupların bir altkartezyen çarpımı olmasıdır. Burada G, $\Pi \{ F_i : i \in I \}$, Chernikov grupların kartezyen çarpımının altgrubu olduğundan G bir residually-Chernikov gruptur. Ayrıca T, G nin Chernikov altgrubu olduğundan Lemma 6.4 den dolayı $N_\lambda \cap T = 1$ olacak şekilde G nin N_λ normal altgrubu olacak şekilde bir $\lambda \in \Lambda$ vardır $[C_\lambda/N_\lambda, < g > N_\lambda/N_\lambda] = 1$ ise $[C_\lambda, g] \leq N_\lambda$ ve $[C_\lambda, g] \leq T$ dir. Bundan dolayı $[C_\lambda, g] \leq N_\lambda \cap T = 1$ dir. $[C_\lambda, g] = 1$ olduğundan $g \in C_G(C_\lambda)$ dir. Böylece G / Z, $C_G(C_\lambda) / Z$ Chernikov altgrupları tarafından üretilir. Böylece $|G / Z| \leq |I|$ bulunur.

Lemma 7.4. Residually-Chernikov CC-grup G nin, $|H| = \alpha$, sonsuz olacak şekilde bir altgrubu H olsun. O zaman $|G / N| = \alpha$ ve $H \cap N = 1$ olacak şekilde G nin bir N normal altgrubu vardır.

İspat. G residually-Chernikov CC-grup olduğundan her $x \in H$ için $x \notin M_x$ ve G / M_x Chernikov olacak şekilde G 'nin bir M_x normal altgrubunu seçebiliriz. $M= \cap \{ M_x : x \in H \}$ olsun. G/M, $\Pi \{G/M_x : x \in H\}$ nın bir altgrubuna izomorftur. Eğer $C / M = Z (G / M)$ ise o zaman Lemma 7.3 den dolayı $|G/C| \leq |H| = \alpha$ dır. $H \cap M = 1$ ve $H \cong HM / M$ dir. Gerçekten, her $1 \neq x \in M$ için $x \notin M_x$ olacak şekilde $M_x \lhd G$ olduğundan

$$x \notin \cap \{ M_x : x \in H \} = M$$

dir. Bundan dolayı $H \cap M = 1$ dir. Ayrıca $HM / M \cong H / H \cap M$ ve $H \cap M = 1$ olduğundan $HM / M \cong H$ dir. C / M abeliyan olduğundan Teorem 2.36 dan dolayı C / M yi bir divisible abeliyan grubun altgrubu olarak alabiliriz. Yine

Teorem 2.37 den dolayı C / M yi içeren her divisible abeliyan grup bir minimal divisible grup içerir. O halde C / M yi C / M nin divisible hull'ı içine gömebiliriz. Açık olarak $|C / N| \leq \alpha$ ve $HN \cap N = M$ olacak şekilde C / M nin bir N / M altgrubu vardır. Gerçekten, C / M nin bir divisible hull 'u D / M olsun. D / M abeliyan divisible grup olduğundan [7] 4.1.5 den dolayı D/M, Q ve quasicyclic grupların izomorfik kopyalarının bir direkt toplamıdır. O zaman D / M nin Q veya C_{p^∞} 'a izomorf olan altgrubunu L / M ve geriye kalanları da T / M ile gösterirsek Q ve C_{p^∞} sayılabilir olduğundan, $|L / M| \leq \aleph_0$ fakat

$$\frac{D/M}{T/M} \cong L/M$$

olduğundan $|D / T| \leq \aleph_0$ ve $|CT / T| \leq |D / T| \leq \aleph_0$ dır. $|H| = \alpha$, sonsuz olduğundan $|C / C \cap T| \leq \aleph_0 \leq \alpha$ ise $|C / C \cap T| \leq \alpha$ dır. O halde $N = C \cap T$ alınırsa N / M, C / N nin bir altgrubu ve $|C / N| \leq \alpha$ ve $HM \cap N = M$ dir. O zaman G / M normal ve $N / M \leq C / M = Z (G / M)$ olduğundan $N \lhd G$ dir. Ayrıca $1 = H \cap M = H \cap HM \cap N = H \cap N \cap HM = H \cap N$ dir. Dolayısıyla $H \cap N = H \cap M = 1$ dir.

Sonuç 7.5. Residually-Chernikov CC-grup G nin bir sonsuz altkümesi S olsun. O zaman $|G : C_G(S)| \leq |S|$ dir.

İspat. $H = S^G$ olsun. O zaman $|H| = |S|$ dir. Lemma 7.4 den dolayı $H \cap N = 1$ ve $|G / N| = |S|$ olacak şekilde G nin bir N normal altgrubu vardır. Buna ek olarak $[N, H] \leq N \cap H = 1$ olduğundan $[N, H] = 1$ ve böylece $N \leq C_G(H)$. Ayrıca $S \subseteq H$ olduğundan $C_G(H) \leq C_G(S)$ dir. Dolayısıyla $N \leq C_G(H) \leq C_G(S)$ dir. Böylece $|G : C_G (S)| \leq |G : N| = |S|$ olduğundan $|G : C_G (S)| \leq |S|$ elde edilir.

Sonuç 7.6. H, residually Chernikov CC-grup G nin bir altgrubu olsun ve H^G / H_G Chernikov olmasın. O zaman $|CIH| = |H / H_G|$ dir.

İspat. $|S| = |H / H_G|$ sonsuz olmak üzere $H = SH_G$ yazabiliriz. Açık olarak $C_G(S) \leq N_G(H)$ dir. Gerçekten, $g \in C_G(S)$ olsun. Her $s \in S$ için $g^{-1}sg = s$ ve $H_G \lhd G$ olduğundan $g^{-1}Hg = g^{-1}SH_Gg = g^{-1}Sgg^{-1}H_Gg = SH_G = H$ dir. Dolayısıyla $g \in N_G(H)$ yani $C_G(S) \leq N_G(H)$ dir. Böylece $|G : N_G(H)| \leq |G:C_G(S)|$ dir. Sonuç 7.5. ten dolayı $|G : C_G(S)| \leq |S|$ olduğundan $|G : N_G(H)| \leq |S| = |H / H_G|$ dir. Dolayısıyla $|ClH| = |G : N_G(H)| \leq |H / H_G|$ dir ve böylece $|ClH| \leq |H / H_G|$ dir.

Şimdi de $|H / H_G| \leq |ClH|$ olduğunu gösterelim. G içinde $N_G(H)$ nin transversali T olsun. T sonlu ise o zaman [$G / N_G(H)$] minimal şartını sağlar. Lemma 6.2 den dolayı $N_G(H) \geq C_G(X^G)$ dir. Fakat Teorem 6.6 dan dolayı H^G / H_G Chernikovdur. Bu bir çelişkidir. Bundan dolayı T sonsuzdur ve Sonuç7.5 ten dolayı $|G : C_G(T^G)| \leq |T|$ dir. Fakat

$$HC_G(T^G) / C_G(T^G) \cong H / H \cap C_G(T^G)$$

olduğundan $|H / H \cap C_G(T^G)| \leq |T|$ dir. Ayrıca $H \cap C_G(T^G) \leq H_G$ olduğundan

$$|H / H_G| < |T = |ClH| \text{ dir.}$$

Böylece $|Cl H| = |H / H_G|$ olduğu elde edilir.

Şimdi Lemma 7.1 in tersinin doğru olduğu gösterilebilir.

Lemma 7.7. G / Z periyodik olacak şekilde, G bir CC- grup ve $H \leq G$ olsun. Eğer $LclH = ClH$ ise o zaman H^G/H_G Chernikovdur.

İspat. $LclH = ClH$ olsun. Kabul edelim ki H^G / H_G Chernikov olmasın. O zaman Teorem 6.6. dan G nin bir X sonlu kümesi için $N_G(H) \not\geq C_G(X^G)$dir. O zaman Teorem 6.7. den dolayı $|LclH| = 2^{|H/H_G|}$dir. Fakat $LclH = ClH$ olduğundan

$2^{|H/H_G|} = |\text{Lcl}H| = |\text{Cl}H|$ dir. Sonuç 7.6.dan dolayı $|\text{Cl}H| = |H / H_G|$ olduğundan o zaman $2^{|H/H_G|} = |H / H_G|$ olur. Fakat Cantor teoreminden dolayı $|H / H_G| < 2^{|H/H_G|}$ olduğundan bu bir çelişkidir. Bundan dolayı H^G / H_G Chernikovdur.

Teorem 7.8. Residually-Chernikov CC-grup G nin bir altgrubu H olsun. O zaman aşağıdakiler denktir.

(1) $\text{Lcl}H = \text{Cl}H$ dir.

(2) H^G/H_G Chernikovdur.

(3) $N_G(H) \geq C_G(X^G)$ sonlu X kümesi için.

(4) $[G/N_G(H)]$ minimal şartını sağlar.

(5) $\text{Lcl}H$ sayılabilirdir.

İspat. G, residually Chernikov CC-grup olduğundan Lemma 7.2. den dolayı G / Z periyodiktir.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) Kabul edelim ki H^G / H_G Chernikov olsun. O zaman Lemma 7.1 den dolayı $\text{Lcl}H = \text{Cl}H$ dır. Böylece (2)'den (1) elde edilmiş olur. Eğer $\text{Lcl}H = \text{Cl}H$ ise o zaman Lemma 7.7 den dolayı H^G / H_G Chernikovdur. Böylece (1) den (2) elde edilir.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) H^G / H_G Chernikov ise Teorem 6.6 dan dolayı $N_G(H) \geq C_G(X^G)$dir. Böylece (2) şartından (3) şartı elde edilmiş olur. Eğer bir sonlu X kümesi için $N_G(H) \geq C_G(X^G)$ ise o zaman Teorem 6.6 dan dolayı H^G / H_G Chernikovdur. Böylece (3) şartından (2) şartı elde edilir.

(3) $\Leftrightarrow$ (4) Lemma 6.2 den dolayı (3) şartı ile (4) şartı denk olduğundan (3)'den (4) ve (4)'den (3) elde edilir.

(4) $\Leftrightarrow$ (5) $[G/N_G(H)]$minimal şartını sağlasın. Lemma 6.2 den dolayı $\text{Lcl}H$ sayılabilirdir. Böylece (4) şartından (5) şartı elde edilir.

(5) $\Leftrightarrow$ (3) LclH sayılabilir olsun. Lemma 6.2 den dolayı $N_G(H) \geq C_G(X^G)$ dir. Böylece (5)'den (3) elde edilir. $N_G(H) \geq C_G(X^G)$ olsun Lemma 6.2 den dolayı LclH sayılabilirdir. Böylece (3) şartından (5) şartı elde edilir.

(2) şartı yerine H/H_G yi Chernikov alarak ve (5) şartı yerine ClH yi sayılabilir alarak bu şartlar daha zayıf hale getirilemez. Bununla ilgili örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 7.9. Her $m \geq 1$ tamsayısı için $C_m = \langle x_{m,i} \mid i \geq 1 \rangle$ p-tek asal sayı olmak üzere quasicyclic p-gruplarının bir kopyası $C = Dr \{ C_m \mid m \geq 1 \}$ olsun. Her $n \geq 1$ tamsayısı için C üzerinde α_n,

$$\alpha_n(x_{m,i}) = \begin{cases} (x_{m,i})^{-1} & , m \leq n \\ (x_{m,i}) & , m > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. α_n bir otomorfizmadır ve mertebesi 2 dir. $(x_{m,i})$, $(x_{m,j}) \in C$ olsun. $(x_{m,j}) = (x_{m,i}^{k_m})$ p nin bir kuvveti olacak şekilde k_m vardır.

$$\begin{aligned}
\alpha_n(x_{m,i} \cdot x_{m,j}) &= \alpha_n(x_{m,i} \cdot x_{m,i}^{k_m}) \\
&= \alpha_n(x_{m,i}^{k_{m+1}}) && , m \leq n \text{ için} \\
\alpha_n(x_{m,i}^{k_{m+1}}) &= (x_{m,i}^{k_{m+1}})^{-1} \\
&= (x_{m,i})^{-1} \cdot (x_{m,i}^{k_m})^{-1} \\
&= \alpha_n(x_{m,i})\alpha_n(x_{m,i}^{k_m}) \\
&= \alpha_n(x_{m,i})\alpha_n(x_{m,j}) && , m \leq n \text{ için} \\
\alpha_n(x_{m,i} \cdot x_{m,j}) &= \alpha_n(x_{m,j} \cdot x_{m,i}^{k_m}) \\
&= \alpha_n(x_{m,i}^{k_m+1}) \\
&= (x_{m,i}^{k_m+1}) \\
&= (x_{m,i} \cdot x_{m,i}^{k_m}) \\
&= \alpha_n(x_{m,i})\alpha_n(x_{m,i}^{k_m}) \\
&= \alpha_n(x_{m,i})\alpha_n(x_{m,j}) && , m > n \text{ için}
\end{aligned}$$

α_n bir homomorfizmadır. Tanımdan dolayı α_n, birebir ve örtendir. Böylece α_n bir otomorfizmadır. α_n mertebesi 2 olduğunu gösterelim. Her $(x_{m,i}) \in C$ için

$$\begin{aligned}\alpha_n^2((x_{m,i})) &= \alpha_n(\alpha_n(x_{m,i})) \\ &= \begin{cases} \alpha_n(x_{m,i})^{-1} & ,m \le n \\ \alpha_n(x_{m,i}) & ,m > n \end{cases} \\ &= (x_{m,i})\end{aligned}$$

dir. Böylece $\alpha_n^2 = I$ bulunur. $A = Dr\{ < \alpha_n > \mid n \ge 1\}$ ve G de A ile C nin parçalı genişlemesi olsun. Açık olarak G periyodiktir. Her $x \in G$ için $[G, x] \le C_1 \ldots C_n$ dir. Gerçekten ,

$$\begin{aligned}\left[(c_{m,i}), \alpha_n\right] &= (c_{m,i})^{-1} \cdot \alpha_n(c_{m,i}) \\ &= \begin{cases} (c_{m,i})^{-1} \cdot (c_{m,i})^{-1} & ,m \le n \\ (c_{m,i})^{-1} \cdot (c_{m,i}) & ,m > n \end{cases} \quad \in C_1 \ldots C_n\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla [G, x] $\le C_1 \ldots C_n$ dir. O halde [G, x] sonlu sayıda C_{p^∞} ların kopyalarının çarpımı olduğundan Chernikovdur ve G periyodik olduğundan $G / C_G([G,x])$ periyodiktir. O halde Teorem 2.22 (Polovickii) (i) den dolayı G bir CC-gruptur. Özel olarak Z (G) = 1 ve böylece Lemma 6.3 den dolayı G, residually-Chernikovdur. Her $m \ge 1$ için $y_m = \Pi \{x_{i,\, m-i+1} \mid 1 \le i \le m \}$ olarak tanımlansın. H, bütün y_m 'ler tarafından üretilen bir altgrup olsun. H, G nin bir quasicyclic p-altgrubudur. $y_1 = \Pi \{ x_{1,1} \} = (x_{1,1}, 1, 1, \ldots)$ ve $y_1^p = (1, 1, 1, \ldots)$ dir.

$$\begin{aligned}y_{m+1}^p &= \prod\{x_{i,m-i+2} \mid 1 \le i \le m+1\}^p \\ &= \prod\{x_{i,m-i+2}^p \mid 1 \le i \le m+1\} \\ &= \prod\{x_{i,m-i+1} \mid 1 \le i \le m\} \\ &= y_m\end{aligned}$$

dir. Böylece $H = < y_m : y_1^p = 1$ ve $y_{m+1}^p = y_m >$ dir. $[y_m, \alpha_1] \in [H, \alpha_1]$ olsun.

$$
\begin{aligned}
[y_m, \alpha_1] &= [y_m^{-1}, y_m^{\alpha_1}] \\
&= y_m^{-1}\alpha_1(y_m) \\
&= (\prod \{ x_{i,m-i+1}^{-1} \mid 1 \le i \le m \}) \alpha_1 (\prod \{ x_{i,m-i+1} \mid 1 \le i \le m \}) \\
&= (\prod \{ x_{i,m-i+1}^{-1} \mid 1 \le i \le m \}) (x_{1,m}^{-1}, x_{2,m-i}, \ldots) \\
&= (x_{1,m}^{-2}, 1, 1, \ldots) \in C_1
\end{aligned}
$$

dir. Böylece $[y_m, \alpha_1] \in C_1$ ve $[H, \alpha_1] = C_1$ dir. $[y_m, \alpha_1^k \alpha_2^l] \in [H, <\alpha_1, \alpha_2>]$ olsun. $[y_m, \alpha_1^k \alpha_2^l] = [y_m, \alpha_2^l] [y_m, \alpha_1^k]^{\alpha_2^l}$ ve $[y_m, \alpha_1^k]^{\alpha_2^l} \in C_1$ olduğundan $[y_m, \alpha_2] = y_m^{-1}\alpha_2(y_m) \in C_2$ dir. O halde $[H, < \alpha_1, \alpha_2 >] = C_1 C_2$ dir. Benzer şekilde devam edilirse $[H, A] = C$ ve böylece $H^G = C$ dir. Gerçekten, $[H, G] = [H, AC] = [H, A] [H, C]$ ve $[H, C] = 1$ olduğundan $[H, G] = [H, A]$ ve $H^G = H [H, G] = H [H, A] = HC = C$ dir. $C = Dr \{ C_m \mid m \ge 1 \}$ olduğundan C Chernikov değildir yani H^G, Chernikov değildir. Dolayısıyla H Chernikov iken H^G Chernikov değildir. Böylece H / H_G Chernikov iken H^G / H_G Chernikov değildir. G sayılabilir olduğundan ClH da sayılabilirdir. Fakat Teorem 7.8 den dolayı $ClH \neq LclH$ dir.

Bu örnekte H nın elemanlarının herbirini tersine götüren H nın otomorfizması alınırsa, bu G de bir lokal iç otomorfizma tanımlar. Fakat bu otomorfizma G nin iç otomorfizması değildir. Böylece periyodik CC – grubun herhangi bir Chernikov altgrubu için Sonuç 3.2 (b) doğru değildir.

KAYNAKLAR

1. J. Alcazar And J. Otal., **Sylow subgroups of groups with Chernikov conjugacy classes**, J Algebra 110 (1987), 507 – 513

2. M.R. Dixon, **Some topological properties of residually Chernikov groups**, Glasgow Math., J.23 (1982), 65 – 82

3. M.R. Dixon, **Fitting classes of CC – groups**, Proc. Edinburgh Math. Soc. 31 (1988), 475 – 479

4. J. Otal And J.M. Pena, **Characterizations of the conjugacy of the conjugacy of Sylow p – subgroups of CC – groups**, Proc. Amer. Math. Soc. 106 (1989), 605 –610

5. S. Franciosi, F. De Giovanni And J. Tomkinson, **Groups with Chernikov conjugacy classes**, J. Austral. Math. Soc. (Series A) 50 (1991), 1 – 14

6. Robinson D.J.S, **Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups**, Ergebnise der Math, Springer – Verlag, Berlin, 1972

7. Robinson D.J.S, **A course in the Theory of Groups**, Springer – Verlag, New York – Heidelberg – Berlin, 1982

8. M.J. Tomkinson, **FC – groups**, Research Notes in Mathematics, Vol. 96, Pitmon, Boston, 1984

9. J. Otal And J.M. Pena, **Locally nilponent injectors of CC – groups**, in "Contribuciones Matematicas en Homenaje al Profesor D. Antonio Plans" (E. Martin and A. Rodes, Eds), (ISBN 84 – 7733 – 158 – 8), pp, 223 – 238, Universidad de Zaragoza, 1990

10. Ya. D. Polovickii, **On Locally Extremal Groups with the Condition of Π - Minimality**, Dokl. Akad. Nauk SSSR 138 (1961), 1022 – 1024

11. Ya. D. Polovickii, **Groups with extremal classes of conjugate elements**, Sibirsk. Mat. ZH.5 (1964), 891 – 895

12. M. Gonzalez., **Incrustaciones de CC – grupos**, Tesis doctoral, Zaragoza

13. J. Otal And J.M. Pena, **Sylow theory of CC – groups**, Rend. Sem. Math. Univ. Padova 85 (1991)

14. Otto, H. Kegel, Bertam, A.F. Wehrfritz, **Locally finite groups**, Not. Holland Pubklishing Company, Amsterdam, London, American Elsevanier, Publishing Company. Inc. New York

15. L. Fuchs, **Infinite Abelian Groups, Volume 1** Tulane University, New Orleans LOUISIASNA Academic Press New York and London, 1970

ÖZGEÇMİŞ

Neslihan USTA 1975 yılında Ankara'nın Çankaya ilçesinde doğdu. İlk öğrenimini Ankara Ulubatlı Hasan İlkokulu'nda, orta ve lise öğrenimini Ankara Bahçelievler Deneme Lisesi'nde tamamladı. Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi Bölümünden 1997 yılında mezun oldu. 1997-1999 yılları arasında Ankara Tunç Fen Dersanesi'nde Matematik öğretmeni olarak çalıştı. 1999 yılında Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Yüksek Lisans eğitimine başladı. 1999-2001 yılları arasında Yozgat ili Akdağmadeni ilçesi Melikli Köyü İlköğretim Okulunda Matematik Öğretmeni olarak çalıştı. 2001 yılında Ankara ili Mamak ilçesi Alper Tunga İlköğretim Okulu'na Matematik öğretmeni olarak atandı. Alper Tunga İlköğretim Okulu'ndaki görevine devam etmektedir.

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ