
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

ORTAÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ MATEMATİKSEL TEOREMLERİN İSPATLARINI GÖRSELLEŞTİRME DURUMLARININ İNCELENMESİ

Ezgi Mancoğlu

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AĞUSTOS, 2019

TELİF HAKKI ve TEZ FOTOKOPİ İZİN FORMU

Bu tezin tüm hakları saklıdır. Kaynak göstermek koşuluyla tezin teslim tarihinden itibaren yirmi dört (24) ay sonra tezden fotokopi çekilebilir.

YAZARIN

Adı : Ezgi

Soyadı : Mancoğlu

Bölümü : Matematik Eğitimi

İmza:

Teslim Tarihi: 07.08.2019

TEZİN

Türkçe Adı: Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Matematiksel Teoremlerin İspatlarını Görselleştirme Durumlarının İncelenmesi

İngilizce Adı: Examining the Visualization Situations of the Proofs of Mathematical Theorems of Secondary Mathematics Teacher Candidates

ETİK İLKELERE UYGUNLUK BEYANI

Tez yazma sürecinde bilimsel ve etik ilkelere uyduğumu, yararlandığım tüm kaynakları kaynak gösterme ilkelerine uygun olarak kaynakçada belirttiğimi ve bu bölümler dışındaki tüm ifadelerin şahsıma ait olduğunu beyan ederim.

Yazar Adı Soyadı: Ezgi MANCOĞLU

İmza :

JÜRİ ONAY SAYFASI

Ezgi MANCOĞLU tarafından hazırlanan "Ortaöğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Matematiksel Teoremlerin İspatlarını Görselleştirme Durumlarının İncelenmesi'' adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/ oy çokluğu ile Gazi Üniversitesi Matematik ve Fen Eğitimi Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Ahmet ARIKAN

(Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi)

Başkan: Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU

(Matematik Bölümü, Ankara Üniversitesi)

Üye: Doç. Dr. Sevgi ATLIHAN

(Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi)

Tez Savunma Tarihi: 01.08.2019

Bu tezin Gazi Üniversitesi Matematik ve Fen Eğitimi Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olması için şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Unvan Ad Soyad

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Anneanneme

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın bütün aşamalarında değerli yardımları, görüş ve önerileriyle bana yol gösteren, tez danışmanım Prof. Dr. Ahmet ARIKAN'a teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Tez çalışmalarımın çeşitli aşamalarında değerli görüşlerinden yararlandığım, değerli zamanlarını bana ayıran Arş. Gör. Dr. Gönül YAZGAN SAĞ'a teşekkür ediyorum.

Tez çalışmam için bana maddi destek sağlayan Türkiye Bilimsel Teknoloji ve Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'na, teşekkürü bir borç bilirim.

Hayatımın her aşamasında eğitim hayatımı destekleyen her koşulda yardımlarını esirgemeyerek yanımda olan sevgili annem Sayime MANCOĞLU ve sevgili babam Aslan Paşa MANCOĞLU'na ise teşekkürlerim sonsuzdur.

EZGİ MANCOĞLU

2019, ANKARA

ORTAÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ MATEMATİKSEL TEOREMLERİN İSPATLARINI GÖRSELLEŞTİRME DURUMLARININ İNCELENMESİ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

Ezgi Mancoğlu

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AĞUSTOS, 2019

ÖZ

Matematiksel ispatlar, matematiğin önemli bir parçasıdır. Matematiksel ispat ile bir olayın doğruluğu ya da yanlışlığı nedenleriyle ortaya çıkarılır. Ancak ispatların çok fazla soyut matematiksel terimler içermesi öğrencilerin matematiksel ispata verdikleri değeri etkilemektedir. Bu anlamda yapılan çalışmalar, görselleştirmenin bu önyargıyı kırmanın bir yolu olduğunu ifade etmektedir. Görselleştirme, matematiksel bilgiyi elde etmede yeni bir yoldur. Bu bağlamda araştırmanın amacı matematiksel teoremlerin ispatlarının görselleştirilme durumlarını incelemektir. Bunun için, katılımcıların matematiksel teoremlerin ispatlarını inceleyebilecekleri uygun ortamlar içinde görselleştirme durumları ve nasıl resimler kullandıkları araştırılmıştır. Bu çalışma nitel bir araştırma olarak tasarlanmıştır. Çalışmanın araştırma grubunu 2017- 2018 öğretim yılında bir devlet üniversitesinin ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümünde ikinci ve üçüncü sınıfında öğrenim gören dört matematik öğretmeni adayı oluşturmaktadır. Araştırmada kullanılan matematiksel teoremler soyut matematik ve analiz dersi içeriklerinden seçilmiştir. Veri toplama aracı olarak yarı yapılandırılmış görüşme ve doküman incelemesi teknikleri kullanılmıştır. Görüşmelerde matematiksel teoremlerin ayrı olarak yer aldığı çalışma kağıtları kullanılmıştır. Katılımcılardan çalışma kağıtlarındaki teoremlerin ispatlarını

görselleştirdikleri süre içinde sesli düşünmeleri istenmiş ve görüşmeler esnasında video ve ses kaydı alınmıştır. Video ve ses kayıtları yazılı metin haline getirilmiş ve katılımcıların çalışma kağıtları üzerindeki ispat resimleri incelenmiştir. Veriler gömülü teorinin veri çözümleme teknikleri kullanılarak analiz edilmiştir. Veri analizleri sonucunda katılımcıların ispatlarda kullandığı resimlerin, çoğunlukla teoremin içeriğindeki kavramların zihinlerinde oluşturduğu resimleri betimleyen görüntüler olduğu görülmüştür. Net bir resim çizemeyen katılımcının ispatlardan emin olmadıkları görülmektedir. Katılımcıların, verilen teoreme göre görselleştirme sürecinin başlama durumunda farklılık görülmektedir. Oluşturulan resimlerin büyük çoğunluğun matematiksel resimler olduğu görülmektedir. İspat resimlerinin bir kısmının günlük yaşamdan resimler içermesi katılımcılarının yaşanmışlıklarından etkilendiklerini göstermektedir. Katılımcıların, teoremlerin ispatlarını yazılı olarak tamamlayabilme, algılayabilme durumları görselleştirme süreçlerini etkilemektedir. İspatların görselleştirilme süreci bütün olarak ele alındığında öğretmen adaylarının birbirinden farklı ispat resimleri oluşturdukları görülmüştür. Bu süreçte adaylar farklı aşamalarda farklı resimlerden faydalanmıştır. Kimi adayların teoremin bütününü temel alarak ispatı görselleştirdiği kimi öğrencilerin de teorem içerisinde yer alan kavramlardan yola çıkarak ispatı görselleştirdikleri görülmektedir. Bu da öğretmen adaylarının, ispata göre strateji belirlediklerini göstermektedir. Bazı adayların görselleştirme sürecinde cebire eğilim gösterdikleri görülmüştür.

Anahtar Kelimeler : Matematiksel ispat, Matematiksel görselleştirme, İspatın resmi

Sayfa Adedi : 185

Danışman : Prof. Dr. Ahmet Arıkan

EXAMMİNG THE VISUALIZATION SITUATIONS OF THE PROOFS OF MATHEMATICAL THEOREMS OF SECONDARY MATHEMATİCS TEACHER CANDIDATES

(Master's Thesis)

Ezgi Mancoğlu

GAZIUNIVERSITY

INSTITUTE OF EDUCATIONAL SCIENCES

AUGUST, 2019

ABSTRACT

Mathematical proofs are an important part of mathematics. Mathematical proof is the process of demonstrating the truth or falsity of a given proposition. There are too many abstract mathematical words and terms included in the proofs, which affects the value that students give the mathematical proof. When the relevant literature is reviewed, visualization has been expressed to be a way to overcome the prejudice. Visualization offers a new way of gaining mathematical knowledge Thus, this study aims to examine how future school mathematics teachers visualize the proofs of some mathematical theorems. For this, the participants' visualization status and what kind of pictures they used were investigated in suitable environments where they could examine the proofs of mathematical theorems. This study was designed as a qualitative research. The research group of the study is composed of four prospective mathematics teachers studying at 2nd and 3rd grades of secondary mathematics education department of a public university in 2017-2018 academic year. Mathematical theorems used in the research were chosen from abstract mathematics and analysis course content. Semi-structured interview and document review techniques were used as the data collection tool. Worksheets containing mathematical theorems were used in the interviews. Participants were asked to think aloud while they visualized the proofs of the theorems in the worksheets, and video and audio recordings were taken during the interviews. Video and audio recordings were turned into

written text and pictures made by participants on worksheets were examined. The data were analyzed by using data analysis techniques of grounded theory. As a result of the data analysis, most of the images used by the participants in the proofs were observed to be pictures depicting the pictures created by the concepts of the theorem in their minds. Participants, who could not draw a clear picture, were not sure about the proof. The starting time of the visualization process was observed to be changed according to the given theorem. The majority of the pictures created was observed to be mathematical drawings. Some of the proof pictures include drawings from daily life means that they have been affected by the participants'experiences. The visualization process is affected by the participants' ability to complete and recognize the proofs of the theorems in writing. When the process of visualizing the proofs was taken as a whole, it was seen that the prospective teachers used different proof pictures. In this process, the prospective teachers made use of different pictures at different phases. It was seen that some of them visualized the proofs by grounding on the theorem as a whole, while the others visualized it from the concepts in the theorem. It shows that prospective teachers determine the strategy according to the proof. It is seen that some students have troubles in the visualizing process because of their tendency of algebra.

Key words: Mathematical proof, Mathematical visualization, Picture of proof

Page Number: 185

Supervisor: Prof. Dr. Ahmet Arıkan

İÇİNDEKİLER

TELİF HAKKI ve TEZ FOTOKOPİ İZİN FORMU ii

ETİK İLKELERE UYGUNLUK BEYANI iii

JÜRİ ONAY SAYFASI iv

TEŞEKKÜR vi

ÖZ vii

ABSTRACT ix

İÇİNDEKİLER xi

TABLOLAR LİSTESİ xvii

ŞEKİLLER LİSTESİ xviii

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ xxiii

BÖLÜM I 1

GİRİŞ 1

Problem Durumu 1

Araştırmanın Problem Cümlesi 5

Araştırmanın Alt problemleri 5

Araştırmanın Amacı 6

Araştırmanın Önemi 6

Varsayımlar 7

Sınırlılıklar **7**

Tanımlar **7**

Görselleştirme **7**

Teorem **7**

İspat **7**

Matematiksel İspat **8**

BÖLÜM II **9**

TEORİK ÇERÇEVE VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR **9**

Teorik Çerçeve **9**

İspat ve Matematiksel İspat **9**

Matematiksel Görselleştirme **11**

Matematiksel Görselleştirme ve Matematiksel İspat **13**

İlgili Araştırmalar **15**

BÖLÜM III **19**

YÖNTEM **19**

Araştırmanın Modeli **19**

Araştırma Grubu **21**

Veri Toplama Aracı **21**

Veri Analizi **22**

BÖLÜM IV **27**

BULGULAR VE YORUM **27**

Matematik Öğretmen Adaylarının Verilen Teoremlerin İspatlarına Ait Resimleri ve Bu Resimlere Ait Bulgular **29**

I. Durum **29**

A1'in Teorem 1'in İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler ***30***

A2'in Teorem 1'in İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler.....32

A3'ün Teorem 1'in İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler.....34

A4'ün Teorem 1'in İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler.....37

II. Durum.....38

A1'in Teorem 2'in İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler.....39

A2'in Teorem 2'in İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler.....40

A3'ün Teorem 2'in İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler.....42

A4'in Teorem 2'in İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler.....43

III. Durum.....44

A1'in Teorem 3'in İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler.....45

A2'in Teorem 3'in İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler.....50

A3'in Teorem 3'in İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler.....54

A4'ün Teorem 3'in İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler.....58

IV. Durum.....59

A1'in Teorem 4'ün İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler.....60

A2'in Teorem 4'ün İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler.....61

A3'in Teorem 4'ün İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler.....63

A4'in Teorem 4'ün İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler.....64

V. Durum 65

A1'in Teorem 5'in İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler.....66

A2'in Teorem 5'in İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler.....68

A3'in Teorem 5'in İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler.....69

A4'in Teorem 5'in İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler.....70

MÖA' nın Matematiksel Teoremlerin İspatlarına Ait Resimlerinin Kategorileri, İçerikleri ve Bulguları.....71

Resimlerin Durumu 71

Resimlerin Özellikleri 78

Resmin Yeri 88

MÖA' nın Matematiksel Teoremlerin İspatlarının Görselleştirilmesi Sürecinde Teoremlerde Yer Alan Bazı Ortak Kavramların Resimlerinin Kategorileri, İçerikleri ve Bulguları.....90

Küme Resimleri.....91

Elemanlara Karar Verme 95

Sıralı Olma Durumu 97

Fonksiyon Resimleri 98

MÖA' nın Matematiksel Teoremlerin İspatlarının Görselleştirme Sürecine Ait Kategoriler ve İçerikleri.....101

Onay Bekleme.....101

Strateji Belirleme 102

Resmi Oluşturma **103**

Yöntemsel Süreçler **105**

Cebire ihtiyaç Duyma **106**

Resmi Değerlendirme **107**

Resmin Kullanımı **108**

Yardıma İhtiyaç Duyma **109**

MÖA' nın Matematiksel Teoremlerin İspatlarını Görselleştirmeleri **110**

Strateji Belirleme **114**

Resmi Oluşturma **117**

Cebire İhtiyaç Duyma **122**

Yardıma İhtiyaç Duyma **122**

Resmi Değerlendirme **123**

Yöntemsel Süreçler **124**

Resimlerin Kullanımı **126**

BÖLÜM V **128**

SONUÇLAR VE ÖNERİLER **128**

Sonuçlar **128**

MÖA' nın Matematiksel Teoremlerin İspatlarının ve Teoremlerde Yer Alan Bazı Ortak Kavramların Resimlerine Ait Bulgularının Sonuçları **128**

Resimlerin Durumları ***131***

Resimlerin Özellikleri ***131***

Resimlerin Yeri ***132***

Küme Resimleri ***132***

Elemanlara Karar Verme ***132***

Sıralı Olma Durumu ***133***

Fonksiyon Resimleri ***133***

MÖA' nın Matematiksel Teoremlerin İspatlarını Görselleştirme Süreçlerine Ait Bulgularının Sonuçları 133

Onay Bekleme 136

Strateji Belirleme 136

Resmi Oluşturma 137

Yöntemsel Süreçler 137

Cebire İhtiyaç Duyma 137

Resmi Değerlendirme 138

Yardıma İhtiyaç Duyma 138

Öneriler 138

Eğitimci ve Öğretmenlere Öneriler 138

Araştırmacılara Öneriler 139

KAYNAKÇA 140

EKLER 147

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 1. *Matematiksel Teoremlerin İspatlarını Görselleştirme Sürecinde Onay Bekleme* .26

Tablo 2. *Görselleştirme Süreci İçerisinde Katılımcılara Verilen Teorem Durumları*.....28

Tablo 3. *Görselleştirme Süreci İçerisinde Katılımcıların Resimlerin Durumu Kategorisine Ait Bulguları*…….....72

Tablo 4. *Bütün Teoremlerde Yer Alan Bazı Ortak Kavramlar*……90

Tablo 5. *MÖA' nın Teoremlerin İspatlarını Görselleştirme Sürecinde Onay Bekleme Kategorisinin Özeti*……..…113

Tablo 6. *MÖA' nın Teoremlerin İspatlarını Görselleştirme Sürecinde Strateji Belirleme Kategorisinin Özeti*……..117

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 3. 1. Araştırma sürecinin şematik açıklaması.....20
*Şekil 3. 2.*Araştırma süresince izlenen uygulama ve analiz adımları.....23
Şekil 4. 1. Teorem 1'e ait çalışma kâğıdı.....29
*Şekil 4. 2.*Teorem 1'in ispatı.....30
Şekil 4. 4. A1'in Teorem 1'in ispatına ait ilk resmi.....31
Şekil 4. 3. A1'in Teorem 1'in ispatına ait ilk çizimler.....31
Şekil 4. 5. A1'in Teorem 1'in ispatına ait ikinci resmi.....32
Şekil 4. 6. A2'in Teorem 1'in ispatına ait tamamlayamadığı resmi.....33
Şekil 4. 7. A2'in Teorem 1'in ispatına ait resminde hareketle kontrolleri.....34
Şekil 4. 8. A3'in Teorem 1'in ispatına ilk resmi.....35
Şekil 4. 9. A3'in Teorem 1'in ispatına ait ikinci resmi.....35
*Şekil 4. 10.*A3'in Teorem 1'in ispatına ait üçüncü resmi.....36
*Şekil 4. 11.*A4'in Teorem 1'in ispatına ait resimleri.....37
*Şekil 4. 12.*Teorem 2'nin çalışma kağıdı.....38
*Şekil 4. 13.*Teorem 2'nin ispatı.....39
Şekil 4. 14. A1'in Teorem 2'nin ispatının resmi.....40
Şekil 4. 15. A2'in bir noktaya yaklaşma durumunun resmi.....40
Şekil 4. 16. A2'in Teorem 2'nin ispatının ilk resmi.....41
Şekil 4. 17. A2'in Teorem 2'nin ispatının ilk ikinci resmi.....42
Şekil 4. 18. A3'ün Teoerem2'nin ispatına ait ilk iki resmi.....42
Şekil 4. 19. A3'in Teorem 2'nin ispatının resmine ait ilk diğer adımları.....43
Şekil 4. 20. A4'in Teorem 2'nin ispatını görselleştirme sürecine ait çizimleri.....44
*Şekil 4. 21.*Teorem 3'ün ispatının çalışma kağıdı.....44
*Şekil 4. 22.*Teorem 3'ün ispatı.....45
Şekil 4. 23. A1'in Teorem 3'ün (i) ispatının resmini oluşturma adımları.....46
Şekil 4. 24. A1'in Teorem 3'ün (ii) ispatına ait ilk çizimleri.....47

Şekil 4. 25. A1'in Teorem 3'ün (ii) ispatına ait ilk resimleri 47
Şekil 4. 26. A1'in Teorem 3'ün (ii) ispatının resmini oluşturma adımları 48
Şekil 4. 27. A1'in Teorem 3'ün (i) ispatının ikinci resmini 49
Şekil 4. 28. A2'in Teorem 3'ün (i) ispatının ilk resimleri 50
Şekil 4. 29. A2'in Teorem 3'ün (i) sonsuz kümelerde ispatı için ilk resim denemesi 51
Şekil 4. 30. A2'in Teorem 3'ün (i) sonsuz kümelerde ispatının resminin son hali 52
Şekil 4. 31. A2'in Teorem 3'ün (i) ispatına ait ek resmi (i) 52
Şekil 4. 32. A2'in Teorem 3'ün (i) ispatına ait ek resmi (ii) 52
*Şekil 4. 33.*A2'in Teorem 3'ün (ii) ispatının sonsuz elemanlı kümelerdeki ilk resmi 53
Şekil 4. 34. A2'in Teorem 3'ün (ii) ispatının sonsuz elemanlı kümelerdeki ikinci resmi ... 54
Şekil 4. 35. A3'in Teorem 3'ün (i) ispatına ait resmi 55
Şekil 4. 36. A3'in (i) ve (ii) için geliştirdiği kontrol resimleri 56
Şekil 4. 37. A3'ün Teorem 3'ün (ii) ispatının resminin oluşum adımları 57
Şekil 4. 38. A4'ün Teorem 3'ün (i) ispatına ait resmi 58
Şekil 4. 39. A4'ün Teorem 3'ün (ii) ispatına ait resmi 59
*Şekil 4. 40.*Teorem 4'e ait çalışma kağıdı 59
Şekil 4. 41. Teorem 4'ün ispatı 60
*Şekil 4. 42.*Teorem 4 için küme ve elemanları resmi 60
Şekil 4. 43. A1'in Teorem 4'in ispatına ait resmi 61
Şekil 4. 45. A2'in Teorem 4'in ispatında değişen sıralı küme resmi 62
*Şekil 4. 44.*A2'in Teorem 4'in ispatına ait ilk resmi 62
Şekil 4. 46. A3'in Teorem 4'ün ispatını görselleştirme adımları 64
Şekil 4. 47. A4'ün Teorem 4'in ispatına ait resmi 65
*Şekil 4. 48.*Teorem 5'e ait çalışma kağıdı 65
Şekil 4. 50. A1'in Teorem 5'in ispatı için ilk resimleri 66
*Şekil 4. 49.*Teorem 5'in ispatı 66
Şekil 4. 51. A1'in Teorem 5'in ispatına ait resmi 67
Şekil 4. 52. A2'in Teorem 5'in ispatının birinci yönüne ait resmi 68
Şekil 4. 53. A2'in Teorem 5'in ispatının 2. yönüne ait resmi 69
Şekil 4. 54. A3'in Teorem 5'in ispatının ilk yönüne ait resmi 70
Şekil 4. 55. A4'ün Teorem 5'in ispatına ait resmi 70
*Şekil 4. 56.*Resimlerin Durumu Kategorisine Ait Alt Kategori ve Boyutların Eksen Üzeinde Gösterim 71

Şekil 4. 57. A2'in Teorem 1'ün ispatının resminin ispatı karşılayamayan resim kategorisine ait analizi 74
Şekil 4. 58. A1'in Teorem 3'ün ispatının resminin tam resim boyutuna ait analizi 75
Şekil 4. 59. A3'ün Teorem 4'ün ispatına ait hareketli olma kategorisine ait bir resmi 79
Şekil4. 60. A3'ün Teorem 4'ün ispatına ait hareket etme durumu kategorisinin örüntülü hareketlilik boyutuna ait bir resmi 80
Şekil 4. 61. A2 'nin Teorem 4'ün ispatına ait hareket etme durumu kategorisinin örüntülü hareketlilik boyutuna ait bir resmi 80
Şekil 4. 62. A2' nin Teorem 4'ün ispatına ait hareket etme durumu kategorisinin örüntülü hareketlilik boyutuna ait ikinci resmi 81
Şekil 4. 63. A2' nin Teorem 5'ün ispatına ait hareket etme durumu kategorisinin kuralsız hareketlilik boyutuna ait bir resmi 81
Şekil 4. 64. A1'in Teorem 4'ün ispatına ait hareket etme durumu kategorisinin kuralsız hareketlilik boyutuna ait bir resmi 82
Ş*ekil 4. 65.* A2' nin Teorem 5'ün ispatına ait somut resim kategorisinin devamlı somutluk boyutuna ait bir resmi 82
Şekil 4. 66. A3'ünTeorem 3'ün İspatına ait resminin somut resim kategorisine altında oluşumu 83
Şekil 4. 67. A3'ün Teorem 3'ün ispatına ait somut resim kategorisinin değişken somutluk boyutuna ait bir resmi 84
Şekil 4. 68. A3'ün Teorem 3'ün ispatında yer alan küme kavramının resminin 2 boyuttan 3-boyuttan geçişi 85
Şekil 4. 69. İspat resimlerinde ayırt etme amaçlı renk kullanımı 86
Şekil 4. 70. İspatın resminde kontrol amaçlı renk kullanımı 87
Şekil 4. 71. İspatın resminde sonsuz çoklukta eleman içerme amaçlı renk kullanımı 87
Şekil 4. 72. İspatın resminde eşleme amaçlı renk kullanımı 88
Şekil 4. 73. Resimlerin Özellikleri Kategorisine Ait Alt Kategori ve Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi 88
Şekil 4. 74. Resmin yeri kategorisinden kendine özgü resim alt kategorine ait resim 89
Şekil 4.75. Resmin yeri Kategorisine Ait Alt Kategori ve Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi 90
Şekil 4. 76. A1'in Teorem 4'ün ispatına çizmiş olduğu lineer diziliş kategorisine ait resimleri 91

Şekil 4. 77. A2'nin yoğun olma alt kategorisine ait küme resmi 92
Şekil 4. 78. A3'nin bölgesellik alt kategorisine ait küme resmi.....93
Şekil 4. 79. A2 'nin informal formlar alt kategorisine ait küme resmi 94
*Şekil 4. 80.*Küme resimleri kategorisine ait alt kategori ve boyutların eksen üzerinde gösterimi 95
Şekil 4. 81. Elemanlara karar verme kategorisine ait mutlak mesafe olma alt kategorisi....96
Şekil 4. 82. Elemanlara karar verme kategorisine ait rastlantısal diziliş alt kategorisi.....96
Şekil 4. 83. Elemanlara karar verme kategorisine ait tarama alt kategorisi 97
*Şekil 4. 84.*Elemanlara karar verme kategorisine ait alt kategorilerin eksen üzerinde gösterimi 97
Şekil 4. 85. Sıralı olma kategorisine ait alt kategori ve boyutların eksen üzerinde gösterimi 98
*Şekil 4. 86.*Fonksiyon resimleri kategorisine ait alt kategorilerin eksen üzerinde gösterimi 99
Şekil 4. 87. MÖA' nın matematiksel teoremlerin ispatlarını görselleştirme süreçleri.....100
Şekil 4. 88. Onay Bekleme Kategorisine Ait Alt Kategori ve Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi.....102
Şekil 4. 89. Strateji belirleme kategorisine ait alt kategori ve boyutların eksen üzerinde gösterimi 103
Şekil4. 90. Resmi oluşturma kategorisine ait alt kategori ve boyutların eksen üzerinde gösterimi 105
*Şekil 4. 91.*Yöntemsel süreçler kategorisine ait alt kategori ve boyutların eksen üzerinde gösterimi 106
*Şekil 4. 92.*Cebire ihtiyaç duyma kategorisine ait alt kategori ve boyutların eksen üzerinde gösterimi 107
Şekil 4. 93. Resmi değerlendirme kategorisine ait alt kategori ve boyutların eksen üzerinde gösterimi 108
Şekil 4. 94. Resimlerin kullanımı kategorisine ait alt kategori ve boyutların eksen üzerinde gösterimi 109
*Şekil 4. 95.*Yardıma ihtiyaç duyma kategorisine ait alt kategori ve boyutların eksen üzerinde gösterimi.....109
Şekil 4. 96. Teoremlerin ispatlarının görselleştirilmesinde onay beklenmesi.....110
*Şekil 4. 97.*Teoremlerin ispatlarının görselleştirilmesinde strateji belirleme.....115

*Şekil 4. 98.*Teoremlerin ispatlarının görselleştirilmesinde resmin oluşturulması 118
Şekil 4. 99. A1'in Teorem1'in ispatı için limit kavramı çizimi.....119
Şekil 4. 100. A1'in ilk çizimine f ve g fonksiyonlarının resimlerini eklemesi.....120
Şekil 4.101. Teoremlerin ispatlarının görselleştirilmesinde cebire ihtiyaç duyma…….122
Şekil 4.102. Teoremlerin ispatlarının görselleştirilmesinde yardıma ihtiyaç duyma.……123
*Şekil 4. 103.*Teoremlerin ispatlarının görselleştirilmesinde resmi değerlendirme…….124
Şekil 4. 104. Teoremlerin ispatlarının görselleştirilmesinde yöntemsel süreçler……...126
Şekil 4. 105. Teoremlerin ispatlarının görselleştirilmesinde resmin kullanımı……..127
Şekil 5. 1. MÖA' nın matematiksel teoremlere ve bazı ortak kavramlara ait resimleri.....130
Şekil 5. 2. MÖA' nın matematiksel teoremleri görselleştirme süreçleri.....134
Şekil 5. 3. Matematiksel teoremlerin ispatlarının görselleştirilmesine ait kategoriler ve alt kategorileri 135

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

MEB	Milli Eğitim Bakanlığı
MÖA	Matematik Öğretmeni Adayları
TDK	Türk Dil Kurumu

BÖLÜM I

GİRİŞ

Bu bölümde, "Problem Durumu", "Araştırmanın Amacı", "Problem Cümlesi", "Alt Problemler", "Araştırmanın Önemi", "Varsayımlar", "Sınırlılıklar" ve "Tanımlar" başlıkları yer almaktadır.

Problem Durumu

Son yıllarda yapılan araştırmalar, matematik alanındaki çalışmaların var olan sistematik yapıların özelliklerini, tanımlarını yeniden gözden geçirmeleri gerektiği sonucunu ortaya çıkarmıştır (Argün, Arıkan, Bulut & Halıcıoğlu, 2014, s. 234). Bu yeniden gözden geçiriş süreçleri, mevcut sistemlerin daha iyi anlaşılmasını sağlayacak yeni sistemler oluşturacaktır. Değişim süreci içerisinde oluşacak bu yeni sistemleri anlayabilmek, derinlemesine inceleyebilmek matematik alanında yürütülecek çalışmalar için faydalı olacaktır. Argün vd. (2014)' e göre bu değişim sürecinde "artık fikirlerin, anlaşılması ve keşfedilmesi gereken yeni bir dünyası vardır ve bu dünyaya girmek için matematiksel ispatın kullanılması gerekmektedir" (s. 234). Bu durum göstermektedir ki matematiksel ispatlar, matematiğin temel yapı taşlarındandır (Tall, 1998, s.1).

Matematiksel ispatlar, sistematik bir yapıya dayanarak matematiği diğer bilimlerden ayırmaktadır (Arsac, 2007, s. 27). İspatlar, kavramların daha iyi algılanmasını sağlayarak matematiksel düşüncelerin yapısını geliştirir (Gökkurt & Soylu, 2012, s. 56). İspatlar, bir iddianın doğruluğunu ya da yanlışlığını göstermeyi amaçlamaktan çok niçin doğru ya da niçin yanlış olduğunu göstermeyi amaçlar (Hanna, 2000, s. 8). Dede ve Karakuş (2014)'a göre bir teoremin anlaşılmasını, öneminin kavranmasını sağlayan sosyal süreç matematiksel ispatlardır (s.50).

Ortaöğretim döneminde bireyler soyut düşünebilme yeteneğine sahip olduklarından matematiksel bir ifadenin doğruluğunu ya da yanlışlığını sistematik olarak gösterebilmektedir. Ortaöğretim matematik dersi öğretim programının da bu doğrultuda kazandırmayı hedeflediği temel becerilere bakıldığı zaman matematiksel süreç becerileri arasında matematiksel ispat yapabilmeye yer verildiği görülmektedir (MEB, 2018). Üniversite eğitiminde ileri matematik dersleri alan öğrencilerin ise hemen hemen her alan derslerinde matematiksel teoremler ve ispatları yer almaktadır.

Knuth (2002), lisede görev yapan on altı matematik öğretmeni ile yapmış olduğu araştırmasında, öğretmenlerin ispat hakkındaki görüşlerini almıştır. Knuth'ın öğretmenlerle yaptığı görüşmelerden elde ettiği sonuçlara göre öğretmenlerin, matematiksel ispata dair görüşlerinin sınırlı olduğunu görmüştür.

Varghese (2007), öğretmen adaylarının ispata yönelik fikirlerini, özgüvenlerini, ispat ve kanıtlamaya yönelik tutumlarının öğretim seçimleri üzerindeki etkilerini ve bunun yanında öğretmen adaylarının matematiksel ispatları tamamlama yeteneklerini araştırmak istemiştir. Bu amaç doğrultusunda araştırmasında on yedi stajyer matematik öğretmeni adayı ile çalışmıştır. Araştırmasının bulgularında, bu öğretmen adaylarının ortaokul matematiğindeki ispatın niteliği ve rolü hakkında sınırlı bir anlayışa sahip olduğunu saptamıştır.

Dickerson (2008), lisans matematik öğrencilerinin, algoritmalar ve sembol manipülasyonlarını vurgulayan temel düzey derslerden ispat gerektiren üst düzey derslere geçişte yaşadıkları zorlukları konu olan bir araştırma yürütmüştür. Araştırmasının katılımcıları sekiz lisans öğrencisi, altı lisans düzeyinde matematik eğitimcisi ve iki lisansüstü matematik öğrencisi olmak üzere toplam on altı katılımcıdan oluşmaktadır. Dickerson, araştırmasının sonucunda öğrencilerin, kavram anlayışı, matematiksel dili ve gösterimi kullanabilme ve ispatı yapabilme olmak üzere üç ana zorlukla karşılaştığını görmüştür. Bu zorlukların yanı sıra katılımcıların matematiksel ispatla ilgili inançlarının da ispat yapma süreçleri üzerinde etkili olduğu sonucuna varmıştır.

Literatür taraması yapıldığında matematiksel ispat üzerine yapılan çalışmalarda araştırmanın katılımcılarının matematiksel ispata yönelik gerekli bilgiye sahip olmadıkları, matematiksel ispata yeterli önemi vermedikleri, ispatın matematik için neden gerekli olduğunu fark etmedikleri ve katılımcıların matematiksel ispatların soyutluğundan dolayı ispat yapma süreçlerinde zorlandıkları birçok araştırmacı tarafından görülmüştür

(Dickerson, 2008; Knuth, 2002; Özer & Arıkan, 2001; Varghese, 2007). İspatın matematikteki yeri düşünüldüğünde öğrencilere ispatın matematik yapmak için neden önemli olduğu fark ettirilmeli bunu sağlamak için de matematiksel ispat yapmalarını kolaylaştırıcı durumlar yaratılmalıdır. Dede ve Karakuş (2014) , öğrencilerin ispat yapma süreçlerini kolaylaştırmak için görsel çizimlerden yararlanılabileceğini söylemiştir (s.9). Bell (2011), matematiksel bir kanıtın görselinin oluşturulmasının onun daha iyi anlamlandırılmasını sağlayacağını düşünmektedir (s. 695).

Görselleştirmenin amacı bilinmeyen, gelişen ve farklılaşan fikirler ve bilgiler arasında bağıntı kurma sırasında betimleme yaparak resimlerin, imajların ve diyagramların kullanılmasıyla matematiksel düşünmeyi geliştirme yolunda bireye yardımcı olmaktır (Yılmaz & Argün, 2013, s.565). Görselleştirme sayesinde ispatı anlama ve ispatın neden doğru ya da neden yanlış olduğuna karar verme süreci kolaylaşmaktadır. Görselleştirme soyut ifadelerin somutlaştırılmasını sağlanmakta, bu durum öğrenmeyi daha kolay hale getirmekle birlikte kalıcılığı da arttırmaktadır. Öğrenme zihinde gerçekleşen bir olgudur. Görselleştirmenin bir diğer yönü de zihindeki yapıların resimlerini yaratma fırsatı vermesidir. Bu sayede nesnelerin soyut ilişkileri arasında daha etkili bir yaklaşıma sahip olmak için onların somut niteliklerinden faydalanılır (Guzman, 2002, s.3).

Günümüzde matematik dünyası, görsel çizimlerin yanlış yorumlanabileceği ve bu yüzden de yanlış sonuç çıkarılmasına neden olabileceğinden dolayı ispatlar üzerinde kesin olarak bakmak konusunda hem fikir olmakta zorlanmaktadır(Arcavi, 2003, s.39). Buna rağmen yeni sonuçların ortaya çıkarılma ve daha fazla formal ispatın üretimi için yardımcı olduğu düşünüldüğünde görselleştirmenin önemi göz ardı edilemez (Polat & Demircioğlu, 20016, s.82).

Steckroth (2007), radyan, referans açıları ve birim çemberin trigonometrik kavramlarını anlamada görselleştirmenin etkisini araştırmayı amaçlamıştır. Bir grup kontrol grubu olarak belirlenmiş ve on yıldan fazla bir süredir lise düzeyinde derslere giren deneyimli bir öğretmenden geleneksel yöntemler ile eğitim almıştır. İkinci grup, görselleştirme grubu olarak adlandırılmıştır. Bu grup teknolojideki gelişmeleri öğretmenlik deneyiminin bir parçası olarak gören bir öğretmen tarafından çalıştırılmıştır. Bu çalışmanın ana sonucunda görselleştirmeye odaklanan teknolojiyle geliştirilmiş tüm sınıf dersini alan öğrencilerin radyan, referans açıları ve birim çemberin daha yüksek düzeyde anlaşıldığı görülmüştür.

Özel sonuç olarak ise animasyon ve dinamik görüntü manipülasyonu içeren teknolojinin kullanımının öğrenci öğrenmesi üzerinde olumlu bir etkisi olduğu bulunmuştur.

Russell (1997), ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel görselleştirme ve görsel akıl yürütme stratejilerini anlamak ve tanımlamak istemiştir. Bu amaç doğrultusunda bilişsel süreçlerden bilgi edinmek için vaka çalışması yapmış, 3 örnek olay üzerinden veri toplamıştır. Her katılımcının ilk kendi problemleri üzerinden sonra da problemlerin ortak yönlerini belirleme adına analiz yapmıştır. Russell, katılımcıların problemlere ait iç ve dış temsiller oluşturduğunu gözlemlemiştir. Katılımcıların oluşturmuş olduğu temsillerin çeşitlilik gösterdiğini ve temsillerine ölçme, dönüşüm gibi farklı boyutlar kattıkları sonucuna ulaşmıştır.

Zahner ve Corter (2010), olasılık problemlerinin çözüm sürecinde görsel temsillerin nasıl ve niçin kullanıldığını anlamaya çalışmışlardır. 34 katılımcı ile yürüttükleri çalışmalarında katılımcılara, olasılığın alt konularından oluşan 6 olasılık problemi vermişlerdir. Hem görsel hem de sözlü olarak yapılan görüşme protokollerini, dış görsel temsillerin kendiliğinden katılımcılar tarafından ne zaman ve nasıl kullanıldığını araştırmak için analiz etmişlerdir. Belirli dış görsel gösterimlerin kullanımının özel olasılık konularıyla ilişkili olduğunu ve belirli temsil seçeneklerinin daha yüksek çözüm başarısı oranları ile ilişkili olduğunu göstermiştir. Uygun görsel temsillerin, olasılık probleminin çözümünü kolaylaştırabileceğini görmüşlerdir. Son olarak, genellikle dış görsel temsillerin yaratıldığını ve ilk önce problemi matematiksel olarak temsil etme ve bir çözüm stratejisi bulma aşamalarında kullanıldığını gösteren kanıtlar elde etmişlerdir.

Ülkemizde literatür incelemesi yapıldığında ise görselleştirmeye yönelik yapılan araştırmalarının bir kısmının kuramsal çerçeveye yönelik incelemeler olduğu görülmektedir. Aynı zamanda matematiksel ispatlar ve görselleştirme arasındaki ilişkileri inceleyen çalışma sayısının az olduğu fark edilmiştir. İncelenen literatürde karşılaşılan aşağıda çalışmalar yer almaktadır.

- Matematik eğitiminde görselleştirme yaklaşımının etkilerini inceleyen çalışma (Işık & Konyalıoğlu, 2005) ,
- Ortaöğretim düzeyinde trigonometri kavramlarının öğrenilmesinde görselleştirme yaklaşımının etkinliğinin araştırıldığı çalışma (Tekin, 2010) ,
- Matematiksel soyutlama ve genelleme sürecinde görselleştirmenin öneminin araştırıldığı çalışma (Yılmaz, 2011),

- Görselleştirmenin matematikte öğrenilmiş çaresizlik üzerindeki etkisini araştıran çalışma (Koğ & Başer, 2011),
- Matematik öğretiminde görselleştirme üzerine kuramsal bir çalışma (Şan, 2012),
- Matematik öğretmen adaylarının görsel akıl yürütmelerinin incelendiği araştırma (Gülşen, 2012),
- Matematiksel genelleme sürecinde görselleştirmenin öneminin araştırıldığı çalışmalar (Yılmaz & Argün, 2013).

Yapılan araştırmaların incelenmesi sonucunda görselleştirmeye yönelik üniversite düzeyinde araştırmaların sayısının az olduğu görülmektedir. Aynı zamanda bu düzeyde yapılan araştırmalar görselleştirmeye dair görüş belirlemeye yönelik araştırmalardır. Ülkemizde matematik öğretmen adaylarının matematiksel teoremlerin ispatlarının görselleştirilmesine yönelik bir araştırmaya rastlanılmamıştır. Bu nedenle bu çalışma ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel teoremlerin ispatlarını görselleştirme durumlarını incelendiği bir çalışma olmaktadır.

Araştırmanın Problem Cümlesi

Çalışma kapsamında "Matematik öğretmen adaylarının matematiksel teoremlerin ispatlarını görselleştirme durumları nasıldır?" sorusuna cevap aranmaktadır.
Bu araştırma problemini daha detaylı cevaplayabilmek için aşağıda belirtilen alt problemlerin yanıtları ortaya çıkarılmaya çalışılmaktadır.

Araştırmanın Alt problemleri

1. MÖA' nın matematiksel teoremlerin ispatlarına ait oluşturdukları resimleri nasıldır?
2. MÖA' na verilen teoremlerde yer alan kavramların resimleri, teoremlere göre nasıl şekillenmektedir?
3. MÖA matematiksel teoremlerin ispatlarını görselleştirirken, resimlerin oluşum süreçleri nasıl gelişmektedir?

Araştırmanın Amacı

Bu araştırmanın amacı, MÖA' nın matematiksel teoremlerin ispatlarını görselleştirme durumlarını inceleyerek bu süreçlere dair detaylı bilgi açığa çıkarmaktır. MÖA' nın ispatları görselleştirirken ne tür deneyimler yaşadıklarını belirlemek ve oluşan resimlerin incelenmesi amaçlanmıştır.

Araştırmanın Önemi

Matematik yapma yollarından biri olan ispat, bir savın doğruluğunu ya da yanlışlığını gösterirken sayılar, cebir, geometri gibi alanların arkasındaki kuralları keşfedip kavrama ve anlama deneyimini yaşatmaktadır (Goldberg, 2002). Bu süreç içerisinde bir sonucu keşfetmek, başkaları ile iletişim içinde bulunmak, kendini ve başkalarını ikna etmek gibi bağlantılı aşamalar yer almaktadır. Öğrencilerin teoremlerin ispatlarını yapalabilmesi, matematik yapmada yeni yollar ortaya çıkarmaktadır. Teoremlerin ispatlarını yaparken sözel olarak ifade ettiğimiz düşüncelerimizin zihnimizde görüntüleri bulunmaktadır. Kimi düşüncenin yalnız bir görüntüsü olabilirken kimi düşüncenin ise birden fazla görüntüsü bulunabilir. Görselleştirme, zihindeki düşüncelerin gözle görünür hale gelmesini sağlar. İspatların resimlerinin oluşturulması da, öğrencilere teoremlere dair zihinlerindeki oluşumların görmesi fırsatı sunar. Bu anlamda yapılan çalışmalar görselleştirmenin bu amaç için uygun olduğunu göstermektedir. Bir teoremin ispatında resimlerin kullanılması teoremin ispatına sezgisel olarak yardımcı olmaktadır. Bu nedenle görseller sadece bir teoremin ispatını anlamayı kolaylaştırmakla kalmayıp aynı zamanda ispatın yapılandırılması için yol haritası gösterip teoremin ispatı için ilham vermektedir.

Polat ve Demircioğlu (2016) 'nun yapmış oldukları çalışmada görsel çizimlerin matematiği anlamada öğrencilere yardımcı olduğu görülmektedir. Ayrıca matematiksel kavramlar için görsel çizimlerin kullanılıyor olması, kavramların örneklendirilmesi istendiğinde öğrencilerin akıl yürütme yeteneklerini geliştirmede yardımcı olacağı düşünülmektedir.

Bu çalışmada öğretmen adaylarına verilecek olan matematiksel teoremler ileri matematik alanlarından belirlenecektir ve öğretmen adaylarına hazır görsel ispatlar verilmeyecektir. İleri matematik alanlarından seçilecek teoremler, matematiğin geniş bir kısmını kapsayacağından araştırmadan elde edilecek sonuçlar matematiksel ispatlara yönelik geniş fayda sağlayacaktır.

Matematikte ispatların görselleştirilmesi üzerine yapılan literatür incelemesinin sonuçları göz önüne alındığında bu çalışmanın araştırma problemleri gereği matematik ve matematik eğitimi alanında çalışma yapan araştırmacılara alan araştırmasında katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Varsayımlar

Bu araştırmada varsayım bulunmamaktadır.

Sınırlılıklar

Literatürde araştırmanının ilk iki alt problemleriyle benzer bir nitel çalışma yer almadığından, elde edilen sonuçlar bu araştırma ile sınırlı kalacaktır.

Araştırmanın çalışma kağıdında yer alan matematiksel teoremler içerisinden, katılımcıların ispatını bilmedikleri teoremlerin ispatını görselleştirmekte zorlanması, onların bu teoremlere karşı önyargılı olmalarının önüne geçilememiştir. Bu durumun verilerin elde edilmesindeki etkisini en aza indirebilmek adına katılımcılara teoremlerin ispatları anlaşılır olacak şekilde okunmuş ve ifade edilmeye çalışılmıştır. Bu nedenle araştırmadan elde edilen veriler katılımcıların ön yargısız yaklaştıkları durumlar ile sınırlı kalacaktır.

Tanımlar

Görselleştirme: Görselleştirme, bir matematiksel düşüncenin, kavramının veya problemin ister elle ister bilgisayar ortamında çiziminin yapılarak görüntüsünün oluşturulması sürecidir (Zimmerman & Cunningham, 1991). Bireyin duyularıyla kazandıkları ile içselleştirdiği kavramlar arasında güçlü bir bağ kurma davranışıdır (Zazkis, Dubinsky & Dautermann, 1996).

Teorem: Evrensel mantık sisteminde doğru olduğu bilinen matematiksel önermelerdir.

İspat: Bir ifadenin doğruluğunun ya da yanlışlığının açık bir dille ortaya konmasıdır.

Matematiksel İspat: " $p_1, p_2, \dots, p_n$, q önermeler olmak üzere her $1 \leq i \leq n$ için p_i doğru iken q önermesinin doğru olduğunun gösterilmesine $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \rightarrow q$ önermesinin ispatı denir" (Argün vd. 2014, s. 235). Buradan matematiksel ispat, matematiksel bir düşüncenin, mantığa uygun işlem ve yöntemler ile her önermenin doğrulanmasıyla beklenen sonuca ulaşılması sürecidir.

BÖLÜM II

TEORİK ÇERÇEVE VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Bu bölümde, "Teorik Çerçeve" ve "İlgili Araştırmalar" başlıkları yer almaktadır.

Teorik Çerçeve

İspat ve Matematiksel İspat

Günlük dilde delil, gösteri, doğruluğu kurgulama gibi kullanımları olan ispat kelimesi TDK' da " tanıt ve kanıt göstererek bir şeyin gerçek yönünü ortaya çıkarma, kanıtlama, tanıtlama, tanıt" şeklinde tanımlanmıştır. Bulunduğu bağlama göre farklı anlamlara sahip olan ispat kavramının matematikteki tanımını Argün vd. (2014) " bir teoremin hükmünün doğruluğunu göstermek için izlenen mantıksal adımların topluluğudur" şeklinde belirtmişlerdir (s. 235). İspat, insanoğlunun tarihsel gelişimine yakın bir gelişim süreci geçirmiştir. Tarihte bilinen ilk matematiksel ispat Babilliler'e aittir. Pisagor Teoremi'ni Pisagor'dan en az 500 yıl önce farkında olup kullandıkları bilinmektedir. Babilliler, Pisagor Teoremi'ni neden doğru olduğunu gösterebilmiş olsalar da Pisagor'un matematiksel anlayışına ve formel ispat düşüncesine sahip değillerdi (Krantz, 2011). Antik Yunan öncesi günlük yaşam koşullarında ortaya çıkan ihtiyaçlara yönelik, deneme-yanılma yolu ile matematik yapılırken, Antik Yunan dönemi ile birlikte matematikte mantıksal ispat yapılmaya başlanmıştır. Matematiksel bilginin deneysel ve uygulamalı bilgiden sistematik tümdengelimli bilgiye geçişi ile ispat kavramı, modern matematikte önemli bir yer edinmiştir (Lee, 2002). Thales ile birlikte matematiksel ispat, mantıksal bir

çıkarım yöntemi ile denenmeye başlamıştır (Çetin, 2017). Euclid ile birlikte ise günümüzde hala geçerliliği devam eden aksiyoma dayalı ispat yapma süreçleri ortaya çıkmıştır.

İspat, her zaman matematiğin önemli bir parçası olmuştur. Her ne kadar matematiksel ispat kavramı üzerine tartışmalar devam etse de matematiksel ispatın amacı, bir önermenin neden doğru ya da neden yanlış olduğunu göstermektir (Hanna, 2000). Goldberg (2002), ispatın matematik için neden önemli olduğunu şu şekilde ifade etmiştir:

- Bir savın geçerliliğinden emin olmanın yolu matematiksel ispattır.
- Matematiksel ispat yapma süreci, bilginin derinlemesine incelenmesini ve anlaşılmasını sağlar.
- Matematiksel ispatlar, zamandan etkilenmez.
- Matematiğin her alt dalının temelinde yatan kuralların anlaşılmasını sağlar.

Arsac (2007)'a göre ispatın hem formel hem kültürel boyutu vardır. Bir önermenin doğruluğunu gösterirken belli kurallara dayalı adımlar izlenir ki bu ispatın formel boyutudur. Kültürel boyut ise ispatın doğruluğunu göstermek için izlenilen yöntem, süreçtir. Weber (2005) ispatı; tanım, aksiyom, sav gibi bilgilerin var olan matematiksel teoremler aracılığı ile mantıksal kurallar yoluyla kullanılması ve istenilen sonuca ulaşılması olarak tanımlamıştır.

Almeida (2003), matematiksel ispatı "Bir sonucu doğrulamak, başkalarını bilgilendirmek ve bu bilgiye ikna etmek, bir sonuç bulmak ve sonuçları tümdengelimsel bir sistemin içine yerleştirmek için kullanılır" şeklinde ifade etmiştir. Matematiksel ispat, bireyler tarafından ortaya atılmış bir iddianın doğruluk değerini ortaya çıkarabilmek için gerçekleştirilen zihinsel bir aktivitedir (Harel & Sowder, 2007, s. 819).

Bir savın matematiksel olarak ispatlanması, bütün bilim insanları tarafından doğruluğunun kabul edilmesi anlamına gelmesidir (Derek, 2011, s. 4). Çünkü matematiksel kanıt yapılırken diğerleriyle iletişim kurulması gerekir ve onların ikna edilmesini sağlamak için de geçerli bir sonuca ulaşılmalıdır (Ameida, 2001).

Derek (2011)'e göre ise matematiksel ispat bir düşüncenin doğruluğunun gösterilmesi için kullanılan ifadelerden daha fazlasıdır (s.3). Matematiksel bir ispatta önemli olan bir ifadenin doğruluğunun gösterilmesinin yanı sıra neden doğru olduğunun anlaşılmasıdır.

Reid (2001), ispatın beş farklı kullanım alanının olduğunu ifade etmiştir. Bunlardan dördü matematiksel olarak tanımladığı kesinlik ifade etme düşüncesi, alan kaynaklarında yer alan ispatlar, tümdengelimsel akıl yürütme yoluyla gerçekleşen ispatlar ve çoğunlukla özel konular üzerine odaklanarak spesifik durumların doğruluğunu kontrol etmek için ispat yapmaktır. Son kullanım alanı ise günlük yaşamda karşılaşılan durumların doğruluğunun gösterilmesidir.

Matematik için ispatın rolü ve önemine yönelik, matematikçiler ve matematik eğitimcileri tarafından farklı görüşler ortaya atılmaktadır. Matematikçiler için ispat, kesin doğrulara dayalı değişmez sonuçlara ulaşılmaya çalışılan bir kavramdır (Recio & Godino , 2001) Hanna ve Barbeau (2002)'a göre ispat beklenen bir sonuca ulaşmak için mantık yasalarına uygun sonlu adımda gerçekleştirilen genel geçer kurallara ulaşmaktır. Matematiğin en ayrıntılı şekilde öğrenilmesini sağladığı için matematiksel ispat, matematik için öngörülemez bir öneme sahiptir (Hanna, 2000).

Matematiksel ispat, matematik eğitimcileri çevresine göre ise tanımlama, modelleme ve ya problem çözme gibi matematiksel düşünmenin yer aldığı doğal bir süreç olmalıdır (Herbst, 2002). Ross (1998), matematik eğitiminde ispatın eğitimsel değerleri üzerinde durulması gerektiğini vurgulamıştır. İspat, matematik öğrenimini ezbercilikten uzaklaştırarak, bireylerin anlamlı öğrenme süreçlerini yaşantı edinmesini sağlar. Matematiksel kavramların gerekçeleriyle öğrenimini sağladığı için kavram öğreniminde önemli bir araçtır. Bu nedenle ispat, tüm sınıf düzeylerinde öğrenme seviyelerine uygun olacak şekilde bir araç olarak kullanılmalıdır (Knuth, 2002b). Bu sayede bireyler bir ifadenin doğruluğunu göstereceği gibi bunun yanında yeni matematiksel metodlar, stratejiler ve kavramlar ortaya çıkarabilecektir (Hanna & Barbeau, 2008). İspatın bütün fonksiyonları göz öne alındığında matematik eğitimi programlarının ispat ile matematiğin bir bilim olarak göz önünde bulundurulmasını ve bilginin öğrenciler tarafından keşfedilmesini sağlamayı amaçladığı görülmektedir.

Matematiksel Görselleştirme

Görselleştirmenin matematikte veya matematik eğitiminde kullanım şeklinin nasıl olacağı, kullanılmasında matematik ve matematik eğitimi için nasıl faydaları olacağı tartışıla dursun, görselleştirmenin gelişim tarihi matematiksel kavramların tarihi kökenlerinin ele alınmasına kadar dayanmaktadır. Gelişen bilgisayar teknolojisi sayesinde çizim yapma

imkanı artmış bu nedenle de daha çok son yirmi yıldır görselleştirme kavramı matematik eğitimiyle ilgilenilen araştırmalarda yer almaya başlamıştır. Literatürde görselleştirme kavramına ait çeşitli tanımlar yer almaktadır.

Zimmermann ve Cunningham (1991), görselleştirmeyi; " ister elle çizili, ister bilgisayarla çizili olsun matematikteki kavram, prensip ya da problemlerin geometrik veya grafik görüntülerinin oluşturulma ya da kullanım süreci" şeklinde tanımlamıştır. Gutiérrez, (1996)'e göre görselleştirme, matematiksel problemleri çözmek, matematiksel iddiaları ispatlamak için zihinsel ya da fiziksel yollarla görsel objelerin kullanıldığı bir akıl yürütme sürecidir. Görselleştirme, matematiksel bir çalışmada uzamsal özelliklerin bütün yazılımları ile görsel imajların, yapılanmasını ve dönüşümünü sağlayan bir süreçtir. (Presmeg, 1997).

Görselleştirme; yapılandırma, temsillendirme ve zihinsel imajlar arasında gerçekleşen organize ve kompleks bir döngü sürecidir (Wheatly, 1998). Matematiksel görselleştirme, gerçek hayat durumlarının soyutlanarak temsillendirildiği, bu temsillerin de görsel olduğu durumlarla ilgilenir (Bishop, 1989). Bu yönüyle görselleştirme, bilginin analitik gelişimine yön verirken bilgiyi anlamlı yapılar halinde düzenler (Yılmaz, 2011). Düşüncelerin, soyut kavramların görselleştirilmesinde grafikler, diyagramlar ya da farklı geometrik şekiller kullanılır. Bu araçlar sayesinde bireyler düşüncelerinin, dış dünyadaki nesneler ile soyut kavramlar arasında ilişki kurmasının bir yolunu bulmuş olur (Işık & Konyalıoğlu, 2011) .

Zazkis vd. (l996) görselleştirmeyi, "bireyin içsel bir kavram ile duyular yoluyla kazandıkları arasında güçlü bir bağ kurma eylemi" olarak betimlemiş bu durumu sağlayabilmek içinse dış dünyadaki nesnelerin anlamlandırılarak zihinde canlandırılması daha sonrasında ise zihinde anlamlandırılan düşüncelerin grafik, diyagram gibi çizimlerle kağıt, bilgisayar gibi dış dünyaya yansıtılması gerektiğini ifade etmiştir. Matematikte görselleştirme sayesinde zihinde oluşan imajlar gözle görülür hale gelmektedir. Bu da bireylerin bilgiye ait düşünceleri hakkında fikir sahibi olma imkanı sağlamaktadır. Yani başka bir ifade ile görselleştirme zihinsel düşünce imajlarının olabildiğince somut hale dönüşmesini sağlamaktadır. Literatür araştırması yapıldığında görülmektedir ki görselleştirmenin matematik eğitimi için olumlu yönlerinin var olduğuna dair bir çok araştırmanın yer almasının yanı sıra görselleştirmenin sınırlılıklarını, zorluluklarını, matematikteki yerini tartışan araştırmalar da vardır (Arcavi, 2003; Eisenberg, 1994). Bu araştırmaların ortak kanısı görselleştirmenin matematiksel düşünme için yetersiz olduğu,

çizilen bir resmin sadece o durum içerisinde sınırlı etkisi olduğu ve çizilen resimlerin kavramlara yönelik yanılgılara sebep olabileceği yönündedir (Arcavi, 2003; Eisenberg, 1994; Poage & Poage, 1977; Presmerg, 1986). Tall (1991), görselleştirme için yöneltilen olumsuz düşüncelere karşıt olarak görselleştirmenin, matematiksel kavramların gelişimde temel kaynaklardan olduğunu; görselleştirmeyi matematik için inkar etmenin, bu nedenle çoğu matematiksel düşüncenin kökenini yalanlamak olacağını ifade etmiştir.

Görselleştirme, ürün odaklı değildir, ürünün oluşum sürecidir. Görselleştirme, dış dünya ile zihin arasındaki bağın kendisidir. Bir geometrik şeklin çizilmesi kendi başına görselleştirme olamadığı gibi bir resme sadece bakmak da tek başına görselleştirme olamaz. Görselleştirme kişinin resim ile onun zihninde yarattıklarıdır. Buradan görselleştirmenin matematik öğretiminde kavramların aralarındaki ilişkilere anlam vermede önemini göstermektedir (Yılmaz, 2011).

Çoğu durumda, insanların duyusal bilgi çeşitlerinden en çok görsel bilgiyi kullanma ve görsel bilgiye güvenme konusunda fazla bir eğilim olduğu görülmektedir (Sinnet, Spence & Soto-Faraco,2007). Görme duyusunun insanın sosyo-kültürel varoluşunun temelini oluşturması, görselleştirmenin bilgi edinme yolu olarak bu kadar etkili olmasını açıklamaktadır (Arcavi, 2003). Görselleştirmenin bu yönü göz önünde bulundurularak matematik eğitimi üzerinde faydalı olabilecek etkinlikler oluşturulabilir (Gülşen, 2012). Matematiksel görselleştirme matematiksel keşif ve anlamlandırma için imajlar oluşturma ve bu imajları ektili kullanma işidir (Zimmerman &Cunningham,1991).

Matematiksel Görselleştirme ve Matematiksel İspat

Teorem kelimesi Grekçe bir kelime olan “threorein” dan gelmektedir. Günümüzde “ispat edilmiş” olan anlamına gelen “thereorema” kelimesi bu kelimeye dayanmaktadır. İspat üzerine bir çok çalışma yürütmüş olan Pisagorcuların sayılar ve sayı kümeleri arasındaki ilişkiyi göstermek için çakıl taşları gibi farklı şekillerde araçlar kullandıkları bilinmektedir (Guzman, 2002). Plato’nun bir gölgenin gerçeği yansıtması fikri gibi görsel nesneler gerçeğin birer yansımasıdır. Arşimed, basit araçların benzetimsel özelliklerini kullanarak matematiksel keşifler yapmış, Descartes’in ise görselleştirme süreci ile ilgili birebir ilişkili kuralları bulunmaktadır (Guzman, 2002). Descartes’in Regula *ad direction ingerie* de görselleştirme ile ilişkilendirilen kurallar sırası ile aşağıda yer almaktadır.

> Bir yandan basit önermeleri belirgin bir şekilde hissetmek için, diğer yandan aradığımız şeyi, bilinenleri tanımak ve aynı zamanda birbirleriyle karşılaştırılması gereken şeyleri, insan yeteneğinin hiçbir unsurunun göz ardı edilmeyeceği şekilde keşfetmek adına aklın, hayal gücünün, esinlenmenin ve hafızanın tüm kaynaklarından yararlanılması gerekir. Her şeyi, saf figürler aracılığıyla hayalleştirmemiz önerilmelidir. Bu şekilde, her şey çok daha belirgin bir şekilde algılanacaktır. Bu şekilleri tanımlamak ve bunları dışsal görüşlerimizle göstermek birçok durumda da yararlıdır. Öyle ki dikkatimiz daha sürekli kalır.(Guzman, 2002).

Bilginin görsel şekli matematik için önemli bir yer tutmaktadır. "Bir resim bin kelimeden daha değerlidir" sözü ile Casselman (2000), görselleştirmenin matematik için ne kadar önemli olduğunu göz önüne sermiştir. Casselman (2000) çalışmasında, matematiksel teoremlerin ispatlarına resimler oluşturmuş, görsel çizimlerin tarih içerisindeki gelişimini ifade etmiştir. Casselman (2000), resim olarak adlandırdığı ispata ait çizimlerin örneklerine çalışmasında yer vermiştir. Herrera, McCabe, Strictland ve White (2017), bir resim çizmenin öğrenciler için daha önceleri gerçekleştirmedikleri çıkarımlar yapmalarını ve ispatlamış oldukları iddialar için inanç kazanmalarını sağlayacağını düşünmektedir. Bu düşünce doğrultusunda belirli matematiksel teoremlerin ispatlarına ait resimler oluşturmuşlardır. Herrera vd. (2017), ispatlara ait resimler çizilerek öğrencileri araştırmaya teşvik eden ortamların oluşturulmasının öğrencilerin öğrenmeleri üzerinde yararlı olacağını savunmaktadır.

Matematiksel görselleştirme ile formal ispatlar üretilebilir, yeni sonuçlar ortaya çıkarılabilir (Demircioğlu & Polat, 2016). Guzman (2002), bir hikaye ile görselleştirmenin matematiksel ispattaki yerini özetlemiştir. Bu hikayede bir matematikçi olan Wiener, onu izleyen bir çok kişi önünde bir konferans vermektedir ve karışık bir ispatın detaylarından bahsetmektedir. Konferans esnasında tahta birçok formülle dolmuş ancak Wiener, sonuca ulaşmasına çok az kalmışken bir yerde takılmıştır. Bir dakika, iki dakika … Öğrencilerine göre Usta Wiener'ın ispatta takılması imkansız bir durumdur. Wiener, tahtadaki formüllere bakmakta, saçlarını karıştırmakta ve kendi kendine mırıldanmaktadır, taki ne yapacağına karar verdiği o ana kadar. Karatahtanın boş bir kösesinden birine gitmiş ve orada gizemli resimler çizmiştir. Geniş omuzları ne yaptığının görülmesini engellemiştir. Sonunda gerçeği görerek rahatlamış ve tahtaya çizdiklerini dikkatlice silmiştir. Daha sonra tahtada ispatı bıraktığı yere geri dönmüş ve hiç şüphe etmeden ispatını tamamlamıştır. Yeni doğmuş bir bebek gördüğü bir olguyu aynı bir fotoğraf makinesi gibi kaydeder. Ancak kısa süre içinde beyinde gerçekleşen süreçler olguyu anlamlandırır (Guzman,2002). İşte matematikte görselleştirme böyle gerçekleşen bir süreçtir. Resimler, gerçek diyagramlarla ilişkilendirildiğinde mantık kurallarına göre

daha basit işlemler oluşturduklarından matematiksel düşünmeyi geliştirebilirler (Pylyshyn, 2003).

İlgili Araştırmalar

Zahner ve Corter (2010), problem çözme ve görselleştirme arasındaki ilişkiyi araştırmak istemişlerdir. Bunun için olasılık problemlerinin çözümünde özellikle uzamsal veya görsel durumda olan dış ibarelerin kullanımını araştırmışlar, dış görsellerden hangi durumlarda nasıl yararlanıldığını ortaya çıkarmaya çalışmışlardır. Zahner ve Corter, dış resimlerin nasıl kullanıldığını daha iyi anlayabilmek adına olasılık problemlerinin çözümü için bir süreç modeli geliştirmişlerdir. 34 katılımcı ile gerçekleştirdikleri araştırmalarında katılımcılardan temel olasılık konularını kapsayan 6 problem durumunu çözmelerini istemişlerdir. Yazılı ve sözlü olarak yapılan görüşmelerden elde edilen veriler analiz edilmiştir. Katılımcıların problemi matematiksel olarak ifade edebilmek veya probleme bir çözüm belirleyebilmek için olasılık problemleri çözümü modelinin her aşamasını sırasıyla fakat bazen doğrusal olmayan şekillerde kullandığını görmüşlerdir. Analizlerin sonuçları, problemin kapsadığı olasılık alt konularına göre belirli dış resimlerin kullanıldığını ve problemlerin çözülebilme başarısıyla ilişkili olduğunu göstermiştir. Uygun dış resimlerin seçimlerinin problemlerin çözümünü kolaylaştırdığı sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca dış resimlerin çoğunlukla problemi matematiksel olarak ifade etmek amacıyla kullanıldığı, daha sonrasında çözüm belirleme aşamasında kullanıldığı görülmüştür.

Steckroth (2007), geliştirilmiş teknolojik bir matematik ortamında trigonometrik kavramlar olan radyan, referans açı ve birim çemberin öğrenilmesinde görselleştirmenin etkinliğine odaklanmıştır. Streckroth, görselleştirmenin etkinliğini gözlemleyebilmek için precalculus öğrencilerinden oluşan iki grup oluşturmuştur. Bu gruplardan biri kontrol grubudur. Kontrol grubu ile ders yapan öğretmen(danışman) geleneksel öğretme yöntemleri ile derslerini işlemiştir. Diğer grup ise görselleştirme grubudur. Görselleştirme grubunun öğretmeni teknolojiyi öğretim sürecinde kullanarak derslerini işlemiştir. Çalışmanın ilk altı haftasında öğrenci danışmanı öğrencilere pedagojik ve teknik yardım sağlamıştır. Araştırmadan, görselleştirmeye odaklanan teknolojiyle geliştirilmiş dersleri alan öğrencilerin radyan, birim çember ve referans açı kavramlarını öğrenme durumlarının daha yüksek olduğu sonucu elde edilmiştir. Animasyon ve dinamik görüntü manipülasyonlarını içeren görselleştirme ortamlarının öğrenme üzerinde olumlu etkiye

sahip olduğu görülmüş, bunun yansıması olarak da matematik eğitimcisi yetiştiren okulların teknolojiyi görselleştirme ortamlarına bir araç olarak eklemesi gerektiği önerilmiştir.

Russell (1997), ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel görselleştirme ve görsel akıl yürütme stratejilerini anlamak ve tanımlamak istemiştir. Bu amaç doğrultusunda bilişsel süreçlerden bilgi edinmek için durum çalışması yapmış, 3 örnek olay üzerinden veri toplamıştır. Veri analizi sonucunda görselleştirme üzerine teorik genellemeler yapmayı planlamıştır. Katılımcılara vermiş olduğu problemler için problemlerin resimlerinin oluşturulduğu durumu görselleştirme boyutu, oluşturulan resimlerin kontrol edildiği durumu ise muhakeme boyutu olarak ele almıştır. Her katılımcının ilk kendi problemleri üzerinden sonra da problemlerin ortak yönlerini belirleme adına analiz yapmıştır. Russell, katılımcıların problemlere ait iç ve dış temsiller oluşturduğunu gözlemlemiştir. Zihindeki nesneler iç temsiller, kağıda aktarılan nesneler dış temsillerdir. Katılımcıların oluşturmuş olduğu temsillerin çeşitlilik gösterdiğini ve temsillerine ölçme, dönüşüm gibi farklı boyutlar kattıkları sonucuna ulaşmıştır. Görselleştirme boyutunda problemlere ait çizimlerin katılımcılara göre değişiklik gösterdiğini, akıl yürütme süreçlerinde ise matematiksel bilgi, mekansal yetenek, doğrulama ve ölçmenin ortak kriterler olduğunu ifade etmiştir.

Herrera vd. (2017), analiz derslerindeki öğrenme güçlüklerini azaltabilmek adına görsellerden yararlanılabileceğini düşünmüştür. Bu amaç doğrultusunda yazarlardan birinin verdiği lisans analiz dersinde bir teoremin ispatı için şu üç durumdan üçüncüsüne odaklanılmıştır: Ne biliyoruz, neyi göstermemiz gerekiyor, bir resim çizelim. Üçüncü maddeden yola çıkarak öğrencilerin kanıtların resimlerini çizmelerinin öğrenme durumlarını nasıl etkileyeceğini özel görsel model örnekleri kullanarak anlatmışlardır.

MacCabe, üst düzey analiz derslerinde bir teoremin ispatını yaparken öğrencilerin bildikleri şeyleri tanımlamada eksiklik yaşadıklarını bunun nedeninin de yapabileceklerine olan inançlarının eksiliğinden kaynaklandığını ifade etmiştir. Bu nedenle araştırmanın yazarlarına göre, ispatların resimlerinin çizilmesinin kanıt yapılmaya başlamadan önce düşüncelerini keşfetmelerini sağlayacaktır. Ayrıca öğrencilerin fikirlerinin görsel olarak doğrulamasının, yanlış anlamalarının incelemesini, kavram yanılgılarının giderilmesini ve teoremle ilgili fark edilmeyen yönleri keşfetmelerini sağlayacağı düşünülmektedir.

Mostafa (2001), lineer programlamanın formüllerin ve notasyonların soyutluğundan dolayı çoğu kişinin zorlandığını düşünmektedir. Buna çözüm yolu olarak da kavramlara görsel temsillerin verilmesi olduğunu ifade etmektedir. Bu amaç doğrultusunda araştırmasını yürüten Mostafa, soyut kavramların faydalı görselleştirmelerini yaratarak teoremlerin ve ilgili lineer cebirin geometrik içeriğini daha anlamlı kılmayı planlamıştır. Çalışmasında belirlediği teoremlere görsel çizimler üretmiştir. Araştırmasının sonucunda görselleştirme sayesinde çeşitli kavramların nasıl ilişkili olduğunu göstermenin kolaylaştığını ifade etmiştir.

Bardelle (2010), matematikte ispat görsellerinin temel özellikleri ve matematik öğretiminde kullanımları üzerine bir çalışma yürütmüştür. Bardelle, İtalya'daki Del Piemonte Orientale Üniversitesinde matematik öğrencileri ile yürüttüğü çalışmasında matematiksel ispata ait açılan bir ders bağlamında üniversite ikinci ve üçüncü sınıf matematik öğrencilerinden oluşan 13 kişilik bir grup katılımcıdan verdiği bazı ifadelerin ispatını yapmalarını ve bu tür bir ispatı yeniden oluşturmalarını istemiştir. Üniversite matematik öğrencilerine dayanan bu araştırmada, rakamları içeren matematiksel görevlerde görsel akıl yürütmenin çok zayıf bir şekilde kullanıldığını görmüştür. Diyagramların çoğu zaman, sürecin tamamını temsil etmede kullanılmadığı problemleri çözmek için var olan hali hazırda yardımlar olarak ifade edilmiştir.

Tekin (2010), ortaöğretim düzeyindeki trigonometrik fonksiyonların görselleştirilmesine odaklanmıştır. Bu amaç doğrultusunda 6 hafta boyunca 50 katılımcıyla çalışılmıştır. Çalışma yarı deneysel desen yöntemi üzerine tasarlanmış, veri toplama aracı olarak da görselleştirme yaklaşımına dayalı çalışma kağıtları kullanılmıştır. Katılımcılar deney ve kontrol olmak üzere iki gruba ayrılmıştır. Deney grubu trigonometrik fonksiyonları geleneksel yöntemlerle alırken deney grubu görselleştirme yaklaşımına göre hazırlanmış çalışma kağıtları üzerinden almıştır. Altı haftanın sonunda yapılan çalışmadan elde edilen veriler t-testi ve ANOVA ile analiz edilmiştir. Veri analizleri sonucunda iki grup arasında trigonometrik fonksiyonların öğrenimine ait anlamlı bir fark görülmüştür. Görselleştirme yaklaşımı ile çalışan grubun başarı ve tutumunun daha yüksek olduğu ortaya çıkarılmıştır.

Tekin ve Konyalıoğlu (2010)' nun birlikte yürüttükleri çalışmalarında görselleştirmenin trigonometrik formüller üzerinde kullanımını araştırmışlardır. Bu amaç doğrultusunda belirledikleri bazı trigonometrik formüllere görsel çizimler oluşturmuşlardır. Araştırma sonucunda öğrencilerin kavramlar arası ilişkileri görememekten cebirsel ispatta hatalar

yaptıklarını görselleştirme ile bu hataların azaltılabileceğini ifade etmişlerdir. Toplam-fark formüllerinin görselleştirilmesi formüller içerisinde yer alan kavramların birbirleri arasındaki ilişkinin görülmesini kolaylaştıracağı düşünülmektedir.

Uğurel, Morali, Karahan ve Boz (2016), üstün yetenekli öğrencilerin matematiksel ispata farklı bakış açıları geliştirebilmeleri adına görsel çizimlerden yararlanabilme durumlarına dair bir çalışma yürütmüşlerdir. Bu amaç doğrultusunda özel bir fen lisesinde 9. sınıfta öğrenim gören 3 erkek öğrenci ile çalışmışlardır. Çalışma kapsamında ilk olarak öğrencilere konu ile ilgili brifing verilmiş, devamında beş hafta boyunca verilen teoremlerin ispatlarına ait görseller oluşturmaları istenmiştir. Çalışma süresince öğrencilerin geliştirdikleri görsellerden ve anketlerden veriler elde edilmiştir. Veri analizleri sonucunda öğrencilerin sözel olmayan ispatlar geliştirme ve kanıtları görseler kullanarak gösterme konusunda başarılı oldukları görülmüştür. Ayrıca ilk olarak kendilerine verilen görsel çizimleri anlama konusunda zorlanmadıkları gibi öğrencilerin daha önce böyle bir süreç yaşamamış olmalarına rağmen kendi çizimlerini oluştururken de zorlanmadıkları görülmüştür. Son olarak ispatlarda görsellerden faydalanmanın tüm kavramların anlaşılması konusunda zenginlik yaratacağı ifade edilmiştir.

İpek, Konyalıoğlu ve Işık (2003), görselleştirmenin cebir öğrenme alanı üzerindeki rolünü ortaya çıkarmak için bir araştırma yürütmüştür. 60 üniversite ikinci sınıf öğrencisi ile gerçekleştirilen araştırmada öğrencilere lineer cebir için gerekli olan vektör kavramıyla ilgili teorik bilgi verilmiştir. Daha sonrasında öğrenciler 30 kişilik iki gruba ayrılmıştır. Birinci gruba vektör kavramı ve kavramla ilgili yapılar teorik olarak verilirken ikinci gruba ise hem teorik hem de geometrik çizimlerden yararlanılarak ders verilmiştir. Dört haftanın sonunda her iki gruba da vektör kavramı ile ilgili aynı soruların yer aldığı bir ölçek uygulanmıştır. Ölçeğin sonucundan elde edilen verilere göre geometrik çizimlerle geçen dersi deneyimleyen grubun öğrenme düzeyinin daha yüksek olduğu görülmüştür. Ayrıca çizimlerin, kavramın tanımını yaparken soyutluk düzeyini azaltmayı sağladığından kolaylık sağladığı ve öğrencilerin motivasyonunu arttırdığı ifade edilmiştir.

BÖLÜM III

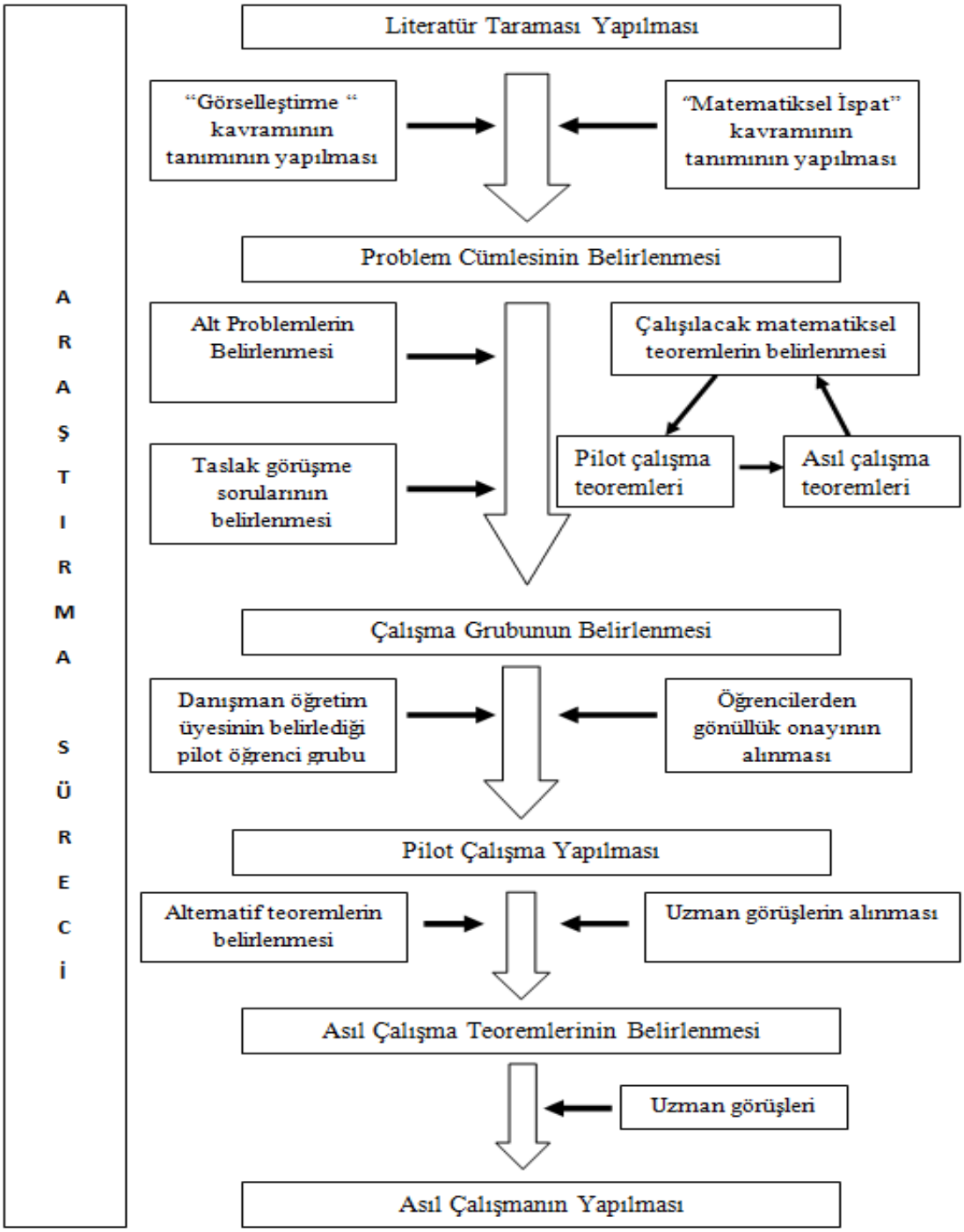
YÖNTEM

Bu bölümde " Araştırmanın Modeli", "Araştırma Grubu", "Veri Toplama Araçları" ve "Veri Analizi" başlıkları yer almaktadır.

Araştırmanın Modeli

MÖA' nın matematiksel teoremlerin ispatlarını görselleştirme durumlarını ortaya koymayı amaçlayan bu araştırmada, araştırma problemine ayrıntılı bir bakış açısı getirilerek problemin, derinlemesine ve detaylı bir şekilde incelenmesi planlanmıştır. Bu nedenle çalışma nitel bir araştırma olarak tasarlanmıştır.

Araştırmada veri toplama aracı olarak görüşme ve yazılı doküman incelemesi yapılmıştır. Araştırmanın verileri, danışman öğretim üyesinin odasında her aday ile ayrı şekilde görüşülerek toplanmıştır. Veri toplama sürecinde ses ve görüntü kaydı alınmış, bu kayıtlar veri analizi sürecinde incelenmiştir. Aday, bir teoremin ispatına ait görselleştirme sürecini tamamlandığını ifade ettiği zaman diğer teorem durumlarına geçilmiştir. MÖA'nın zihinlerindeki düşüncelerin kağıda yansımalarını görebilmek adına adaylardan silgi kullanmamaları istenmiş, değişiklik yapılmak istedikleri durumlarda adayların yeni bir kağıt kullanmalarına izin verilmiştir. MÖA ispatları görselleştirirken süre konusunda özgür bırakılmıştır. İstedikleri zaman daha önceki teorem durumlarına dönüş yapabilmelerine imkan verilmiştir. Literatür taraması yapılarak başlanıp asıl çalışmanın yapılmasına kadar devam ederek bütün durumları kapsayan araştırma sürecine Şekil 3.1'de yer verilmiştir.



Şekil 3. 1. Araştırma sürecinin şematik açıklaması

Araştırma Grubu

Bu çalışmanın araştırma grubunu 2017-2018 eğitim öğretim yılının bahar yarıyılında, Ankara ilinde yer alan bir devlet üniversitesinin Eğitim Fakültesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı'nın Matematik Eğitimi Bölümü'nün üçüncü ve dördüncü sınıfında öğrenim gören toplam dört matematik öğretmeni adayı oluşturmaktadır. Ayrıca çalışmanın pilot uygulaması, 2017-2018 eğitim öğretim yılının güz yarıyılında, yine aynı üniversitenin aynı anabilim dalında üçüncü ve dördüncü sınıfında öğrenim gören toplam üç öğretmen adayı ile yürütülmüştür. Araştırmanın pilot ve asıl uygulamasında farklı katılımcılar yer almaktadır. Seçilen öğrenciler matematik alan bilgisine ve pedagojik yeterliliklere sahip, derslerinde aktif olan araştırmaya tamamen gönüllü şekilde dahil olan katılımcılardır. Araştırmada yer alacak katılımcılar danışman öğretim üyesi tarafından seçilmiştir.

Veri Toplama Aracı

Nitel bir araştırma olarak yürütülen bu çalışmada temel veri toplama araçları olarak görüşme türlerinden yarı yapılandırılmış görüşme ve doküman incelemesi yöntemi kullanılmıştır. Görüşmelerde, matematiksel teoremlerin her birinin ayrı şekilde yer aldığı çalışma kağıtları kullanılmıştır. Araştırmada kullanılan matematiksel teoremler danışman öğretim üyesi ile birlikte seçilmiştir. Pilot uygulamada dört teorem kullanılırken asıl uygulamada pilot uygulamadan seçilen iki teoreme ek 3 teorem daha eklenerek toplam beş teorem kullanılmıştır. Veriler her bir katılımcıyla ayrı görüşülerek toplanmıştır. Ayrıca çalışma esnasında katılımcıların onayı ile ses ve görüntü kaydı alınmıştır.Çalışma kağıtlarında yer alan teoremlere ait resimler doküman olarak kabul edilmiştir. Görüşmeler esnasında katılımcılardan elde edilen ses kayıtlarının yazılı metin halleri ve çalışma kağıtlarından elde edilen dokümanlar incelenmiştir.

Araştırma süresince katılımcılarla görüşmeler yapılmış bu görüşmeler esnasında katılımcılara önceden belirlenen ve süreç içerisinde ortaya çıkan durumlara yönelik sorular yöneltilmiştir. Görüşmeler esnasında alınan ses kayıtları yazılı metin haline getirilmiş ve araştırmanın problemine yönelik analiz edilmiştir.

Çalışma kağıtlarında kullanılan teoremlerden soyut matematik alanı ile ilgili olan üç teorem *Soyut Matematik* adlı kitaptan, analiz alanı ile ilgili olan iki teorem ise *Tek*

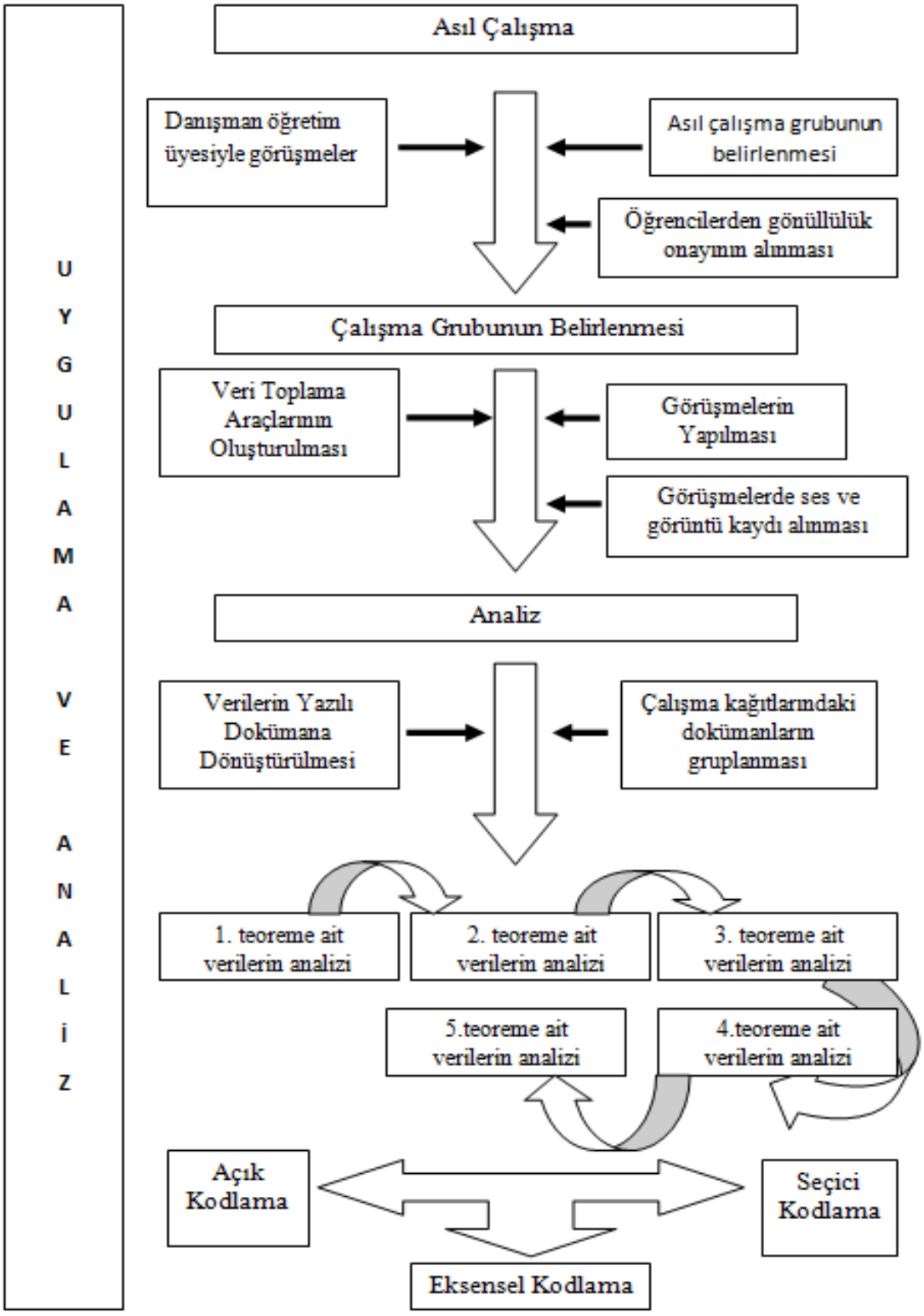
Değişkenli Analiz adlı kitaptan alınmıştır. Her bir teoremin ayrı olarak yer aldığı çalışma kağıtları, adaylara ispatları görselleştirmeleri için verilmiştir. Görselleştirme sürecinde zorluk yaşamaları durumunda yararlanmaları için teoremlerin ispatları da çalışma kağıtları ile birlikte adaylara verilmiştir.

MÖA' nın teoremlerin ispatlarını görselleştirmek için resimleri çizerken geçirdikleri süreci daha iyi anlayabilmek, zihinlerindeki düşünceleri kağıda aktarma süreçlerini daha iyi gözlemleyebilmek ve resimleri oluştururken teoremlerde yer alan kavramlar arasında nasıl ilişkiler kurduğunu inceleyebilmek adına görselleştirme süresince resimlerinin görüntüleri kaydedilmiştir. Gerek bu görüntüler gerekse çalışma kağıtlarındaki resimler doküman olarak kabul edilmiş ve doküman incelemesi yapılmıştır.

Veri Analizi

MÖA' ndan görüşmeler esnasında elde edilen ses ve görüntü kayıtlarının yazılı metin haline getirilmesinden ve katılımcıların çalışma kağıtlarındaki resimlerinden elde edilen veriler, nitel araştırma yaklaşımın benimsendiği bu araştırmada gömülü teorinin (grounded theory) veri çözümleme teknikleri kullanılarak analiz edilmiştir.

Adayların çalışma kağıtlarındaki yazılı metinleri ve resimleri ile sesli görüntü kayıtlarından elde edilen yazılı metinler birlikte incelenmiştir. Görüşmeler esnasında adaylardan elde edilen dokümanlar, öncelikli olarak teorem-teorem gruplandırılmıştır. Örneğin Teorem 1'e ait çalışma kağıtları ayrı, Teorem2'ye ait çalışma kağıtları ayrı dosyalarda toplanmıştır. Bu şekilde görüşme dokümanları daha kolay analiz edilebilir bir hale getirilmiştir. Analiz edilebilecek hale getirilen görüşme dokümanları defalarca okunarak incelenmiş ve bu incelemeler esnasında notlar alınarak ilk kavram etiketlemeleri yapılmıştır. Daha sonrasında açık kodlama sürecine başlanılarak kategoriler ve bu kategorilere ait özellikler oluşturulmuştur. Kategorilerin elde edilen boyutlara göre değişimleri, açık bir şekilde ifade edilmeye çalışılmıştır. Her bir teorem durumu için MÖA' nın dokümanları tekrar tekrar karşılaştırmalı olarak incelenmiş ve eksensel kodlama ile kategoriler, alt kategoriler ve boyutlar geliştirilmeye çalışılmıştır. Araştırmanın uygulama ve analiz adımları Şekil 3.2'de gösterilmiştir.



*Şekil 3. 2.*Araştırma süresince izlenen uygulama ve analiz adımları

Aşağıda MÖA' ndan elde edilen verilere ait kodlamaları göstermek için seçilmiş bir örnek bulunmaktadır. Örnek matematiksel teoremlerin ispatlarının görselleştirilmesi sürecinde onay bekleme ile ilgilidir. Katılımcıların isimleri açıkça belirtilmek yerine görüşme sıralarına göre A1, A2,A3 ve A4 olarak kodlanmıştır.

Araştırmacı: Teoremin adıyla şuan ki yorumun arasında bir ilişki mi kurmaya çalışıyorsun?

A1: Düşünüyorum. Hareket edemiyor pek yani. Sıkıştırıyor yani. Şuaraya $f(x)$ yazayım.

Araştırmacı: Neden cebirsel ifade kullanma gereği duydun?

A1:*Çizimimde ikna oluyorum* ama *matematiksel olarak ikna olamıyorum*. Ya mesela *analiz sınavında bunu yazsam.(Kendini ikna etmede matematiksel değer olarak onaylama)*

Araştırmacı: Burada resimlerini ispatın yerine mi koymak istiyorsun? Senin için ispatın karşılığı mı olmalı?

A1: *Matematik deyince daha dolu işlemler yapmak gerekiyor gibi geliyor. (kendini ikna etmede matematiksel değer olarak onaylama)*

Araştırmacı: Daha dolu işlemler yapmak derken ne demek istiyorsun?

A1: *Daha ispat gibi* işte. Uzun *daha çok x ler terimler* olan. (*Matematiksel değer olarak onaylamanın matematiksel terimlerin varlığı*)

(…)

Araştırmacı: Peki neden yeni bir resim yapmaya başladın?

A1: Bu aralık bu aralığa gidiyor. İspata bir bakayım. *Matematiksel terimlere dikkat etmedim hiç. Ondan ikna olamadım.* Şimdi epsilon deltalara da bir bakayım. *Belki daha güzeli vardır.* Şimdi $xf(x)$ …(*Matematiksel değer olarak onaylamanın matematiksel terimlerin varlığı*)

Araştırmacı: Daha güzelini arama isteği… İspatlarda daha güzelini arama isteğin oluyor mu peki? Daha uzun yazayım daha çok terim kullanayım şeklinde.

A1: Daha uzun yazayım, daha çok terim kullanayım değil de. Nasıl diyeyim. *Daha az daha öz. En açıklayıcı hangisiyse.* (*Matematiksel değer olarak onaylamada açıklayıcı olma*)

Araştırmacı: Orda daha öz burada daha güzel?

A1: Resim sonuçta akılda *kalıcı olması lazım*. Onun açıklayıcı olması *bunun akılda kalıcı olması lazım.(Resim boyutunda onaylamada kalıcı olma)*

A3: Yani okuduğunu, düşündüğünü görselleştirmek kolay değil. Hocalar *sürekli çizim yapıyor. Onunkiler hep doğrudur*. Alışkanlığımda olmadığından zorlanıyorum şuan. *Sizce bu çizim oldu mu?(Uzman bireyleri ikna etme)*

Araştırmacı: Burada önemli olan benim onaylamam mı senin için? Bu resimler senin zihnindeki düşünceler. Ben kısas olabilir miyim?

A3: Yani. Tamam, benim düşüncem ama sonuçta her çizdiğimde olmaz ki. Şey hani matematiksel değeri olması gerekir yoksa herkes her istediğini çizse *matematik değersizleşir ispat önemli bir şey sonuçta.*

(...)

Araştırmacı: Koordinat ekseni çizme fikri fonksiyon kavramından dolayı mı geldi?

A4: Fonksiyondan geldi hocam. Fonksiyonu hep şeyden çiziyoruz ya koordinat sisteminde. Kendim böyle alıştım ondan dolayı galiba. *Ama şimdi bunu böyle çiziyorum da çizerken yapmamam gereken bir şeyler var mı? Nasıl çizildiğini gösteren bir şey* vermeyecek misiniz? (*Uzman bireyleri ikna etme)*

Araştırmacı: Nasıl bir kural bekliyorsun?

A4: Ne bileyim işte. Aklıma gelen her şeyi çizebilir miyim ki. *Yani bittiğinde ispatın tamamını temsil etmesi gerekmez mi?(Resim boyutunda onaylamada bütün olarak karşılama)*

Araştırmacı: Evet. Ben zaten bunu istiyorum. İspata ait zihninde canlanan resimler nasıl? Bunu merak ediyorum.

A4: *y* de aldığı değerlerle ilgili. O zaman şöyle çizebiliriz. Bu da g o zaman. Şimdi bunları limitleri birbirine eşit ya şöyle bir şey olmalı. *Doğru mu bu o zaman? (Uzman bireyleri ikna etme)*

Araştırmacı: Bana doğrulatma gereği mi hissediyorsun?

A4:Yani ne bileyim kendi kafama göre çiziyorum ya. *Başkası ne anlar ki.*Ondan soruyorum. *(Uzman bireyleri ikna etmede anlaşılır olma)*

MÖA'nın görüşmelerden elde edilen dokümanları kelime bazında analiz edilerek yukarıdaki örnekte gösterildiği gibi kodlanmıştır. Daha sonrasında elde edilen bu kodlar uygun kategorilerde gösterilmiştir. Tablo1'de elde edilen kategori, alt kategori ve boyutlar gösterilmiştir.

Tablo 1

Matematiksel Teoremlerin İspatlarını Görselleştirme Sürecinde Onay Bekleme

Kategori	Onay Bekleme				
Kodlar	Uzman Bireyleri İkna Etme	Kendini İkna Etme			
	Anlaşılır olma	Matematiksel Değer Olarak Onaylama		Resim Boyutunda Onaylama	
		Matematiksel Terimlerin Varlığı	Açıklayıcı Olma	Kalıcı Olma	Bütün Olarak Karşılama

BÖLÜM IV

BULGULAR VE YORUM

Katılımcıların matematiksel teoremlerin ispatlarının görselleştirilmesi ile ilgili ne düşündüklerini, ispatlara yönelik düşüncelerini resimlere nasıl yansıttıklarını görebilmek ve resimlerine ait düşüncelerinin bileşenlerini inceleyebilmek için teoremlerin ispatlarına ait resimlerin görüntüleri kaydedilmiştir. Katılımcıların neyi nasıl düşünerek ispatları görselleştirdiklerini anlayabilmek adına ispatların resimlerini istedikleri sürede dikkatli bir şekilde oluşturmaları ve zihinlerindeki şekilleri olabildiğince detaylı kağıda aktarmaları istenmiştir. Veriler araştırmanın problem cümlesine ve alt problemlerine göre analiz edildiğinden problem cümlesini ve alt problemleri tekrar ifade etmekte fayda görülmektedir.

- Problem Cümlesi, "Matematik öğretmen adaylarının matematiksel teoremlerin ispatlarını görselleştirme durumları nasıldır?"
- Alt Problemler:
  (1) MÖA' nın matematiksel teoremlerin ispatlarına ait resimleri nasıldır?
  (2) MÖA' na verilen teoremlerde yer alan kavramların resimleri, teoremlere göre nasıl şekillenmektedir?
  (3) MÖA matematiksel teoremlerin ispatlarını görselleştirirken, resimlerin oluşum süreçleri nasıl gelişmektedir?

Araştırmanın amacı doğrultusunda problem cümlesine ve alt problemlere yanıtlar bulabilmek için katılımcılara çalışma kağıtlarında yer alan Tablo2'deki teoremler verilmiştir ve her bir teorem birer durum olarak ele alınmıştır.

Tablo 2

Görselleştirme Süreci İçerisinde Katılımcılara Verilen Teorem Durumları

I. DURUM
Teorem1: f, g, h fonksiyonları için bir c noktası komşuluğundaki x noktasında $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ eşitsizliği sağlansın. Eğer $\lim_{x\to c} f(x) = L = \lim_{x\to c} g(x)$ ise o zaman h fonksiyonunun c noktasında limiti vardır ve $\lim_{x\to c} h(x) = L$ dir.
II. DURUM
Teorem2*:* f ve g fonksiyonları bir $c \in R$ noktasında limite sahip ve $\lim_{x\to c} f(x) = L_1$, $\lim_{x\to c} g(x) = L_2$ olsun. O zaman $f + g$ fonksiyonunun da c noktasında limiti vardırve $\lim_{x\to c}(f + g)(x) = L_1 + L_2$dir.
III. DURUM
Teorem3:f: $A \to$ B ve g: $B \to$ C iki fonksiyon olsun. i. Eğer $f$ve g birebir ise o zaman gof de birebirdir. ii. Eğer $f$ve$g$ örten ise o zaman gofde örtendir.
Teorem4: İyi sıralı her küme tam sıralıdır.
Teorem5: A ve B sonlu iki küme$\|A\|=\|B\|$ ve f:A→B bir fonksiyon olsun. O zaman $f$nin birebir olması için gerek ve yeter şart $f$nin örten olmasıdır.

MÖA' na yukarıda yer alan beş teorem ayrı ayrı verilmiş ve teoremlerin ispatlarını görselleştirmeleri istenmiştir. Teoremlerin üçü soyut matematik, ikisi de analiz alanından danışman öğretim üyesi ile birlikte seçilmiştir.

Veri toplama süreci sonunda elde edilen veriler üzerinden kodlamalar yapılmıştır. Kodlamalar esnasında katılımcıların isimleri kullanılmamış bunun yerine görüşme sıraları göz gününe alınarak buna uygun olarak kısaltmalar yapılmıştır. Veri analizi sürecinde katılımcılara ait veriler için kullanılan kısaltmalara aşağıda yer verilmiştir.

- A1: Birinci Aday
- A2: İkinci Aday
- A3: Üçüncü Aday
- A4: Dördüncü Aday

Matematik Öğretmen Adaylarının Verilen Teoremlerin İspatlarına Ait Resimleri ve Bu Resimlere Ait Bulgular

MÖA'nın teoremlerin ispatlarını görselleştirme sürecinin veri analizlerinden elde edilen bulgular verilmeden önce her bir teorem durumunun her bir aday tarafından nasıl görselleştirildiği aşağıdaki başlıklar altında özetlenmiştir. Bu başlıklar altında ispat resimlerinin MÖA tarafından nasıl oluşturulduğu gösterilmeye çalışılmıştır.

I. Durum

MÖA' na Teorem 1 verilmiş ve adayların teoremin ispatını görselleştirme sürecindeki durumları incelenmiştir. Bu süreç içerisinde nasıl resimlerin oluştuğu gözlemlenmeye çalışılmıştır. Aşağıda Teorem 1'in ifadesinin bulunduğu çalışma kağıdı yer almaktadır.

Teorem 1

f, g, h fonksiyonları için bir c noktası yakınlarındaki x noktasında $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ eşitsizliği sağlansın. $\lim_{x\to c} f(x) =$ L= $\lim_{x\to c} g(x)$ ise, h fonksiyonunun c noktasında limiti vardır ve $\lim_{x\to c} f(x)$=L=$\lim_{x\to c}$ □(x)=$\lim_{x\to c} g(x)$ dir.

Yukarıda verilen teoremin ispatını görselleştiriniz.

Şekil 4. 1. Teorem 1'e ait çalışma kâğıdı

MÖA' na Teorem 1'in ispatına ait resimlerini çizmeleri için Şekil4.1'deki çalışma kağıdı ve Teorem 1'in görselleştirme sürecinde kullanma durumlarına yönelik aşağıdaki ispat katılımcılara verilmiştir.

İspat:

Önce $|h(x) - L|$ sayıları ile ilgilenelim. O zaman

$$|h(x) - L| = \big|\big(h(x) - f(x)\big) + (f(x) - L)\big| \leq |h(x) - f(x)| + |h(x) - L|$$

$$\leq |g(x) - f(X)| + |f(x) - L| \leq |g(x) - L| + 2|f(x) - L|$$

elde edilir. $\lim_{x\to c} g(x) = L = \lim_{x\to c} f(x)$ olduğundan verilen $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için

$$0 < |x - c| < \delta_1 \text{ ise } |g(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ve

$$0 < |x - c| < \delta_1 \text{ ise } |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{4}$$

olacak şekilde δ_1 ve δ_2 pozitif sayıları vardır. δ pozitif sayısını δ_1 ve δ_2 sayılarının her ikisinden daha küçük seçersek yukarıdaki her iki eşitsizlik sağlanacak ve böylece

$$0 < |x - c| < \delta \text{ ise } |h(x) - L| \leq |g(x) - L| + 2|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olacaktır. Kısacası verilen $\forall \varepsilon > 0$ için

$$0 < |x - c| < \delta \text{ ise } |h(x) - L| < \varepsilon$$

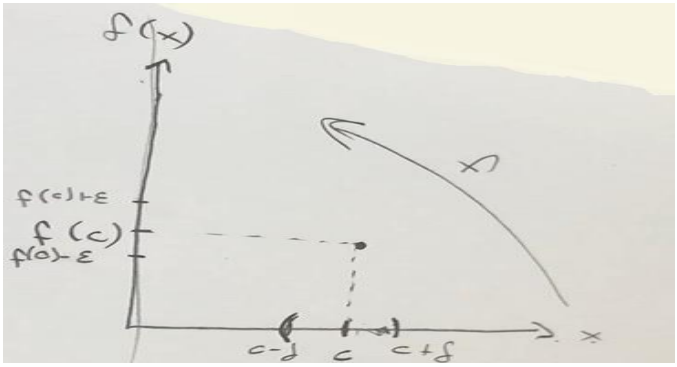
olacak şekilde εpozitif sayısına karşılık bir δ pozitif sayısı bulunabilmektedir. Sonuç olarak limitin tanımından $\lim_{x\to c} h(x) = L$ olur. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

*Şekil 4. 2.*Teorem 1'in ispatı

A1'in Teorem 1'in İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler

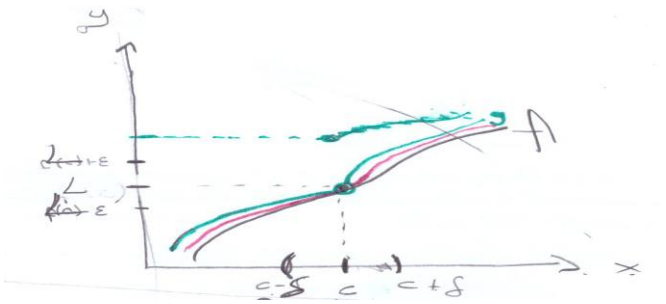
A1, teoremin ifadesini okuduktan sonra teoremin limit kavramına ait bir teorem olduğunu fark ettiğini söyleyerek ilk olarak koordinat ekseni çizmiştir. Limit kavramını dik kesişen iki doğru şeklinde resmetmiştir. Daha sonra ispata yönelik resmine devam ederken

fonksiyon kavramına ait resim yapmayı denemiş ancak *sadece bir değer olarak var. Fonksiyonu nasıl çizeceğim kural falan vermemiş, böyle zor oldu diyerek* fonksiyon resmi çizmekte zorlandığı ve bunun görselleştirme yapabilmesi için bir engel oluşturduğunu düşündüğü görülmüştür. İlk resmini bırakan A1, ispatı ilerletebilmek için f fonksiyonun görselini ayrı bir yerde çizmiştir.



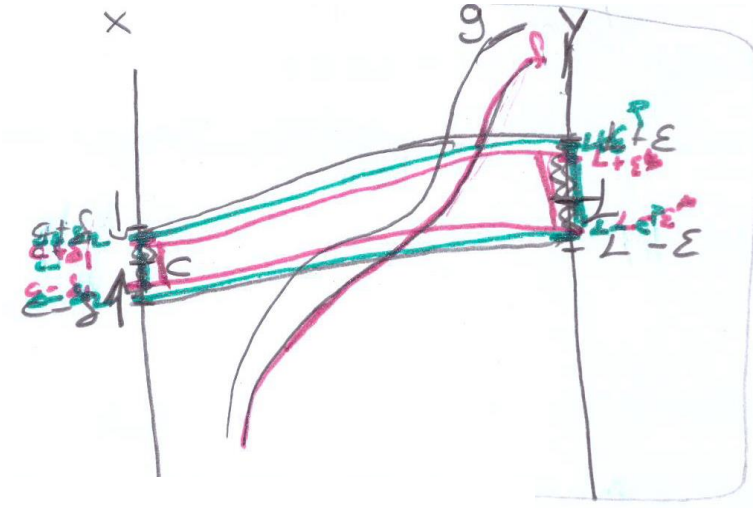
Şekil 4. 3. A1'in Teorem 1'in ispatına ait ilk çizimler

A1, bu resmini oluştururken düz dikey çizgi olarak gösterdiği x ve $f(x)$ in aslında fonksiyonun resmi olmadığını fark ederek ilk resmine geri dönmüş ve bu resmi üzerinde f ve g fonksiyonlarını eğri olarak görselleştirmiştir.Teoremin1'in ifadesinde yer alan yönergelere göre fonksiyonlarının özelliklerini de resmine aktarıyor ve sıralama özelliğini resminde üstte olma durumu olarak ele almıştır. Bu resmi yaparken bir noktada limitli olma durumunu da resminde göstermiştir. Daha sonra h fonksiyonunun da arada olma durumunu gösterebilmek için f ve g nin arasından geçen bir eğri çizmiştir. A1'in, bu resimleri çizdikten sonra *o zaman mecbur h de ikisinin arasında bulunmak zorunda olduğundan buradan geçmek zorunda kalacak* ifadesinden h fonksiyonunun limitli olma durumunu çizimine eklemeden gördüğü fark edilmiştir.



Şekil 4. 4. A1'in Teorem 1'in ispatına ait ilk resmi

A1, Teorem 1'in ispatın remini çeşitlendirmek istediği için ispata ait yeni resimler oluşturmaya başlamıştır. Bunun için ilk olarak teoremde yer alan fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini birer çizgi olarak gösterdiği resmine dönüş yapmıştır. Bu resminin üzerinde f ve g fonksiyonlarını birer eğri olarak göstermiştir. Fonksiyonların aralarında sıralı ve bir c noktasında limitlerinin aynı olması gerektiğini resim olarak gösteren A1, resminde çizgi olarak yer verdiği kümelerin arasında fonksiyonları görselleştirirken bu durumu da betimlemiştir. A1, h fonksiyonunu f ve g fonksiyonlarının arasında çizmesi gerektiğini ifade ederek iki fonksiyon arasında diğer fonksiyonlardan farklı renklerde bir fonksiyon çizmiştir. Oluşturduğu resme baktığında teoremin tüm gerekçelerini resmine eklediği zaman *yine ilk çizdiğimdeki sonuç oldu* diyerek h fonksiyonun da limitinin L olduğunun kendiliğinden görüldüğünü belirtmiştir.

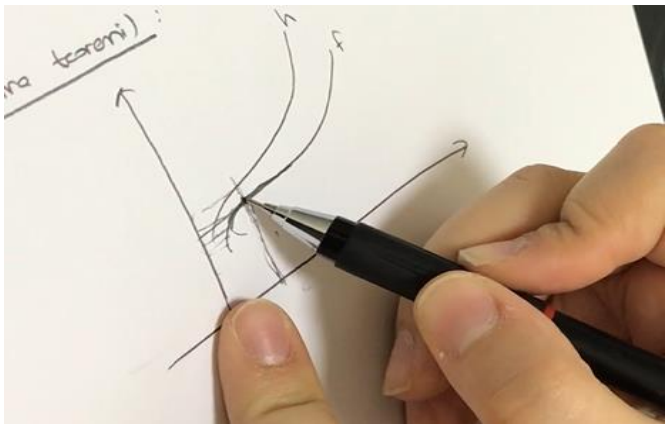


Şekil 4. 5. A1'in Teorem 1'in ispatına ait ikinci resmi

A2'in Teorem 1'in İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler

A2,Teorem 1' in ispatını görselleştirmeye başlamadan önce teoremin ifadesini okurken limit kavramına ait bir teorem olduğunu fark edince δ ve ε terimlerini hiç sevmediğini söyleyerek var olan ön yargılarını dile getirmiştir. Teoremin ispatına ait resimlerine limit kavramına ait zihnindeki resmi kâğıda aktararak başlamıştır. İlk olarak çizgiler kullanarak koordinat eksenine ait resmini oluşturmuş daha sonrasında ise f ve g fonksiyonlarını çizdiği koordinat ekseni üzerinde göstermek çalışmıştır. Ancak A2, *şimdi bunların limitleri eşit olacaksa bir noktadaki limitleri yani bu şekilde baktığımızda şu şekilde grafik çizsem*

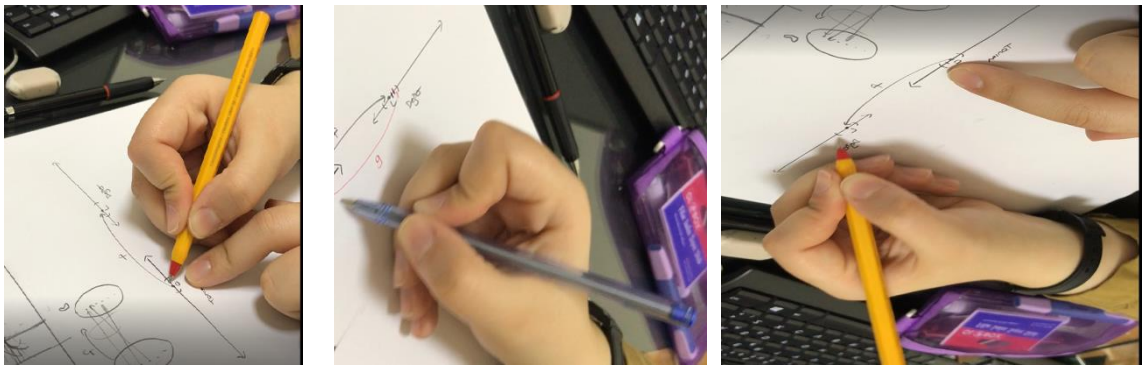
eşit olmaz. Komşuluklarına baksam ya büyük olacak ya küçük olacak ama g nin büyük eşit olmasını istiyorum bir yandan da. Bir şey de verilmemiş oluyor, söylemlerinden zihnindeki fonksiyona ait resmi, fonksiyonların cebirsel özelliklerini bilmediğinden genelleyemediğini ve bundan dolayı büyüklük ya da küçüklük olarak fonksiyonları görselleştirmekte zorlandığı görülmüştür. Bu nedenle ilk görselleştirme durumunu tamamlayamamıştır.



Şekil 4. 6. A2'in Teorem 1'in ispatına ait tamamlayamadığı resmi

A2, teoremin ifadesinde yer alan fonksiyon kavramının resmine ait zorluk yaşadığından dolayı yeni resimler yapmayı denemiştir. Fonksiyon kavramına ait yeni bir resim çizerken kavrama farklı bir açıdan bakmaya başlamış, bu sefer fonksiyonun cebirsel ifadesini bilme fikrinden uzaklaşıp tanım ve değer kümeleri üzerine odaklanmıştır. Bu durumu görselleştirirken A2'ye göre en klasik ama güvenilir resim olduğunu belirttiği Venn şeması resmine yönelmiştir. A2, *bu fonksiyon ifadesi çok genel benim çizdiğim fonksiyon özel oldu* diyerek tekrar resminde değişiklik yapmaya karar vermiştir. Daha kapsamlı bir fonksiyon resmi yapmaya karar veren A2, bu seferde sayı doğrusu resimleri çizmiştir.

İlk çizdiği sayı doğrusu üzerinde bir *c*noktası belirleyerek diğer sayı doğrusu üzerindeki L noktasına eğik oklar yardımı ile eşleme yapmıştır. Noktasal eşlemenin görselini aynı zamanda fonksiyonların görseli olarak da kullanmıştır. A2, bu şekilde zihninde iki farklı duruma ait aynı resmi kullanarak kendine göre kullanışlılık ve kolaylık elde ettiğini ifade etmiştir. Resimlerini tamamlarken bir yandan da elleriyle resmi üzerinde ilerlemeler, kontroller yapmıştır. Bu şekilde ispatların resimlerini hareketlerle desteklemiştir. Şekil 4.7'de bu durum gösterilmiştir.

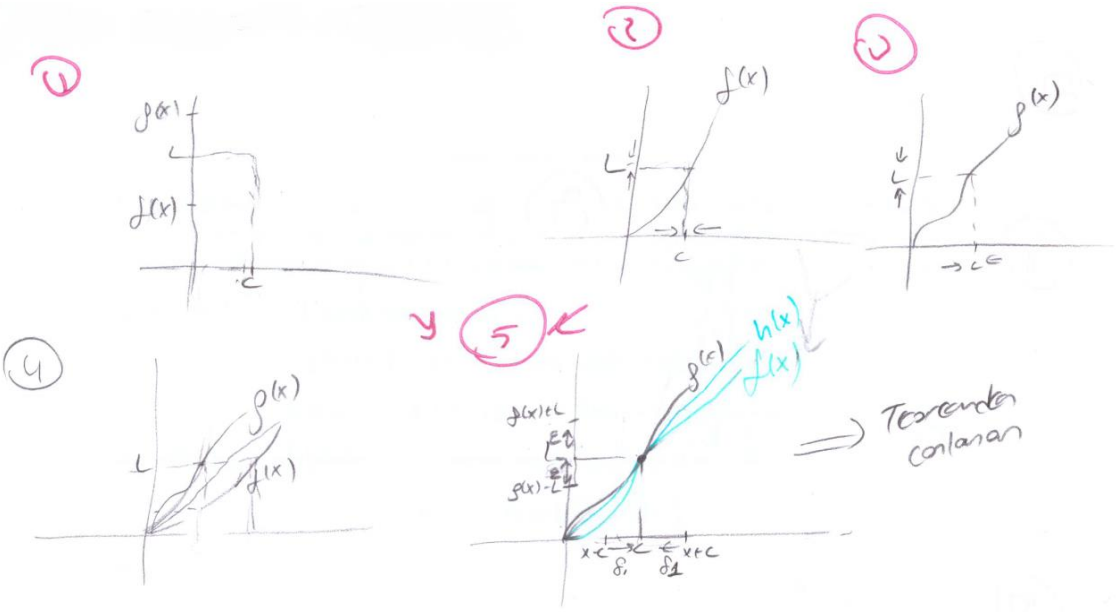


Şekil 4. 7. A2'in Teorem 1'in ispatına ait resminde hareketle kontrolleri

A3'ün Teorem 1'in İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler

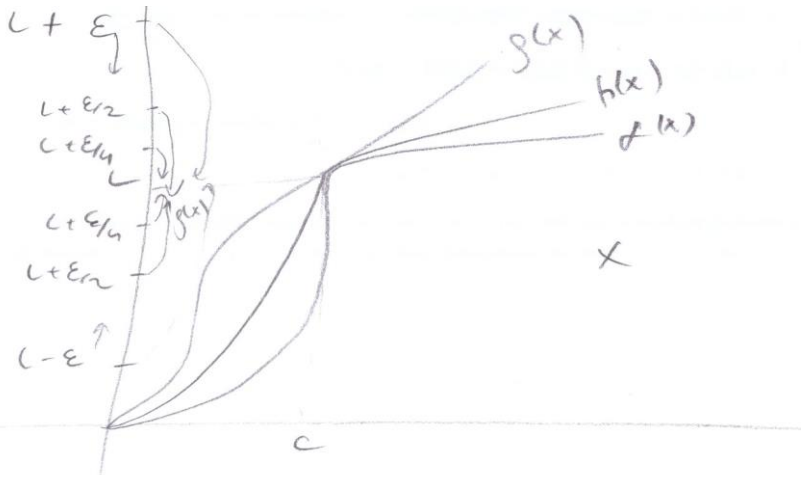
A3,Teorem 1'in ispatını görselleştirmeye başlarken bu teoreme ait üniversite birinci sınıfta çok fazla resim kullandığını *bunu çok kullandık analiz dersinde* diyerek dile getirmiştir. İlk olarak f fonksiyonunu görselleştirmeyle başlamıştır. Limit kavramına ait resimlerini oluşturabilmek için koordinat ekseni çizmiştir. A3, araştırmacının *neden duraksadın*, sorusuna *düşünüyorum. Düşündüğüm fonksiyonla olmuyor* diyerek fonksiyon kavramına ait zihnindeki resmin bir noktada limiti olan bir fonksiyonu karşılamadığını söyleyerek ilk resmi ile zihnindeki fonksiyon resmini birleştirmekte zorlandığını ifade etmiştir. A3, ispatı görselleştirme sürecini kolaylaştırmak adına bir strateji belirleyerek fonksiyonların c noktasında limitli olmalarının resimlerini ayrı resimler üzerinde gösterip sonrasında ortak bir resim üzerinde birleştirmeye karar vermiştir. Ayrı çizdiği resimlerini bir sonraki adımında birleştirerek tek bir resim üzerine odaklanmıştır.

A3, *h fonksiyonun L noktasındaki limitini bulmak için* f *ve* g *fonksiyonlarının arasında olan bir fonksiyonun çizmeliyim* ifadesini kullanmıştır. Bunu yaparken her bir fonksiyonu farklı renkte göstermek istediğini bunu *fonksiyonları ayırt edebilmek için* yaptığını belirtmiştir. *h fonksiyonunu* f *ve* g *nin arasından geçecek şekilde çizince* h *ninde c noktasındaki limiti L olmak zorunda* diyerek bu durumu görmüş olduğunu ifade etmiştir.



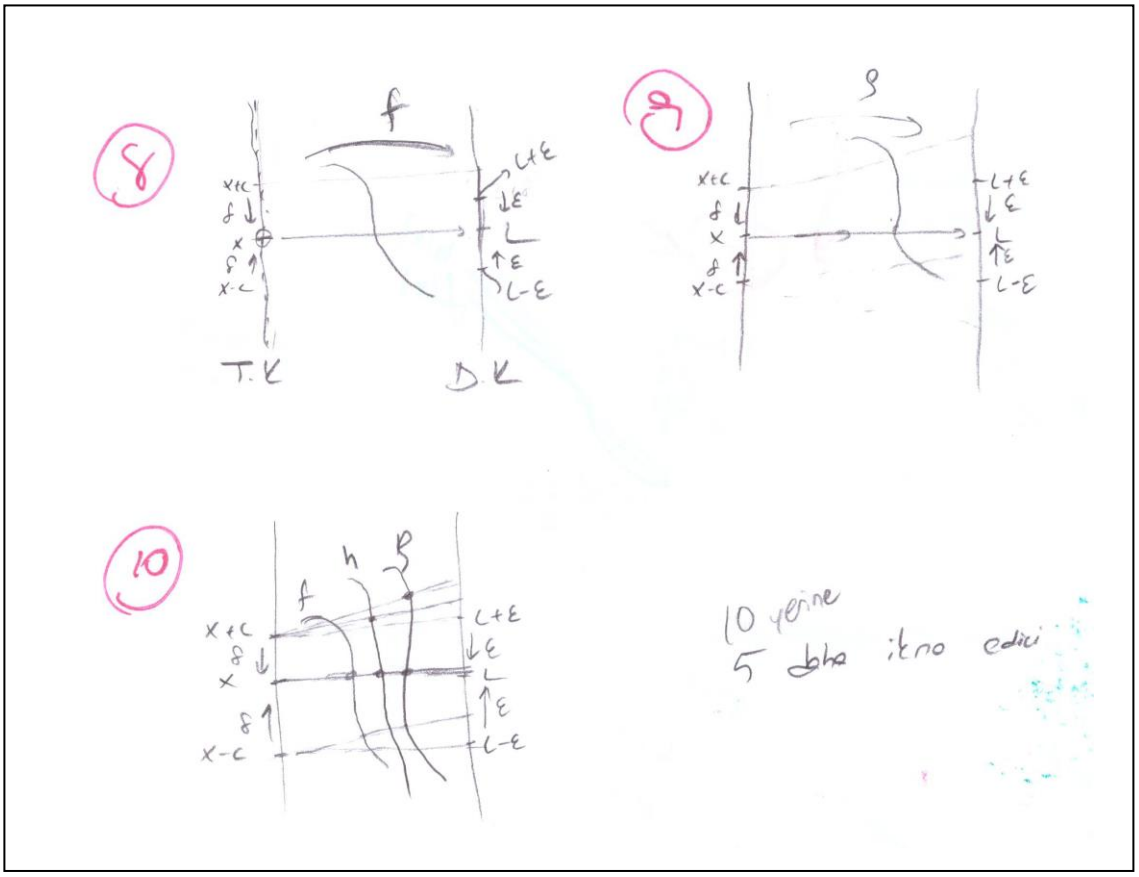
Şekil 4. 8. A3'in Teorem 1'in ispatına ilk resmi

A3, teoremin ispatına baktığında *benim çizdiklerim çok sade baştan başlayacağım çizmeye* diyerek yeni resimler yapmaya gerek duyduğunu ifade etmiştir. İspatta yer alan matematiksel terimlerin resimlerinde yer almamasından dolayı resimlerini değiştirme gereği duyan A3, teoremin ispatının adımlarını referans alarak aynı adımlarla yeni resmini oluşturmaya başlamıştır. A3, *şu ilk çizimde düşündüğümü direkt çizdim*, şimdi *ispata bakarak çiziyorum* diyerek görselleştirme sürecinde zihnindekileri en basit haliyle görselleştirdiğini, bu seferki görselleştirme durumunda ise teoremdeki ifadeleri ve ispatı tek tek kontrol ederek buna uygun olarak resimlerini oluşturduğunu ifade etmiştir.



Şekil 4. 9. A3'in Teorem 1'in ispatına ait ikinci resmi

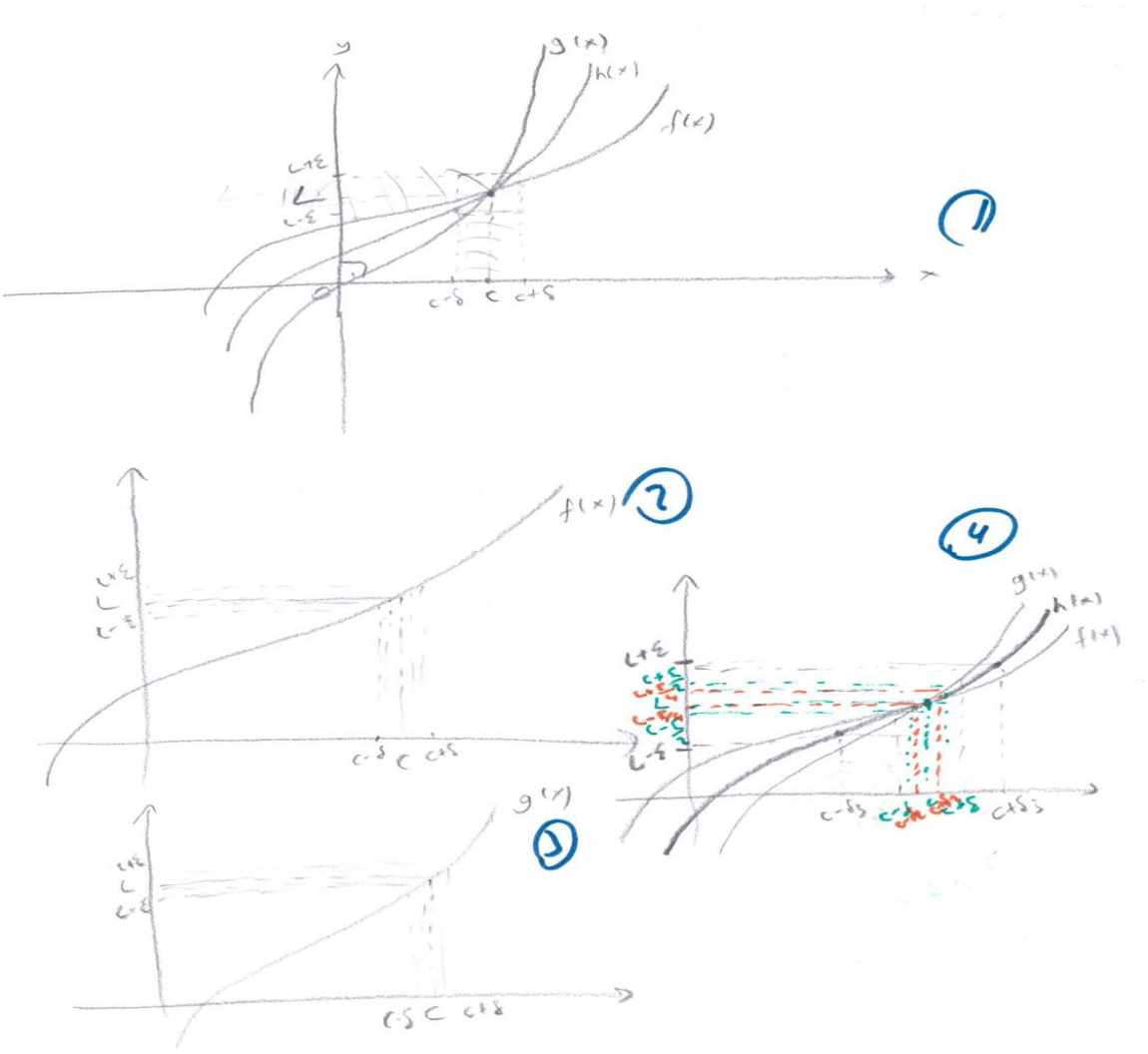
A3, Teorem 1'in ispatına ait yapmış olduğu iki farklı görselleştirme durumunu *bunlar standart hep, herkes böyle çizer zaten* diyerek resimlerinin çoğu kişinin ilk aklına gelebilecek resimler olduğunu belirtmiştir. Bu durumun nedeni olarak da görselleştirmeye fonksiyon ve limit kavramlarının bir arada olduğu teoremlerde koordinat ekseni çizerek başlanmasını göstermiştir. Bu sebeple yeni resminde fonksiyonların tanım ve değer kümelerini dikey konumda birbirine paralel bulunan iki düz çizgi olarak göstermiştir. Fonksiyonlarını ise bu çizgiler arasında yer alan eğriler şeklinde görselleştirmiştir. Bu tür resimlerde yaşadığı en büyük sorun ise bu durumda fonksiyonları nasıl sıralayacağına karar verememesi olmuştur. Bu kararsızlık durumu içerisinde resim üzerinde yeni resimler denerken kendini de zihninde ikna etmeye çalışmıştır. A3, üç fonksiyonu aynı resim üzerinde bir arada gösterdiğinde ikna olduğunu ifade etmiş ancak bir önceki resimlerinin kendine göre daha ikna edici ve geçerli olduğunu belirtmiş bu durumu da resmi üzerine beşinci adımı seçeceğini not olarak eklemiştir.



*Şekil 4. 10.*A3'in Teorem 1'in ispatına ait üçüncü resmi

A4'ün Teorem 1'in İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler

A4, Teorem 1'in ifadesini okuduğunda *ilk başta koordinat ekseni çizmeliyim* demiştir. Bunun nedenini ise *fonksiyon kavramını gördüğüm her yerde aklıma koordinat ekseni geliyor*diyerek belirtmiştir. Fonksiyona ait zihninde her zaman bir resim olduğu için çizmekte zorlanmadığını dile getiren A4,teoremin devamında istenenleri nasıl kağıda dökeceğinden emin olamamıştır. İlk olarak teoremde ispatlanmak istenen düşüncenin doğruluğunu sezgisel olarak hayal eden A4, başlangıçta kendine göre basit bir resim yapmış bu resim üzerinde düşüncelerinin ana hatlarını belirterek daha sonrasında aklındaki düşünceleri ayrıntılı olarak kağıda dökmeye çalışmıştır.



Şekil 4. 11.A4'in Teorem 1'in ispatına ait resimleri

İki fonksiyonun limitlerinin c noktasında aynı olma durumunu, c noktası yakınlarında iki fonksiyonu olabildiğince birbirine yaklaştırarak ve fonksiyonların farklı olmalarını da farklı renkte kalemlerle resim yaparak sağlatmıştır. Bu durumu *düşünürken de renkleri farklı görüyorum* diyerek resimleri renkler kullanarak hayal ettiğini belirtmiştir. h fonksiyonunu diğer iki fonksiyon arasında kalacak şekilde çizmeye çalıştığında elim *otomatik olarak f ve g nin birbirine çok yaklaştığı yerden geçecek yani h fonksiyonunun da c noktasındaki limit değerinin L olması gerekiyor o zaman* ifadesi ile teoremin doğrulunu göstermiş olduğunu söylemiştir.

II. Durum

MÖA'na Teorem 2 ifadesi verilmiş ve adayların teoremin ispatını görselleştirme sürecindeki durumları incelenmiştir. Bu süreç içerisinde nasıl resimlerin oluştuğu gözlemlenmeye çalışılmıştır. Aşağıda Şekil 4.12'de Teorem 2'in bulunduğu çalışma kağıdıve Şekil 4.13'te Teorem 2'ye ait ispat yer almaktadır.

Teorem 2: f ve g fonksiyonları bir $c \in R$ noktasında limite sahip ve $\lim_{x\to c} f(x)=L_1$, $\lim_{x\to c} g(x) = L_2$olsun. O zaman$f+g$ fonksiyonunun da c noktasında limiti vardır. Üstelik $\lim_{x\to c}(f+g)(x)=L_1+L_2$dir.

Yukarıda verilen teoremin ispatını görselleştiriniz.

*Şekil 4. 12.*Teorem 2'nin çalışma kağıdı

İspat:

f ve g fonksiyonları bir c $\in R$ noktasında limite sahip ve $\lim_{x\to c} f(x) = L_1$, $\lim_{x\to c} g(x) = L_2$ olsun. Eğer $0<|x-c|<\delta_1$ ise $|f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{2}$ ve eğer $0<|x-c|<\delta_2$ ise $|g(x)-L|<\frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde δ_1 ve δ_2 pozitif sayıları vardır. δ bu iki sayıdan küçük bir sayı olarak seçilirse (c- δ ,c+ δ) $\subseteq (c-\delta_1, c+\delta_1) \cap (c-\delta_2$,c+ δ_2) olduğundan (c-δ,c+δ) aralığındaki her x reel sayısı için yukarıdaki eşitsizliğin her ikisi de sağlanacaktır. Böylece üçgen eşitsizliği yardımıyla $|x-c|<\delta$ olduğundan

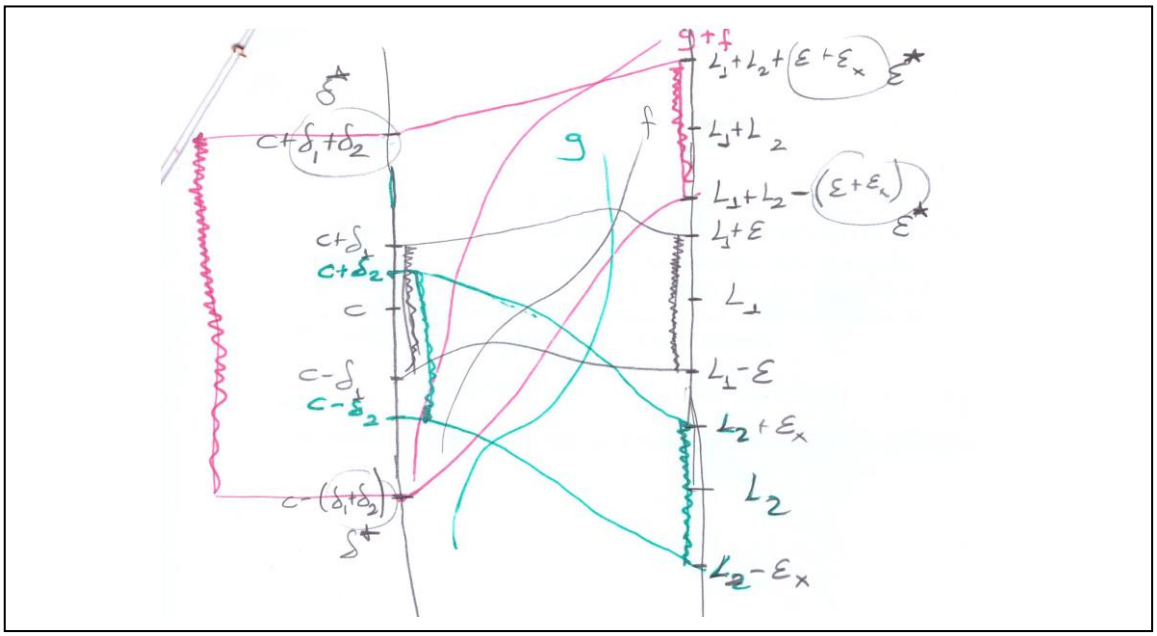
$$\left|\left(f(x)\pm g(x)\right)-(L_1+L_2)\right| \le |f(x)-L_1|+|g(x)-L_1+L_2|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}= \varepsilon$$

elde edilir ve buna göre $f+g$ fonksiyonunun da c noktasında limiti vardır ve bu limit değeri L_1+L_2dir.

*Şekil 4. 13.*Teorem 2'nin ispatı

A1'in Teorem 2'in İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler

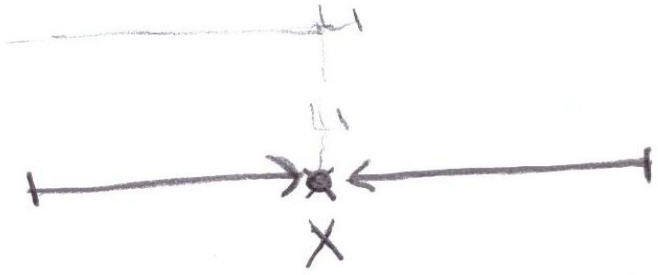
A1, Teorem 2'nin ispatını görselleştirmeye fonksiyon kavramını resimleştirerek başlamıştır. Bunun için ilk olarak fonksiyonun tanım ve değer kümelerinin resimlerini çizmiştir. Küme kavramını düz dikey çizgi olarak resimleştiren A1, kümelerin elemanlarını ise bu çizgiler üzerindeki yatay kısa çizgiler olarak f ve g fonksiyonlarını ise dikey çizgilerle sınırladığı birer eğri olarak görselleştirmiştir. Fonksiyonun c noktasında limitli olması durumunu ise bir c noktası belirleyerek c yi içine alan aralıkları taramıştır. A1, burada aralık fikrinin resmini bir bölgeyi tarama şeklinde çizmiş ve bunun *bir noktaya yaklaşma için* diyerek bu durumu karşıladığını belirtmiştir. A1, ispatın resminde cebirsel ifadelere de yer vermiştir. Toplam fonksiyonunun limitini belirlemek için resmi üzerinde eliyle hareket ederek buradan sonraki süreci zihninde ilerlettiği düşünme süreci olarak tamamlamıştır.



Şekil 4. 14. A1'in Teorem 2'nin ispatının resmi

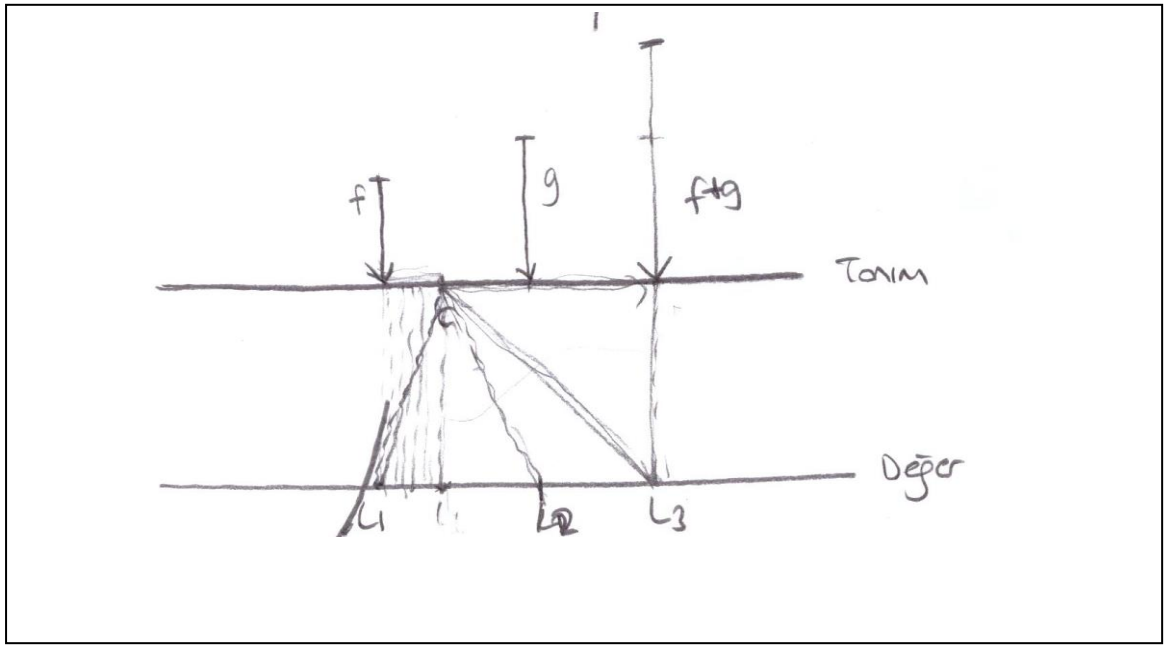
A2'in Teorem 2'in İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler

A2, Teorem 2'nin ispatını görselleştirirken ilk olarak teoremin içerisinde yer alan limit kavramına odaklanmıştır. Burada bir noktaya yaklaşma fikrini ele alarak bu düşüncesini görselleştirmiştir. Bunun için bir nokta ve ok işaretlerini kullanmıştır. Burada ok işaretlerinin noktaya doğru olması yaklaşma fikrini temsil etmektedir. Ok işaretlerinin başlangıç kısımlarındaki çizgiler, yaklaştığı noktaları sınırladığını yani x noktasına çok uzak noktalardan değil yakınlarındaki noktalar üzerinden yaklaştığını belli etmek için olduğu görülmüştür. Seçilen bir x noktasına yaklaşarak görselleştirme sürecine başlayan A2, daha sonrasında teoremde yer alan matematiksel terimleri de kullanarak resimleri üzerinde değişiklikler yapmıştır.



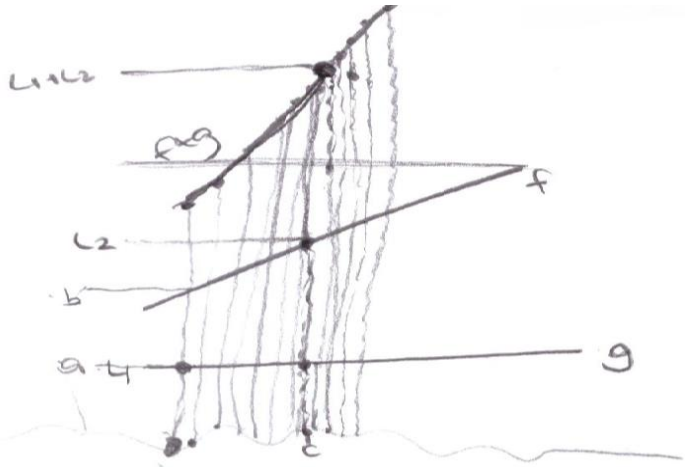
Şekil 4. 15. A2'in bir noktaya yaklaşma durumunun resmi

A2, daha sonra f ve g fonksiyonları için tanım ve değer kümelerini yatay düz çizgiler olarak görselleştirmiştir. Bir noktaya yaklaşma resmini çizdiği küme resmiyle birleştirerek bir c noktası belirlemiştir. Fonksiyonların c noktasındaki limitlerini de c noktasından çıkan kesik çizgiler yardımıyla göstermiştir. f, g ve $f + g$ fonksiyonlarını tanım kümesi üzerinde belirlediği oklar olarak çizmiştir. Fonksiyonların eleman sayıları arasındaki ilişki çizgilerin uzunlukları ile belirtmiştir. Burada sınırlı okların hem fonksiyon kavramının hem de yaklaşma fikrinin resmini temsil ettiği gözlemlenmektedir.



Şekil 4. 16. A2'in Teorem 2'nin ispatının ilk resmi

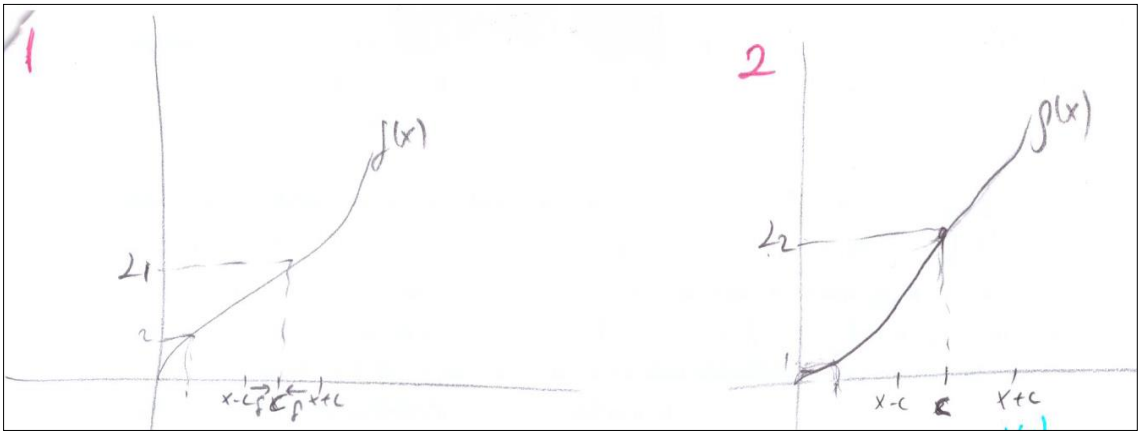
A2, fonksiyonlara ait çizdiği resimlerinin limitli olma durumunu göstermede faydalı olmadığını söyleyerek fonksiyon kavramına ait yeni resimler çizmeye karar vermiştir. Toplam fonksiyonunu diğer fonksiyonlar gibi hemen görselleştiremediği gözlenmiştir. Burada toplam fonksiyonunun tanımından yararlanarak önce fonksiyona ait noktaları belirlemiş, daha sonra bu noktaları birleştirerek fonksiyonu çizmiştir.



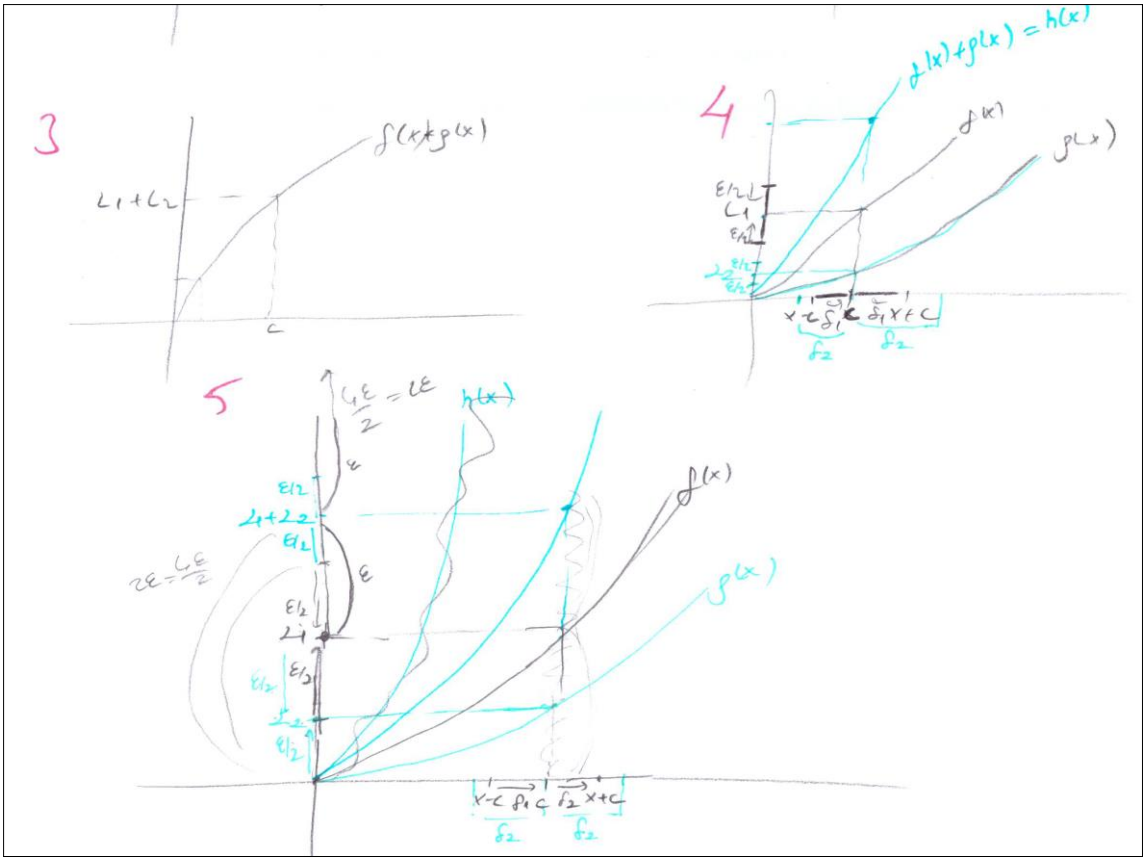
Şekil 4. 17. A2'in Teorem 2'nin ispatının ilk ikinci resmi

A3'ün Teorem 2'in İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler

A3, Teorem 3'ün ispatını görselleştirirken resmine f ve g fonksiyonlarının ve bu fonksiyonların c noktasında limitli olma durumlarının resimlerini çizmekle başlamıştır. İki fonksiyona ait ayrı resimler yapan A3, daha sonra toplam fonksiyonunun resmini oluşturmuştur. Bu üç ayrı resmi aynı resimde birleştirerek bu son çizdiği resim üzerinde toplam fonksiyonunun c noktasında limitli olma durumunu incelemiştir. Resmini sözel ifadelerle desteklemiş resminde matematiksel terimlere yer vermiştir. Limit kavramını içeren teoremlerde görselleştirme yaparken matematiksel terimlerin kullanımına ihtiyaç duyduğu çizmiş olduğu resimleri incelendiğinde görülmektedir.



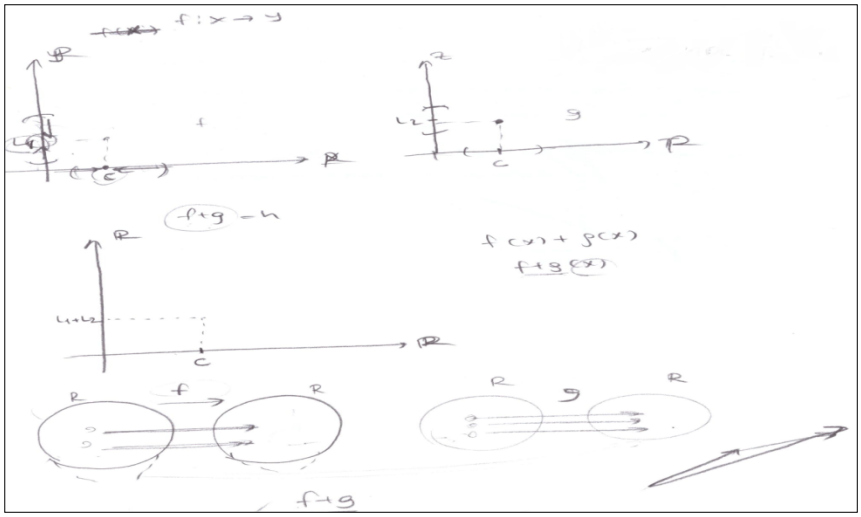
Şekil 4. 18. A3'ün Teoerem2'nin ispatına ait ilk iki resmi



Şekil 4. 19. A3'in Teorem 2'nin ispatının resmine ait ilk diğer adımları

A4'in Teorem 2'in İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler

A4, ilk olarak limit kavramına ait sezgisel resimler yapmıştır. Bu durumun sebebini *teoremin ifadesini okuduğumda teoremin limitle ilgili olduğunu bu nedenle limit kavramına ait nasıl resimler yapabileceğini kontrol etme gereği duydum* şeklinde açıklamıştır. Toplam fonksiyonunun resmini çizmekte zorlandığını bu nedenle ön resimler yaptığını ifade etmiştir. Toplam fonksiyonunu ilk olarak koordinat eksenleri yardımıyla göstermeye çalışmış, aklındaki düşünceyi karşılamadığını söyleyerek resminden vazgeçmiştir. Daha sonrasında daireler çizerek toplam fonksiyonunu göstermiştir. A4, toplam fonksiyonunun resmi konusunda kendini ikna edemediğini düşündüğünden teoremin ispatının resmini görselleştirmeyi burada bitirmiştir.



Şekil 4. 20. A4'in Teorem 2'nin ispatını görselleştirme sürecine ait çizimleri

III. Durum

MÖA'na Teorem 3 ifadesi verilmiş ve adayların teoremin ispatını görselleştirme sürecindeki durumları incelenmiştir. Bu süreç içerisinde nasıl resimlerin oluştuğu gözlemlenmeye çalışılmıştır. MÖA, Teorem 3'e ait ispatlarını diğer teoremlere göre daha ayrıntılı oluşturdukları için görüntülü kayıtlardan elde edilen katılımcıların resimleri, araştırmacı tarafından öz hallerini bozmadan birebir yeniden çizilmiştir. Aşağıda Şekil 4.21'de Teorem 3'in bulunduğu çalışma kağıdı ve Şekil 4.22'de Teorem 3'e ait ispat yer almaktadır.

Teorem 3: $f: A \to B$ ve $g: B \to C$ iki fonksiyon olsun.

i. Eğer f ve g birebir ise o zaman gof birebirdir.
ii. Eğer f ve g örten ise o zaman gof örtendir.

Yukarıda verilen teoremin ispatını görselleştiriniz.

*Şekil 4. 21.*Teorem 3'ün ispatının çalışma kağıdı

İspat:

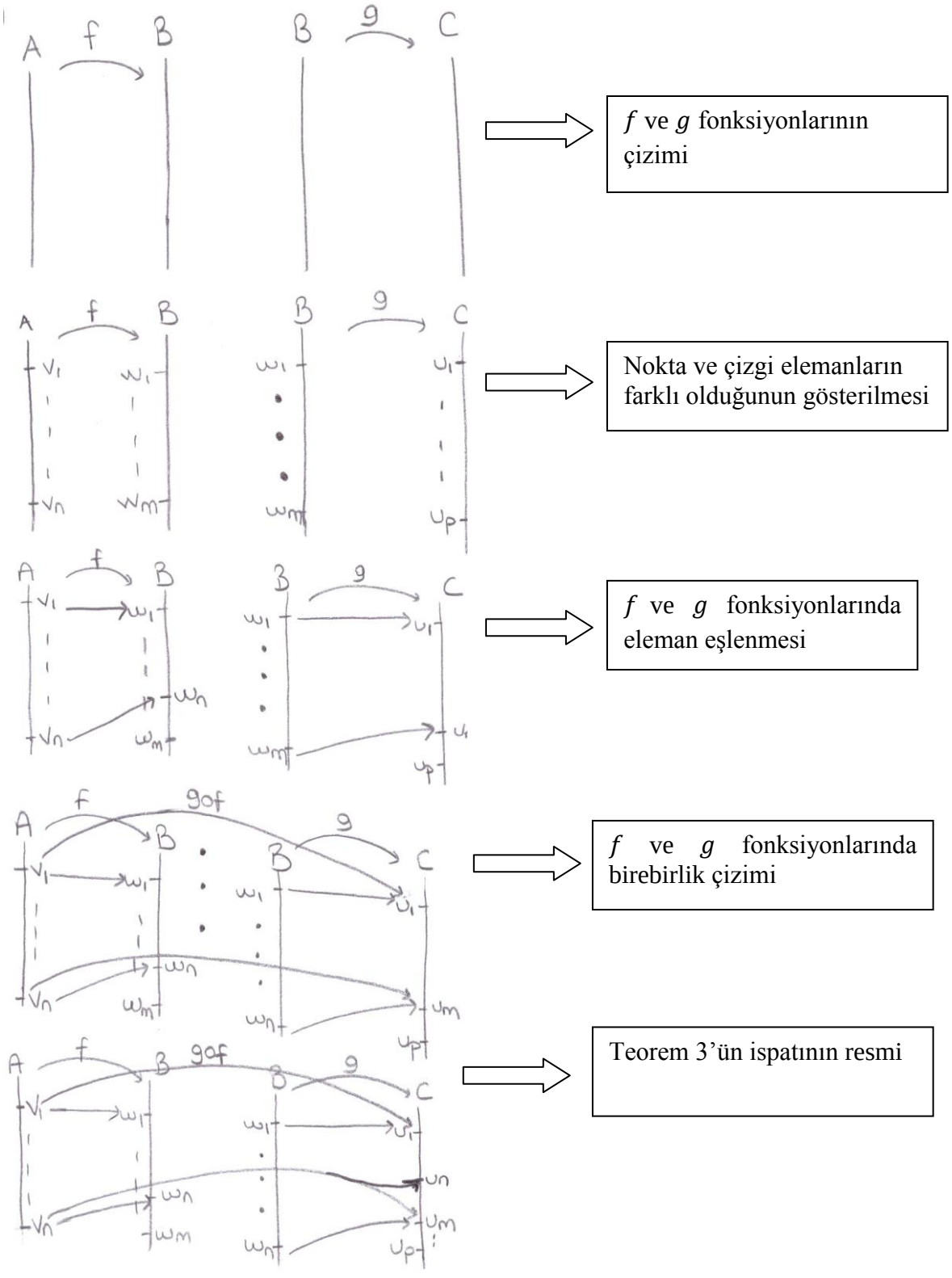
i) Kabul edelim ki f: : A→ B ve g: B→C foksiyonları birebir olsun.Eğer $\alpha_1 a_2 \in A$ için $(gof)(\alpha_1) = (gof)(\ a_2\ )$ ise o zaman g(f(α_1)) $= g\big(f(a_2)\big) veg$ birebir olduğundan f(α_1) = $f(a_2)$ dir. f fonksiyonu da birebir olduğundan $\alpha_1 = a_2$ dir.Bu sebeple gof birebirdir.

ii) f: A → B ve g: B → C foksiyonları örten fonksiyonlar, c ∈ C olsun.g örten olduğundan c=g(b) olacak şekilde bir b∈ B vardır.Diğer taraftan f örten olduğundan b ∈ B için b=f(a) olacak şekilde bir a ∈ A vardır.Böylece c ∈ C için (gof)(a)=g(f(a))=g(b)=c olacak şekilde a∈ A vardır.Dolayısıyla gof örtendir.

*Şekil 4. 22.*Teorem 3'ün ispatı

A1'in Teorem 3'in İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler

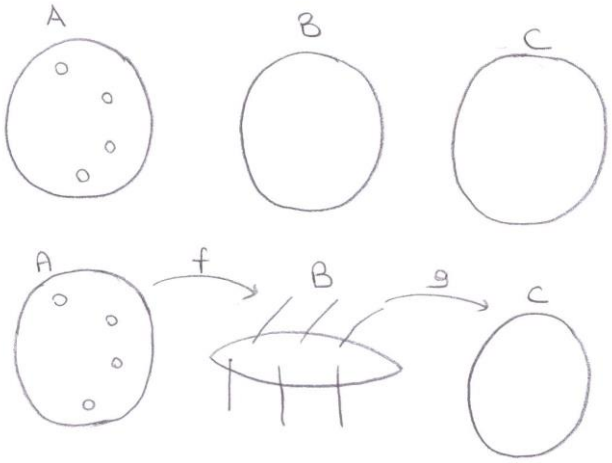
A1, başlangıç olarak kümeyi ele almış ve küme kavramına ait resmini düz çizgi olarak gösterirken *kalıptan çıktım* diyerek resminin diğer resimlerden farklı olduğunu belirtmiştir. Görselleştirmesine devam ederken *kabataslak şöyle bir göstereyim* söylemiyle resimleri üzerinde düzeltmeler yapacağını ifade etmiştir. Belirlediği bazı elemanları cebirsel ifadelerden yararlanarak birbiriyle eşlemiş ve fonksiyonların birebirliğini göstermiştir. f ve g fonksiyonlarındaki elemanlarını eşlemek için kullandığı resim fikrini zihninde şekli tamamladığını ifade ederek bileşke fonksiyonun elemanlarının da aynı şekilde eşlendiğini ve birebir olduğunu göstermiştir. *Bu şekilde noktaları ilerleterek birleştirdiğimizde* diyerek resmine hareketlilik boyutu katmıştır. İspatın resmini oluştururken önce noktasal yaklaşmış kendini ispatın doğruluğuna ikna ettikten sonra teoremi genele yordamaya çalışmıştır. A1'in ispatının resminin oluşun süreci adım adım Şekil 4.23'te gösterilmiştir.



Şekil 4. 23. A1'in Teorem 3'ün (i) ispatının resmini oluşturma adımları

Teoremin ikinci aşaması olan örtenlik üzerine yapılan ispatta A1 yine küme kavramı üzerinden görselleştirmeye başlamış bu seferde kümeyi daire şeklinde göstermiştir.

A kümesinin elemanlarını delikler, B kümesinin elemanlarını çubuklar olarak çizmiştir. Buradaki resimlerini oluştururken günlük yaşamdaki deneyimlerinden faydalanmıştır. Daha sonrasında ise resimlerinin altında yatan düşüncenin fonksiyon kavramının tanımıyla çeliştiğini fark ederek bu resimlerle ispata devam etmeyi bırakmıştır.

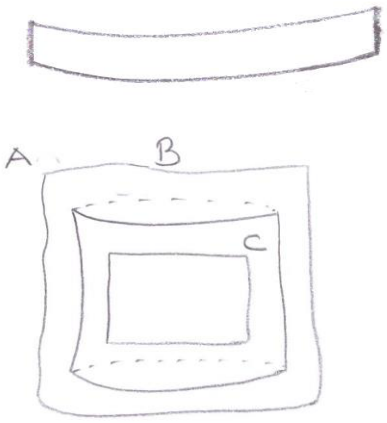


A, B, C kümelerinin resimlerini, delikler elemanları gösteriyor.

- B kümesinin resmi değişiyor.
- B kümesinin elemanlarını çubuklar ile gösteriyor.
- Delikler çubuklar ile eşleşiyor.

Şekil 4. 24. A1'in Teorem 3'ün (ii) ispatına ait ilk çizimleri

Bu fikirden uzaklaşan A1 günlük hayat karşılığından vazgeçmeyip örtme fikrine dayanan bir resim çizmiştir. Yine de kendini ikna edemeyip bu resimden de vazgeçmiştir. Bazı durumlarda zihnindeki düşüncelerin kağıda aktarınca matematiksel olarak onu tatmin etmediğini ifade etmiştir.

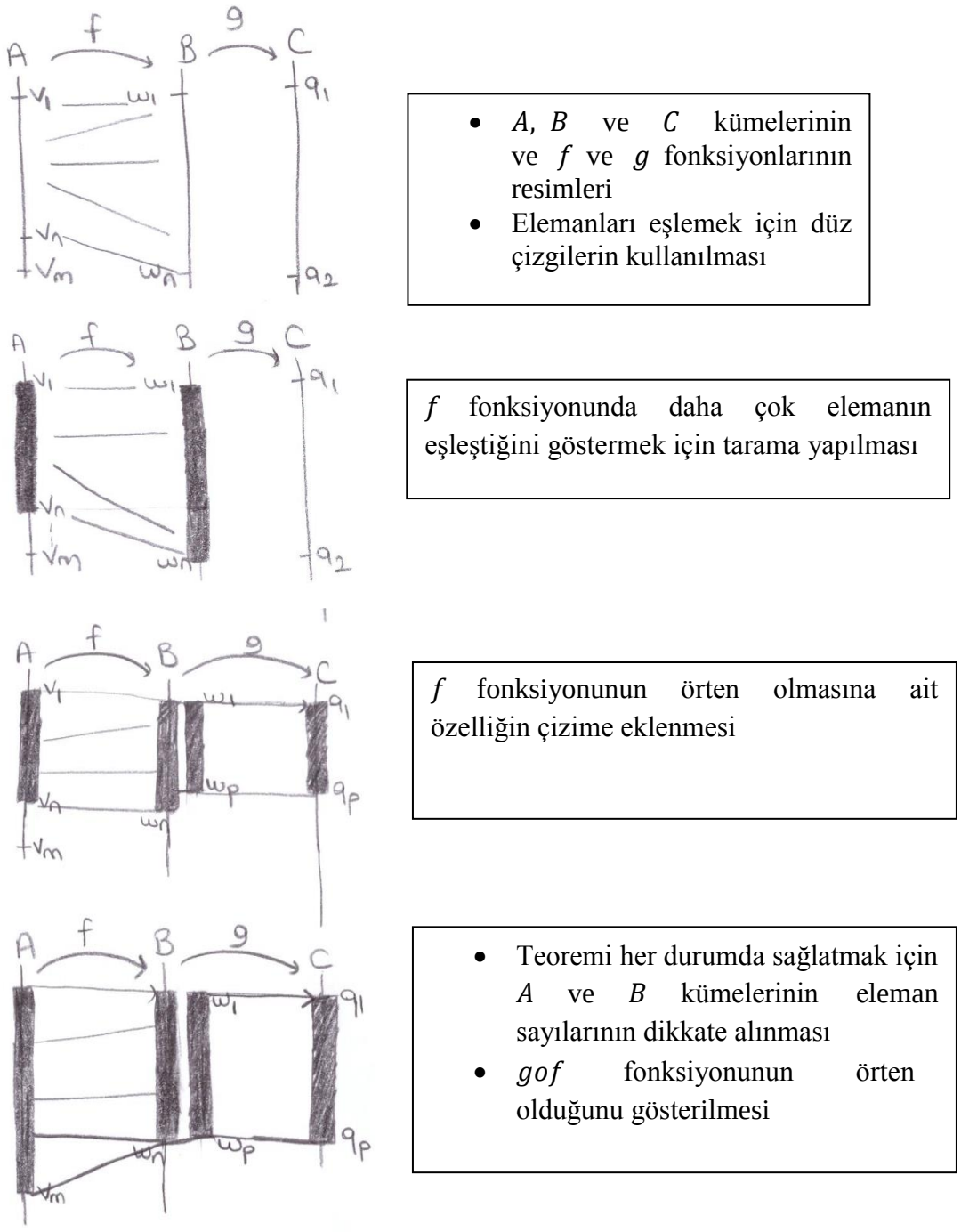


Örtenliğin günlük hayattan çağrışımı olan bir çizim

Bir fonksiyonun örten olma durumunu sorgularken çizimleri değişen A, B ve C kümeleri

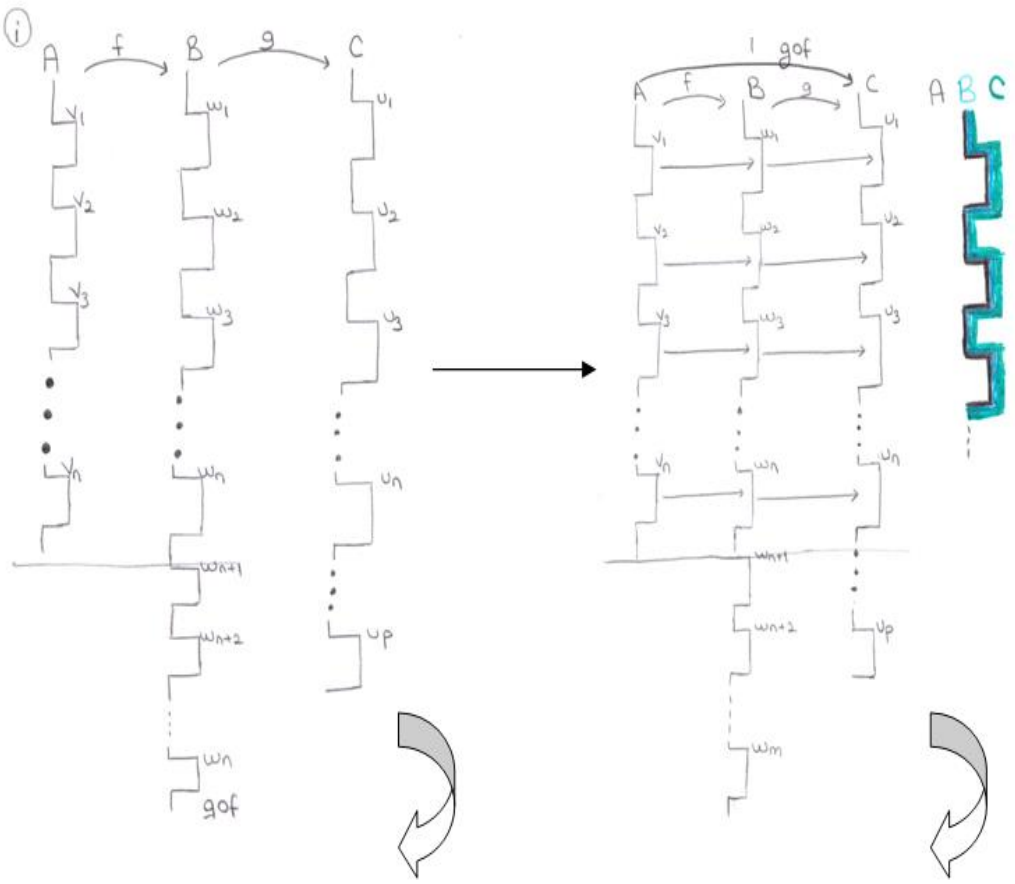
Şekil 4. 25. A1'in Teorem 3'ün (ii) ispatına ait ilk resimleri

İspata dair görselleştirmeler konusunda kendini ikna edemeyen A1 teoremin ilk kısmındaki resim fikrine geri dönmüştür. Kümeleri düz çizgiler olarak gösteren A1 oklar ile elemanlara yön vererek resmine hareketlilik boyutu katmıştır. A1, örtenlik fikri için *tüm elemanları taramam gerekiyor* söylemi ile kümeleri üzerinde taramalar yapmıştır.



Şekil 4. 26. A1'in Teorem 3'ün (ii) ispatının resmini oluşturma adımları

A1 teoremin ispatını görselleştirirken ilk adım olarak küme kavramını resimleştirerek başlamıştır. İlk süreçte küme kavramını düz çizgi olarak göstermiş kavrama ait zihnindeki en iyi resmin lego resmi olduğunu söyleyerek ispatı baştan görselleştirmeye başlamıştır. Eleman sayıları sonlu olan kümelerde eleman sayılarını kıyaslamak için resimlerin birini daha uzun ya da daha kısa olarak çizmiştir. Elemanları oklarla birbirinden ayrı yerlere eşleyerek birebir olma durumunu görselleştirmiştir. Teoremde istenen bu koşullarda bileşke fonksiyonun da birebir olduğunu gösterme kısmını ise resminde aşikar olduğunu belirterek görselleştirme sürecini bitirmiştir.



- A, B ve C kümelerinin resmi
- f ve g fonksiyonlarının resmi

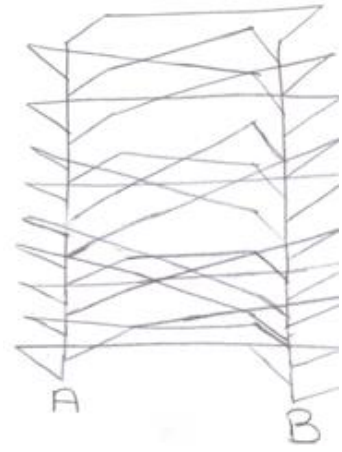
- gof fonksiyonunun birebir olma durumu
- "gof dişlisi"

Şekil 4. 27. A1'in Teorem 3'ün (i) ispatının ikinci resmini

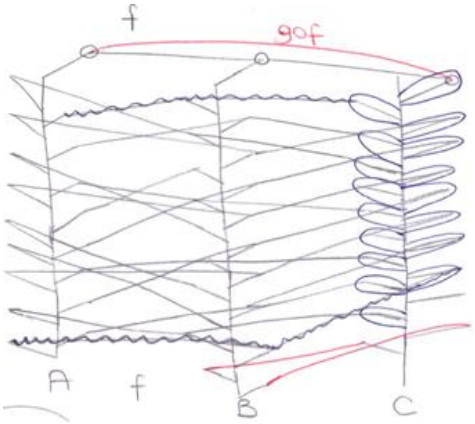
A2'in Teorem 3'in İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler

A2, Teorem 3'ün ispatına başladığında ilk olarak f fonksiyonunun tanım ve değer kümesini görselleştirmiştir. Bunun için kümelerin resimlerini kendi tanımıyla balık kılçıkları olarak çizmiştir. Ana iskelet kümelerin resmi, iskelete bağlı kılçıklar da elemanların resmidir. Kümeler arasında elemanları eşlemek için de düz çizgiler kullanmıştır. A2, B kümesinin eleman sayısının A kümesinin eleman sayısından daha fazla olabileceğini düşünerek B kümesinin resminde daha fazla çizgi kullanmıştır.

A2, f fonksiyonunun birebir olduğunu gösterdikten sonra resmine g fonksiyonunu eklemiş ve aynı şekilde çizgilerden oluşan bir resim yapmıştır. gof fonksiyonunu belirlemek için f ve g fonksiyonlarında eşlediği elemanların çizgilerini birleştirmiştir. Bunu elindeki kalemi hareket ettirerek çizgiler üzerinde ilerletmiştir. Bu şekilde çalışarakresmine hareket boyutu katmıştır.



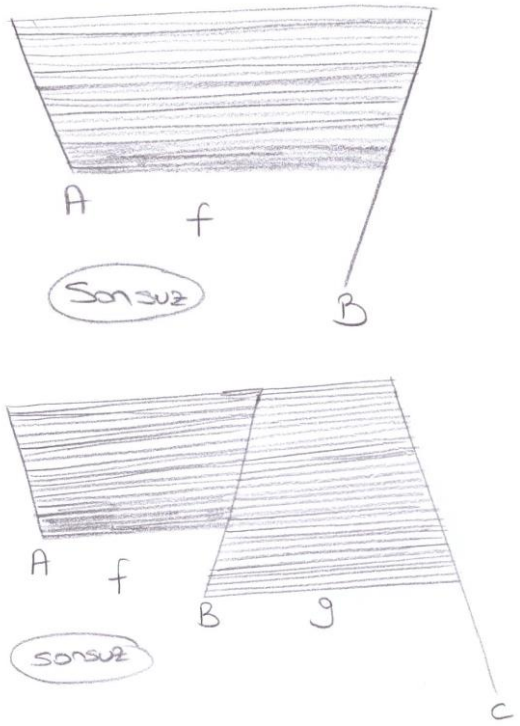
- A ve B kümelerinin resmi
- f fonksiyonunun resmi
- Eleman sayıları arasındaki farkı göstermek adına B kümesi daha uzun ve daha çok çizgi kullanılarak görselleştirilmesi



- A, B ve C kümelerinin sonlu elemanlı olma durumu
- gof fonksiyonunun birebir olmasının görseli

Şekil 4. 28. A2'in Teorem 3'ün (i) ispatının ilk resimleri

A2, Teorem 3'e ait görselleştirme durumunu sonlu kümeler üzerinde gösterdiğini ancak sonsuz kümeler üzerinde bu şekilde görselleştirmenin uygun olmadığını *şimdi sonlu kümlerde bu çizdiğim oldu ama sonsuz kümlerde bu şekilde karşılamayacak* diyerek belirtmiştir. Bu nedenle fonksiyonların tanım kümelerinin sonsuz elemanlı olması durumu için yeni bir görselleştirme durumuna başlamıştır.

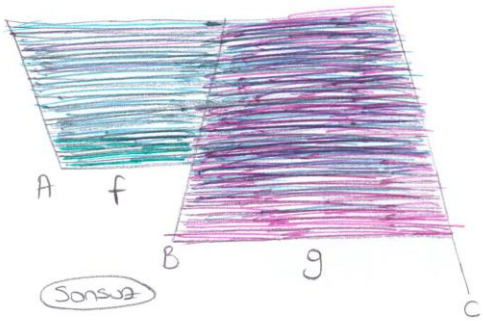


- Sonsuz elemanlı A ve B kümelerinin görseli
- f fonksiyonunun birebir olma durumunun görseli

- gof fonksiyonunun birebir olmasının görseli

Şekil 4. 29. A2'in Teorem 3'ün (i) sonsuz kümelerde ispatı için ilk resim denemesi

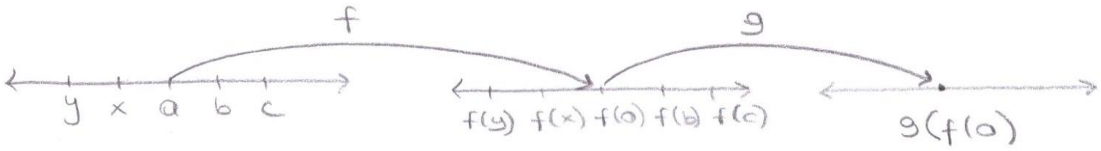
A2, araştırmacının, *küme resimlerindeki çizgilerin uzunluklarının farklı olmasının bir sebebi var mı* sorusuna *A, B ve C kümelerinin eleman sayılarını çizgilerin uzunluklarıyla karşılaştırdım* şeklinde cevap vermiştir. A2 tarama yaparak gösterdiği Teorem 3'ün ispatında, sonsuzluk fikrini tam yansıtamadığını söyleyerek resmi üzerinde düşünmeye başlamıştır. Bu düşünme sonucunda resimleri üzerinde değişiklik yaparak resimlerine sonsuzluk kavramına yönelik renk boyutu katmıştır. Renk geçişleri oluşturmasının amacını *her ana rengin sonsuz tonu elde edilebilir bu sayede her rengi bir eşlemeyle kodlayarak sonsuz elemanı taramış olurum* şeklinde belirtmiştir.



gof fonksiyonunun sonsuz elemanlı kümeler üzerinde tanımlıyken birebir olduğunu gösteren görselin son hali

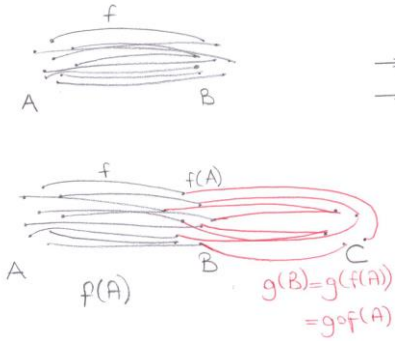
Şekil 4. 30. A2'in Teorem 3'ün (i) sonsuz kümelerde ispatının resminin son hali

A2, Teorem 3'nin ispatına ait farklı resimler de oluşturmuştur. Yeni resimlerini oluştururken ilk olarak teoremin ifadesinde yer alan fonksiyon kavramına odaklanmıştır. Burada fonksiyonları sayı doğruları üzerinde gösterdiği kümeler arasında tanımlamıştır. A2, *diğerlerinde daha çok uğraştım ama bu daha çok terim içeriyor bunda emin oldum* diyerek son resmini daha matematiksel bulduğunu belirtmiştir.



Şekil 4. 31. A2'in Teorem 3'ün (i) ispatına ait ek resmi (i)

Sayı doğrusu üzerinde gösterdiği kümeler üzerinde birebir olmayı göstermenin zor ve karışık olacağını bunun yanı kümenin elemanlarının sıralı olma zorunluluğu olmadığını düşünen A2 ilk oluşturduğu resmi üzerinde değişiklik yaparak kümelerin resmini sayı doğrusu şeklinden dağınık duran noktalar şeklinde değiştirmiştir. Böylece kümenin elemanlarının sıralı olma durumu ortadan kalkmıştır. Daha sonrasında A ve B kümelerinin elemanlarını çizgilerle kuralsız olarak birbiri ile eşlemiştir.

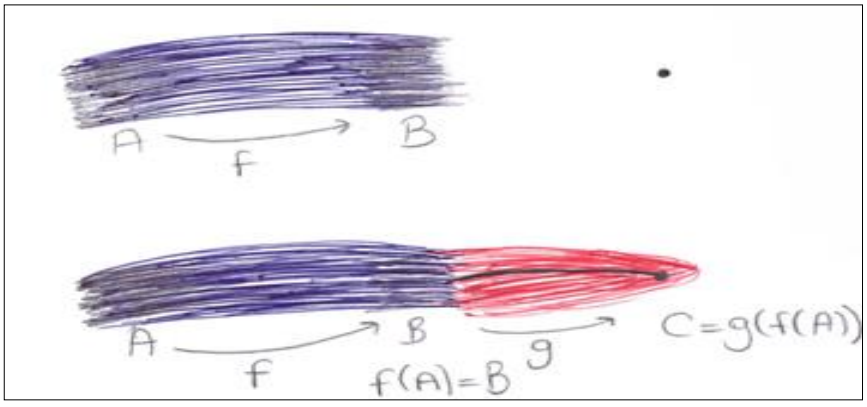


- A , B kümelerinin ve f fonksiyonunun resimleri
- f fonksiyonunun örten olması
- g ve gof fonksiyonunun görseli
- gof nin örtenliğinin görseli

Şekil 4. 32. A2'in Teorem 3'ün (i) ispatına ait ek resmi (ii)

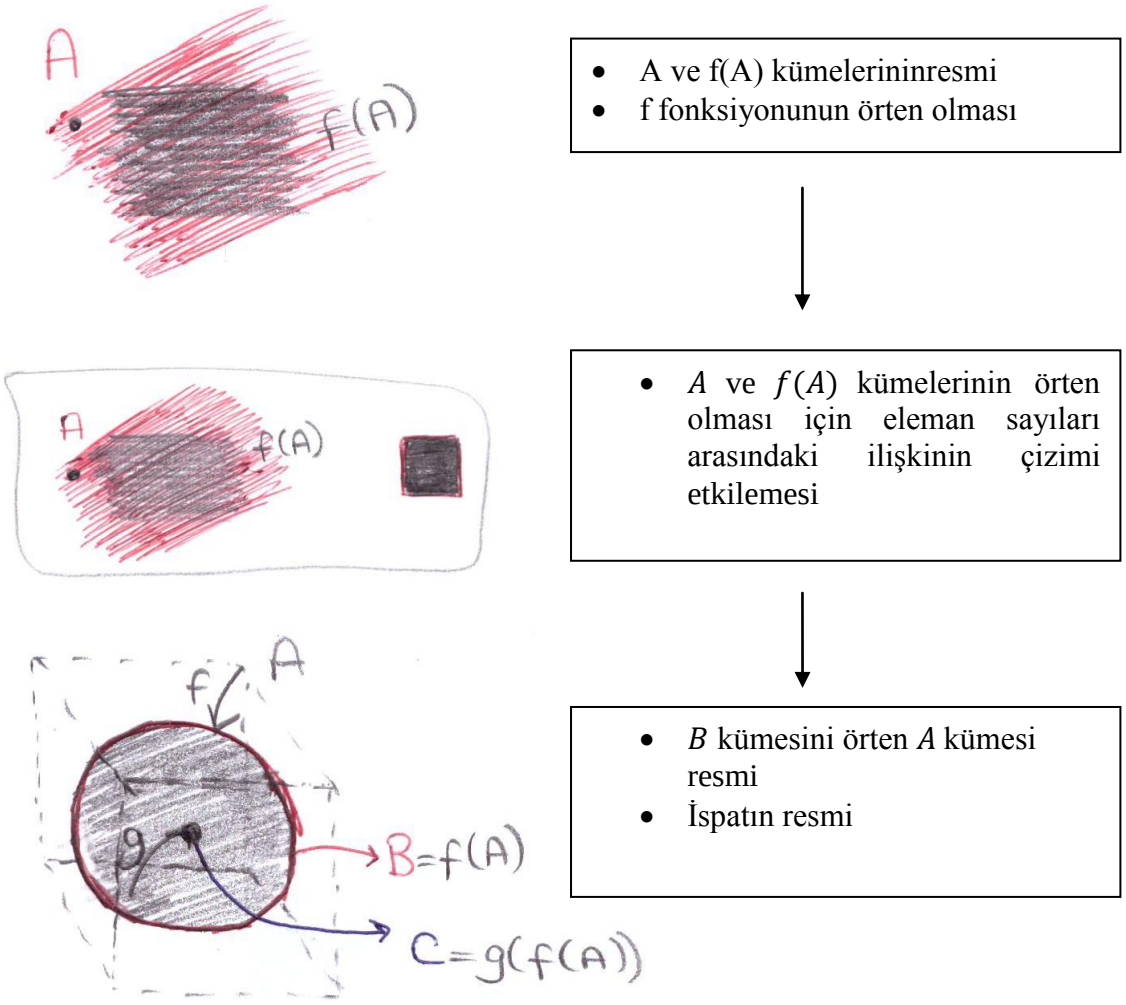
A2, Şekil 4.31'deyer alan resminde *sonlu sayıda eleman için yaptım ama bu sonsuz elemanlı kümlerde düşündüğüm şeyi karşılamıyor* demiştir. Bu nedenle resmini üzerinde değişiklikler yapmıştır. Noktaların daha çok olması için tarama fikrini kullanan A2 ilk olarak bir daire içini taramıştır. Daha sonra bu resim ona çok düzenli geldiği için yine elemanları sıralamış olma durumundan kurtulmak adına taramayı rastgele olacak şekilde yeniden gerçekleştirmiştir.

A2, tarama yaparak oluşturduğu kümelerin elemanları arasında eşleme yapmak için bir önceki resmindeki fikrinden yararlanmıştır. Sonsuz elemanın varlığını göstermek adına çizgilerini sıklaştırarak çizmiştir. Bir süre sonra burada da tarama yapmaya başladı. Bileşke fonksiyonu tanımlayabilmek adına oluşturduğu C kümesini tek elemanlı bir küme olarak göstermek için tek bir nokta çizmiştir. g fonksiyonunun da örtenliğini göstermek için B kümesinden C kümesine tarama yapmıştır. Taramasını farklı bir renkle yapma sebebini merak eden araştırmacıya, bu durumu gof *fonksiyonunun da örten olduğunu daha kolay görmek için yaptım* diyerek açıklamıştır.



*Şekil 4. 33.*A2'in Teorem 3'ün (ii) ispatının sonsuz elemanlı kümelerdeki ilk resmi

A2, daha sonrasında taradığı kümeleri üst üste gelecek şekilde görselleştirmiştir. Böylece resminin daha basit anlaşılacağını söylemiştir. Bu düşüncesini kümeleri iç içe girmiş bir küre ve küp olarak göstererek resimlerini 3-boyutlu çizerek bunun 3. boyutun *sonsuz elemanlı kümeleri göstermede daha kullanışlı* olduğunu belirterek boyut fikrinin sonsuzluk ile ilişkili olduğunu ifade etmiştir.A2'in ispata ait bu resim süreci Şekil 4.34'te gösterilmektedir.



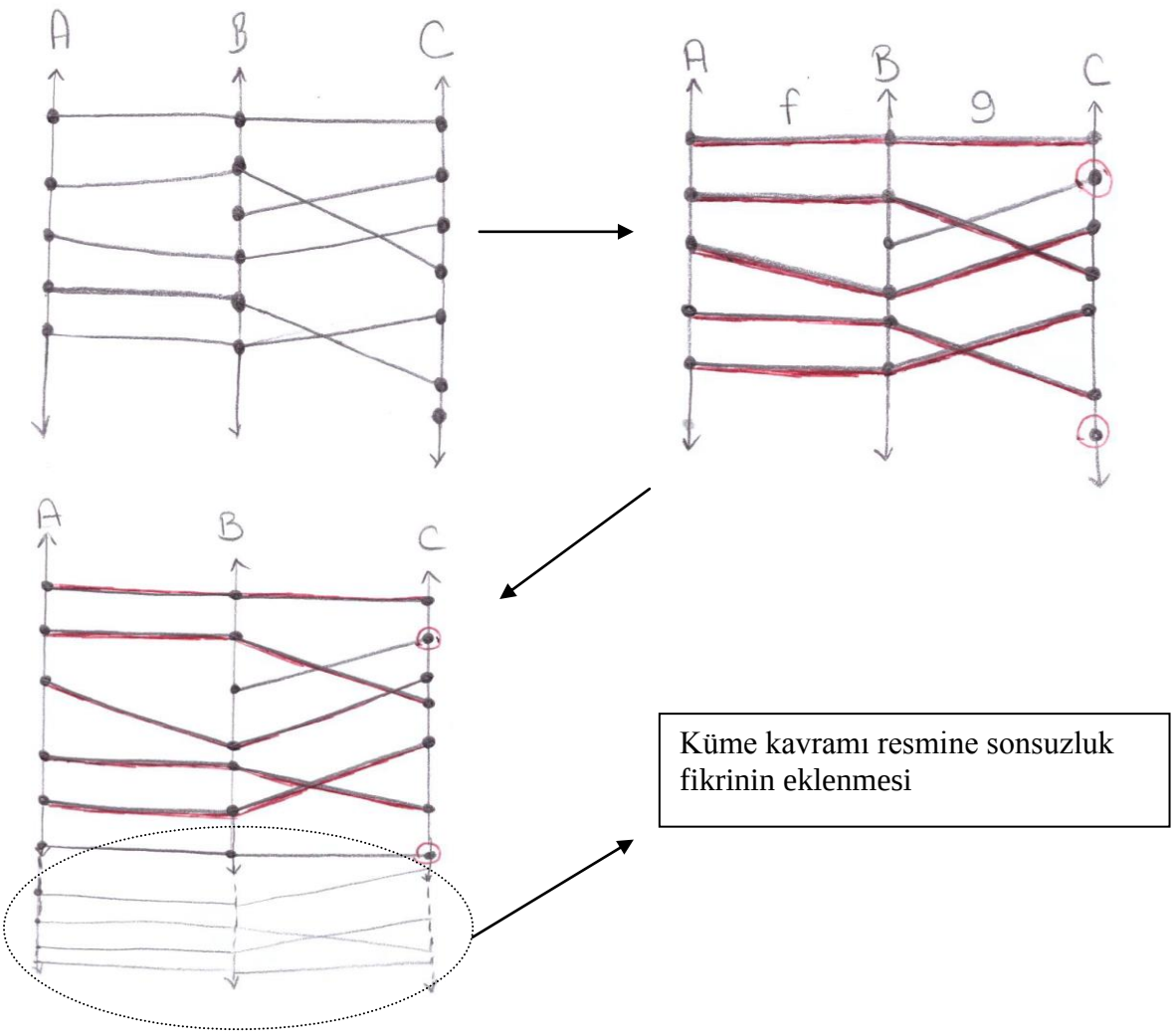
Şekil 4. 34. A2'in Teorem 3'ün (ii) ispatının sonsuz elemanlı kümelerdeki ikinci resmi

A3'in Teorem 3'in İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler

A3, Teorem 3'ün ispatına yönelik görselleştirme durumuna A, B ve C kümelerini görselleştirerek başlamıştır. Kümeleri doğrular olarak, kümelerin elemanlarını ise doğrular üzerine koyduğu noktalar olarak görselleştirmiştir. f ve g fonksiyonunu görselleştirmek için ise tanımladığı kümeler üzerindeki elemanları düz çizgiler ile birbiriyle eşlemiştir. Bunu yaparken bir kural olmadığını resminde belli etmek için çizgileri farklı yerlere götürerek çalışmıştır. Birebirlik durumunu göstermek adına her noktayı farklı bir noktayla birleştirmiştir. A3, tanımladığı fonksiyonların bileşkesinin de birebir olduğunu göstermek için çizdiği düz çizgiler üzerinden kırmızı renkli bir kalemle tekrar geçmiştir. A kümesindeki bir noktanın C kümesindeki bir noktayla eşleşmesi anında eliyle hareket

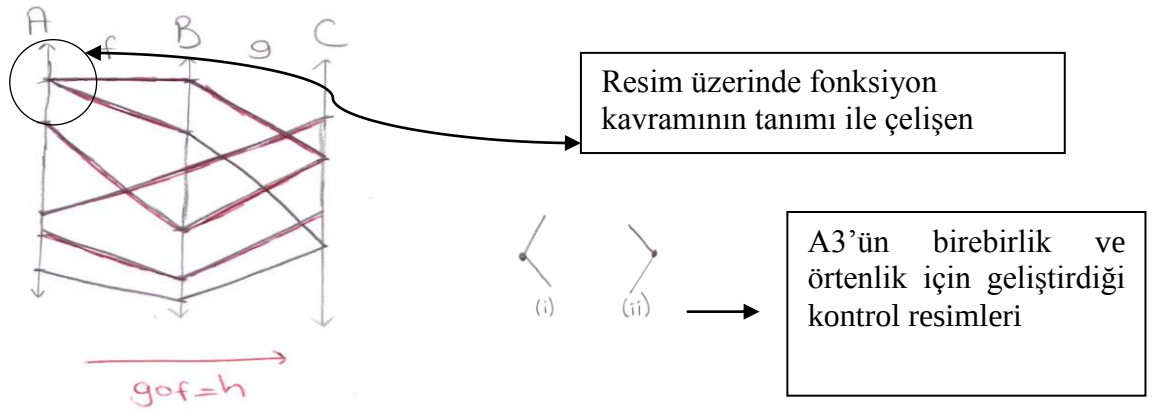
ederek çizgilerin ortak bir noktaya gidip gitmediğini kontrol etmiş, bunu yaparken resmine hareketlilik boyutu katmıştır. Bu hareketler ile ortak bir noktada birleşen çizgilerin olmadığını söyleyerek gof fonksiyonunun da birebir olduğunu göstermiş olduğunu ifade ederek görselleştirme sürecini sonlandırmıştır.

A3, oluşturduğu resimlerinin sonlu elemanlı kümeler için geçerli olduğunu fark ederek sonsuz kümeler üzerinde bu teoremi incelemek için resmine kesik çizgiler ekleyerek sonsuzluk algısı oluşturmuştur. Küme kavramını gösterdiği resmindeki düz çizgilerin ucunda yer alan okların nokta sayısının artacağını göstermek için bulunduğunu ifade etmiştir. A3'e göre resmine eklediği kesit çizgiler sonsuzluk fikrini temsil etmekte ve resmine derinlik özelliği katmaktadır.



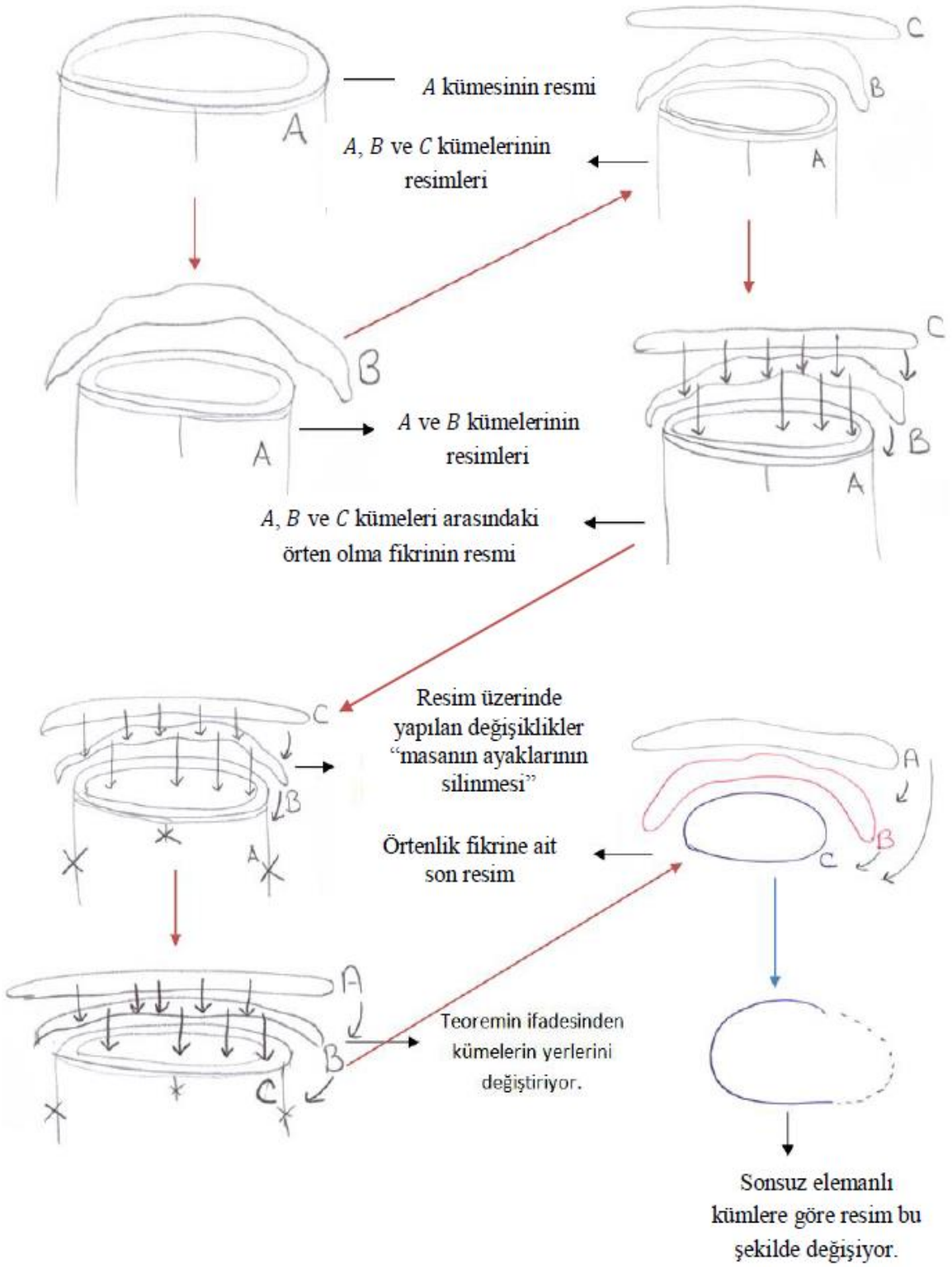
Şekil 4. 35. A3'in Teorem 3'ün (i) ispatına ait resmi

A3, teoremin diğer yönünü ispatlamak için yine düz çizgiler çizerek kümeleri görselleştirmeye başlamıştır. İlk çizdiği resminde fonksiyon kavramının tanımıyla çelişen durumlar fark ederek resmi üzerinde değişiklikler yapmıştır. Bu sayede teoremin ispatını görselleştirirken aynı zamanda teoremde yer alan kavramlarının da tanımlarını kontrol ettiğini fark ettiğini ifade etmiştir. A3 bileşke fonksiyonun örten olduğunu göstermek için düz çizgiler kullanarak C kümesindeki tüm elemanları işaretlemiştir. Bu fonksiyonun birebir olmak zorunda olmadığını düşünen A3, bunu belli etmek için de resminde görüntü kümesindeki elemanları birden fazla çizgi ile işaretleyerek değer kümesindeki elemanlarla eşlemiştir.



Şekil 4. 36. A3'in (i) ve (ii) için geliştirdiği kontrol resimleri

A3, teoremin ispatına ait resimlerini oluştururken çizdiklerinin örtenlik fikrini tam karşılamadığını düşünerek yeni bir resim yapmaya karar vermiştir. Bu seferki görselleştirme durumunu günlük hayattan yansıtan A3, bu süreci günlük hayattan matematiğe şeklinde adlandırmıştır. Bunun sebebini ise *ilk çizdiklerim günlük hayattan nesnelerden oluşuyordu, daha sonra bu nesneleri matematiksel hale çevirdim bu sayede ispatı görmede zorlanmadım* şeklinde ifade etmiştir. A3, görselleştirmeye masa nesnesini kullanarak başlamıştır. Örtenlik fikrini de bir örtünün masayı örtmesi fikrinden yola çıkarak zihnindeki resimleri kağıda aktarmıştır. A3'ün günlük hayattan matematiğe olarak adlandırdığı görselleştirme durumu aşağıda Şekil 4.37'de detaylı bir şekilde gösterilmektedir. Kırmızı oklar resmin oluşum adımlarının yönünü belirtmektedir. Mavi ok ise resmin sonsuz kümeler için yeniden düzenlendiği adımı göstermektedir.

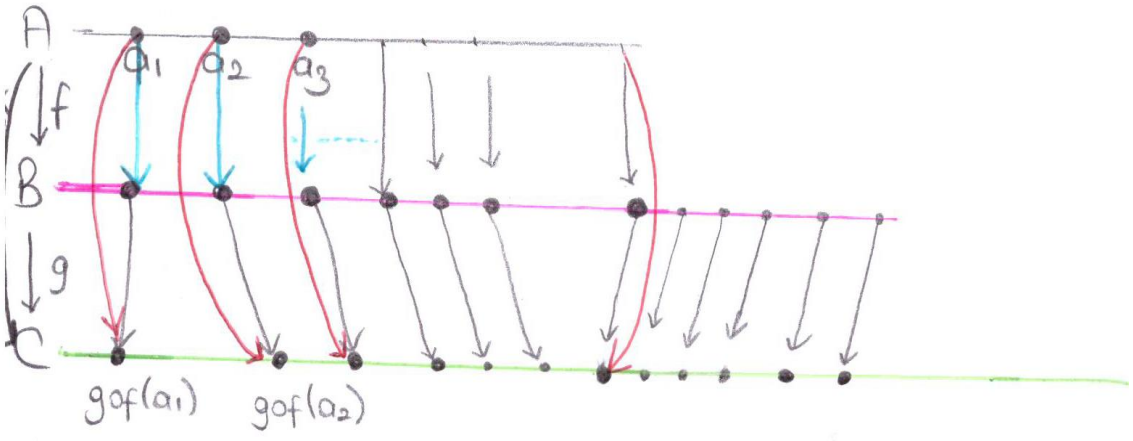


Şekil 4. 37. A3'ün Teorem 3'ün (ii) ispatının resminin oluşum adımları

A4'ün Teorem 3'in İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler

A4, Teorem 3'ün ispatını görselleştirirken ilk olarak teoremde yer alan A, B ve C kümelerine ait resimler çizmiştir. Kümeleri yatay düz çizgiler olarak çizen A4, kümelerin elemanlarını çizgiler üzerinde yerleştirdiği noktalar şeklinde görselleştirmiştir. A4, kümelerin her birini farklı renklerde ve yatay çizgileri farklı uzunluklarda görselleştirmiştir. Burada renk ve uzunluk özelliklerini ayrık kümeler düşüncesi için oluşturmuştur. Yani çizgilerin uzunlukları kümelerin eleman sayıları arasındaki ilişkiyi, kümeler arasındaki sıralama bağıntısına karşılık gelmektedir.

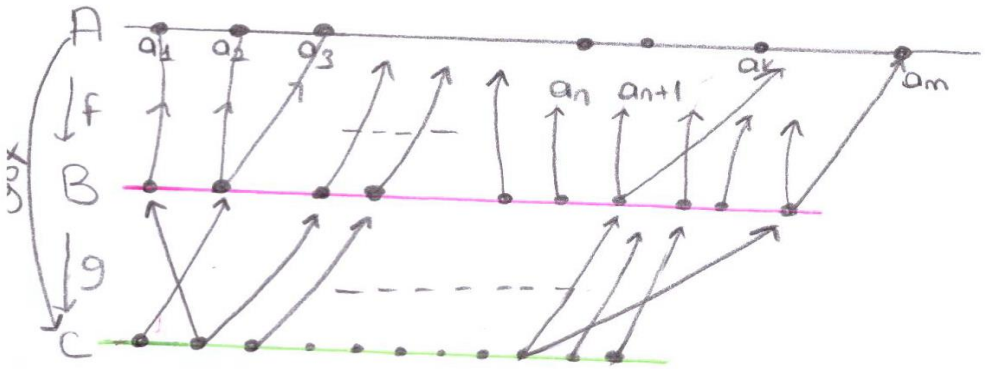
A4,görselleştirdiği kümeler arasında tanımladığı f ve g fonksiyonlarının elemanları arasındaki ilişkiyi göstermek için düz ve eğik oklar kullanmıştır. f kümesinin tanım ve değer kümelerinin elemanlarını A dan B ye ilerleyen oklar; g kümesinin tanım ve değer kümesinin elemanlarını B den C ye ilerleyen oklar yardımıyla birleştirmiştir. Oklarla birleştirme işlemi yaparken bir yandan da fonksiyonların birebir olma durumunu resminde göstermiştir. *gof* fonksiyonunun tanım ve değer kümesindeki elemanları arasındaki ilişkiyi göstermek içinde A dan C ye eğik oklar yardımıyla eşleme yapmıştır. *İlk çizdiğim düz okların birleşimi eğik çizdim oklarla aynı yerden başlayıp bittiği için* gof *fonksiyonunun da birebirdir diyebiliriz* ifadesini kullanmıştır.



Şekil 4. 38. A4'ün Teorem 3'ün (i) ispatına ait resmi

Teorem 3' ün diğer maddesinin ispatını görselleştirmek için ilk olarak kümeleri ilk sefer yaptığı gibi yatay düz çizgiler ve bu kümelerin elemanlarını da noktalar şeklinde çizmiştir.

Bu sefer örtenlik fikrinden dolayı kümelerin eleman sayıları arasındaki ilişki nedeniyle küme resimlerinin uzunluklarını değiştirmiştir. Elemanların eşleşmesini bu durumda okların yönlerini değiştirerek görselleştirerek örtenlik durumunu resmine aktarmıştır. Resminde yer alan çizgiler üzerinde kalemiyle hareket ederek gof fonksiyonunun da örten olduğu fikrini görmeye çalışmıştır. Bu uygulama ile resmine hareket özelliği katmıştır.



Şekil 4. 39. A4'ün Teorem 3'ün (ii) ispatına ait resmi

IV. Durum

MÖA' na Teorem 4 ifadesi verilmiş ve adayların teoremin ispatını görselleştirme sürecindeki durumları incelenmiştir. Bu süreç içerisinde nasıl resimlerin oluştuğu gözlemlenmeye çalışılmıştır. Aşağıda Şekil 4.40 'ta Teorem 4'in bulunduğu çalışma kağıdı ve Şekil 4.41'de Teorem 4'e ait ispat yer almaktadır.

Teorem 4: İyi sıralı her küme tam sıralıdır.

Yukarıda verilen teoremin ispatını görselleştiriniz.

*Şekil 4. 40.*Teorem 4'e ait çalışma kağıdı

İspat:

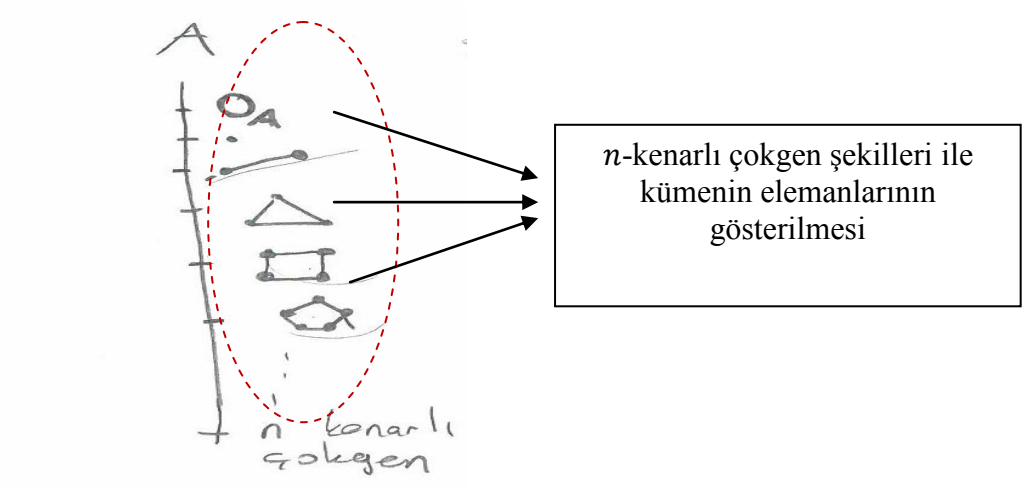
$(A,\leq)$ iyi sıralı bir küme ve $x, y \in A$ olsun.A kümesi iyi sıralı olduğundan $\{ x, y \}$ alt kümesinin en küçük elemanı vardır. Eğer bu eleman x ise $x \leq y$, bu eleman y ise $y \leq x$ olup her iki durum için $(A, \leq)$ tam sıralıdır.

Şekil 4. 41. Teorem 4'ün ispatı

A1'in Teorem 4'ün İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler

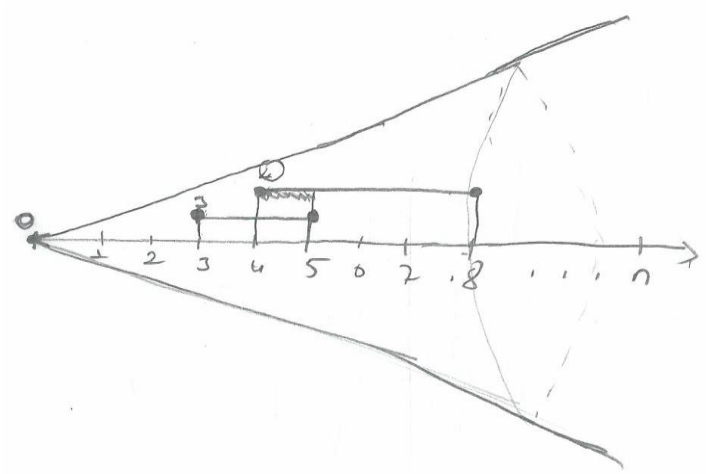
A4, ilk olarak iyi sıralı bir kümeyi görselleştirmek istemiştir. Bunun için sıralı olma fikri üzerine odaklanmıştır. A4, bir A kümenin elemanlarını $n \geq 1$ için n-kenarlı çokgenler, nokta ve doğru parçası olarak tanımlamıştır. Bu küme üzerinde kenar sayısına bağlı bir sıralama bağıntısı tanımlamıştır. Sıralı bir A kümesini düz dikey bir çizgi olarak görselleştirmiştir. A kümesinin elemanlarını bir nokta, bir doğru parçası ve n-kenarlı çokgenler içinden üçgen, dörtgen, beşgen şeklinde görselleştirmiştir. Buradaki amacı elemanları içerdikleri doğru parçası sayılarına göre sıralamıştır.

Seçtiği her altkümesinin elemanları içinde en küçük doğru parçası sayısına sahip bir eleman olmuş olacaktır. A1, A kümesini ve elemanlarını bu şekilde görselleştirerek *bir küme iyi sıralıyken aynı zamanda tam sıralıdır göstermiş oldum* diyerek süreci bitirmiştir.



*Şekil 4. 42.*Teorem 4 için küme ve elemanları resmi

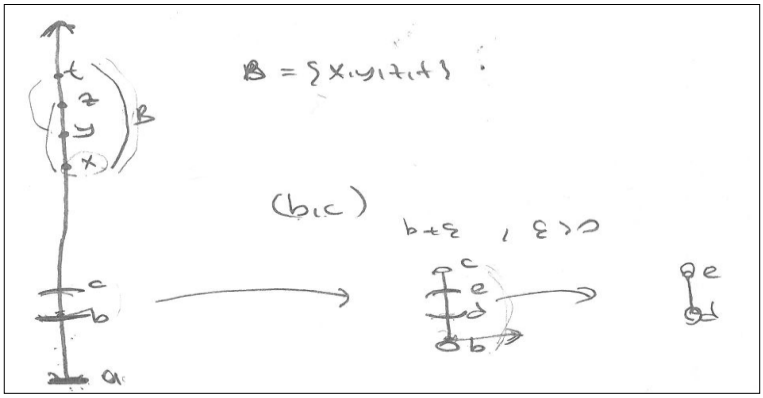
A1, ilk resmini daha da genelleştirebilmek için yeni bir resim yapmak istediğini belirterek bu resminde iyi sıralı olan *A* kümesini başlangıç noktası 0 olan bir ışın olarak görselleştirmiştir. *Sayıları büyük olma bağıntısına göre sıralandığımızı düşündüğümüzde her altküme için bir en küçük eleman olduğunusöyleyebiliriz* demiştir. 0 noktasından başlayarak uzayan iki çizgi çizmiştir. Bu çizgiler kümenin elemanlarının sonsuz olduğunun resmiydi. Kümesi üzerinden aldığı alt kümelerini tarama yaparak görselleştirmiştir.



Şekil 4. 43. A1'in Teorem 4'in ispatına ait resmi

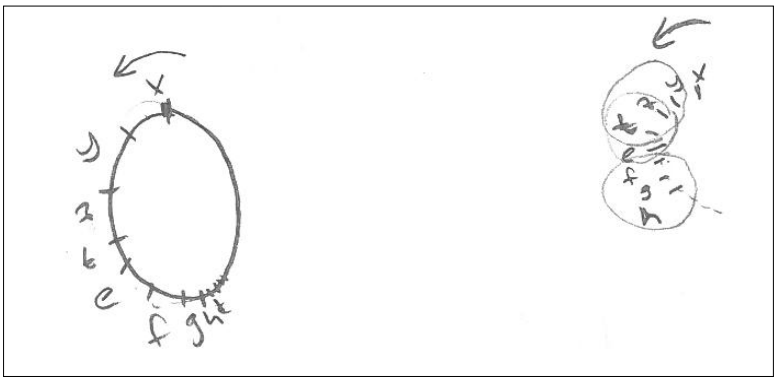
A2'in Teorem 4'ün İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler

A2, iyi sıralı bir kümeyi görselleştirirken ilk olarak sayı doğrusu çizip daha sonrasında bir başlangıç noktası belirlemek için doğru üzerindeki okları silmiştir ve bu noktayı düz bir çizgi ile göstermiştir. Doğru üzerine bir kurala bağlı olmadan rastgele noktalar yerleştirmiştir. A2, iyi sıralı bir küme çizdiğinde alt kümeleri kontrol etmek için çizdiği küme üzerinden parçalar almış, *bu parçaları ilk çizdiğimle aynı sadece boyutları küçüldü* ifadesini kullanmıştır. Bu şekilde çizmesini *istediğim kadar altkümeyi kontrol etmek için* diyerek açıklamıştır.



*Şekil 4. 44.*A2'in Teorem 4'in ispatına ait ilk resmi

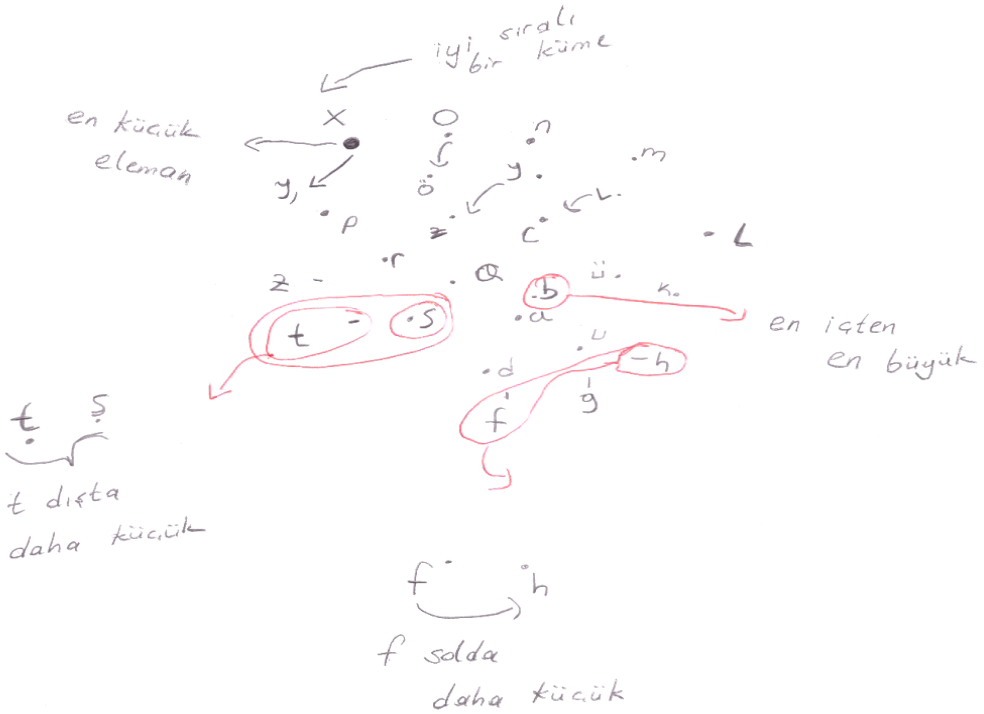
A2, iyi sıralı bir kümeyi göstermek için elemanları hep bir çizgi üzerinde çizmeye gerek olmadığını bu *sefer düz çizmeyeceğim iyi sıralı olması düz olduğu için değil diyerek* söylemiştir. A2' ye göre bu durum bağıntının kuralını bilmeye gerek kalmadan kümenin elemanlarını görselleştirmeyi kolaylaştırmaktadır. Bu düşünceyle yeni bir resim yapan A2, elemanlarını bir ok çizerek nasıl sıralayacağını aşağıdaki şekildeki gibi göstermiştir. Bu resme göre seçtiği her iki eleman göstergeler sayesinde sıralı olduğu açıkça gözükmektedir.



Şekil 4. 45. A2'in Teorem 4'in ispatında değişen sıralı küme resmi

A2,bu düşüncesinden yola çıkarak yeni bir ispat resmi yapmaya başlamıştır. Bu sefer elemanları hiç sınırlama gereği duymadan bir okun yönünün iyi sıralama özelliğini temsil ettiği bir iyi sıralı küme resmi çizmiştir. Bu sayede bu döngünün sonsuz elemanı da karşıladığını söyleyen A2, sıralı olma özelliğini de kontrol etmek için ikişerli elemanlar seçmiştir. Bu seçimin özel olduğunu ifade ederek kırmızı kalemle göstermek istediği belirtmiş ve kümesinin rastgele yerlerinden keyfi ikili elemanlar almıştır. Seçtiği ikili

elemanları örneğin, (t,s) ikilisinin içte ve dışta olma durumlarına göre sıralı olduğunu ifade eden A2, s den bir büyük elemanın r olduğunu ifade etmiştir. Bu durumda (t,s) ve (s,r) ikilileri için (t,r) ninde iyi sıralı olduğunun açıkça resminde gözüktüğünü belirtmiştir. A2, en başından sıralamanın yönünü belirttiğinden bu şekilde keyfi seçeceği her ikili eleman için de sıralı olduklarını göstermiş olduğunu söylemiştir. İspatın resminin sonunda bütün olarak resme baktığında resmin teoremin doğruluğunu net bir şekilde gösterdiğini dile getirmiştir. A2'in Teorem 4' in ispatına ait resmi Şekil 4. 46' da yer almaktadır.

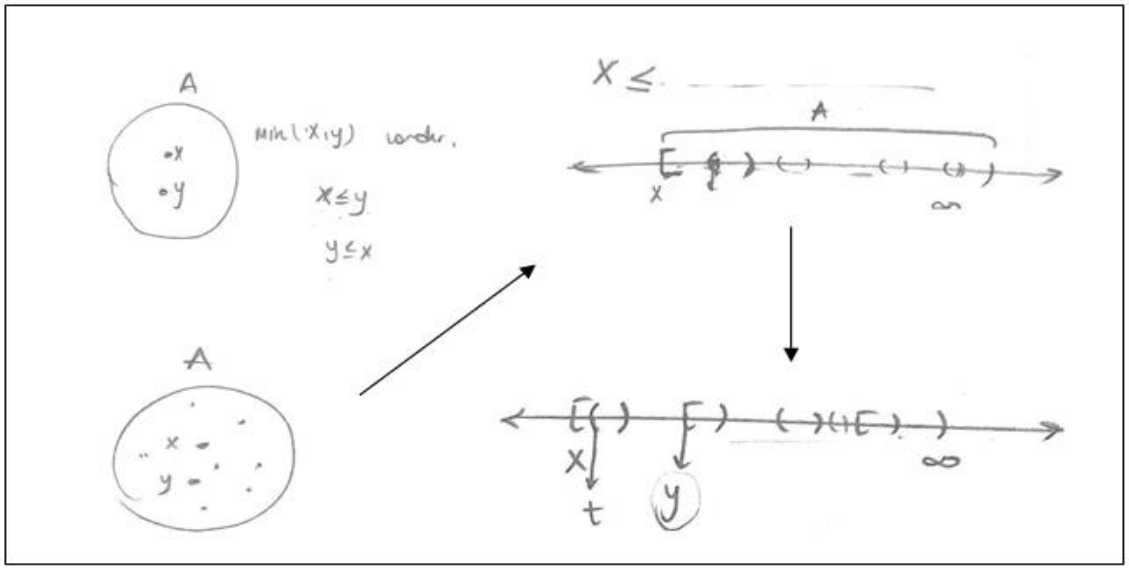


Şekil 4. 46. A2'in Teorem 4'in ispatına ait resmi

A3'in Teorem 4'ün İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler

A3, ilk olarak bir kümenin iyi sıralı olmasını göstermek için iki elemanlı bir küme resmi çizmiştir. Burada küme kavramını yuvarlak bir şekil olarak görselleştirmiştir.Bu resminin teoremin doğruluğu için net bir resim olduğunu belirttikten sonra resminin iki eleman dışında da geçerli yapabilmek adına küme resmi içerisine birden fazla nokta eklemiştir. Bu çokluktaki elemanların sıralı olduğunu göstermek için kümesinin elemanlarını bir sayı doğrusuna aktarıp bu sayı doğrusu üzerinde keyfi aralıklar belirlemiştir. A3 de Teorem4'ün

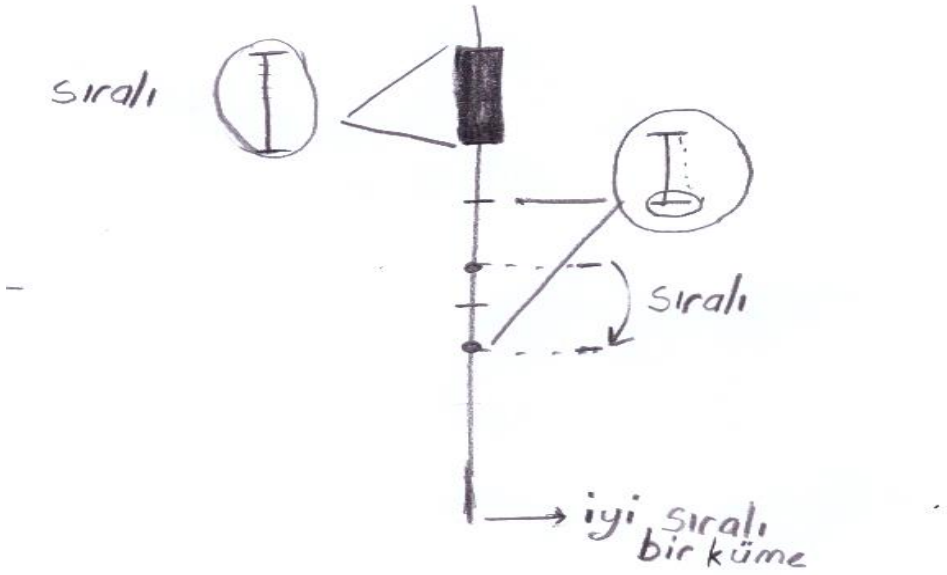
ispatını görselleştirme esnasında iyi sıralı küme kavramı üzerinde odaklanmıştır. Bu kavrama ait farklı resimler oluşturmuştur. Bu şekilde teoremin ispatına ait farklı resimler oluşmuştur.Ancak teoreme ait yaptığı resimleri birleştirmekte zorlandığını belirterek net bir resim ortaya çıkaramamıştır.



Şekil 4. 46. A3'in Teorem 4'ün ispatını görselleştirme adımları

A4'in Teorem 4'ün İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler

A4, Teorem 4'ün sözel ifadesini okuduktan sonra iyi sıralı bir küme resmi çizmeye başlamıştır. Bunun için düz dikey bir doğru parçası çizmiş ve kümenin birkaç elemanları gösterebilmek adına resmi üzerine noktalar yerleştirmiştir. Çizmiş olduğu kümenin iyi sıralı olduğunu gösterebilmek için resmine yatay iki kısa çizgi eklemiştir. Burada yatay iki kısa çizgi aralık kavramının resmini temsil etmektedir. A4, çizmiş olduğu *küme üzerinden kesitler alarak* bu kümenin tam sıralı olduğunu gösterebileceğini ifade etmiştir. Bunun için resmi üzerinde belirli kesitler almıştır. Bu kesitleri de küme resmi ile aynı şekilde çizmiştir. Bu şekilde çizmesini o*daklanmak* olarak adlandırarak sanki resim içinde resim oluşturmak olduğunu ifade etmiştir.A4'ün Teorem4' ün ispatının resmi Şekil 4. 48' de gösterilmektedir.



Şekil 4. 47. A4'ün Teorem 4'in ispatına ait resmi

V. Durum

MÖA' na Teorem 5 ifadesi verilmiş ve adayların teoremin ispatını görselleştirme sürecindeki durumları incelenmiştir. Bu süreç içerisinde nasıl resimlerin oluştuğu gözlemlenmeye çalışılmıştır. Aşağıda Şekil4.48'deTeorem 5'in bulunduğu çalışma kağıdı ve Şekil 4.49'da Teorem 4'e ait ispat yer almaktadır.

Teorem 4: A ve B sonlu kümeler, $|A| = |B|$ ve $f: A \to B$ olsun. f nin birebir olması için gerek ve yeter şart f nin örten olmasıdır.

Yukarıda verilen teoremin ispatını görselleştiriniz.

*Şekil 4. 48.*Teorem 5'e ait çalışma kağıdı

İspat:

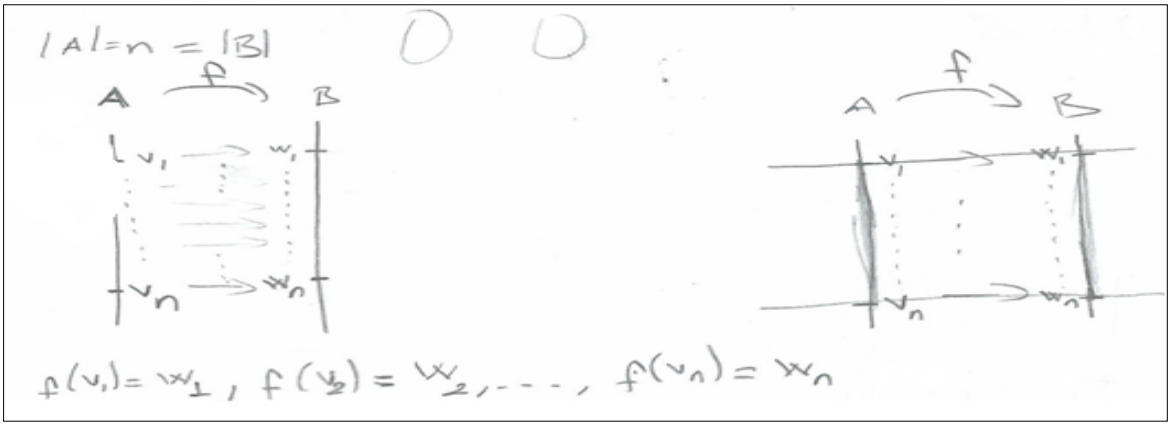
Kabul edelim ki $|A| = |B| = n$ ve kabul edelim ki f birebir olsun. Böylece A kümesinin n farklı elemanına B kümesinin n farklı elemanı karşılık gelir. Bu durumda Imf görüntü kümesi B nin n elemanlı altkümesi olup $Imf = B$ dir. Bu sebeple f örtendir.

Karşıt olarak f örten olsun. Bu durumda B nin n tane elemanının her biri A daki bir elemanın görüntüsüdür. Eğer A kümesindeki herhangi farklı iki elemanın B deki görüntüleri eşit ise o zaman |Imf|<|B|=n olması gerekir. Bu ise f nin örten olmasıyla çelişir. Dolayısıyla A nın farklı elemanlarının görüntüleri de farklı olup f birebirdir.

*Şekil 4. 49.*Teorem 5'in ispatı

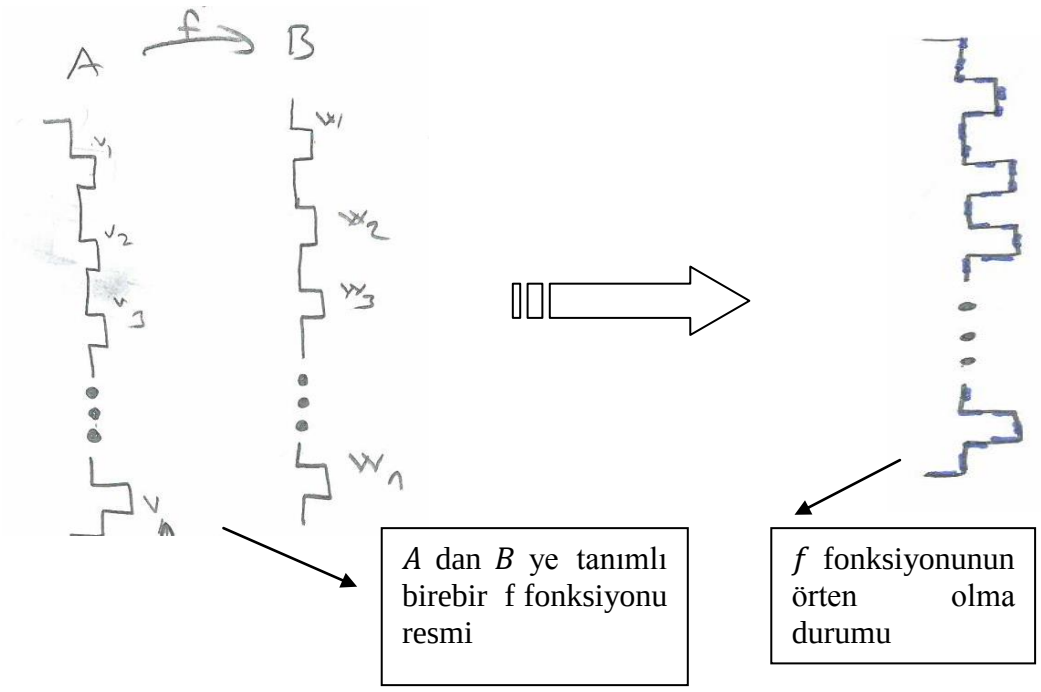
A1'in Teorem 5'in İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler

A1, ilk olarak küme kavramını görselleştirmek istemiştir. Bunun için dikey bir çizgi çizmiş, f fonksiyonunu bu iki dikey çizgi arasında tanımlamıştır. Sonlu elemanlı bir küme üzerinde çalışan A1'in, eleman kavramını noktalar olarak çizdiği görülmüştür. Eleman eşlemesini oklarla gösteren A1, *sonlu elemanlı kümelerde zor* olacağını belirterek küme resmi üzerinde *o yüzden tararım* diyerek bu durumu bu yolun göstermekte uygun olacağını ifade etmiştir. A1, resmini bu yönde şekillendirirken b*u çizdiğim matematiksel olarak yeterli değil ama buna de cebirsel ifadeler de eklemeliyim ifadesiyle* cebirsel ifadelerden yararlanmak istediğini belirtmiştir.



Şekil 4. 50. A1'in Teorem 5'in ispatı için ilk resimleri

A1, çizmiş olduğu fonksiyon resminin üzerinde ilerleyememiş yeni bir resim yapmaya başlamıştır. Teorem 3'te kullanmış olduğu küme resmine yeniden odaklanmıştır. *A* ve *B* kümelerini *lego* diye adlandırdığı şekille çizdikten sonra iki küme arasında bir f fonksiyonu tanımlamıştır. *A* ve *B* nin eleman sayılarının aynı olmasını resimlerini aynı uzunlukta yaparak sağlattığını ifade etmiştir. Burada eleman sayısının uzunluk fikriyle eşleştiği görülmektedir. İki Kümenin elemanlarının sonlu sayıda olduğunu göstermek için alt alta üç nokta kullanmış bu noktaların altına bir dişli daha çizmiştir. Aynı adımları*B* kümesi içinde uygulamıştır. *A* kümesinin elemanlarını dış dişliler, *B* kümesinin elemanlarını iç dişliler olarak iç içe girecek şekilde çizmiştir. Böylece her elemanı karşısındaki elemanla eşleyerek birebir olmayı sağladığını kendi çizimine göre göstermiştir. *Legoları üst üste getirdiğimizde tamamen kapanacaklarından örtenliği de göstermiş oluruz* demiştir. Teoremin diğer tarafını göstermek için yeniden resim yapmaya başlayan A1, ilk resmin bu taraf içinde karşılık geldiğini gördüğünü söylemiştir. Bu nedenle yeni bir resim çizmeye gerek görmemiştir. Aslında çizdiği resmin teoremin tamamına ait olduğunu ancak bunu resmi oluştururken planlı yapmadığını *diğer tarafı hiç düşünmemiştim aslında ama bunu çizince onunda olduğu gözüme çarptı* ifadesiyle söylemiştir.

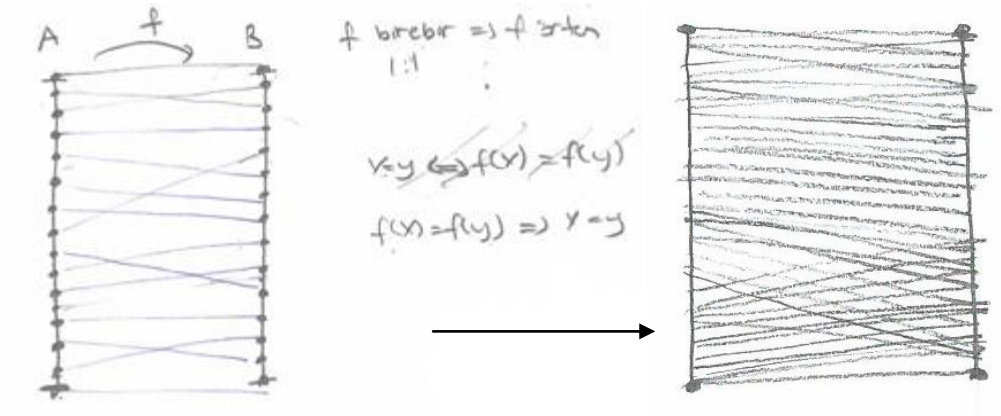


Şekil 4. 51. A1'in Teorem 5'in ispatına ait resmi

A2'in Teorem 5'in İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler

A2, ilk olarak küme kavramını çizerek ispatı görselleştirmeye başlamıştır. Düz dikey çizgi olarak çizdiği *A* kümesine, sonlu elemanlı olması gerektiğinden resmine sonlu sayıda nokta eklemiştir. *A* ve *B* kümelerinin eleman sayılarının aynı olma durumunu sağlatmak için *B* kümesini birebir *A* kümesi gibi çizmiştir. A2, resmini yaparken bir yandan da teoremin hipotezini cebirsel ifadelerle kontrol etmiştir. Araştırmacının bu durum üzerine *bu teoremde farklı bir yol izliyorsun sanırım* söylemine A2, *bu teorem çift yönlü ondan* diyerek cevap vermiştir. *f* fonksiyonunun birebir olmasını göstermek için keyfi ikililer seçip farklı renkte bir kalemle bu ikilileri birbiri ile eşlemiştir. Tüm elemanları eşledikten sonra resmine baktığında düşüncesini *açıkta hiçbir elemanın kalmadı bu sayede de örtenliği de göstermiş oluyorum* şeklinde ifade etmiştir.

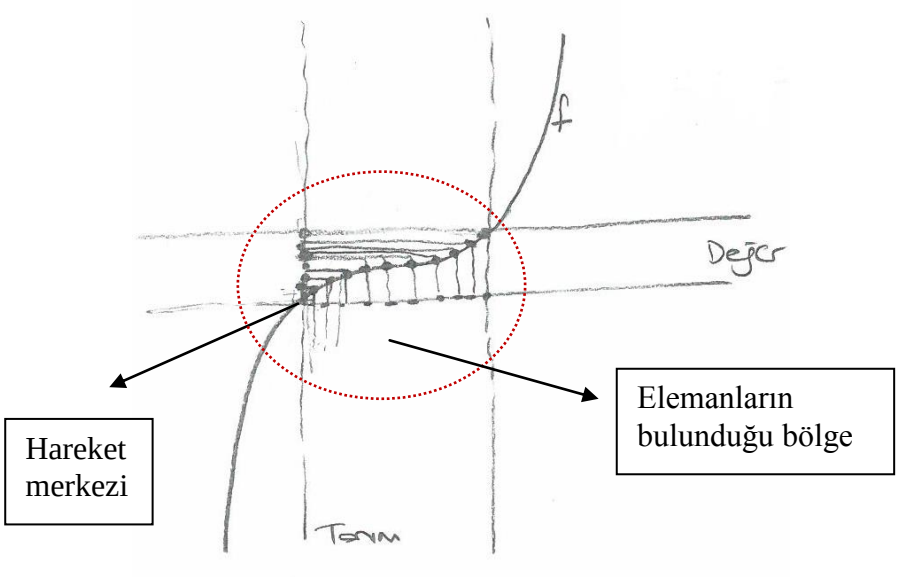
A2, çizmiş olduğu ispatın resmine baktığında eleman sayısının yetersiz olduğunu daha çok elemanı eşlediğini göstermesinin resmin güvenirliğini arttıracağını belirterek resmi üzerinde yeni noktalar eşlemeye başlamıştır. Bunun belli bir yerden sonra taramaya dönüşeceğini ifade etmiş ve resmi üzerinde göstermeye çalışmıştır.



Şekil 4. 52. A2'in Teorem 5'in ispatının birinci yönüne ait resmi

A2, teoremin diğer yönünün ispatını görselleştirmek için iki yatay ve iki dikey doğru çizmiştir. Bu doğruları bir mekanizma gibi hayal ettiğini ifade eden A2, doğruları üzerine noktalar yerleştirerek bu noktaların birbiriyle eşleştiği bir *f* fonksiyonunun resmini çizmiştir. Bu doğruların kapanması ve açılmasını *fonksiyonun elemanlarının hareketi* olarak tanımlayan A2, örtenlik durumunu *ilk olarak şekli kapalı hayal ettiğimde fonksiyon örten oluyor* şeklinde belirtmiştir. Şimdi de *kapalı olan şekli yavaş yavaş açtığımda her*

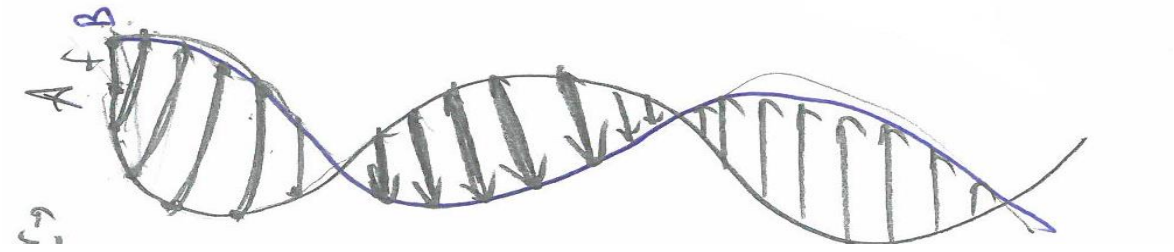
açılmada elemanların birbiriyle eşleştiklerini görüyorum demiştir. Aklındaki şeklin 3-boyutlu olduğunu, *kağıtta gösterilmiyor tabi materyal falan olsa olurdu da aslında bu 3-boyutlu ama bu şekilde çizebildim* diyerek ifade etmiştir.



Şekil 4. 53. A2'in Teorem 5'in ispatının 2. yönüne ait resmi

A3'in Teorem 5'in İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler

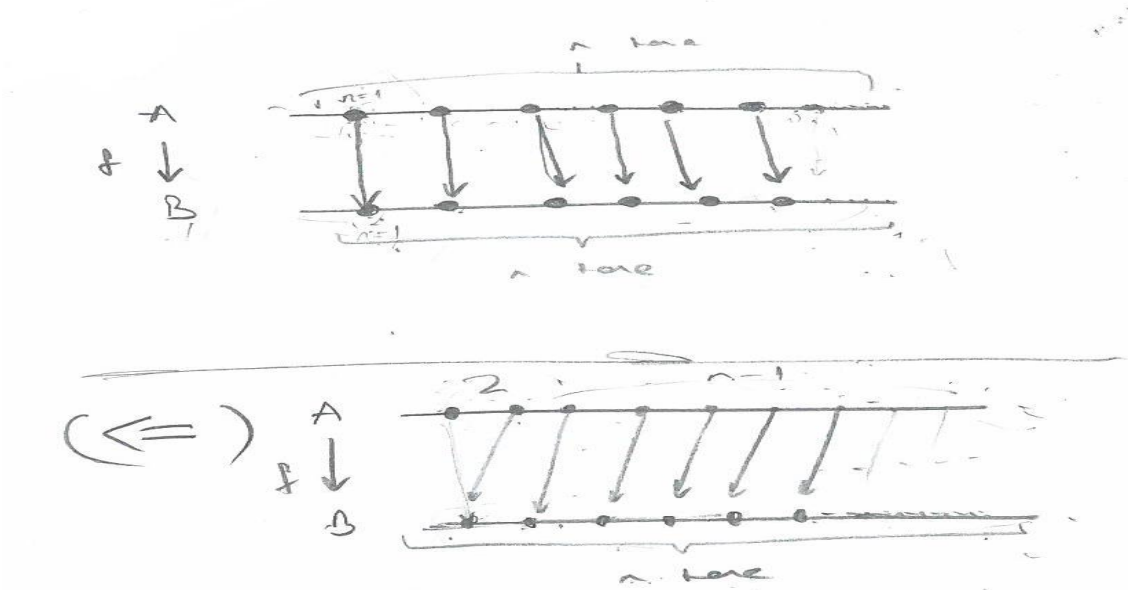
A3, Teorem 5'e baktığında teoreme ait çizeceği resmi matematiksel değil daha çok günlük hayattan etkilenerek çizeceğini *bunu daha farklı günlük hayattan hayal edeceğim* ifadesi ile belirtmiştir. İlk olarak küme kavramına odaklanan A3, bunun için birkaç resim denemesi yapmış en sonunda bir DNA sarmalını çizmiştir. Bu resmi seçmesinin sebebi olarak küme kavramını fonksiyon kavramını ile ilişkilendirecek olmasını göstermiştir.Sarmalının bir koluna *A* kümesi diğer koluna *B* kümesi dedikten sonra kümelerin elemanlarını çift yönlü oklar yardımı ile birbirine eşlemiştir. İki kümenin farklı olduğu gösterebilmek için kümelerden birini renkli kalemle çizmiştir. İki kümenin eleman sayısının eşit olmasından yola çıkarak kolları eşit uzunlukta çizmiş eleman sayısı kavramını uzunluk özelliği ile temsil etmiştir. A3, ispatın diğer yönü için yeni bir resim yapma gereği duymamıştır.



Şekil 4. 54. A3'in Teorem 5'in ispatının ilk yönüne ait resmi

A4'in Teorem 5'in İspatına Ait Görselleştirme Süreci ve Oluşturduğu Resimler

A4, ilk olarak küme kavramına odaklanmıştır. Bunun için birbirine paralel iki doğru çizmiştir. Küme resimleri üzerinde sonlu sayıda elemanı gösterebilmek için noktalardan faydalanmıştır. Altı tane nokta belirleyen A4, n tane elemanı temsil edebilmek içinde küçük üç noktadan yararlanmıştır. f fonksiyonu için A dan B ye elemanları eşlemek adına ok resmini kullanmıştır. Böylece her bir elemanı farklı bir elemanla eşleyerek birebir olma durumunu göstermiştir. Resmine baktığında *böyle çizince birebirlik ile örtenlik birlikte gösterilmiş oldu* diyerek istenilen durumu göstermiş olduğunu belirtmiştir.



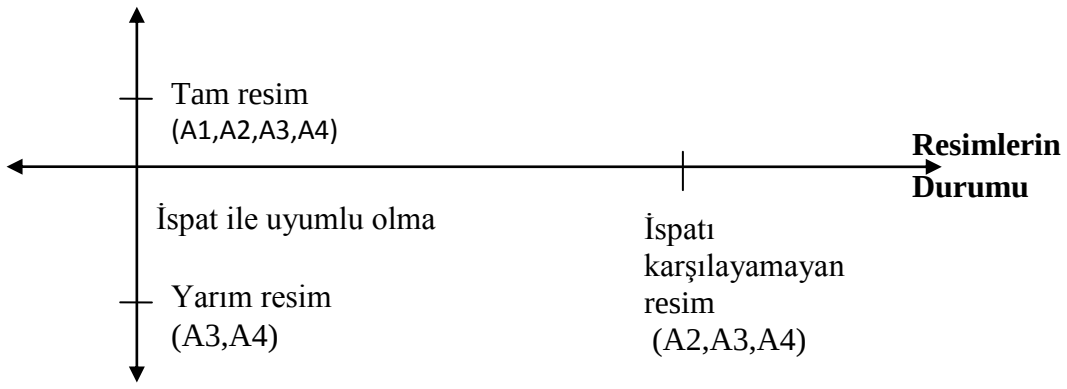
Şekil 4. 55. A4'ün Teorem 5'in ispatına ait resmi

MÖA' nın Matematiksel Teoremlerin İspatlarına Ait Resimlerinin Kategorileri, İçerikleri ve Bulguları

Resimlerin Durumu: MÖA' nın teoremlerin ispatlarına ait resimleri incelendiğinde, resimlerin ispatı temsil etme durumlarında farklılıklar gözlemlenmiştir. Resimlerin durumu, adayların çizmiş olduğu resimlerin ispatı karşılama durumlarını gösteren kategoridir. Bu kategori ispat ile uyumlu olma ve ispatı karşılayamayan resim üzere iki alt kategoriden oluşmaktadır.

İspat ile uyumlu olma, MÖA' nın resimlerinin teoremin ispatını temsil ettiği durumları ifade etmektedir. Bu alt kategoride toplanan resimlerin bazıları ispatının tamamını temsil ederken bazıları ise ispatın belli adımlarını yansıtmaktadır. Bu nedenle ispat ile uyumlu olma alt kategorisi tam resim ve yarı resim olmak üzere iki boyutta incelenmiştir. Tam resim, ispatın tamamının görüntüsünü oluşturan boyuttur. Bu boyuttaki resimler ispatın her adımını barındırmaktadır. Adaylar, bu resimleri oluşturdukları görselleştirme sürecini emin olarak tamamlamıştır. Yarım resim, ispatın belli kısımlarını karşılayan görüntülerin oluşturduğu boyuttur.

İspatı karşılayamayan resim, MÖA' nın kendilerini ikna edememe, akademik bilgi eksikliği, düşüncelerini kağıda aktaramama gibi nedenlerle teoremlerin ispatına ait resimlerini tamamlamadıkları kategoridir.



Şekil 4. 56. Resimlerin Durumu Kategorisine Ait Alt Kategori ve Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi

Görselleştirme sürecinde Teorem 1'in ispatına ait resimler incelendiğinde A1, A3 ve A4'ün resminin ispatın tamamını temsil ettiği, A2'nin resimlerinin ise teoremin ispatını göstermeye yönelik resimlerden oluşmadığı gözlemlenmiştir. Bu nedenle A1, A3 ve A4'üm resimleri ispat ile uyumlu olma alt kategorisinden tam resim boyutuna ait resimlerdir. A2'nin resimleri ise ispatı karşılayamayan resim alt kategorisine ait resimlerden oluşmaktadır. Teorem 2'nin ispatına ait resimler incelendiğinde A1, A2 ve A3'ün resimlerinin ispatın tamamına karşılık geldiği, A4'ün ise görselleştirme sürecinin tamamlayamayıp ispata ait anlamlı resimler oluşturamadığı gözlemlenmiştir. Böylece A1, A2 ve A3'ün görselleştirme sürecinde oluşturdukları resimleri ispat ile uyumlu olma kategorisinde yer alıp ispata ait tam resimlerdir. A4'ün resimleri ise ispatı karşılayamayan resim kategorisinde yer almaktadır. Teorem 3'ün ispatına ait resim incelenmesi yapıldığında tüm adayların resimlerinin ispatın tamamına karşılık geldiği görülmüştür. Bu teoreme ait tüm resimler ispat ile uyumlu olma alt kategorisinden tam resim boyutuna dahil olmaktadır. Teorem 4'ün ispatına ait resimler kontrol edildiğinde A1, A2 ve A4'ün resimlerinin ispatın tamamını temsil ettiği, A3'ün resimlerinin ise süreç sonuna kadar tamamlanmadığı ortaya çıkmıştır. Bu nedenle A3'ün resimleri ispatı karşılayamayan resim kategorisine aittir. A1 ve A2'nin Teorem 5'in ispatına ait resimlerinin ispatın tamamını temsil ettiği, A3 ve A4'ün resimlerinin ise ispatların belli kısımlarına ait görüntülerden oluştuğu görülmüştür. Buradan yola çıkılarak Adayların resimleri ispat ile uyumlu olma kategorisine aitken A1 ve A2'nin resimleri tam resim, A3 ve A4'ün resimleri yarım resim boyutuna aittir.

Tablo 3

Görselleştirme Süreci İçerisinde Katılımcıların Resimlerin Durumu Kategorisine Ait Bulguları

	Teorem 1	Teorem 2	Teorem 3	Teorem 4	Teorem 5
A1	Tam Resim	Tam Resim	Tam Resim	Tam Resim	Tam Resim
A2	İspatı karşılayamayan resim	Tam Resim	Tam Resim	Tam Resim	Tam Resim
A3	Tam Resim	Tam Resim	Tam Resim	İspatı karşılayamayan resim	Yarım Resim
A4	Tam Resim	İspatı karşılayamayan resim	Tam Resim	Tam Resim	Yarım Resim

Adayların, resimlerin durumu kategorisine ait her alt kategori ve boyutu için birer şekil örneği açıklamaları ile aşağıda yer almaktadır. Ayrıca tüm teorem ispatlarının resimleri Ek1'de verilmiştir.

A1, A3 ve A4, Teorem 1'in ispatının tamamını temsil eden resimler oluşturmuştur. İspatta yer alan matematiksel ifadelere odaklandıkları görülmüştür. İspatın tamamına ait birer resim ortaya çıkardıkları için çizmiş oldukları ispat resimleri tam resim alt kategorisine aittir.

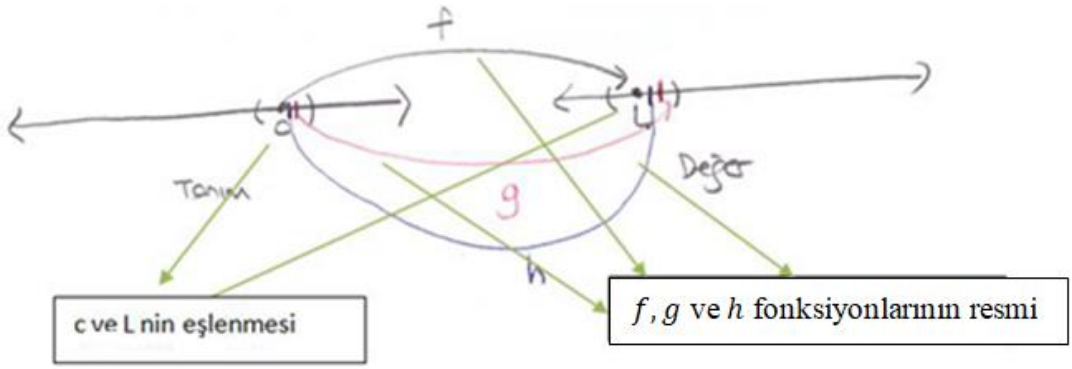
A1: x ve $f(x)$ ya. Yani bana ait. Ama teoremdeki ifade farklı şimdi. c noktası şöyle herkes böyle çizmiştir eminim. Bu teoremde böyle yapmam gerektiğini hissettim. Aynı olmuyor akla gelen şeyler. Fonksiyonları sıralamış. c, $f(c)$. *Fonksiyonların görüntü kümelerini sıralayacağız.* $f(c) - \varepsilon$, $f(c) + \varepsilon$.

(…)

A1: Olur. Resim şekilde de. Daha güzel şekilde de gösterebiliriz. *Yani Mantıken bakınca da buradan yaklaşınca c ye doğru L ye gidiyor buradan da yaklaşınca c ye doğru L ye gidiyor. Çünkü şunu geçemiyor.* Bundan da daha küçük olamıyor asla.

A1: f, g, h. *Buraya doğru artıyor. Şimdi nasıl çekebiliriz buradan bir şeyler. Fonksiyon… (Bekliyor..) İspattan güzel çıkmaz bu. Mesela* g, h, f *yi çizdik. Şimdi saçma oldu* bu. *Sen L ye doğru yaklaş sen de L ye doğru yaklaş. Sen g den küçük kalacaksın f den büyük kalacaksın. O zaman sen de L ye doğru yaklaş.* g, h, f , *L ne de ben bunları buraya yaklaştırıyorum. Bu ne oldu da buraya yaklaştı. Gerçi limitler sıralanıyor da ben bu özelliği burada kullanabiliyor muydum? lim mi yazıyım* o zaman. Güzel oldu aslında.

A2, Teorem 1 de yer alan fonksiyonların kurallarının belirtilmemiş olmasından ve fonksiyonların sıralanmasını görselleştirilmesinden ispata ait geçerli resimler oluşturamamıştır. Bu nedenle A2'in resimleri ispatı karşılayamayan resim kategorisine aittir. Şekil 4.16'da A2'in Teorem 2'in ispatına ait resmi yer almaktadır. Resim de küme ve f, g, h fonksiyonları görselleştirilmesi, bir eleman eşlemesi gösterilmiştir. Ancak resimde, iki fonksiyonun toplamının limitine ait bir resim yer almamaktadır.



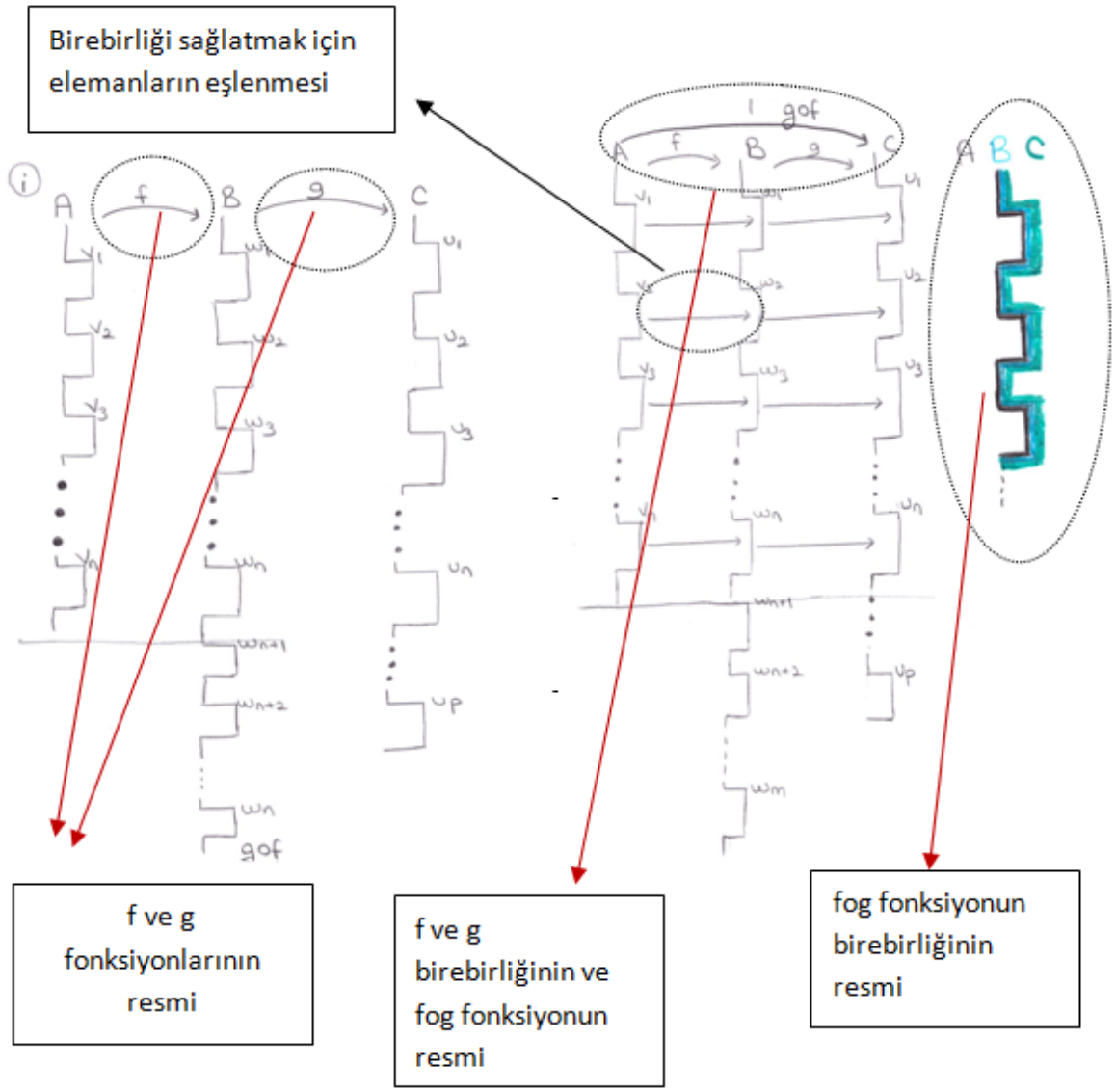
Şekil 4. 57. A2'in Teorem 1'ün ispatının resminin ispatı karşılayamayan resim kategorisine ait analizi

A1,A2 ve A3 Teorem 2'nin ispatına ait tam resimler oluşturmuştur.A3'ün tam resmini oluşturma sürecini aşağıdaki şekilde ifade etmiştir. A1 ve A2'nin de benzer görselleştirme süreci geçirdikleri gözlemlenmiştir.

A3: Şimdi bunu *görselleştirmek istesem direkt koordinat düzlemi*. *Mesela* f *nin tanım kümesi* x den y ye olsun. Tanım kümem burası *değer kümem burası* olsun. *Buradan aldığım bir* c *noktası.* c *noktasına sağdan ve soldan yaklaştığımda limiti varmış.*
(…)

A3: Ya böyle miydi yoksa şöyle miydi? Şimdi bu buraya yaklaşırken bu da buraya yaklaşıyor. Aynı şey g içinde geçerli. Bu da aynı. Bu da L_2 *ye yaklaşıyor*. Şimdi bu da L_1+ L_2 olacak. Evet değişik… Şimdi bunu *direkt limit tanımından yapılır aslında*. δ dan öyle de yaptım zaten.

A4, Teorem 2'nin ispatına ait resimler geliştirmiştir ancak resimlerini bir araya getirememiştir. Ayrı ayrı fonksiyon kavramlarını, kümeleri görselleştirmiştir. Fakat bu resimlerini ispata yönelik bir araya getirmemiştir. A4'ün ispatı karşılayamayan resmi, Şekil 4.20' de yer almaktadır.



Şekil 4. 58. A1'in Teorem 3'ün ispatının resminin tam resim boyutuna ait analizi

Yukarıdaki şekilde, A1 ilk olarak küme kavramını görselleştirmek için resmini oluşturmuştur. f fonksiyonun birebirliğini sağlatabilmek için A kümesinin resminde yer alan elemanların birebir karşılarına B kümesi elemanlarını çizmiştir. Aynı şekilde g fonksiyonunun da birebirliğini sağlatabilmek için B kümesinin elemanlarının tam karşılarına C kümesinin elemanlarının resmini çizmiştir. Bileşke fonksiyonun birebirliğini kontrol etmek için fonksiyonların elemanlarını eşlemiştir. A1, resmin üzerinde bileşke fonksiyonun elemanlarının eşleşmesini göstermek için her elemanı karşısındaki giriş ile birleştirmiştir. Böylece bileşke fonksiyonunun da birebirliğini ispatlamış olduğunu ifade etmiştir. Sonuç olarak A1'in çizdiği resmin, ilgili teoremin ispatıyla uyumlu olduğu ve

ispatın tamamını temsil ettiği kabul edilmiştir. A1'in, teoremin ispatına ait diğer resminin oluşum aşamaları Şekil 25'te ayrıntılı olarak ele alınmıştı. İspatın resminin oluşum sürecinde ilk olarak f ve g fonksiyonlarının görüntüleri oluşturulmuş daha sonrasında da birebirlik durumu sağlatılmıştır. gof fonksiyonunda tanım ve görüntü kümesindeki elemanların eşleşme durumlarına da ele alan A1, bileşke fonksiyonun da birebirliğini göstermek için ek resimlerden faydalanmıştır. Bu nedenle bu resmin de ilgili teoremin ispatıyla uyumlu olduğu ve ispatın tamamını temsil ettiği görülmüştür. A1'in ispatın birinci maddesine ait resmini oluşturma sürecine ait ifadeleri aşağıda yer almaktadır.

A1:*Üç tane küme tanımlayalım. B yi çizdik. f ile g yi ayrı çizelim o zaman. Yani gof buradan gelecek buraya gidice. Bu seferde üç tane lego çizsek. Bileşke fikrini düşünüyorum.*

A1*: f birebir olacak.* Şimdi kabataslak şöyle bir gösteriyim de. Aynen. Budur. *Şöyle üç nokta da koyarım. Ben buna bileşke diyorum*. Açıkta kalanlar önemli de değil. Başkası görür mü bilemem. Sonuçta ben fikri kendim düşündüm. Bu beni ikna eder.

A1'in teoremin ikinci maddesinin ispatına ait oluşturmuş olduğu resim Şekil 4.58'de ele alınmış, oluşum süreci ayrıntılı bir şekilde betimlenmişti. Bu süreç dikkate alındığında A1'in, fonksiyonların örtenliğinden yola çıkarak bileşke fonksiyonun örtenliğini ispatın resminde adım adım göstermeye çalıştığı gözlemlenmiştir. Böylece A1'in teoremin ikinci maddesinin ispatına ait resminin ispatıyla uyumlu olduğu ve ispatın tamamını temsil ettiği ifade edilmiştir.

A1: Delik çizicem ben şimdi bunun üstüne. *Bu delik sonsuz sayıda olabilir. Sonlu sayıda da A*raştırmacı: Deliklerin elemanlara mı karşılık geliyor burada?

A1: *Bunları A nın elemanları olarak göstericem. Şimdi ben A dan B ye f fonksiyonu yaptığım zaman alttan A yı kapatıyorum bu çubuklar delikleri kapatıyor örtüyor. B den C ye yaptığım zaman C yi de üstüne koyuyorum. Sonra A dan C ye olmuş oluyor hepsi birbirini örtüyor.*

A2' nin, Teorem 3'ün ispatına ait resimleri incelendiğinde fonksiyonları sonlu ve sonsuz kümlerde tanımlı olarak iki farklı boyutta ele aldığı ve her iki durumda da birinci madde için ilk olarak küme kavramını görselleştirdiği devamında görselleştirdiği kümeler üzerinde elemanları düz çizgiler yardımıyla eşleyerek fonksiyon kavramını çizdiği Şekil 30'da gözlemlenmiştir. Resimlerinin devamında gof fonksiyonunu resmedebilmek için

elemanlar üzerinde tekrar eşlemeler yapmış ve bileşke fonksiyonun birebir olduğunu göstermişti. A2, teoremin ikinci maddesinde de yine ispata yönelik tam bir resim yapmış ayrıca bu süreçte renk faktöründen de yararlanmıştır. Böylece A2, teoremin ispatının tamamına ait görselleştirme süreci geçirmiştir ve ispatın tamamına ait resim oluşturmuştur.A3'ün, Teorem 3'e ait resimleri Şekil 36'da ayrıntılı olarak gösterilmiştir. Sonlu ve sonsuz kümelerde çalışma durumuna göre teoremi iki alt durumda incelemiştir. Teoremin birinci maddesinde fonksiyonların birebirliğinden yola çıkarak bileşke fonksiyonunun birebirliğine ilerlemiştir. Teoremin ikinci maddesinde ise ilk olarak deneme resimleri yapmış günlük hayat yansımalarıyla başlattığı görselleştirme sürecinde fonksiyonların örten olması durumdan yola çıkarak bileşke fonksiyonun örtenliğini göstermiştir. Bu süreçle ilgili ayrıntılı resim analizi Şekil 38'te ele alınmıştır.A3'ün her iki madde içinde oluşturmuş olduğu resimler, teoremle ilgili olup ispatın tamamına yönelik resimlerden oluşmaktadır. A4, Teorem 3'te resimlerini oluştururken hem birinci hem de ikinci madde için küme, fonksiyon ve bileşke fonksiyon mantığında ilerlemiş, resimlerini bu adım sırasına uygun olarak oluşturmuştur. Yani teoremi adımlara ayırarak ispata ait resim çizmiştir. Bu nedenle her iki madde için de ispatın resimlerinin ispatın tamamına ait olduğu görülmektedir.

A1'in, Teorem 4'ün ispatına ait resmi Şekil 40'ta yer almaktadır. Şekil 40'ta yer alan resmin oluşum süreci incelendiğinde adayın ilk olarak iyi sıralı küme tanımlamak için adımlar yürüttüğü görülmektedir. Daha sonrasında tam sıralı olma durumunu göstermek istemiş ispatın tamamına ait bir resim çizmiştir.

A1: *Her alt kümenin en küçüğü olacak*. Mantığı anladım. *Tamam şimdi A kümesi bu olsun. Bu biraz daha büyük, şu şöyle. Elemanları sıraladım.*

A1: Evet. Şimdi *iyi sıralı her küme… Ne aralığını alıyım? (3,8) aralığını*. Kollar yani bu tarafa gittikçe açılan bir ney olarak düşünelim. Koni olarak düşünebiliriz fark etmez. *Mesela (3,5) aralığına bakıyım. (4,8) aralığına bakıyım. (3,5) aralığının en küçüğü ki 3. Bunların kesiştiği yer neresi. Şekilde de görüldüğü gibi kollar açıldığı için bir büyüme söz konusu. Büyük değerden bir küçük bulabilirim sol taraftan. Hangi kümeyi seçersem seçelim*. Şimdi bunu nasıl göstereceğim söylüyorum da.

A3'ün, ispata ait resimler yapmayı denediği ancak yapmış olduğu resimleri bir araya getirmekte zorlanmasından ispata ait bir resim ortaya çıkaramadığı gözlemlenmiştir.

A2 ve A4 iyi sıralı küme üzerine odaklanmış, bu kavramı görselleştirmesinin sonucu olarak tam sıralı küme olma durumunun aşikar olarak gözüktüğünü ifade etmişlerdir. A2'nin görüşme sırasında ispatın resmini oluşturma sürecine ait ifadeleri aşağıda yer almaktadır.

A2: Şimdi elemanları sınırlamasam okla göstersem şöyle. *Yönü belli olunca sırası da oluyor zaten*. Böyle dönsün. Şu yönde. *İyi sıralamak alt kümelerini kontrol etmek değil mi?* Iıı. Böyle etmiş oluyorum. *Şimdi t ile s şöyle olsun. Küçük olan t olur.*

A2: Başka elemanlara da bakabiliriz. Mesela… *f ve h ye bakalım. f daha solda o zaman daha küçük. Böyle sürekli seçsek herkesi kontrol etmiş olurum. Yani tam sıralı olur.*

A1 ve A2, Teorem 5'in ispatına ait resimlerini teoremin her boyutunu göz önüne alarak oluşturduğu görülmüştür. A1 ispata ait her adım için bir resim yapmaya çalışmıştır.

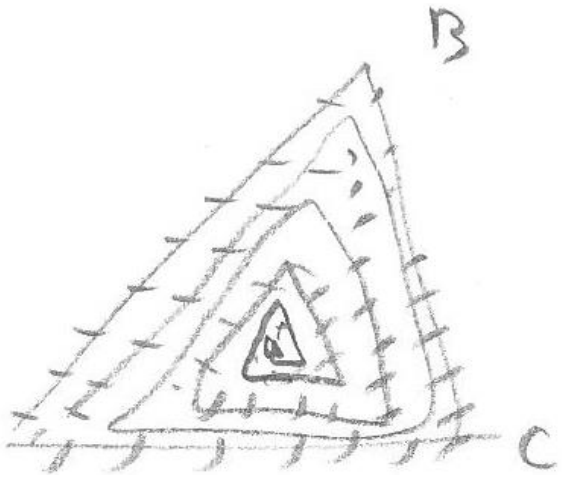
A3 ve A4 Teorem 5'e ait görselleştirme sürecinde teoremin gerek ve yeter şart olma durumunu göz ardı etmiş ve tek tarafı temsil eden bir resim oluşturmuştur. Bu nedenle oluşturduğu resim yarım resim boyutuna aittir. A3'ün resmini neden bu şekilde oluşturduğunu aşağıdaki şekilde ifade etmiştir.A4'ün de bu durum ile ilgili benzer ifadeler kullandığı görülmüştür.

A3:Yani *şu şekilde istediğin gibi sıralayabilirsin baştan aşağı olmaz zorunda değil.* Küme için bence gerekli. Mesela sıfır yokluk. Onun için bile sembol var. Yuvarlak içi boş. Yok işte. Boş küme de mesela küme yok. Bu küme içinde eleman yok. *Örtenlikte başlangıçta yokluk. O yüzden o taraftan bakmak daha zor geldi. Bu kadarı da yeterli bence.* Ben anlıyorum diğer tarafı biraz da.

Resimlerin Özellikleri: MÖA' nın teoremlerin ispatlarını görselleştirme sürecinde oluşturdukları resimler incelendiğinde resimlerin belli özelliklere göre sınıflanması durumlarının ortaya çıktığı görülmüştür. Bu nedenle resimler yapısal ve oluşum özelliklerine göre sınıflandırılmış; hareket etme durumu, somut olma, sözel resim, boyutsal olma, yönerge içerme olarak beş alt kategoriye ayrılmıştır.

Hareket etme durumu, MÖA' nın görselleştirme sürecinde oluşturdukları resimlerin hareketlilik, devamlılık özelliklerine sahip olduğunu gösteren kategoridir. Bu kategoriye ait resimler bir hareket içerisinde devam ediyormuş hissi yaratmaktadır. MÖA bu tür resimleri bir örüntü oluşturacak şekilde ya da kuralsız hareketlilik halinde çizdikleri için

hareket etme durumu alt kategorisi örüntülü hareketlilik ve kuralsız hareketlilik olmak üzere iki boyutta ele alınmıştır.



*Şekil 4. 59.*A3'ün Teorem 4'ün ispatına ait hareketli olma kategorisine ait bir resmi

Araştırmacı: Resmin bitti mi?

A3: Resim olarak bitti. Ama o devam ediyor?

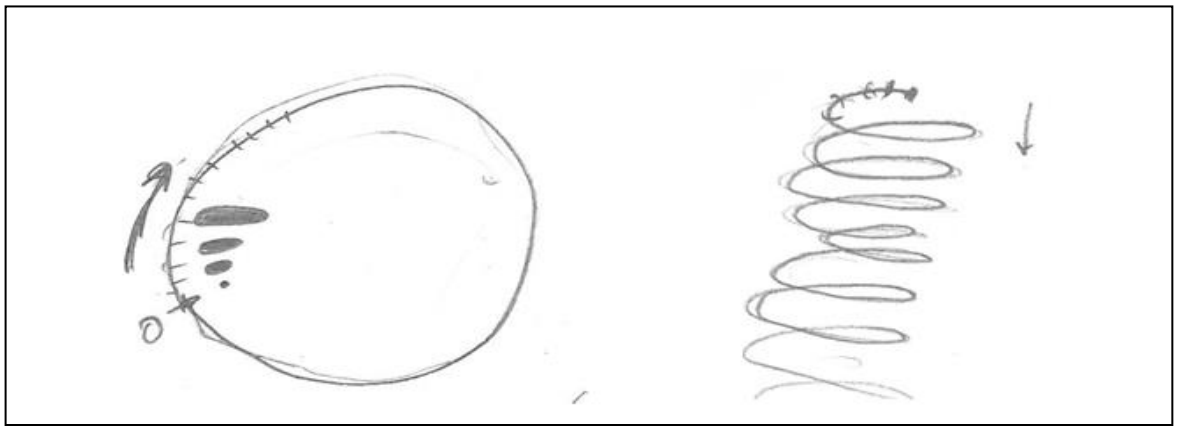
Araştırmacı: Devam ediyor derken?

A3: Yani bu *sonsuz şekilde burada ilerler. Yani istediğimiz kadar eleman için sağlarım* sıralı olmayı.

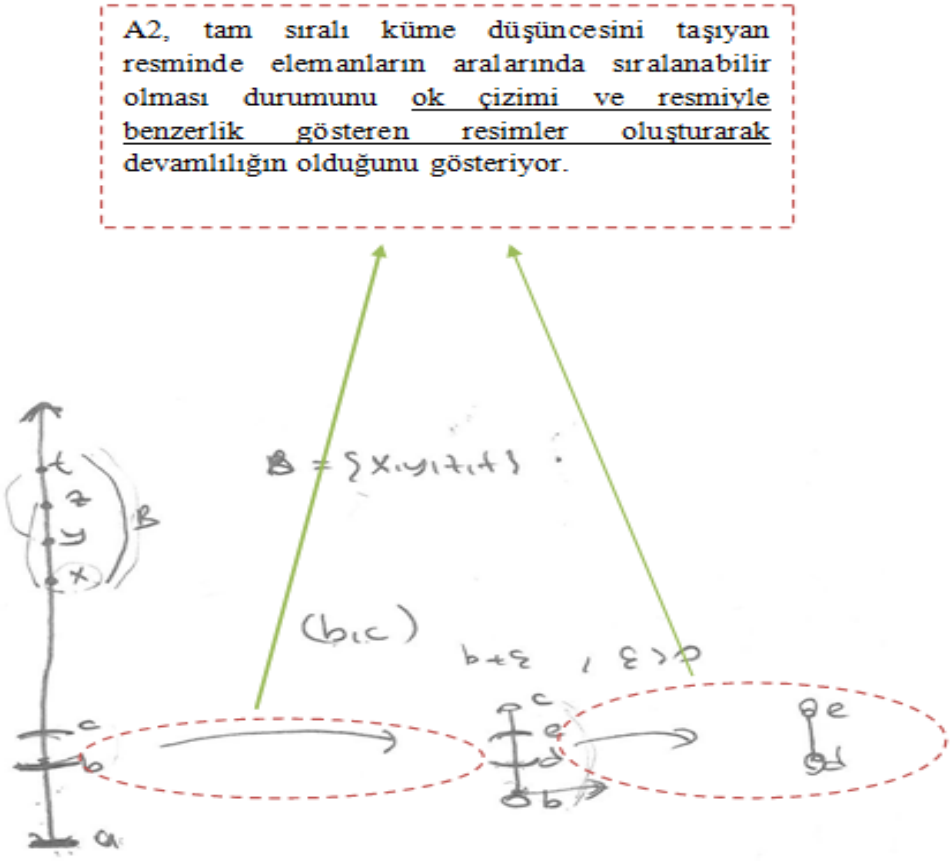
Araştırmacı: Bunu nasıl sağlıyorsun biraz açabilir misin?

A3:*Yani imdi resme bakınca iç içe ilerleyen sonsuz üçgenler gibi duruyor. Sadece düz bir üçgen değil. Öyle olsa resim ondan ibaret olur. Ama burada sürekli devam ediyor düşüncesi var. Belli bir düzende ilerliyor.*

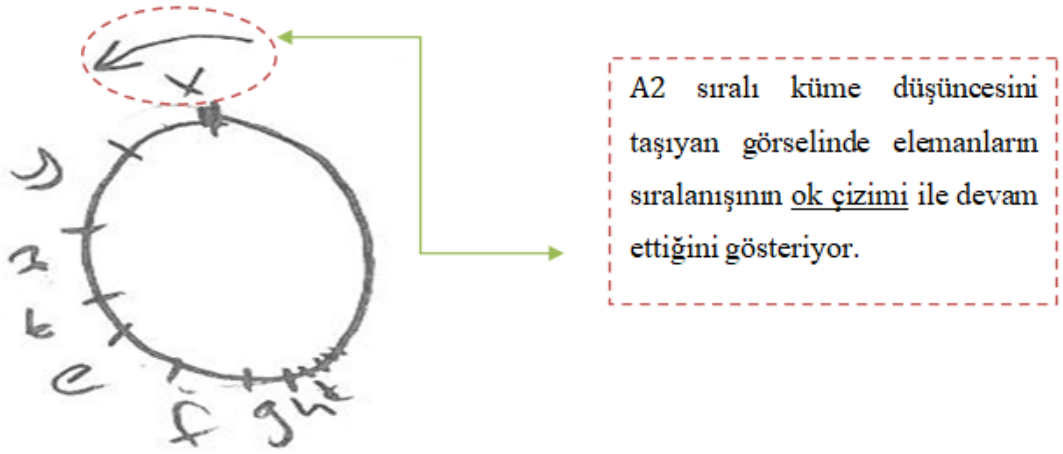
Örüntülü hareketlilik durumunda amaç resimlerde belli bir düzende oluşan bir derinlik veya devamlılık hissinin var olmasıdır. MÖA örüntülü hareketlilik durumundaki resimlerini ek resimler kullanarak veya belli bir örüntü oluşturuyormuş gibi resimlerine hareket etkisi katarak çizmiştir. MÖA' nın bu tür resimleri, teoremlerin içerikleri incelendiğinde daha çok sonsuzluk fikrini oluşturabilmek için kullandığı görülmüştür.



Şekil 4. 60. A3'ün Teorem 4'ün ispatına ait hareket etme durumu kategorisinin örüntülü hareketlilik boyutuna ait bir resmi

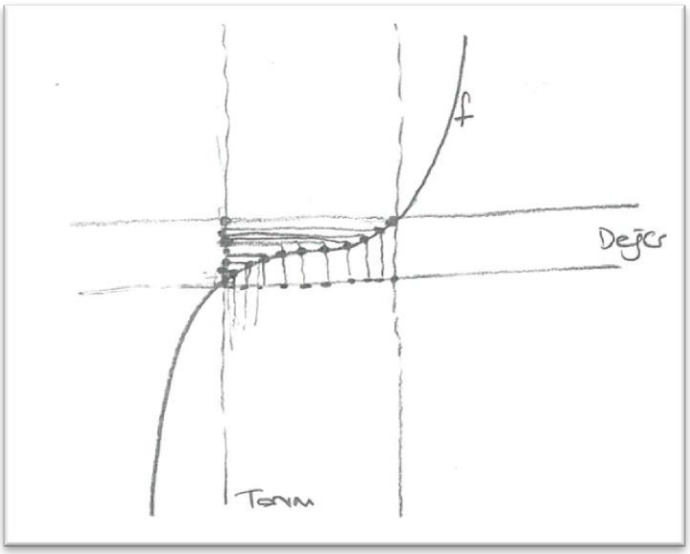


Şekil 4. 61. A2 'nin Teorem 4'ün ispatına ait hareket etme durumu kategorisinin örüntülü hareketlilik boyutuna ait bir resmi

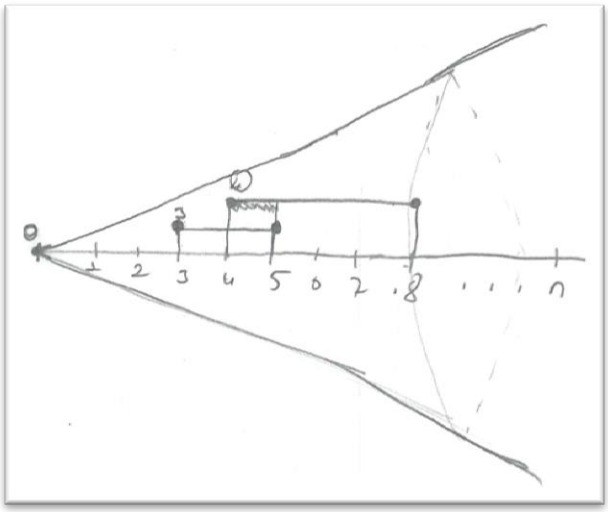


Şekil 4. 62. A2' nin Teorem 4'ün ispatına ait hareket etme durumu kategorisinin örüntülü hareketlilik boyutuna ait ikinci resmi

Kuralsız hareketlilik durumunda ise herhangi bir örüntü ya da ek yönerge olmadan resimde hareketlilik, devamlılık hissinin var olmasıdır. MÖA' nın bazı görsellerinde gözlemlenen bu özellikte ispata ait görselin resminin belli bir aşamasından sonra resim gerektirmeden verilmek istenen düşüncenin devamlılığının olduğu görülmüştür.



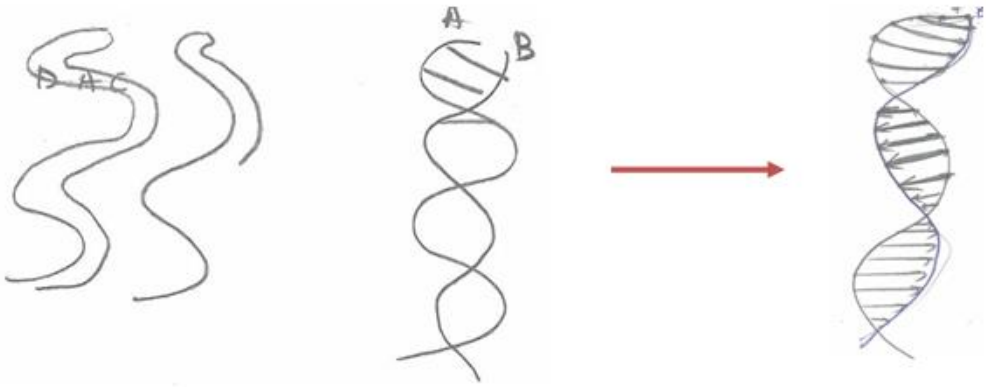
Şekil 4. 63. A2' nin Teorem 5'ün ispatına ait hareket etme durumu kategorisinin kuralsız hareketlilik boyutuna ait bir resmi



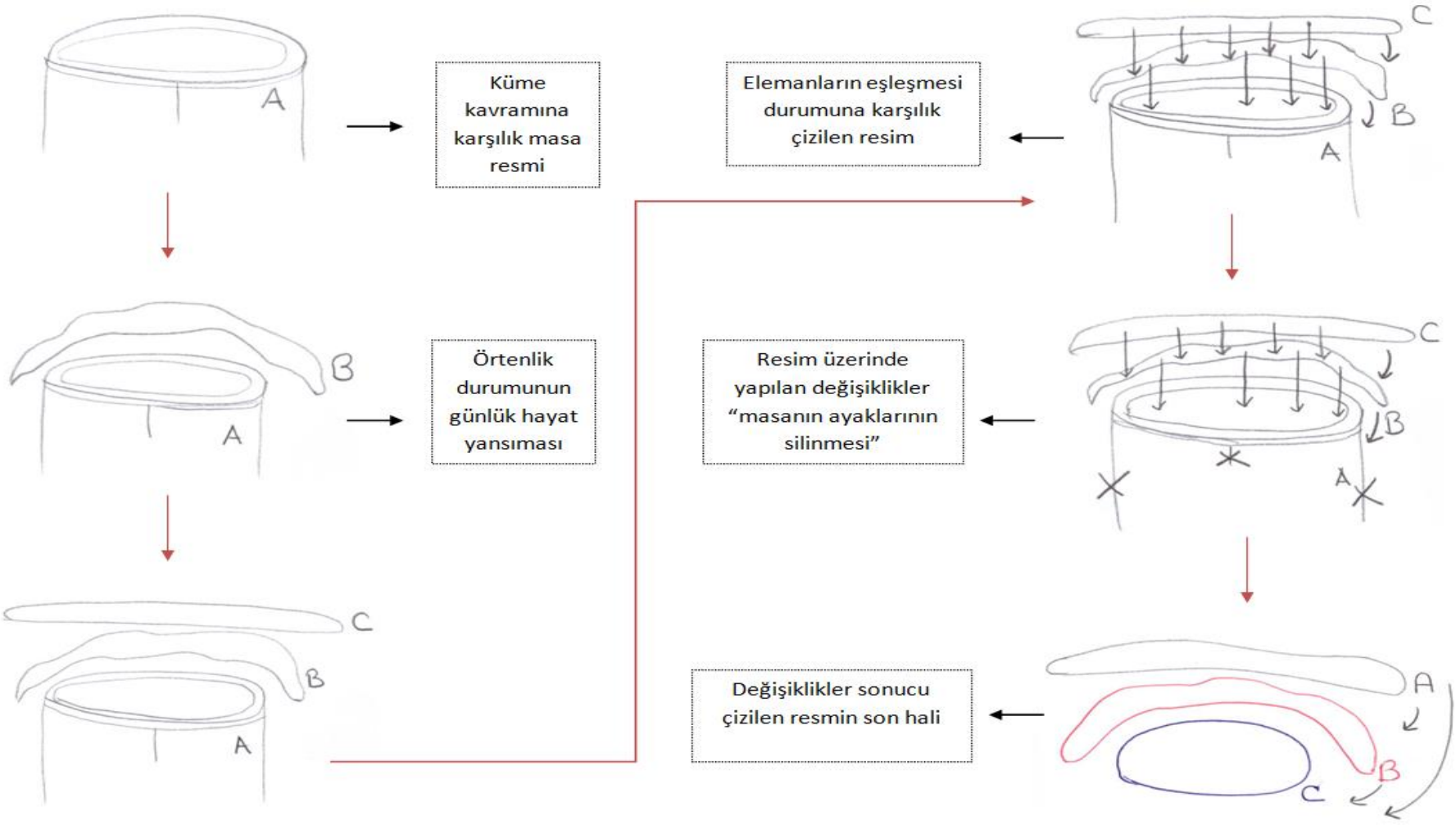
Şekil 4. 64. A1'in Teorem 4'ün ispatına ait hareket etme durumu kategorisinin kuralsız hareketlilik boyutuna ait bir resmi

Somut resim, MÖA' nın teoremlerin ispatlarını görselleştirme durumunda çizdikleri resimleri günlük hayattaki nesnelerin yardımı ile oluşturdukları kategoridir. Bu kategoriye ait resimler günlük hayat yansımaları içerir. Bu kategorideki resimlerin teoremin ispatı süresince sadece günlük hayat yansıması olarak kalabildiği gibi matematiksel bir resim haline dönüşebildiği de gözlemlenmiştir. Bu nedenle bu kategori devamlı somutluk ve değişken somutluk olmak üzere 2 boyutta ayrılmıştır.

Devamlı somutluk boyutunda resimler, teoremin ispatına ait günlük hayattan yansımalar içeren resimlerdir. MÖA' nın bu şekildeki resimlerini herhangi bir matematiksellik kaygısı yaşamaksızın çizdikleri gözlemlenmiştir.



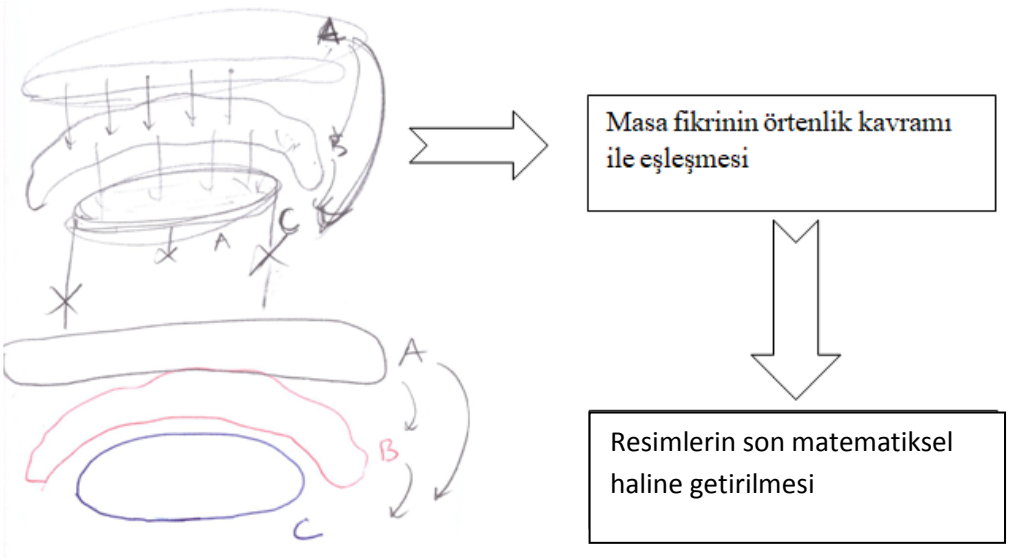
Şekil 4. 65. A2' nin Teorem 5'ün ispatına ait somut resim kategorisinin devamlı somutluk boyutuna ait bir resmi



Şekil 4. 66. A3'ünTeorem 3'ün İspatına ait resminin somut resim kategorisine altında oluşumu

Değişken somutluk, resimlerin ilk olarak günlük hayat yansımaları olarak çizildiği daha sonrasında teoremin ispatına ait ilerlemeyle matematiksel görüntü kazandığı bir boyuttur. MÖA ispatlarının resimleri gerek kendilerini tatmin etmek gerek başka bireylere resimlerini kabul ettirme kaygısı gerekse resimlerini daha matematiksel yapma gerekliliği duyma gerekçeleri ile resimlerinde değişiklikler yaparak yeni resimler oluşturmaktadır. Değişken somutluk boyutunun altında yatan düşünce teoremin ispatındaki matematiksel ilerlemenin görselleştirme sürecinde ilk olarak günlük hayat deneyimlerin yer aldığı resimlerden oluşması daha sonrasında resimlerin matematiksel görüntüler haline getirilmesidir.

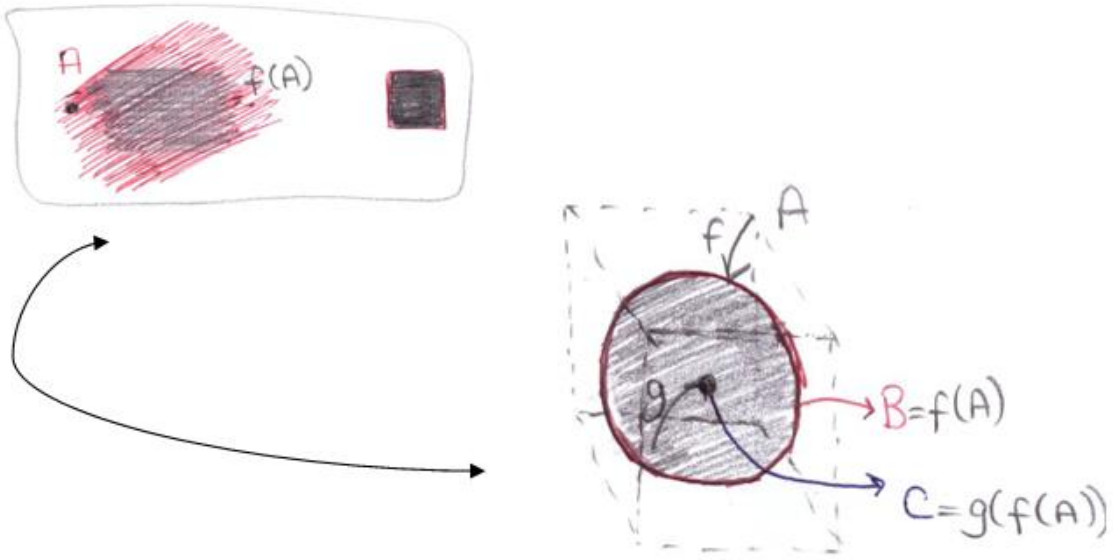
A3'ün Teorem 3'ün ispatına ait resmin oluşum süreci adım adım Şekil 4.66' da gösterilmiştir. Bu resim günlük hayat yansımalarından matematiksel boyut kazanan bir ispat resmine örnektir.



Şekil 4. 67. A3'ün Teorem 3'ün ispatına ait somut resim kategorisinin değişken somutluk boyutuna ait bir resmi

Boyutsallık, MÖA' nın çizmiş olduğu resimlerin görselleştirme süresince boyutsal olarak değişimlerinin olduğu gösteren kategoridir. MÖA' nın boyutsallık durumu 3-boyut ve 2-boyut arasında gerçekleştiği görülmüştür. Bu nedenle bu kategori 3-boyuttan 2-boyuta aktarım ve 2-boyuttan 3 boyuta aktarım olmak üzere 2 boyutta ele alınmıştır. Ayrıca 3-boyutttan 2-boyuta durumu zihinde ve kağıt üzerinde olmak üzere 2 alt boyutta ayrılmaktadır. MÖA' nın resimlerinin durumları bu iki boyut ve alt boyutlar kapsamında göz önüne alınarak incelenmiştir.

3-boyuttan 2-boyuta aktarım, MÖA' nın resimlerini ilk olarak 3 boyutlu olarak tasarladıkları ya da çizdikleri daha sonrasında resimlerini 2-boyutlu olarak tamamladıkları durumdur. Bu boyutta kimi durumlarda MÖA teoremlerin ispatlarını zihinlerinde 3-boyutlu olarak tasarlamış ancak kağıda resimlerini 2-boyutlu olarak yapmıştır. Kimi durumlarda ise teoremlerin ispatlarını 3-boyutlu olarak görselleştirirken bazı adımlarda 2-boyuta geçişler yapılmıştır. Bu alt-boyut, zihinde 3-boyut ve resimde 3-boyut olarak incelenmiştir. MÖA' nın resimleri ilk olarak 2-boyutlu olarak çizdikleri daha sonrasında ise resimlerini 3 boyuta aktardıkları durum da 2-boyuttan 3-boyuta alt boyutudur.



Şekil 4. 68. A3'ün Teorem 3'ün ispatında yer alan küme kavramının resminin 2 boyuttan 3-boyuttan geçişi

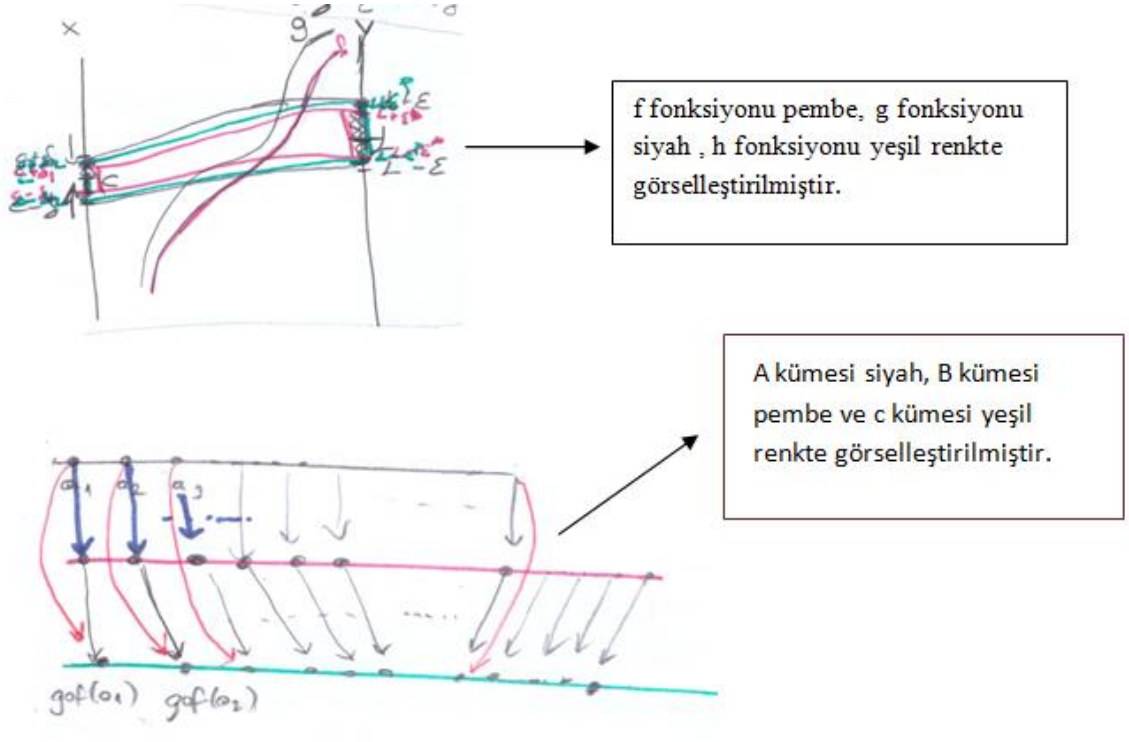
A1'in Teorem 4'ün ispatına ait resmi Şekil 4.43' te verilmiştir. A1, bu ispat resmini ortaya çıkartırken şekli aslında sonsuza kadar uzayan bir resim olarak hayal ettiğini hatta bunun bir koni olarak düşünülebileceğini ifade etmiştir. Ancak zihnindekileri kağıt üzerine aktarması gerektiğinden kağıtta 2-boyutlu olarak görselleştirmiştir. Bu nedenle Şekil 4.43'te yer alan resim 3-boyuttan 2-boyuta aktarım özelliğine sahiptir.

Araştırmacı: Şeklini mi?

A1: Kollar yani bu tarafa gittikçe açılan bir ney olarak düşünelim. *Koni olarak düşünebiliriz* fark etmez. Mesela (3,5) aralığına bakıyım.(4,8) aralığına bakıyım.(3.5) aralığının en küçüğü ki 3. Bunların kesiştiği yer neresi. Şekilde de görüldüğü gibi kollar açıldığı için bir büyüme söz konusu. *Bu aslında açılan bir koni gibi.* Büyük değerden biri.

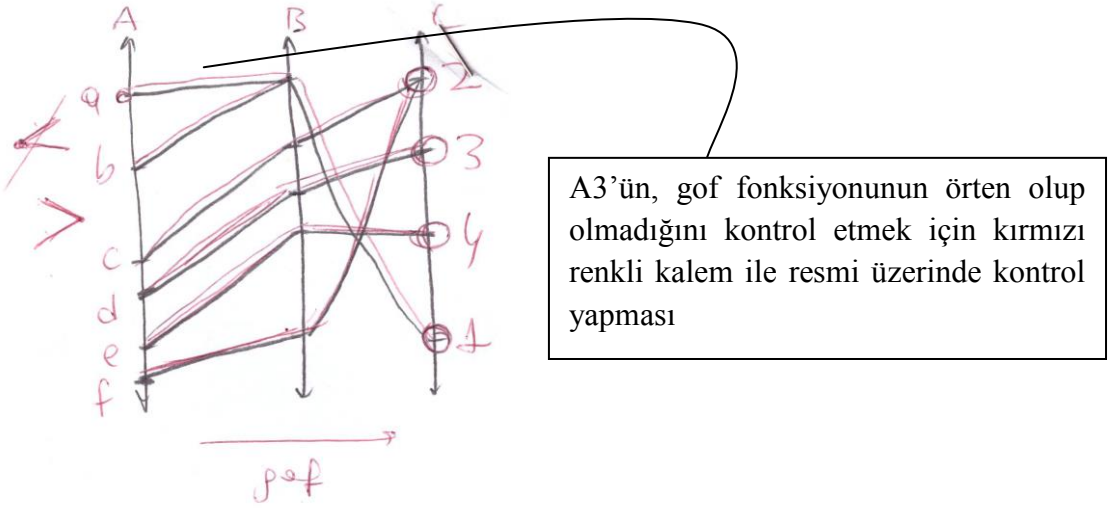
Sözel ifadeler içerme, MÖA' nın teoremlerin ispatlarına ait çizmiş oldukları resimlerinde sözel ifadelerden yararlanma durumlarını gösteren alt kategoridir. Sözel ifadelerin MÖA tarafından daha çok limit kavramı ile ilgili olan Teorem 1 ve Teorem 2'in ispatlarının resimlerinde kullanıldığı gözlemlenmiştir.

Renk Kullanımı, MÖA' nın ispatlarının resimlerinde farklı amaçlar doğrultusunda renk kullanımının olduğunu ifade eden alt kategoridir. Bazı resimlerde sıralama özelliğini temsil etmek için bazı resimlerde eleman kavramını karşılamak için bazı resimlerde ise kontrol, eşleme, sonsuz eleman çokluğu gibi durumlarda kullanılması nedeniyle renk kullanımı alt kategorisi ayırt etme, kontrol, eşleme sonsuz çoklukta eleman içerme olmak üzere dört boyuttan oluşmaktadır. Ayırt etme, ispat resimlerinde rengin teoremde yer alan kavramların belli özelliklere göre ayrılmasını ifade eder. MÖA' nın renk faktörünü Teorem 1 ve Teorem 2'de verilen fonksiyonların farklı olduğunu göstermek için, Teorem 3'te ise kümelerin farklılığını ortaya koyabilmek için kullanıldığı görülmüştür.



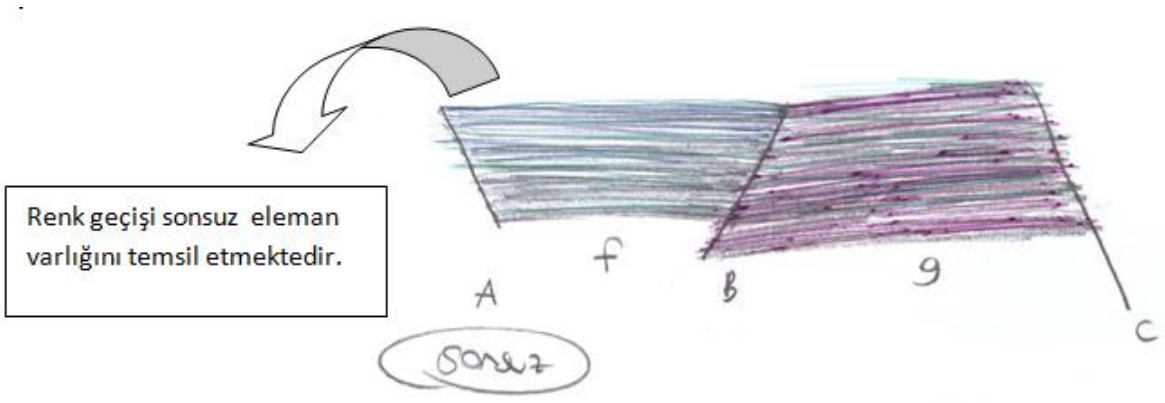
Şekil 4. 69. İspat resimlerinde ayırt etme amaçlı renk kullanımı

Kontrol, ispatın resimlerinde renk kullanımının resim adımlarının denetlenmesini ifade etmektedir. A3, Teorem 3'ün ispatını görselleştirirken bir fonksiyonun örten olmasını, örten kavramının tanımının resminde doğru gösterip gösteremediğini renk boyutunu kullanarak gerçekleştirmiştir.

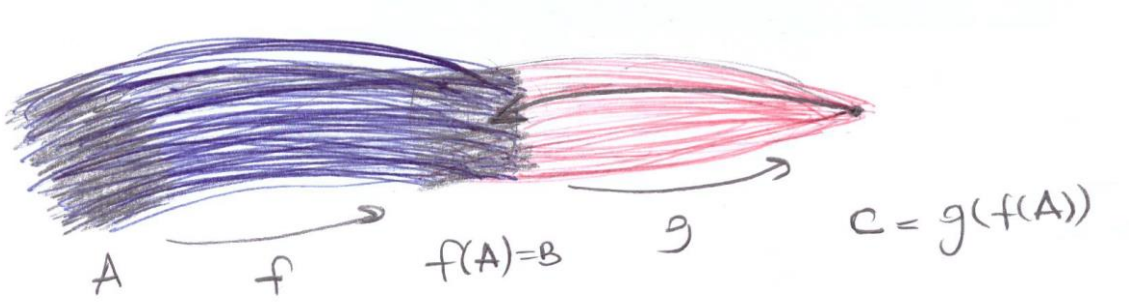


Şekil 4. 70. İspatın resminde kontrol amaçlı renk kullanımı

Sonsuz çoklukta eleman içerme, MÖA' nın teoremlerin ispatlarının resimlerinde sonsuzluk fikrini gösterebilmek için renk kategorisinden faydalanmasıdır. Şekil 4.71'de A2'in Teorem 3'ün ispatı için sonsuz elemanlı küme kavramını farklı renkler kullanarak göstermeye çalıştığı gösterilmiştir.

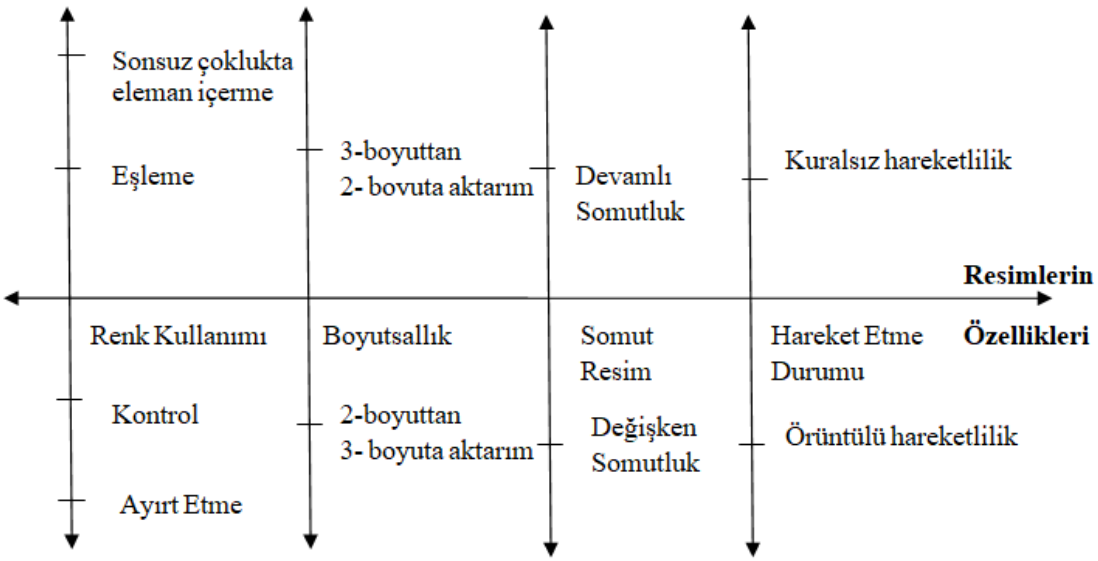


Şekil 4. 71. İspatın resminde sonsuz çoklukta eleman içerme amaçlı renk kullanımı



Şekil 4. 72. İspatın resminde eşleme amaçlı renk kullanımı

Eşleme, fonksiyonlarda eleman eşleşmesi yaparken genelleme yapabilmek için MÖA' nın renklerden faydalandığı boyuttur. MÖA ispatın resminin güvenirliğini sağlayabilmek için çok sayıda elemanı eşlemeleri gerektiğini düşündüğü görülmüştür. Bunu sağlamak için de renk boyutundan yararlanmışlardır. Şekil 4. 72'de yer alan ispat resminde her bir çizgi iki elemanın eşlenmesini temsil etmektedir. Farklı renkler iki farklı fonksiyonda eşleme yapıldığını göstermektedir.



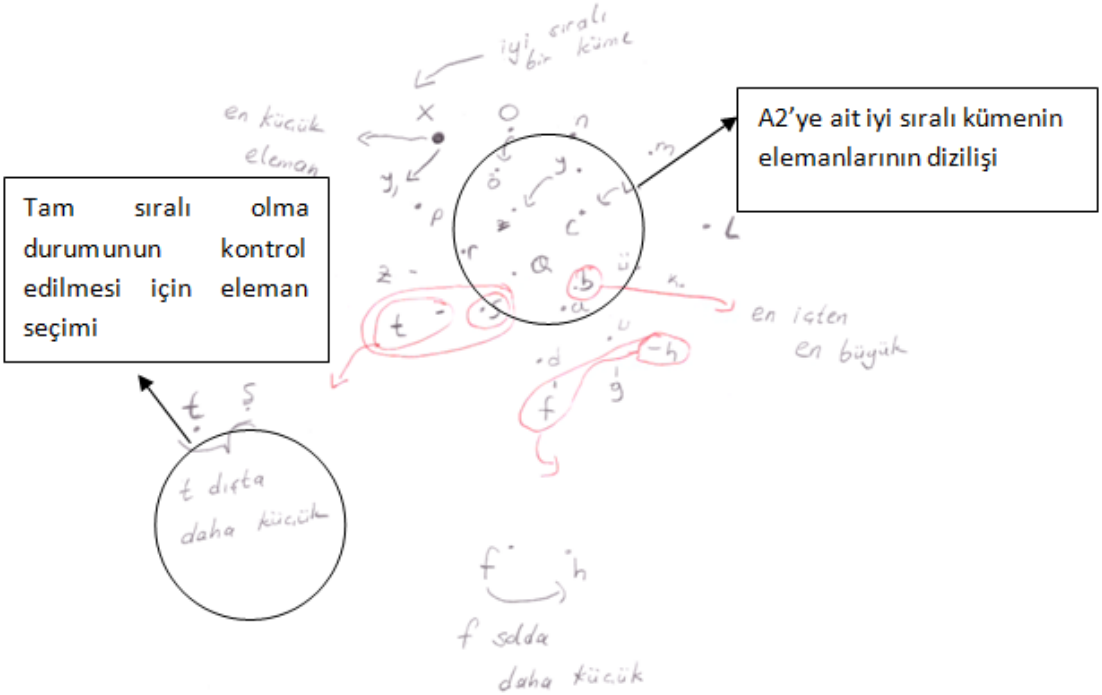
Şekil 4. 73. Resimlerin Özellikleri Kategorisine Ait Alt Kategori ve Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi

Resmin Yeri: MÖA' nın teoremlere ait oluşturdukları resimler incelendiğinde bazı resimlerin literatürde yer alan, diğer matematikçiler tarafında da kullanılan ispat resimlerine benzediği bazı ispat resimlerinin ise adayın zihinsel sürecinden doğmuş yeni

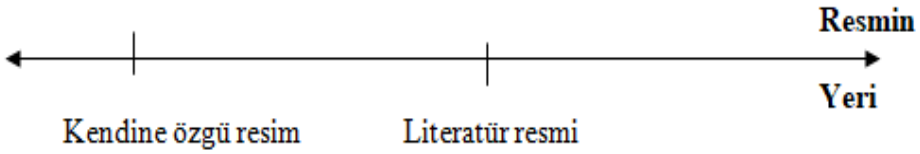
resimler olduğu görülmüştür.Bu nedenle resimlerin yeri kategorisi literatür de yer alan resimleri ve kendine özgü resimler olmak üzere iki alt boyutta ele alınmıştır.

MÖA' nın Teorem 1'e ait oluşturdukları ispat resimleri; Şekil 4.4, Şekil 4.7, Şekil 4.9 ve Şekil 4.11 de verilmiştir. Verilen şekillerdeki resimler incelendiğinde resimlerin alan derslerinde kullanılan ispat resimleri ile benzer olduğu bu resimlerin literatürde yer aldığı görülmüştür. Teorem 2'ye ait ispat resimleri Şekil 4.14, Şekil 4.16, Şekil 4.17, Şekil 4.19'da yer almaktadır.

Teorem 2'ye ait çizilen ispat resimleri incelendiğinde matematik alanında yer alan ispat resimleri olduğu fark edilmektedir. Teorem 3'e ait MÖA tarafından çizilen ispat resimleri incelendiğinde A1'in çizmiş olduğu ispat resminin alanda karşılaşılan resimlerden farklı olduğu söylenebilir. Şekil.4.46' da, A2'nin Teoerem4'üm ispatına ait resmi verilmişti. A2'nin çizmiş olduğu bu resim literatür incelenmesi yapıldığında ilk kez karşılaşıldığı görülmüştür. Bu nedenle bu resim kendine özgü alt kategorisine aittir. Aşağıda her kendine özgü resimler alt kategori için bir resim örneği yer almaktadır



Şekil 4. 74. Resmin yeri kategorisinden kendine özgü resim alt kategorine ait resim



Şekil 4. 75. Resmin yeri Kategorisine Ait Alt Kategori ve Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi

MÖA' nın Matematiksel Teoremlerin İspatlarının Görselleştirilmesi Sürecinde Teoremlerde Yer Alan Bazı Ortak Kavramların Resimlerinin Kategorileri, İçerikleri ve Bulguları

Katılımcıların matematiksel teoremlerin ispatlarını görselleştirme durumları incelendiğinde teoremlerde yer alan ortak kavramların resimlerinin çeşitlilik gösterdiği görülmüştür. Bu kavramların resimlerine ait kategoriler oluşturulmuştur. Hangi teoremde hangi kavramların yer aldığını gösteren tablo aşağıda yer almaktadır.

Tablo 4

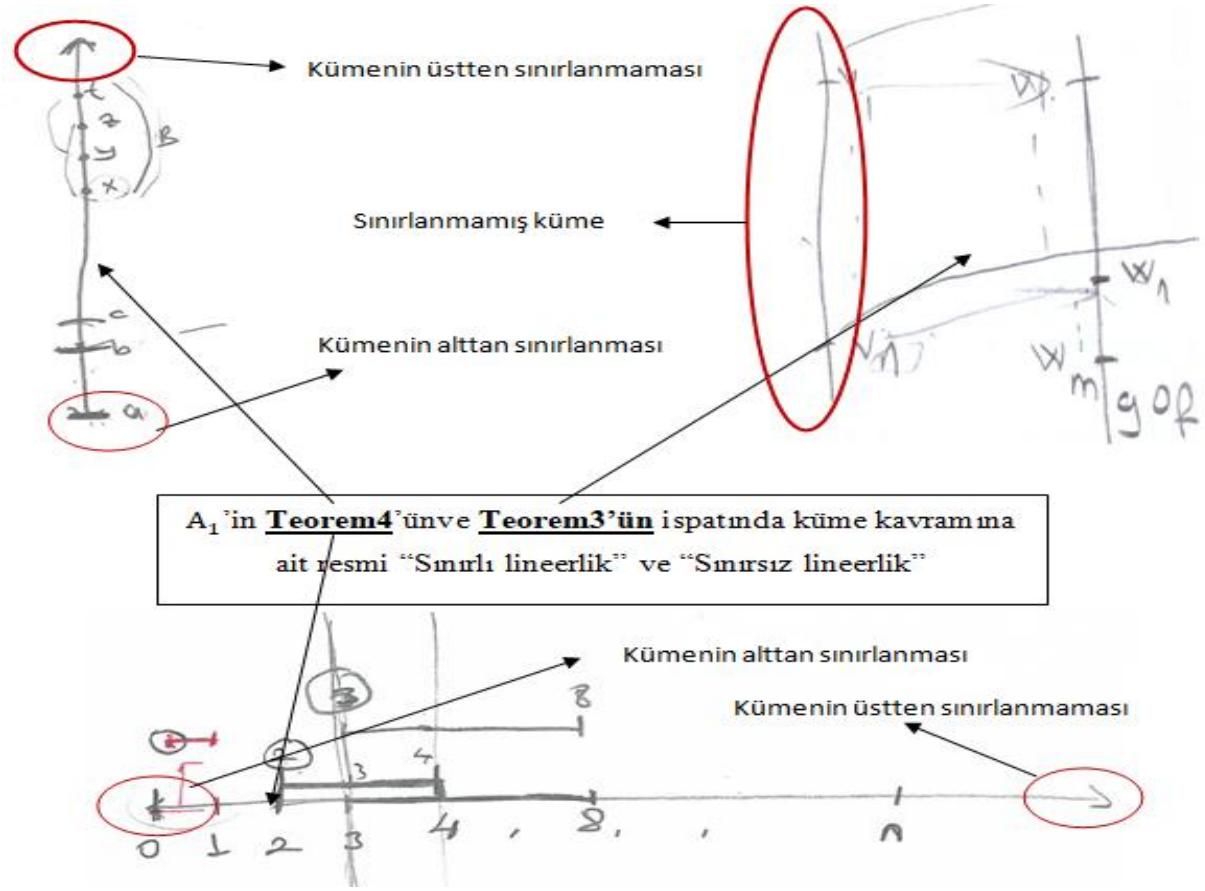
Bütün Teoremlerde Yer Alan Bazı Ortak Kavramlar

	Teorem 1	Teorem 2	Teorem 3	Teorem 4	Teorem 5
Küme	X	X	X	X	X
Fonksiyon	X	X	X	X	X
Eleman	X	X	X	X	X

A1'in teoremlerin ispatlarına ait resimleri incelendiğinde küme kavramına ait dört farklı resim yaptığı, A2'nin küme kavramına ait beş farklı resim yaptığı, A3'ün küme kavramına ait beş farklı resim yaptığı ve A4'ün küme kavramına ait üç farklı resim yaptığı gözlemlenmiştir. Bu resimlerden kavrama ait kendi içerisinde Teorem 1, Teorem 2 ve Teorem 3'te üç, Teorem 4'te 5 ve Teorem 5'te beş farklı resmin yer aldığı görülmüştür.

Küme Resimleri: MÖA' ların teoremlerin ispatlarını görselleştirme sürecinde yapmış oldukları resimler incelendiğinde adayların beş teoremde de yer alan küme kavramını birden çok şekilde görselleştirdiği görülmüştür. Bu çeşitlilik adaydan adaya görüldüğü gibi bir adayın farklı teoremler içindeki kendi resimlerinde de gözlemlenmiştir. Bu nedenle küme kavramına ait resimler kendi içinde ortaklıklarına göre sınıflandırılmış, lineer diziliş, yoğun olma, bölgesellik, informal formalar olmak üzere dört alt kategoride incelenmiştir.

Lineer diziliş, MÖA' nın teoremlerin ispatlarını görselleştirirken küme kavramını düz çizgi şeklinde görselleştirdikleri kategoridir. Bu kategoride yer alan resimler doğrulardan faydalanılarak oluşturulmuştur. Lineer diziliş durumunun yer aldığı kümeler sınırlı olma ve sınırsız olma durumlarında ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle bu alt kategori sınırlı lineerlik ve sınırsız lineerlik olmak üzere iki boyutta incelenmiştir. Sınırlı lineerlik resimlik boyutunda yer alan resimler yatay sınırlı ve dikey sınırlı olmak üzere iki alt boyuta ayrılmaktadır.



Şekil 4. 76. A1'in Teorem 4'ün ispatına çizmiş olduğu lineer diziliş kategorisine ait resimleri

Sınırlı lineerlik, lineer diziliş kategorisinde yer alan bir küme resminin belirli ek resimlerle resimlerin sınırlandırıldığı durumdur. Bu boyuttaki resimler, adaylar tarafından küme kavramının teorik özellikleri göz önünde bulundurularak çizilen resimlerdir. Teoremlerin ispatlarının görselleştirilmesi sürecinde incelenen sınırlı resimlerin yatay düz çizgi ve dikey düz çizgi olarak iki farklı şekilde görselleştirdiği görülmüştür.

Sınırsız lineerlik, küme kavramının teorik bilgisi karşılında sınırsız çokluktaki bir kümenin resminin yer aldığı durumdur. Bu alt boyutu MÖA genellikle sonsuz elemanlı kümeleri görselleştirmek için kullanmıştır.

Yoğun olma, MÖA' nın teoremlerin ispatlarını görselleştirme süreçlerinin eleman çokluğunun fazla olması durumlarını temsil etmek için küme kavramını tarama yaparak gösterdiği kategoridir. Bu kategorideki resimlerin eleman sayısının sonsuz ya da gösterilmesi zor olduğu düşünülen çokluktaki kümeler için kullanıldığı görülmüştür. Yoğun olma durumu düzgün sınırlı kümeler ve sınırsız kümelerde alan taramaları yapıldığı durumlarda gözlemlendiği için sınırsız kümelerde ve sınırlı kümelerde yoğunluk olmak üzere iki boyutta incelenmiştir.



Şekil 4. 77. A2'nin yoğun olma alt kategorisine ait küme resmi

A2 ile Teorem 3'ün ispatına ait görselleştirme sürecinde küme kavramı üzerine aday ve araştırmacı arasında yapılan konuşma aşağıdaki şekildedir.

Araştırmacı: Kümeyi nasıl gösterirdin? *A* kümesini sonsuz noktası olan.

A2: Bir çember alsak.

Araştırmacı: Çember?

A2: Evet. *Çemberin üzerinde sonsuz nokta var. O zaman sonsuz elemanlı olmuş olur. Ya da çember içinde sonsuz tane eleman alırım.*

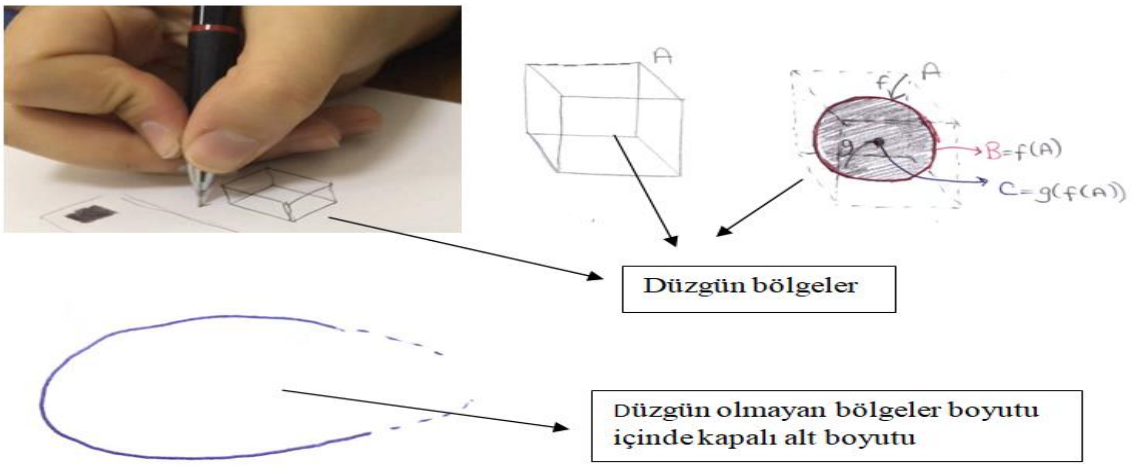
Araştırmacı: Onu nasıl gösteririz. Sonsuz tane nokta çizebilir miyiz?

A2: Hepsini karalarım. *Böyle de sınırlamış oldum* ama. *Dışındakini kaldırıp yapsam*. Şu şekilde.

Araştırmacı: Bu sonsuz elemanlı bir küme mi?

A2: Evet. *Az önce sınırlamış oldum.*

Bölgesellik, MÖA ispatları görselleştirirken küme kavramına ait kapalı şekiller kullanarak resimlerini oluşturduğu kategoridir. Kapalı şekil resimleri, düzgün formlarda ve düzgün olmayan formlarda gerçekleşmektedir. Bu nedenle bu kategori düzgün (geometrik) bölgeler ve düzgün olmayan bölgeler olmak üzere iki boyutta incelenmektedir. Adaylar küme kavramına ait üçgen, daire kare, dikdörtgen kenarları bulunan geometrik şekiller ile kapalı bölgeler oluşturmuştur. Bu resimler düzgün(geometrik) bölgeler boyutuna aittir. Düzgün bölgeler boyutu, kapalı sonsuz ve açık sonsuz olmak üzere iki alt boyuta ayrılmaktadır. Eğriler yardımıyla kapalı bölgeler şeklinde çizilen resimler düzgün olmayan bölgeler boyutuna aittir. Düzgün olmayan bölgeler, kapalı ve açık olmak üzere iki alt boyutta karşılaşılmıştır.



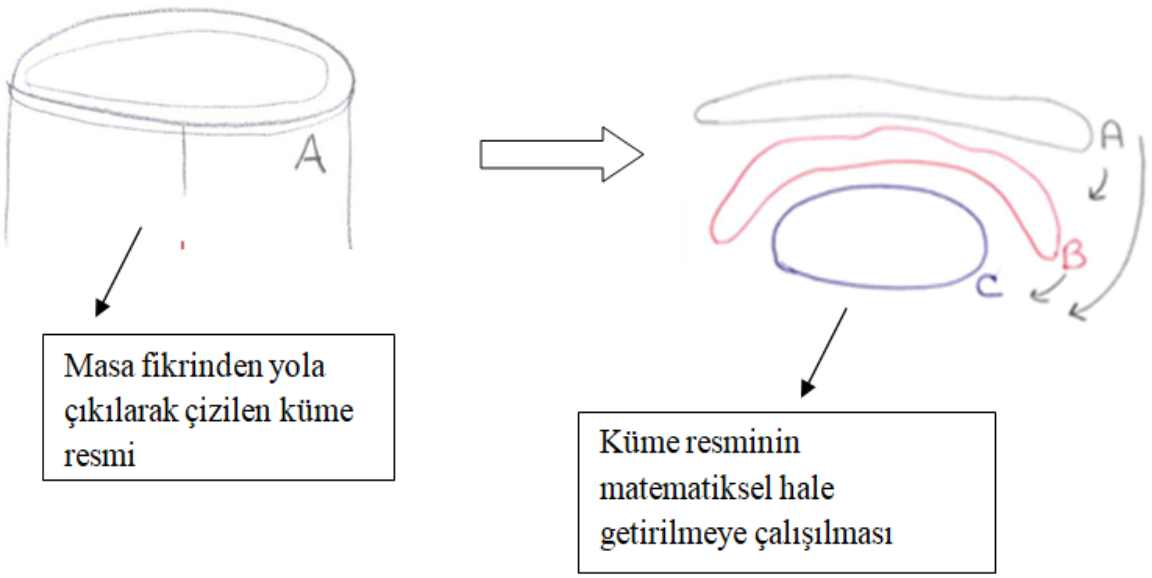
Şekil 4. 78. A3'nin bölgesellik alt kategorisine ait küme resmi

İnformal formlar, matematik öğretmen adaylarının küme kavramına ait resimlerinin matematiksel formlar dışındaki resimlerinin yer aldığı kategoridir. Öğretmen adayları bazı

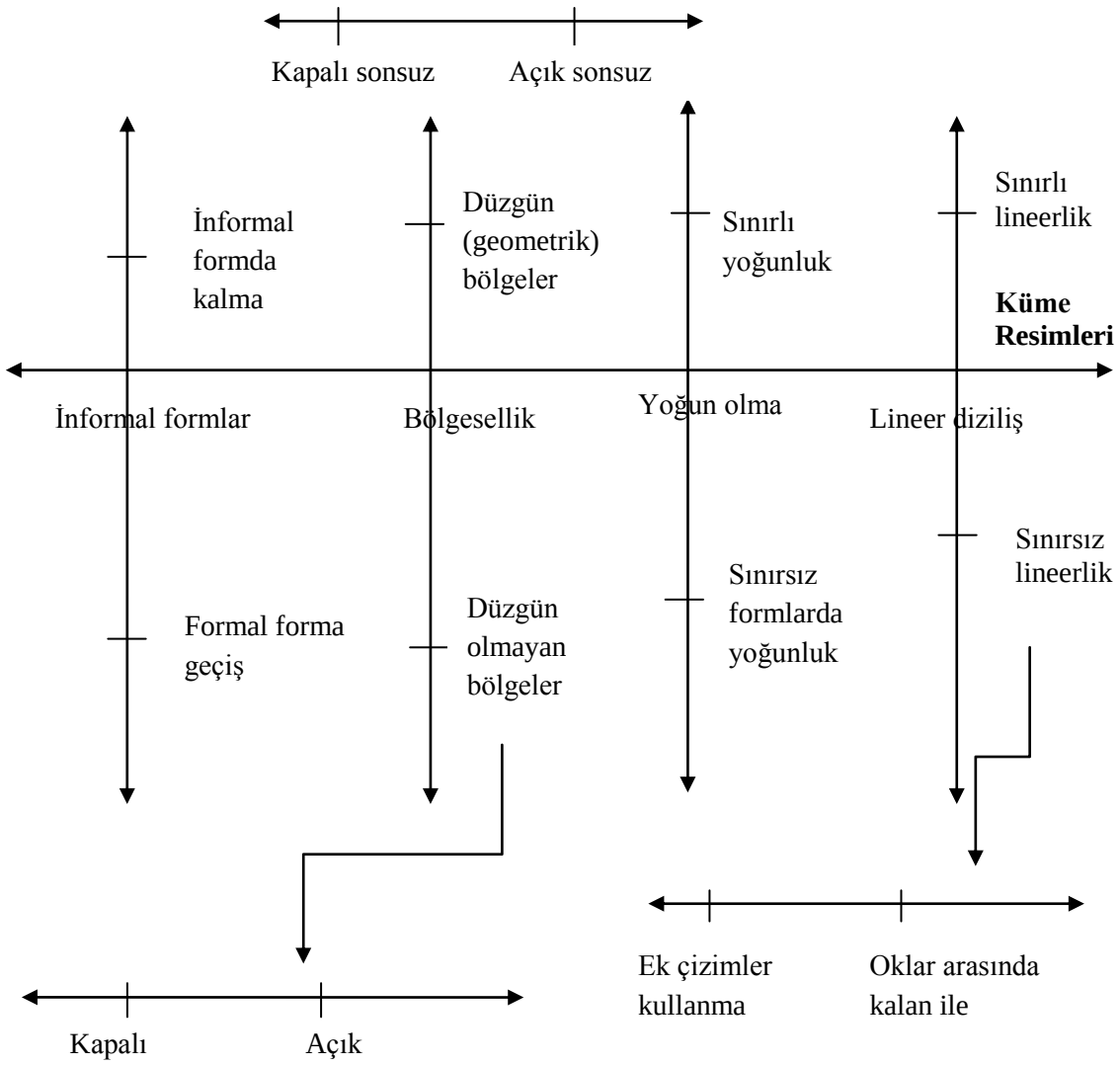
teoremlerin ispatlarını görselleştirirken küme kavramı resmini informal formda bırakmış, bazı teoremlerde ise formal bir düzen haline getirmiştir. Bu nedenle informal formlar alt kategorisi informal formda kalma ve formal formlara geçiş olmak üzere iki boyuttan oluşmaktadır.

İnformal formda kalma, MÖA' nın küme kavramı resimlerini geometrik resimlerin dışında bıraktığı durumlardır. Formal formlara geçiş boyutu, MÖA' nın küme kavramı resimlerini geometrik resimler dışında başlatıp matematiksel resimler haline getirdiği durumlardır.

A2'nin Teorem 3'e ait resminde yer alan küme kavramı resimleri ilk olarak geometrik şekiller dışında çizildiği daha sonrasında resimlerin matematikselleştirildiği görülmüştür. Şekil 38'te A2'nin ispata ait resmi yer verilmiştir. İspatın resminde yer alan küme kavramı resimi formal forma geçiş alt boyutuna aittir.



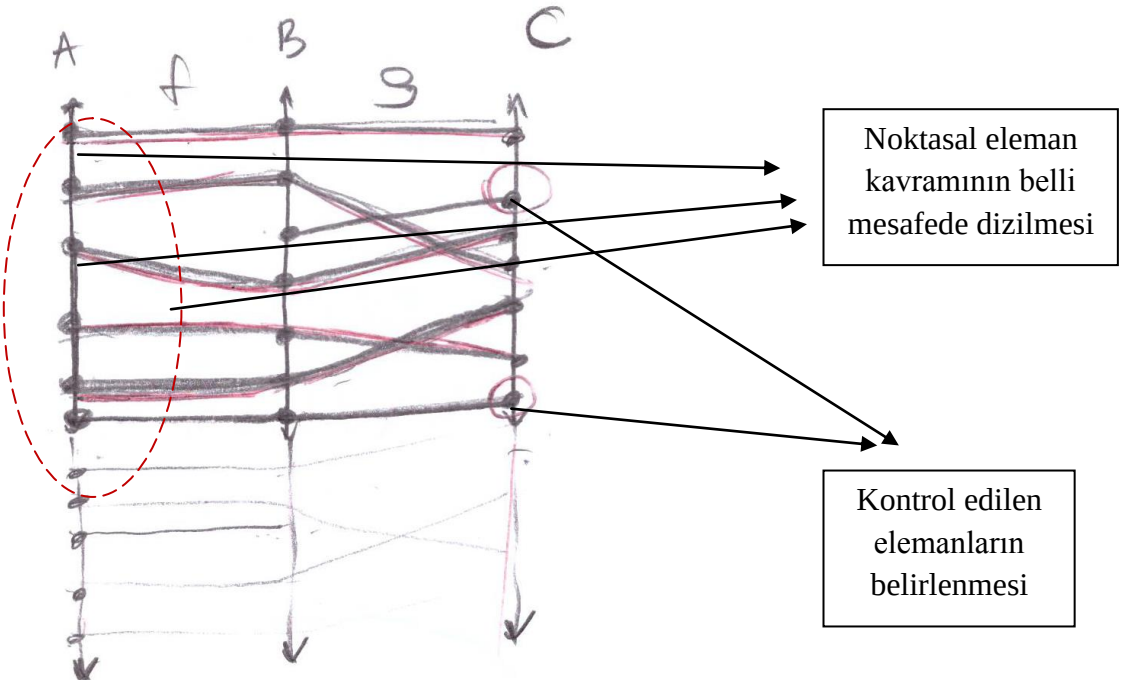
Şekil 4. 79. A2 'nin informal formlar alt kategorisine ait küme resmi



*Şekil 4. 80.*Küme resimleri kategorisine ait alt kategori ve boyutların eksen üzerinde gösterimi

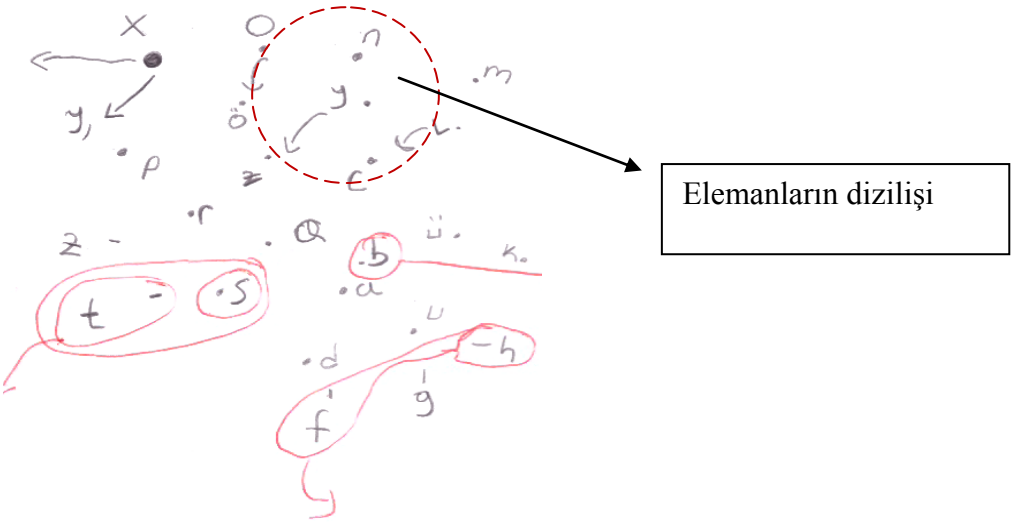
Elemanlara Karar Verme: MÖA' nın teoremlerde yer alan eleman kavramına ait resimlerinin bulunduğu kategoridir. MÖA' nın ispat resimleri incelendiğinde eleman kavramının farklı resimlerinin olduğu görülmüştür. Elemanlara karar verme kategorisi mutlak mesafe olma, rastlantısal diziliş, tarama ve geometrik resimler olmak üzere dört alt kategoriden oluşmaktadır.

Mutlak mesafe olma, eleman kavramının nokta çizgi gibi resimlerle gösterilen elemanların belli uzaklıklar ile yerleştirildiği durumlardır.



Şekil 4. 81. Elemanlara karar verme kategorisine ait mutlak mesafe olma alt kategorisi

Rastlantısal diziliş, elemanlarının keyfi düzenle küme içerisinde dizildiği resim durumlarını ifade etmektedir. A3'ün ve A2'nin Teorem 4'e ait ispat resimlerinde yer alan küme resimlerinde elemanlar bir kurala bağlı olmaksınız yerleştirildiği görülmüştür.



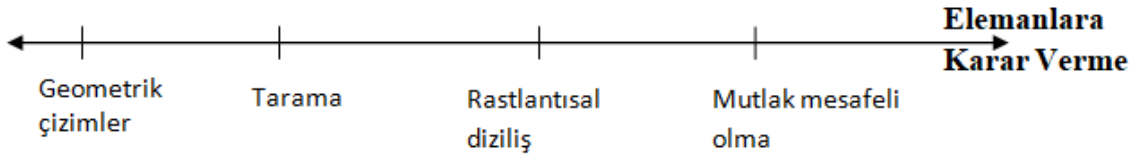
Şekil 4. 82. Elemanlara karar verme kategorisine ait rastlantısal diziliş alt kategorisi

Tarama, MÖA' nın elemanları küme içerisinde tarama yaparak resmettiği durumları göstermektedir. MÖA, tarama alt kategorisindeki resimleri genellikle sayılamaz çokluktaki ve sonsuz elemanlı kümelerin resimlerinde kullanmıştır. A3 ve A4'ün Teorem 3'ün ispatında eleman kavramını tarama yaparak görselleştirdiği görülmüştür. Bunun gerekçesi olarak da tanımlı kümelerin sonsuz elemanlı olmasını göstermişlerdir.



Şekil 4. 83. Elemanlara karar verme kategorisine ait tarama alt kategorisi

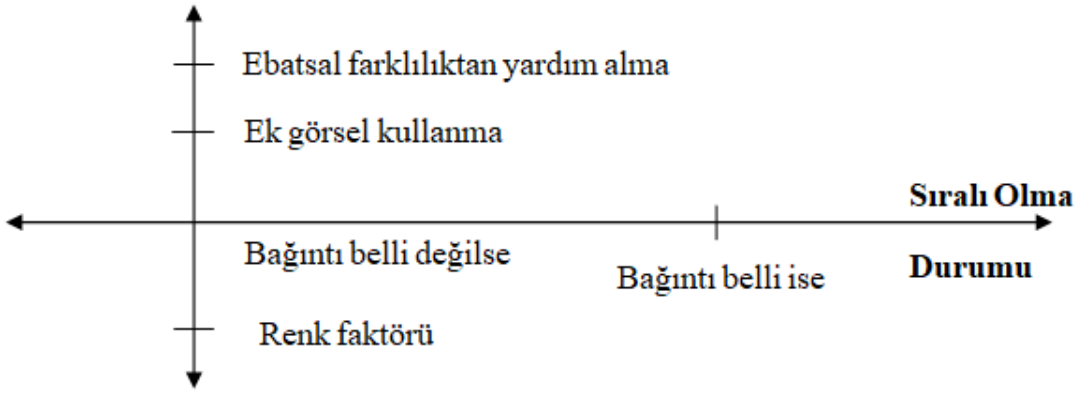
Geometrik resimler, MÖA' nın eleman kavramını geometrik şekiller üzerinden tasarlayıp görselleştirdikleri durumlardır. A1'in, Teorem 1'in ispatının resimde iyi sıralı küme kavramını görselleştirmek için eleman kavramını n-kenarlı çokgenler olarak çizdiği görülmüştür. Aynı şekilde A3, Teorem 4'ün ispatında eleman kavramını belli oranlarda büyüyen daireler olarak görselleştirmiştir.



*Şekil 4. 84.*Elemanlara karar verme kategorisine ait alt kategorilerin eksen üzerinde gösterimi

Sıralı Olma Durumu: MÖA' nın çizmiş oldukları ispat resimleri incelendiğinde sıralı küme kavramına ait farklı görselleştirme süreçlerinin yaşandığı görülmüştür. Sıralı olma durumu kategorisi bağıntı belli ise ve bağıntı belli değilse olmak üzere iki alt kategoriye ayrılmaktadır. Sıralı olma kavramı için ek resimler kullanılmış, resim küçük

parçalara ayrılmış, boyutsal farklılıklar oluşturulmuştur. Bu nedenle bağıntı belli değilse alt kategorisi üç boyutta incelenmiştir.

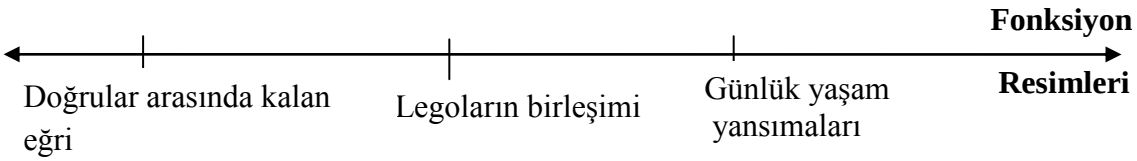


Şekil 4. 85. Sıralı olma kategorisine ait alt kategori ve boyutların eksen üzerinde gösterimi

MÖA' nın teoremlerde eğer sıralama bağıntısı belli ise kavramı görselleştirmekte zorlanmadıkları görülmüştür. Ancak sıralama bağıntısı belli değil ise farklı resim yolları kullandıkları görülmüştür. Bağıntının belli olmadığı durumlardan biri olan Teorem 4'te A4, sıralı küme kavramını görselleştirmek için küme resmine bir ok ile yön vermiş elemanlarının bu çizilen ok yönünde sıralandığını ifade etmiştir. A2'ün Teorem 4'e ait sıralı küme resmi Şekil 4.45'te verilmişti.

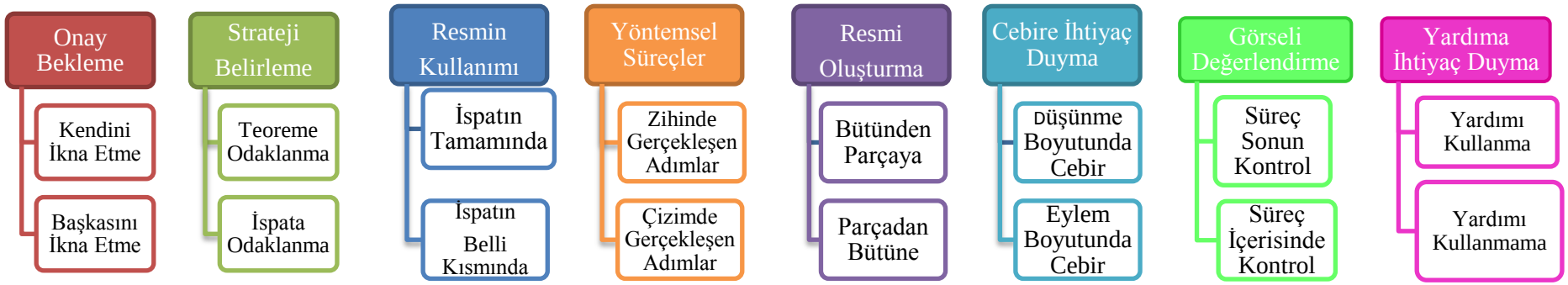
Ebatsal farklılıklardan yardım alma, MÖA' nın sıralı bir kümenin elemanlarını büyüklüklerini göz önüne alarak sıraladığı durumları ifade etmektedir.A3'ün Teorem 4'ün ispatına ait resminde sıralı bir kümenin elemanlarını görselleştirebilmek için elemanları büyüklük olarak küçük şekilden büyük şekle olarak sıraladığı görülmüştür. A4, Teorem 4'te ispatı görselleştirirken sıralı olma durumunu iki farklı renk kullanarak göstermiştir.

Fonksiyon Resimleri: MÖA' nın teoremlerde yer alan fonksiyon kavramına ait resimleri incelendiğinde teoreme bağlı olarak farklı resimlerin ortaya çıktığı görülmüştür. Daha önceki başlıklarda MÖA' nın teoremlerin ispatlarına ait resimleri incelenmiştir. Fonksiyon kavramının, A1'in Teorem 3'te iki legonun birleşimi şeklinde, Teorem 1 ve Teorem 2'de genel olarak iki dikey ya da yatay doğru arasında kalan bir eğri olarak, Teorem 5'te bir DNA sarmalı olarak görselleştirildiği görülmüştür.



*Şekil 4. 86.*Fonksiyon resimleri kategorisine ait alt kategorilerin eksen üzerinde gösterimi

MÖA' nın teoremlere ait ispat resimleri ve teoremlerde yer alan bazı ortak kavramlara ait resimleri bu resimlerden ortaya çıkan kategoriler, alt kategoriler ve boyutlar şekilleri ile birlikte açıklanmıştır. Bir sonraki başlıkta üçüncü alt probleme ait yani MÖA 'nı teoremlerin ispatlarını görselleştirme süreçlerine ait kategorilerine yer verilmiştir



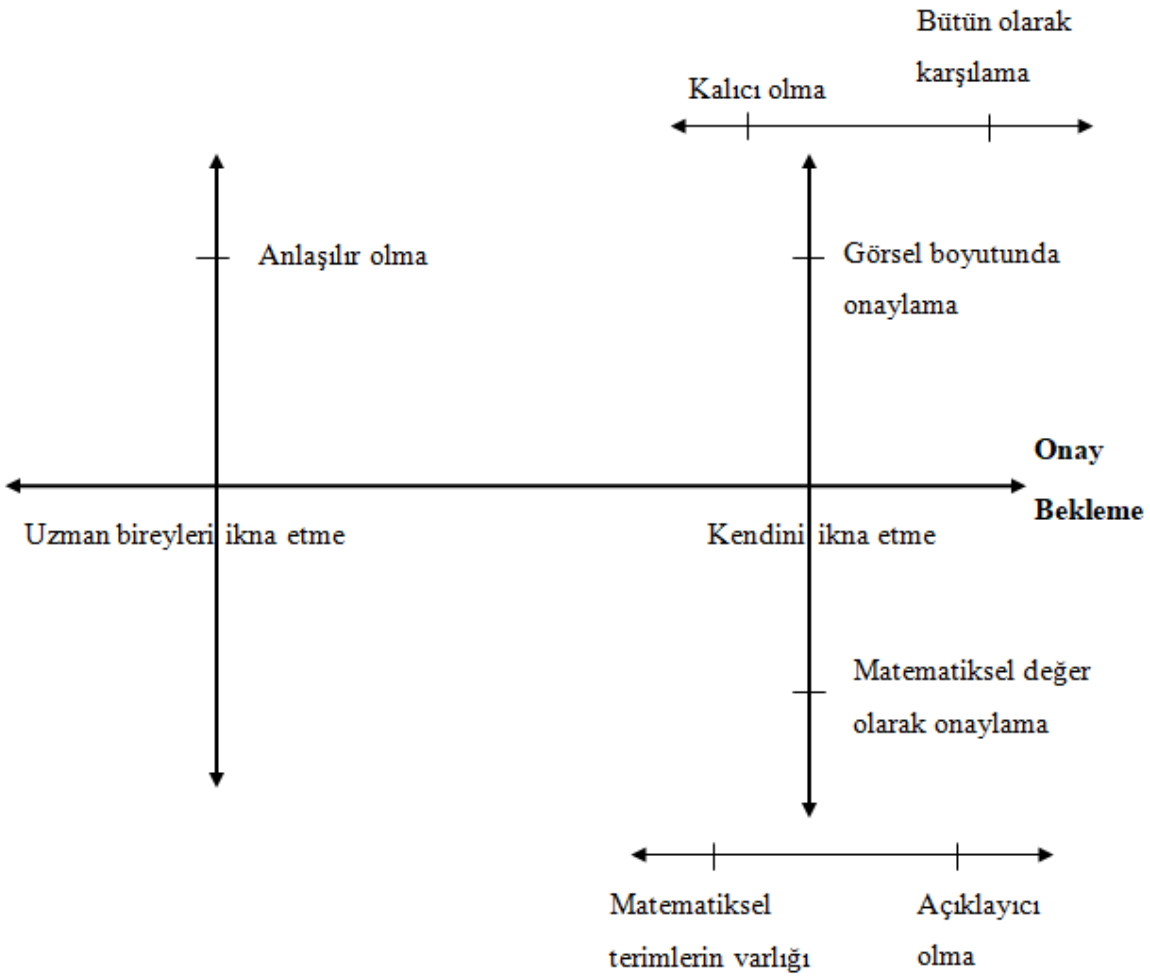
Şekil 4. 87. MÖA' nın matematiksel teoremlerin ispatlarını görselleştirme süreçleri

MÖA' nın Matematiksel Teoremlerin İspatlarının Görselleştirme Sürecine Ait Kategoriler ve İçerikleri

Onay Bekleme: MÖA' nın teoremlerin ispatlarını görselleştirme sürecinde resimlerinin, hem kendilerini hem de uzman bireyleri ikna etmesini beklediği durumlarının ortaya çıktığı görülmüştür. Bu nedenle süreç, kendini ve başka bireyleri ikna etme olarak ele alınmış, onay bekleme kategorisi kendini ikna etme ve uzman bireyleri ikna etme olarak iki alt kategoride incelenmiştir.

Kendini ikna etme, MÖA' nın görselleştirme sürecinde çizdiği resimlerin ispatı karşılayıp karşılamadığı yönünde kendini sorguladığı durumları gösteren kategoridir. MÖA' nın kendini ikna etme ile ilgili durumları, resmin resim boyutunda ve resmin matematik selliğini sorguladıklarında ortaya çıkabilmektedir. Bu nedenle kendini ikna etme alt kategorisi resmi resim boyutunda onaylama ve matematiksel değer olarak onaylama olmak üzere iki boyutta ele alınmıştır. Resim boyutunda onaylama, görselleştirme sürecinde çizilen resimlerin şekilsel özelliklerinin kontrol edildiği durumları ifade eder. Bu boyut, kalıcı olma ve kapsamlı olma şeklinde iki alt boyutta ortaya çıkmıştır. Kalıcı olma, çizilen resmin tekrarlanabilirliğini yansıtırken bütün olarak karşılama ise resmin teoremin içeriğini kapsamlı olarak bir arada bulunmasını yansıtmaktadır. Matematiksel değer olarak onaylama, görselleştirme sürecinde çizilen resmin MÖA' nın matematiksel olarak belirttikleri ölçütler kapsamında resmi değerlendirdikleri durumları ifade eder. Bu boyut açıklayıcı olma ve matematiksel terimlerin varlığı olmak üzere iki alt boyutta yer almaktadır. Açıklayıcı olma, MÖA' nın görselleştirme sürecinde teoreme ait resimlerinin teoremi öz ve açık olarak yansıtması matematiksel terimlerin varlığı boyutu ise resimlerde matematiksel terimlerin varlığına ihtiyaç duyulmasını yansıtmaktadır.

Uzman bireyleri ikna etme, MÖA' nın görselleştirme sürecinde teoremlerin ispatlarına ait çizdiği resimlerin diğer matematikçiler tarafından onaylanmasını beklediği kategoridir. MÖA' nın resimlerini oluştururken resimlerin diğer matematikçiler tarafından onaylanmasını sağlamak için anlaşılabilirliğe önem verdiği görüldüğünden bu kategori anlaşılır olma alt boyutunda ele alınmıştır.

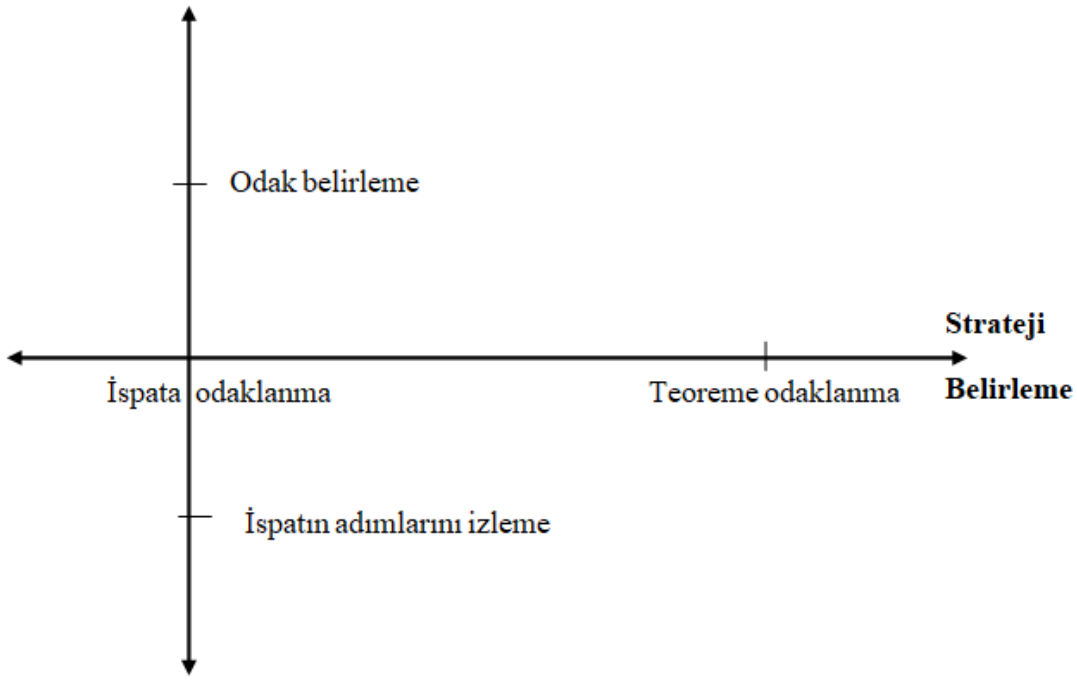


Şekil 4. 88. Onay Bekleme Kategorisine Ait Alt Kategori ve Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi

Strateji Belirleme: MÖA' nın matematiksel teoremlerin ispatlarını görselleştirmeden önce nasıl ilerleyeceklerini belirledikleri gözlemlenmiştir. Adayların ispatları görselleştirirken teoremin ifadesine ya da teoreme ait verilen matematiksel ispata odaklanmalarından strateji belirleme kategorisi teoreme odaklanma ve ispata odaklanma olarak iki alt kategoride incelenmiştir.

Teoreme odaklanma, MÖA' nın görselleştirme sürecinde verilen teoremi merkeze alarak görselleştirme sürecini teorem üzerinden yürüttüğü kategoridir. Bu kategoride MÖA odak kavram belirleyerek teoremde yer alan diğer kavramların resimlerini bu kavrama göre şekillendirmektedir.

İspata odaklanma, MÖA' nın görselleştirme sürecinde teoremlere ait verilen ispatlar üzerinden resim yaptıkları kategoridir. Bu kategori ispatın belli kısımlarına odaklanarak ve ispatın adımlarını izleyerek oluşan durumlarda görüldüğünden odak belirleme ve ispatın adımlarını izleme olarak 2 boyutta incelenmiştir. Odak belirleme, teoremin verilen ispatında önemli adımlar belirleyerek bu kısımların resimleştirildiğini ifade etmektedir. İspatın adımlarını izleme boyutu ise teoremin verilen ispatının adımlarının sırasıyla çizilerek görselleştirmenin yapıldığı boyuttur.



Şekil 4. 89. Strateji belirleme kategorisine ait alt kategori ve boyutların eksen üzerinde gösterimi

Resmi Oluşturma: MÖA' nın süreç içerisinde verilen teoreme ait ispatının resimlerinin oluşum şeklini ifade eden kategoridir. Bu kategoride yer alan resimlerin farklı kavramlara ait resimlerin bir araya getirilerek ve bir resim üzerinden ek resimler oluşturularak yapıldığı görülmektedir. Bu nedenle bu kategori parçadan bütüne ve bütünden parçaya olmak üzere iki alt kategoride ele alınmıştır.

Parçadan bütüne, resimler oluşturulurken teoremde yer alan kavramların birbirinden bağımsız olarak ele alınması resimlerin sadece çizilen parçaların özelliklerinden faydalanılarak oluşturulmasıdır. Bu kategori hem merkezi bir kavram etrafında hem de ayrı görselleştirilen kavramların birleşimi durumlarında ortaya çıkmıştır. Bu nedenle parçadan

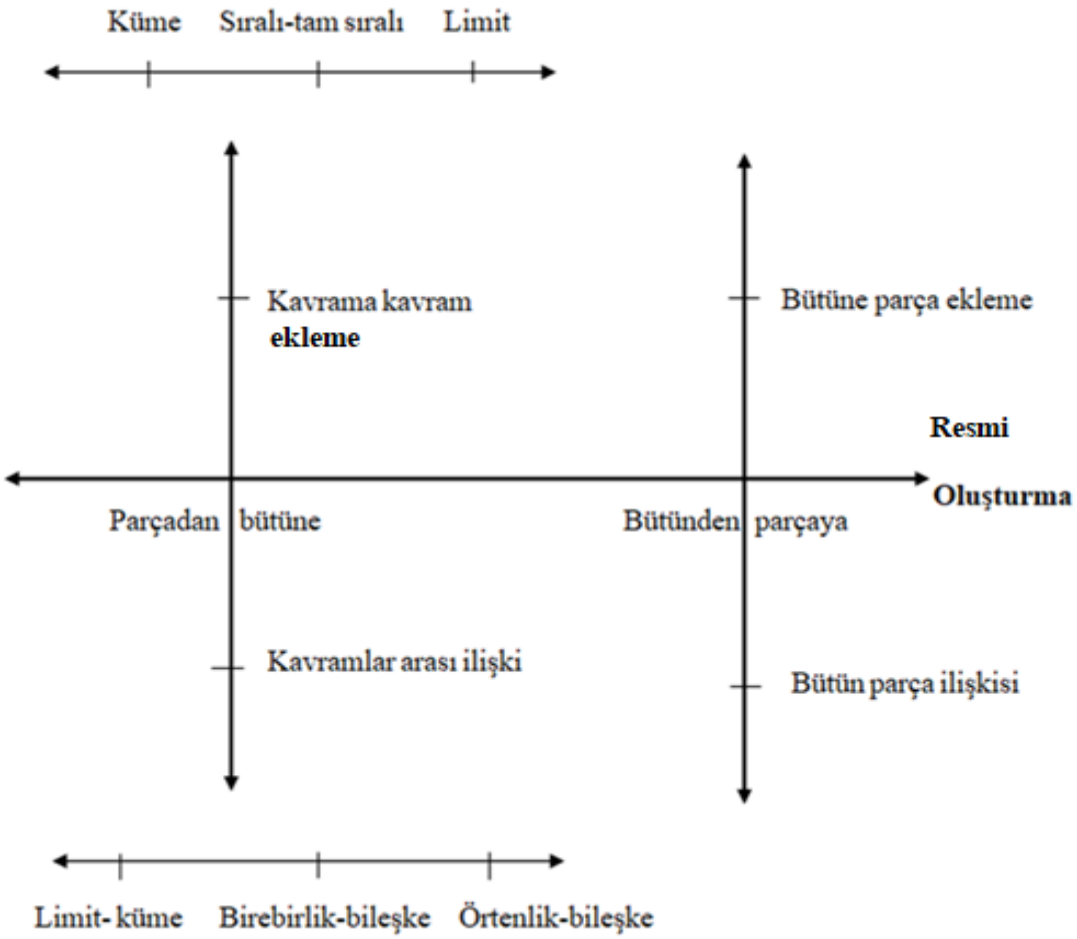
bütüne alt kategorisi kavrama kavram ekleme ve kavramlar arası ilişki olmak üzere iki boyutta incelenmiştir.

Kavramlar arası ilişki boyutu, görselleştirmenin kavramların ilk olarak kendi özellikleri kapsamında sadece kavramın tanımının doğrultusunda görselleştirilip daha sonrasında teoremin göstermek istediği düşünceye yönelik kavramların resimlerinin birleştirilmesini ifade eder. Bu boyut kapsamında limit-küme, birebirlik – bileşke ve örtenlik-bileşke olmak üzere 3 alt boyut yer almaktadır. Bu alt boyutlar resimler arasındaki ilişkinin, resimlerin bir araya getirilişinin neye dayandığını gösterir.

Kavrama kavram ekleme boyutu, teoremde yer alan bir kavram belirlenmesi ve bu kavramın resminden sonra diğer resimlerin bu kavramın resminin üzerine eklenmesini ifade etmektedir. Kavrama kavram ekleme boyutu küme, sıralı-tam sıralı, limit olmak üzere 3 alt boyuta ayrılır. Bu alt boyutlar ilk olarak çizilen resmin nasıl belirlendiğini göstermektedir.

Bütünden parçaya, görselleştirme sürecinde yapılan resimlerin bütünü oluşturmayı amaçlandığını ifade eden kategoridir. Bu kategoride resimler oluşturulurken sonuçta varılmak istenen düşünce odak noktadadır. Bu tür görselleştirmelerin gerçekleştiği süreçlerde teoremin tamamı göz önünde bulundurularak resimlerin ne tür özelliklerde çizileceğine karar verilir. Bu kategori bütüne parça ekleme ve bütün parça ilişkisi olmak üzere iki boyuttan oluşmaktadır.

Bütün parça ilişkisi boyutu, görselleştirme sürecinde çizilen resimlerin bütün olarak parçalarıyla ilişkili olduğunu ifade eder. Bütüne parça ekleme boyutu, görselleştirmede çizilen resmin bütün olarak incelendiğinde ek parçaların resme eklenmesini ifade etmektedir.



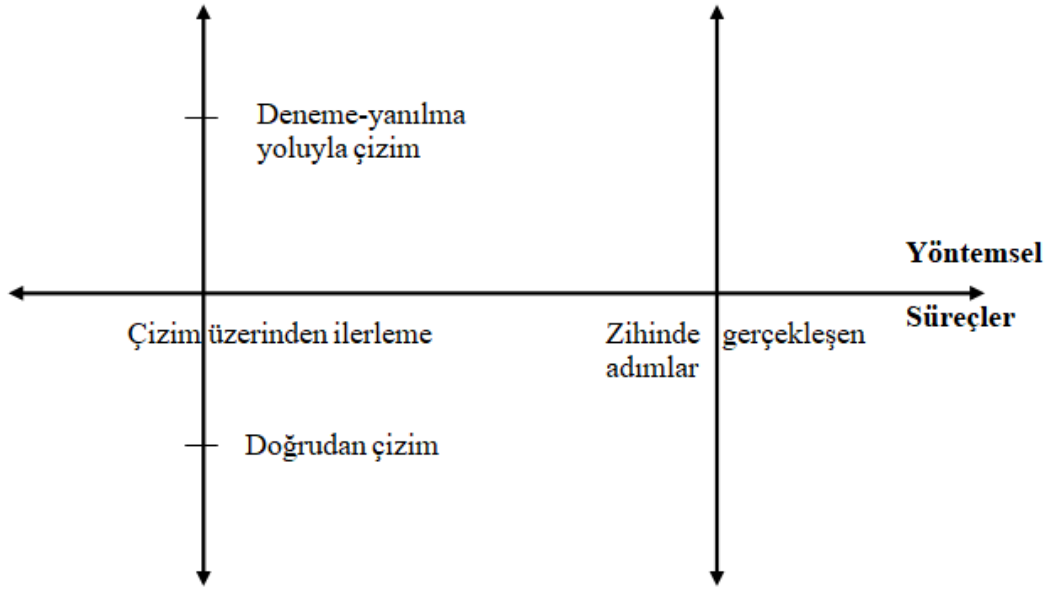
Şekil 4. 90. Resmi oluşturma kategorisine ait alt kategori ve boyutların eksen üzerinde gösterimi

Yöntemsel Süreçler: MÖA' nın teoremlerin ispatlarını görselleştirirken resimlerin kağıt üzerinde ya da zihinde gerçekleştiğini gösteren kategoridir. Yöntemsel süreçler kategorisi zihinde gerçekleşen adımlar ve resim üzerinden ilerleme olmak üzere iki boyuta ayrılmaktadır.

Zihinde gerçekleşen adımlar, MÖA' nın ispatların resimlerini düşünce yoluyla dile getirdikleri, resimler üzerindeki ilerlemeyi zihinsel olarak ilerletmelerini temsil eder.

Resim üzerinden ilerleme, MÖA' nın görselleştirme sürecinde teoremlerin ispatlarını sadece resimler üzerinden yürüttüklerini ifade eder. Bu kategori deneme-yanılma yoluyla resim ve doğrudan resim olmak üzere iki boyuttan oluşmaktadır. Deneme-yanılma yoluyla resim, ispatların resimlerine ait resimlerin rastgele adımlarla sonuca ulaşana kadar deneme yolu ile tekrarlı yenilenmesi ya da ilerlemesi boyutudur. Bu boyutta resim üzerinde sabit

bir resim süreci bulunmamaktadır. Sürekli bir değişimin var olduğunu ifade eder. Doğrudan resim boyutu, MÖA' nın teoremlerin ispatlarını görselleştirmeye başladıkları andan itibaren teoremin özellikleri doğrultusunda resimlerini ilerletmeleridir.

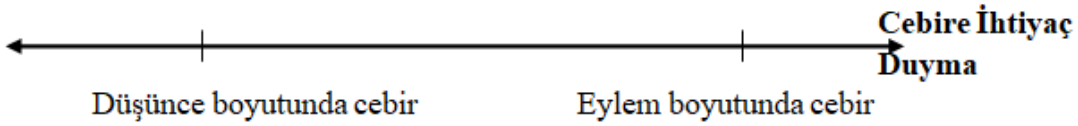


Şekil 4. 91. Yöntemsel süreçler kategorisine ait alt kategori ve boyutların eksen üzerinde gösterimi

Cebire ihtiyaç Duyma: MÖA' nın teoremlerin ispatlarını görselleştirirken cebirsel ifadelerden faydalandıklarını ifade eden kategoridir. Cebire ihtiyaç duyma kategorisi düşünce boyutunda cebir ve eylem boyutunda cebir olmak üzere iki boyutta ele alınmaktadır.

Düşünce boyutunda cebir, görselleştirme sürecinde ispatların resimlerinde cebirsel işlemlerden düşünce olarak yararlanılmasını ifade eder. Bu boyutta cebirden düşünce olarak yararlanılmaktadır.

Eylem boyutunda cebir, MÖA' nın teoremlerin ispatlarını görselleştirirken cebirsel işlemler yaparak bu işlemler üzerinden resimler yaptıklarını ifade eder. Bu boyutta cebirden eylem olarak yararlanılmaktadır.

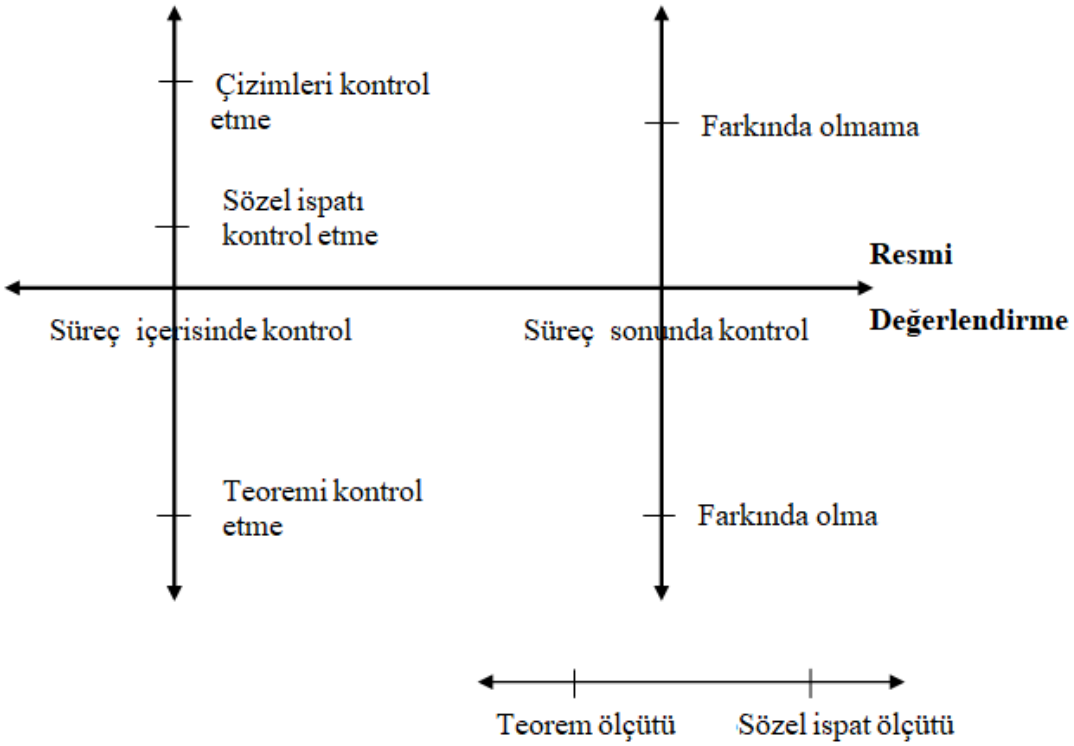


*Şekil 4. 92.*Cebire ihtiyaç duyma kategorisine ait alt kategori ve boyutların eksen üzerinde gösterimi

Resmi Değerlendirme: MÖA' nın matematiksel teoremlerin ispatlarının sürecini kontrol ettikleri kategoridir. MÖA' nın süreç içerisinde ve süreç sonunda değerlendirmeler yapığı durumların olduğu görülmüştür. Bu nedenle resmi değerlendirme kategorisi süreç sonunda kontrol ve süreç içerisinde kontrol olmak üzere iki alt kategoriye ayrılmıştır.

Süreç Sonunda Kontrol, MÖA' nın teoremlerin ispatlarının görselleştirilmesi süreci bittiğinde yaptıklarını kontrol ettiği ve değerlendirdiği kategoridir. Bu kategori farkında olma ve farkında olmama olarak iki boyutta ayrılmaktadır. Farkında olma boyutu, MÖA' nın sürecin sonunda yaptığı resimleri ve bu resimler sürecinde geçirdiği deneyimleri doğru bir şekilde değerlendirdiği durumlardır. Farkında olma boyutu ispat ölçütü ve teorem ölçütü olmak üzere 2 alt boyuta ayrılmaktadır. İspat ölçütü, MÖA' nın süreç sonunda oluşan resmi ispatla karşılaştırıldıkları durumlardır. Teorem ölçütü ise, süreç sonunda oluşan resim ile teoremin ifadesinin uygunluğunun kontrol edildiği alt boyuttur. Farkında olmama boyutu ise MÖA' nın sürecin sonucunda değerlendirme yaptığında süreci anlamlandıramadığı durumlardır.

Süreç içerisinde kontrol, MÖA' nın teoremlerin ispatlarını görselleştirirken süreç içerisinde resimlerin ve düşüncelerin kontrol edildiği durumlardır. Süreç içerisinde kontrol kategorisi resimleri kontrol etme, ispatı kontrol etme ve teoremi kontrol etme olmak üzere üç boyuta ayrılmaktadır. Resimleri kontrol etme boyutu, MÖA' nın süreç içerisinde düşüncelerinin yansıması olan resimlerini doğru olarak değerlendirdiği durumlardır. Teoremi kontrol etme boyutu ise MÖA' nın süreç içerisinde ispatların resimlerini oluştururken belli aralıklarla teoreme geri dönüp düşüncelerini kontrol ettiği durumlardır. İspatı kontrol etme boyutu ise görselleştirme sürecinde doğruluk ölçütü olarak ispatın alındığı durumları ifade eder.

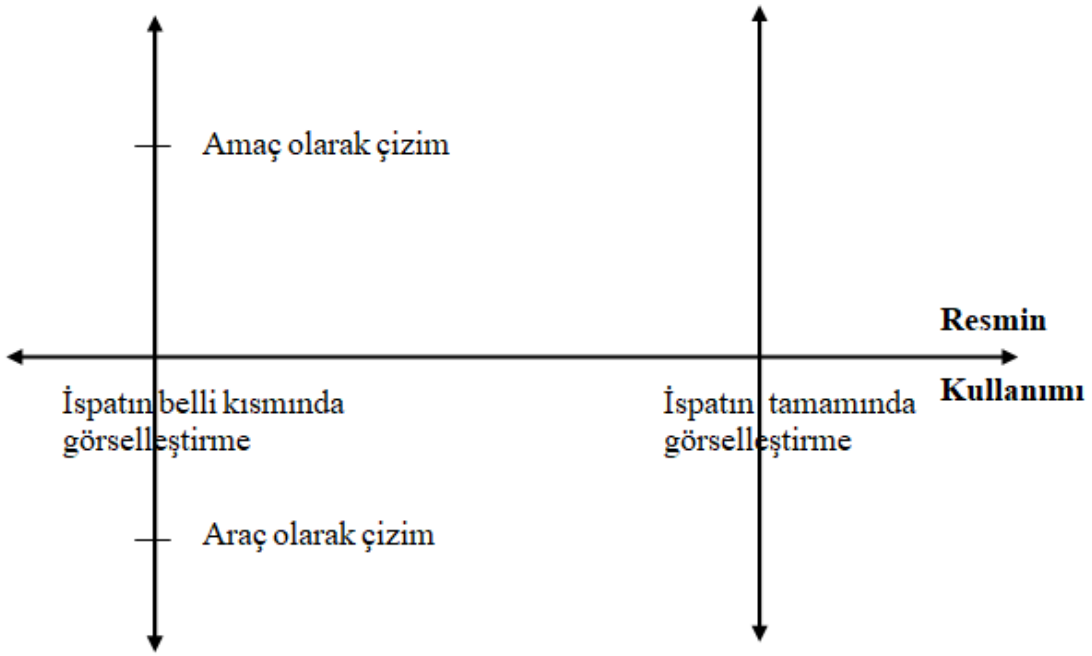


Şekil 4. 93. Resmi değerlendirme kategorisine ait alt kategori ve boyutların eksen üzerinde gösterimi

Resmin Kullanımı: MÖA' nın teoremlerin ispatlarının görselleştirilmesi sürecinde resimleri ispatın hangi kısımlarında kullandıklarını gösteren kategoridir. Resimlerin kullanımı kategorisi ispatın tamamında görselleştirme ve ispatın belli kısımlarında görselleştirme olmak üzere iki alt kategoride incelenmiştir.

İspatın tamamında görselleştirme, MÖA' nın teoremlerin ispatlarının her adımını görselleştirdikleri durumların yer aldığı boyuttur.

İspatın belli kısımlarında görselleştirme, MÖA' nın teoremlerin ispatlarında belirledikleri kısımları görselleştirdikleri durumları ifade eder. Bu kategoride MÖA teoremin ispatında önemli gördükleri kısımları görselleştirmiştir. İspatın belli kısımlarının görselleştirilmesi kategorisi amaç olarak resim ve araç olarak resim olmak üzere iki boyuta ayrılmaktadır. Amaç olarak resim boyutu, MÖA' nın teoremlerin ispatlarında öncelikli olarak görselleştirmeyi kullandıkları daha sonrasında resim üzerinden ispat yapacaklarını ifade ettikleri durumları temsil eder. Araç olarak resim boyutu, teoremlere ait ön resimler yaparak teoremin ispatının kolaylaşacağının ifade edildiği durumları kapsamaktadır.

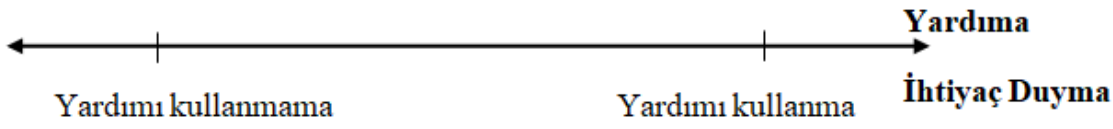


Şekil 4. 94. Resimlerin kullanımı kategorisine ait alt kategori ve boyutların eksen üzerinde gösterimi

Yardıma İhtiyaç Duyma: MÖA' na görselleştirme sürecinin başında teoremlerin ispatları verilmiştir. Yardıma ihtiyaç duyma, MÖA' nın ispatlardan faydalanma ve ek kaynaklardan yardım bekleme durumlarını ifade eden kategoridir. Bu durum yardımı kullanma ve yardımı kullanmama olmak üzere iki alt kategoride incelenmiştir.

Yardımı kullanma, görselleştirme sürecinde MÖA' nın verilen ispatlardan faydalandıkları ve ek kaynaklardan yardım aldıkları durumlardır.

Yardımı kullanmama, MÖA' nın görselleştirme sürecinde ispattan ve ek kaynaklardan faydalanmadığı durumları ifade etmektedir.

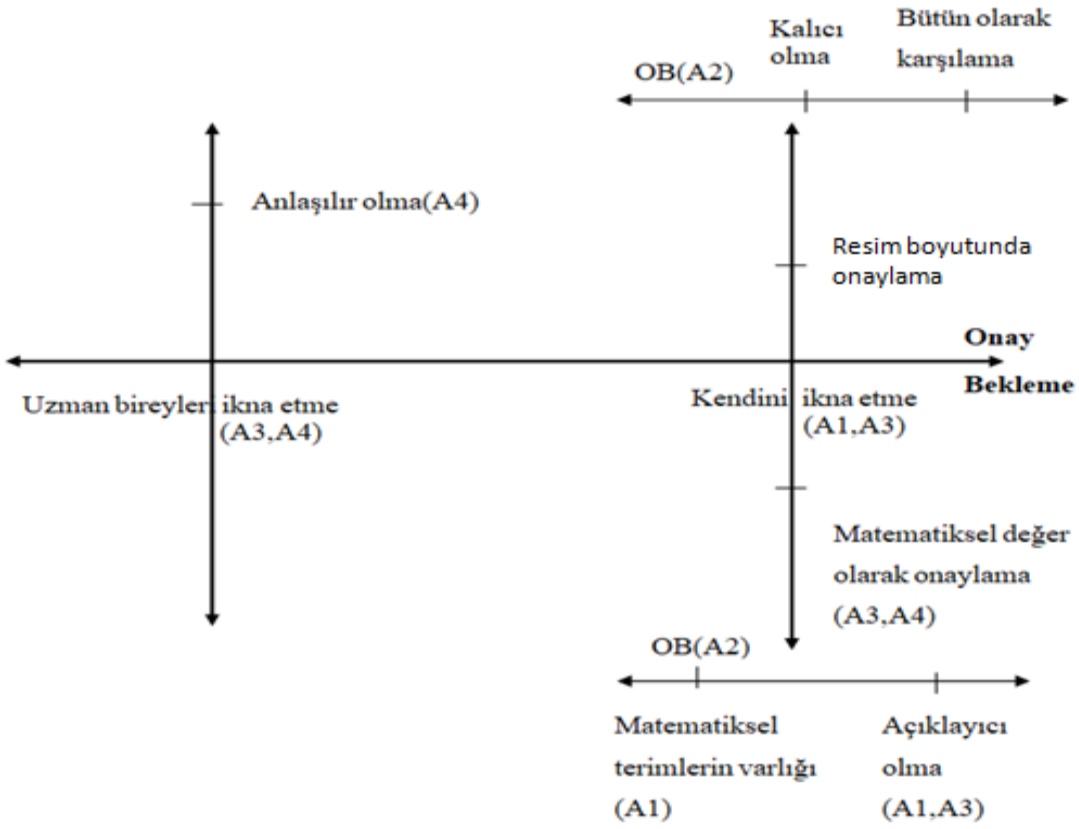


Şekil 4. 95. Yardıma ihtiyaç duyma kategorisine ait alt kategori ve boyutların eksen üzerinde gösterimi

MÖA' nın Matematiksel Teoremlerin İspatlarını Görselleştirmeleri

MÖA' nın verilen teoremlerin ispatlarını görselleştirme süreçleri incelenmiş ve Şekil 33'te yer alan kategoriler oluşturulmuştur. Veri toplama araçlarında yer alan beş teorem her aday için tek tek analiz edilmiş ortak kodlar oluşturulmuştur. Kategoriler, alt kategori ve boyutların kodlanma durumları aşağıda yer almaktadır.

Onay Bekleme: MÖA' nın onay bekleme durumunda görselleştirme süreçlerinde çizmiş oldukları resimler üzerine kendilerini ve uzman olarak isimlendirdikleri diğer matematikçileri ikna etme gereği duydukları görülmüştür.



*Şekil 4. 96.*Teoremlerin ispatlarının görselleştirilmesinde onay beklenmesi

A1, Teorem 1'in ispatını görselleştirirken araştırmacı arasında onay bekleme kategorisi kapsamında aşağıdaki diyalog geçmiştir.

Araştırmacı: Teoremin adıyla şuan ki yorumun arasında bir ilişki mi kurmaya çalışıyorsun?

A1: Düşünüyorum. Hareket edemiyor pek yani. Sıkıştırıyor yani. Şuaraya f(x) yazayım.

Araştırmacı: Neden cebirsel ifade kullanma gereği duydun?

A1: Ya resimde *resmimde ikna oluyorum* ama *matematiksel olarak ikna olamıyorum*. Ya mesela *analiz sınavında bunu yazsam.*

Araştırmacı: Burada resimlerini ispatın yerine mi koymak istiyorsun? Senin için ispatın karşılığı mı olmalı?

A1: *Matematik deyince daha dolu işlemler yapmak gerekiyor gibi geliyor.*

Araştırmacı: Daha dolu işlemler yapmak derken ne demek istiyorsun?

A1: *Daha ispat gibi* işte. Uzun *daha çok* x *ler terimler* olan.

Bu diyalogların devamında A1 resmini tekrar gözden geçiriyor ve yeni bir resim yapmaya başlıyor. Burada A1'in kendini teoremin ispatının resmini çizme konusunda ikna edemediği görülmüştür. A1'in görselleştirme durumunda yeni resimlere yönelmesi üzerine araştırmacı aşağıdaki soruyu yöneltmiştir.

Araştırmacı: Peki neden yeni bir resim yapmaya başladın?

A1: Bu aralık bu aralığa gidiyor. İspata bir bakayım. *Matematiksel terimlere dikkat etmedim hiç. Ondan ikna olamadım.* Şimdi epsilon deltalara da bir bakayım. *Belki daha güzeli vardır.* Şimdi $x\ f(x)$ …

Araştırmacı: Daha güzelini arama isteği… İspatlarda daha güzelini arama isteğin oluyor mu peki? Daha uzun yazayım daha çok terim kullanayım şeklinde.

A1: Daha uzun yazayım, daha çok terim kullanayım değil de. Nasıl diyeyim. *Daha az daha öz. En açıklayıcı hangisiyse.*

Araştırmacı: Orda daha öz burada daha güzel?

A1: Resim sonuçta akılda *kalıcı olması lazım*. Onun açıklayıcı olması *bunun akılda kalıcı olması lazım.*

A2, Teorem 1'de kendini veya başka birini ikna etme gereği duymadan görselleştirme sürecini tamamlamıştır. Bu şekilde gerçekleşen görselleştirme sürecine onay beklememe (OB) olarak tanımlanmıştır. Her iki alt kategori için de bu tür süreçler aynı şekilde adlandırılmıştır.

A3, Teorem 1'in görselleştirme sürecine ilk başladığı anda yavaş ilerliyor. Bunun sebebi olarak da resimlerinin geçerli olması gerektiğini bunu sağlamak için de resimlerini dikkatli yapması gerektiğini ifade ediyor. Görselleştirme sürecinde alışkanlığı olmadığı için zorlandığını söylüyor. A3, resimlerine onay alabilmek adına araştırmacıya sorular yöneltiyor. Teorem 1'in ifadesini okuduktan sonra bir süre düşünüyor ve araştırmacı ile arasında aşağıdaki konuşma yaşanıyor.

A3: Ben bunu çok kullandım sınavda. Ya hatırlıyorum birinci sınıfta. Şimdi şöyle çizeyim. f nin limiti L olsun. Nasıl çizsem acaba? f yi şöyle bir şey yapsam sonsuza giderken. *Yo böyle hoş olmadı.* Ama g fonksiyonunun limiti de L olmalı. Yani teoremde öyle diyor. Valla *ben hiç gösteremedim şuan.*

Araştırmacı: Hocanın düşüncelerini mi hatırlamak istiyorsun? Bu resimler sence ortak mı?

A3: Yani okuduğunu, düşündüğünü görselleştirmek kolay değil. Hoca *sürekli resim yapıyor. Onunkiler hep doğrudur*. Alışkanlığımda olmadığından zorlanıyorum şuan. *Sizce bu resim oldu mu?*

Araştırmacı: Burada önemli olan benim onaylamam mı senin için? Bu resimler senin zihnindeki düşünceler. Ben kısas olabilir miyim?

A3: Yani… Tamam benim düşüncem ama sonuçta her çizdiğimde olmaz ki. Şey hani matematiksel değeri olması gerekir yoksa herkes her istediğini çizse *matematik değersizleşir ispat önemli bir şey sonuçta.*

A4, Teorem 1'in görselleştirme sürecinde resimlerini yaparken kendine sürekli *başkası bundan ne anlar?* sorusunu yöneltmiştir. Resimlerini bu soru üzerinden yapmaya çalışmıştır. İlk defa A4 tarafından teoremin ispatını görselleştirmesi için resimle ilgili kuralların olup olmadığı yönünde sorular gelmiştir. A4'ün araştırmacı ile arasında geçen diyalog aşağıda yer almaktadır.

Araştırmacı: Koordinat ekseni çizme fikri fonksiyon kavramından dolayı mı geldi?

A4: Fonksiyondan geldi hocam. Fonksiyonu hep şeyden çiziyoruz ya koordinat sisteminde. Kendim böyle alıştım ondan dolayı galiba. *Ama şimdi bunu böyle çiziyorum da çizerken yapmamam gereken bir şeyler var mı? Nasıl çizildiğini gösteren bir şey* vermeyecek misiniz?

Araştırmacı: Nasıl bir kural bekliyorsun?

A4: Ne bileyim işte. Aklıma gelen her şeyi çizebilir miyim ki.

Araştırmacı: Evet. Ben zaten bunu istiyorum. İspata ait zihninde canlanan resimler nasıl. Bunu merak ediyorum.

Bu konuşmanın devamında A4, biraz düşündükten sonra resimlerini oluşturmaya başlıyor. Limitleri eşit iki fonksiyon çizme konusunda araştırmacıya şu soruyu yöneltiyor.

A4: y de aldığı değerlerle ilgili. O zaman şöyle çizebiliriz. Bu da g o zaman. Şimdi bunları limitleri birbirine eşit ya şöyle bir şey olmalı. *Doğru mu bu o zaman?*

Araştırmacı: Bana doğrulatma gereği mi hissediyorsun?

A4:Yani ne bileyim kendi kafama göre çiziyorum ya. *Başkası ne anlar ki.* Ondan soruyorum.

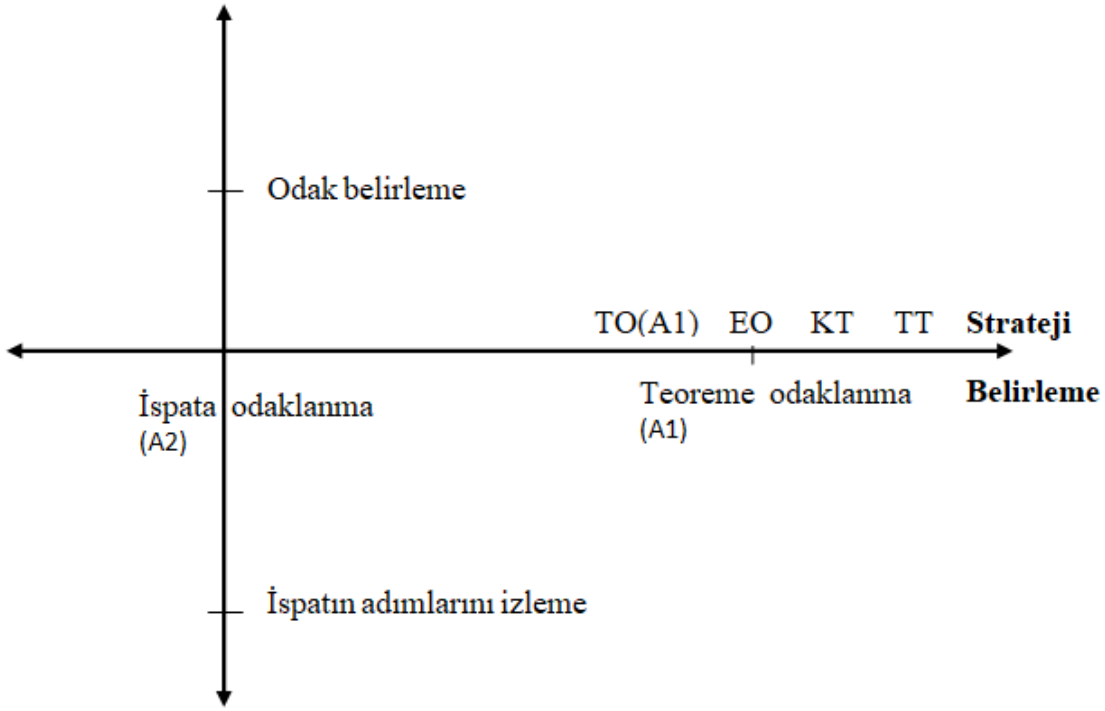
Tablo 5

MÖA' nın Teoremlerin İspatlarını Görselleştirme Sürecinde Onay Bekleme Kategorisinin Özeti

Kavram etiketlemeleri	Kodların verilmesi
Resmimde ikna oluyorum (A1)	Kendini ikna etme
Ondan ikna olamadım. (A1)	
Ben hiç gösteremedim şuan. (A3)	Resimlerin ikna edici olması
Ya bu beni tatmin etmiyor.(A3)	
Matematiksel değeri olması gerekir (A3)	Matematiksel değer olarak onaylama
Matematik değersizleşir ispat önemli bir şey sonuçta. (A3)	
Daha ispat gibi(A1)	
Matematiksel olarak ikna olamıyorum (A1)	
Matematiksel terimlere dikkat etmedim hiç. (A1)	Resimlerin matematiksel bir değere sahip olması
Matematik deyince daha dolu işlemler yapmak(A1)	

Daha çok x ler terimler (A1)	Matematiksel terimlerin varlığı
Daha az daha öz. En açıklayıcı hangisiyse. (A1) Kalıcı olması lazım(A1) Bunun akılda kalıcı olması lazım(A1) Daha az daha öz. En açıklayıcı hangisiyse. (A1)	Açıklayıcı olma
Sizce bu resim oldu mu? (A3) Analiz sınavında bunu yazsam (A1) Doğru mu bu o zaman? (A4) Nasıl çizildiğini gösteren bir şey (A4)	Uzman bireyleri ikna etme İspatların resimlerinin diğer matematikçiler tarafından da anlaşılması
Ama şimdi bunu böyle çiziyorum da çizerken yapmamam gereken bir şeyler var mı? (A4)	Açıklayıcı olma Resimlerin ispatı net bir şekilde açıklayıcı olması
Başkası ne anlar ki. (A4) Yo böyle hoş olmadı. (A3) Belki daha güzeli vardır. (A1)	

Strateji Belirleme: MÖA, teoremlerin ispatlarını görselleştirme sürecinde resimleri çizmek için teoremin sözel ifadesini ve verilen ispatları referans almıştır. İspata odaklanan adaylar ispatın önemli gördükleri kısımları görselleştirdikleri gibi ispatın adımlarını birebir görselleştirmeye de çalışmışlardır. MÖA teoremde yer alan kavramların kurallarının verilmesi gerektiğini düşünmektedir. MÖA' nın kuralı verilmeyen kavramı görselleştirmekte zorlandığı görülmüştür. Bu nedenle strateji belirleme de zorlanılması durumları emin olamama (EO),kurala takılma (KT) ve tanıma takılma (TT) olarak alt boyutlarında gerçekleşmiştir.



*Şekil 4. 97.*Teoremlerin ispatlarının görselleştirilmesinde strateji belirleme

A1, Teorem 1'in ispatını görselleştirmeye teoreme odaklanarak başlamıştır. Teoremin ifadesini dikkatlice okuyan A1, kendisine verilen ispatla ilgilenmemiştir. Bunun nedeni olarak da teoremin ispatının adaya karışık gelmesini göstermiştir. Teoremin ifadesinde yer alan teoremlere odaklanarak ilk olarak bu kavramların tanımlarını hatırlamaya çalışmıştır. Bu şekilde bakış tanım oluşturma (TO) olarak adlandırılmıştır.

Araştırmacı: Şuan neyi görselleştiriyorsun? Neyi çizdiğini merak ediyorum.

A1: Şuan saçmalıyorum gibi geliyor. *İlk olarak limitin tanımını yapıyorum.*

Araştırmacı: Limitin tanımına odaklanarak mı başlıyorsun o zaman?

A1: Evet. Düşündüğüm şeyi çizmeye çalışıyorum. f yok. Tanımlamak lazım. Sadece bir değer olarak var. Fonksiyonu nasıl çizicem ki. *Kural falan vermemiş. Bu şekilde çizmek zorda.*

Araştırmacı: Neden durdun?

A1: *Bu şekilde çizmek zor. Kural falan vermemiş*. Nasıl çizicez ki fonksiyonu.

A2, ilk olarak nasıl başlayacağına karar vermekte zorlanıyor daha sonrasında Teorem 1'i görselleştirmeye teoremin ispatını inceleyerek başlamıştır. Bunun nedeni olarak da üniversite de aldığı analiz derslerinde bu teoremi hatırladığını ve derslerin işlenişinde resimler yapmış olduklarını ifade etmiştir.

Araştırmacı: Neden duraksadın?

A2: İlk olarak neyle başlayacağıma karar veremedim. Gerçi x diyor. Burada $x - c$ alıcam. Bu aralarındaki uzaklık c oldu buradaki de c. c noktasında limit var ama. *Ya şimdi çizmeye başlıyorum* ya ondan zorlandım.

Araştırmacı: Tamam kafandaki soruları çözdüysen başlayalım mı o zaman?

A2: *Sonucuna bakayım bir*. Unutmuşum bunu. *Hatırlıyorum bunu aslında*. Grafik üzerinden göstereyim gibi…

A3, Teorem 2'nin ispatını görselleştirmeden önce dikkatli bir şekilde teoremi okumuştur. Teoremi analiz derslerinden hatırladığından ön bilgileriyle ispatı görselleştirmeye başlamıştır Teoremin içerisinde yer alan limit ve fonksiyon kavramlarını genel bulduğundan görselleştirmekte zorlamıştır. A4'ün Teorem 1'in görselleştirme süreci teoremin ifadesine odaklanarak başlamıştır. Teoremde yer alan limit kavramına odaklanmıştır. Resimlerini bu kavram üzerinden yapmayı planladığını ifade etmiştir.

A2, Teorem 5'in ispatını görselleştirirken verilen ispattan yararlanmamıştır. Teoremde yer alan kavramlar üzerinden ispata ait resimler oluşturmaya çalıştığı görülmüştür.

Araştırmacı: Şuan ispata bakmadın. Birinci teoremde bakmıştın. Bunun bir sebebi var mı?

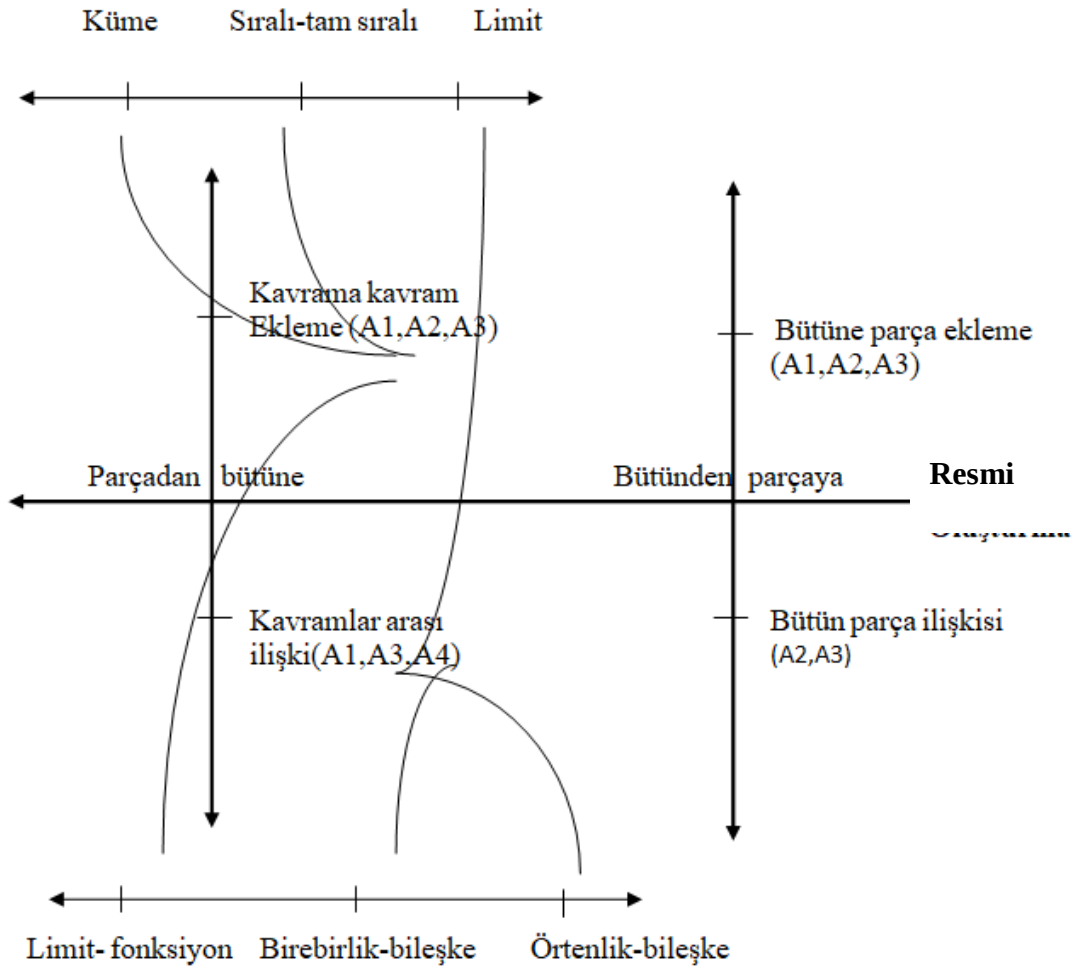
A2: *Bakmadım. Çünkü sezgisel olarak aklımda canlandı*. Yani çünkü sonlu kümelerle uğraşıyoruz. Şimdi kümeyi şu şekilde çizeyim.

Tablo 6

MÖA' nın Teoremlerin İspatlarını Görselleştirme Sürecinde Strateji Belirleme Kategorisinin Özeti

Kavram etiketlemeleri	Kodların verilmesi
İlk olarak limiti tanımını yapmalıyım (A1) Şimdi c daha büyük bir küme olacağı için karışacağını düşündüm o halde.(A2) Bakmadım. Çünkü sezgisel olarak aklımda canlandı(A2)	Teoreme Odaklanma Teoreme yönelik resimlerin çizilmesi
Teoremin doğruluğunu bildiğim için ispatlara ihtiyaç duymadım. (A2) Kural falan vermemiş. Bu şekilde çizmek zorda.(A1) İlk olarak neyle başlayacağıma karar veremedim(A2)	Emin Olamama Kendini ikna edememe sonucu strateji belirleyememe
Şimdi ispat ne diyordu? (A4) δ ve ε eklemeliyim. Burada $\frac{\varepsilon}{2}$ almış c nin komşulukları için.(A2) Teorem limit kavramı ile ilgiliydi.(A1)	İspata Odaklanma İspata yönelik resimlerin çizilmesi Odak Belirleme Limit kavramına odaklanma

Resmi Oluşturma: MÖA' nın Teorem 1'in ispatını görselleştirirken stratejilerini belirledikten sonra resimlerini farklı şekillerde çizmeye başladıkları görülmüştür. A1 ve A3 Teorem 1'in ispatını görselleştirirken ilk olarak bir kavram belirlemiş daha sonrasında teoremde yer alan diğer kavramların resimlerini ilk çizdiği resim üzerine eklemiştir. A4 ise Teorem 1'in ispatını görselleştirirken teoremin ifadesine odaklanarak her resminde teoremi tekrar okumuş resmini kavrama değil teoreme ait olarak yapmaya çalışmıştır.



*Şekil 4. 98.*Teoremlerin ispatlarının görselleştirilmesinde resmin oluşturulması

Araştırmacı: Koordinat ekseni çizdiğini görüyorum. Bu resmi neye karşılık yapıyorsun?

A1: Şöyle bir herkes böyle çizmiştir eminim. *Limit ile ilgili teorem. Limit çiziyorum*. Şuan saçmalıyorum gibi geliyor ama limitin *tanımını yapıyorum*. c noktasındaki limiti çizdim.

Araştırmacı: Neyin c noktasındaki limiti?

A1: f nin. Ama f yok. f yi tanımlamak lazım. Tamam f şöyle olsun.

Araştırmacı: f fonksiyonunu bu şekilde çizmenin bir sebebi var mı?

A1, limit kavramını görselleştirmek için bir dik koordinat sistemi çizmiştir ve limitine bakılan c noktasını belirlemiştir. Daha sonrasında teoremde geçen f ve g fonksiyonlarını sıralı olma durumlarına göre ilk resmin üzerine eklemiştir.

A1: *f nin c de limit L. O zaman şuradan geçecek şekilde çizdim. g ninde limiti L c noktasında. O zaman o da buradan geçecek. Ama g , f den büyük dimi?* O zaman … Şöyle yapalım(resmi üzerinde düzenleme yapıyor.) *g yi f nin üstünden çizersem olur.*

Araştırmacı: f ve g yi çizdin.

A1: Evet. h de şimdi. .Mantıken baktığımızda… Kalır aslında. *Sonuçta f den büyük kalmak zorunda. Bu aralıkta bir yerde* değişecek.

Araştırmacı: h fonksiyonu mu?

A1: Aynen. Sıralarını vermiş ya. Bunu asla geçemez. O *zaman bu noktaya kadar gelecek.* Bu nokta da başka değer alamaz.

A2, Teorem 1'in ispatına ilk olarak limit kavramını görselleştirmek için dik koordinat sistemi çizerek başlamıştır. Daha sonrasında f ve g fonksiyonlarını çizmeye çalışmıştır. Ancak teoremde yer alan fonksiyonların kurallarının verilmemiş olması A2'nin limit ile fonksiyon kavramlarını birleştirmesini zorlaştırmıştır. A2'nin bu şekilde resimlerini oluşturması kavrama kavram ekleme boyutudur.

Araştırmacı: Başlayalım mı?

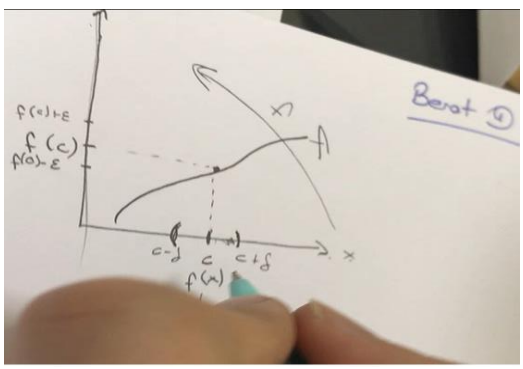
A2: Elbette. Başlayalım. *Grafik üzerinde çizsem.*

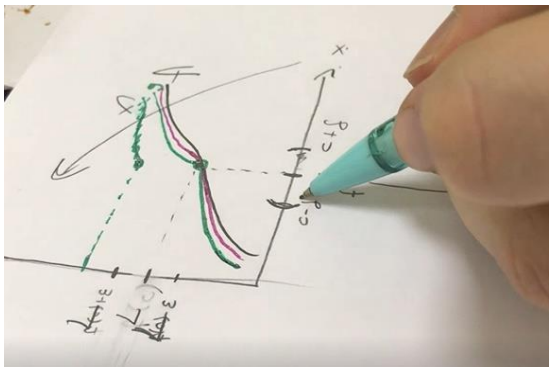
Araştırmacı: Neden grafikle başladın?

A2:Limiti göstermek için. Limiti olan fonksiyon çizip, o ikisi arasında ilerlemek için. (x) ,

$h(x)$, $g(x)$…fonksiyon çizmek istediğimde grafik çiziyoruz.

Araştırmacı: Şuan seni zorlayan şey nedir?





Şekil 4. 99. A1'in Teorem1'in ispatı için limit kavramı çizimi

A2: Çünkü ispatta genel konuşuyoruz. *Ama fonksiyonlar tam belirli olmadığı için. Özel fonksiyonlar çizsem genelleyemiyorum.* Özele indirgemiş oluyorum. İspatı genelleyemiyorum. f, g, h seçerim ama özel almış olurum. Genel konuşamıyorum.

Araştırmacı: O çizdiğin x noktası özel mi?

A2:Bu x genel ama fonksiyon çizerken özelleşiyor. Mesela sıralıycam şimdi ama neye göre sıralıycam.

A2, ilk resimlerini oluşturduktan sonra ilerleyemediğini ifade ederek yeni bir resim yapmaya başlamıştır. Bu sefer limit kavramına değil fonksiyon kavramına odaklanarak görselleştirme sürecine başlamıştır.

Araştırmacı: Neden resimlerini siliyorsun?

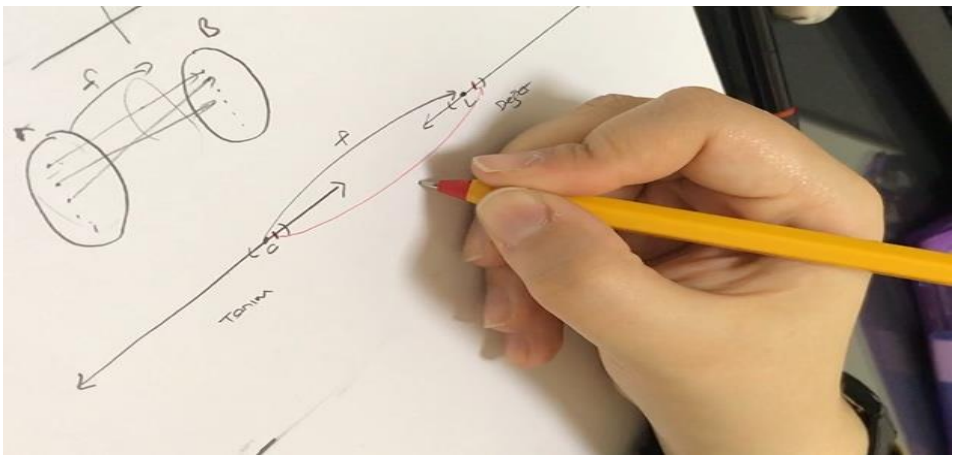
A2: İspatı ilerletemedim. Devamını bu şekilde çizemem.

Araştırmacı: Tamam.

A2: Şimdi *bir f yi göstereyim. Venn Şeması çiziyorum koordinat eksenini limit için. Ama bu şekilde olmadı. Fonksiyonu değiştireyim.*

Araştırmacı: Fonksiyon resmini neden değiştiriyorsun?

A2: c noktasında limit var. *Onu Venn şeması ile gösteremem ondan. Bu şekilde gösteririm.*



Şekil 4. 100. A1'in ilk çizimine f ve g fonksiyonlarının resimlerini eklemesi

A3,Teorem 1'in ispatını görselleştirmeye ilk olarak bir fonksiyon çizerek başlamıştır. Fonksiyon resminin oluşumuna etken olarak limit kavramı ile arasındaki ilişkiyi göstermiştir. A3, bu iki kavramın teorem içerisindeki sözel ifadelerinin genel olduğunu

söyleyerek görselleştirmekte zorlanmıştır. Zihnindeki genel fonksiyon resmini kullanmak yerine teoreme genel bakarak limitle ilişkili bir fonksiyon resmi çizdiğini ifade etmiştir. Bu nedenle A3'ün bu süreçteki resimleri oluşturması bütünden parçaya kategorisidir. A3, resimlerini oluştururken sürekli teoremin ifadesini kontrol ederek resim yapması bütün-parça ilişkisi boyutunun bir parçasıdır.

A3: Ya şimdi *limit deyince aklımda bir fonksiyon var.* c yi bir değere yaklaştırma. Ama o fonksiyonu şuan belirleyemiyorum. Yani nasıl yapsam ııı…

Araştırmacı: Neden belirleyemedin? Nedir burada zor olan?

A3: *Limit ve fonksiyon kavramı çok genel* olduğundan tek bir direkt çizmek zor.

Araştırmacı: Zihninde genel bir fonksiyon resmi var mı?

A3: Yani var aslında. *Şu şimdi f olsun*. Şu da L olsun. Şimdi bize bir c lazım. Şu da c olsun. c burdan gelirken L de şöyle olmalı.

Araştırmacı: Şimdi fonksiyon deyince aklına ilk gelen koordinat çizmek mi?

A3: Fonksiyondan değil. Fonksiyon deyince aklıma şu geliyor. *Ama limitini arayacağım için koordinat ekseni çizdim.*

A3, ispata dair ilk resimlerini oluştururken resimleri bütün olarak ele almış bütün altında kavramları çizmeye çalışmıştır. Bu durumunda genel bakmasından dolayı zihnindekileri kağıda dökmede onu zorladığını ifade etmiştir. Bu nedenle resimlerini oluşturma adına yeni bir görselleştirme süreci içine girmiştir.

Araştırmacı: Tamamdır. Şimdi f ve limitini görselleştirdin.

A3: Aynen f burada. G de ondan daha büyük bir şey şöyle olsun. Ama limiti neden ortaya aldığım konusunda hiçbir fikrim yok. Burada h varken onun limiti de burada.

Araştırmacı: Nasıl fikrin yok kendi resmin değil mi?

Araştırmacı: Evet ama hepsini bir arada çizince karıştırdım. Teoreme çok genel baktım. Biranda hepsini birlikte çizmeye çalışınca aklımdakiler karıştı. Ayrı çizeyim bir dakika baştan.

A3, yeniden Teorem 2'nin ispatını görselleştirmeye başlamıştır. Bu sefer teoremde yer alan kavramları ayrı olarak ele almış daha sonrasında bu kavramların resimlerini bir araya getirmiştir. Bu nedenle bu süreçteki resimler kavramlar arası ilişki boyutuna aittir.

Teoremde yer alan limit ve fonksiyon kavramlarının resimleri birleştirildiğinden limit-fonksiyon alt boyutunun bir parçasıdır.

Araştırmacı: Şimdi nasıl ilerleyeceğini belirledin mi?

A3: Evet. Aslında *şimdi resimleri birleştirirsem ispattaki adımları da birleştirmiş olurum. Ayrı ayrı epsilon göstermeye gerek yok* ama burada. Olmuyor zaten. Resimde onlara gerek yok bence.

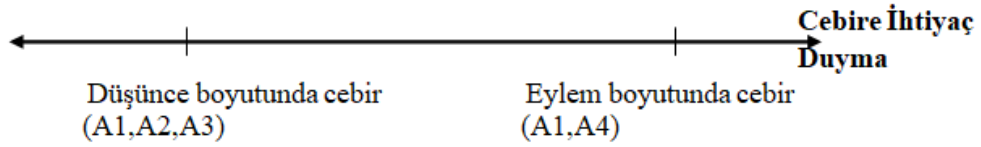
Cebire İhtiyaç Duyma: MÖA' nın Teorem 1 ve Teorem 2'nin ispatının resimlerini oluştururken cebire eğilim gösterdikleri görülmüştür. A4, ilk teoremin ispatını görselleştirirken öncelikli olarak cebirsel işlemler yapmaya gerek duyduğunu bu işlemler üzerinden resmini oluşturduğunu söylemiştir. Yine aynı şekilde resminde cebirsel ifadelerden yararlanma gereği hissettiğini belirtmiştir.

A4: Tabi ki ikna etmez beni. Ben buna tamamen ispat demem. *Sağından solundan yaklaşmayı bir görmem gerek önce. Sonra δ ve ε ları da yerleştirmeliyim.*

A1, Teorem 5'in sonlu kümelerde geçerli olduğunu bildiğini, bunu resmi çizmeden önce görebildiğini ifade etmiştir.

Araştırmacı: Bu teoremde hemen çizmeye başladın. Bu teoremin bir önceki teoremlerden bir farkı var mı ?

A1*: Okuyunca gördüm çünkü hemen. Eleman sayıları aynı olduğundan sağlıyor* örtenliği de. Ondan başladım çizmeye.



Şekil 4.101. Teoremlerin ispatlarının görselleştirilmesinde cebire ihtiyaç duyma

Yardıma İhtiyaç Duyma: A3, Teorem 2'nin ispatını görselleştirirken verilen ispattan yardım alma gereği duymuştur.

A3: Böyle olmadı bu. *Bir ispata bakalım o zaman. Bir de oradan deneyeyim.*

A4, Teorem 4'ü sözel olarak anlayamadığından nasıl resimleştireceğinden emin olamadığını bu nedenle ispata bakma gereği duyduğunu ifade etmiştir.

Araştırmacı: Neden durdun?

A4: Bu zor geldi. *Ne dediğini anlamam gerek bir saniye*. İyi sıralı küme… tam sıralı olmasını istiyor. *Nasıl olacak ki?*

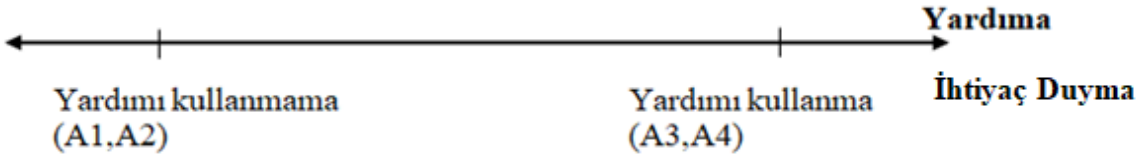
Araştırmacı: İyi sıralı ve tam sıralı küme kavramlarımı kafanı karıştırdı?

A4: Hatırlıyorum aslında ama biran nasıl gösteririm emin olamadım. *İspata bir bakayım.*

Araştırmacı: Olur tabi.

A4: *Şimdi ne yapmış bir bakalım. A kümesi alacağız. Sonra alt kümesi x ve y den oluşan.* Tamam, tamam hatırladım.

A2 ve A1'in teoremlerin ispatlarını görselleştirme sürecinde kendilerine verilen ispatlardan yararlanmadıkları görülmüştür.



Şekil 4. 102. Teoremlerin ispatlarının görselleştirilmesinde yardıma ihtiyaç duyma

Resmi Değerlendirme: MÖA hemen hemen tüm teoremlerin ispatlarını görselleştirmiştir. Sadece A3 Teorem 4'ün, A4 ise Teorem 2'in ispatını görselleştirme sürecini tamamlamamıştır.

A1'in, Teorem 3'ün ispatını görselleştirme sürecinde teoremin iki maddeden oluşmasını sebep gösterip her resim aşamasında teoremde yer alan kavramları kontrol etme gereği duyduğu görülmüştür.

A1: Şimdi *A ve B iki küme diyor* ona bir bakalım.

(…)

A1: f ve g yi birebir olmalı dedi çizdim. *Devamında bileşke fonksiyon var* onu göstermeliyim.

A3, Teorem 3'ün ispatının resmini çizerken süreç içerisinde resimlerini zihnindekilerle uyuşup uyuşmadığını kontrol etmiştir.

A3: *Masanın üstündeki örtü A kümesi oldu mu ki? A* sonlu muydu?

A2, Teorem 1 ve Teorem 2'nin limit kavramı ile ilgili olmasından dolayı resminden emin olmakta zorlandığını bunun içinde ispata bakarak resmini ilerlettiğini belirtmiştir.

Araştırmacı: f fonksiyonunun limiti oradaki komşulukta mı?

A2: L' nin şu komşuluğunda işte. *İspatta öyle diyor ya* $\frac{\varepsilon}{2}$ diye. $(L-\frac{\varepsilon}{2}, L+\frac{\varepsilon}{2})$ aralığına karşılık gelir.

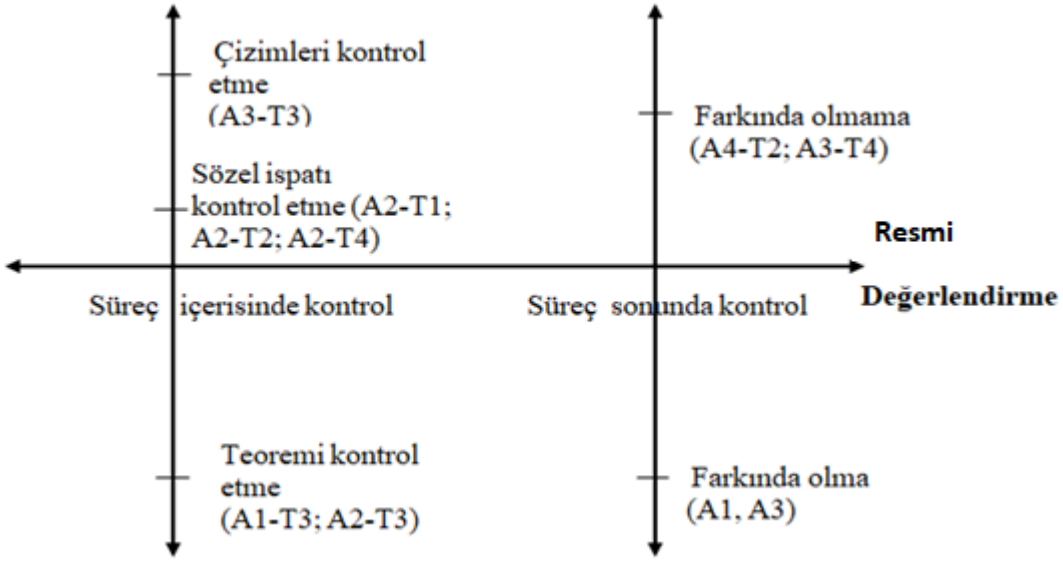
A1, Teorem 1'in ispatının resmini süreç sonunda, teoremde yer alan kavramların resimlerini doğru çizip çizmediğini kontrol etmiştir.

Araştırmacı: Resmini mi kontrol ediyorsun?

A1: Evet. Limit biraz karışık geliyor bana. Analiz dersinde de bu teorem zordu.

Araştırmacı: Nasıl kontrol ediyorsun peki?

A1: *Tek tek teoremdekilere bakıyorum*. Doğru çizmiş miyim diye.



*Şekil 4. 103.*Teoremlerin ispatlarının görselleştirilmesinde resmi değerlendirme

Yöntemsel Süreçler: A1, Teorem 1'in ispatını görselleştirirken zihindekileri sesli olarak dile getirmiş, düşünceleri üzerinden sınamalar yaparak resimlerini oluşturmuştur.

Araştırmacı: f ve g tanımlı olmak zorunda mı c noktasında?

A1: Bilmem. Yani olmaz aslında sürekli olur o zaman. *L* diyeyim. *Mantıken baktığımızda.* Kalır aslında da. Sonuçta f den büyük kalmak zorunda. Bu aralıkta bir yerde değişecek. Bunu da asla geçemez. O zaman *bu noktaya kadar gelecek*. Bu nokta da başka *değer alamaz*. Yani *daha büyük ya da küçük için boyayamam.*

(…)

A1: *Aklımdakini anlatamıyorum şuan.* Kendim ile çeliştim biran. Demek istediğim şu bunun görüntü kümesi pozitif tam sayılarken bununki negatif.

A2'nin, Teorem 1'in ispatında ve A3'ün Teorem 3'ün ispatında düşüncelerini aktarma sürecinden bir kesit aşağıdaki diyalogda yer almaktadır.

Araştırmacı: Aynı çizsen eşit olmaz mı?

A2:Evet yani eşitse sorun yok değil mi? Dur *kafamdakini aktaramıyorum*. Oysa belli yani arada olduğundan eşit oluyor limitleri. *Genel baktığımdan* zorlandım sanırım. Fonksiyon çizsem bir.

A3:Sonsuzda da aynı şekilde yani. *Böyle uzattığımı düşünelim bunları*. Sonsuz tane eleman olacak yine böyle gittiğimde.

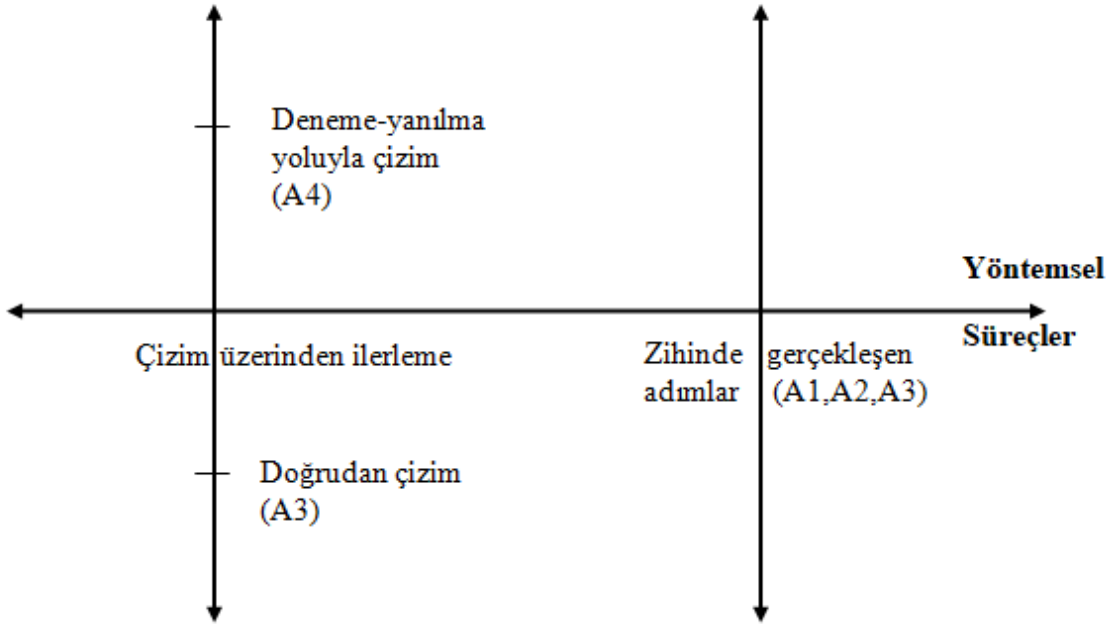
A4, Teorem 4'ün ispatında çizmiş olduğu resimlerden emin olamamış, geçirmiş olduğu zihinsel karmaşayı aşağıdaki şekilde ortaya çıkarmıştır. Deneme yaparak resimleri üzerinde değişikliklerde bulunmuştur.

A4: Şimdi iyi sıralı olacak ya bu küme şöyle bir çizeyim. Düz olsa. Ama olmadı bu. Bir silgi var mı?

A1: Silecek misin çizdiklerini?

A4: Şurayı silicem. *Olmadı bu kısım.* Bir daha bakayım

A3'ün Teorem 5'in ispatını görselleştirirken resimlerini belli bir koşula bağlamaksızın süreç içerisinde oluşturduğu görülmüştür. A3, bu durumun teoremin kolaylığından kaynaklı olduğunu onaylamıştır.



Şekil 4. 104. Teoremlerin ispatlarının görselleştirilmesinde yöntemsel süreçler

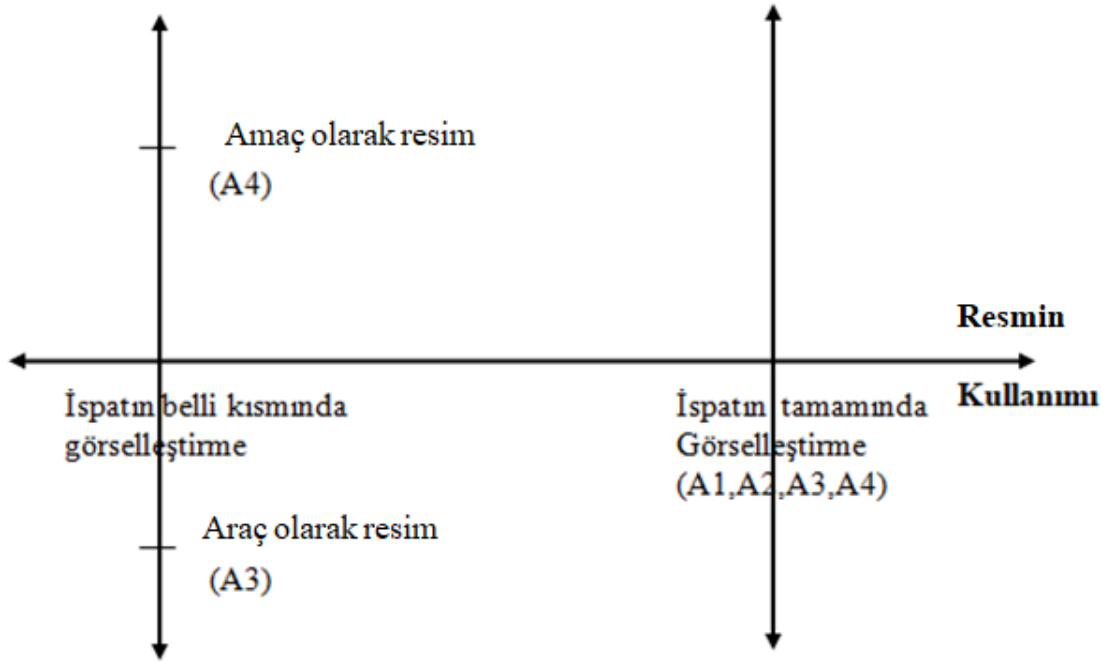
Resimlerin Kullanımı: MÖA' nın teoremlerin ispatlarını görselleştirme şekillerinin değişiklik gösterdiği gözlemlenmiştir. İspatlara ait resimler incelendiğinde bazı resimlerin ispatın tamamını bazı resimlerin ise ispatın belli kısımlarını temsil ettiği sonucuna varılmaktadır.

A4'ün Teorem 1'nin ispatın çizerken öncelikli olarak ön resimler yaptığı daha sonrasında bu resimleri birleştirerek ispatın resmini oluşturduğu görülmüştür. Bu nedenle bu görselleştirme süreci amaç olarak resim alt kategorisine aittir.A4'ün Teorem 2'ye ait resmi Şekil 13'te verilmiştir.

Araştırmacı: Peki, sence ispatları görselleştirmek ispat yapma konusunda faydalı bir yöntem mi?

A3, ispatların görselleştirilmesinin ispat yapmayı kolaylaştıracağını veri toplama sürecinde ifade etmiştir. İspatları görselleştirmeyi, ispatlar için bir araç olarak gördüğü ortaya çıkmaktadır.

A3: Bu resimlerin *teoremlerin kullanımı çok yarar* yani. *İlk başta basit bakmayı sağlar. O zaman ispat yapmakta kolaylaşır.*



Şekil 4. 105. Teoremlerin ispatlarının görselleştirilmesinde resmin kullanımı

BÖLÜM V

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde araştırmadan elde edilen bulgulara göre sonuçlara ve bu sonuçlardan yola çıkılarak oluşturulan önerilere yer verilmektedir.

Sonuçlar

Bu çalışmada MÖA' nın matematiksel teoremlerin ispatlarını görselleştirmelerini incelemek için MÖA' na matematiksel teoremlerin yer aldığı çalışma kâğıtları verilmiştir. MÖA' ndan beş matematiksel teoremin ispatını görselleştirmeleri istenmiştir. MÖA' na analiz ve soyut matematik alanlarından seçilmiş teoremler ve bu teoremlerin ispatları verilmiştir. Katılımcılardan çalışma boyunca sesli olarak düşünmeleri istenmiş, konuşmaları ve resimleri kaydedilmiştir. MÖA' nın çalışma kâğıtları üzerindeki resimleri, görselleştirme süresince sesli düşünmelerinden elde edilen ses kayıtları gömülü teorinin analiz yöntemlerine göre analiz edilmiştir. Analizlerin sonucu MÖA' nın matematiksel teoremlerin ispatlarına ait resimlerinin ve ortak resimlerin durumları ve görselleştirme süreci olmak üzere iki alt başlıkta sunulmaktadır.

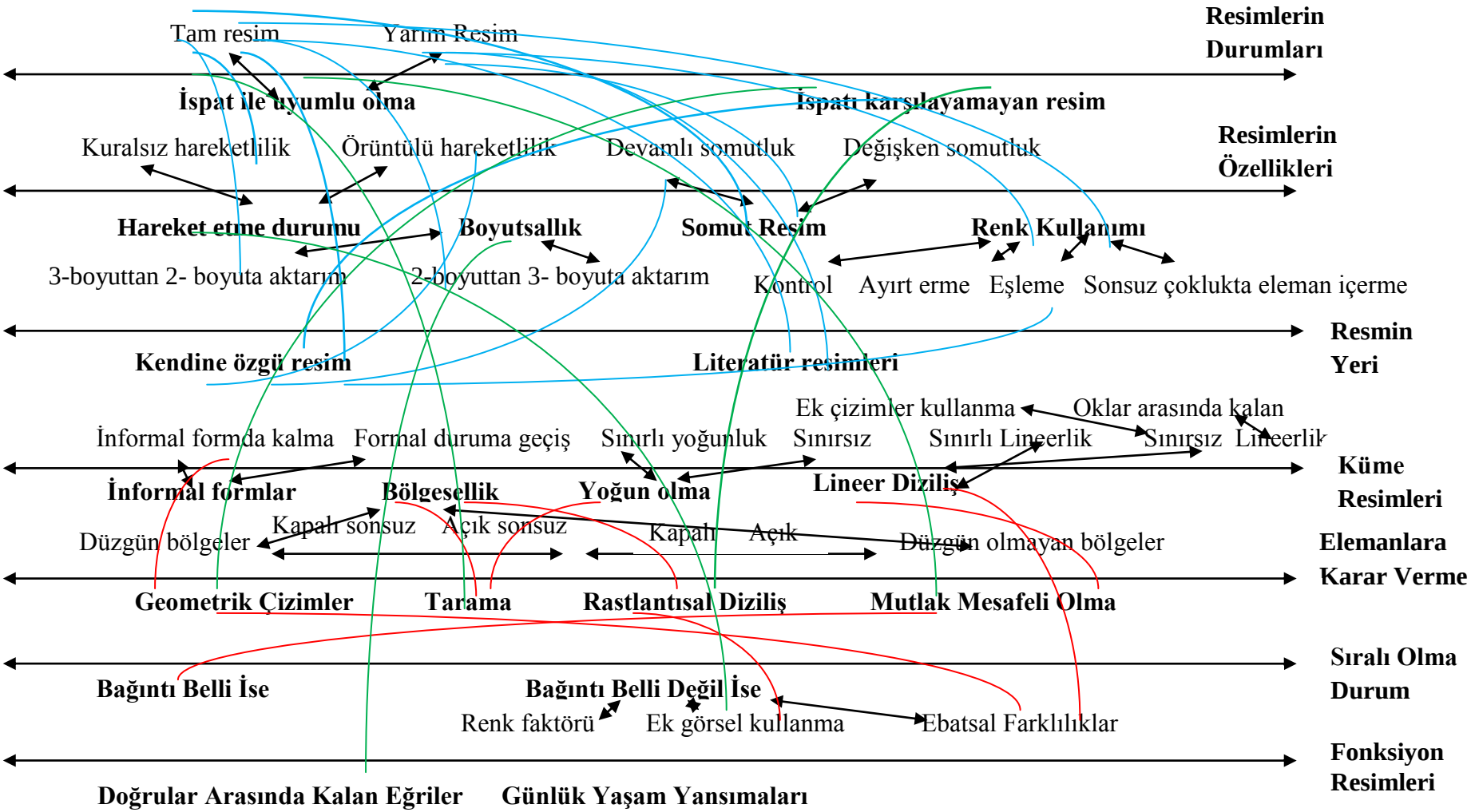
MÖA' nın Matematiksel Teoremlerin İspatlarının ve Teoremlerde Yer Alan Bazı Ortak Kavramların Resimlerine Ait Bulgularının Sonuçları

MÖA' nın teorem ispatlarından ve bazı ortak kavramların resimlerinden elde edilen sonuçların birbirleri ile aralarında ilişkili oldukları görüldüğünden aynı başlık altında toplanmıştır. MÖA' ndan elde edilen veriler sonucu teoremlerin ispatlarının teoremlerin

ispatlarına ait resimleri Şekil5.1'de verilmiştir. Şekil5.1'de görüldüğü gibi matematiksel teoremlerin ispatlarına ait kategoriler; resimlerin durumları, resimlerin özellikleri ve resimlerin yeridir. Her kategorinin kendi ekseni üzerinde alt kategorileri de gösterilmiştir. Bu alt kategoriler; ispat ile uyumlu olma, ispatı karşılayamayan resim, hareket etme durumu, somut resim, boyutsallık, renk kullanımıdır. Kategori eksenleri ilişkili olma durumlarına göre mavi çizgilerle birleştirilmiştir.

MÖA' nın teoremlerde yer alan bazı ortak kavramlara ait resimlerinden elde edilen verilerin sonuçları Şekil 5.1'de verilmiştir. Şekil 5.1'de yer alan bazı ortak kavramlara ait kategoriler; küme resimleri, elemanlara karar verme, sıralı olma durumu, fonksiyon resimleridir. Her kategorinin kendi ekseni üzerinde alt kategorileri de gösterilmiştir. Bu alt kategoriler; bölgesellik, yoğun olma, lineer diziliş, bölgesellik, geometrik resimler, tarama, rastlantısal diziliş, mutlak mesafeli olma, bağıntı belli ise, bağıntı belli değil ise, doğrular arasında kalan eğri, legoların birleşimi, günlük yaşam yansımalarıdır. Her kategorinin kendi ekseni üzerinde alt kategorileri de gösterilmiştir. Kategori eksenleri ilişkili olma durumlarına göre kırmızıçizgilerle birleştirilmiştir.

Teoremlerin resimleri ve teoremlerde yer alan bazı ortak kavramların resimleri başlıklarından elde edilen sonuçların birbiri arasındaki ilişki Şekil 5.1' de verilmiştir. Kategori eksenleri ilişkili olma durumlarına göre yeşil çizgilerle birleştirilmiştir. Verilerin analizlerinden elde edilen ana kategorilerin sonuçları bu bölümde verilecektir.



Şekil 5. 1. MÖA' nın matematiksel teoremlere ve bazı ortak kavramlara ait resimleri

Şekil 5.1' de görüldüğü gibi MÖA' nın teoremlerin ispatlarının ve teoremlerde yer alan bazı ortak kavramların resimlerinde hem kendi kategorileri hem de birbirilerinin kategorileri içinde ilişkilerin var olduğu görülmüştür. Bu kısımda her kategori için ayrı şekilde sonuçlara yer verilmiştir.

Resimlerin Durumları: MÖA' ndan verilen teoremlerin ispatlarını görselleştirmeleri istenmişti. MÖA' nın teoremlere ait çizdikleri resimler incelendiğinde resimlerin büyük çoğunluğunun teoremlerle ilişkili bir kısmının ise teoremleri yansıtmadığı görülmüştür.

Teoremlerle ilişkili olan resimlerin de teoremin ispatını yansıtma durumlarında farklılıklar bulunduğu araştırmanın sonucunda gözlemlenmiştir. MÖA bazı teoremlerin ispatlarını tam karşılayan ispat resimleri oluştururken bazı teoremlerin ispatlarının ise belli kısımlarını görselleştirmiştir. Bu nedenle ispat ile uyumlu olan resimler tam resim ve yarım resim olmak üzere iki alt kategoride toplanmıştır. İspat ile ilgili olan tam resimlerde renk kullanıldığı, bazı ispat resimlerinin sonsuzluk algısı yaratılabilmek için hareketlilik özelliğine sahip olduğu görülmüştür. Yine ispat ile ilgili olan teoremlerin resimlerinde eleman kavramının genellikle mutlak mesafeli olma kategorisine ait olduğu görülmüş bunun ön bilgilerin etkisiyle oluştuğu ve MÖA' nın alanda geçerlilik kazanabilmek için bu yolu seçtiği sonucuna varılmıştır.

MÖA teoremleri karşılamayan resimleri oluşturdukları görselleştirme süreçlerini ispata yönelik tamamlamamışlardır. Bu alt kategorideki resimlerin daha çok MÖA' nın verilen teoremlerin ispatlarını bilmedikleri durumlarda ortaya çıktığı görülmüştür.

Resimlerin Özellikleri: MÖA' nın teoremlere ait resimleri incelendiğinde resimlerin yapısal olarak farklı özelliklere sahip oldukları görülmüştür. Bu alt kategoride yer alan resimlerde;

- İspatın sonsuzluk kavramı ile ilişkilendirilmek istendiğinde resimlerin hareketlilik özelliğine sahip olduğu,
- MÖA' nın ispatın resimlerini zihinlerinde 3-boyutlu düşünüp ancak kağıda 2-boyuta aktardıkları ya da ilk olarak 2-boyutlu olan bir ispatın sonrasında 3-boyutlu hale getirdikleri,

- Fark, ayırt etme, yoğunluk gibi özellikleri gösterebilmek için renk kullanımının olduğu,
- Günlük yaşam yansımalarının etkisinin bulunduğu ve bu durumun devam ettiği ya da devam etmediği

görülmüştür.

Resimlerin Yeri: MÖA' nın teoremleri karşılayan ispat resimleri incelendiğinde resimlerin literatürde yer alan resimler ve adayların kendilerine ait özgün resimler olarak ikiye ayrıldığı görülmüştür. Her ne kadar kendine özgü ispat resimleri bulunsa da MÖA' nın kendine özgü resim çizmekte çekindiği görülmüştür. Bunun nedeninin ise çizdikleri resimlerin alan geçerliliğin bulunma olasılığının azalacağını düşünmeleridir.

MÖA' nın teoremlerde yer alan kavramları görselleştirirken ya o kavrama ya da o kavramın teoremde yer alan diğer kavramlarla arasındaki ilişkiye odaklandığı görülmüştür. Yine teoremlerde yer alan bazı ortak kavramların resimlerinin teoremlere göre değiştiği görülmüştür. MÖA' nın bu amaçlar doğrultusunda görselleştirdikleri bazı ortak kavramlardan elde edilen sonuçlar aşağıda yer almaktadır.

Küme Resimleri: MÖA' na verilen teoremlerin hepsi küme kavramını kapsamaktadır. Buradan yola çıkılarak MÖA' nın bu kavrama ait resimleri incelenmeye değer görülmüştür. Küme sonsuz elemana sahip olduğunda kavram bir yoğunluk olarak görselleştirilmiştir. MÖA' nın fonksiyon ve limit kavramlarını temel alındığı teoremlerde küme kavramını lineer diziliş olarak görselleştirdikleri görülmüştür. MÖA' nın günlük hayat yansımalarından yola çıkarak küme kavramını lego, DNA şeklinde de çizdikleri verilerden elde edilen sonuçlarda görülmektedir.

Elemanlara Karar Verme: Teoremlerde yer alan ortak kavramlardan biri de eleman kavramıdır. Eleman kavramının görselleştirilme sürecinin tanımlandığı kümeyle ilişkili olduğu görülmüştür. Eleman kavramına ait resimler incelendiğinde tam resim olarak kodlanan ispat resimlerinde mutlak mesafeli ve tarama olarak çizildiği görülmüştür.

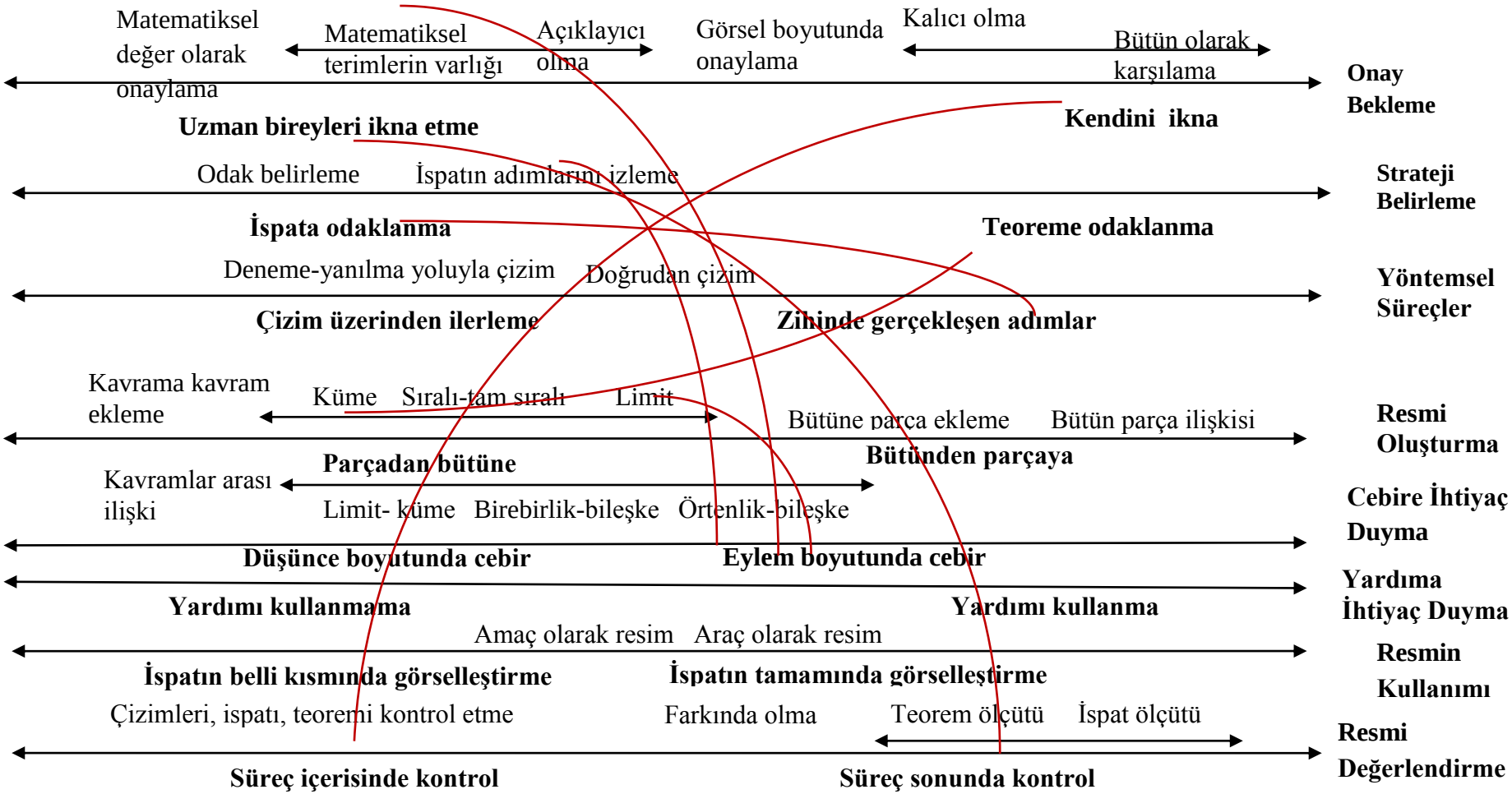
Sıralı Olma Durumu: MÖA' nın elemanları sıralama konusunda farklı resimlerden faydalandıkları görülmüştür. MÖA bağıntının belli olmadığı durumlarda kavramın ilişkili olduğu diğer kavramlara da bakılarak sıralı olma durumu renk, ek görsel kullanma ve ebatsal farklılıklardan yararlanmıştır.

Fonksiyon Resimleri: Fonksiyon kavramı araştırmada kullanılan bütün teoremlerde yer almaktadır. Limit kavramı ile ilişkili olan Teorem 1 ve Teorem 2'de MÖA' nın fonksiyon kavramını dikey ve yatay doğrular arasında kalan eğriler olarak görselleştirdikleri görülmüştür. MÖA' nın günlük yaşamdan getirdikleri öğrenmeleri ile de fonksiyon kavramını görselleştirdikleri görülmüştür. Özellikle A1'in fonksiyon kavramına ait resminin lego resmi olduğu fark edilmiştir.

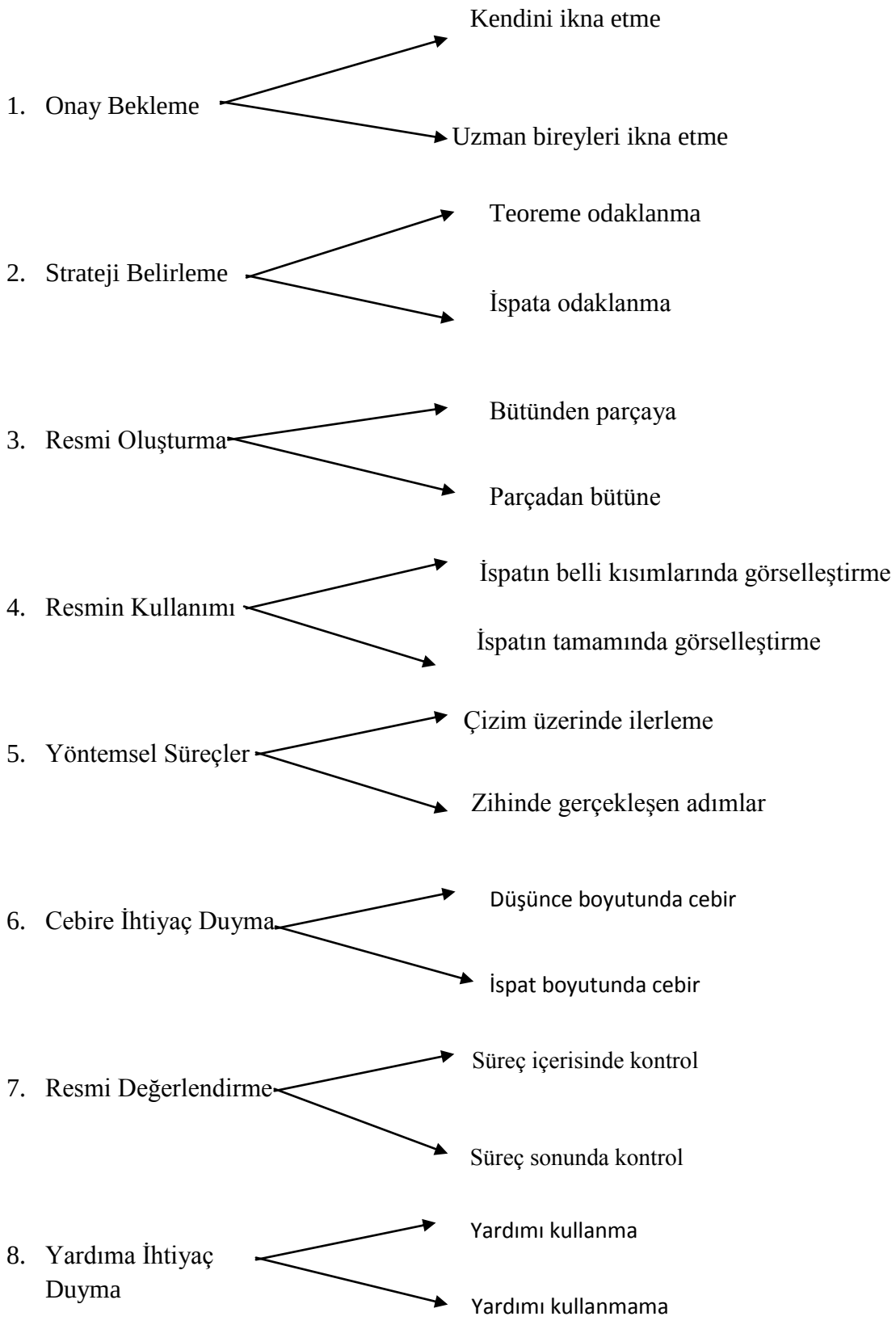
MÖA' nın Matematiksel Teoremlerin İspatlarını Görselleştirme Süreçlerine Ait Bulgularının Sonuçları

MÖA' ndan elde edilen veriler sonucu teoremlerin ispatlarının görselleştirme süreçleri Şekil 5.2' de verilmiştir. Şekil 5.2' de görüldüğü gibi matematiksel teoremlerin ispatlarının görselleştirme süreçlerine ait kategoriler; onay bekleme, strateji belirleme, resmi oluşturma, cebire ihtiyaç duyma, resmin kullanımı, yöntemsel süreçler, resmi değerlendirme, yardıma ihtiyaç duymaktır.

Her kategorinin kendi ekseni üzerinde alt kategorileri de gösterilmiştir. Bu alt kategoriler; kendini ikna etme, uzman birini ikna etme, teoreme odaklanma, ispata odaklanma, parçadan bütüne, bütünden parçaya, zihinde gerçekleşen adımlar, düşünce boyutunda cebir, eylem boyutunda cebir, süreç içinde kontrol, süreç sonunda kontrol, ispatın belli kısmında görselleştirme, ispatın tamamında görselleştirme, yardımı kullanma, yardımı kullanmama, uzman bireyleri ikna etme, kendini ikna etmedir. Kategori eksenleri ilişkili olma durumlarına göre çizgilerle birleştirilmiştir. Verilerin analizlerinden elde edilen ana kategorilerin sonuçları bu bölümde verilecektir. Verilerin analiziyle MÖA' nın matematiksel teoremlerin ispatlarını görselleştirme sürecine ilişkin sonuçlarının bir arada yer aldığı şekle, sayfa 135'te yer alan Şekil 5.3'te yer verilmiştir.



Şekil 5. 2. MÖA' nın matematiksel teoremleri görselleştirme süreçleri



Şekil 5. 3. Matematiksel teoremlerin ispatlarının görselleştirilmesine ait kategoriler ve alt kategorileri

Şekil 5.3'te yer aldığı gibi MÖA' nın ispatları görselleştirme süreçlerine, ait sekiz kategori ve on altı alt kategoriden oluşmaktadır. Bu kısımda her kategori için ayrı şekilde sonuçlara yer verilmiştir.

Onay Bekleme: MÖA' nın görselleştirme süreçleri incelendiğinde ispatlara ait resimler oluştururken kendilerini ve araştırmacıyı ikna etme gereği duyduğu görülmüştür. MÖA kendini ikna edebilmek için resimlerini kendi oluşturmuş olduğu resim ve matematiksel ölçütlere göre onaylamıştır. Resim ölçüt olarak bir resmin kalıcı olmasını ve teoremin ispatını olabildiğince kapsaması bekledikleri gözlemlenmiştir. Diğer yandan bir resmin ikna edebilmesi için matematiksel olarak da değerinin bulunması gerektiği adaylar tarafından belirtilmiştir. MÖA için bir resmin matematiksel terimler içermesi ve teoremi açıklayabilme düzeyi onun geçerliliği için önemli olduğu görülmüştür. MÖA' nın resimlerini diğer uzman matematikçiler tarafından da onanmasını beklediği görülmüştür. Bunun koşulu olarak ise resmin herkes tarafından anlaşılır olmasını bekledikleri söylenebilir. MÖA' nın kendini ikna etme durumları süreç içerisinde kontrol boyutuyla ilişkilidir. Diğer bir ifade ile kendini ikna etme durumları resmi değerlendirmeleri üzerinde etkili olmuş ve süreç boyunca resmi kontrol etmişlerdir. Uzman bireyleri ikna etme durumları süreç sonunda kontrol boyutuyla ilişkilidir. MÖA' nın resimlerinin anlaşılırlığını süreç sonunda kontrol ettiği görülmüştür.

Strateji Belirleme: MÖA' nın teoremlerin ispatlarını görselleştirirken hem teoreme hem de ispata odaklandıkları görülmüştür. Bu nedenle strateji belirleme durumu ispata odaklanma ve teoreme odaklanma olarak iki başlık altında incelenmiştir. İspata odaklanan adaylar ya ispatta önemli gördükleri noktalar üzerinden görselleştirme yapmış ya da ispatın adımlarını birebir görselleştirmeye çalışmıştır. İspata odaklanan adayların görselleştirme sürecini zihinde ilerlettikleri adımlar ile gerçekleştirdikleri gözlemlenmiştir. Bu nedenle ispata odaklanma boyutu ile zihinde gerçekleşen adımlar boyutu arasında ilişki vardır. Aynı zamanda ispata odaklanan adayların cebirsel terimleri kullanma durumlarının fazla olduğu görülmüştür. Sonuç olarak ispatın odaklarını izleme boyutunun aynı zamanda cebire ihtiyaç duyma kategorisi ile de ilişkili olduğu söylenebilmektedir.

Resmi Oluşturma: MÖA' nın ispatlarının resimlerinin oluşum süreçleri incelendiğinde, resimlerin ana bir kavramdan ya da ayrı kavramların resimlerinin birleştirilmesinden oluştuğu görülmüştür. Bu nedenle kategori parçadan bütüne ve bütünden parçaya olmak üzere iki alt kategoride incelenmiştir. MÖA teoremlerde yer alan kavramlar içinden ana kavramlar belirlemişlerdir. İspatın resimlerini ilk olarak ana kavramı görselleştirip daha sonrasında bu kavram üzerine resimler ekleyerek oluşturdukları görülmüştür. Bir diğer boyutta ise MÖA' nın teoremde yer alan kavramların resimlerini ilk olarak ayrı ayrı çizdiği daha sonrasında teoreme uygun olacak şekilde birleştirdikleri gözlemlenmiştir. Kavramlar arası ilişki boyutunda yer alan ilişkili kavramların yani ayrı çizilip sonradan birleştirilenlerin limit-küme, birebirlik-bileşke ve örtenlik-bileşke olduğu görülmüştür.

Yöntemsel Süreçler: MÖA' nın görselleştirme sürecinde düşüncelerini sesli olarak dile getirmeleri istenmiştir. Bu kategoride adaylar, düşüncelerini zihinlerinde ve kağıt üzerinde ilerletmişlerdir. Düşüncelerini zihninde ilerleten adaylar zihinsellerindeki bulguları tamamladıktan sonra ispatların resimlerini oluşturmaya çalışmıştır. Düşüncelerini resim olarak ilerleten adaylar ise kağıt üzerinde düşüncelerini muhakeme ederek ispata ait resimlerini oluşturmuşlardır. Bu durum da yöntemsel süreçler resim üzerinde ilerleme ve zihinde gerçekleşen adımlar olarak yorumlanabilir.

Cebire İhtiyaç Duyma: MÖA' ndan verilen teoremlerin ispatlarını görselleştirmeleri istendiğinde adayların cebire eğilim gösterdikleri görülmüştür. Bu durum bazı adaylarda sadece düşünce boyutunda kalırken bazı adaylarda ise görselleştirme sürecinde bir araç olarak kullanılmıştır. Bu da ispatlarının resimlerinin oluşturulması sürecinde cebire ihtiyaç duyma şeklinde yorumlanabilir. MÖA' nın limit kavramı ile ilgili teoremlerin ispatları için daha çok cebirsel ifadelerden yararlanma gereği duyması üzerine cebire ihtiyaç duyma kategorisinden biri olan eylem boyutunda cebir ile kavrama kavram ekleme boyutunun ilişkili olduğu görülmüştür. MÖA için ispatlarda matematiksel terimlerin kullanılması ispat resimleri için bir kısas olmasından dolayı cebire ihtiyaç duyma kategorisi onay bekleme kategorisi ile de ilişkilidir.

Resmi Değerlendirme: MÖA' nın çizmiş oldukları ispat resimlerini değerlendirme şekillerinde farklılıklar olduğu görülmüştür. Bu değerlendirme durumu bazı adaylarda süreç boyunca gerçekleşirken bazı adaylarda ise sürecin sonucunda ortaya çıkmıştır. MÖA' nın resimlerini değerlendirirken ispatı tekrar yaptıkları da gözlemlenmiştir. Bazı MÖA ispatlara ait resimler yapmış olsalar bile sürecin sonunda bunun farkında olamadıkları görülmüştür.

Yardıma İhtiyaç Duyma: Önceden de söylendiği gibi MÖA' na beş adet matematiksel teorem ile bu teoremlerin ispatları bir arada verilmişti. MÖA verilen ispatları kullandıkları gibi ispatlardan yararlanmayıp da ispat resimlerini oluşturmuşlardır. MÖA' nın ispatları kullanmaları, onların ispatın resimlerini çizmesine yardımcı olduğu görülmüştür. MÖA' nın daha çok analiz alanındaki teoremlerde ve Teorem 4'ün ispatında yardıma başvurdukları görülmüştür.

Öneriler

Bu bölümde, araştırmanın sonuçları doğrultusunda faydalı olacağı düşünülen önerilere yer verilmektedir.

Eğitimci ve öğretmenlere Öneriler

MÖA, görselleştirmenin matematiksel teoremlerin ispatları için hem ispatı anlama hem de ispatı yapma boyutlarında olumlu etkileri olduğunu ifade etmiştir. MÖA' nın verilen teoremlerin ispatlarını görselleştirme süreçleri bu durumu destekler niteliktedir. Dolayısıyla matematik eğitiminin de özellikle ispat yaparken öğrencilerin görselleştirme kabiliyetlerini desteklemeye yönelik etkinliklere fırsat verilmesinin faydalı olacağı düşünülmektedir.

Öğretmenlere, öğrencilerden ispatları görselleştirme etkinlikleri sürecinde zihinlerinde gerçekleştirdikleri düşünceleri sesli olarak ifade etmelerini istemeleri önerilebilir. Bu sayede hem öğrencilerin resimleri oluştururken başvurdukları görselleştirme durumlarını fark etmelerini sağlanabileceği hem de öğretmenlerin öğrencilerinin kendi resimlerini oluştururken nasıl düşünceler geliştirdiklerini fark etme fırsatı verebileceği düşünülmektedir.

Araştırmacılara Öneriler

Araştırma sonuçlarına göre MÖA' nın, ispatı ile daha önceden karşılamadıkları veya tam hatırlayamadıkları teoremlere göre ispatını bildikleri matematiksel teoremleri görselleştirme durumlarının daha rahat üstesinden geldikleri görülmüştür. Bu nedenle teoremlerin görselleştirilmesi etkinliklerinde önbilginin etkili olduğu sonucuna varılmıştır. Dolayısıyla teoremlerin seçilmesi konusunda bu durumun göz önünde bulundurulması önerilebilir.

Bu araştırma süresince MÖA özgür bırakılmış, görselleştirme sürecinde çizmiş oldukları hiçbir resme araştırmanın amacından uzaklaşılmadığı sürece karışılmamıştır. Bu sayede adayların rahat bir ortamda anlamlı ispat resimleri oluşturmaları sağlanmıştır. MÖA' nın süreç boyunca çizmiş oldukları ispat resimlerinin oluşum şekilleri ve çeşitlilik göstermesi bu durum için geçerli bir neden olarak görülebilir. Bu durumda standart şekiller beklenilmesinden ziyade esnek düşüncelerle çalışılması, matematiksel teoremlerin ispatları için yeni resimleri ortaya çıkarabilir, ispatların algılanması için verimli ortamlar yaratabilir.

Bu araştırma üniversite de eğitim görmekte olan dört matematik öğretmeni adayıyla toplam beş matematiksel teorem üzerinden gerçekleştirilmiştir. MÖA' nın ispatlara ait resimlerinin ortaya çıkarılmasına faydalı olabilmek için farklı örneklem ve etkinliklerle araştırmalar yapılabilir.

KAYNAKÇA

Almeida, D. (2001).Pupils' proof potential.*International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32 (1), 53-60. https://doi.org/10.1080/00207390119535

Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: Can the genesis of mathematical knowledge teach us anything? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(4), 479-488.

Altınparmak, K., & Öziş, T. (2005). Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir inceleme. *Ege Eğitim Dergisi*, 1 (6), 25-37.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215-241.

Argün, Z., Arıkan, A., Bulut, S. & Halıcıoğlu, S. (2014). *Temel matematik kavramların künyesi.* Ankara: Gazi Kitabevi.

Arsac, G. (2007). Origin of mathematical prof: History and epistemology. In P. Boero (Ed.), (s. 27-42). *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice*. Sence Publishers. Rotterdam: The Netherlands.

Bardelle, C. (2010,February). *Visual proofs: an experiment*. Paper presented at the Proceedings ofthe Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Lyon, France

Bell, C. (2011). Proofs without words: A visual application of reasoning and proof. *Mathematics Teacher*, 104, 690-695.

Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus On Learning Problems In Mathematics, 11* (1), 7-16.

Borwein, P., & Jorgenson, L. (2001). Visible Structures in Number Theory. *The American Mathematical Monthly, 108*(10), 897-1006.

Casselman, B. (2000). Picture and proof. *Notices of The American Mathematical Society*, 47 (10), 1257-1266.

Creswell, J.W. (2013). Nitel çalışma tasarımı. Creswell, J.W. (Eds.) *,Beş yaklaşıma göre nitel araştırma ve araştırma deseni* (A.Budak & İ.Budak, Çev.) içinde (s.42-68). Ankara: Siyasal.

Çelik, H., & Ekşi, H. (2015). *Gömülü teori*. Edam Yayınları: İstanbul.

Çetin, A. Y. (2017). *Matematik Öğretmeni Adaylarının Matematiksel İspatta Önceden Belirlenen Anahtar Fikirleri Yazabilme Süreçleri.* Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Dickerson, D. S. (2008). *High School Mathematics Teachers' Understandings of the Purposes of Mathematical Proof. Doctoral Dissertation, Syracuse University Philosophy in Mathematics Education, New York.*

Dede, Y., & Karakuş, F. (2014). Matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış: Kuramsal bir çalışma. *Adıyaman University Journal of Educational Sciences*, 4(2), 47-71.

Demircioğlu, H. & Polat, K. (2016). Ortaöğretim matematik öğretmenş adaylarının "sözsüz ispatlar" ile yaşadıkları zorluklar hakkındaki görüşleri. *Uluslararası Türk Eğitim Bilimleri Dergisi,* 4(7), 82- 99.

Denzin, N.K., & Lincoln, Y.S. (2011). The sage handbook of qualitatie research.California: Sage

Derek, M. (2011). *Teaching and learning of proof in the college curriculum.* Unpublished master's thesis, San Jose State University Washington.

Eisenberg, T. (1994). On understanding the reluctance to visualize. *Zentralblatt fürDidactic der Mathematik, 26* (4), 109-113.

Farmaki, V., &Paschos, T. (2007). The interaction between intuitive and formal mathematical thinking: a case study.*International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38(3), 353-365.*

Goldberg A. (2002). *What are Mathematical Proofs and Why are They Important?*http://www.math.uconn.edu/~hurley/math315/proofgoldberger.pdf sayfasından erişilmiştir.

Gutiérrez, A. (1996). *Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework.* Paper presented at the 20th International Group for the Psychologyof Mathematics Education, Valencia, Spain.

Guzman, M. (2002, July). *The Role of Visualization in the Teaching and Learning of Mathematical Analysis*. Proceedings of the International Conference on the Teaching of Mathematics, Crete.

Güler G., Ekmekçi S. (2016). Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Değerlendirme Becerilerinin İncelenmesi: Ardışık Tek Sayıların Toplamı Örneği. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11 (1),6 1-83.

Gülşen, İ. (2012). *Matematik öğretmen adaylarının resim akıl yürütme durumlarının incelenmesi*. Yüksek lisans tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5- 23.

Hanna, G., & Barbeau, E. (2002). What is a proof? In B. Baigrie (Ed.). *History of modern science and mathematics,* 1, 36-48.

Hanna, G. & Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM Mathematics Education*, 40, 345–353.

Harel, G., &Sowder, L. (2007). Toward a comprehensive perspective on proof. In F. Lester (Ed.), *Handbook of Research on Teaching and Learning Mathematics* (2) (pp. 805-843).Charlotte: NCTM.

Herbst, P. (2002). Establishing a custom of proving in American school geometry: Evolution of the two-column proof in the early twentieth century. *EducationalStudies in Mathematics, 49,* 283-312.

Herrera, C. A., McCabe, T., Strictland S. & White, A. (2017). Let's Draw a Picture. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies,* 28, 46-56,https://doi.org/10.1080/10511970.2017.1338319

Horzum, T. (2013). *Görme engelli öğrencilerin bazı matematiksel kavramlardaki kavram imajları ve temsilleri.* Yüksek lisans tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Işık, A., & Konyalıoğlu, A.C. (2005).Matematik eğitiminde görselleştirme yaklaşımı.*Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11, 463-471.

İslamoğlu, A.H. (2009). *Sosyal bilimlerde araştırma yöntemleri.* İstanbul: Beta

İspat. (t.y.). Türk Dil Kurumu içinde. http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_bts&arama=kelime&guid=TDK.GTS.5a316b71a3f5a9.95753211 sayfasından erişilmiştir.

Krantz, S. G. (2011). *The proof is in the pudding: the changing nature of mathematical proof*. Springer Science & Business Media :New York

Knuth E. J., (2002). Secondary School Mathematics Teachers' Conceptions of Proof. *National Council of Teachers of Mathematics,33(5),379-405.*

Knuth, E. J. (2002b). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teachers Education*, (5), 61 – 88.

Koğ, O. U., & Başer, N. (2011). Matematikte öğrenilmiş çaresizliğe ve soyut düşünmeye etkisi. *Batı Anadolu Eğitim Bilimleri Dergisi (BAED,* 1(3), 89-10.

Lee, J. K. (2002). Philosophical perspectives on proof in mathematics education. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 16.

Merriam, S.B. (2013). *Nitel araştırma desen ve uygulama için bir rehber.* (S.Turan, Çev.) Ankara: Nobel.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2018). Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı: 9-12. Sınıflar. Ankara

Mostafa, A. (2001). *Mathematical visualization for linear programming*. Doctor of Philosophy, Mathematics and Industrial Engineering, New Mexico State University Las Cruces, New Mexico

Özer, Ö. & Arıkan, A. (2002, Eylül). *Lise matematik derslerinde öğrencilerin kanıt yapabilme düzeyleri.* V. Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresinde sunulmuş bildiri, ODTÜ, Ankara.

Polat, K., & Demircioğlu, H. (2016). Matematik eğitiminde sözsüz ispatlar:Kuramsal bir çalışma. *Dicel Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28, 129- 140. http://dx.doi.org/10.14582/DUZGEF.686

Presmeg, N., 1986. Visualisation and mathematical giftedness, *Educational Studies in Mathematics*, 17, 297-311.

Presmeg, N. C. (1997). Generalization using imagery in mathematics. In L.D. English(Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images* (pp. 299-312).
Malwah, NJ: Erlbaum.

Pylyshyn, Z. W. (2003). *Seeing and visualizing: It's not what you think*. Cambridge,MA: MIT.

Recio, A. M., & Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 48,* 83–99.

Reid, D. A. (2001). *Proof, proofs, proving and probing: research related to proof*. https://www.researchgate.net/publication/233413684/ sayfasından erişilmiştir.

Roos, K. (1998). Doing and Proving: The place of Algorithms and prof in school Mathematics *American Mathematical Monthly,* 3, 252–55.

Russell, R, A. (1997).*The use of visual reasoning strategies in problem-solving activities by pre-service secondary mathematics teachers.*

Sinnett, S., Spence, C., and Soto-Faraco, S. (2007). Visual dominance and attention: The Colavita effect revisited. *Perception & Psychophysics*, *69*(5), 673–686.

Steckroth, J. J, (2007). *Technology-enhanced mathematics instruction: effects of vizualization on student understanding of trigonometry*. Doctoral Thesis,

Department of Curriculum, Instruction, and Special Education Curry School of Education University of Virginia Charlottesville, Virginia.

Tall, D. (1991). Intituon and rigour: The role of visualization in the calculus, In W.Zimmermann and S.Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and leaming mathematics,* (pp.105-119): Washington DC

Tall, D. (1998). *The Cognitive Development of Proof: Is Mathematical Proof For All or For Some?*Paper presented at the Conference of the University of Chicago School Mathematics Project, Chicago.

Tekin, B. (2010). *Ortaöğretim düzeyinde trigonometri kavramlarının öğretilmesinde görselleştirme yaklaşımının etkililiğinin araştırılması*. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Uğurel, I., Morali, H. S., Karahan, O. & Boz, B. (2016). Mathematically gifted hight school students "approaches to develoing visual proof (VP) and preliminary ideas about VP. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, 4(3), 174-197. http://dx.doi.org/10.18404/ijemst.61686

Weber, K. (2005). Problem solving, proving and learning: the relationship between problem solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *Journal of Mathematical Behaviour*, *24*, 351-360.

Wheatley, G. (1998). Imagery and mathematics learning. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 20* (*2),* 7-16.

Varghese, T. (2007). *Student teachers' conceptions of mathematical prof.* Master Of Education, Department of Mathematical and Statistical sciences CAB 632, University of Alberta, Edmonton, Canada.

Yılmaz, R. (2011). *Matematiksel soyutlama ve genelleme süreçlerinde görselleştirme ve önemi.* Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü,Ankara.

Yılmaz, R. & Argün, Z. (2013).Matematiksel genelleme sürecinde görselleştirme ve önemi.*Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi (H. U. Journal of Education)* 28(2), 564-576.

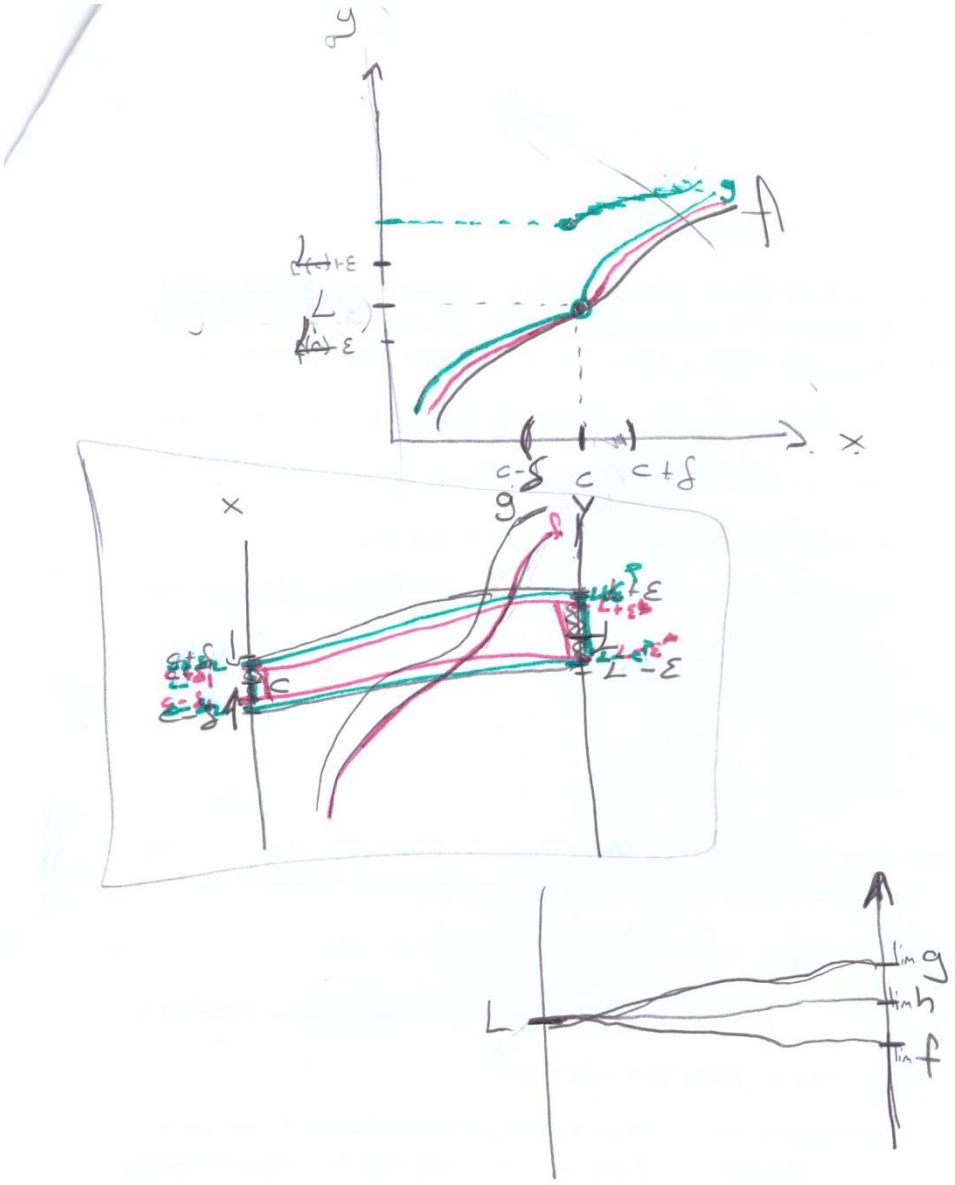
Zahner, D., &Corter, J. E. (2010). The process of probability problem solving: Use ofexternal visual representations. *Mathematical Thinking and Learning, 12*, 177-204.

Zazkis, R., Oubinsky, E. & Oautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group 04, *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 435-457.

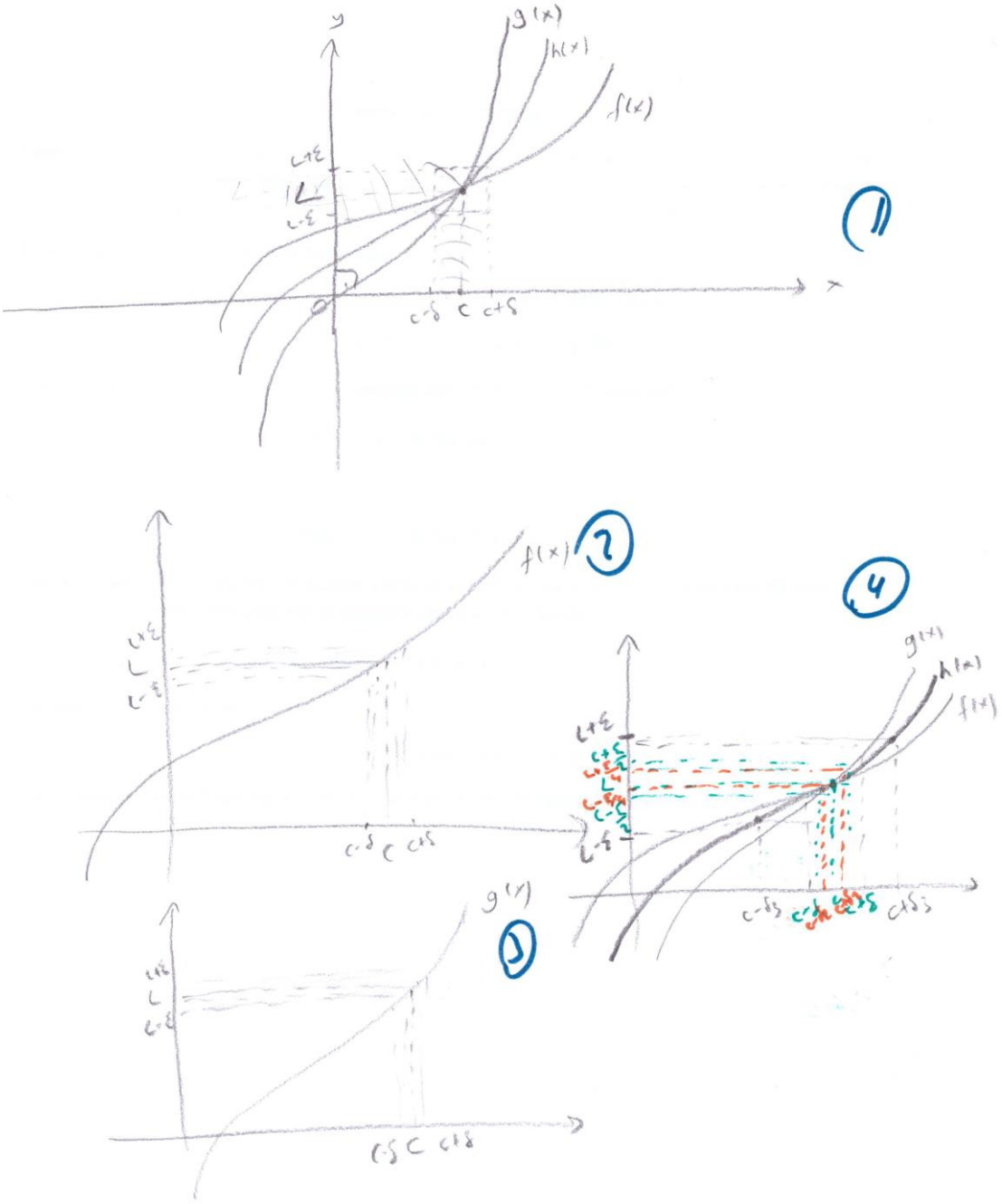
Zimmennann, W. & Cunningham, S. (1991). Editor's introduction:What is mathematical visualization? In W.Zimmennann and S.Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and leaming mathematics*, (pp.1-8), Mathematical Association of Arnerica, Washington OC,471.

EKLER

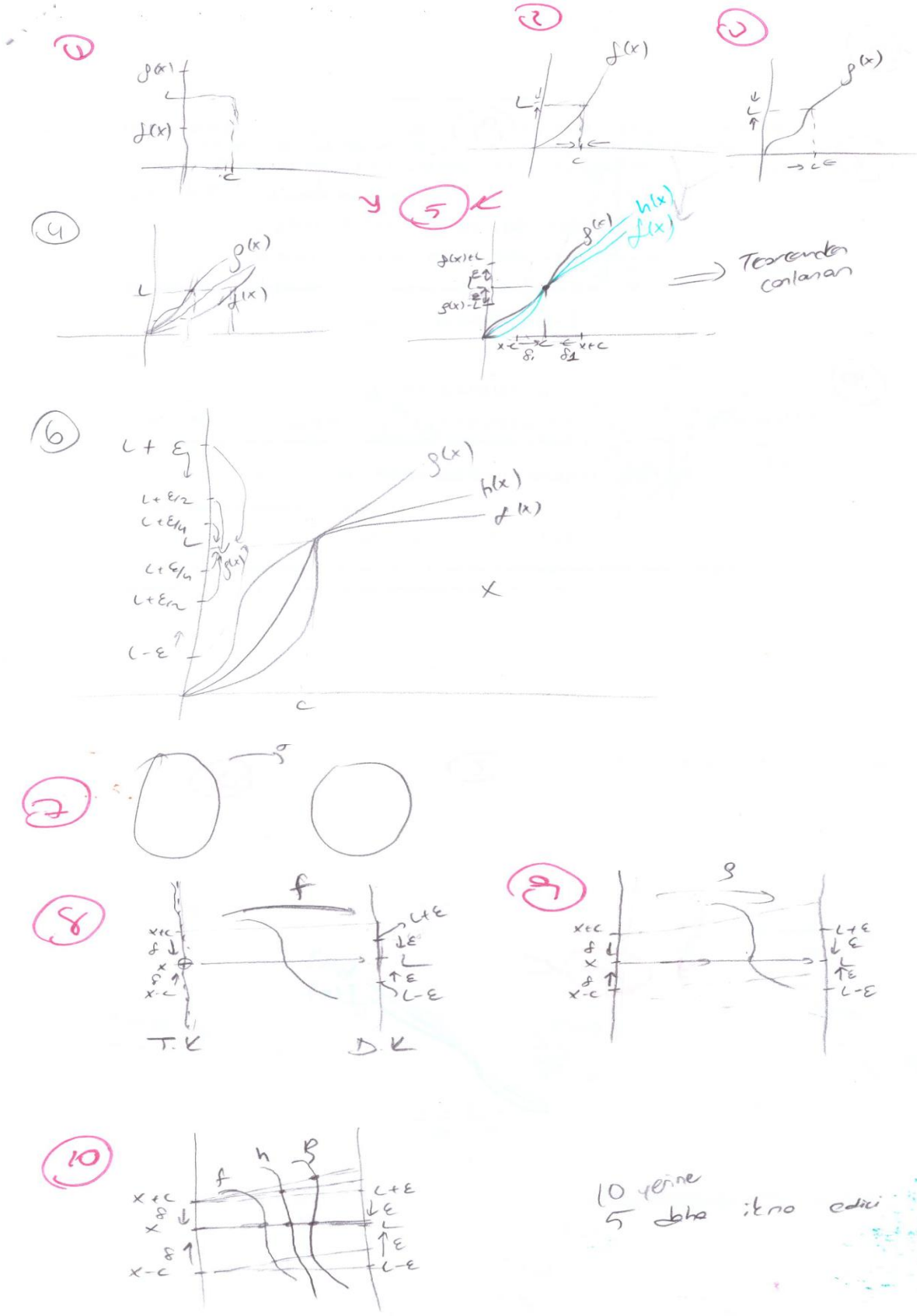
EK 1. Teorem 1'e Ait MÖA' nın Çalışma Kağıdı Örnekleri



RESİM 1.1

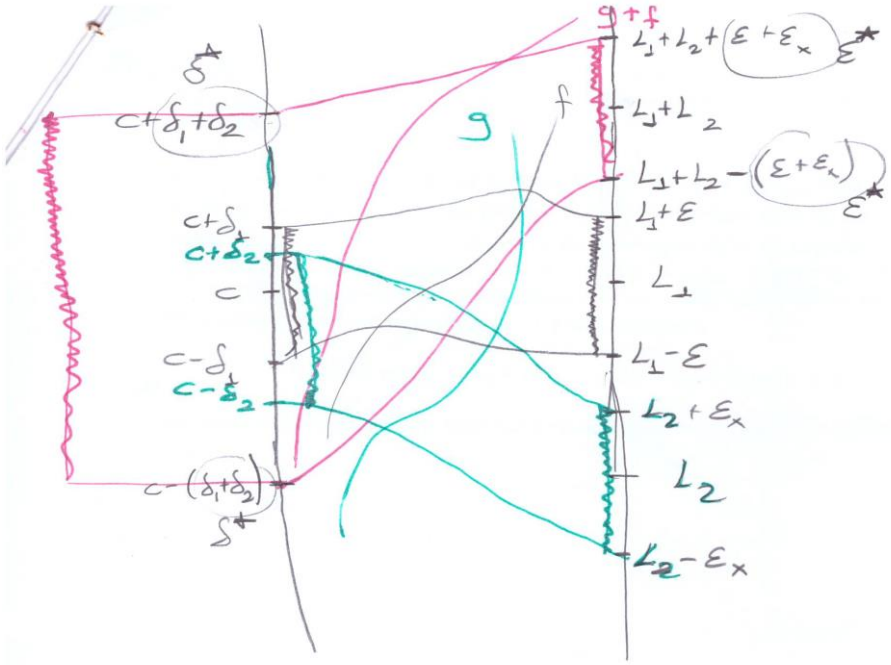


RESİM 1.2

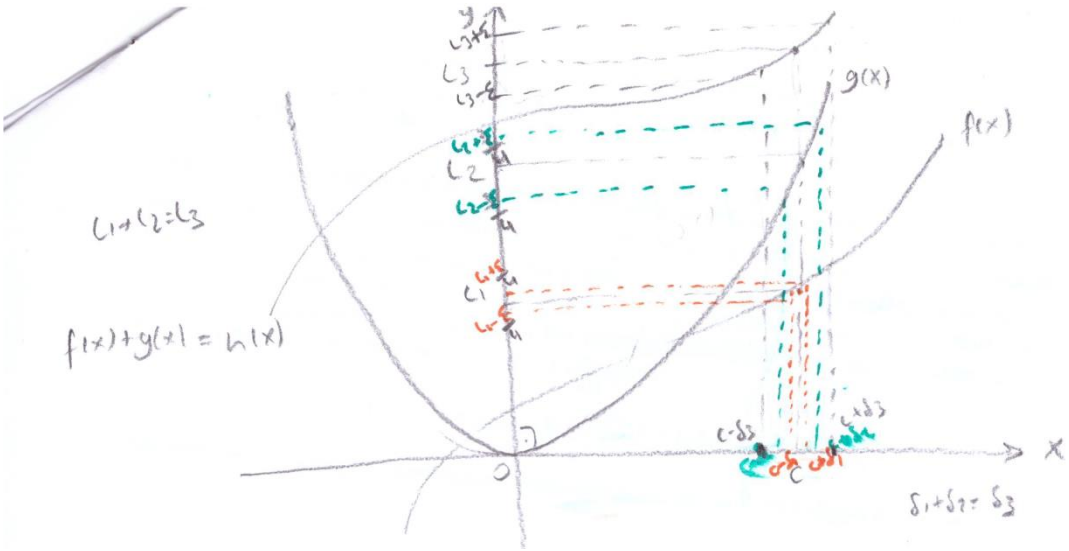


RESİM 1.3

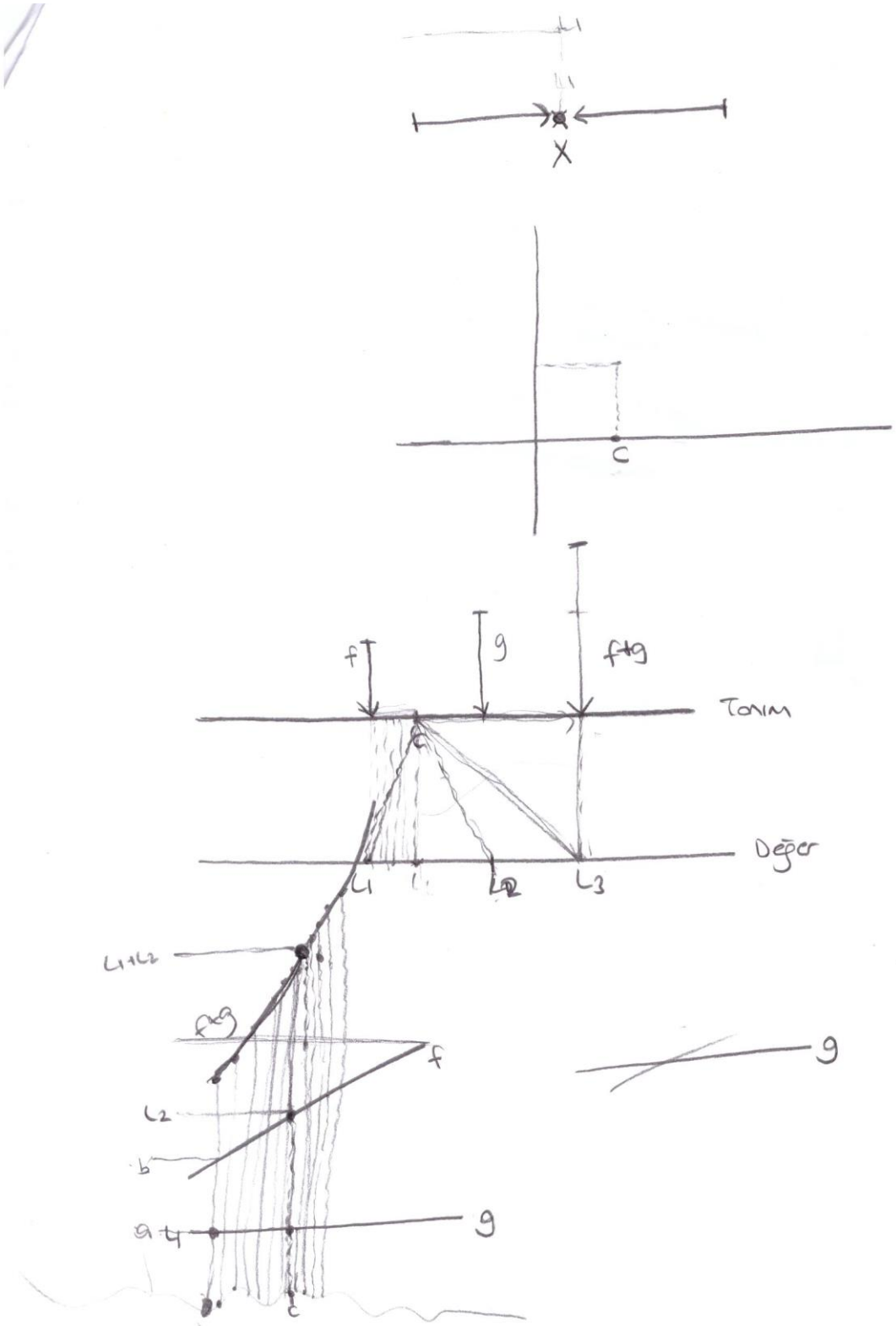
EK 2.Teorem 2'e Ait MÖA' nın Çalışma Kağıdı Örnekleri



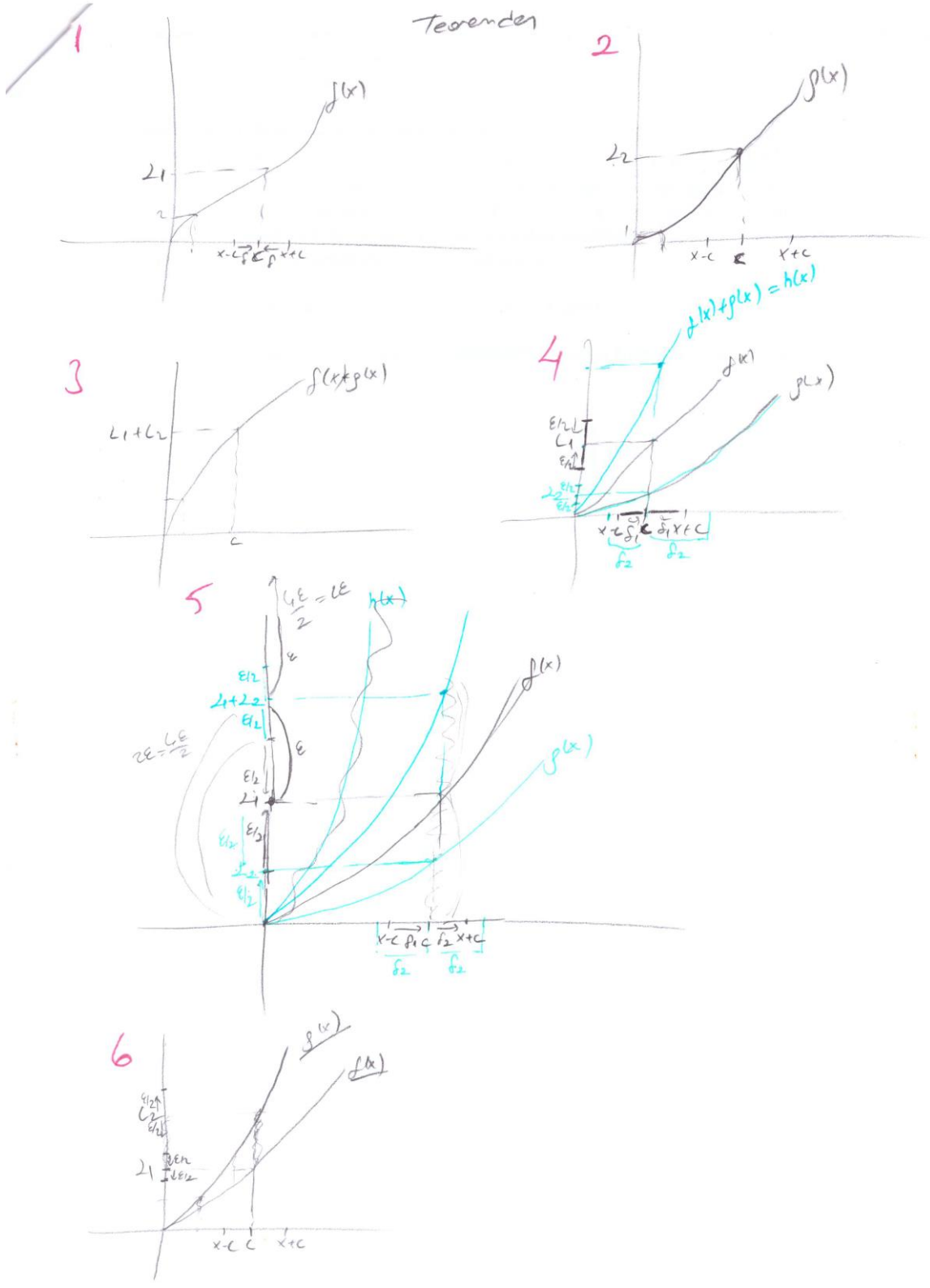
RESİM 2.1



RESİM 2.2

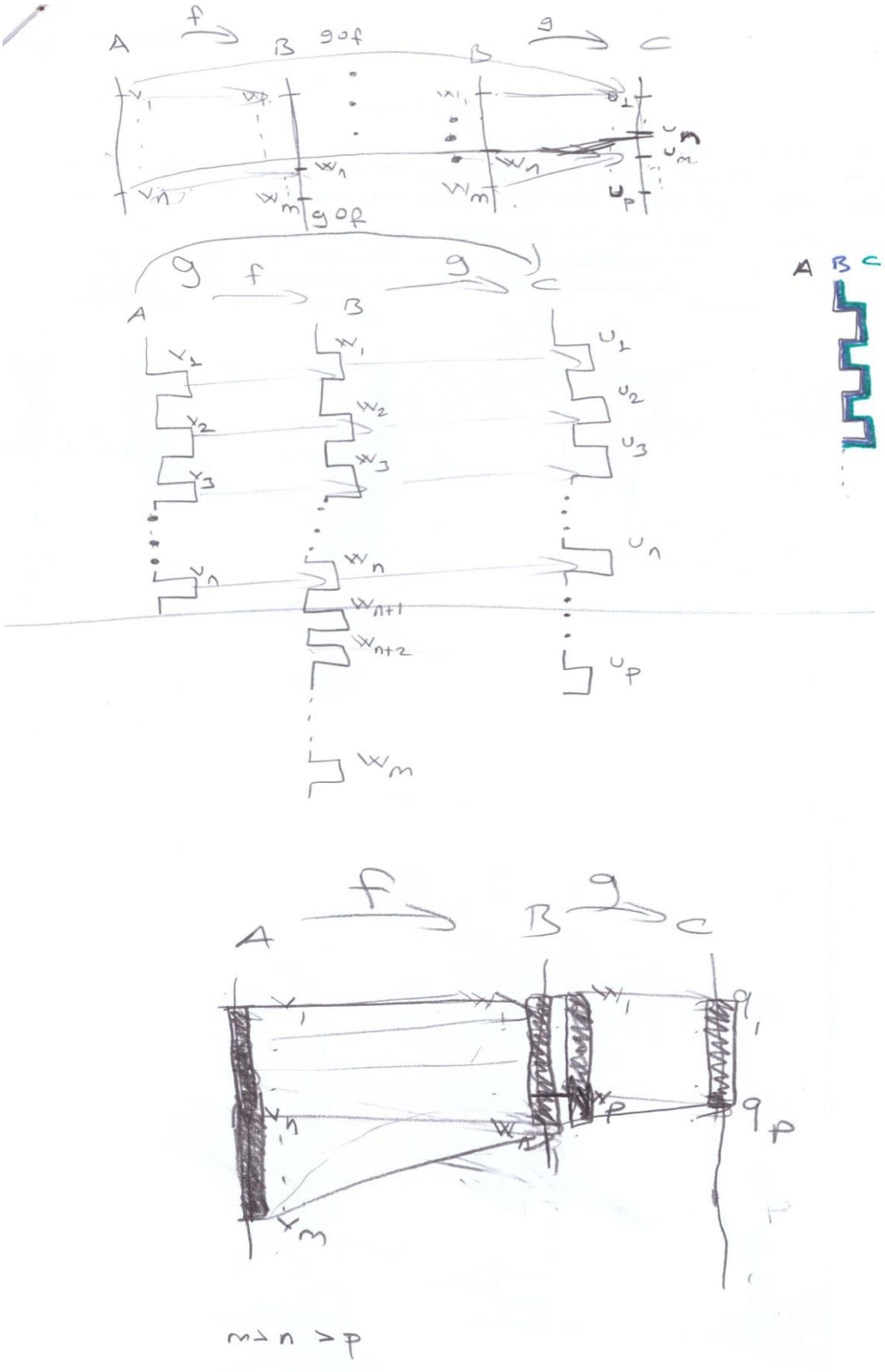


RESİM 2.3

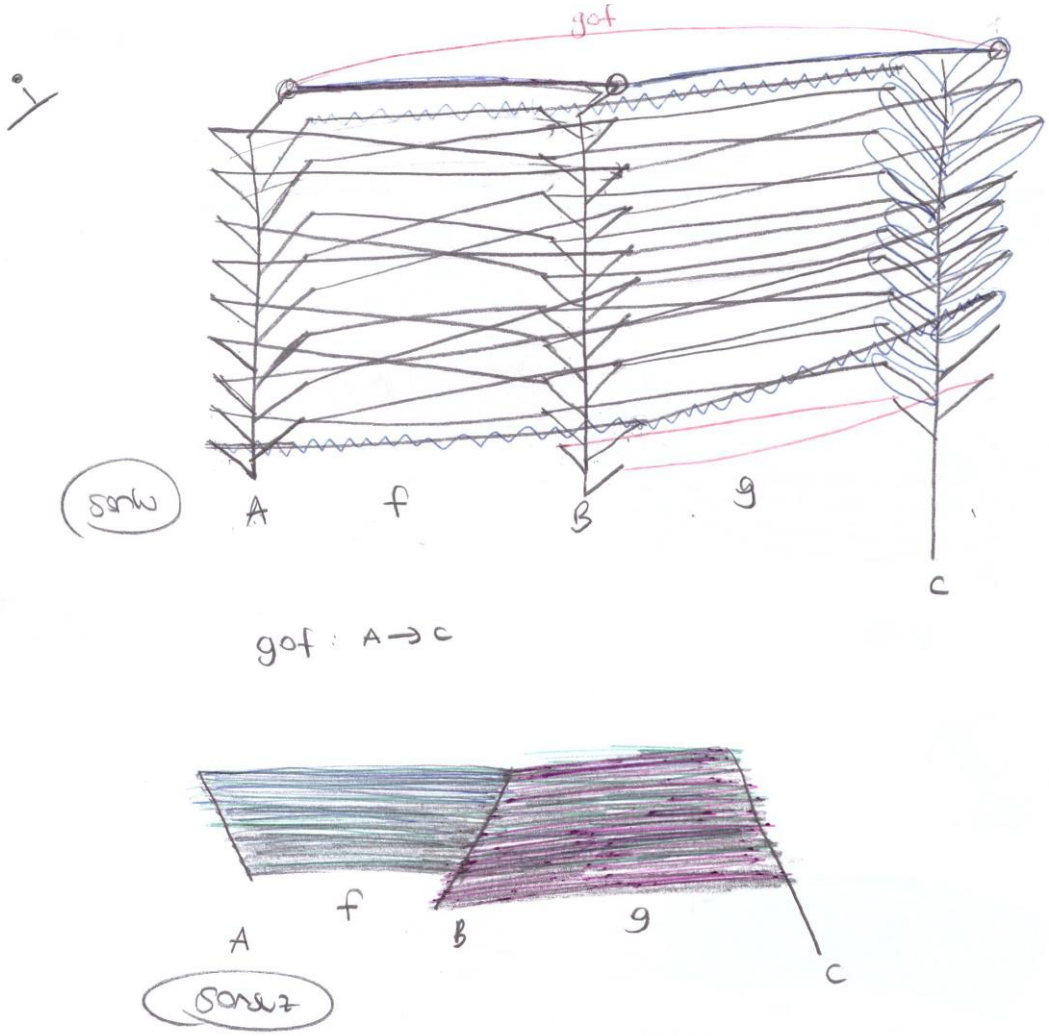

Teoremden
1
f(x)
L1
x-c
c
x+c
2
g(x)
L2
x-c
c
x+c
3
f(x)+g(x)
L1+L2
c
4
f(x)+g(x) = h(x)
f(x)
g(x)
ε/2
L1
L2
x-c
c
x+c
δ1
δ2
5
h(x)
f(x)
g(x)
L1+L2
ε
x-c
c
x+c
δ2
6
g(x)
f(x)
L2
L1
x-c
c
x+c

RESİM 2.4

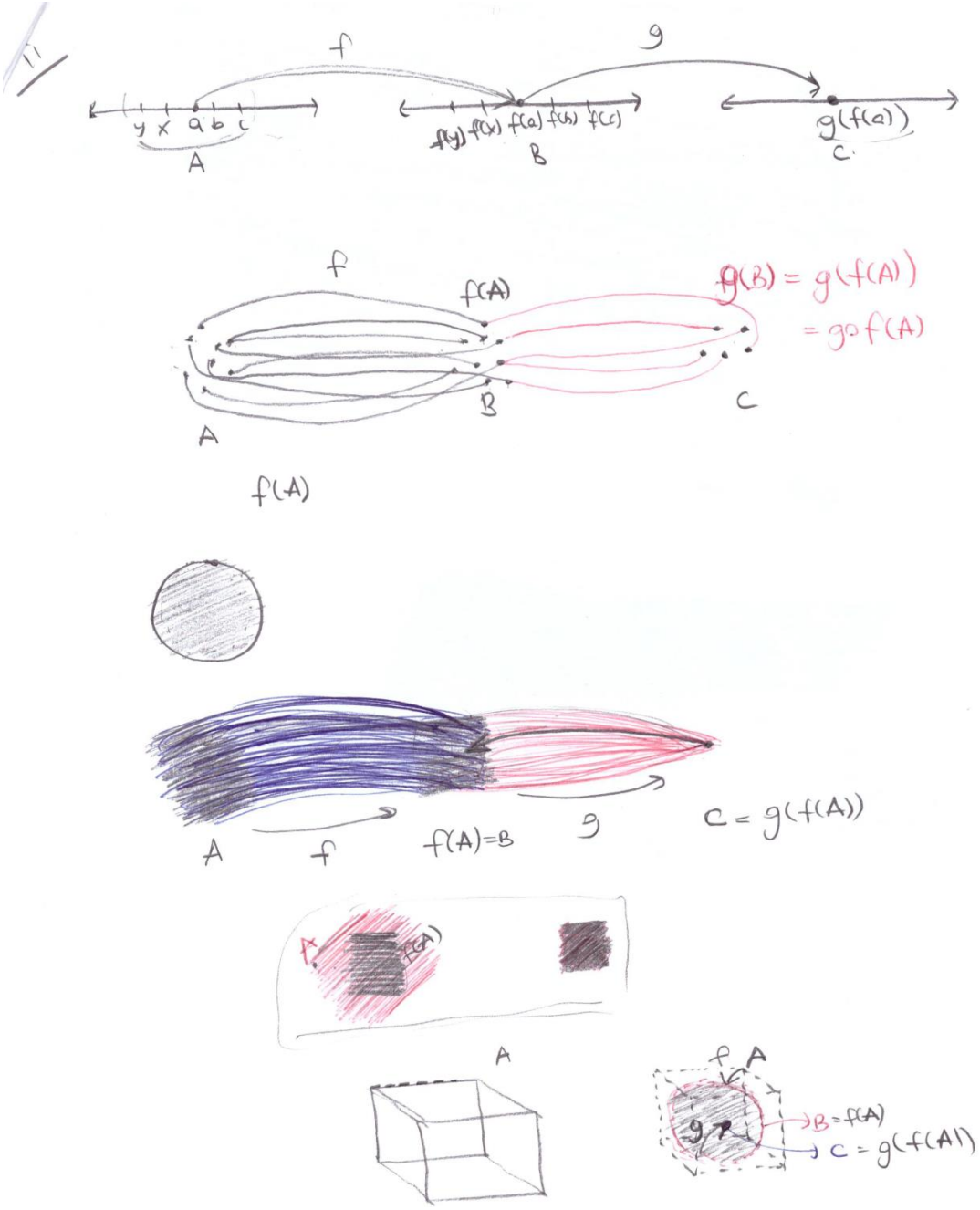
EK 3.Teorem 3'e Ait MÖA' nın Çalışma Kağıdı Örnekleri



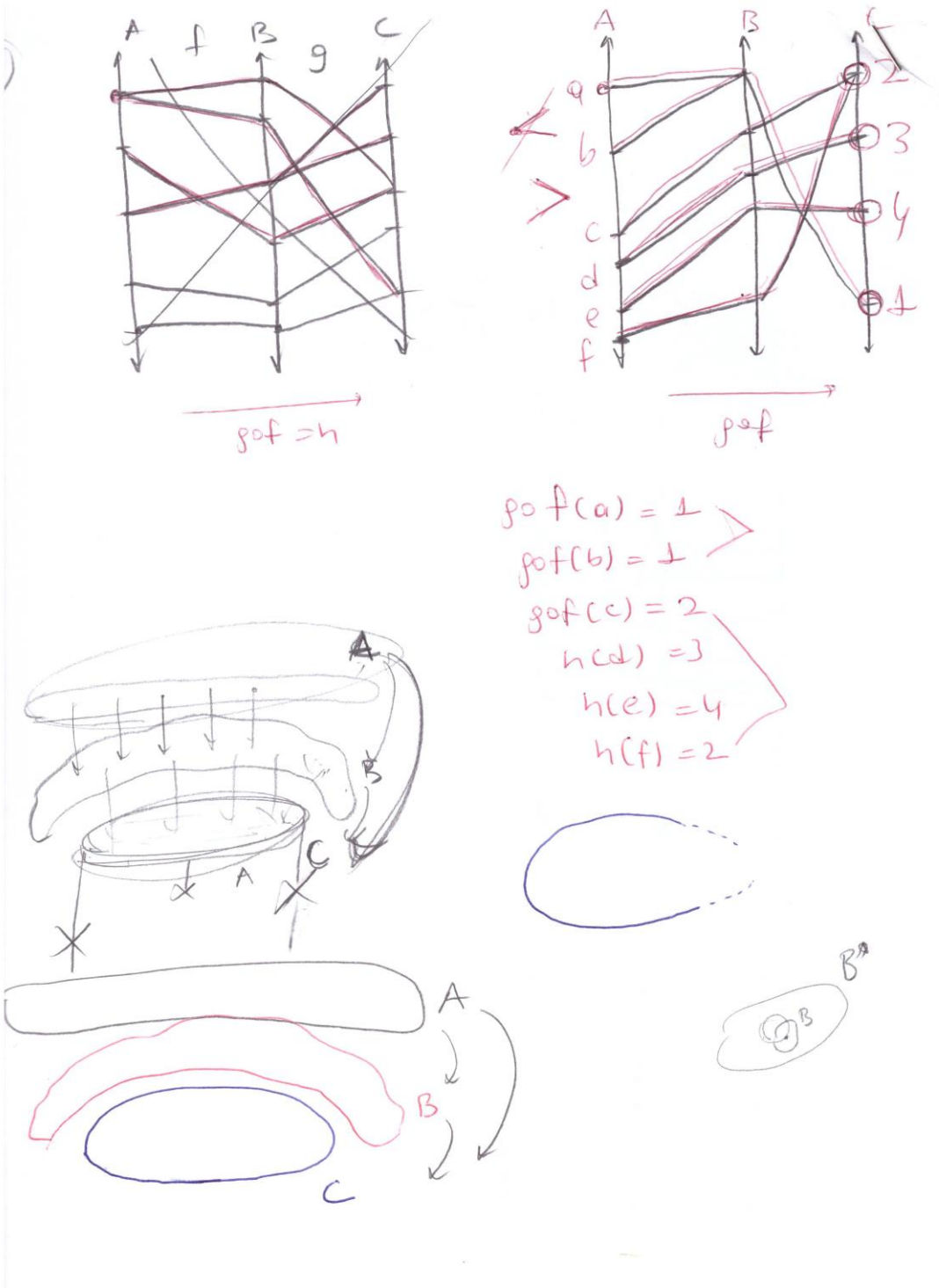
RESİM 3.1



RESİM 3.2

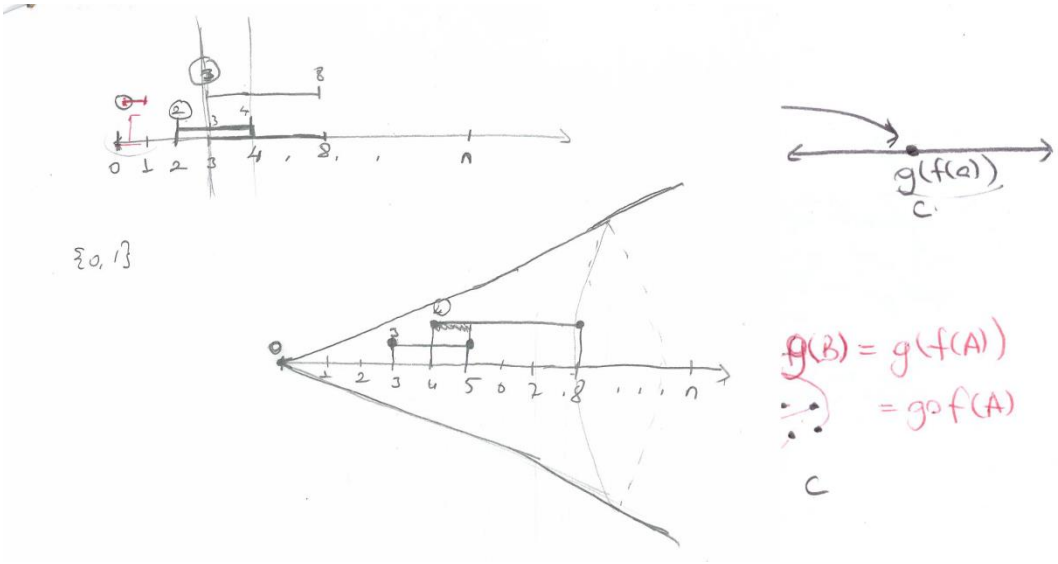

f
g
y x a b c
A
f(y) f(x) f(a) f(b) f(c)
B
g(f(a))
C
f
f(A)
g(B) = g(f(A))
= g∘f(A)
A
B
C
f(A)
A
f
f(A)=B
g
C = g(f(A))
A
f(A)
A
f A
B=f(A)
C = g(f(A))

RESİM 3.3

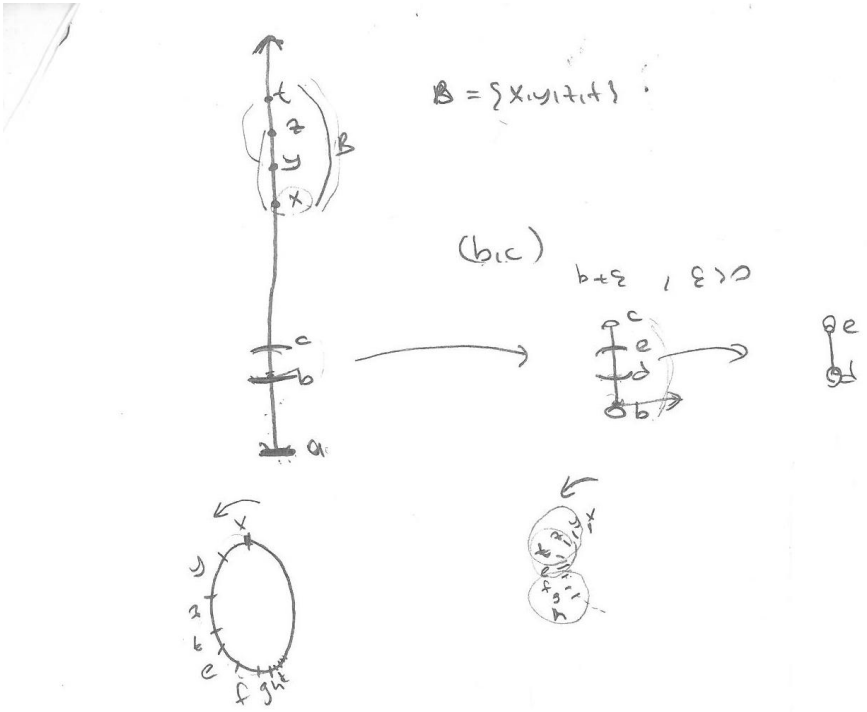

A
f
B
g
C
gof = h
A
B
C
a
b
c
d
e
f
1
2
3
4
1
gof
gof(a) = 1
gof(b) = 1
gof(c) = 2
h(d) = 3
h(e) = 4
h(f) = 2
A
B
C
A
B
C
A
B
B

RESİM 3.4

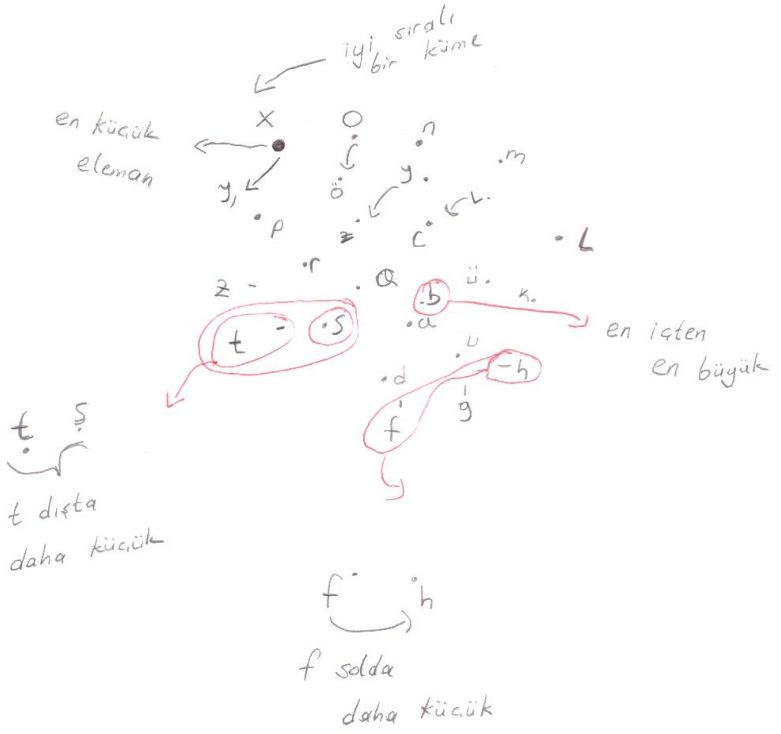
EK 4.Teorem 4'e Ait MÖA' nın Çalışma Kağıdı Örnekleri



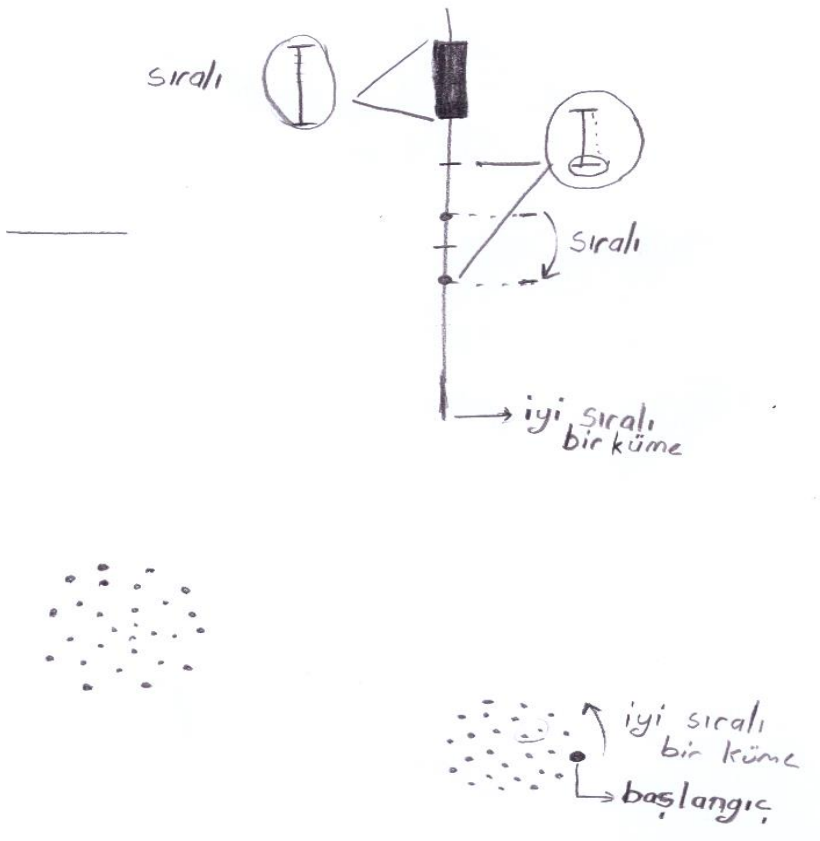
RESİM 4.1



RESİM 4.2

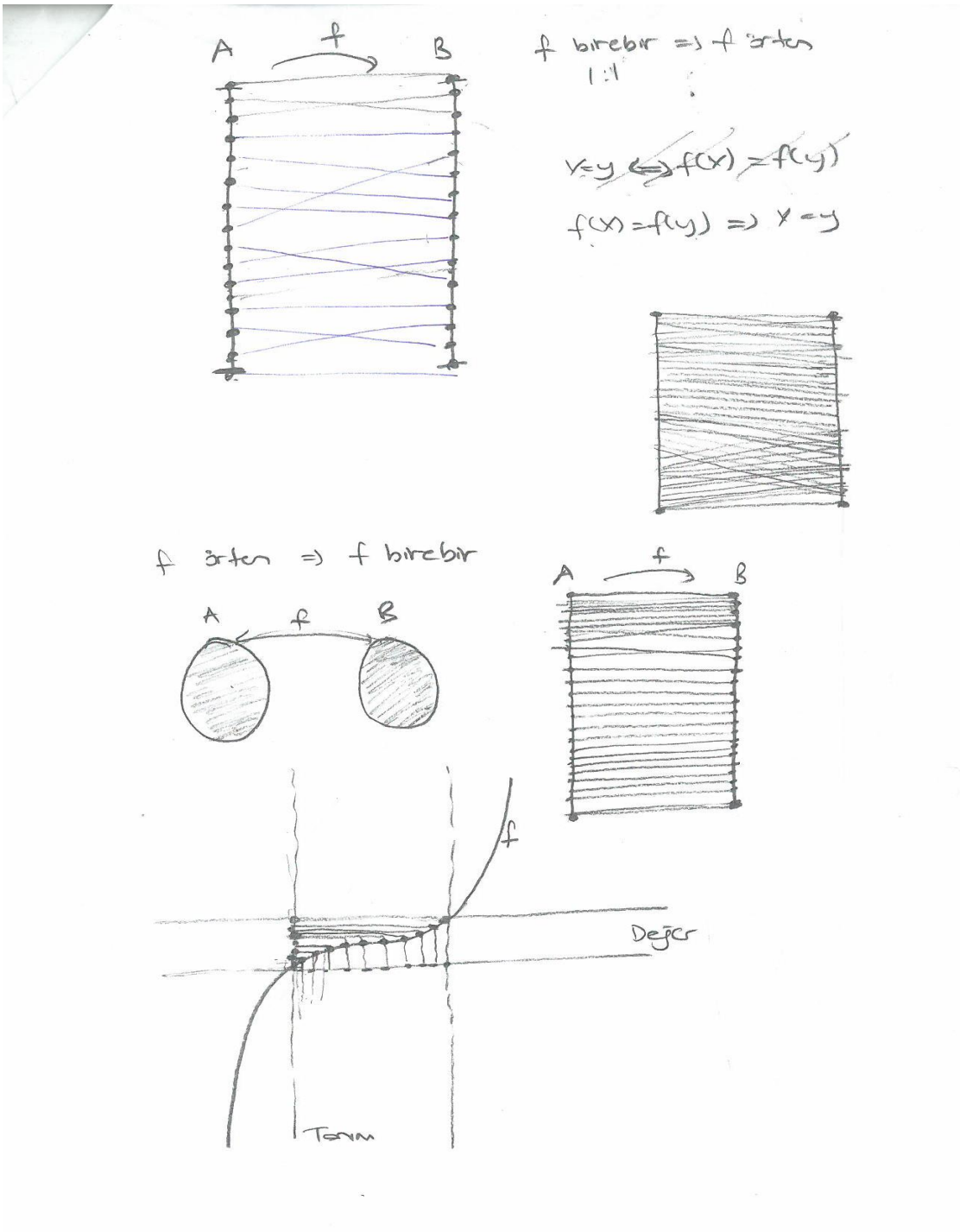


RESİM 4.3

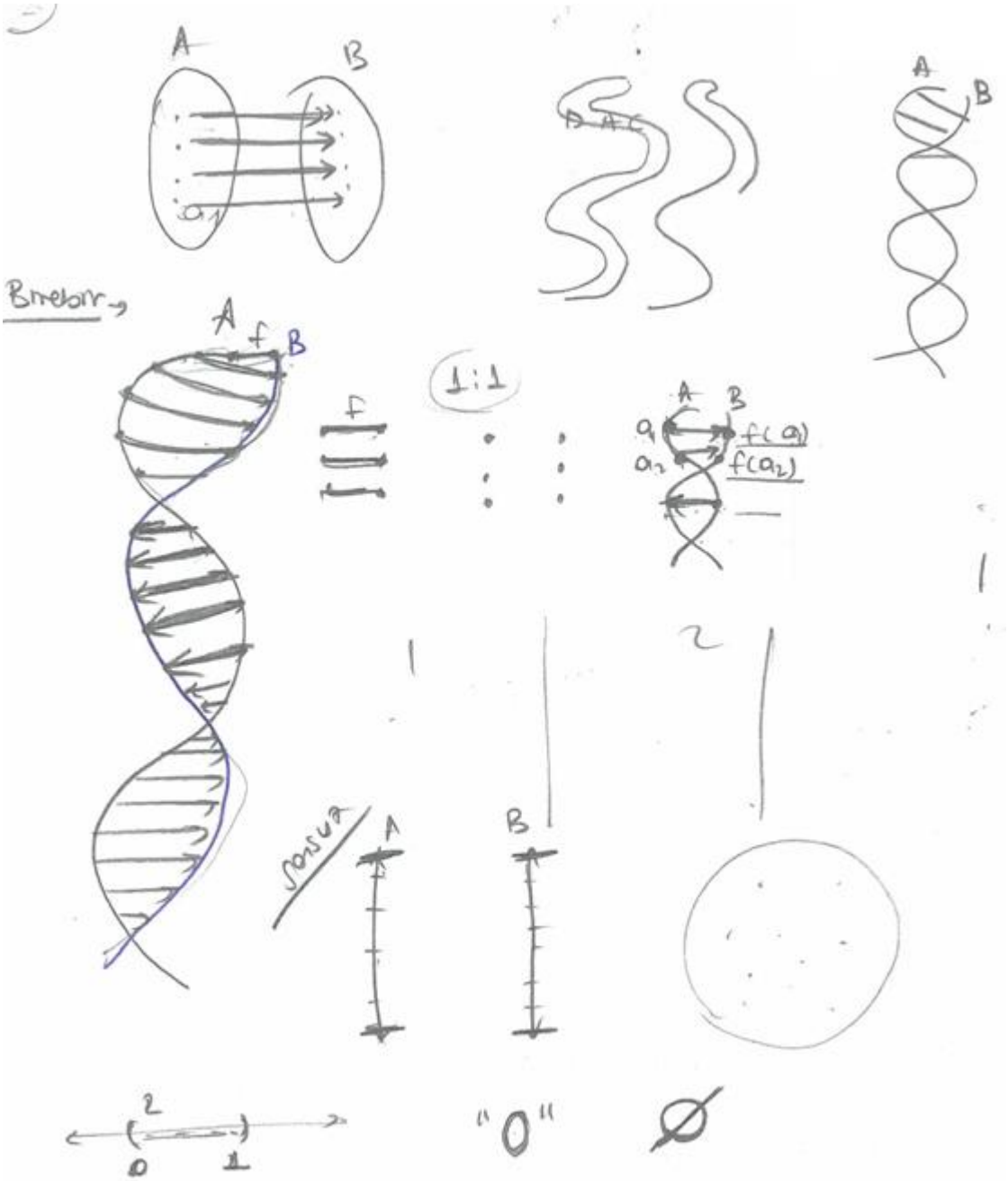


RESİM 4.4

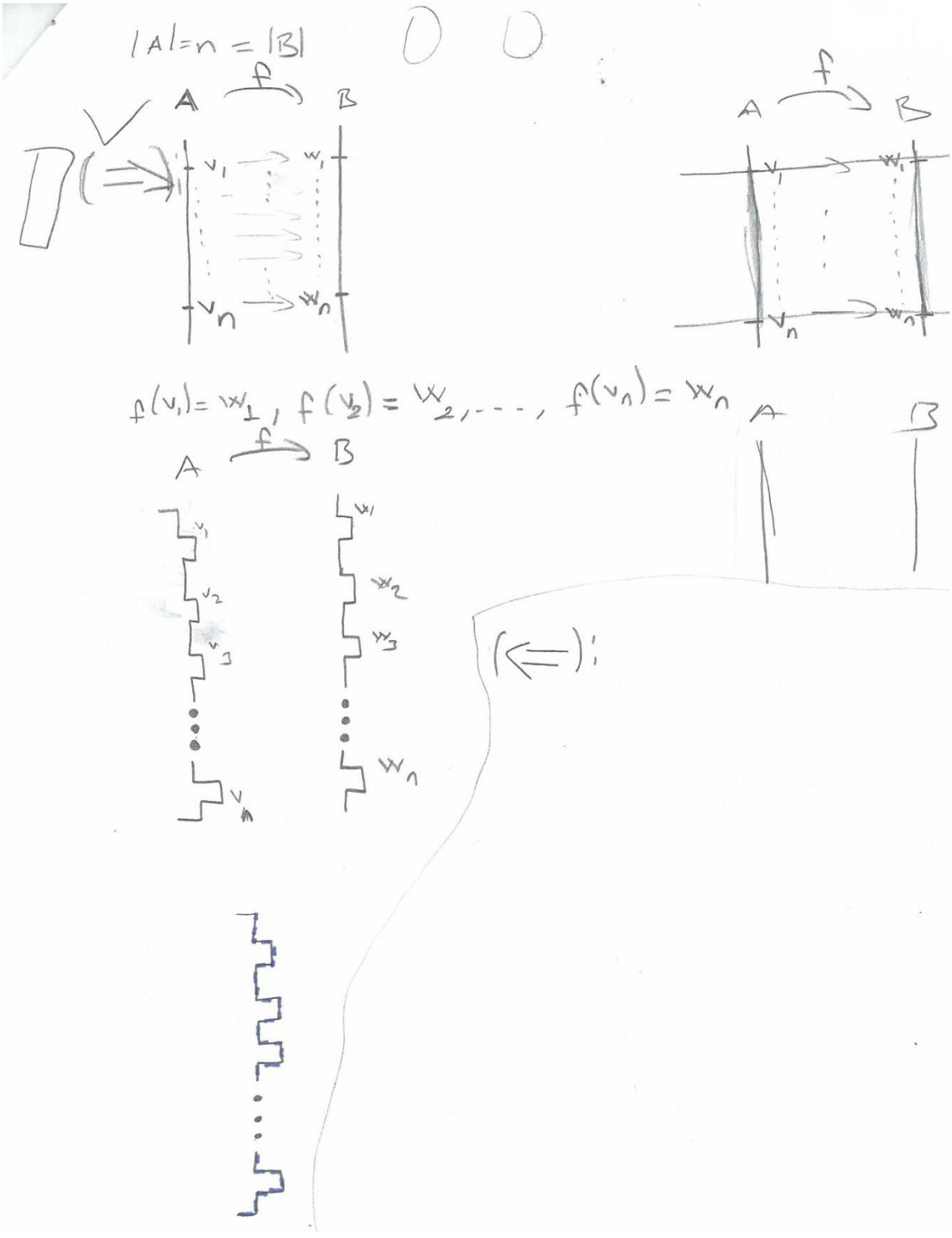
EK 5.Teorem 5'e Ait MÖA' nın Çalışma Kağıdı Örnekleri



RESİM 5.1



RESİM 5.2



RESİM 5.3



GAZİLİ OLMAK AYRICALIKTIR...