GAZİ ÜNİVERSİTESİ

1926

ÜRETİLEN İÇ ÇARPIMLAR

Ezgi DENİZOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ 2019

Ezgi DENİZOĞLU tarafından hazırlanan "ÜRETİLEN İÇ ÇARPIMLAR" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Cüneyt ÇEVİK

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. . . . .

Başkan: Prof. Dr. Hakan EFE

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. . . . .

Üye: Doç. Dr. Canay AYKOL YÜCE

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. . . . .

Tez Savunma Tarihi: 12/07/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

. . . .

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Ezgi DENİZOĞLU
12/07/2019

ÜRETİLEN İÇ ÇARPIMLAR

(Yüksek Lisans Tezi)

Ezgi DENİZOĞLU

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2019

ÖZET

Bu çalışmada, bir üreteç yardımıyla reel sayılar cismine eşdeğer olan, sıralı cisimlerde değer alan ve üretilen iç çarpımlar diye adlandırılan dönüşümler tanımlanmıştır. Bu tanımdan yola çıkarak klasik iç çarpım uzay teorisinin bir genişlemesi olarak üretilen iç çarpım uzaylarının temel özellikleri incelenmiştir. Seçilen üreteçlere göre üretilen vektör uzaylar ve üretilen iç çarpım uzayları incelenmiş, yeni kavramların farklılıkları ortaya çıkarılmış ve bu kavramlar üzerine birtakım sonuçlar verilmiştir. Üretilen iç çarpım uzaylarının yapısının operatörlerin karakteristik özelliklerini belirlediği gösterilmiştir.

Bilim Kodu : 20404

Anahtar Kelimeler : Üreteç, α-aritmetik, α-vektör uzayı, α-iç çarpım.

Sayfa Adedi : 43

Danışman : Doç. Dr. Cüneyt ÇEVİK

GENERATED INNER PRODUCTS
(M. Sc. Thesis)

Ezgi DENİZOĞLU

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
July 2019

ABSTRACT

In this study, transformations, which are equivalent to real numbers with a generator, are called the inner products which are valued and produced in sequential objects. Based on this definition, the main characteristics of the inner product spaces produced as an expansion of the classical inner product space theory were investigated. The vector spaces produced according to the selected generators and the inner product spaces produced were examined and the differences between the new concepts were revealed and some results were given on these concepts. It has been shown that the structure of the inner product spaces produced determines the characteristics of the operators.

Science Code	: 20404
Key Words	: Generator, α-arithmetic, α-vector space, α-inner product.
Page Number	: 43
Supervisor	: Assoc. Prof. Dr. Cüneyt ÇEVİK

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim süresince değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam sabırla bana kıymetli zamanını ayırıp, akademik bilgi, deneyim ve tavsiyeleri ile yol gösteren kıymetli hocam Doç. Dr. Cüneyt ÇEVİK'e teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarım sürecinde her zaman yanımda olan sevgili eşim Hakan DENİZOĞLU'na ve bu süreçte beni destekleyen aileme, dostlarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

İnsanoğlunun göğe bakıp güneş sisteminin ve ötesinin mekanizmasını anlama arzusu sonucunda kalkülüs geliştirildi. Newton ile Leibniz'in ellerinde gezegenlerin hareketlerini hesaplamak için kullanıldı. Günümüzde kalkülüs değişimi tanımlamayı, ölçmeyi ve anlamayı istediğimiz her yerde karşımıza çıkmaktadır. Kalkülüs'ün temel fikri; değişimini ölçtüğümüz bir niceliğin, değişkenlerin değerine dayandığı fikridir. Kalkülüs problemlerinin temelleri antik Yunan dönemine kadar gitse de, Newton ile Leibniz, Kalkülüs'ü birbirinden bağımsız olarak keşfeden ilk matematikçiler olarak anılır.

Newton ile Leibniz'in keşfettiği kalkülüsün birbirini tamamlayan iki yönü vardır: "İntegral Kalkülüs" ve "Diferansiyel Kalkülüs". Bunlar aslında bir madalyonun iki yüzünü oluşturur; aralarında ters bir ilişki vardır. Diferansiyel Kalkülüs "ayırmak"la, İntegral Kalkülüs ise "birleştirmek"le ilgilidir. Diferansiyel Kalkülüsün başlıca amacı değişim oranını, yani değişimin ne kadar hızlı ya da yavaş gerçekleştiğini ölçmektir; bu orana "türev" denir. Türevi bulma sürecine ise "diferansiyel alma" denir [1].

Non-Newtonyan kalkülüs, Newton ve Leibniz'in klasik kalkülüslerine bir alternatif olarak Grossman ve Katz tarafından üretildi. Klasik kalkülüs yerine non-Newtonyan kalkülüs üreteçlere dayanan farklılaşma ve entegrasyon araçları sunar. Klasik kalkülüsteki her özellik non-Newtonyan kalkülüste bir analoğa sahiptir. Genel olarak, non-Newtonyan kalkülüs, aritmetikler üzerinden araştırılabilecek problemlere farklı bir bakış açısı kazandıran bir metodolojidir. Matematik alanında çok çeşitli kullanımları mevcut olmakla birlikte, fen bilimleri, fizik ve mühendislik alanlarında uygulamaları mevcuttur. Non-Newtonyan kalkülüs özellikle geometrik ve bigeometrik analizlerde yaygın olarak kullanılmıştır. Bazı durumlarda örneğin, ücret oranı (dolar cinsinden, euro vb.) ile ilgili problemlerde, klasik newtonyan kalkülüsün yerine bigeometrik analizde kullanılması için bir tür non-Newtonyan kalkülüs kullanılmıştır [2].

Sınırsız sayıda non-Newtonyan kalkülüs vardır. Bununla birlikte, non-Newtonyan kalkülüs, klasik kalkülüsten belirgin bir şekilde farklıdır. Örneğin, klasik olmayan bir aritmetik olan geometrik aritmetiği hesaplamak için geometrik, anageometrik ve bigeometrik kalkülüsleri kullanabiliriz. Ayrıca, iyi bilinen harmonik ortalamanın doğal ortalama olduğu, klasik olmayan bir aritmetik olan harmonik aritmetik, anaharmonik ve biharmonik kalkülüsleri oluşturmak için kullanılabilir [3]. Ayrıca non-Newtonyan kalkülüste α-üreteci exp alınırsa, $\mathbb{R}_{\exp}$ içindeki artimetik ortalama $\mathbb{R}$ içindeki geometrik ortalamaya denk olur. Harmonik ortalama ve kuadratik ortalama ise sırasıyla harmonik ve kuadratik kalkülüs ortalamaları ile ilgilidir.

Aritmetik, matematiğin sayılar arasındaki ilişkilerini inceleyen ve bu ilişkileri incelerken karşılaşılan problemleri dört temel işlem yardımıyla hesaplama yöntemidir. Tüm aritmetikler yapısal olarak birbirine eşdeğer olsa da, non-Newtonyan kalkülüsler aracılığıyla bazı alternatifler oluşturup onları farklılaştırabiliriz. Ancak aritmetiklerin kullanımının faydaları bunlarla sınırlı değildir. Farklı aritmetikler üretmek bize, fizik kurallarının daha kolay anlaşılması ve yeni ölçü sisteminin geliştirilmesi gibi farklı kolaylıklar da sağlar.

Bu tezde kullanıldığımız α-aritmetik, üretilen vektör uzaylar, üretilen iç çarpım uzayları ve bu uzaylar üstünde tanımlanan tüm işlemleri ve operatörleri α-üretecine uygulayan bir aritmetiktir.

Bu tezde öncelikle bazı α-aritmetikler tanıtılıp, klasik aritmetikteki temel işlemlerin α-aritmetikteki temel işlemlere (α-toplama, α-çıkarma, α-çarpma ve α-bölme) nasıl dönüştürüldüğü, bu işlemlerle seçilen üreteçlere göre farklılık gösterebilen birim elemanlar ve etkisiz elemanlar tanımlanıp, α-sıralama bağıntısı kurularak α-aritmetik oluşturulmuştur. Farklı üreteçler kullanılarak elde edilen birbirinden bağımsız farklı aritmetik örnekleri verilmiştir. Fonksiyonel analiz alanındaki bazı tanım, teorem, lemma ve eşitsizlikler, klasik aritmetikten farklı olarak, α-üreteci yardımıyla yeniden yorumlanmıştır. Daha sonra, bu tezin asıl amacı olan üretilen vektör uzaylar ve üretilen iç çarpım uzayları incelenmiştir. Böylece α-vektör uzaylar ve α-iç çarpım uzayları tanımlanıp, bu tanımlamalar üzerine birtakım sonuçlar verilmiştir. Yapılan tanımlamalar ve bulunan sonuçlar, α-normlu uzay ve α-metrik uzay tanımları kullanılarak karşılaştırılmıştır. α-üreteci yardımıyla iç çarpım ve vektör uzaylarındaki bilinen lineerlik, sınırlılık ve ortogonallik gibi kavramlar geliştirilmiştir. α-sınırlılık, α-lineerlik ve α-geren kavramları yeniden oluşturulup, α-lineer dönüşümler üzerinde birtakım teoremler verilmiştir. Sonrasında ortogonallik ve ortonormallik kavramları α-üretecine göre yeniden yorumlanmış, ilgili teoremler ispatlanmış ve bu konu üzerine örneklere yer verilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Aritmetik, $\mathbb{R}$'nin bir alt kümesinde sıralı cisim şartlarının tamamını sağlayan bir sistemdir. Yapısal olarak birbirine denk yani izomorf olan sonsuz sayıda aritmetik vardır. Birbirine izomorf olan iki aritmetiğin kullanım olarak farklılıkları vardır. α üreteci, tanım kümesi $\mathbb{R}$, görüntü kümesi $\mathbb{R}$'nin ($\mathbb{R}_\alpha$ ile gösterilen) bir alt kümesi olan bir birebir eşlemedir. Her aritmetik bir tek üreteç tarafından üretilir, tersine her üreteçten bir tek aritmetik elde edilir. Üretecin temel görevi $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanmış ikili işlemler ve sıralama olmak üzere kavramları farklılaştırmaktır. α üreteci yardımıyla, $\mathbb{R}_\alpha$ üstünde tanımlanan temel olarak dört çeşit ikili işlemden bahsedilebilir. Bunlardan ikisi α-toplama ve α -çarpma işlemleri her $x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ için

$$x \overset{\alpha}{+} y = \alpha(\alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(y)) \tag{2.1}$$

$$x \overset{\alpha}{\cdot} y = \alpha(\alpha^{-1}(x) \cdot \alpha^{-1}(y))$$

biçiminde tanımlanır. Bu işlemler ile birlikte, $0_\alpha = \alpha(0)$ sayısı α-toplamaya göre, $1_\alpha = \alpha(1)$ sayısı ise α-çarpmaya göre etkisiz elemanlardır. Ayrıca herhangi bir $x \in \mathbb{R}_\alpha$ için

$$\overset{\alpha}{-}x = \alpha(-1) \overset{\alpha}{\cdot} x = \alpha(-\alpha^{-1}(x)) \tag{2.2}$$

sayısına x sayısının α-negatifi veya α-toplama işlemine göre tersi; herhangi bir $x \in \mathbb{R}_\alpha \backslash \{\alpha(0)\}$ için

$$x^{\overset{\alpha}{-1_\alpha}} = 1 \overset{\alpha}{/} x = \alpha(1/\alpha^{-1}(x)) \tag{2.3}$$

sayısına ise x sayısının α-çarpma işlemine göre tersi denir. Bu işlemler aracılığıyla $\mathbb{R}_\alpha$ kümesi üzerindeki α-çıkarma ve α-bölme işlemleri her $x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ için

$$\begin{aligned} x \overset{\alpha}{-} y &= x \overset{\alpha}{+} (\overset{\alpha}{-}y) = \alpha(\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(y)) \\ x \overset{\alpha}{/} y &= x \overset{\alpha}{\cdot} \left(1 \overset{\alpha}{/} y\right) = \alpha\left(\alpha^{-1}(x)/\alpha^{-1}(y)\right) \quad (y \neq \alpha(0)) \end{aligned} \tag{2.4}$$

biçiminde tanımlanır. α üreteci yardımıyla $\mathbb{R}_\alpha$ kümesi üzerinde farklı sıralamalar da tanımlanabilir. Ancak üretecin monotonluğu, artan veya azalan olması önemli bir rol oynar. Elde edilen sıralama bilinen sıralama ile çakışabileceği gibi farklılıkta gösterebilir. Özellikle α üreteci monoton iken her $x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ için α-sıralama

$$x \overset{\alpha}{\leqslant} y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha^{-1}(x) \leqslant \alpha^{-1}(y) \quad , \quad \alpha \text{ artan} \\ \alpha^{-1}(x) \geqslant \alpha^{-1}(y) \quad , \quad \alpha \text{ azalan} \end{cases} \tag{2.5}$$

biçiminde tanımlanır. Bu işlemler ve sıralama ile $\mathbb{R}_\alpha$ görüntü kümesi tam sıralı bir cisim olur. α üretecinin monoton olmadığı durumlarda da α-sıralama tanımı yapılabilir ve bu tanımlama $\mathbb{R}_\alpha$ kümesinin uygun alt kümelerine parçalanışı ile elde edilir (Bu alt kümelere yukarıdaki sıralamaya benzer şekilde, α üretecinin kısıtlanışının monoton olması durumunda benzer bir sıralama oluşturulabilir). $\mathbb{R}_\alpha$ bu durumda kısmî sıralı bir cisim olur.
α üreteci vasıtasıyla $\mathbb{R}_\alpha$ üzerinde tanımladığımız işlemler ve sıralama ile oluşturduğumuz bu sıralı cisimlere α-aritmetik adı verilir. Şimdi birkaç α-aritmetik örneği inceleyelim.

Örnek

(a) I birim fonksiyonu $\mathbb{R}_I = \mathbb{R}$ üzerinde klasik aritmetiği üretir.

(b) Üstel fonksiyon exp ise $\mathbb{R}_{\exp} = \mathbb{R}^+$ üzerinde geometrik aritmetiği üretir. Her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için

$$x \overset{\exp}{+} y = x \cdot y, \quad x \overset{\exp}{\cdot} y = x^{\ln y} = y^{\ln x}$$

şeklinde tanımlanan ikili işlemler ve

$$x \overset{\exp}{\leqslant} y \Leftrightarrow \ln x \leqslant \ln y$$

ile verilen sıralama bağıntısıyla $\mathbb{R}^+$ tam sıralı bir cisimdir.

(c) $\mathbb{R}$ üzerinde q-aritmetik adı verilen sonsuz sayıda aritmetik tanımlayabiliriz. $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$ 'ye sıfırdan farklı herhangi bir q reel sayısı için

$$\alpha(x) = \begin{cases} x^{1/q} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -(-x)^{1/q} & , \quad x < 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlı α üretecini ele alırsak bu üretecin tersi

$$\alpha^{-1}(x) = \begin{cases} x^{q} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -(-x)^{q} & , \quad x < 0 \end{cases}$$

dir. Burada q farklı değerler aldıkça sonsuz sayıda birbirinden farklı α-aritmetik tanımlanabilir.

Örneğin $q = 1$ alırsak, α-aritmetik bildiğimiz klasik aritmetik ile çakışırken, $q = -1$ alındığı durumda ise harmonik aritmetik üretilmiş olur. Tüm durumlarda

$$x \overset{\alpha}{+} y = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x \overset{\alpha}{\cdot} y = xy$$

ikili işlemleri ve

$$x \overset{\alpha}{\leqslant} y \Leftrightarrow x \leqslant y$$

sıralama bağıntısı ile $\mathbb{R}_\alpha$ tam sıralı bir cisimdir. Özel olarak $q = 2$ alınırsa

$$\alpha(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -\sqrt{(-x)} & , \quad x < 0 \end{cases}$$

elde edilen aritmetiğe quadratik aritmetik adı verilir.

Herhangi bir α-aritmetiğin (veya herhangi bir $\mathbb{R}_\alpha$ sıralı cisminin) sıfırı 0_α olduğundan, α-aritmetikte pozitif ve negatif sayıların kümeleri bilinenden farklı olabilir. Başka bir deyişle,

$$\mathbb{R}_\alpha^+ = \left\{x \mid 0_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} x \text{ ve } x \in \mathbb{R}_\alpha\right\} \quad \text{ve } \mathbb{R}_\alpha^- = \left\{x \mid x \overset{\alpha}{\leqslant} 0_\alpha \text{ ve } x \in \mathbb{R}_\alpha\right\} \tag{2.6}$$

biçiminde tanımlanan $\mathbb{R}_\alpha^+$ ve $\mathbb{R}_\alpha^-$ kümeleri, α üretecine göre farklılık gösterebilir. Meselâ, örnek (b)'de $\mathbb{R}_{\exp}^+ = (1, \infty)$ ve $\mathbb{R}_{\exp}^- = (0, 1)$ iken (c)'deki quadratik aritmetik için $\mathbb{R}_q^+ = (0, \infty)$ ve $\mathbb{R}_q^- = (-\infty, 0)$ olur.
Herhangi bir $x \in \mathbb{R}_\alpha^+$ sayısına α-pozitif sayı ve herhangi bir $x \in \mathbb{R}_\alpha^-$ sayısına ise de α-negatif sayı denir.

İkili işlemlerin değişmesine bağlı olarak sayıların kuvvetleri ve kökleri de değişebilir. $\mathbb{R}_\alpha$ daki bir x sayısının α-karesi

$$x^{2_\alpha} = x \overset{\alpha}{\cdot} x = \alpha\left(\left[\alpha^{-1}(x)\right]^2\right)$$

olur. Tümevarım yöntemi ile herhangi bir m doğalsayısı i çin bir x sayısının m. dereceden α-kuvveti

$$x^{m_\alpha} = \alpha\left(\left[\alpha^{-1}(x)\right]^m\right)$$

olarak tanımlanır. Benzer şekilde herhangi bir $x \in \mathbb{R}_\alpha \backslash \{0_\alpha\}$ sayısı için

$$\begin{aligned}
x^{\overset{\alpha}{-}2_\alpha} &= 1 \overset{\alpha}{/} x^{2_\alpha} \\
&= 1 \overset{\alpha}{/} \left(x \overset{\alpha}{\cdot} x\right) \\
&= 1 \overset{\alpha}{/} \alpha\left(\left[\alpha^{-1}(x)\right]^2\right) \\
&= \alpha\left(\left[\alpha^{-1}(x)\right]^{-2}\right)
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca herhangi bir $x \in \mathbb{R}_\alpha^+ \cup \{0_\alpha\}$ sayısının α-karekökü

$$\overset{\alpha}{\sqrt{x}} = \alpha\left(\sqrt{\alpha^{-1}(x)}\right)$$

biçiminde tanımlanır. Genelleştirmek gerekirse, herhangi bir $n \geqslant 2$ tamsayısı için $\mathbb{R}_\alpha$ kümesindeki bir x elemanının n. dereceden α-kökü (eğer mevcut ise);

$$\begin{aligned} \overset{\alpha}{\sqrt[n]{x}} &= x^{(1/n)_\alpha} \\ &= x^{1_\alpha \overset{\alpha}{/} n_\alpha} \\ &= \alpha\left(\sqrt[n]{\alpha^{-1}(x)}\right) \end{aligned}$$

sayısıdır. Pozitiflik ve negatiflik kavramları değişiklik gösterdikçe, mutlak değer kavramında da değişiklikler görülebilir. $\mathbb{R}_\alpha$ kümesinin herhangi bir x elemanının α-mutlak değeri şu şekilde ifade edilebilir:

$$|x|_\alpha = \overset{\alpha}{\sqrt{x^{2_\alpha}}} = \alpha(|\alpha^{-1}(x)|) = \begin{cases} x & , \quad x \overset{\alpha}{>} 0_\alpha \\ 0_\alpha & , \quad x = 0_\alpha \\ \overset{\alpha}{-}x & , \quad x \overset{\alpha}{<} 0_\alpha \end{cases} . \tag{2.7}$$

Reel sayılar için verilen üreteç tanımını kompleks sayılar için de genişletebiliriz. $\mathbb{C}_\beta$, $\mathbb{R}$'nin bir alt kümesi olmak üzere, $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{C}_\alpha$ üretecine karşılık birebir ve örten $\beta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\beta$ dönüşümü tanımlayalım. $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x_\alpha = \alpha(x)$, $y_\alpha = \alpha(y)$, $i_\alpha = \overset{\alpha}{\sqrt{\overset{\alpha}{-}1}} = \alpha(\sqrt{-1}) = \alpha(i)$ olmak üzere

$$\beta(z) = x_\alpha \overset{\alpha}{+} i_\alpha \overset{\alpha}{\cdot} y_\alpha \tag{2.8}$$

biçiminde tanımlanan β 'ya kompleks α-üreteci denir. $\mathbb{C}_\beta$'yı cisim yapan işlemler $a, b, c, d \in \mathbb{R}_\alpha$ ve

$$\begin{aligned} z &= a \overset{\alpha}{+} i_\alpha \overset{\alpha}{\cdot} b \in \mathbb{C}_\beta \\ w &= c \overset{\alpha}{+} i_\alpha \overset{\alpha}{\cdot} d \in \mathbb{C}_\beta \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} z \overset{\beta}{+} w &= (a \overset{\alpha}{+} c) \overset{\alpha}{+} i_\alpha \overset{\alpha}{\cdot} (b \overset{\alpha}{+} d) \\ &= \alpha(\alpha^{-1}(a) + \alpha^{-1}(c) + i\,[\alpha^{-1}(b) + \alpha^{-1}(d)]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z \overset{\beta}{\cdot} w &= (a \overset{\alpha}{\cdot} d \overset{\alpha}{-} b \overset{\alpha}{\cdot} c) \overset{\alpha}{+} i_\alpha \overset{\alpha}{\cdot} (a \overset{\alpha}{\cdot} c \overset{\alpha}{+} b \overset{\alpha}{\cdot} d) \\ &= \alpha([\alpha^{-1}(a) \cdot \alpha^{-1}(d) - \alpha^{-1}(b) + \alpha^{-1}(c)] + i\,[\alpha^{-1}(a) \cdot \alpha^{-1}(c) + \alpha^{-1}(b) \cdot \alpha^{-1}(d)]) \end{aligned}$$

biçimde tanımlanır. $\mathbb{C}_\beta$ üzerindeki $\overset{\beta}{\leq}$ sıralaması ise

$$z \overset{\beta}{\leq} w \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^{-1}(a) \leq \alpha^{-1}(c) \text{ ve } \alpha^{-1}(b) \leq \alpha^{-1}(d)\ ,\ \alpha \text{ artan} \\ \\ \alpha^{-1}(a) \geq \alpha^{-1}(c) \text{ ve } \alpha^{-1}(b) \geq \alpha^{-1}(d)\ ,\ \alpha \text{ azalan} \end{cases} \tag{2.9}$$

ile verilir. Yukarıda tanımlanan iki işlem ve bu sıralama ile $\mathbb{C}_\beta$ tam sıralı cisimdir. Bu durumda $\mathbb{C}_\beta$'nın biri ve sıfırı sırasıyla $1_\beta = \beta(1 + i0)$ ve $0_\beta = \beta(0 + i0)$ olur. $z = a \overset{\alpha}{+} i_\alpha \overset{\alpha}{\cdot} b \in \mathbb{C}_\beta$ elemanının α-eşleniği $\overset{\alpha}{\overline{z}} = a \overset{\alpha}{-} i_\alpha \overset{\alpha}{\cdot} b$ biçiminde tanımlanır.

α ve β arasındaki farklılıklar saklı tutulmak koşulu ile β'yı da α ile belirletip $\mathbb{R}_\alpha$ ve $\mathbb{C}_\alpha$ cisimlerinin ortak gösterimi olarak $\mathbb{K}_\alpha$ 'yı kullanacağız.

3. İÇ ÇARPIM UZAYLARI

3.1. Tanımlar ve Basit Sonuçlar

X boş olmayan bir küme olmak üzere, X içinde toplama

$$\begin{array}{rcl} \overset{\triangle}{+} : X \times X & \to & X \\ (x,y) & \to & x \overset{\triangle}{+} y \end{array} \tag{3.1}$$

dönüşümü ile, X içinde skaler ile çarpma adı verilen

$$\begin{array}{rcl} \overset{\triangle}{\cdot} : \mathbb{K}_\alpha \times X & \to & X \\ (k,x) & \to & k \overset{\triangle}{\cdot} x \end{array} \tag{3.2}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Eğer bu dönüşümler her $x, y, z \in X$ ve her $k, l \in \mathbb{K}_\alpha$ için

1) $x \overset{\triangle}{+} y = y \overset{\triangle}{+} x$

2) $x \overset{\triangle}{+} (y \overset{\triangle}{+} z) = (x \overset{\triangle}{+} y) \overset{\triangle}{+} z$

3) Her $x \in X$ için $x \overset{\triangle}{+} 0 = x$ olacak biçimde bir $0 \in X$ var,

4) Her $x \in X$ için $x \overset{\triangle}{+} x' = 0_\alpha$ olacak biçimde bir $x' \in X$ var,

5) $k \overset{\triangle}{\cdot} (x \overset{\triangle}{+} y) = (k \overset{\triangle}{\cdot} x) \overset{\triangle}{+} (k \overset{\triangle}{\cdot} y)$

6) $(k \overset{\alpha}{+} l) \overset{\triangle}{\cdot} x = (k \overset{\triangle}{\cdot} x) \overset{\triangle}{+} (l \overset{\triangle}{\cdot} x)$

7) $(k \overset{\alpha}{\cdot} l) \overset{\triangle}{+} x = k \overset{\triangle}{\cdot} (l \overset{\triangle}{\cdot} x)$

8) $1_\alpha \overset{\triangle}{\cdot} x = x$

koşullarını sağlıyorsa X kümesine $\mathbb{K}_\alpha$ üzerinde üretilen vektör uzay (α-vektör uzayı) adı verilir.

$x_i, y_i \in \mathbb{K}_\alpha$ olmak üzere $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{K}_\alpha^n$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{K}_\alpha^n$ ve $a \in \mathbb{K}_\alpha$ olsun.

$$\begin{aligned} x \overset{\triangle}{+} y &= (x_1 \overset{\alpha}{+} y_1, ..., x_n \overset{\alpha}{+} y_n) \\ a \overset{\triangle}{\cdot} x &= (a \overset{\alpha}{\cdot} x_1, ..., a \overset{\alpha}{\cdot} x_n) \end{aligned}$$

tanımları altında $\mathbb{K}_\alpha^n$ kümesi reel bir α-vektör uzayı olur.
Bir α-iç çarpım uzayı, üzerinde α-iç çarpım tanımlanmış bir α-vektör uzayıdır. Burada sözü edilen α-iç çarpım $X \times X$ den $\mathbb{K}_\alpha$ cismi içine yapılan bir dönüşümdür. Bu durumun ayrıntısını aşağıdaki tanımla verelim.

3.1.1. Tanım

X bir α-vektör uzayı olmak üzere, $\langle \ , \ \rangle_\alpha : X \times X \to \mathbb{K}_\alpha$ dönüşümü, her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{K}_\alpha$ için

1) $\langle x, x \rangle_\alpha \overset{\alpha}{\geqslant} 0_\alpha$

2) $\langle x, y \rangle_\alpha = \overline{\langle y, x \rangle_\alpha}^{\alpha}$

3) $\left\langle \alpha \overset{\triangle}{\cdot} x, y \right\rangle_\alpha = \alpha \overset{\alpha}{\cdot} \langle x, y \rangle_\alpha$

4) $\left\langle x \overset{\triangle}{+} y, z \right\rangle_\alpha = \langle x, z \rangle_\alpha \overset{\alpha}{+} \langle y, z \rangle_\alpha$

özelliklerini sağlıyorsa $\langle \ , \ \rangle_\alpha$ dönüşümüne α-iç çarpım, $(X, \langle \ , \ \rangle_\alpha)$ ikilisine de α-iç çarpım uzayı denir.

Bir α-iç çarpım bazen skaler çarpım olarak adlandırılabilir. α-iç çarpım uzayı da α-Öklid uzayı, α-ön-Hilbert uzayı olarak adlandırılabilir. Bazı kitaplarda 3) ve 4) özellikleri $\left\langle x, \alpha \overset{\triangle}{\cdot} y \right\rangle_\alpha = \alpha \overset{\alpha}{\cdot} \langle x, y \rangle_\alpha$ ve $\left\langle x, y \overset{\triangle}{\cdot} z \right\rangle_\alpha = \langle x, y \rangle_\alpha \overset{\alpha}{+} \langle x, z \rangle_\alpha$ ile yer değiştirebilir.

Ayrıca 2) özelliğindeki üst çizgi kompleks eşleniği ifade etmektedir. Eğer 2)'de $x = y$ alırsak $\langle x, x\rangle_\alpha$ α-iç çarpımı daima bir reel sayı olur.

Benzer şekilde $\mathbb{R}_\alpha$uzayını ele alırsak reel sayılardaki kompleks eşlenik kendine eşit olduğu için 2)'de $\langle x, y\rangle_\alpha = \langle y, x\rangle_\alpha$ sağlanır.

3.1.2. Teorem

X bir α-vektör uzayı ve $\langle\ ,\rangle_\alpha : X \times X \to \mathbb{K}_\alpha$ bir α-iç çarpım olmak üzere, her $x, y, z \in X$ ve her $a, b \in \mathbb{K}_\alpha$ için

1) $\left\langle x, b \overset{\triangle}{\cdot} y \right\rangle_\alpha = \overset{\alpha}{\bar{b}} \overset{\alpha}{\cdot} \langle x, y\rangle_\alpha$

2) $\left\langle x, y \overset{\triangle}{+} z \right\rangle_\alpha = \langle x, y\rangle_\alpha \overset{\alpha}{+} \langle x, z\rangle_\alpha$

3) $\langle x, 0_\triangle\rangle_\alpha = \langle 0_\triangle, x\rangle_\alpha = 0_\alpha$

4) Her $x_1, x_2, ...x_n, y \in X$ ve her $a_1, a_2, ...a_n \in \mathbb{K}_\alpha$ için

$\left\langle \triangle\text{-} \sum_{i=1}^n a_i \overset{\triangle}{\cdot} x_i, y \right\rangle_\alpha = \alpha\text{-}\sum_{i=1}^n a_i \overset{\alpha}{\cdot} \langle x_i, y\rangle_\alpha$

5) $\left\langle x, \triangle\text{-} \sum_{j=1}^m b_j \overset{\triangle}{\cdot} y_j \right\rangle_\alpha = \alpha\text{-}\sum_{j=1}^m \overset{\alpha}{\bar{b_j}} \overset{\alpha}{\cdot} \langle x, y_j\rangle_\alpha$

6) $\left\langle \triangle\text{-} \sum_{i=1}^n a_i \overset{\triangle}{\cdot} x_i,\ \triangle\text{-} \sum_{j=1}^m b_j \overset{\triangle}{\cdot} y_j \right\rangle_\alpha = \alpha\text{-}\sum_{i=1}^n \alpha\text{-}\sum_{j=1}^m a_i \overset{\alpha}{\cdot} \overset{\alpha}{\bar{b_j}} \overset{\alpha}{\cdot} \langle x_i, y_j\rangle_\alpha$

sağlanır.

İspat

$$1)\ \left\langle x, b \overset{\triangle}{\cdot} y \right\rangle_\alpha = \overline{\left\langle b \overset{\triangle}{\cdot} y, x \right\rangle_\alpha}^{\alpha}$$

$$= \overline{b \overset{\alpha}{\cdot} \langle y, x\rangle_\alpha}^{\alpha}$$

$$= \overset{\alpha}{\bar{b}} \overset{\alpha}{\cdot} \overline{\langle y, x\rangle_\alpha}^{\alpha}$$

$$= \overset{\alpha}{\bar{b}} \overset{\alpha}{\cdot} \langle x, y\rangle_\alpha$$

$$2)\ \left\langle x, y \overset{\triangle}{+} z \right\rangle_\alpha = \overline{\left\langle y \overset{\triangle}{+} z, x \right\rangle_\alpha}^{\alpha}$$

$$= \overline{\langle y, x\rangle_\alpha \overset{\alpha}{+} \langle z, x\rangle_\alpha}^{\alpha}$$

$$= \overline{\langle y, x\rangle_\alpha}^{\alpha} \overset{\alpha}{+} \overline{\langle z, x\rangle_\alpha}^{\alpha}$$

$$= \langle x, y\rangle_\alpha \overset{\alpha}{+} \langle x, z\rangle_\alpha$$

$$3)\ \langle 0_\triangle, y\rangle_\alpha = \left\langle 0_\triangle \overset{\triangle}{+} 0_\triangle, y \right\rangle_\alpha$$

$$= \langle 0_\triangle, y\rangle_\alpha \overset{\alpha}{+} \langle 0_\triangle, y\rangle_\alpha$$

olduğundan bu ifadenin sağlanması için $\langle 0_\triangle, y\rangle_\alpha = 0_\alpha$ olması gerekir.

4) Bu özelliğin sağlandığını tümevarım ile gösterelim. İlk olarak $n = 1$ olsun.

$$\left\langle \triangle\text{-}\sum_{i=1}^{1} a_i \overset{\triangle}{\cdot} x_i, y \right\rangle_\alpha = \left\langle a_1 \overset{\triangle}{\cdot} x_1, y \right\rangle_\alpha = a_1 \overset{\alpha}{\cdot} \langle x_1, y\rangle_\alpha$$

sağlanır. $n = m$ için sağlandığını kabul edelim. Acaba $n = m + 1$ iç in sağlanır mı?

$$\left\langle \triangle \text{ - } \sum_{i=1}^{m+1} a_i \overset{\triangle}{\cdot} x_i, y \right\rangle_\alpha = \left\langle \triangle \text{ - } \sum_{i=1}^{m} a_i \overset{\triangle}{\cdot} x_i \overset{\triangle}{+} a_{m+1} \overset{\triangle}{\cdot} x_{m+1}, y \right\rangle_\alpha$$

$$= \left\langle \triangle \text{ - } \sum_{i=1}^{m} a_i \overset{\triangle}{\cdot} x_i, y \right\rangle_\alpha \overset{\alpha}{+} \left\langle a_{m+1} \overset{\triangle}{\cdot} x_{m+1}, y \right\rangle_\alpha$$

$$= \alpha\text{-} \sum_{i=1}^{m} a_i \overset{\alpha}{\cdot} \langle x_i, y \rangle_\alpha \overset{\alpha}{+} a_{m+1} \overset{\alpha}{\cdot} \langle x_{m+1}, y \rangle_\alpha$$

$$= \alpha\text{-} \sum_{i=1}^{m+1} a_i \overset{\alpha}{\cdot} \langle x_i, y \rangle_\alpha$$

5) Benzer şekilde tümevarım yöntemi ile gösterilir.

Örnek

$\mathbb{K}_\alpha^n$ α-vektör uzayı üzerinde n-bileşenli kompleks sayılar ile

$$\langle x, y \rangle_\alpha = \alpha\text{-}\sum_{i=1}^{n} x_i \overset{\alpha}{\cdot} \overline{y_i}^{\alpha}$$

biçiminde tanımlanan $\langle \cdot \ , \cdot \ \rangle_\alpha$dönüşümünün bir α-iç çarpım olduğunu gösterelim. Burada $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{K}_\alpha^n$ dir.

1) $\langle x, x \rangle_\alpha = \alpha\text{-}\sum_{i=1}^{n} x_i \overset{\alpha}{\cdot} \overline{x_i}^{\alpha} = \alpha\text{-}\sum_{i=1}^{n} |x_i|_\alpha^{2_\alpha} \overset{\alpha}{>} 0_\alpha$

2) $$\overline{\langle y, x \rangle_\alpha}^{\alpha} = \overline{\alpha\text{-}\sum_{i=1}^{n} y_i \overset{\alpha}{\cdot} \overline{x_i}^{\alpha}}^{\alpha}$$

$$= \alpha\text{-} \sum_{i=1}^{n} \overline{y_i \overset{\alpha}{\cdot} \overline{x_i}^{\alpha}}^{\alpha}$$

$$= \alpha\text{-} \sum_{i=1}^{n} \overline{y_i}^{\alpha} \overset{\alpha}{\cdot} x_i$$

$$= \langle x, y \rangle_\alpha$$

$$3)\ \left\langle a \overset{\triangle}{\cdot} x, y \right\rangle_{\alpha} = \alpha\text{-}\sum_{i=1}^{n} a \overset{\alpha}{\cdot} x_i \overset{\alpha}{\cdot} \overset{\alpha}{\overline{y_i}}$$

$$= \alpha\text{-}\sum_{i=1}^{n} x_i \overset{\alpha}{\cdot} \overset{\alpha}{\overline{y_i}}$$

$$= \alpha \langle x, y \rangle_{\alpha}$$

4) $z = (z_1, z_2, ..., z_n) \in \mathbb{C}_{\beta}^{n}$ olmak üzere ;

$$\left\langle x \overset{\triangle}{+} y, z \right\rangle_{\alpha} = \alpha\text{-}\sum_{i=1}^{n} (x_i \overset{\alpha}{+} y_i) \overset{\alpha}{\cdot} \overset{\alpha}{\overline{z_i}}$$

$$= \alpha\text{-}\sum_{i=1}^{n} (x_i \overset{\alpha}{\cdot} \overset{\alpha}{\overline{z_i}} \overset{\alpha}{+} y_i \overset{\alpha}{\cdot} \overset{\alpha}{\overline{z_i}})$$

$$= \alpha\text{-}\sum_{i=1}^{n} x_i \overset{\alpha}{\cdot} \overset{\alpha}{\overline{z_i}} \overset{\alpha}{+} \alpha\text{-}\sum_{i=1}^{n} y_i \overset{\alpha}{\cdot} \overset{\alpha}{\overline{z_i}}$$

$$= \langle x, z \rangle_{\alpha} \overset{\alpha}{+} \langle y, z \rangle_{\alpha}$$

Yukarıda tanımlanmış olan α-iç çarpıma $\mathbb{C}_{\beta}^{n}$ tarafından üretilmiş α-iç çarpım denir. Dikkat edilmelidir ki

$$\langle x, y \rangle_{\alpha} = a\text{-}\sum_{i=1}^{n} x_i \overset{\alpha}{\cdot} y_i$$

eşitliği $\mathbb{C}_{\beta}^{n}$ α-vektör uzayı için tanımlanmış α-iç çarpım ile tanımlamak yeterli olmayacaktır. Ama bu eşitlik $\mathbb{R}_{\alpha}^{n}$ reel vektör uzayındaki tanımlanan α-iç çarpım ile sağlanır.

Burada $x \overset{\alpha}{\cdot} y = x_1 \overset{\alpha}{\cdot} y_1 \overset{\alpha}{+} x_2 \overset{\alpha}{\cdot} y_2 \overset{\alpha}{+} x_3 \overset{\alpha}{\cdot} y_3$ eşitliğini yazabiliriz.(Öklid α-iç çarpımı)

Örnek

Şimdi ℓ_{α}^{2}vektör uzayını ele alalım. $x = (x_1, x_2, ...) \in \ell_{\alpha}^{2}$ olmak üzere $a\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|_{\alpha}^{2\alpha}$ serisi ile $\langle x, y \rangle_{\alpha} = a\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} x_i \overset{\alpha}{\cdot} \overset{\alpha}{\overline{y_i}}$ α-iç çarpımını tanımlayabiliriz.

Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanalım. $x, y \in \ell_{\alpha}^{2}$ olmak üzere; eğer $m \leq n$ ise

$$\left|\alpha\text{-}\sum_{i=m}^{n} x_i \overset{\alpha}{\cdot} \overset{\alpha}{\overline{y_i}}\right|_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} \alpha\text{-}\sum_{i=m}^{n} \left|x_i \overset{\alpha}{\cdot} \overset{\alpha}{\overline{y_i}}\right|_\alpha$$

$$= \alpha\text{-}\sum_{i=m}^{n} |x_i|_\alpha \overset{\alpha}{\cdot} |y_i|_\alpha$$

$$\overset{\alpha}{\leqslant} \overset{\alpha}{\sqrt{\alpha\text{-}\sum_{i=m}^{n} |x_i|_\alpha^{2\alpha}}} \overset{\alpha}{\cdot} \overset{\alpha}{\sqrt{\alpha\text{-}\sum_{i=m}^{n} |y_i|_\alpha^{2\alpha}}}$$

1)-2)-3)-4) özellikleri $\mathbb{C}_\beta^n$'de yaptığımız α-iç çarpım uzayındaki gibi sağlanır.

3.1.3. Tanım

α ve β iki üreteç olmak üzere $x_0 \in \mathbb{R}_\alpha$ ve $f : \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\beta$ olsun. $\varepsilon \overset{\beta}{>} 0_\beta$ için $\left|x \overset{\alpha}{-} x_0\right|_\alpha \overset{\alpha}{<} \delta$ iken $\left|f(x) \overset{\beta}{-} f(x_0)\right|_\beta \overset{\beta}{<} \varepsilon$ olacak biçimde $\delta \overset{\alpha}{>} 0_\alpha$ varsa f'ye x_0 noktasında (α, β)-süreklidir denir. $\alpha = \beta$ iken f, x_0 noktasında α-süreklidir. f, $\mathbb{R}_\alpha$'nın bir A altkümesinin tüm noktalarında (α, β)-sürekli ise f'ye A üzerinde (α, β)-süreklidir denir.

3.1.4. Tanım

α üreteç ve X'de $\mathbb{K}_\alpha$ üzerinde bir α-vektör uzayı olmak üzere $\|\cdot\|_\alpha : X \to \mathbb{R}_\alpha$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve her $k \in \mathbb{K}_\alpha$ için

1) $\|x\|_\alpha = 0_\alpha \iff x = 0_\alpha$

2) $\left\|k \overset{\triangle}{\cdot} x\right\|_\alpha = |k|_\alpha \overset{\alpha}{\cdot} \|x\|_\alpha$

3) $\left\|x \overset{\triangle}{+} y\right\|_\alpha \overset{\alpha}{\leq} \|x\|_\alpha \overset{\alpha}{+} \|y\|_\alpha$

özelliklerini sağlıyorsa bu dönüşüme α-norm, $(X, \|\cdot\|_\alpha)$ ikilisine de α-normlu uzay denir.

Örnek

$\mathbb{K}_\alpha^n$ vektör uzayı $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{K}_\alpha^n$ için

$$\|x\|_\alpha = \sqrt[\alpha]{\alpha\text{-}\sum_{k=1}^{n} |x_k|_\alpha^{2_\alpha}} = \alpha\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\alpha^{-1}(x_k)|^2}\right)$$

ile tanımlı α-norm ile bir α-normlu uzaydır. Bu norm $\mathbb{K}_\alpha^n$ uzayının doğal normudur. Bu uzay üzerinde tanımlanabilecek diğer norm

$$\|x\|_\alpha = \overset{\alpha}{\max}_{1\leq k\leq n} |x_k|_\alpha = \alpha\left(\max_{1\leq k\leq n} |\alpha^{-1}(x_k)|\right)$$

olur.

Örnek

ℓ_α^2 α-vektör uzayı her $x = (x_1, x_2, ...)$ elemanı için

$$\|x\|_{2_\alpha} = \sqrt[\alpha]{\alpha\text{ - }\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|_\alpha^{2_\alpha}}$$

ile tanımlı norm ile α-normlu uzaydır. Her $x \in \ell_2^\alpha$ için ℓ_2^α uzayının tanımından $\|x\|_{2_\alpha}$normu sonludur.

$\mathbb{C}_\beta^n$, $\mathbb{R}_\alpha^n$ ve ℓ_α^2 uzaylarında $\langle x, x\rangle_\alpha = \|x\|_\alpha^{2_\alpha}$ α-normuyla ilişkili α-iç çarpım tanımlandığına dikkat edilmelidir.

Bir $[a,b]_\alpha$ kapalı aralığında α-sürekli fonksiyonların $C\left([a,b]_\alpha\right)$ kümesi her $x, y \in C\left([a,b]_\alpha\right)$ ve $k \in \mathbb{K}_\alpha$ için $t \in [a,b]_\alpha$ iken

$$(k \overset{\triangle}{\cdot} x)(t) = k \overset{\alpha}{\cdot} x(t) \qquad \left(x \overset{\triangle}{+} y\right)(t) = x(t) \overset{\alpha}{+} y(t)$$

$$\left(x \overset{\triangle}{+} y\right)(t) = x(t) \overset{\alpha}{+} y(t)$$

işlemleriyle $C([a,b]_\alpha)$ α-vektör uzayıdır.

Örnek

$C([a,b]_\alpha)$ α-vektör uzayı ve $x \in C([a,b]_\alpha)$ olmak üzere

$$\|x\|_\alpha = \ \max\nolimits^{\alpha}_{a \le t \le b} |x(t)|_\alpha$$

ile tanımlı norm ile α-normlu uzaydır ve bu norm $C([a,b]_\alpha)$ uzayının α-düzgün normudur. Aynı uzay

$$\|x\|_\alpha = \ \alpha\text{-} \int\limits_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} |x(t)|_\alpha \, dt \ = \ \alpha \left(\int\limits_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} |\alpha^{-1}(x(t))| \, dt \right)$$

ve

$$\|x\|_\alpha = \ \sqrt[\alpha]{\int\limits_a^b (x(t))^{2_\alpha} dt}$$

α-normlarıyla da α-normlu uzaydır.

Örnek

$[a,b]_\alpha$ üzerinde x, y α-sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\langle x, y \rangle_\alpha = \ \alpha - \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} x(t) \overset{\alpha}{\cdot} y(t) dt$$

α-iç çarpımı tanımlanır. ($t \in [a,b]_\alpha$) Burada $x = y$ alınırsa

$$\langle x, x \rangle_\alpha = \ \alpha\text{-} \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} x(t) \overset{\alpha}{\cdot} x(t) dt \ = \ \alpha\text{-} \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} (x(t))^{2_\alpha} dt$$

sağlanır.

Bu da $C^2([a,b]_\alpha)$ uzayında $\|x\|_\alpha^{2_\alpha}$ normunu gösterir.

$C^2([a,b]_\alpha)$ uzayı bir α-iç çarpım uzayıdır.$\left(\|x\|_\alpha = \overset{\alpha}{\sqrt{\langle x,x\rangle_\alpha}}, x\in X\right)$

Örnek

$\|x\|_\alpha = \overset{\alpha}{\sqrt{\langle x,x\rangle_\alpha}}$ ifadesinin α-norm aksiyomlarını sağladığını gösterelim.

Her $x,y\in X$ ve her $a\in\mathbb{K}$ için;

N1) $x=0_\alpha$ *ise* $\langle 0_\triangle, 0_\triangle\rangle_\alpha = 0_\alpha$ ve $x\neq 0_\alpha$ *ise* $\langle x,x\rangle_\alpha \overset{\alpha}{>} 0_\alpha$

$$\text{N2)}\ \overset{\alpha}{\sqrt{\left\langle a\overset{\triangle}{\cdot} x, a\overset{\triangle}{\cdot} x\right\rangle_\alpha}} = \overset{\alpha}{\sqrt{a\overset{\alpha}{\cdot}\overset{\alpha}{\overline{a}}\overset{\alpha}{\cdot}\langle x,x\rangle_\alpha}}$$

$$= \overset{\alpha}{\sqrt{|a|_\alpha^{2_\alpha}\overset{\alpha}{\cdot}\langle x,x\rangle_\alpha}}$$

$$= |a|_\alpha\overset{\alpha}{\cdot}\overset{\alpha}{\sqrt{\langle x,x\rangle_\alpha}}$$

N3) Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanarak gösterelim. $|\langle x,y\rangle_\alpha|_\alpha^{2_\alpha} \overset{\alpha}{\leqslant} \langle x,x\rangle_\alpha\overset{\alpha}{\cdot}\langle y,y\rangle_\alpha$

$$\left\langle x\overset{\triangle}{+}y, x\overset{\triangle}{+}y\right\rangle_\alpha = \langle x,x\rangle_\alpha\overset{\alpha}{+}\langle x,y\rangle_\alpha\overset{\alpha}{+}\langle y,x\rangle_\alpha\overset{\alpha}{+}\langle y,y\rangle_\alpha$$

$$= \langle x,x\rangle_\alpha\overset{\alpha}{+}\langle x,y\rangle_\alpha\overset{\alpha}{+}\overset{\alpha}{\overline{\langle x,y\rangle_\alpha}}\overset{\alpha}{+}\langle y,y\rangle_\alpha$$

$$= \langle x,x\rangle_\alpha\overset{\alpha}{+}2_\alpha\overset{\alpha}{\cdot}\langle x,y\rangle_\alpha\overset{\alpha}{+}\langle y,y\rangle_\alpha$$

$$\overset{\alpha}{\leqslant} \langle x,x\rangle_\alpha\overset{\alpha}{+}2_\alpha\overset{\alpha}{\cdot}|\langle x,y\rangle_\alpha|_\alpha\overset{\alpha}{+}\langle y,y\rangle_\alpha$$

$$\overset{\alpha}{\leqslant} \langle x,x\rangle_\alpha\overset{\alpha}{+}2_\alpha\overset{\alpha}{\cdot}\overset{\alpha}{\sqrt{\langle x,x\rangle_\alpha\overset{\alpha}{\cdot}\langle y,y\rangle_\alpha}}\overset{\alpha}{+}\langle y,y\rangle_\alpha$$

$$= \left(\sqrt[\alpha]{\langle x, x \rangle_\alpha} \overset{\alpha}{+} \sqrt[\alpha]{\langle y, y \rangle_\alpha} \right)^{2_\alpha}$$

Örnek

olduğundan $\sqrt[\alpha]{\left\langle x \overset{\triangle}{+} y, x \overset{\triangle}{+} y \right\rangle_\alpha} \overset{\alpha}{\leqslant} \sqrt[\alpha]{\langle x, x \rangle_\alpha} \overset{\alpha}{+} \sqrt[\alpha]{\langle y, y \rangle_\alpha}$ bulunur.

3.1.5. Tanım

X boş olmayan bir küme olmak üzere $d_\alpha : X \times X \to \mathbb{R}_\alpha$ dönüşümü her $x, y, z \in X$ için

1) $d_\alpha(x, y) = 0_\alpha \Leftrightarrow x = y$

2) $d_\alpha(x, y) = d_\alpha(y, x)$

3) $d_\alpha(x, y) \overset{\alpha}{\leq} d_\alpha(x, z) \overset{\alpha}{+} d_\alpha(z, y)$

aksiyomlarını sağlıyorsa d_α fonksiyonuna üretilen metrik veya α-metrik, (X, d_α) ikilisine de üretilen metrik uzay ya da α-metrik uzay denir.

Benzer şekilde bir metrik verildiğinde α-metrik uzay kullanılarak α-normlu uzay elde edilebilir.

$$d_\alpha(x, y) = \left\| x \overset{\triangle}{-} y \right\|_\alpha, \ x, y \in X$$

$\mathbb{C}^n_\alpha, \mathbb{R}^n_\alpha$, ℓ^2_α ve $C^2\left([a, b]_\alpha\right)$ α-iç çarpım uzaylarının yanı sıra α-normlu uzay ve α-metrik uzaydır.

3.1.6. Teorem

(Genel Cauchy-Schwarz Eşitsizliği) Bir α-iç çarpım ve buna karşılık gelen α-norm $|\langle x, y\rangle_\alpha|_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} \|x\|_\alpha \overset{\alpha}{\cdot} \|y\|_\alpha$ eşitsizliğini gerçekler.

İspat

Eğer $y = 0_\triangle$ ise eşitsizlik aşikardır.

$y \neq 0_\triangle$ olsun. O zaman $\|y\|_\alpha \overset{\alpha}{>} 0_\triangle$ sağlanır. a bir skaler olmak üzere;

$$\begin{aligned}
0_\triangle \overset{\alpha}{\leqslant} \left\| x \overset{\triangle}{+} a \overset{\triangle}{\cdot} y \right\|_\alpha^{2\alpha} &= \left\langle x \overset{\triangle}{+} a \overset{\triangle}{\cdot} y, x \overset{\triangle}{+} a \overset{\triangle}{\cdot} y \right\rangle_\alpha \\
&= \langle x, x\rangle_\alpha \overset{\alpha}{+} \left\langle x, a \overset{\triangle}{\cdot} y \right\rangle_\alpha \overset{\alpha}{+} \left\langle a \overset{\triangle}{\cdot} y, x \right\rangle_\alpha \overset{\alpha}{+} \left\langle a \overset{\triangle}{\cdot} y, a \overset{\triangle}{\cdot} y \right\rangle_\alpha \\
&= \langle x, x\rangle_\alpha \overset{\alpha}{+} \overset{\alpha}{\overline{a}} \overset{\alpha}{\cdot} \langle x, y\rangle_\alpha \overset{\alpha}{+} a \overset{\alpha}{\cdot} \langle y, x\rangle_\alpha \overset{\alpha}{+} a \overset{\alpha}{\cdot} \overset{\alpha}{\overline{a}} \overset{\alpha}{\cdot} \langle y, y\rangle_\alpha \\
&= \|x\|_\alpha^{2\alpha} \overset{\alpha}{+} a \overset{\alpha}{\cdot} \overset{\alpha}{\overline{\langle x, y\rangle_\alpha}} \overset{\alpha}{+} \overset{\alpha}{\overline{a}} \overset{\alpha}{\cdot} \left(\langle x, y\rangle_\alpha \overset{\alpha}{+} a \overset{\alpha}{\cdot} \|y\|_\alpha^{2\alpha} \right)
\end{aligned}$$

$a = \overset{\alpha}{-} \langle x, y\rangle_\alpha \overset{\alpha}{/} \|y\|_\alpha^{2\alpha}$ olarak seçelim.

$$\begin{aligned}
0_\triangle &\overset{\alpha}{\leqslant} \|x\|_\alpha^{2\alpha} \overset{\alpha}{-} \langle x, y\rangle_\alpha \overset{\alpha}{/} \|y\|_\alpha^{2\alpha} \overset{\alpha}{\cdot} \overset{\alpha}{\overline{\langle x, y\rangle_\alpha}} \\
&\quad \overset{\alpha}{-} \overset{\alpha}{\overline{\langle x, y\rangle_\alpha}} \overset{\alpha}{/} \|y\|_\alpha^{2\alpha} \overset{\alpha}{\cdot} \left(\langle x, y\rangle_\alpha \overset{\alpha}{-} \langle x, y\rangle_\alpha \overset{\alpha}{/} \|y\|_\alpha^{2\alpha} \overset{\alpha}{\cdot} \|y\|_\alpha^{2\alpha} \right) \\
&\overset{\alpha}{\leqslant} \|x\|_\alpha^{2\alpha} \overset{\alpha}{-} \left(\langle x, y\rangle_\alpha \overset{\alpha}{\cdot} \overset{\alpha}{\overline{\langle x, y\rangle_\alpha}} \right) \overset{\alpha}{/} \|y\|_\alpha^{2\alpha} \\
&= \|x\|_\alpha^{2\alpha} \overset{\alpha}{-} |\langle x, y\rangle_\alpha|_\alpha^{2\alpha} \overset{\alpha}{/} \|y\|_\alpha^{2\alpha}
\end{aligned}$$

ayrıca

$$|\langle x, y\rangle_\alpha|_\alpha^{2\alpha} \overset{\alpha}{\leqslant} \|x\|_\alpha^{2\alpha} \overset{\alpha}{\cdot} \|y\|_\alpha^{2\alpha}$$

olduğundan

$$|\langle x,y\rangle_\alpha|_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} \|x\|_\alpha \overset{\alpha}{\cdot} \|y\|_\alpha$$

bulunur.

3.1.7. Teorem

(Paralelkenar Özdeşliği) Bir α-iç çarpım uzayından alınan herhangi iki x ve y elemanları için

$\left\|x \overset{\triangle}{+} y\right\|_\alpha^{2_\alpha} \overset{\alpha}{+} \left\|x \overset{\triangle}{-} y\right\|_\alpha^{2_\alpha} = 2_\alpha \overset{\alpha}{\cdot} \left(\|x\|_\alpha^{2_\alpha} \overset{\alpha}{+} \|y\|_\alpha^{2_\alpha}\right)$ eşitliği sağlanır.

İspat

Her $x, y \in X$ için

$$\begin{aligned}
\left\|x \overset{\triangle}{+} y\right\|_\alpha^{2_\alpha} &= \left\langle x \overset{\triangle}{+} y, x \overset{\triangle}{+} y\right\rangle_\alpha \\
&= \langle x,x\rangle_\alpha \overset{\alpha}{+} \langle x,y\rangle_\alpha \overset{\alpha}{+} \langle y,x\rangle_\alpha \overset{\alpha}{+} \langle y,y\rangle_\alpha \\
&= \|x\|_\alpha^{2_\alpha} \overset{\alpha}{+} \|y\|_\alpha^{2_\alpha} \overset{\alpha}{+} \langle x,y\rangle_\alpha \overset{\alpha}{+} \langle y,x\rangle_\alpha
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\left\|x \overset{\triangle}{-} y\right\|_\alpha^{2_\alpha} &= \left\langle x \overset{\triangle}{-} y, x \overset{\triangle}{-} y\right\rangle_\alpha \\
&= \langle x,x\rangle_\alpha \overset{\alpha}{-} \langle x,y\rangle_\alpha \overset{\alpha}{-} \langle y,x\rangle_\alpha \overset{\alpha}{+} \langle y,y\rangle_\alpha \\
&= \|x\|_\alpha^{2_\alpha} \overset{\alpha}{+} \|y\|_\alpha^{2_\alpha} \overset{\alpha}{-} \langle x,y\rangle_\alpha \overset{\alpha}{-} \langle y,x\rangle_\alpha
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\left\|x \overset{\triangle}{+} y\right\|_{\alpha}^{2_\alpha} \overset{\alpha}{+} \left\|x \overset{\triangle}{-} y\right\|_{\alpha}^{2_\alpha} &= \|x\|_{\alpha}^{2_\alpha} \overset{\alpha}{+} \|y\|_{\alpha}^{2_\alpha} \overset{\alpha}{+} \langle x, y\rangle_{\alpha} \overset{\alpha}{+} \langle y, x\rangle_{\alpha} \\ &\quad \overset{\alpha}{+} \|x\|_{\alpha}^{2_\alpha} \overset{\alpha}{+} \|y\|_{\alpha}^{2_\alpha} \overset{\alpha}{-} \langle x, y\rangle_{\alpha} \overset{\alpha}{-} \langle y, x\rangle_{\alpha} \\ &= 2_\alpha \overset{\alpha}{\cdot} \left(\|x\|_{\alpha}^{2_\alpha} \overset{\alpha}{+} \|y\|_{\alpha}^{2_\alpha}\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

Paralelkenar özdeşliğini sağlamayan α-norm α-iç çarpım uzayı değildir.Şimdi bununla ilgili bir örnek verelim.

Örnek

$C\left([a,b]_{\alpha}\right)$ uzayını ele alalım. $C\left([a,b]_{\alpha}\right)$ uzayı paralelkenar özelliğini sağlamadığından bir α-iç çarpım uzayı değildir. $\|x\|_{\alpha} = \overset{\alpha}{\max}_{0\leq t\leq 1} |x(t)|_{\alpha}$, $t \in [a,b]_{\alpha}$ ile tanımlanan α-normun bir α-iç çarpımdan elde edilemeyeceğini gösterelim.

$x(t) = 1_\alpha$ ve $y(t) = \left(t \overset{\alpha}{-} a\right) \overset{\alpha}{/} \left(b \overset{\alpha}{-} a\right)$ alalım.

$\|x\|_{\alpha} = 1_\alpha$ ve $\|y\|_{\alpha} = 1_\alpha$ olur.

Bu durumda

$$x(t) \overset{\alpha}{+} y(t) = 1_\alpha \overset{\alpha}{+} \left(t \overset{\alpha}{-} a\right) \overset{\alpha}{/} \left(b \overset{\alpha}{-} a\right) \Rightarrow \left\|x \overset{\triangle}{+} y\right\|_{\alpha} = 2_\alpha$$

$$x(t) \overset{\alpha}{-} y(t) = 1_\alpha \overset{\alpha}{-} \left(t \overset{\alpha}{-} a\right) \overset{\alpha}{/} \left(b \overset{\alpha}{-} a\right) \Rightarrow \left\|x \overset{\triangle}{-} y\right\|_{\alpha} = 1_\alpha$$

olduğundan

$$\left\| x \overset{\triangle}{+} y \right\|_{\alpha}^{2_\alpha} \overset{\alpha}{+} \left\| x \overset{\triangle}{-} y \right\|_{\alpha}^{2_\alpha} = 5_\alpha$$

$$2_\alpha \overset{\alpha}{\cdot} \left(\|x\|_{\alpha}^{2_\alpha} \overset{\alpha}{+} \|y\|_{\alpha}^{2_\alpha} \right) = 4_\alpha$$

olur. Dolayısıyla, yukarıda tanımanan α-normdan α-iç çarpım elde edilemez.

3.1.8. Tanım

$\mathbb{R}_\alpha$ veya $\mathbb{C}_\alpha$ uzayında $\|\cdot\|_\alpha = |\cdot|_\alpha$ normuna göre bir $\{x_n\}$ dizisi için $\|x_n\|_\alpha = |x_n|_\alpha \overset{\alpha}{\leq} M_\alpha$ olacak biçimde $M_\alpha \in \mathbb{R}_\alpha^+$ varsa $\{x_n\}$ dizisine α-sınırlıdır denir.

3.1.9. Tanım

$\mathbb{R}_\alpha$ kümesinden bir (a_n) dizisi alınsın ve $a \in \mathbb{R}_\alpha$ olsun. Her $\varepsilon \overset{\alpha}{>} 0_\alpha$ için $n \overset{\alpha}{>} n_\varepsilon$ iken $\left| a_n \overset{\alpha}{-} a \right|_\alpha \overset{\alpha}{<} \varepsilon$ olacak biçimde bir n_ε sayısı varsa (a_n) dizisi a sayısına α-yakınsar denir ve α-$\lim a_n = a$ veya $a_n \overset{\alpha}{\to} a$ yazılır. Her $\varepsilon \overset{\alpha}{>} 0_\alpha$ için $n \overset{\alpha}{>} n_\varepsilon$ iken $a_n \overset{\alpha}{>} \varepsilon$ (veya $a_n \overset{\alpha}{<} \overset{\alpha}{-}\varepsilon$) olacak biçimde bir n_ε sayısı varsa, (a_n) dizisi α-sonsuza (veya eksi α-sonsuza) yaklaşır denir ve α-$\lim a_n = \infty_\alpha$ (veya α-$\lim a_n = \overset{\alpha}{-}\infty_\alpha$) yazılır.

3.1.10. Teorem

(x_n) ve (y_n) bir α-iç çarpım uzayında diziler olmak üzere, eğer $x_n \overset{\alpha}{\to} x$ ve $y_n \overset{\alpha}{\to} y$ olacak şekilde $x, y \in \mathbb{C}_\alpha$ varsa o zaman $\langle x_n, y_n \rangle_\alpha \overset{\alpha}{\to} \langle x, y \rangle_\alpha$ sağlanır.

İspat

Hipotezden $x_n \overset{\alpha}{\to} x$ olduğundan $\left\| x_n \overset{\triangle}{-} x \right\|_\alpha \overset{\alpha}{\to} 0_\alpha$ olduğunu söyleyebiliriz. Bir α-iç çarpım uzayında α-norm bu uzaydan alınan her w elemanı için

$\|w\|_\alpha = \sqrt[\alpha]{\langle w, w \rangle_\alpha}$şeklinde tanımlıdır. Şimdi $\langle x_n, y_n \rangle_\alpha \overset{\alpha}{\to} \langle x, y \rangle_\alpha$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\langle x_n, y_n \rangle_\alpha \overset{\alpha}{-} \langle x, y \rangle_\alpha &= \langle x_n, y_n \rangle_\alpha \overset{\alpha}{-} \langle x_n, y \rangle_\alpha \overset{\alpha}{+} \langle x_n, y \rangle_\alpha \overset{\alpha}{-} \langle x, y \rangle_\alpha \\
&= \left\langle x_n, y_n \overset{\triangle}{-} y \right\rangle_\alpha \overset{\alpha}{+} \left\langle x_n \overset{\triangle}{-} x, y \right\rangle_\alpha
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\left| \langle x_n, y_n \rangle_\alpha \overset{\alpha}{-} \langle x, y \rangle_\alpha \right|_\alpha &= \left| \left\langle x_n, y_n \overset{\triangle}{-} y \right\rangle_\alpha \overset{\alpha}{+} \left\langle x_n \overset{\triangle}{-} x, y \right\rangle_\alpha \right|_\alpha \\
&\overset{\alpha}{\leqslant} \left| \left\langle x_n, y_n \overset{\triangle}{-} y \right\rangle_\alpha \right|_\alpha \overset{\alpha}{+} \left| \left\langle x_n \overset{\triangle}{-} x, y \right\rangle_\alpha \right|_\alpha \\
&\overset{\alpha}{\leqslant} \|x_n\|_\alpha \overset{\alpha}{\cdot} \left\| y_n \overset{\triangle}{-} y \right\|_\alpha \overset{\alpha}{+} \left\| x_n \overset{\triangle}{-} x \right\|_\alpha \overset{\alpha}{\cdot} \|y\|_\alpha \\
&= 0_\alpha
\end{aligned}$$

sağlanır. Burada x_n α-sınırlı olduğundan $\|x_n\|_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} M_\alpha$ olacak şekilde $M_\alpha \in \mathbb{R}_\alpha$ vardır. O halde $\langle x_n, y_n \rangle_\alpha \overset{\alpha}{\to} \langle x, y \rangle_\alpha$ sağlanır.

3.2. Ortonormal Vektörler

Bu bölümde bir α-iç çarpım tanımlayarak iki α-vektör arasındaki açıdan bahsedeceğiz. Eğer bu α-vektör çiftini sıfırdan farklı olacak şekilde

$x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_{2,} y_3)$ olarak alırsak bu vektörlerin skaler çarpımı

$$x \triangle y = x_1 \overset{\alpha}{\cdot} y_1 \overset{\alpha}{+} x_2 \overset{\alpha}{\cdot} y_2 \overset{\alpha}{+} x_3 \overset{\alpha}{\cdot} y_3$$

ile tanımlanır ve bu vektörler arasındaki açıya w dersek $(0_\alpha \overset{\alpha}{\leq} w \overset{\alpha}{\leq} \pi_\alpha)$

$$
\begin{aligned}
\cos w &= (x \triangle y) \overset{\alpha}{/} \left(\|x\|_\alpha \overset{\alpha}{\cdot} \|y\|_\alpha \right) \\
&= \left(x_1 \overset{\alpha}{\cdot} y_1 \overset{\alpha}{+} x_2 \overset{\alpha}{\cdot} y_2 \overset{\alpha}{+} x_3 \overset{\alpha}{\cdot} y_3 \right) \overset{\alpha}{/} \left(\overset{\alpha}{\sqrt{x_1^2 \overset{\alpha}{+} x_2^2 \overset{\alpha}{+} x_3^2}} \overset{\alpha}{\cdot} \overset{\alpha}{\sqrt{y_1^2 \overset{\alpha}{+} y_2^2 \overset{\alpha}{+} y_3^2}} \right)
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlanır. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin bir sonucu olarak bu açı daima vardır, çünkü

$$
\overset{\alpha}{-} 1_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} \langle x, y \rangle_\alpha \overset{\alpha}{/} \left(\|x\|_\alpha \overset{\alpha}{\cdot} \|y\|_\alpha \right) \overset{\alpha}{\leqslant} 1_\alpha
$$

eşitsizliği sağlanır. Ters kosinüs fonksiyonunun tanımından $w \in [0_a, \pi_a]_a$ olur.

3.2.1. Tanım

$(X, \langle , \rangle_\alpha)$ bir α-iç çarpım uzayı olmak üzere $x, y \in X$ için $\langle x, y \rangle_\alpha = 0_\alpha$ oluyorsa x vektörü y vektörüne α-diktir denir ve bu diklik $x \overset{\alpha}{\perp} y$ ile gösterilir. Ayrıca x ve y vektörlerine α-ortogonal vektörler denir. X'in boştan farklı alt kümesi S olmak üzere, her $x, y \in S$ $(x \neq y)$ için $x \overset{\alpha}{\perp} y$ ve ek olarak her $x \in X$ için $\|x\|_\alpha = 1_\alpha$ ise S kümesine α-ortonormal küme adı verilir.

Burada dikkat edilmelidir ki $x \overset{\alpha}{\perp} y$ ise $\langle y, x \rangle_\alpha = \overset{\alpha}{\overline{\langle x, y \rangle_\alpha}} = 0_\alpha$ olduğundan aynı zamanda $y \overset{\alpha}{\perp} x$ sağlanır. Ayrıca α-iç çarpım uzayındaki her x için $0_\alpha \overset{\alpha}{\perp} x$ olacağı açıktır.

Örnek

$\mathbb{R}^3_{\exp}$ uzayında $x_1 = (e, 1, 1)$, $x_2 = (1, e, 1)$ ve $x_3 = (1, 1, e)$ ise $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ kümesi α-ortonormal kümedir.

Örnek

ℓ^2_α α-iç çarpım uzayında $\{(e, 1, 1, 1, ...), (1, e, 1, 1, ...), (1, 1, e, 1, ...), ...\}$ kümesi α-ortonormal bir kümedir. Bu kümenin herhangi bir alt kümesi de ℓ^2_α de α-ortonormal kümedir.

Örnek

α- artan ve $C\left([a,b]_{\alpha}\right)=\{f:[\alpha^{-1}(a),\ \alpha^{-1}(b)]\overset{\alpha}{\rightarrow}\mathbb{R},\ f\ \ \alpha\text{-sürekli fonksiyon}\}$ iken $C\left(\overset{\alpha}{[-\pi_{\alpha},\pi_{\alpha}]_{\alpha}}\right)$ aralığında α-sürekli fonksiyonlar uzayının alt kümesi $S=\{\alpha(\cos t),\ \ \alpha(\cos 2t),\ \ \alpha(\cos 3t),...\}$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ için $m,n\in\mathbb{N}$ iken

$$\langle\cos mt,\cos nt\rangle_{\alpha}=\alpha-\int_{\alpha(-\pi)}^{\alpha(\pi)}\cos mt\overset{\alpha}{\cdot}\cos ntdt=\begin{cases}\pi_{\alpha} & , \quad m=n\\ 0_{\alpha} & , \quad m\neq n\end{cases}$$

ele alalım.

i)Özel olarak $\alpha=\exp$ alırsak;

$$\begin{aligned} C\left([a,b]_{\exp}\right) &= \{f\mid f:[a,b]_{\exp}\rightarrow\mathbb{R}_{\exp},\ f\ \ \exp\text{-sürekli}\} \\ &= \{f\mid f:[e^{a},e^{b}]\rightarrow(0,\infty),\ f\ \ \exp\text{-sürekli}\} \end{aligned}$$

üretecini göz önüne alalım.

$f\in\ C\left([-\pi,\pi]_{\exp}\right)=\{f\mid f:[e^{-\pi},e^{\pi}]\rightarrow(0,\infty),\ f\ \ \exp\text{-sürekli}\}$ olmak üzere

$S=\{e^{\cos t},\ e^{\cos 2t},\ e^{\cos 3t},\ ...\}$ olur.

$$\begin{aligned} \langle e^{\cos mt},e^{\cos nt}\rangle_{\exp} &= \exp\left(\alpha\text{-}\int_{\alpha(-\pi)}^{\alpha(\pi)}\ln\left(e^{\cos mt}\right)\overset{\alpha}{\cdot}\ln\left(e^{\cos nt}\right)dt\right) \\ &= \exp\left(\alpha\text{-}\int_{\alpha(-\pi)}^{\alpha(\pi)}\cos mt\overset{\alpha}{\cdot}\cos ntdt\right) \\ &= \exp\left(\alpha\text{-}\int_{\alpha(-\pi)}^{\alpha(\pi)}\cos mt\overset{\alpha}{\cdot}\cos ntdt\right) \\ &= \begin{cases} e^{\pi} & , \quad m=n\\ 1 & , \quad m\neq n\end{cases} \end{aligned}$$

$m\neq n$ iken $\langle e^{\cos mt},e^{\cos nt}\rangle_{\exp}=1=0_{\exp}$ olduğundan S kümesi α-exp ortogonaldir.

ii) Özel olarak

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\rightarrow (-1,1) \\ x &\rightarrow \alpha(x) = x \; / \, (1+|x|) \end{aligned}$$

üretecini gözönüne alalım. Bu durumda

$$C([a,b]_\alpha) = \{f \mid f : [a \; / \, (1+|a|) \, , \; b / \, (1+|b|)] \rightarrow (-1, \; 1) \, , \; f \; \alpha\text{-sürekli}\}$$

olur.

$f \in C([a,b]_\alpha) = \{f \mid f : [-\pi / \, (1+\pi) \, , \; \pi / \, (1+\pi)] \rightarrow (-1, \; 1) \, , \; f \; \alpha\text{-sürekli}\}$ ve

$S = \{\cos t \; / \, (1+|\cos t|) \, , \; \cos 2t \; / \, (1+|\cos 2t|) \, , ...\}$ alınırsa;

$$\alpha^{-1}(-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\alpha^{-1}(x) = x / \, (1-|x|)$$

olur. Bu durumda;

$$\begin{aligned} &\langle \cos mt \; / \, (1+|\cos mt|) \, , \; \cos nt \; / \, (1+|\cos nt|) \rangle_\alpha \\ = \; &\alpha\text{-} \int_{\alpha(-\pi)}^{\alpha(\pi)} \cos mt \; / \, (1+|\cos mt|) \overset{\alpha}{\cdot} \; \cos nt \; / \, (1+|\cos nt|) \, dt \\ = \; &\alpha \left(\int_{\alpha(-\pi)}^{\alpha(\pi)} \alpha^{-1} (\cos mt \; / \, (1+|\cos mt|)) \cdot \; \alpha^{-1} (\cos nt \; / \, (1+|\cos nt|)) \, dt \right) \\ = \; &\begin{cases} \pi / \, (1+\pi) & , \quad m = n \\ 0 & , \quad m \neq n \end{cases} \end{aligned}$$

$0_\alpha = 0$ olduğundan S kümesi α-ortogonaldir.

3.2.2. Tanım

X α-vektör uzayının $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \in X$ alt kümesi için $k_1 \overset{\triangle}{\cdot} x_1 \overset{\triangle}{+} k_2 \overset{\triangle}{\cdot} x_2 \overset{\triangle}{+} ... \overset{\triangle}{+} k_n \overset{\triangle}{\cdot} x_n = 0_\triangle$ iken $k_1 = k_2 = ... = k_n = 0_\triangle$ oluyorsa bu kümeye α-lineer bağımsız küme denir.

3.2.3. Tanım

S, V α-vektör uzayının boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere

a) S'nin sonlu alt kümelerinin hepsi α-lineer bağımsız ise S kümesi α-lineer bağımsızdır.

b) V α-vektör uzayının her bir elemanı $v_1, v_2, ..., v_n$ vektörlerinin α-lineer birleşimi olarak ifade ediliyorsa $v_1, v_2, ..., v_n$ vektörleri V'yi α-gerer denir. Üstelik, $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ ise S kümesi V'yi α-gerer denir ve α-geren $S = V$ ile gösterilir.

Örnek

$C\left([a,b]_\alpha\right)$ reel α-vektör uzayında sonsuz bir küme $S = \{\alpha(1), \alpha(t), \alpha(t^2), \alpha(t^3), ...\}$ $\left(\alpha(a) \overset{\alpha}{\leqslant} t \overset{\alpha}{\leqslant} \alpha(b)\right)$ olsun. $[a,b]_\alpha$ üzerinde S deki sonlu sayıda vektörlerin α-lineer kombinasyonu bir polinom fonksiyonu olduğundan S kümesi α-lineer bağımsızdır.

3.2.4. Teorem

Bir α-iç çarpım uzayında sıfırdan farklı α-vektörlerin α-ortogonal kümesi α-lineer bağımsızdır.

İspat

Bir S α-ortogonal kümesini ele alalım ve S'nin herhangi sonlu bir alt kümesi $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ olsun. $a_1, a_2, ..., a_n$ skalerleri için $a_1 \overset{\triangle}{\cdot} x_1 \overset{\triangle}{+} a_2 \overset{\triangle}{\cdot} x_2 \overset{\triangle}{+} ... \overset{\triangle}{+} a_n \overset{\triangle}{\cdot} x_n = 0_\triangle$

olduğunu kabul edelim. Eşitliğin her iki tarafını $i = 1, 2, 3, ..., n$ iken x_i ile iç çarparsak

$$\left\langle a_1 \overset{\triangle}{\cdot} x_1 \overset{\triangle}{+} a_2 \overset{\triangle}{\cdot} x_2 \overset{\triangle}{+} ... \overset{\triangle}{+} a_n \overset{\triangle}{\cdot} x_n, x_i \right\rangle_\alpha = \langle 0_\triangle, x_i \rangle_\alpha = 0_\alpha$$

ve böylece

$$a_1 \overset{\alpha}{\cdot} \langle x_1, x_i \rangle_\alpha \overset{\alpha}{+} a_2 \overset{\alpha}{\cdot} \langle x_2, x_i \rangle_\alpha \overset{\alpha}{+} ... \overset{\alpha}{+} a_n \overset{\alpha}{\cdot} \langle x_n, x_i \rangle_\alpha = 0_\alpha$$

elde edilir. $\{x_1, x_2, x_{3,} ..., x_n\}$ α-ortogonal bir küme ve her i için $x_i \neq 0_\alpha$ olduğundan sol taraftaki α-iç çarpımların hepsi sıfırdan farklıdır, yani $a_i \overset{\alpha}{\cdot} \langle x_i, x_i \rangle_\alpha \neq 0_\alpha$ sağlanır. Bu durumda her i için $a_i = 0_\alpha$ olduğundan $\{x_1, x_2, x_{3,} ..., x_n\}$ kümesi α-lineer bağımsızdır.

3.2.5. Teorem

X α-iç çarpım uzayının sayılabilir alt kümelerinden oluşan α-lineer bağımsız α-vektörlerin kümesi S olsun. α-SpT = α-SpS olacak biçimde X uzayı içinde bir T α-ortogonal kümesi vardır.

İspat

α-$SpS = X$ olduğunu kabul edelim. Böyle bir varsayımı dikkate alırsak teoremdeki T kümesi X uzayının 0_α vektörünü içerir. Fakat α-$Sp(T \setminus \{0_\alpha\}) = \alpha$-$SpT$ olacağı açıktır. Sıfırdan farklı α-vektörlerin oluşturduğu α-ortogonal küme X'i α-gerer ve bir önceki teoreme göre bu α-ortogonal küme α-lineer bağımsızdır.

Bu teorem bize bundan daha fazlasını söyler. Buna göre X'in sonlu boyutlu olmasına ve S'nin de sonlu bir alt küme olmasına gerek yoktur. Bu ispat bize S kümesinden yola çıkarak T kümesinin inşa edilebileğini verir. Bu metot Gram-Schmidt α-ortonormalleştirme metotu olarak bilinir.

S sonlu küme iken α-SpT = α-SpS eşitliğinin gerçeklendiği aşikardır. S kümesi $\{x_1, x_2, ...\}$ biçiminde sonsuz bir küme olsun. Her $k \in \mathbb{N}_a$ için S alt uzayı içinde X'i

α-geren bir küme $\{z_1, z_2, ...\}$ olmak üzere

$$y_k = \left(z_k \overset{\alpha}{/} \|z_k\|_\alpha \right) \overset{\alpha}{\cdot} (\|z_k\|_\alpha \neq 0_\alpha)$$

alınırsa her k için $\|y_k\|_\alpha = 1_\alpha$ olduğundan $T = \{y_1, y_2, ...\}$ kümesi α-ortonormal küme olur ve α-$SpS = \alpha$-SpT sağlanır. Bu süreci adım adım genelleştirerek göstereceğiz.

İlk olarak, a_{21} bir skaler ve $\langle z_2, z_1 \rangle_\alpha = 0_\alpha$ iken $z_1 = x_1$ ve $z_2 = x_2 \overset{\alpha}{+} a_{21} \overset{\alpha}{\cdot} z_1$ alalım. Burada

$$\begin{aligned} \langle x_2, z_1 \rangle_\alpha \overset{\alpha}{+} a_{21} \overset{\alpha}{\cdot} \langle z_1, z_1 \rangle_\alpha &= \left\langle x_2 \overset{\triangle}{+} a_{21} \overset{\triangle}{\cdot} z_1, z_1 \right\rangle_\alpha \\ &= \langle z_2, z_1 \rangle_\alpha \\ &= 0_\alpha \end{aligned}$$

olduğundan

$$a_{21} = \overset{\alpha}{-} \langle x_2, z_1 \rangle_\alpha \overset{\alpha}{\backslash} \|z_1\|_\alpha^{2_\alpha}$$

olur.

Burada dikkat edilmelidir ki $\|z_1\|_\alpha \neq 0_\alpha$ dır. (Aksi takdirde $x_1 = 0_\alpha$ ve dolayısıyla S kümesi α-lineer bağımlı olur.)
İkinci adım olarak $\langle z_3, z_1 \rangle_\alpha = 0_\alpha$ ve $\langle z_3, z_2 \rangle_\alpha = 0_\alpha$ iken

$$z_3 = x_3 \overset{\alpha}{+} a_{32} \overset{\alpha}{\cdot} z_2 \overset{\alpha}{+} a_{31} \overset{\alpha}{\cdot} z_1$$

alalım.

Burada

$$\langle x_3, z_1\rangle_\alpha \overset{\alpha}{+} a_{32} \overset{\alpha}{\cdot} \langle z_2, z_1\rangle_\alpha \overset{\alpha}{+} a_{31} \overset{\alpha}{\cdot} \langle z_1, z_1\rangle_\alpha = \left\langle x_3 \overset{\triangle}{+} a_{32} \overset{\triangle}{\cdot} z_2 \overset{\triangle}{+} a_{31} \overset{\triangle}{\cdot} z_1, z_1 \right\rangle_\alpha$$

$$= \langle z_3, z_1\rangle_\alpha$$

$$= 0_\alpha$$

ve

$$\langle x_3, z_2\rangle_\alpha \overset{\alpha}{+} a_{32} \overset{\alpha}{\cdot} \langle z_2, z_2\rangle_\alpha \overset{\alpha}{+} a_{31} \overset{\alpha}{\cdot} \langle z_1, z_2\rangle_\alpha = \left\langle x_3 \overset{\triangle}{+} a_{32} \overset{\triangle}{\cdot} z_2 \overset{\triangle}{+} a_{31} \overset{\triangle}{\cdot} z_1, z_2 \right\rangle_\alpha$$

$$= \langle z_3, z_2\rangle_\alpha$$

$$= 0_\alpha$$

olduğundan

$$a_{31} = \overset{\alpha}{-} \langle x_3, z_1\rangle_\alpha \overset{\alpha}{\setminus} \|z_1\|_\alpha^{2\alpha} \text{ ve } a_{32} = \overset{\alpha}{-} \langle x_3, z_2\rangle_\alpha \overset{\alpha}{\setminus} \|z_2\|_\alpha^{2\alpha}$$

bulunur. Burada dikkat edilmelidir ki $\|z_2\|_\alpha \neq 0_\alpha$ dır.
(Aksi taktirde $z_2 = x_2 \overset{\alpha}{+} a_{21} \overset{\alpha}{\cdot} x_1 = 0_\alpha$ ve dolayısıyla $x_2 = \overset{\alpha}{-} a_{21} \overset{\alpha}{\cdot} x_1$ olur ki, durumda S α-lineer bağımlı olur.) Bu şekilde yeterince devam edildiğinde n. adım olarak $z_1 = x_1$ ve

$$z_n = x_n \overset{\alpha}{+} \alpha\text{-}\sum_{i=1}^{n-1} a_{ni} \overset{\alpha}{\cdot} z_i, n = 2, 3, ...$$

yazılabilir ve tümevarımla,

$$a_{ni} = \overset{\alpha}{-} \langle x_n, z_i\rangle_\alpha \overset{\alpha}{\setminus} \|z_i\|_\alpha^{2\alpha}$$

sağlanır.

Yine benzer şekilde $\|z_i\|_\alpha \neq 0\ _\alpha$dır. (Aksi takdirde $\{x_1, x_2, ..., x_i\}$ α-lineer bağımlı küme olurdu.) Diğer yandan, herhangi bir $m = 1, 2, ..., n-1$ için

$$\begin{aligned}
\langle z_n, z_m \rangle_\alpha &= \left\langle x_n \overset{\triangle}{+} \alpha\text{-} \sum_{i=1}^{n-1} a_{ni} \overset{\Delta}{\cdot} z_i, z_m \right\rangle_\alpha \\
&= \langle x_n, z_m \rangle_\alpha \overset{\alpha}{+} \alpha\text{-} \sum_{i=1}^{n-1} a_{ni} \overset{\alpha}{\cdot} \langle z_i, z_m \rangle_\alpha \\
&= \langle x_n, z_m \rangle_\alpha \overset{\alpha}{+} a_{nm} \overset{\alpha}{\cdot} \langle z_m, z_m \rangle_\alpha \\
&= \langle x_n, z_m \rangle_\alpha \overset{\alpha}{-} \left(\langle x_n, z_m \rangle_\alpha \overset{\alpha}{\backslash} \|z_m\|_\alpha^{2\alpha} \right) \overset{\alpha}{\cdot} \|z_m\|_\alpha^{2\alpha} \\
&= 0_\alpha
\end{aligned}$$

olduğundan her $m, n \in \mathbb{N}_\alpha$ $(m \neq n)$ için $\langle z_n, z_m \rangle_\alpha = 0_\alpha$ olur. O halde X içinde $\{z_1, z_2, ...\}$ α-ortogonal bir kümedir. Her z_n vektörü $x_1, x_2, ..., x_n$ vektörlerinin α-lineer kombinasyonu ve her x_n vektörü de $z_1, z_2, ..., z_n$ vektörlerinin α-lineer kombinasyonu şeklinde yazılabilirler. Bu ise α-$SpT = \alpha$-SpS olduğunu söyler. Bu da ispatı tamamlar.

3.2.6. Teorem

X α-iç çarpım uzayında α-lineer bağımsız vektörlerin kümesi $\{x_1, x_2, ...\}$ verilsin.

$z_1 = x_1$ ve her $n = 2, 3, ...$ için

$$z_n = x_n \overset{\alpha}{-} \alpha\text{-} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\langle x_n, z_i \rangle_\alpha \overset{\alpha}{\backslash} \|z_i\|_\alpha^{2\alpha} \right) \overset{\alpha}{\cdot} z_i$$

ve

$$y_n = z_n \overset{\alpha}{\backslash} \|z_n\|_\alpha$$

olsun. O halde X uzayında $\{y_1, y_2, ...\}$ kümesi α-ortonormal bir kümedir.

$$
\begin{aligned}
P_0(t) &= \sqrt[\alpha]{2_\alpha} \overset{\alpha}{/} 2_\alpha \\
&= \alpha\left(\alpha^{-1}\left(\sqrt[\alpha]{2_\alpha}\right) \;/\; \alpha^{-1}\left(2_\alpha\right)\right) \\
&= \alpha\left(\alpha^{-1}\left(\alpha\left(\sqrt{\alpha^{-1}\left(2_\alpha\right)}\right)\right) \;/\; \alpha^{-1}\left(2_\alpha\right)\right) \\
&= \alpha\left(\sqrt{\alpha^{-1}\left(2_\alpha\right)} \;/\; \alpha^{-1}\left(2_\alpha\right)\right) \\
&= \alpha\left(\sqrt{2} \;/\; \alpha^{-1}\left(2_\alpha\right)\right) \\
&= \alpha\left(\sqrt{2} \;/\; 2\right) \\
P_1(t) &= \sqrt[\alpha]{6_\alpha} \overset{\alpha}{/} 2_\alpha \\
&= \alpha\left(\sqrt{\alpha^{-1}\left(6_\alpha\right)}\right) \overset{\alpha}{/} 2_\alpha \\
&= \alpha\left(\alpha^{-1}\alpha\left(\sqrt{\alpha^{-1}\left(6_\alpha\right)}\right) / \; \alpha^{-1}\left(2_\alpha\right)\right) \\
&= \alpha\left(\sqrt{\alpha^{-1}\left(6_\alpha\right)} / \; \alpha^{-1}\left(2_\alpha\right)\right) \\
&= \alpha\left(\sqrt{6} / \; 2\right) \\
P_2(t) &= \left(\sqrt[\alpha]{10_\alpha} \overset{\alpha}{/} 4_\alpha\right) \overset{\alpha}{\cdot} \left(3_\alpha \overset{\alpha}{\cdot} t^{2_\alpha} \overset{\alpha}{-} 1_\alpha\right) \\
&= \alpha\left(\sqrt{10} / \; 4\right) \overset{\alpha}{\cdot} \; \alpha(3t^2 - 1) \\
&= \alpha\left(\alpha^{-1}\left(\alpha\left(\sqrt{10} / \; 4\right)\right) \cdot \; \alpha^{-1}\left(\alpha(3t^2 - 1)\right)\right) \\
&= \alpha\left(\left(\sqrt{10} / \; 4\right) \cdot (3t^2 - 1)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_3(t) &= \left(\overset{\alpha}{\sqrt{14_\alpha}} \overset{\alpha}{/} 4_\alpha\right) \overset{\alpha}{\cdot} (5_\alpha \overset{\alpha}{\cdot} t^{3_\alpha} \overset{\alpha}{-} 3_\alpha \overset{\alpha}{\cdot} t) \\
&= \alpha\left(\sqrt{14/4}\right) \overset{\alpha}{\cdot}\ \alpha\,(5t^3 - 3t) \\
&= \alpha\left(\alpha^{-1}\left(\alpha\left(\sqrt{14/4}\right)\right) \cdot\ \alpha^{-1}\left(\alpha\,(5t^3 - 3t)\right)\right) \\
&= \alpha\left(\left(\sqrt{14/4}\right) \cdot (5t^3 - 3t)\right) \\
P_4(t) &= \left(\left(3_\alpha \overset{\alpha}{\cdot} \overset{\alpha}{\sqrt{2_\alpha}}\right) \overset{\alpha}{/} 16_\alpha\right) \overset{\alpha}{\cdot} (35_\alpha \overset{\alpha}{\cdot} t^{4_\alpha} \overset{\alpha}{-} 30_\alpha \overset{\alpha}{\cdot} t^{2_\alpha} \overset{\alpha}{+} 3_\alpha) \\
&= \alpha\left(\left(3\sqrt{2}/16\right) \cdot (35t^4 - 30t^2 + 3)\right)
\end{aligned}
$$

biçiminde $[\overset{\alpha}{-}1_\alpha, 1_\alpha]_\alpha$ aralığı üstünde tanımlanan α-Legendre polinomları $\{P_0, P_1, P_3, P_4\}$ kümesini ortonormal olarak gösterelim. Burada

$$\langle P_i, P_j\rangle_\alpha = \alpha\text{-}\int_{-1_\alpha}^{1_\alpha} P_i(t) \overset{\alpha}{\cdot} P_j(t)dt \qquad i, j = 0, 1, 2, 3, 4$$

α- iç çarpımını kullanacağız. Bu durumda $i = 0, 1, 2, 3, 4$ için

$$\|P_i\|_\alpha = \alpha\text{-}\int_{1_\alpha}^{1_\alpha} (P_i(t))^{2_\alpha} dt \quad \text{olur.}$$

$\alpha\text{-}\int_{a_\alpha}^{b_\alpha} f\,(t)\,dt = \alpha\left(\int_{a_\alpha}^{b_\alpha} \alpha^{-1}\,(f\,(t))\,dt\right)$ olduğunu biliyoruz. $i = 0$ ve $i = 2$ için

$$
\begin{aligned}
\|P_0\|_\alpha &= \alpha\text{-}\int_{-1_\alpha}^{1_\alpha} \left(P_0(t) \overset{\alpha}{\cdot} P_0(t)\right) dt \\
&= \alpha\text{-}\int_{-1_\alpha}^{1_\alpha} \alpha\left(\alpha^{-1}\left(P_0(t)\right) \cdot \alpha^{-1}\left(P_0(t)\right)\right) dt \\
&= \alpha\text{-}\int_{-1_\alpha}^{1_\alpha} \alpha\left(\left(\sqrt{2}/2\right) \cdot \left(\sqrt{2}/2\right)\right) dt \\
&= \alpha\text{-}\int_{-1_\alpha}^{1_\alpha} \alpha\,(1/2)\,dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha\left(\int_{-1}^{1} \alpha^{-1}\left(\alpha\left(1/2\right)\right) dt\ \right) \\
&= \alpha\left(\left(1/2\right)-\left(-1/2\right)\right) \\
&= \alpha\left(1\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\|P_2\right\|_\alpha &= \alpha\text{-}\int_{-1_\alpha}^{1_\alpha} \left(P_2(t) \overset{\alpha}{\cdot} P_2(t)\right) dt \\
&= \alpha\text{-}\int_{-1_\alpha}^{1_\alpha} \alpha\left(\alpha^{-1}\left(P_2(t)\right) \cdot \alpha^{-1}\left(P_2(t)\right)\right) dt \\
&= \alpha\text{-}\int_{-1_\alpha}^{1_\alpha} \alpha\left(\left(\left(\sqrt{10}/\ 4\right) \cdot \left(3t^2-1\right)\right) \cdot \left(\left(\sqrt{10}/\ 4\right) \cdot \left(3t^2-1\right)\right)\right) dt \\
&= \alpha\text{-}\int_{-1_\alpha}^{1_\alpha} \alpha\left(\left(90t^4-60t^2+10\right)/16\right) dt \\
&= \alpha\left(\int_{-1}^{1} \alpha^{-1}\left(\alpha\left(\left(90t^4-60t^2+10\right)/16\right)\right) dt\right) \\
&= \alpha\left(\int_{-1}^{1} \left(\left(90t^4-60t^2+10\right)/16\right) dt\right) \\
&= \alpha\left(\left(1/16\right)\left(90t^5/5-60t^3/3+10t\right)\right) \\
&= \alpha\left(\left(1/16\right)\left(90/5-60/3+10\right)-\left(-90/5\right)+60/3-10\right) \\
&= \alpha\left(\left(1/16\right)\left(8-\left(-8\right)\right)\right) \\
&= \alpha\left(\left(1/16\right)16\right) \\
&= \alpha\left(1\right) \\
&= 1_\alpha
\end{aligned}
$$

sağlanır.

Benzer şekilde

$$\|P_1\|_\alpha = \|P_3\|_\alpha = \|P_4\|_\alpha = 1_\alpha$$

bulunur. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
\langle P_0, P_2\rangle_\alpha &= \alpha\text{-}\int_{-1_\alpha}^{1_\alpha} P_0(t) \overset{\alpha}{\cdot} P_2(t)dt \\
&= \alpha\text{-}\int_{-1_\alpha}^{1_\alpha} \alpha\left(\alpha^{-1}\left(P_0(t)\right) \cdot \alpha^{-1}\left(P_2(t)\right)\right) dt \\
&= \alpha\text{-}\int_{-1_\alpha}^{1_\alpha} \alpha\left(\left(\sqrt{2}/2\right) \cdot \left(\sqrt{10}/4\right) \cdot \left(3t^2 - 1\right)\right) dt \\
&= \alpha\text{-}\int_{-1_\alpha}^{1_\alpha} \alpha\left(\left(3\sqrt{5}t^2 - \sqrt{5}\right)\ / \ 4\right) dt \\
&= \alpha\left(\int_{-1}^{1} \alpha^{-1}\left(\alpha\left(\left(3\sqrt{5}t^2 - \sqrt{5}\right)\ / \ 4\right)\right) dt\ \right) \\
&= \alpha\left(\int_{-1}^{1} \left(\left(3\sqrt{5}t^2 - \sqrt{5}\right)\ / \ 4\right) dt\ \right) \\
&= \alpha\left(\left(\sqrt{5}/4\right) \cdot 0\right) \\
&= \alpha\left(0\right) \\
&= 0_\alpha
\end{aligned}$$

olduğundan $P_0 \overset{\alpha}{\perp} P_2$ sağlanır. Benzer şekilde her $i, j = 0, 1, 2, 3, 4$ $(i \neq j)$ için

$$\langle P_i, P_j\rangle_\alpha = 0_\alpha$$

olduğundan $P_i \overset{\alpha}{\perp} P_j$ olur.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, bir üreteç yardımıyla reel sayılar cismine eşdeğer olan, sıralı cisimlerde değer alan ve üretilen iç çarpımlar diye adlandırılan dönüşümler tanımlandı. Tanımlanan bu dönüşümler üzerinde seçilen üreteçlere göre yeni kavramların farklılıkları ortaya çıkarılıp, bu dönüşümlerin sınırlılıkları, ortonormallikleri, lineerlikleri incelendi ve bu kavramlar üzerine birtakım sonuçlar verildi. Bu çalışmanın asıl amacı olan üretilen vektör uzaylar ve üretilen iç çarpım uzaylarında verilen bazı teoremler, ispatlar ve örnekler seçilen üreteçlere göre yeniden yorumlanmıştır. Üretilen iç çarpım uzaylarının yapısı operatörlerin karakteristik özelliklerini belirledi. Elde edilenlerden yararlanılarak, üretilen iç çarpım uzayları ve üzerlerinde tanımlı operatörlerin çalışmalarına devam edilip, bu tezde elde edilen genişetilmiş yoruma katkı sağlanabilir.

KAYNAKLAR

1. Tony, C., (2011). *The Big Questions: Mathematics*, London: Random House Publisher Services, 85-87.

2. Çakmak, A. F. and Başar, F. (2012). Some new results on sequence spaces with respect to non-Newtonian calculus. *Journal of Inequalities and Applications*, 2012(228), 17.

3. Grossman, M. and Katz, R. (1972). *Non-Newtonian calculus.* Pigeon Cove, Massachusetts: Lee Press, 32-51, 75-88.

4. Bashirov, A. E., Kurpınar Mısırlı E. and Özyapıcı, A. (2008). Multiplicative calculus and its applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 337(1), 36-48.

5. Bashirov, A.E., Mısırlı, E., Tandoğdu and Y., Özyapıcı, A. (2011). On modeling with multiplicative differential equations. *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, 26(4), 425–438.

6. Çakmak, A. F. and Başar, F. (2014). Certain Spaces of Functions over the Field of Non-Newtonian Complex Numbers. *Abstract and Applied Analysis*, 15(2), 12.

7. Mısırlı, E. and Gurefe, Y. (2011). Multiplicative Adams Bashforth–Moulton methods. *Numerical Algorithms*, 57(4), 425-439.

8. Binbaşıoğlu, D., Demiriz, S. and Türkoğlu, D. (2016). Fixed points of non-Newtonian contraction mappings on non-Newtonian metric spaces. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 18(1), 213-224.

9. Tekin, S. and Başar, F. (2013). Certain sequence spaces over the non-newtonian complex field. *Abstract and Applied Analysis*, 14(3), 11.

10. Grossman, M. (1983). *Bigeometric calculus: A system with a scale-free derivative.* Rockport, Massachusetts: Archimedes Foundation, 54-93.

11. Cohen, G. (2003). *A Course in Modern Analysis and its Applications.* New York: Cambridge University, 174-250.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	:	SEYFE, Ezgi
Uyruğu	:	T.C
Doğum tarihi ve yeri	:	29.06.1991 Nevşehir
Medeni hali	:	Evli
Telefon	:	0552 282 74 18
e-mail	:	ezgi.es@hotmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik Böl.	Devam ediyor
Lisans	Ankara Üniversitesi/Matematik Böl.	2016
Lise	Sıddık Demir Anadolu Lisesi	2009

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2015-2018	Zafer Tek Yıldız Lisesi	Geometri Öğretmeni
2015-2016	Mamak Anadolu İmamhatip Lisesi	Matematik Öğretmeni
2012-2014	Açı Eğitim Kurumları	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

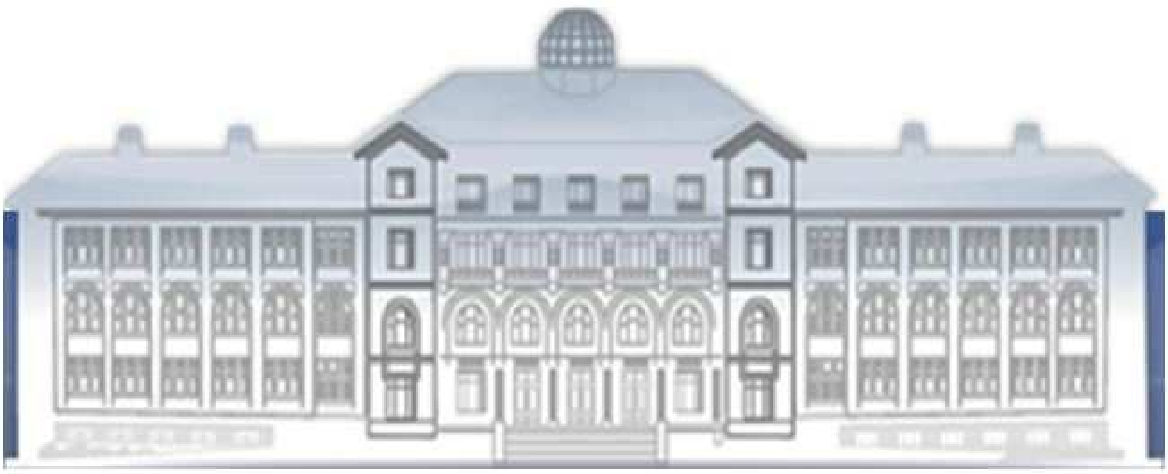
İngilizce

Yayınlar

Seyfe, E. (2019, Mart). *Üretilen iç çarpım uzayları.* 2. Uluslararası İstatistik Matematik ve Analitik Yöntemler Kongresi Günlerinde sunuldu, Ankara.

Hobiler

Kitap okuma, müzik dinleme.



GAZİ GELECEKTİR...