
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

Bİ-PERİYODİK BALANS SAYILARI VE KUATERNİYONLARI

Emre SEVGİ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AĞUSTOS 2020

Emre SEVGİ tarafından hazırlanan "Bİ-PERİYODİK BALANS SAYILARI VE KUATERNİYONLARI" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Dursun TAŞCI
Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. .....

Başkan: Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU
Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. .....

Üye: Prof. Dr. Naim TUĞLU
Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. .....

Üye: Prof. Dr. Ayşe Çiğdem ÖZCAN
Matematik Ana Bilim Dalı, Hacettepe Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. .....

Üye: Prof. Dr. Ercan ALTINIŞIK
Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. .....

Tez Savunma Tarihi: 05/08/2020

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Emre SEVGİ

05/08/2020

Bİ-PERİYODİK BALANS SAYILARI VE KUATERNİYONLARI

(Doktora Tezi)

Emre SEVGİ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ağustos 2020

ÖZET

Bu tez çalışmasında, bi-periyodik balans sayı dizisi tanımlanmış, bu dizi için karakteristik denklem, üreteç fonksiyonu, Binet formülü gibi bazı temel kavramlar elde edilmiştir. Daha sonra bi-periyodik balans matris dizisi verilmiş olup bu dizinin bazı özellikleri elde edilmiştir. Son olarak bi-periyodik balans kuaterniyonlarının tanımı verilip bi-periyodik balans sayıları ve kuaterniyonları için Catalan, Cassini ve d'Ocagne gibi bazı önemli eşitlikler elde edilmiş ve bi-periyodik balans sayıları ile kuaterniyonları arasındaki ilişki verilmiştir.

Bilim Kodu : 20401
Anahtar Kelimeler : Balans sayıları, Bi-periyodik balans dizisi, Kuaterniyon
Sayfa Adedi : 56
Danışman : Prof. Dr. Dursun TAŞCI

BI-PERIODIC BALANCING NUMBERS AND QUATERNIONS
(Ph. D. Thesis)

Emre SEVGİ

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
August 2020

ABSTRACT

In this thesis study, bi-periodic balancing sequence is defined, some basic concepts for this sequence such as characteristic equation, generating function, Binet formula were given. Then, bi-periodic balancing matrix sequence was given and some properties for this sequence were examined. Finally, the definition of bi-periodic balancing quaternions was given, some important equalities such as Catalan, Cassini and d'Ocagne for bi-periodic balancing numbers and quaternions were given and the relationship between the bi-periodic balancing numbers and quaternions were given.

Science Code : 20401
Key Words : Balancing numbers, Bi-periodic balancing sequence, Quaternions
Page Number : 56
Supervisor : Prof. Dr. Dursun TAŞCI

TEŞEKKÜR

Akademik çalışmalarım boyunca her zaman yol gösterici olan, tecrübesinden fazlasıyla istifade ettiğim, yaşadığım her zorlukta yardımlarını, desteklerini ve bilgi birikimini esirgemeyen değerli hocam Sayın Prof. Dr. Dursun TAŞCI' ya sonsuz teşekkür ederim.

Bilgi ve tecrübeleriyle çalışmalarımda desteklerini esirgemeyen değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Naim TUĞLU, Sayın Prof. Dr. Ercan ALTINIŞIK ve Sayın Prof. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE' ye çok teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, her zaman yanımda olan kıymetli babam Necdet SEVGİ, kıymetli annem Fatma SEVGİ ve sevgili kardeşlerim Emin SEVGİ ve Emine SEVGİ' ye çok teşekkür ederim.

Sabrı, sevgisi, bilgisi ve anlayışıyla daima yanımda olan çok sevdiğim, değerli eşim Fatma YILMAZ SEVGİ' ye ve biricik oğlum Muhammed SEVGİ' ye sonsuz teşekkür ederim.

2211-Yurt içi Doktora Burs Programı kapsamında sağladığı destekten dolayı TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı birimine teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

SİMGELER VE KISALTMALAR viii

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL KAVRAMLAR 3

2.1. Temel Kavramlar 3

2.2. Bazı Tamsayı Dizileri 4

3. Bİ-PERİYODİK BALANS SAYILARI VE ÖZELLİKLERİ 11

3.1. Bi-periyodik Balans Sayıları 11

3.2. Bazı Özel Eşitlikler ve Toplam Formülleri 20

3.3. Bi-periyodik Balans Matris Dizisi 33

4. Bİ-PERİYODİK BALANS KUATERNİYONLARI 39

4.1. Bi-periyodik Balans Kuaterniyonları 39

4.2. Bazı Özel Eşitlikler 44

5. SONUÇ ve ÖNERİLER 49

KAYNAKLAR 51

ÖZGEÇMİŞ 55

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{\lfloor a \rfloor}$	a sayısının taban fonksiyonu
$\boldsymbol{B_n}$	$n.$ balans sayısı
$\boldsymbol{B_n^k}$	$n.$ $k-$balans sayısı
$\boldsymbol{\check{B}}$	$n.$ bi-periyodik balans kuaterniyonu
$\boldsymbol{\mathcal{B}_{k+1}}$	Bi-periyodik balans matris dizisinin $n.$ terimi
$\boldsymbol{b_n}$	$n.$ bi-periyodik balans sayısı
$\boldsymbol{C_n}$	$n.$ Lucas-balans sayısı
$\boldsymbol{F_n}$	$n.$ Fibonacci sayısı
$\boldsymbol{L_n}$	$n.$ Lucas sayısı
$\boldsymbol{l_n}$	$n.$ bi-periyodik Lucas sayısı
$\boldsymbol{q_n}$	$n.$ bi-periyodik Fibonacci sayısı
$\boldsymbol{T_n}$	$n.$ üçgensel sayı

1. GİRİŞ

Geçmişten günümüze matematikte bir çok tamsayı dizisi tanımlanmıştır. Bunlardan en bilinen ve en özeli olan Fibonacci dizisi, Fibonacci adıyla bilinen Leonardo Pisano tarafından Liber Abaci adlı eserinde tavşan popülasyonunun gelişimini hesaplamak için tanımlanmıştır [1, 2].

Altın oran ve Fibonacci dizisinin, bitkilerin gelişimi ve bazı katı cisimlerin kristalografik yapısından, veri tabanları ve bilgisayar algoritmalarına kadar sayısız alanda uygulamaları vardır [3].

Fibonacci dizisinin özelliklerini ve bağlantılı sayı dizilerini araştıran François Edouard Anatole Lucas, kendi adıyla bilinen ve Fibonacci dizisinin rekürans bağıntısını sağlayan Lucas dizisini tanımlamıştır [4].

Edson ve Yayenie [5, 6], bi-periyodik Fibonacci adı altında Fibonacci dizisinin bir genelleştirmesini tanımlamışlardır. Bu çalışmadan esinlenerek Bilgici [7] bi-periyodik Lucas dizisini, Uygun ve Owusu [8] ise bi-periyodik Jacobsthal dizisini tanımlamışlardır. Kızılateş ve diğerleri [9], bi-periyodik Fibonacci ve Lucas polinomlarının q-genelleştirmesi üzerine çalışmışlardır. Taşcı ve Kızılırmak ise bi-periyodik Fibonacci ve Lucas dizilerinin periyotları üzerine çalışmışlardır [10, 11]. Yine Tan [12], bi-periyodik Fibonacci ve Lucas sayıları için bazı toplam formülleri elde etmiştir.

Benzer şekilde bir çok sayı dizisi tanımlanmıştır [13–16]. Bunlardan biri de bu tez çalışmasının temeli olan Behera ve Panda [17] tarafından tanımlanan balans sayı dizisidir. Bu çalışmadan sonra balans sayı dizisinin bazı özel ve genelleştirilmiş halleri üzerine çalışmalar olmuştur [18–20].

Kuaterniyon tanımı kullanılarak, Horadam [21] tarafından Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları tanımlanmıştır. Daha sonra Halıcı [22], Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları için üreteç fonksiyonu ve Binet formülü elde etmiştir. Kızılateş ve diğerleri [23], bikompleks genelleştirilmiş tribonacci dizisini tanımlamış ve bazı özelliklerini elde etmişlerdir. Son olarak Tan ve diğerleri [24], bi-periyodik Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarını tanımlamışlardır.

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde diğer bölümlerde kullanılacak temel kavramlar verilmiştir. Ayrıca bazı tamsayı dizileriyle ilgili genel özellikler ve dizilerin birbiriyle ilişkisi üzerine çalışılmıştır.

Üçüncü bölümde öncelikle bi-periyodik balans dizisi tanımlanmış, dizinin karakteristik denklemi, üreteç fonksiyonu ve Binet formülü elde edilmiştir. Aynı zamanda bu diziyle ilgili bazı özel eşitlikler ve toplam formülleri tanımlanmıştır. Son olarak bi-periyodik balans matris dizisi tanımlanmış ve bazı özellikleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde bi-periyodik balans kuaterniyonları ve bu kuaterniyonlar için bazı özellikler verilmiştir. Daha sonra bi-periyodik balans sayıları ve kuaterniyonları arasındaki bazı bağıntılar tanımlanmıştır.

Beşinci bölümde ise, sonuç ve öneriler verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan tamsayı dizileri için önemli olan bazı temel kavramların tanımları verilmiştir. Ayrıca literatürde en temel tamsayı dizileri olarak bilinen Fibonacci ve Lucas dizilerinin tanımları verilmiş olup bazı önemli özellikleri incelenmiştir. Daha sonra bu tez çalışmasının temelini oluşturan balans sayıları ve diğer bölümde tanımlanacak olan bi-periyodik balans dizisini oluştururken esinlendiğimiz bi-periyodik Fibonacci ve Lucas dizilerinin tanımları ve özellikleri incelenmiştir.

2.1. Temel Kavramlar

2.1.1. Tanım (Rekürans Bağıntısı)

Bir dizinin her bir terimi, kendinden önceki terimlerden yararlanılarak bir bağıntı yardımıyla elde edilir. Tanımlanan bu bağıntıya dizinin rekürans bağıntısı denir [25, 26].

2.1.2. Tanım (Binet Formülü)

Bir rekürans bağıntısını fark denklemi olarak çözerken karakteristik denklemin kökleri yardımıyla dizinin n. terimini veren kapalı forma Binet formülü denir [27, 28].

2.1.3. Tanım (Üreteç Fonksiyonu)

a_0, a_1, a_2, ... şeklindeki tamsayı dizisi için

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

kuvvet serisi açılımına bu dizinin üreteç fonksiyonu denir [1, 29].

Dizinin n. terimi $g(x)$ üreteç fonksiyonunda x^n teriminin katsayısıdır.

2.1.4. Tanım (Diophantine Denklemi)

Genellikle iki veya daha fazla bilinmeyenli ve sadece tam sayı çözümü olan polinom denklemine Diophantine denklemi denir [25].

2.1.5. Tanım (Üçgensel Sayı)

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\frac{n(n+1)}{2}$ formundaki sayıya üçgensel sayı denir.

Üçgensel sayılar $T_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 1$ için $T_{n+1} = T_n + (n+1)$ rekürans bağıntısını sağlar.

2.1.6. Tanım (Kuaterniyon)

e_1, e_2, e_3; $\mathbb{R}^3$ vektör uzayının standart ortonormal tabanı, $e_0 = 1$ ve $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$q = a_0e_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$$

şeklinde tanımlanan ifadeye kuaterniyon denir [31].

Burada e_1, e_2, e_3 için

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1$$

ve

$$e_1e_2 = e_3 = -e_2e_1, e_2e_3 = e_1 = -e_3e_2, e_3e_1 = e_2 = -e_1e_3$$

kuaterniyon çarpım kuralları sağlanır.

$q = a_0e_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ kuaterniyonunun eşleniği

$$\overline{q} = a_0e_0 - a_1e_1 - a_2e_2 - a_3e_3$$

şeklinde tanımlanır.

2.2. Bazı Tamsayı Dizileri

2.2.1. Tanım (Fibonacci Dizisi)

Her $n \geq 2$ tamsayısı için

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
rekürans bağıntısı ve

$F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$

başlangıç şartları ile tanımlanan $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ tamsayı dizisine Fibonacci dizisi denir [1].

Fibonacci dizisinin bazı terimleri

$\{F_n\} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots\}$

şeklindedir.

Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi

$x^2 - x - 1 = 0$

olarak elde edilmiştir. Bu denklemin kökleri ise

$\phi_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\phi_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

şeklindedir.

Karakteristik denklemin pozitif kökü olan $\phi_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803398875\ldots$ altın oran diye adlandırılan doğada ve bütün bilimlerde karşımıza çıkan sayıdır. Ünlü Alman matematikçi ve astronom Johannes Kepler, Fibonacci dizisinin terimleri büyüdükçe ardışık iki terimin oranının altın orana yakınsadığını keşfetmiştir. Ayrıca n çift sayı olduğunda $F_{n+1}/F_n > \phi_1$ iken n tek sayı olduğunda $F_{n+1}/F_n < \phi_1$ şeklindedir.

Fibonacci dizisinin karakteristik denkleminin köklerine bağlı olarak

$F_n = \dfrac{\phi_1^n - \phi_2^n}{\phi_1 - \phi_2}$

şeklinde Fibonacci dizisinin Binet formülü elde edilmiştir.

2.2.2. Tanım (Lucas Dizisi)

Her $n \geq 2$ tamsayısı için
$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$

rekürans bağıntısı ve

$L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$

başlangıç şartları ile tanımlanan $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ tamsayı dizisine Lucas dizisi denir [1].

Lucas dizisinin bazı terimleri

$\{L_n\} = \{2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \ldots\}$

şeklindedir.

Lucas dizisinin karakteristik denklemi, Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi ile aynıdır. Dolayısıyla ϕ_1 ve ϕ_2 aynı zamanda Lucas dizisinin karakteristik denkleminin de kökleridir. Yine aynı köklere bağlı olarak Lucas dizisinin Binet formülü

$L_n = \phi_1^n + \phi_2^n$

şeklinde elde edilmiştir.

2.2.3. Tanım (Jacobsthal Dizisi)

Her $n \geq 2$ tamsayısı için

$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$

rekürans bağıntısı ve

$J_0 = 0$ ve $J_1 = 1$

başlangıç şartları ile tanımlanan $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ tamsayı dizisine Jacobsthal dizisi denir [1].

2.2.4. Tanım (Balans Sayıları)

Her $n \geq 2$ tamsayısı için

$B_n = 6B_{n-1} - B_{n-2}$

rekürans bağıntısı ve

$B_0 = 0$ ve $B_1 = 1$

başlangıç şartları ile tanımlanan $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ tamsayı dizisine balans sayı dizisi denir [17].

Balans sayı dizisinin bazı terimleri

$\{B_n\} = \{0, 1, 6, 35, 204, 1189, 6930, \ldots\}$

şeklindedir.

Behera ve Panda,

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+r) \tag{2.1}$$

Diophantine denkleminin çözümü olan n sayısını balans sayısı, buna karşılık gelen r tamsayısını dengeleyici olarak tanımlamışlardır [17].

Örneğin;

$1 + 2 + 3 + 4 + (6-1) = (6+1) + (6+2)$

olduğundan 6 bir balans sayısı ve 2 bu balans sayısının dengeleyicisidir.

T_n ile $\dfrac{n(n+1)}{2}$ şeklindeki n. üçgensel sayıyı gösterirsek (2.1) denklemi r tamsayısı için

$T_{n-1} + T_n = T_{n+r}$

şeklindeki denkleme indirgenir.

Örneğin;

$$\begin{aligned} T_{34} + T_{35} &= 595 + 630 \\ &= 1225 \\ &= T_{49} \end{aligned}$$

olduğundan 35 bir balans sayısı ve 14 bu balans sayısının dengeleyicisidir.

2.2.5. Tanım (Lucas-balans Sayıları)

Her $n \geq 2$ tamsayısı için

$C_n = 6C_{n-1} - C_{n-2}$

rekürans bağıntısı ve

$C_0 = 1$ ve $C_1 = 3$

başlangıç şartları ile tanımlanan $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ tamsayı dizisine Lucas-balans sayı dizisi denir [26].

Lucas-balans sayı dizisinin bazı terimleri

$\{C_n\} = \{1, 3, 17, 99, 577, \ldots\}$

şeklindedir.

Balans sayılarıaşağıdaki özelliklere sahiptir [26]:

- n sayısının bir balans sayısı olması için gerek ve yeter şart $8n^2 + 1$ sayısının tam kare olmasıdır. $\sqrt{8n^2 + 1}$ sayısı ise bir Lucas-balans sayısıdır.
- Herhangi iki balans sayısının en büyük ortak böleni yine bir balans sayısıdır.
- $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $m|n$ olması için gerek ve yeter şart $B_m|B_n$ olmasıdır.
- İlk n tek balans sayısının toplamı n. balans sayısının karesine eşittir.
- Bir balans sayısının karesi bir üçgensel sayıdır.

2.2.6. Tanım (k-Balans Sayıları)

Her $n \geq 2$ ve $k \geq 1$ tamsayıları için

$B_n^k = 6kB_{n-1}^k - B_{n-2}^k$

rekürans bağıntısı ve

$B_0^k = 0$ ve $B_1^k = 1$

başlangıç şartları ile tanımlanan $\left\{B_n^k\right\}_{n=0}^{\infty}$ tamsayı dizisine $k-$balans sayı dizisi denir [30].

2.2.7. Tanım (Bi-periyodik Fibonacci dizisi)

Herhangi sıfırdan farklı a ve b reel sayıları ve $n \geq 2$ tamsayısı için $q_0 = 0$ ve $q_1 = 1$ başlangıç şartları ve

$$q_n = \begin{cases} aq_{n-1} + q_{n-2}, & n \text{ çift ise} \\ bq_{n-1} + q_{n-2}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlı diziye $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ bi-periyodik Fibonacci dizisi denir [5].

2.2.8. Tanım (Bi-periyodik Lucas dizisi)

Herhangi sıfırdan farklı a ve b reel sayıları ve $n \geq 2$ tamsayısı için

$l_0 = 2$ ve $l_1 = a$ başlangıç şartları

ve

$$l_n = \begin{cases} bl_{n-1} + l_{n-2}, & n \text{ çift ise} \\ al_{n-1} + l_{n-2}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlı diziye $\{l_n\}_{n=0}^{\infty}$ bi-periyodik Lucas dizisi denir [7].

3. Bİ-PERİYODİK BALANS SAYILARI VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde tez çalışmamızın ana konusu olan bi-periyodik balans sayıları tanımlanmış, karakteristik denklemi, üreteç fonksiyonu, Binet formülü elde edilmiştir. Ayrıca bu dizi için bazı önemli eşitlikler ve toplam formülleri üzerinde çalışılmıştır. Daha sonra bi-periyodik balans matris dizisi ve özellikleri verilmiştir.

3.1. Bi-periyodik Balans Sayıları

3.1.1. Tanım

Herhangi sıfırdan farklı c ve d reel sayıları ve $n \geq 2$ tamsayısı için

$b_0 = 0$ ve $b_1 = 1$ başlangıç şartları

ve

$$b_n = \begin{cases} 6cb_{n-1} - b_{n-2}, & n \text{ çift ise} \\ 6db_{n-1} - b_{n-2}, & n \text{ tek ise} \end{cases} \tag{3.1}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlı diziye $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ bi-periyodik balans dizisi denir.

- $c = d = 1$ ise balans sayıları $\{0, 1, 6, 35, 204, 1189, 6930, \cdots\}$,
- $c = d = k$ ise $k-$balans sayıları

elde edilir.

Bi-periyodik balans sayılarının ilk beş elemanı

$b_0 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = 6c$, $b_3 = 36cd - 1$, $b_4 = 216c^2d - 12c$

dir.

Bu dizinin karakteristik denklemi

$$x^2 - 6cdx + cd = 0 \tag{3.2}$$

olup bu denklemin kökleri

$\alpha = 3cd + \sqrt{9c^2d^2 - cd}$, $\beta = 3cd - \sqrt{9c^2d^2 - cd}$

dır.

3.1.2. Yardımcı Teorem

Bi-periyodik balans sayılarının çift ve tek terimleri arasında sırasıyla

$$b_{2n} = (36cd - 2)b_{2n-2} - b_{2n-4}$$

ve

$$b_{2n+1} = (36cd - 2)b_{2n-1} - b_{2n-3}$$

eşitlikleri vardır.

İspat

Bi-periyodik balans sayılarının rekürans bağıntısı (3.1) kullanılarak

$$\begin{aligned} b_{2n} &= 6cb_{2n-1} - b_{2n-2} \\ &= 6c(6db_{2n-2} - b_{2n-3}) - b_{2n-2} \\ &= (36cd - 1)b_{2n-2} - 6cb_{2n-3} \\ &= (36cd - 1)b_{2n-2} - (b_{2n-2} + b_{2n-4}) \\ &= (36cd - 2)b_{2n-2} - b_{2n-4} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} b_{2n+1} &= 6db_{2n} - b_{2n-1} \\ &= 6d(6cb_{2n-1} - b_{2n-2}) - b_{2n-1} \\ &= (36cd - 1)b_{2n-1} - 6db_{2n-2} \\ &= (36cd - 1)b_{2n-1} - (b_{2n-1} + b_{2n-3}) \\ &= (36cd - 2)b_{2n-1} - b_{2n-3} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

3.1.3. Yardımcı Teorem

Bi-periyodik balans sayılarının karakteristik denklemi (3.2) nin kökleri α ve β;

- $(6\alpha - 1)(6\beta - 1) = 1$
- $\alpha\beta = cd$
- $\alpha + \beta = 6cd$
- $6\alpha - 1 = \dfrac{\alpha^2}{cd}$
- $6\beta - 1 = \dfrac{\beta^2}{cd}$
- $(6\alpha - 1)\beta = \alpha$
- $(6\beta - 1)\alpha = \beta$

özelliklerini sağlar.

İspat

Bi-periyodik balans sayılarının karakteristik denklemi (3.2) nin kökleri olan α ve β; kullanılarak

- $$\begin{aligned}(6\alpha - 1)(6\beta - 1) &= \left(6(3cd + \sqrt{9c^2d^2 - cd}) - 1\right)\left(6(cd - \sqrt{9c^2d^2 - cd}) - 1\right) \\ &= (18cd)^2 - 108cd\sqrt{9c^2d^2 - cd} - 18cd \\ &\quad + 108cd\sqrt{9c^2d^2 - cd} - 36\left(9c^2d^2 - cd\right) - 6\sqrt{9c^2d^2 - cd} \\ &\quad - 18cd + 6\sqrt{9c^2d^2 - cd} + 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\alpha\beta &= (3cd + \sqrt{9c^2d^2 - cd})(3cd - \sqrt{9c^2d^2 - cd}) \\ &= (3cd)^2 - 3cd\sqrt{9c^2d^2 - cd} + 3cd\sqrt{9c^2d^2 - cd} - \left(9c^2d^2 - cd\right) \\ &= cd\end{aligned}$$

- $\alpha + \beta = (3cd + \sqrt{9c^2d^2 - cd}) + (3cd - \sqrt{9c^2d^2 - cd})$
  $= cd$

- $6\alpha - 1 = 18cd + 6\sqrt{9c^2d^2 - cd} - 1$
  $= \left(18cd + 6\sqrt{9c^2d^2 - cd} - 1\right)\frac{cd}{cd}$
  $= \frac{18c^2d^2 + 6cd\sqrt{9c^2d^2 - cd} - cd}{cd}$
  $= \frac{9c^2d^2 + 6cd\sqrt{9c^2d^2 - cd} + (9c^2d^2 - cd)}{cd}$
  $= \frac{\alpha^2}{cd}$

- $6\beta - 1 = 18cd - 6\sqrt{9c^2d^2 - cd} - 1$
  $= \left(18cd - 6\sqrt{9c^2d^2 - cd} - 1\right)\frac{cd}{cd}$
  $= \frac{18c^2d^2 - 6cd\sqrt{9c^2d^2 - cd} - cd}{cd}$
  $= \frac{9c^2d^2 - 6cd\sqrt{9c^2d^2 - cd} + (9c^2d^2 - cd)}{cd}$
  $= \frac{\beta^2}{cd}$

- $(6\alpha - 1)\beta = \frac{\alpha^2}{cd}\beta$
  $= \alpha\frac{\alpha\beta}{cd}$
  $= \alpha\frac{cd}{cd}$
  $= \alpha$

- $(6\beta - 1)\alpha = \frac{\beta^2}{cd}\alpha$

$$= \beta \frac{\beta\alpha}{cd}$$
$$= \beta \frac{cd}{cd}$$
$$= \beta$$

eşitlikleri elde edilir.

3.1.4. Teorem

Bi-periyodik balans sayıları $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ için üreteç fonksiyonu

$$B(x) = \frac{x(x^2 + 6cx + 1)}{1 - (36cd - 2)x^2 + x^4}$$

şeklindedir.

İspat

$\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ bi-periyodik balans sayıları için üreteç fonksiyonunun kuvvet serisi açılımı

$$B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_r x^r + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$$

dir.

Bu seriyi $6dx$ ve x^2 ile çarparak sırasıyla

$$6dxB(x) = 6db_0 x + 6db_1 x^2 + 6db_2 x^3 + \cdots + 6db_r x^{r+1} + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty} 6db_{m-1} x^m$$

ve

$$x^2 B(x) = b_0 x^2 + b_1 x^3 + b_2 x^4 + \cdots + b_r x^{r+2} + \cdots = \sum_{m=2}^{\infty} b_{m-2} x^m$$

serileri elde edilir. Buradan

$$(1 - 6dx + x^2)B(x) = b_0 + b_1 x - 6db_0 x + \sum_{m=2}^{\infty} (b_m - 6db_{m-1} + b_{m-2}) x^m \tag{3.3}$$

eşitliği elde edilir.

$b_{2m+1} = 6db_{2m} - b_{2m-1}$ ve $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ olduğundan eşitlik (3.3)

$$(1 - 6dx + x^2)B(x) = x + \sum_{m=1}^{\infty} (b_{2m} - 6db_{2m-1} + b_{2m-2})x^{2m}$$

eşitliğine indirgenir.

$b_{2m} = 6cb_{2m-1} - b_{2m-2}$ olduğundan

$$\begin{aligned}(1 - 6dx + x^2)B(x) &= x + \sum_{m=1}^{\infty} 6(c-d)b_{2m-1}x^{2m} \\ &= x + 6(c-d)x\sum_{m=1}^{\infty} b_{2m-1}x^{2m-1}\end{aligned}$$

dir.

Şimdi

$$b(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m-1}x^{2m-1}$$

şeklinde $b(x)$ serisi tanımlanır.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}(1 - (36cd-2)x^2 + x^4)b(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m-1}x^{2m-1} - (36cd-2)\sum_{m=2}^{\infty} b_{2m-3}x^{2m-1} \\ &\quad + \sum_{m=3}^{\infty} b_{2m-5}x^{2m-1} \\ &= b_1x + b_3x^3 - (36cd-2)b_1x^3 \\ &\quad + \sum_{m=3}^{\infty}(b_{2m-1} - (36cd-2)b_{2m-3} + b_{2m-5})x^{2m-1}\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Yardımcı Teorem 3.1.2 nin sonucu olarak

$$b_{2m-1} - (36cd-2)b_{2m-3} + b_{2m-5} = 0 \tag{3.4}$$

olup (3.4) bir önceki eşitlikte yerine yazılırsa

$$(1-(36cd-2)x^2+x^4)b(x)=x+x^3$$

bulunur ve böylece $b(x)$ serisinin karşılığı

$$b(x)=\frac{x+x^3}{1-(36cd-2)x^2+x^4} \tag{3.5}$$

şeklinde elde edilir.

Eşitlik (3.5) , $B(x)$ serisinde yerine yazılırsa

$$(1-6dx+x^2)B(x)=x+6(c-d)x\left(\frac{x+x^3}{1-(36cd-2)x^2+x^4}\right)$$

eşitliği, buradan da bi-periyodik balans sayılarının üreteç fonksiyonu

$$B(x)=\frac{x(x^2+6cx+1)}{1-(36cd-2)x^2+x^4}$$

elde edilir.

3.1.5. Teorem

Bi-periyodik balans sayılarının Binet formülü

$$b_m=\left(\frac{c^{1-\xi(m)}}{(cd)^{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor}}\right)\frac{\alpha^m-\beta^m}{\alpha-\beta}$$

dir.

Burada α ve β; (3.2) de tanımlanan bi-periyodik balans sayılarının karakteristik denkleminin kökleri, $\lfloor a\rfloor$; a sayısının taban fonksiyonu ve $\xi(m)=m-2\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor$ şeklindedir.

İspat

Teorem 3.1.4 den bi-periyodik balans sayılarının üreteç fonksiyonu

$$B(x) = \frac{x(x^2 + 6cx + 1)}{1 - (36cd - 2)x^2 + x^4}$$

dir.

Basit kesirlere ayırma yöntemi kullanılarak, $B(x)$

$$B(x) = \frac{Ax + B}{x^2 - (6\alpha - 1)} + \frac{Cx + D}{x^2 - (6\beta - 1)}$$

şeklinde yazılır.

Buradan da

$$A = \frac{\alpha}{\alpha - \beta},\ B = \frac{c(6\alpha - 1)}{\alpha - \beta},\ C = \frac{-\beta}{\alpha - \beta},\ \text{ve}\ D = \frac{-c(6\beta - 1)}{\alpha - \beta}$$

eşitlikleri elde edilir.

Böylece

$$B(x) = \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\frac{c(6\alpha - 1) + \alpha x}{x^2 - (6\alpha - 1)} - \frac{c(6\beta - 1) + \beta x}{x^2 - (6\beta - 1)}\right]$$

şeklinde yazılır.

$\frac{E - Fx}{x^2 - G}$ fonksiyonunun Maclaurin seri açılımı

$$\frac{E - Fx}{x^2 - G} = \sum_{n=0}^{\infty} FG^{-n-1}x^{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} EG^{-n-1}x^{2n}$$

şeklinde olduğundan, $B(x)$ üreteç fonksiyonunun Maclaurin seri açılımı

$$B(x) = \frac{1}{\alpha - \beta}\sum_{m=0}^{\infty}(-\alpha)(6\alpha - 1)^{-m-1}x^{2m+1} - \frac{1}{\alpha - \beta}\sum_{m=0}^{\infty} c(6\alpha - 1)(\alpha - 1)^{-m-1}x^{2m}$$
$$- \frac{1}{\alpha - \beta}\sum_{m=0}^{\infty}(-\beta)(6\beta - 1)^{-m-1}x^{2m+1} + \frac{1}{\alpha - \beta}\sum_{m=0}^{\infty} c(6\beta - 1)(\beta - 1)^{-m-1}x^{2m}$$

eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
B(x) &= \frac{1}{\alpha-\beta}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{(6\alpha-1)^{m+1}}+\frac{\beta}{(6\beta-1)^{m+1}}\right)x^{2m+1} \\
&\quad -\frac{1}{\alpha-\beta}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{c}{(6\alpha-1)^{m}}-\frac{c}{(6\beta-1)^{m}}\right)x^{2m} \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{-\alpha(6\beta-1)^{m+1}+\beta(6\alpha-1)^{m+1}}{(6\alpha-1)^{m+1}(6\beta-1)^{m+1}}\right)x^{2m+1} \\
&\quad -\frac{1}{\alpha-\beta}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{c(6\beta-1)^{m}-c(6\alpha-1)^{m}}{(6\alpha-1)^{m}(6\beta-1)^{m}}\right)x^{2m} \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.1.3 deki özellikler kullanılarak, eşitlik (3.6)

$$\begin{aligned}
B(x) &= \frac{1}{\alpha-\beta}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{-\alpha\beta^{2m+2}}{(cd)^{m+1}}+\frac{\beta\alpha^{2m+2}}{(cd)^{m+1}}\right)x^{2m+1} \\
&\quad -\frac{1}{\alpha-\beta}\sum_{m=0}^{\infty}\left(c\frac{\beta^{2m}}{(cd)^{m}}-c\frac{\alpha^{2m}}{(cd)^{m}}\right)x^{2m} \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{-\beta^{2m+1}}{(cd)^{m}}+\frac{\alpha^{2m+1}}{(cd)^{m}}\right)x^{2m+1} \\
&\quad -\frac{1}{\alpha-\beta}\sum_{m=0}^{\infty}\left(c\frac{\beta^{2m}}{(cd)^{m}}-c\frac{\alpha^{2m}}{(cd)^{m}}\right)x^{2m} \\
&= \left(\frac{1}{cd}\right)^{m}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha^{2m+1}-\beta^{2m+1}}{\alpha-\beta}\right)x^{2m+1} \\
&\quad +c\left(\frac{1}{cd}\right)^{m}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha^{2m}-\beta^{2m}}{\alpha-\beta}\right)x^{2m} \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

eşitliğine indirgenir.

Teorem 3.1.5 de tanımlanan $\xi(m)$ fonksiyonu yardımıyla, eşitlik (3.7)

$$B(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{c^{1-\xi(m)}}{(cd)^{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor}}\left(\frac{\alpha^{m}-\beta^{m}}{\alpha-\beta}\right)x^{m}$$

şeklinde yazılır.

Sonuç olarak $m \geq 0$ için

$$b_m = \frac{c^{1-\xi(m)}}{(cd)^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor}} \left(\frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} \right)$$

bi-periyodik balans sayılarının Binet formülü elde edilir.

3.2. Bazı Özel Eşitlikler ve Toplam Formülleri

3.2.1. Teorem (Catalan Eşitliği)

$r \leq n$ olmak üzere, herhangi negatif olmayan n ve r tamsayıları için

$c^{\xi(n-r)} d^{1-\xi(n-r)} b_{n-r} b_{n+r} - c^{\xi(n)} d^{1-\xi(n)} b_n^2 = -c^{\xi(r)} d^{1-\xi(r)} b_r^2$ dir.

İspat

Bi-periyodik balans sayılarının Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} c^{\xi(n-r)} d^{1-\xi(n-r)} b_{n-r} b_{n+r} &= c^{\xi(n-r)} d^{1-\xi(n-r)} \left(\frac{c^{1-\xi(n-r)}}{(cd)^{\left\lfloor \frac{n-r}{2} \right\rfloor}} \right) \left(\frac{\alpha^{n-r} - \beta^{n-r}}{\alpha - \beta} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{c^{1-\xi(n+r)}}{(cd)^{\left\lfloor \frac{n+r}{2} \right\rfloor}} \right) \left(\frac{\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}}{\alpha - \beta} \right) \\ &= \left(\frac{c^{2-\xi(n-r)} d^{1-\xi(n-r)}}{(cd)^{n-\xi(n-r)}} \right) \left(\frac{\alpha^{n-r} - \beta^{n-r}}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}}{\alpha - \beta} \right) \\ &= \left(\frac{c}{(cd)^{n-1}} \right) \frac{\alpha^{2n} - (\alpha\beta)^{n-r} (\alpha^{2r} + \beta^{2r}) + \beta^{2n}}{(\alpha - \beta)^2} \end{aligned} \tag{3.8}$$

ve

$$\begin{aligned} c^{\xi(n)} d^{1-\xi(n)} b_n^2 &= c^{\xi(n)} d^{1-\xi(n)} \left(\frac{c^{2-2\xi(n)}}{(cd)^{2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}} \right) \frac{\alpha^{2n} - 2(\alpha\beta)^n + \beta^{2n}}{(\alpha - \beta)^2} \\ &= \left(\frac{c^{2-2\xi(n)} d^{1-\xi(n)}}{(cd)^{2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}} \right) \frac{\alpha^{2n} - 2(\alpha\beta)^n + \beta^{2n}}{(\alpha - \beta)^2} \end{aligned}$$

olup

$$c^{\xi(n)}d^{1-\xi(n)}b_n^2 = \left(\frac{c}{(cd)^{2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+\xi(n)-1}}\right)\frac{\alpha^{2n}-2(\alpha\beta)^n+\beta^{2n}}{(\alpha-\beta)^2}$$
$$= \left(\frac{c}{(cd)^{n-1}}\right)\frac{\alpha^{2n}-2(\alpha\beta)^n+\beta^{2n}}{(\alpha-\beta)^2} \tag{3.9}$$

eşitlikleri elde edilir. Eşitlik (3.8) den eşitlik (3.9) çıkarılarak

$$c^{\xi(n-r)}d^{1-\xi(n-r)}b_{n-r}b_{n+r} - c^{\xi(n)}d^{1-\xi(n)}b_n^2 = \left(\frac{c}{(cd)^{n-1}}\right)\frac{2(\alpha\beta)^n-(\alpha\beta)^{n-r}(\alpha^{2r}+\beta^{2r})}{(\alpha-\beta)^2}$$
$$= \left(\frac{-c}{(cd)^{n-1}}\right)(\alpha\beta)^{n-r}\frac{\alpha^{2r}-2\alpha^r\beta^r+\beta^{2r}}{(\alpha-\beta)^2}$$
$$= \left(\frac{-c}{(cd)^{n-1}}\right)(cd)^{n-r}\left(\frac{\alpha^r-\beta^r}{\alpha-\beta}\right)^2$$
$$= \frac{-c}{(cd)^{r-1}}\frac{(cd)^{2\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}}{c^{2-2\xi(r)}}b_r^2$$
$$= -c^{2\xi(r)-1}(cd)^{1-\xi(r)}b_r^2$$
$$= -c^{\xi(r)}d^{1-\xi(r)}b_r^2$$

Catalan eşitliği elde edilir.

3.2.2. Teorem (Cassini Eşitliği)

Herhangi negatif olmayan n tamsayısı için

$$c^{1-\xi(n)}d^{\xi(n)}b_{n-1}b_{n+1} - c^{\xi(n)}d^{1-\xi(n)}b_n^2 = -c$$

dir.

İspat

Cassini eşitliği, Catalan eşitliğinin $r = 1$ için özel bir hali olduğundan bir önceki ispatta $r = 1$ alınırsa Cassini eşitliği elde edilir.

3.2.3. Teorem (d'Ocagne Eşitliği)

$m \geq n$ olmak üzere, herhangi negatif olmayan m ve n tamsayıları için

$$c^{\xi(mn+m)}d^{\xi(mn+n)}b_m b_{n+1} - c^{\xi(mn+n)}d^{\xi(mn+m)}b_{m+1}b_n = c^{\xi(m-n)}b_{m-n}$$

dir.

İspat

Teorem 3.1.5 de tanımlanan $\xi(m) = m - 2\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ fonksiyonu için

$$\xi(m+1) + \xi(n) - 2\xi(mn+n) = \xi(m) + \xi(n+1) - 2\xi(mn+m) = 1 - \xi(m-n) \quad (3.10)$$

ve

$$\xi(m-n) = \xi(mn+m) + \xi(mn+n) \quad (3.11)$$

eşitlikleri vardır.

Bi-periyodik balans sayılarının Binet formülü, eşitlik (3.10) ve eşitlik (3.11) kullanılarak

$$c^{\xi(mn+m)}d^{\xi(mn+n)}b_m b_{n+1} = \left(\frac{c(cd)^{-n}}{(cd)^{\frac{m-n-\xi(m-n)}{2}}}\right)\frac{\alpha^{m+n+1} + \beta^{m+n+1} - (\alpha\beta)^n\left(\beta\alpha^{m-n} + \alpha\beta^{m-n}\right)}{(\alpha-\beta)^2}$$

ve

$$c^{\xi(mn+n)}d^{\xi(mn+m)}b_{m+1}b_n = \left(\frac{c(cd)^{-n}}{(cd)^{\frac{m-n-\xi(m-n)}{2}}}\right)\frac{\alpha^{m+n+1} + \beta^{m+n+1} - (\alpha\beta)^n\left(\alpha^{m-n+1} + \beta^{m-n+1}\right)}{(\alpha-\beta)^2}$$

eşitlikleri elde edilir.

Buradan da

$$c^{\xi(mn+m)}d^{\xi(mn+n)}b_m b_{n+1} - c^{\xi(mn+n)}d^{\xi(mn+m)}b_{m+1}b_n$$

ifadesinin karşılığı olarak

$$
\begin{aligned}
&c^{\xi(mn+m)}d^{\xi(mn+n)}b_m b_{n+1} - c^{\xi(mn+n)}d^{\xi(mn+m)}b_{m+1}b_n \\
&\quad = -\frac{c(cd)^{-n}}{(cd)^{\frac{m-n-\xi(m-n)}{2}}}\left[\frac{(\alpha\beta)^n\left(\beta\alpha^{m-n}+\alpha\beta^{m-n}-\alpha^{m-n+1}-\beta^{m-n+1}\right)}{(\alpha-\beta)^2}\right] \\
&\quad = -\frac{c(cd)^{-n}}{(cd)^{\left\lfloor\frac{m-n}{2}\right\rfloor}}(cd)^n\left[\frac{\beta\alpha^{m-n}+\alpha\beta^{m-n}-\alpha^{m-n+1}-\beta^{m-n+1}}{(\alpha-\beta)^2}\right] \\
&\quad = -\frac{c}{(cd)^{\left\lfloor\frac{m-n}{2}\right\rfloor}}\left[\frac{\alpha^{m-n}(\beta-\alpha)-\beta^{m-n}(\beta-\alpha)}{(\alpha-\beta)^2}\right] \\
&\quad = \frac{c}{(cd)^{\left\lfloor\frac{m-n}{2}\right\rfloor}}\left(\frac{\alpha^{m-n}-\beta^{m-n}}{\alpha-\beta}\right) \\
&\quad = \frac{c}{(cd)^{\left\lfloor\frac{m-n}{2}\right\rfloor}}\left(\frac{(cd)^{\left\lfloor\frac{m-n}{2}\right\rfloor}}{c^{1-\xi(m-n)}}\right)b_{m-n} \\
&\quad = c^{\xi(m-n)}b_{m-n}
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir.

3.2.4. Teorem

Herhangi negatif olmayan n ve k tamsayıları için

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}6^k(-1)^{n-k}(cd)^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor}c^{\xi(k)}b_k = b_{2n}$$

ve

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}6^k(-1)^{n-k}(cd)^{\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor}c^{\xi(k+1)-1}b_{k+1} = b_{2n+1}$$

eşitlikleri vardır.

İspat

Her k tamsayısı için

$$c\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta} = (cd)^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor}c^{\xi(k)}b_k \tag{3.12}$$

eşitliği vardır.

Eşitlik (3.12) kullanılarak

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}6^k(-1)^{n-k}(cd)^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}c^{\xi(k)}b_k$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}6^k(-1)^{n-k}c\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}\\
&= \frac{c}{\alpha-\beta}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(6\alpha)^k(-1)^{n-k}-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(6\beta)^k(-1)^{n-k}\right]\\
&= \frac{c}{\alpha-\beta}\left[(6\alpha-1)^n-(6\beta-1)^n\right]\\
&= \frac{c}{\alpha-\beta}\left[\left(\frac{\alpha^2}{cd}\right)^n-\left(\frac{\beta^2}{cd}\right)^n\right]\\
&= \frac{c}{(cd)^n}\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\alpha-\beta}\\
&= b_{2n}
\end{aligned}$$

ve

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}6^k(-1)^{n-k}(cd)^{\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}c^{\xi(k+1)-1}b_{k+1}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}6^k(-1)^{n-k}\frac{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}}{\alpha-\beta}\\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\alpha\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(6\alpha)^k(-1)^{n-k}-\beta\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(6\beta)^k(-1)^{n-k}\right]\\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\alpha(6\alpha-1)^n-\beta(6\beta-1)^n\right]\\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\alpha\left(\frac{\alpha^2}{cd}\right)^n-\beta\left(\frac{\beta^2}{cd}\right)^n\right]\\
&= \frac{1}{(cd)^n}\frac{\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1}}{\alpha-\beta}\\
&= b_{2n+1}
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

3.2.5. Teorem

Bi-periyodik balans sayı dizisinin negatif terimlerinin, pozitif terimleri cinsinden karşılığı

$$b_{-n} = -b_n$$

şeklindedir.

İspat

Bi-periyodik balans sayılarının Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} b_{-n} &= \frac{c^{1-\xi(-n)}}{(cd)^{\left\lfloor \frac{-n}{2} \right\rfloor}} \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{c^{1-\xi(n)}}{(cd)^{\left\lfloor \frac{-n}{2} \right\rfloor}} \frac{1/\alpha^n - 1/\beta^n}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{c^{1-\xi(n)}}{(cd)^{\left\lfloor \frac{-n}{2} \right\rfloor}} \frac{\beta^n - \alpha^n}{(cd)^n (\alpha - \beta)} \\ &= \frac{c^{1-\xi(n)}}{(cd)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}} \frac{\beta^n - \alpha^n}{\alpha - \beta} \\ &= -b_n \end{aligned}$$

elde edilir.

3.2.6. Teorem

Herhangi negatif olmayan n ve r tamsayıları için

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k c^{\xi(k)-1} d^{-\xi(k)} b_k b_{k+r} = \frac{1}{6cd} \left(b_{2n+1} b_{2n+r} - b_r \right)$$

dir.

İspat

r çift tamsayı olmak üzere, bi-periyodik balans sayılarının Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}
b_k b_{k+r} &= \left(\frac{c^{1-\xi(k)}}{(cd)^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor}}\right)\left(\frac{c^{1-\xi(k+r)}}{(cd)^{\left\lfloor \frac{k+r}{2} \right\rfloor}}\right)\left(\frac{\left(\alpha^k-\beta^k\right)\left(\alpha^{k+r}-\beta^{k+r}\right)}{(\alpha-\beta)^2}\right) \\
&= \frac{c^{2-\xi(k)-\xi(k+r)}}{(cd)^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor+\left\lfloor \frac{k+r}{2} \right\rfloor}}\left(\frac{\alpha^{2k+r}+\beta^{2k+r}-(\alpha\beta)^k(\alpha^r+\beta^r)}{(\alpha-\beta)^2}\right) \\
&= \frac{c^{2-2\xi(k)}}{(cd)^{\frac{r}{2}}(cd)^{k-\xi(k)}}\left(\frac{\alpha^{2k+r}+\beta^{2k+r}-(\alpha\beta)^k(\alpha^r+\beta^r)}{(\alpha-\beta)^2}\right) \\
&= \frac{c^{2-2\xi(k)}}{(cd)^{\frac{r}{2}}(cd)^{-\xi(k)}}\left(\frac{\alpha^{2k+r}+\beta^{2k+r}-(cd)^k(\alpha^r+\beta^r)}{(\alpha-\beta)^2(cd)^k}\right) \\
&= \frac{c^{2-\xi(k)}d^{\xi(k)}}{(cd)^{\frac{r}{2}}(\alpha-\beta)^2}\left(\alpha^r\left(\frac{\alpha^2}{cd}\right)^k+\beta^r\left(\frac{\beta^2}{cd}\right)^k-(\alpha^r+\beta^r)\right) \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Eşitlik (3.13) kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k c^{\xi(k)-1}d^{-\xi(k)}b_k b_{k+r} \\
&= \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k c^{\xi(k)-1}d^{-\xi(k)}\frac{c^{2-\xi(k)}d^{\xi(k)}}{(cd)^{\frac{r}{2}}(\alpha-\beta)^2}\left[\alpha^r\left(\frac{\alpha^2}{cd}\right)^k+\beta^r\left(\frac{\beta^2}{cd}\right)^k-(\alpha^r+\beta^r)\right] \\
&= \frac{c}{(cd)^{\frac{r}{2}}(\alpha-\beta)^2}\left[\alpha^r\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{-\alpha^2}{cd}\right)^k+\beta^r\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{-\beta^2}{cd}\right)^k-\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k(\alpha^r+\beta^r)\right] \\
&= \frac{c}{(cd)^{\frac{r}{2}}(\alpha-\beta)^2}\left[-\frac{\alpha^{r+2}}{cd}\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{-\alpha^2}{cd}\right)^{k-1}-\frac{\beta^{r+2}}{cd}\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{-\beta^2}{cd}\right)^{k-1}\right] \\
&= \frac{c}{(cd)^{\frac{r}{2}}(\alpha-\beta)^2}\left[-\frac{\alpha^{r+2}}{cd}\left(\frac{1-\left(\frac{-\alpha^2}{cd}\right)^{2n}}{1-\left(\frac{-\alpha^2}{cd}\right)}\right)-\frac{\beta^{r+2}}{cd}\left(\frac{1-\left(\frac{-\beta^2}{cd}\right)^{2n}}{1-\left(\frac{-\beta^2}{cd}\right)}\right)\right]
\end{aligned}$$

eşitliği,

buradan da

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k c^{\xi(k)-1}d^{-\xi(k)}b_k b_{k+r}$$

$$= \frac{c}{(cd)^{\frac{r}{2}}(\alpha-\beta)^2}\left[-\frac{\alpha^{r+2}}{cd}\left(\frac{1-\left(\frac{-\alpha^2}{cd}\right)^{2n}}{\frac{\alpha+\beta}{\beta}}\right)-\frac{\beta^{r+2}}{cd}\left(\frac{1-\left(\frac{-\beta^2}{cd}\right)^{2n}}{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}}\right)\right]$$

$$= \frac{c}{(cd)^{\frac{r}{2}}(\alpha-\beta)^2}\left[-\frac{\alpha^{r+1}}{cd}\left(\frac{\alpha\beta\left(1-\left(\frac{-\alpha^2}{cd}\right)^{2n}\right)}{\alpha+\beta}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\beta^{r+1}}{cd}\left(\frac{\alpha\beta\left(1-\left(\frac{-\beta^2}{cd}\right)^{2n}\right)}{\alpha+\beta}\right)\right]$$

$$= \frac{c}{(cd)^{\frac{r}{2}}(\alpha-\beta)^2}\left[-\frac{\alpha^{r+1}}{6cd}\left(1-\left(\frac{-\alpha^2}{cd}\right)^{2n}\right)-\frac{\beta^{r+1}}{6cd}\left(1-\left(\frac{-\beta^2}{cd}\right)^{2n}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{6cd}\frac{c}{(cd)^{\frac{r}{2}}(\alpha-\beta)^2}\left(-\alpha^{r+1}+\frac{\alpha^{4n+r+1}}{(cd)^{2n}}-\beta^{r+1}+\frac{\beta^{4n+r+1}}{(cd)^{2n}}\right)$$

$$= \frac{1}{6cd}\frac{c}{(cd)^{\frac{r}{2}}(\alpha-\beta)^2}\left(\frac{\alpha^{4n+r+1}+\beta^{4n+r+1}}{(cd)^{2n}}-\left(\alpha^{r+1}+\beta^{r+1}\right)\right) \tag{3.14}$$

eşitliği elde edilir.

Benzer şekilde bi-periyodik balans sayılarının Binet formülü kullanılarak

$$b_{2n+1}b_{2n+r}-b_r$$

$$= \left(\frac{c^{1-\xi(2n+1)}}{(cd)^{\left\lfloor\frac{2n+1}{2}\right\rfloor}}\right)\left(\frac{c^{1-\xi(2n+r)}}{(cd)^{\left\lfloor\frac{2n+r}{2}\right\rfloor}}\right)\left(\frac{\left(\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1}\right)\left(\alpha^{2n+r}-\beta^{2n+r}\right)}{(\alpha-\beta)^2}\right)$$
$$-\left(\frac{c^{1-\xi(r)}}{(cd)^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}}\right)\left(\frac{\alpha^r-\beta^r}{\alpha-\beta}\right)$$

eşitliği elde edilir.

Buradan da, eşitlik sadeleştirilerek

$$
\begin{aligned}
&b_{2n+1}b_{2n+r} - b_r \\
&\quad = \frac{c}{(cd)^{2n+\frac{r}{2}}(\alpha-\beta)^2}\left(\alpha^{4n+r+1} + \beta^{4n+r+1} - (\alpha\beta)^{2n}(\alpha\beta^r + \alpha^r\beta)\right) \\
&\quad\quad - \frac{c}{(cd)^{\frac{r}{2}}(\alpha-\beta)}(\alpha^r - \beta^r) \\
&\quad = \frac{c}{(cd)^{\frac{r}{2}}(\alpha-\beta)^2}\left[\frac{\alpha^{4n+r+1} + \beta^{4n+r+1} - (\alpha\beta)^{2n}(\alpha\beta^r + \alpha^r\beta)}{(cd)^{2n}}\right. \\
&\quad\quad \left. - (\alpha-\beta)(\alpha^r - \beta^r)\right] \\
&\quad = \frac{c}{(cd)^{\frac{r}{2}}(\alpha-\beta)^2}\left[\frac{\alpha^{4n+r+1} + \beta^{4n+r+1}}{(cd)^{2n}} - (\alpha\beta^r + \alpha^r\beta)\right. \\
&\quad\quad \left. - \left(\alpha^{r+1} + \beta^{r+1} - \alpha\beta^r - \alpha^r\beta\right)\right] \\
&\quad = \frac{c}{(cd)^{\frac{r}{2}}(\alpha-\beta)^2}\left(\frac{\alpha^{4n+r+1} + \beta^{4n+r+1}}{(cd)^{2n}} - \left(\alpha^{r+1} + \beta^{r+1}\right)\right) \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir.

Eşitlik (3.15) $\frac{1}{6cd}$ ile çarpılırsa, eşitlik (3.14) elde edilir.

Benzer şekilde r tek tamsayı olması durumunda da ispat yapılır.

Sonuç

Herhangi negatif olmayan n ve r tamsayıları için

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k c^{\xi(k)-1}d^{-\xi(k)}b_k b_{k+r} = \frac{1}{6cd}\left(\frac{d}{c}\right)^{\xi(r)} b_{2n+r+1}b_{2n}$$

dir.

İspat

Teorem 3.2.3 de elde ettiğimiz

$$c^{\xi(mn+m)}d^{\xi(mn+n)}b_m b_{n+1} - c^{\xi(mn+n)}d^{\xi(mn+m)}b_{m+1}b_n = c^{\xi(m-n)}b_{m-n}$$

bi-periyodik balans sayıları için d'Ocagne eşitliğinde $m \to 2n+r$ ve $n \to 2n$ değişiklikleri yapılırsa

$$c^{\xi(r)}b_{2n+r}b_{2n+1} - d^{\xi(r)}b_{2n+r+1}b_{2n} = c^{\xi(r)}b_r$$

eşitliği, buradan da

$$b_{2n+r}b_{2n+1} - b_r = \left(\frac{d}{c}\right)^{\xi(r)} b_{2n+r+1}b_{2n} \tag{3.16}$$

eşitliği elde edilir.

Eşitlik (3.16) , Teorem 3.2.6 da yerine yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \, c^{\xi(k)-1}d^{-\xi(k)}b_k b_{k+r} = \frac{1}{6cd}\left(\frac{d}{c}\right)^{\xi(r)} b_{2n+r+1}b_{2n}$$

sonucuna varılır.

3.2.7. Teorem

ω fonksiyonu

$$\omega(k) = \begin{cases} -1, & k \equiv 1 \text{ veya } 2 \pmod 4 \text{ ise} \\ 1, & k \equiv 0 \text{ veya } 3 \pmod 4 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmak üzere

$$\sum_{k=1}^{2n} \omega(k)b_{k+r} = \frac{1}{6d}\left[(-1)^n \, b_{2\left(n+\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor\right)+1} - b_{2\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor+1}\right] + \frac{1}{6c}\left[(-1)^n \, b_{2\left(n+\left\lfloor \frac{r-1}{2} \right\rfloor+1\right)} - b_{2\left(\left\lfloor \frac{r-1}{2} \right\rfloor+1\right)}\right] \tag{3.17}$$

dir.

İspat

r çift olması durumunda

$$\sum_{k=1}^{n} b_{2\left(k+\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor\right)} = b_{2+r} + b_{4+r} + b_{6+r} + \cdots + b_{2n+r},$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_{2\left(k+\left\lfloor \frac{r-1}{2} \right\rfloor\right)+1} = b_{1+r} + b_{3+r} + b_{5+r} + \cdots + b_{2n-1+r}$$

r tek olması durumunda ise

$$\sum_{k=1}^{n} b_{2\left(k+\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor\right)} = b_{1+r} + b_{3+r} + b_{5+r} + \cdots + b_{2n-1+r},$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_{2\left(k+\left\lfloor \frac{r-1}{2} \right\rfloor\right)+1} = b_{2+r} + b_{4+r} + b_{6+r} + \cdots + b_{2n+r}$$

eşitlikleri ve

$$\sum_{k=1}^{2n} b_{k+r} = b_{1+r} + b_{2+r} + b_{3+r} + \cdots + b_{2n+r}$$

eşitliği gözönüne alınırsa

$$\sum_{k=1}^{2n} b_{k+r} = \sum_{k=1}^{n} b_{2\left(k+\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor\right)} + \sum_{k=1}^{n} b_{2\left(k+\left\lfloor \frac{r-1}{2} \right\rfloor\right)+1}$$

eşitliği geçerlidir. Bu durumda

$$\sum_{k=1}^{2n} \omega(k) b_{k+r} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k b_{2\left(k+\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor\right)} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k b_{2\left(k+\left\lfloor \frac{r-1}{2} \right\rfloor\right)+1} \tag{3.18}$$

eşitliği yazılabilir. Eşitlik (3.18) ve bi-periyodik balans sayılarının Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n} \omega(k) b_{k+r} = &\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k c}{(cd)^{k+\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor}} \left(\frac{\alpha^{2\left(k+\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor\right)} - \beta^{2\left(k+\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor\right)}}{\alpha - \beta} \right) \\ &+ \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{(cd)^{k+\left\lfloor \frac{r-1}{2} \right\rfloor}} \left(\frac{\alpha^{2\left(k+\left\lfloor \frac{r-1}{2} \right\rfloor\right)+1} - \beta^{2\left(k+\left\lfloor \frac{r-1}{2} \right\rfloor\right)+1}}{\alpha - \beta} \right)\end{aligned}$$

eşitliği, buradan da

$$
\begin{aligned}
&= \frac{c}{\alpha-\beta}\left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\frac{\alpha^2}{cd}\right)^{k+\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor} - \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\frac{\beta^2}{cd}\right)^{k+\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}\right] \\
&\quad + \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\alpha\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\frac{\alpha^2}{cd}\right)^{k+\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor} - \beta\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\frac{\beta^2}{cd}\right)^{k+\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor}\right] \\
&= \frac{c}{\alpha-\beta}\left[\frac{\alpha^{2\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}}{(cd)^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-\alpha^2}{cd}\right)^k - \frac{\beta^{2\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}}{(cd)^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-\beta^2}{cd}\right)^k\right] \\
&\quad + \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\frac{\alpha^{2\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor+1}}{(cd)^{\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-\alpha^2}{cd}\right)^k - \frac{\beta^{2\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor+1}}{(cd)^{\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-\beta^2}{cd}\right)^k\right] \\
&= \frac{c}{\alpha-\beta}\left[\frac{-\alpha^{2\left(\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor+1\right)}}{(cd)^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor+1}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-\alpha^2}{cd}\right)^{k-1} + \frac{\beta^{2\left(\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor+1\right)}}{(cd)^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor+1}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-\beta^2}{cd}\right)^{k-1}\right] \\
&\quad + \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\frac{-\alpha^{2\left(\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor+1\right)+1}}{(cd)^{\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor+1}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-\alpha^2}{cd}\right)^{k-1} + \frac{\beta^{2\left(\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor+1\right)+1}}{(cd)^{\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor+1}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-\beta^2}{cd}\right)^{k-1}\right] \\
&= \frac{c}{\alpha-\beta}\left[\frac{-\alpha^{2\left(\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor+1\right)}}{(cd)^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor+1}}\left(\frac{1-\left(\frac{-\alpha^2}{cd}\right)^n}{1-\left(\frac{-\alpha^2}{cd}\right)}\right) + \frac{\beta^{2\left(\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor+1\right)}}{(cd)^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor+1}}\left(\frac{1-\left(\frac{-\beta^2}{cd}\right)^n}{1-\left(\frac{-\beta^2}{cd}\right)}\right)\right] \\
&\quad + \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\frac{-\alpha^{2\left(\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor+1\right)+1}}{(cd)^{\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor+1}}\left(\frac{1-\left(\frac{-\alpha^2}{cd}\right)^n}{1-\left(\frac{-\alpha^2}{cd}\right)}\right)\right. \\
&\qquad \left. + \frac{\beta^{2\left(\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor+1\right)+1}}{(cd)^{\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor+1}}\left(\frac{1-\left(\frac{-\beta^2}{cd}\right)^n}{1-\left(\frac{-\beta^2}{cd}\right)}\right)\right] \\
&= \frac{c}{\alpha-\beta}\left[\frac{-\alpha^{2\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor+1}(\alpha\beta)}{(cd)^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor+1}}\left(\frac{1-\left(\frac{-\alpha^2}{cd}\right)^n}{\alpha+\beta}\right) + \frac{\beta^{2\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor+1}(\alpha\beta)}{(cd)^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor+1}}\left(\frac{1-\left(\frac{-\beta^2}{cd}\right)^n}{\alpha+\beta}\right)\right] \\
&\quad + \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\frac{-\alpha^{2\left(\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor+1\right)}(\alpha\beta)}{(cd)^{\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor+1}}\left(\frac{1-\left(\frac{-\alpha^2}{cd}\right)^n}{\alpha+\beta}\right)\right.
\end{aligned}
$$

$$+\frac{\beta^{2\left(\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor+1\right)}\left(\alpha\beta\right)}{\left(cd\right)^{\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor+1}}\left(\frac{1-\left(\frac{-\beta^2}{cd}\right)^n}{\alpha+\beta}\right)\Bigg]$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{2n}\omega(k)b_{k+r}\\
&\quad=\frac{c}{6\left(\alpha-\beta\right)}\left[\frac{-\alpha^{2\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor+1}}{\left(cd\right)^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor+1}}\left(1-\left(\frac{-\alpha^2}{cd}\right)^n\right)+\frac{\beta^{2\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor+1}}{\left(cd\right)^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor+1}}\left(1-\left(\frac{-\beta^2}{cd}\right)^n\right)\right]\\
&\qquad+\frac{1}{6\left(\alpha-\beta\right)}\left[\frac{-\alpha^{2\left(\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor+1\right)}}{\left(cd\right)^{\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor+1}}\left(1-\left(\frac{-\alpha^2}{cd}\right)^n\right)+\frac{\beta^{2\left(\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor+1\right)}}{\left(cd\right)^{\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor+1}}\left(1-\left(\frac{-\beta^2}{cd}\right)^n\right)\right]\\
&\quad=\frac{c}{6\left(\alpha-\beta\right)\left(cd\right)^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor+n+1}}\Big[\left(-1\right)^n\alpha^{2\left(\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor+n\right)+1}-\left(-1\right)^n\beta^{2\left(\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor+n\right)+1}\\
&\qquad-\left(cd\right)^n\left(\alpha^{2\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor+1}-\beta^{2\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor+1}\right)\Big]\\
&\qquad\quad+\frac{1}{6\left(\alpha-\beta\right)\left(cd\right)^{\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor+n+1}}\Big[\left(-1\right)^n\alpha^{2\left(\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor+n+1\right)}-\left(-1\right)^n\beta^{2\left(\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor+n+1\right)}\\
&\qquad\quad-\left(cd\right)^n\left(\alpha^{2\left(\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor+1\right)}-\beta^{2\left(\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor+1\right)}\right)\Big]
\end{aligned}$$

şeklinde, eşitlik (3.17) nin sol tarafı elde edilir.

Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{6d}\Big(\left(-1\right)^n b_{2\left(n+\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor\right)+1}-b_{2\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor+1}\Big)\\
&\qquad=\frac{1}{6d}\left[\frac{\left(-1\right)^n}{\left(cd\right)^{n+\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}}\left(\frac{\alpha^{2\left(n+\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor\right)+1}-\beta^{2\left(n+\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor\right)+1}}{\alpha-\beta}\right)\right]\\
&\qquad\quad-\frac{1}{6d}\left[\frac{1}{\left(cd\right)^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}}\left(\frac{\alpha^{2\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor+1}-\beta^{2\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor+1}}{\alpha-\beta}\right)\right]\\
&\qquad=\frac{1}{6d}\frac{1}{\left(\alpha-\beta\right)\left(cd\right)^{n+\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}}\Big[\left(-1\right)^n\alpha^{2\left(n+\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor\right)+1}-\left(-1\right)^n\beta^{2\left(n+\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor\right)+1}\\
&\qquad\quad-\left(cd\right)^n\left(\alpha^{2\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor+1}-\beta^{2\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor+1}\right)\Big]
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$\frac{1}{6d}\Big((-1)^n b_{2(n+\lfloor \frac{r}{2} \rfloor)+1} - b_{2\lfloor \frac{r}{2} \rfloor+1}\Big)$$
$$= \frac{c}{6\left(\alpha-\beta\right)(cd)^{n+\lfloor \frac{r}{2} \rfloor+1}}\Big[(-1)^n \alpha^{2(n+\lfloor \frac{r}{2} \rfloor)+1} - (-1)^n \beta^{2(n+\lfloor \frac{r}{2} \rfloor)+1}$$
$$- (cd)^n \left(\alpha^{2\lfloor \frac{r}{2} \rfloor+1} - \beta^{2\lfloor \frac{r}{2} \rfloor+1}\right)\Big]$$

ve

$$\frac{1}{6c}\Big((-1)^n b_{2(n+\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor+1)} - b_{2(\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor+1)}\Big)$$
$$= \frac{1}{6c}\left[\frac{(-1)^n c}{(cd)^{n+\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor+1}}\left(\frac{\alpha^{2\left(n+\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor+1\right)} - \beta^{2\left(n+\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor+1\right)}}{\alpha-\beta}\right)\right]$$
$$- \frac{1}{6c}\left[\frac{c}{(cd)^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor+1}}\left(\frac{\alpha^{2\left(\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor+1\right)} - \beta^{2\left(\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor+1\right)}}{\alpha-\beta}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\left(\alpha-\beta\right)(cd)^{n+\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor+1}}\Big[(-1)^n \alpha^{2\left(n+\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor+1\right)} - (-1)^n \beta^{2\left(n+\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor+1\right)}$$
$$- (cd)^n \left(\alpha^{2\left(\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor+1\right)} - \beta^{2\left(\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor+1\right)}\right)\Big]$$

eşitlikleri toplanarak eşitlik (3.17) nin sağ tarafı da elde edilir.

Böylece ispat tamamlanır.

3.3. Bi-periyodik Balans Matris Dizisi

3.3.1. Tanım

Herhangi sıfırdan farklı c ve d reel sayıları ve $n \geq 2$ tamsayısı için

$$\mathcal{B}_0(c,d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ ve } \mathcal{B}_1(c,d) = \begin{pmatrix} 6d & \frac{d}{c} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ başlangıç şartları}$$

ve

$$\mathcal{B}_n(c,d) = \begin{cases} 6c\mathcal{B}_{n-1}(c,d) - \mathcal{B}_{n-2}(c,d), & n \text{ çift ise} \\ 6d\mathcal{B}_{n-1}(c,d) - \mathcal{B}_{n-2}(c,d), & n \text{ tek ise} \end{cases} \tag{3.19}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlı diziye $\{\mathcal{B}_n(c,d)\}_{n=0}^{\infty}$ bi-periyodik balans matris dizisi denir.

3.3.2. Teorem

Bi-periyodik balans matris dizisinin n. terimi

$$\mathcal{B}_n(c,d) = \begin{pmatrix} \left(\frac{d}{c}\right)^{\xi(n)} b_{n+1} & \frac{d}{c}b_n \\ b_n & \left(\frac{d}{c}\right)^{\xi(n)} b_{n-1} \end{pmatrix}$$

dir.

Burada b_n; n. bi-periyodik balans sayısı ve $\xi(n) = n - 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ şeklindedir.

İspat

Bi-periyodik balans sayılarının tanımından

$b_0 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = 6c$ ve $b_{-1} = -1$

dir.

Böylece

$$\mathcal{B}_0(c,d) = \begin{pmatrix} \left(\frac{d}{c}\right)^{\xi(n)} b_1 & \frac{d}{c}b_0 \\ b_0 & \left(\frac{d}{c}\right)^{\xi(n)} b_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ve

$$\mathcal{B}_1(c,d) = \begin{pmatrix} \left(\frac{d}{c}\right)^{\xi(n)} b_2 & \frac{d}{c}b_1 \\ b_1 & \left(\frac{d}{c}\right)^{\xi(n)} b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6d & \frac{d}{c} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde bi-periyodik balans matris dizisinin başlangıç koşulları için ispat tamamlanır.

Şimdi de $n = k \in \mathbb{Z}^+$ için eşitlik (3.19) un doğru olduğunu kabul edelim.

$n = k + 1$ ise

$$\mathcal{B}_{k+1}(c,d) = \begin{cases} 6c\mathcal{B}_k(c,d) - \mathcal{B}_{k-1}(c,d), & k+1 \text{ çift ise} \\ 6d\mathcal{B}_k(c,d) - \mathcal{B}_{k-1}(c,d), & k+1 \text{ tek ise} \end{cases}$$

$$= 6c^{\xi(k)}d^{1-\xi(k)}\mathcal{B}_k(c,d) - \mathcal{B}_{k-1}(c,d)$$

$$= 6c^{\xi(k)}d^{1-\xi(k)} \begin{pmatrix} \left(\frac{d}{c}\right)^{\xi(k)} b_{k+1} & \frac{d}{c}b_k \\ b_k & \left(\frac{d}{c}\right)^{\xi(k)} b_{k-1} \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} \left(\frac{d}{c}\right)^{\xi(k-1)} b_k & \frac{d}{c}b_{k-1} \\ b_{k-1} & \left(\frac{d}{c}\right)^{\xi(k-1)} b_{k-2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{d}{c}b_{k+2} & \frac{d}{c}b_{k+1} \\ b_{k+1} & \frac{d}{c}b_k \end{pmatrix}, & k \text{ çift ise} \\ \begin{pmatrix} b_{k+2} & \frac{d}{c}b_{k+1} \\ b_{k+1} & b_k \end{pmatrix}, & k \text{ tek ise} \end{cases}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{d}{c}\right)^{\xi(k+1)} b_{k+2} & \frac{d}{c}b_{k+1} \\ b_{k+1} & \left(\frac{d}{c}\right)^{\xi(k+1)} b_k \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.3.3. Teorem

$n \geq 0$ tamsayısı için

$$\det\left(\mathcal{B}_n(c,d)\right) = -\left(\frac{d}{c}\right)^{\xi(n)}$$

dir.

İspat

Teorem 3.3.2 den

$$\mathcal{B}_n(c,d) = \begin{pmatrix} \left(\frac{d}{c}\right)^{\xi(n)} b_{n+1} & \frac{d}{c}b_n \\ b_n & \left(\frac{d}{c}\right)^{\xi(n)} b_{n-1} \end{pmatrix}$$

olup

$$\det\left(\mathcal{B}_n(c,d)\right) = \left(\frac{d}{c}\right)^{2\xi(n)} b_{n+1}b_{n-1} - \frac{d}{c}b_n^2$$

$$= \begin{cases} b_{n+1}b_{n-1} - \frac{d}{c}b_n^2; & n \text{ çift ise} \\ \left(\frac{d}{c}\right)^2 b_{n+1}b_{n-1} - \frac{d}{c}b_n^2; & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.2 den bi-periyodik balans sayıları için Cassini eşitliği

$$c^{1-\xi(n)}d^{\xi(n)}b_{n-1}b_{n+1} - c^{\xi(n)}d^{1-\xi(n)}b_n^2 = -c$$

şeklindedir.

Dolayısıyla n çift ise Cassini eşitliği

$$cb_{n-1}b_{n+1} - db_n^2 = -c$$

olup, eşitliğin her iki tarafı $\frac{1}{c}$ ile çarpılırsa

$$\det\left(\mathcal{B}_n(c,d)\right) = b_{n+1}b_{n-1} - \frac{d}{c}b_n^2 = -1$$

elde edilir.

Aynı şekilde n tek ise Cassini eşitliği

$$db_{n-1}b_{n+1} - cb_n^2 = -c$$

olup, eşitliğin her iki tarafı $\frac{d}{c^2}$ ile çarpılırsa

$$\det\left(\mathcal{B}_n(c,d)\right) = \left(\frac{d}{c}\right)^2 b_{n+1}b_{n-1} - \frac{d}{c}b_n^2 = -\frac{d}{c}$$

elde edilir.

Böylece

$$\det\left(\mathcal{B}_n(c,d)\right) = -\left(\frac{d}{c}\right)^{\xi(n)}$$

elde edilir.

4. Bİ-PERİYODİK BALANS KUATERNİYONLARI

Bu bölümde Fibonacci ve Lucas dizilerinden yararlanarak Horadam [21] tarafından tanımlanan Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları ve devamında bazı çalışmalarda [22,24], başka diziler için tanımlanan kuaterniyonlar ve özellikleri baz alınarak bi-periyodik balans kuaterniyonları verilmiştir. Ayrıca bi-periyodik balans kuaterniyonlarının bazı özellikleri ve eşitlikleri araştırılmış olup bi-periyodik balans sayıları ve kuaterniyonları arasındaki ilişki üzerinde çalışılmıştır.

4.1. Bi-periyodik Balans Kuaterniyonları

4.1.1. Tanım

$n \geq 0$ için b_n n. bi-periyodik balans sayısı olmak üzere

$$\check{B}_n = \sum_{l=0}^{3} b_{n+l} e_l$$

n. bi-periyodik balans kuaterniyonudur.

4.1.2. Teorem

Bi-periyodik balans kuaterniyonu $\check{B}_n$ için üreteç fonksiyonu

$$S(t) = tg(t)e_0 + (g(t) - t)e_1 + \left(\frac{g(t)}{t} - 1\right) e_2 + \left(\frac{g(t) - t - (36cd - 1)t^3}{t^2}\right) e_3,$$

ve

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} t^{2n-1} = \frac{t + t^3}{1 - (36cd - 2)t^2 + t^4}$$

olmak üzere

$$G(t) = \frac{\check{B}_0 + \left(\check{B}_1 - 6d\check{B}_0\right) t + 6(c - d)S(t)}{1 - 6dt + t^2}$$

şeklindedir.

İspat

$\check{B}_n$ bi-periyodik balans kuaterniyonu için üreteç fonksiyonunun kuvvet serisi açılımı

$$G(t) = \check{B}_0 + \check{B}_1 t + \check{B}_2 t^2 + \cdots + \check{B}_r t^r + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \check{B}_n t^n$$

şeklindedir.

Bu seriyi $6dt$ ve t^2 ile çarparak sırasıyla

$$6dtG(t) = 6d\check{B}_0 t + 6d\check{B}_1 t^2 + 6d\check{B}_2 t^3 + \cdots + 6d\check{B}_r t^{r+1} + \cdots$$

ve

$$t^2 G(t) = \check{B}_0 t^2 + \check{B}_1 t^3 + \check{B}_2 t^4 + \cdots + \check{B}_r t^{r+2} + \cdots$$

serileri elde edilir.

$b_{2k+1} = 6db_{2k} - b_{2k-1}$ ve $b_{2k} = 6cb_{2k-1} - b_{2k-2}$ olduğundan

$$\begin{aligned}(1 - 6dt + t^2)G(t) &= \check{B}_0 + \left(\check{B}_1 - 6d\check{B}_0\right) t + \sum_{n=2}^{\infty} (\check{B}_n - 6d\check{B}_{n-1} + \check{B}_{n-2}) t^n \\ &= \check{B}_0 + \left(\check{B}_1 - 6d\check{B}_0\right) t + 6(c-d)t \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} t^{2n-1}\right) e_0 \\ &\quad + 6(c-d) \left(\sum_{n=2}^{\infty} b_{2n-1} t^{2n-1}\right) e_1 + 6(c-d) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n+1} t^{2n}\right) e_2 \\ &\quad + 6(c-d) \left(\sum_{n=2}^{\infty} b_{2n+1} t^{2n-1}\right) e_3 \end{aligned} \tag{4.1}$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} x^{2n-1}$$

şeklinde $g(t)$ serisi tanımlanır.

Eşitlik (4.1) de $g(t)$ yerine yazılırsa

$$(1-6dt+t^2)G(t) = \check{B}_0 + \left(\check{B}_1 - 6d\check{B}_0\right)t + 6(c-d)tg(t)e_0 + 6(c-d)\left(g(t)-t\right)e_1 + 6(c-d)\left(\frac{g(t)}{t}-1\right)e_2 + 6(c-d)\left(\frac{g(t)-t-(36cd-1)t^3}{t^2}\right)e_3 \tag{4.2}$$

elde edilir.

Şimdi de

$$S(t) = tg(t)e_0 + (g(t)-t)e_1 + \left(\frac{g(t)}{t}-1\right)e_2 + \left(\frac{g(t)-t-(36cd-1)t^3}{t^2}\right)e_3, \tag{4.3}$$

şeklinde $S(t)$ serisi tanımlanır.

Eşitlik (4.2) de $S(t)$ yerine yazılarak

$$(1-6dt+t^2)G(t) = \check{B}_0 + \left(\check{B}_1 - 6d\check{B}_0\right)t + 6(c-d)S(t) \tag{4.4}$$

eşitliği elde edilir.

Buradan da bi-periyodik balans kuaterniyonlarının üreteç fonksiyonu

$$G(t) = \frac{\check{B}_0 + \left(\check{B}_1 - 6d\check{B}_0\right)t + 6(c-d)S(t)}{1-6dt+t^2}$$

şeklinde elde edilir.

Ayrıca $b_{2n-1} = (36cd-2)b_{2n-3} - b_{2n-5}$ olduğundan

$$(1-(36cd-2)t^2+t^4)g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}t^{2n-1} - (36cd-2)\sum_{n=2}^{\infty} b_{2n-3}t^{2n-1} + \sum_{n=3}^{\infty} b_{2n-5}t^{2n-1}$$

eşitliği elde edilir.

Buradan da

$$(1-(36cd-2)t^2+t^4)g(t) = b_1t + b_3t^3 - (36cd-2)b_1t^3 + \sum_{n=3}^{\infty}(b_{2n-1} - (36cd-2)b_{2n-3} + b_{2n-5})t^{2n-1}$$
$$= t + t^3$$

elde edilir.

Sonuç olarak

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}x^{2n-1} = \frac{t+t^3}{1-(36cd-2)t^2+t^4}$$

serisinin karşılığı bulunur.

4.1.3. Teorem

$\{\check{B}_n\}_{n=0}^{\infty}$ bi-periyodik balans kuaterniyonlarının Binet formülü

$$\check{B}_n = \begin{cases} \frac{1}{(cd)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \left(\frac{\alpha^*\alpha^n - \beta^*\beta^n}{\alpha - \beta} \right), & n \text{ çift ise} \\ \frac{1}{(cd)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \left(\frac{\alpha^{**}\alpha^n - \beta^{**}\beta^n}{\alpha - \beta} \right), & n \text{ tek ise} \end{cases} \tag{4.5}$$

şeklindedir.

Burada α ve β; (3.2) da tanımlanan bi-periyodik balans sayılarının karakteristik denkleminin kökleri, $\lfloor a \rfloor$; a sayısının taban fonksiyonu, $\xi(m) = m - 2\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ ve

$$\alpha^* = \sum_{l=0}^{3} \frac{c^{\xi(l+1)}}{(cd)^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor}} \alpha^l e_l, \qquad \beta^* = \sum_{l=0}^{3} \frac{c^{\xi(l+1)}}{(cd)^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor}} \beta^l e_l \tag{4.6}$$

$$\alpha^{**} = \sum_{l=0}^{3} \frac{c^{\xi(l)}}{(cd)^{\lfloor \frac{l+1}{2} \rfloor}} \alpha^l e_l, \quad \beta^{**} = \sum_{l=0}^{3} \frac{c^{\xi(l)}}{(cd)^{\lfloor \frac{l+1}{2} \rfloor}} \beta^l e_l \tag{4.7}$$

dir.

İspat

n çift olması durumunda, bi-periyodik balans kuaterniyonlarının tanımı ve bi-periyodik balans sayılarının Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}
\check{B}_n &= \sum_{l=0}^{3} b_{n+l} e_l \\
&= \sum_{l=0}^{3} \left(\frac{c^{1-\xi(n+l)}}{(cd)^{\left\lfloor \frac{n+l}{2} \right\rfloor}} \right) \left(\frac{\alpha^{n+l} - \beta^{n+l}}{\alpha - \beta} \right) e_l \\
&= \frac{c}{(cd)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}} \left(\frac{\alpha^{n} - \beta^{n}}{\alpha - \beta} \right) e_0 + \frac{1}{(cd)^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}} \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \right) e_1 \\
&\quad + \frac{c}{(cd)^{\left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor}} \left(\frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta} \right) e_2 + \frac{1}{(cd)^{\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor}} \left(\frac{\alpha^{n+3} - \beta^{n+3}}{\alpha - \beta} \right) e_3 \\
&= \frac{1}{(cd)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}} \left(\frac{\alpha^{*}\alpha^{n} - \beta^{*}\beta^{n}}{\alpha - \beta} \right),
\end{aligned}$$

n tek olması durumunda ise

$$\begin{aligned}
\check{B}_n &= \sum_{l=0}^{3} b_{n+l} e_l \\
&= \sum_{l=0}^{3} \left(\frac{c^{1-\xi(n+l)}}{(cd)^{\left\lfloor \frac{n+l}{2} \right\rfloor}} \right) \left(\frac{\alpha^{n+l} - \beta^{n+l}}{\alpha - \beta} \right) e_l \\
&= \frac{1}{(cd)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}} \left(\frac{\alpha^{n} - \beta^{n}}{\alpha - \beta} \right) e_0 + \frac{c}{(cd)^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}} \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \right) e_1 \\
&\quad + \frac{1}{(cd)^{\left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor}} \left(\frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta} \right) e_2 + \frac{c}{(cd)^{\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor}} \left(\frac{\alpha^{n+3} - \beta^{n+3}}{\alpha - \beta} \right) e_3 \\
&= \frac{1}{(cd)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}} \left(\frac{\alpha^{**}\alpha^{n} - \beta^{**}\beta^{n}}{\alpha - \beta} \right)
\end{aligned}$$

şeklinde bi-periyodik balans kuaterniyonlarının Binet formülü elde edilir.

4.2. Bazı Özel Eşitlikler

4.2.1. Teorem

$r \leq n$ olmak üzere, herhangi n ve r negatif olmayan tamsayıları için

$$\check{B}_{2(n+r)}\check{B}_{2(n-r)} - \check{B}_{2n}^2 = \frac{\alpha^*\beta^*((cd)^{2r} - \alpha^{4r}) + \beta^*\alpha^*((cd)^{2r} - \beta^{4r})}{(\alpha-\beta)^2(cd)^{2r}}$$

dir.

İspat

Bi-periyodik balans kuaterniyonlarının Binet formülü (4.5) kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\check{B}_{2(n+r)}\check{B}_{2(n-r)} - \check{B}_{2n}^2 \\
&\quad= \left[\frac{1}{(cd)^{n+r}}\left(\frac{\alpha^*\alpha^{2n+2r} - \beta^*\beta^{2n+2r}}{\alpha-\beta}\right)\right]\left[\frac{1}{(cd)^{n-r}}\left(\frac{\alpha^*\alpha^{2n-2r} - \beta^*\beta^{2n-2r}}{\alpha-\beta}\right)\right] \\
&\quad\quad - \left[\frac{1}{(cd)^{2n}}\left(\frac{\alpha^*\alpha^{2n} - \beta^*\beta^{2n}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^*\alpha^{2n} - \beta^*\beta^{2n}}{\alpha-\beta}\right)\right] \\
&\quad= \frac{1}{(cd)^{2n}}\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left[\left(\alpha^*\alpha^{2n+2r} - \beta^*\beta^{2n+2r}\right)\left(\alpha^*\alpha^{2n-2r} - \beta^*\beta^{2n-2r}\right)\right. \\
&\quad\quad \left. - \left(\alpha^*\alpha^{2n} - \beta^*\beta^{2n}\right)\left(\alpha^*\alpha^{2n} - \beta^*\beta^{2n}\right)\right] \\
&\quad= \frac{1}{(\alpha\beta)^{2n}}\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left[\left(\alpha^*\alpha^{2n}\right)^2 - \alpha^*\beta^*\alpha^{2n+2r}\beta^{2n-2r} - \alpha^*\beta^*\alpha^{2n-2r}\beta^{2n+2r}\right. \\
&\quad\quad \left. + \left(\beta^*\beta^{2n}\right)^2 - \left(\alpha^*\alpha^{2n}\right)^2 + 2\alpha^*\alpha^{2n}\beta^*\beta^{2n} - \left(\beta^*\beta^{2n}\right)^2\right] \\
&\quad= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left[\alpha^*\beta^*\left(1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2r}\right) + \beta^*\alpha^*\left(1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2r}\right)\right] \\
&\quad= \frac{\alpha^*\beta^*((cd)^{2r} - \alpha^{4r}) + \beta^*\alpha^*((cd)^{2r} - \beta^{4r})}{(\alpha-\beta)^2(cd)^{2r}}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

4.2.2. Teorem

Herhangi bir negatif olmayan n tamsayısı için bi-periyodik balans kuaterniyonlarının

$\check{B}_{2(n+1)}, \check{B}_{2(n-1)}$ ve $\check{B}_{2n}$ terimleri kullanılarak elde edilen

$$\check{B}_{2(n+1)}\check{B}_{2(n-1)} - \check{B}_{2n}^2 = \frac{\alpha^*\beta^*((cd)^2 - \alpha^4) + \beta^*\alpha^*((cd)^2 - \beta^4)}{(\alpha-\beta)^2(cd)^2}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat

Bir önceki ispatta $r = 1$ alınırsa ispat kolayca elde edilir.

4.2.3. Teorem (Catalan Eşitliği)

$r \leq n$ olmak üzere, herhangi bir negatif olmayan n tamsayısı ve herhangi bir negatif olmayan r çift tamsayısı için

$$\check{B}_{n+r}\check{B}_{n-r} - \check{B}_n^2 = \begin{cases} \dfrac{\alpha^*\beta^*((cd)^r - \alpha^{2r}) + \beta^*\alpha^*((cd)^r - \beta^{2r})}{(cd)^r(\alpha-\beta)^2}, & n \text{ çift ise} \\ \dfrac{\alpha^{**}\beta^{**}((cd)^r - \alpha^{2r}) + \beta^{**}\alpha^{**}((cd)^r - \beta^{2r})}{(cd)^{r-1}(\alpha-\beta)^2}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

dir.

İspat

Bi-periyodik balans kuaterniyonlarının Binet formülü kullanılarak, n çift ise

$$\begin{aligned} &\check{B}_{n+r}\check{B}_{n-r} - \check{B}_n^2 \\ &\quad= \left[\frac{1}{(cd)^{\lfloor\frac{n+r}{2}\rfloor}}\left(\frac{\alpha^*\alpha^{n+r} - \beta^*\beta^{n+r}}{\alpha-\beta}\right)\right]\left[\frac{1}{(cd)^{\lfloor\frac{n-r}{2}\rfloor}}\left(\frac{\alpha^*\alpha^{n-r} - \beta^*\beta^{n-r}}{\alpha-\beta}\right)\right] \\ &\quad\quad - \left[\frac{1}{(cd)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}}\left(\frac{\alpha^*\alpha^{n} - \beta^*\beta^{n}}{\alpha-\beta}\right)\right]^2 \\ &\quad= \frac{1}{(cd)^n}\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left[\left(\alpha^*\alpha^{n+r} - \beta^*\beta^{n+r}\right)\left(\alpha^*\alpha^{n-r} - \beta^*\beta^{n-r}\right)\right] \\ &\quad\quad - \frac{1}{(cd)^n}\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(\alpha^*\alpha^n - \beta^*\beta^n\right)^2 \end{aligned}$$

eşitliği, buradan da

$$\begin{aligned}\check{B}_{n+r}\check{B}_{n-r} - \check{B}_n^2 &= \frac{1}{(cd)^n}\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left[\alpha^*\beta^*(\alpha\beta)^n\left(1-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r\right)+\beta^*\alpha^*(\alpha\beta)^n\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^r\right)\right]\\ &= \frac{\alpha^*\beta^*\left((cd)^r-\alpha^{2r}\right)+\beta^*\alpha^*\left((cd)^r-\beta^{2r}\right)}{(cd)^r(\alpha-\beta)^2}\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

n tek ise

$$\begin{aligned}\check{B}_{n+r}\check{B}_{n-r} - \check{B}_n^2 &= \left[\frac{1}{(cd)^{\lfloor\frac{n+r}{2}\rfloor}}\left(\frac{\alpha^{**}\alpha^{n+r}-\beta^{**}\beta^{n+r}}{\alpha-\beta}\right)\right]\left[\frac{1}{(cd)^{\lfloor\frac{n-r}{2}\rfloor}}\left(\frac{\alpha^{**}\alpha^{n-r}-\beta^{**}\beta^{n-r}}{\alpha-\beta}\right)\right]\\ &\quad-\left[\frac{1}{(cd)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}}\left(\frac{\alpha^{**}\alpha^{n}-\beta^{**}\beta^{n}}{\alpha-\beta}\right)\right]^2\\ &= \frac{1}{(cd)^{n-1}}\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left[\left(\alpha^{**}\alpha^{n+r}-\beta^{**}\beta^{n+r}\right)\left(\alpha^{**}\alpha^{n-r}-\beta^{**}\beta^{n-r}\right)\right]\\ &\quad-\frac{1}{(cd)^{n-1}}\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(\alpha^{**}\alpha^{n}-\beta^{**}\beta^{n}\right)^2\\ &= \frac{1}{(cd)^{n-1}}\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left[\alpha^{**}\beta^{**}(\alpha\beta)^n\left(1-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r\right)+\beta^{**}\alpha^{**}(\alpha\beta)^n\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^r\right)\right]\\ &= \frac{\alpha^{**}\beta^{**}\left((cd)^r-\alpha^{2r}\right)+\beta^{**}\alpha^{**}\left((cd)^r-\beta^{2r}\right)}{(cd)^{r-1}(\alpha-\beta)^2}\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

4.2.4. Teorem

Herhangi $n \geq 0$ tamsayısı için

i) $\check{B}_n + \overline{\check{B}}_n = 2b_n$
ii) $\check{B}_n^2 + B_n\overline{\check{B}}_n = 2b_n\check{B}_n$
iii) $\check{B}_{n+2} = 6\check{B}_{n+1} - \check{B}_n$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat

i) Bi-periyodik balans sayıları, kuaterniyonları ve kuaterniyonların eşlenik tanımından yararlanılarak

$$\check{B}_n + \overline{\check{B}_n} = \sum_{l=0}^{3} b_{n+l}e_l + \left(\overline{\sum_{l=0}^{3} b_{n+l}e_l}\right)$$

eşitliği, buradan da

$$\begin{aligned}\check{B}_n + \overline{\check{B}_n} &= b_n e_0 + b_{n+1}e_1 + b_{n+2}e_2 + b_{n+3}e_3 + b_n\overline{e_0} + b_{n+1}\overline{e_1} + b_{n+2}\overline{e_2} + b_{n+3}\overline{e_3} \\ &= 2b_n + e_1\left(b_{n+1} - b_{n+1}\right) + e_2\left(b_{n+2} - b_{n+2}\right) + e_3\left(b_{n+3} - b_{n+3}\right) \\ &= 2b_n 6\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

ii) Benzer şekilde, önce

$$\begin{aligned}\check{B}_n^2 + \check{B}_n\overline{\check{B}}_n &= \left(\sum_{l=0}^{3} b_{n+l}e_l\right)^2 + \sum_{l=0}^{3} b_{n+l}e_l\left(\overline{\sum_{l=0}^{3} b_{n+l}e_l}\right) \\ &= b_n^2e_0^2 + b_nb_{n+1}e_0e_1 + b_nb_{n+2}e_0e_2 + b_nb_{n+3}e_0e_3 \\ &\quad + b_{n+1}b_ne_1e_0 + b_{n+1}^2e_1^2 + b_{n+1}b_{n+2}e_1e_2 + b_{n+1}b_{n+3}e_1e_3 \\ &\quad + b_{n+2}b_ne_2e_0 + b_{n+2}b_{n+1}e_2e_1 + b_{n+2}^2e_2^2 + b_{n+2}b_{n+3}e_2e_3 \\ &\quad + b_{n+3}b_ne_3e_0 + b_{n+3}b_{n+1}e_3e_1 + b_{n+3}b_{n+2}e_3e_2 + b_{n+3}^2e_3^2 \\ &\quad + b_n^2e_0\overline{e_0} + b_nb_{n+1}e_0\overline{e_1} + b_nb_{n+2}e_0\overline{e_2} + b_nb_{n+3}e_0\overline{e_3} \\ &\quad + b_{n+1}b_ne_1\overline{e_0} + b_{n+1}^2e_1\overline{e_1} + b_{n+1}b_{n+2}e_1\overline{e_2} + b_{n+1}b_{n+3}e_1\overline{e_3} \\ &\quad + b_{n+2}b_ne_2\overline{e_0} + b_{n+2}b_{n+1}e_2\overline{e_1} + b_{n+2}^2e_2\overline{e_2} + b_{n+2}b_{n+3}e_2\overline{e_3} \\ &\quad + b_{n+3}b_ne_3\overline{e_0} + b_{n+3}b_{n+1}e_3\overline{e_1} + b_{n+3}b_{n+2}e_3\overline{e_2} + b_{n+3}^2e_3\overline{e_3}\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Buradan da gerekli özellikler kullanılarak

$$\begin{aligned}\check{B}_n^2 + \check{B}_n\overline{\check{B}}_n &= 2b_nb_ne_0 + 2b_nb_{n+1}e_1 + 2b_nb_{n+2}e_2 + 2b_nb_{n+3}e_3 \\ &= 2b_n\check{B}_n\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Daha sonra

$$\begin{aligned}6\check{B}_{n+1} - \check{B}_n &= 6\sum_{l=0}^{3} b_{(n+1)+l}e_l - \sum_{l=0}^{3} b_{n+l}e_l \\ &= 6b_{n+1}e_o + 6b_{n+2}e_1 + 6b_{n+3}e_2 + 6b_{n+4}e_3 \\ &\quad - b_ne_o - b_{n+1}e_1 - b_{n+2}e_2 - b_{n+3}e_3\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Sonuç olarak

$$\begin{aligned}6\check{B}_{n+1} - \check{B}_n &= (6b_{n+1}e_o - b_ne_o) + (6b_{n+2}e_1 - b_{n+1}e_1) \\ &\quad + (6b_{n+3}e_2 - b_{n+2}e_2) + (6b_{n+4}e_3 - b_{n+3}e_3) \\ &= b_{n+2}e_o + b_{n+3}e_1 + b_{n+4}e_2 + b_{n+5}e_3 \\ &= \sum_{l=0}^{3} b_{(n+2)+l}e_l \\ &= \check{B}_{n+2}\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, bi-periyodik balans sayı dizisi tanımlanmış ve bu dizi için karakteristik denklem, üreteç fonksiyonu ve Binet formülü gibi bazı temel kavramlar elde edilmiştir. Ayrıca bi-periyodik balans sayılarının özelliklerinden yararlanarak bi-periyodik balans kuaterniyonlarının tanımı verilmiştir. Bi-periyodik balans sayıları ve kuaterniyonları için Catalan, Cassini ve d'Ocagne gibi bazı önemli eşitlikler verilmiş ve bi-periyodik balans sayıları ile kuaterniyonları arasındaki ilişki araştırılmıştır. Ayrıca bi-periyodik balans matris dizisi verilmiş olup bazı özellikleri elde edilmiştir.

Elde edilen verilerden yararlanılarak bi-periyodik balans dizisinin periyodu incelenebilir. Ayrıca daha önce üzerinde çalışılmış olan bi-periyodik Fibonacci, Lucas ve Jacobsthal dizileri için de matris dizileri elde edilebilir.

KAYNAKLAR

1. Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas numbers with applications.* New York: Wiley, 1-100.

2. Vajda, S. (1989). *Fibonacci&Lucas numbers, and the golden section, Theory and applications(First Edition).* England: Ellis Horwood Limited, 9-10.

3. Dunlap, R. A. (1997). *The golden ratio and Fibonacci numbers.* Singapore: World Scientific, 1-77.

4. Hoggatt Jr., V. E. (1969). *Fibonacci and Lucas numbers.* Boston: Houghton Mifflin Company, 7-9.

5. Edson, M. and Yayenie, O. (2009). A new generalization of Fibonacci sequences and extended Binet's formula. *Integers,* 9(6), 639-654.

6. Yayenie, O. (2011). A note on generalized Fibonacci sequence. *Applied Mathematics and Computation,* 217(12), 5603-5611.

7. Bilgici, G. (2014). Two generalizations of Lucas sequence. *Applied Mathematics and Computation,* 245, 526-538.

8. Uygun, Ş. and Owusu, E. (2016). A new generalization of Jacobsthal sequences. *Journal of Mathematical Analysis,* 7(5), 28-39.

9. Kızılateş, C., Çetin Firengiz, M. and Tuğlu, N. (2017). q-Generalization of biperiodic Fibonacci and Lucas polynomials. *Journal of Mathematical Analysis*, 8(5), 71-85.

10. Taşcı, D. and Özkan Kızılırmak, G. (2016). On the periods of bi-periodic Fibonacci and bi-periodic Lucas numbers. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Article ID:7341729, 1-5.

11. Özkan Kızılırmak, G. (2017) *Bi-periyodik Fibonacci ve bi-periyodik Lucas dizilerinin periyotları üzerine*, Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 43-59.

12. Tan, E. (2017). General sum formula for bi-periodic Fibonacci and Lucas numbers. *Integers,* 17, 639-654.

13. Horadam, A. F. (1961). A generalized Fibonacci sequence. *The American Mathematical Monthly,* 68(5), 455-459.

14. Horadam, A. F. (1996). Jacobsthal representation numbers. *Fibonacci Quarterly*, 34(1), 40-54.

15. Falcon, S. (2011). On the k-Lucas numbers. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences,* 21(6), 1039-1050.

16. Jordan, J. H. (1965). Gaussian Fibonacci and Lucas numbers. *Fibonacci Quarterly*, 3, 315-318.

17. Behera, A. and Panda, G. K. (1999). On the square roots of triangular numbers. *Fibonacci Quarterly*, 37(2), 98-105.

18. Panda, G. K. (2007). Sequence balancing and cobalancing numbers. *Fibonacci Quarterly*, 45(3), 265-271.

19. Liptai, K., Luca, F., Pinter, A. and Szalay, A. (2009). Generalized balancing numbers. *Indagationes Mathematicae,* 20(1), 87-100.

20. Özkoç, A. and Tekcan, A. (2017). On k-balancing numbers. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics,* 23(3), 38-52.

21. Horadam, A. F. (1963). Complex Fibonacci numbers and Fibonacci quaternions. *The American Mathematical Monthly,* 70(3), 289-291.

22. Halıcı, S. (2012). On Fibonacci quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras,* 22(2), 321-327.

23. Kızılateş, C., Catarino, P. and Tuğlu, N. (2019). On the bicomplex generalized tribonacci quaternions. *Mathematics*, 7(1), 80-87.

24. Tan, E., Yılmaz, S. and Şahin, M. (2016). A note on bi-periodic Fibonacci and Lucas quaternions. *Chaos, Solitions and Fractals,* 85, 138-142.

25. Nanda, S. (1985). *Number theory.* New Delhi: Allied Publishers, 84-108.

26. Ray, P. K. (2009). *Balancing and cobalancing numbers*, PhD Thesis, National Institute of Technology, India, 12-50.

27. Huntley, H. E. (1970). *The divine proportion: A study in mathematical beauty.* New York: Courier Dover Publications, 56-58.

28. Ball, K. M. (2003). *Strange curves, counting rabbits, and other mathematical explorations.* New Jersey: Princeton University Press, 155-158.

29. Tattersall, J. J. (1999). *Elementary number theory in nine chapters.* New York: Cambridge University Press, 285-286.

30. Özkoç, A. (2015). Tridiagonal matrices via $k-$balancing number. *British Journal of Mathematics & Computer Science,* 10(4), 1-11.

31. Hamilton, W. R. (1853) *Lectures on quaternions*, Dublin.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	:	SEVGİ, Emre
Uyruğu	:	T.C.
Doğum tarihi ve yeri	:	1990, Kadıköy
Medeni hali	:	Evli
e-mail	:	emresevgi@gazi.edu.tr



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Doktora	Gazi Üniversitesi/Matematik	Devam ediyor
Yüksek lisans	Abant İzzet Baysal Üniversitesi/Matematik	2014
Lisans	Abant İzzet Baysal Üniversitesi/Matematik	2012
Lise	İhsaniye Süper Lisesi	2008

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2014-Halen	Gazi Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Taşcı, D. and Sevgi, E. (2017). Pell and Pell-Lucas numbers associated with Brocard-Ramanujan equation. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science,* 7, 59-62.

2. Taşcı, D. and Sevgi, E. (2020). Bi-periodic balancing numbers. *Journal of Science and Arts,* No.1(50), 75-84.

3. Taşcı, D., Büyükköse, Ş., Özkan Kızılırmak, G. and Sevgi, E. (2020). Properties of Lucas-sum graph. *Journal of Science and Arts,* No.2(51) 313-316.

4. Taşcı, D., Özkan Kızılırmak, G., Sevgi, E. and Büyükköse, Ş. (Baskıda). The bounds for the largest eigenvalues of Fibonacci-sum and Lucas-sum graphs. *Turkic World Mathematical Society Journal of Applied and Engineering Mathematics.*

5. Sevgi, E. and Taşcı, D. (Baskıda). Bi-periodic balancing quaternions. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science.*

6. Taşcı, D., Sevgi, E., Özkan Kızılırmak, G. (2018, July). *Bi-periodic balancing numbers*, Paper presented at International Conference on Mathematics, "An İstanbul Meeting for World Marhematicians", Minisymposium on Approximation Theory&Minisymposium on Math Education, İstanbul, Turkey.

7. Taşcı, D., Özkan Kızılırmak, G., Sevgi, E. (2018, July). *Lambert series in the summation of reciprocals in Gaussian Fibonacci sequences*, Paper presented at International Conference on Mathematics, "An İstanbul Meeting for World Marhematicians", Minisymposium on Approximation Theory&Minisymposium on Math Education, İstanbul, Turkey.

8. Taşcı, D., Özkan Kızılırmak, G., Büyükköse, Ş., Sevgi, E. (2019, 28-31 Ağustos). *Lucas-toplam grafların özellikleri*, Uluslararası 30 Ağustos Bilimsel Araştırmalar Sempozyumunda sunuldu, İzmir.

9. Taşcı, D., Özkan Kızılırmak, G., Büyükköse, Ş., Sevgi, E. (2019, 28-31 Ağustos). *Fibonacci-toplam ve Lucas-toplam graflarının en büyük özdeğerleri için sınırlar*, Uluslararası 30 Ağustos Bilimsel Araştırmalar Sempozyumunda sunuldu, İzmir.

Hobiler

Spor yapmak, Koleksiyon yapmak.



GAZİ GELECEKTİR...