
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

BELİRLİ OPERATÖRLERİ İÇEREN LİNEER OLMAYAN BİR SİSTEM İÇİN LYAPUNOV TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Başak Ecem BİNGÜL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2024

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Başak Ecem BİNGÜL

26.01.2024

BELİRLİ OPERATÖRLERİ İÇEREN LİNEER OLMAYAN BİR SİSTEM İÇİN LYAPUNOV TİPİ EŞİTSİZLİKLER

(Yüksek Lisans Tezi)

Başak Ecem BİNGÜL

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2024

ÖZET

Bu tezde Dirichlet veya anti periyodik sınır koşulu altında p relativistik ve q eğrilik operatörlerini içeren belirli bir lineer olmayan diferensiyel denklem sistemi için Lyapunov tipi eşitsizlikler göz önüne alınmıştır. Konu ile ilgili temel tanım, teorem ve sonuçlar verildikten sonra ikinci basamaktan, yüksek basamaktan sınır değer problemleri ve bazı sınır şartları altında diferensiyel denklemlerden oluşan sistemler için literatürdeki bazı sonuçlara yer verilmiştir. Tamamen orijinal sonuçlardan oluşan son bölümde, lineer olmayan bir diferensiyel denklem sistemi içeren sınır değer problemleri için yeni Lyapunov tipi eşitsizlikler verildi. Ek olarak, elde edilen eşitsizliklerin bazı uygulamaları verildi. Özel olarak, bizim sonuçların önemini gösteren bir örnek verildi.

Bilim Kodu	:	20406
Anahtar Kelimeler	:	Lyapunov tipi eşitsizlikler, p relativistik operatörü, q eğrilik operatörü, diferensiyel denklem sistemleri
Sayfa Adedi	:	67
Danışman	:	Prof. Dr. Mustafa Fahri AKTAŞ

LYAPUNOV-TYPE INEQUALITIES FOR A NONLINEAR SYSTEM INCLUDING CERTAIN OPERATORS

(M. Sc. Thesis)

Başak Ecem BİNGÜL

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2024

ABSTRACT

In this thesis, Lyapunov-type inequalities are considered for a certain nonlinear differential equation system involving p relativistic and q curvature operators under Dirichlet or antiperiodic boundary conditions. After providing fundamental definitions, theorems, and results related to the topic, some results from the literature for second-order, higher-order boundary value problems and a differential equation system under certain boundary conditions are presented. In the final section, consisting entirely of original results, new Lyapunov-type inequalities are provided for boundary value problems involving a nonlinear differential equation system. Additionally, some applications of the obtained inequalities are given. Specifically, an example demonstrating the significance of our results is provided.

Science Code	:	20406
Keywords	:	Lyapunov-type inequalities, p-relativistic operator, q-precribed curvature operator, differential equation systems
Number of pages	:	67
Supervisor	:	Prof. Dr. Mustafa Fahri AKTAŞ

TEŞEKKÜR

İlk olarak bu tezi hazırlarken konunun belirlenmesinden tezin yazımına kadar her aşamada bilgi birikimleri, deneyimleri, sabrı ve motivasyonuyla yanımda olan ve bana rehberlik eden değerli bilim insanı Prof. Dr. Mustafa Fahri AKTAŞ'a, bu uzun yolculukta her zaman yanımda olan kıymetli dostlarım Ayşem YÜCESOY, Fadime UĞUR, İrem DURUKAN, Meryem YILDIRIM'a, son ve en özel olarak hayatım boyunca destekleriyle beni hiç bir zaman yalnız bırakmayan başta kıymetli annem olmak üzere sevgili aileme teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

SİMGELER viii

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL KAVRAMLAR 3

2.1. Başlangıç Değer Problemleri için Varlık Teklik Teoremleri 3

2.2. Sınır Değer Problemleri için Varlık Teklik Teoremleri 14

2.3. Diferensiyel Denklemlerden Oluşan Sistem için Varlık Teklik Teoremleri ... 19

3. LİTERATÜRDEKİ LYAPUNOV TİPİ EŞİTSİZLİKLER 27

3.1. Literatürdeki İkinci Basamaktan Sınır Değer Problemleri için Lyapunov Tipi Eşitsizlikler 27

3.2. Literatürdeki Yüksek Basamaktan Sınır Değer Problemleri için Lyapunov Tipi Eşitsizlikler 31

3.3. Literatürdeki Diferensiyel Denklem Sistemleri için Lyapunov Tipi Eşitsizlikler 34

4. LYAPUNOV TİPİ EŞİTSİZLİKLER ÜZERİNE YENİ TEOREMLER VE SONUÇLAR 45

5. SONUÇ VE ÖNERİLER 61

KAYNAKLAR 63

ÖZGEÇMİŞ 67

SİMGELER

Bu çalışmada kullanılan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
ϕ_p	$\frac{\lvert\bullet\rvert^{p-2}\bullet}{(1-\lvert\bullet\rvert^{p})^{\frac{p-1}{p}}}$ (p relativistik operatörü)
Φ_q	$\frac{\lvert\bullet\rvert^{q-2}\bullet}{(1+\lvert\bullet\rvert^{q})^{\frac{q-1}{q}}}$ (q eğrilik operatörü)
φ_γ	$\lvert\bullet\rvert^{\gamma-2}\bullet$ (yarı lineer operatör)
h_k^+	$maks\{0,h_k(t)\}$ (h_k fonksiyonunun negatif olmayan kısmı)
$C^1[a,b]$	$[a,b]$ aralığında sürekli ve birinci basamaktan türevlenebilir fonksiyonlar kümesi
$\left\|x_m^{'}\right\|_\infty$	$x_m^{'}$ normu
$\mathscr{A}_k$	$\left\{h_k^+ \in L_{loc}^1(a,b) : \int_a^b h_k^+(s)\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{[(s-a)(b-s)]^{p_i-1}}{(s-a)^{p_i-1}+(b-s)^{p_i-1}}\right)^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}} ds<\infty\right\}$
L_{loc}^1	Yerel olarak integrallenebilir fonksiyonların uzayı

1. GİRİŞ

$a,b \in \mathbb{R}$ için $a < b$ iken $\forall t \in (a,b)$ için $x(t) \neq 0$ ve $h(t)$ reel değerli sürekli pozitif bir fonksiyon olmak üzere $x(t)$, ikinci basamaktan

$$-x'' = h(t)x$$

diferensiyel denkleminin

$$x(a) = 0 = x(b)$$

Dirichlet sınır koşulunu sağlayan aşikar olmayan çözümü olmak üzere

$$\int_a^b h(s)ds \geq \frac{4}{b-a}$$

eşitsizliğine klasik Lyapunov eşitsizliği denir. Bu eşitsizlik ve birçok genellemeleri diferensiyel denklemlerde, fark denklemlerinde ve zaman skalasında; salınım teorisi, kararlılık, varlık teklik teoremleri, özdeğer problemleri, diskonjuge vb. uygulama alanlarına sahiptir. Lyapunov'un temel makalesinin [1] ortaya çıkışından bu yana çeşitli ispatlar, genellemeler ve iyileştirmeler ortaya çıkmıştır [2-7].

Bu tezde farklı sınır koşullarına sahip lineer olmayan diferensiyel denklem sistemleri için elde ettiğimiz yeni ve orijinal Lyapunov tipi eşitsizliklere ilişkin sonuçlardan bahsedilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde yüksek basamaktan diferensiyel denklem ve diferensiyel denklemlerden oluşan sistemlere ilişkin temel kavramlar verilecektir [8].

2.1. Başlangıç Değer Problemleri için Varlık Teklik Teoremleri

Bu alt bölümde bağımsız değişkenin bir tek değerine ilişkin başlangıç değer problemlerinin varlığı ve tekliği üzerinde durulacaktır.

2.1.1. Tanım (Birinci Basamaktan Lineer Diferensiyel Denklemin Çözümü)

$I = \{t : t \in \mathbb{R},\ a < t < b\}$ üzerinde tanımlı reel değerli bir $\phi(t)$ fonksiyonu,

(i) $t \in I$ için $\phi'(t)$ var

(ii) $t_0 \in I$ için $\phi(t_0) = x_0$

(iii) $(t, \phi(t)) \in I \times \mathbb{R}$

(iv) $t \in I$ için $\phi'(t) = p(t)\phi(t) + q(t)$

şartlarını sağlıyorsa

$$\begin{cases} x' = p(t)x + q(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

başlangıç değer probleminin bir çözümüdür.

Şimdi birinci basamaktan lineer Eş. 2.1 başlangıç değer probleminin varlık ve tekliği için yeter şartlar veren bir teoremden ispatı ile birlikte bahsedilecektir.

2.1.1. Teorem

$p(t)$ ve $q(t)$ fonksiyonları bir $I \subset \mathbb{R}$, aralığında sürekli fonksiyonlar olsun. Ayrıca, $t_0 \in I$ olsun. Bu durumda Eş. 2.1 başlangıç değer probleminin I aralığında bir tek $x(t)$ çözümü vardır.

İspat

$x' = p(t)x + q(t)$ diferensiyel denkleminin her iki yanını $e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds}$ ile çarpılırsa

$$x'(t)e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds} - p(t)x(t)e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds} = q(t)e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds} \tag{2.2}$$

elde edilir. Eş. 2.2 eşitliğinin sol tarafı iki fonksiyonun çarpımının türevi şeklinde yazılırsa

$$\left(x(t)e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds} \right)' = q(t)e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds} \tag{2.3}$$

bulunur. Eş. 2.3'ün t_0'dan t'ye integral alınırsa

$$\int_{t_0}^{t} \left(x(s)e^{-\int_{t_0}^{s} p(u)du} \right)' ds = \int_{t_0}^{t} q(s)e^{-\int_{t_0}^{s} p(u)du} ds, \tag{2.4}$$

$$x(s)e^{-\int_{t_0}^{s} p(u)du} \Big|_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} q(s)e^{-\int_{t_0}^{s} p(u)du} ds \tag{2.5}$$

ve

$$x(t)e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds} - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} q(s)e^{-\int_{t_0}^{s} p(u)du} ds \tag{2.6}$$

elde edilir. $x(t)$ yalnız bırakılırsa

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds} \left[x(t_0) + \int_{t_0}^{t} q(s) e^{-\int_{t_0}^{s} p(u)du} ds \right] \tag{2.7}$$

çözümü elde edilir. Eş. 2.7'den $x(t_0) = x_0$ başlangıç şartının sağlandığı açıkça görülür. Tersine Eş. 2.7'nin türevini alıp diferensiyel denklemde yerine yazılırsa diferensiyel denklemi sağlar.

2.1.2. Tanım (Birinci Basamaktan Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemin Çözümü)

I üzerinde tanımlı reel değerli bir $\phi(t)$ fonksiyonu,

(i) $t \in I$ için $\phi'(t)$ var

(ii) $t_0 \in I$ için $\phi(t_0) = x_0$

(iii) $(t, \phi(t)) \in I \times \mathbb{R}$

(iv) $t \in I$ için $\phi'(t) = g(t, \phi(t))$

şartlarını sağlıyorsa

$$\begin{cases} x' = g(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.8}$$

başlangıç değer probleminin bir çözümüdür.

Şimdi Eş. 2.8 başlangıç sınır değer problemine karşılık gelen integral denklemini içeren bir lemma verilecektir.

2.1.1. Lemma

$g(t,x)$ fonksiyonu $R(a,b) = \{(t,x) : |t-t_0| \leq a,\ |x-x_0| \leq b\}$ bölgesinde sürekli ise Eş. 2.8 başlangıç değer problemi, $|t-t_0| \leq a$ aralığındaki her t için

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(s,x(s))\,ds \tag{2.9}$$

integral denklemine denktir [8, Lemma 1.3.1].

Şimdi $|t-t_0| \leq a$ olmak üzere Eş. 2.9 integral denkleminin bir çözümünü bulmakta yardımcı olacak ardışık yaklaşımlar metodu tanımlanacaktır. Bu metot; $x_0(t), x_1(t), ..., x_n(t)$, Eş. 2.9 integral denkleminin bir çözümüne ardışık yaklaşımlar olmak üzere $n = 1,2,...$ için

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x_0 \\ x_1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} g(s,x_0(s))\,ds \\ &\vdots \\ x_n(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} g(s,x_{n-1}(s))\,ds \end{aligned} \tag{2.10}$$

olarak tanımlanan fonksiyonların bir dizisini gerektirir ve böylece Eş. 2.8 başlangıç değer probleminin bir çözümüdür.

Şimdi birinci basamaktan lineer olmayan Eş. 2.8 başlangıç değer probleminin varlık ve tekliği için yeter şartlar veren bir teoremi vermeden önce sonuçlarda yardımcı olacak temel kavram, tanım ve lemmalardan bahsedilecektir.

$g(t,x)$ kapalı ve sınırlı $R(a,b)$ bölgesinde sürekli ise o bölgede sınırlıdır. Yani, $(t,x) \in R(a,b)$ için

$$|g(t,x)| \leq \mu \tag{2.11}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $\mu > 0$ vardır. Şimdi $h = \min\left(a, \frac{b}{\mu}\right)$ olsun. $J = \{t : |t-t_0| \leq h\}$ aralığı ve R'ye göre daha küçük bir $D = \{(t,x) : |t-t_0| \leq h, |x-x_0| \leq b\}$ dikdörtgensel bölgesi göz önüne alınsın.

2.1.2. Lemma

$\frac{\partial g(t,x)}{\partial x}$, D bölgesinde sürekli ise (t,x_1), $(t,x_2) \in D$ için

$$|g(t,x_1) - g(t,x_2)| \leq K|x_1 - x_2| \tag{2.12}$$

olacak şekilde pozitif bir K sayısı vardır [8, Lemma 1.3.2].

2.1.3. Tanım (Lipschitz Şartı)

D bölgesindeki her $(t,x_1),(t,x_2)$ için Eş. 2.12 eşitsizliğini sağlayan bir g fonksiyonuna D bölgesinde bir Lipschitz şartını sağladığı söylenir ve K Lipschitz sabiti olarak tanımlanır.

Şimdi Eş. 2.10 ile tanımlanan $\{x_n(t)\}$ fonksiyonlar dizisinin, J üzerinde Eş. 2.9 integral denkleminin çözümünü temsil eden bir $x(t)$ limit fonksiyonuna yakınsadığı ispat edilecektir. Bunun için aşağıdaki sonuca ihtiyaç vardır.

2.1.3. Lemma

$g(t,x)$ fonksiyonu bir D bölgesinde sürekli ise Eş. 2.10 ile tanımlanan Picard ardışık yaklaşımlar $\{x_n(t)\}$ dizisi J aralığında süreklidir ve her $t \in J$ için $(t,x_n(t)) \in D$'dir [8, Lemma 1.3.3].

İspat

$t \in J$ için $\{x_n(t)\}$'nin J aralığında sürekli olduğu gösterilsin. $x_0(t) = x_0$ olduğundan $x_0(t)$ vardır ve J'de süreklidir. Eş. 2.10 ve D bölgesinde g fonksiyonunun sürekli olmasından tüm $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ ardışık yaklaşımları vardır ve J aralığında süreklidir.

Şimdi $(t,x_n(t)) \in D$ olduğu gösterilecektir. Bunun için $t \in J$ ve $k = 1,2,...,n$ için $x_k(t) \in (x_0-b, x_0+b)$ olduğu gösterilmelidir. g, kapalı ve sınırlı R bölgesinde sürekli olduğundan $\forall (t,x) \in \mathbb{R}$ için $|g(t,x)| \leq \mu$ olacak şekilde $\mu > 0$ vardır. $t \in J$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
|x_1(t)-x_0| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^{t} g(s,x_0(s))\,ds - x_0 \right| = \left| \int_{t_0}^{t} g(s,x_0(s))\,ds \right| \leq \mu\,|t-t_0| \\
&\leq \mu h \leq b \Longrightarrow (t,x_1(t)) \in D \\
|x_2(t)-x_0| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^{t} g(s,x_1(s))\,ds - x_0 \right| = \left| \int_{t_0}^{t} g(s,x_1(s))\,ds \right| \leq \mu\,|t-t_0| \\
&\leq \mu h \leq b \Longrightarrow (t,x_2(t)) \in D \\
&\vdots \\
|x_n(t)-x_0| &\leq \mu\,|t-t_0| \leq \mu h \leq b \Longrightarrow (t,x_n(t)) \in D
\end{aligned} \tag{2.13}$$

sağlanır ve $k = 1,2,...,n$ için $x_k(t) \in (x_0-b, x_0+b)$ olduğundan $(t,x_n(t)) \in D$ olur.

Şimdi birinci basamaktan lineer olmayan Eş. 2.8 başlangıç değer probleminin varlık ve tekliği için yeter şartlar veren bir teoremden ispatı ile birlikte bahsedilecektir.

2.1.2. Teorem

$g(t,x)$, $R(a,b)$ kapalı ve sınırlı bölgesinde t ve x'in sürekli bir fonksiyonu ve R'de Lipschitz şartını sağlar ise J aralığında Eş. 2.8 başlangıç değer probleminin bir tek $x(t)$ çözümü vardır [8, Teorem 1.3.3].

İspat

$\{x_n(t)\}$ fonksiyonlar dizisinin yakınsaklığını göstermek için ardışık yaklaşımlar arasındaki fark tahmin edilecektir. $t \in [t, t_0+h]$ olmak üzere

$$v_n(t) = x_n(t) - x_{n-1}(t) \tag{2.14}$$

olsun. $t \in [t, t_0 + h]$ için Lemma 2.1.3.'ten

$$|v_1(t)| \leq \mu (t - t_0) \tag{2.15}$$

eşitsizliği sağlanır ve $(t, x_0(t))$,$(t, x_1(t)) \in D$ olur. Yani, g, D bölgesinde Lipschitz şartını sağladığından $h = \min\left(a, \frac{b}{\mu}\right)$ olmak üzere

$$|v_1(t)| \leq |x_1(t) - x_0(t)| \leq \mu (t - t_0) \leq \mu h \leq b \tag{2.16}$$

eşitsizliği sağlanır. Benzer şekilde $\mu > 0$ sabiti için g fonksiyonunun $|g(t,x)| < \mu$ ve $h = \min\left(a, \frac{b}{\mu}\right)$ olduğu göz önüne alınırsa $t \in [t_0, t_0 + h]$ ve $m = 1, 2, ..., n$ için

$$\begin{aligned}
|v_2(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} (g(s, x_1(s)) - g(s, x_0(s)))\, ds \right| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} |(g(s, x_1(s)) - g(s, x_0(s)))|\, ds \\
&\leq K \int_{t_0}^{t} |x_1(s) - x_0(s)|\, ds = K \int_{t_0}^{t} |v_1(s)|\, ds \\
&\leq K\mu \int_{t_0}^{t} (s - t_0)\, ds = K\mu \frac{(t - t_0)^2}{2!} \\
|v_3(t)| &\leq \mu K^2 \frac{(t - t_0)^3}{3!} \\
&\vdots \\
|v_m(t)| &\leq \mu K^{m-1} \frac{(t - t_0)^m}{m!}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

eşitsizliği elde edilir. $t \in [t_0 - h, t_0]$ için ispat $t \in [t_0, t_0 + h]$ için yapılan ispata benzerdir. Böylece $t \in J$ için

$$|v_n(t)| \leq \mu K^{n-1} \frac{(t - t_0)^n}{n!} \leq \mu K^{n-1} \frac{h^n}{n!} \tag{2.18}$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi

$$x_0(t) + v_1(t) + v_2(t) + ... + v_n(t) + ... \tag{2.19}$$

şeklindeki sonsuz seri göz önüne alınsın. Bu serinin n-inci kısmi toplamlar dizisi $x_n(t)$'dir. Yani

$$x_n(t) = x_0 + \sum_{m=1}^{n} v_m(t) \tag{2.20}$$

sağlanır. Sonuç olarak $\{x_n(t)\}$ dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart Eş. 2.19 sonsuz serisinin yakınsak olmasıdır. Eş. 2.18 eşitsizliğinden

$$x_0 + \sum_{m=1}^{\infty} |v_m(t)| \leq x_0 + \mu \sum_{m=1}^{\infty} K^{m-1} \frac{h^m}{m!} \tag{2.21}$$

eşitsizliği sağlanır. Oran testinden Eş. 2.21 eşitsizliğinin sağ tarafındaki seri yakınsaktır. Böylece karşılaştırma testinden Eş. 2.19 sonsuz serisi ayrıca yakınsaktır (aslında düzgün yakınsaktır). J üzerinde Eş. 2.19 serisinin toplamı $x(t)$ olsun. Böylece Eş. 2.20'den

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t) \tag{2.22}$$

olur. Son olarak limit fonksiyonu $x(t)$'nin Eş. 2.9 integral denklemini sağladığı gösterilsin.

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(s, x_{n-1}(s))\, ds \tag{2.23}$$

olduğundan eşitliğin her iki tarafının $n \to \infty$ iken limiti alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} g(s, x_{n-1}(s))\, ds \tag{2.24}$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \lim_{n\to\infty} g(s, x_{n-1}(s))\, ds \tag{2.25}$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g\left(s, \lim_{n\to\infty} x_{n-1}(s)\right) ds \tag{2.26}$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(s, x(s))\, ds \tag{2.27}$$

elde edilir. Bu ise çözümün varlığının ispatını tamamlar. Şimdi çözümün tekliğini göstermek için $x(t)$ ve $v(t)$, Eş. 2.8 başlangıç değer probleminin herhangi iki çözümü olsun. $w(t)$, $w(t) = |x(t) - v(t)|$ şeklinde tanımlansın. $w(t_0) = 0$ sağlanır. Ayrıca

$$w(t) = |x - v| \leq \int_{t_0}^{t} |g(s, x(s)) - g(s, v(s))|\, ds \leq K \int_{t_0}^{t} w(s) ds \tag{2.28}$$

$$e^{-K(t-t_0)} \left[w - K \int_{t_0}^{t} w ds \right] \leq 0 \tag{2.29}$$

veya

$$\frac{d}{dt} \left[e^{-K(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} w(s) ds \right] \leq 0 \tag{2.30}$$

elde edilir. Eş. 2.30 eşitsizliğinin t_0'dan t'ye integrali alınırsa

$$e^{-K(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} w(s) ds \leq 0 \Rightarrow \int_{t_0}^{t} w(s) ds \leq 0 \Rightarrow w(t) \leq 0 \tag{2.31}$$

elde edilir. J üzerinde $w(t) \equiv 0$ sağlanmaz ise $w(t) \geq 0$ olması ile çelişir. Sonuç olarak, $x(t) = v(t)$ olacağından çözüm tektir.

2.1.4. Tanım (Yüksek Basamaktan Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemin Çözümü)

Eğer $t \in I = (a,b)$ için tanımlı ve n defa türevlenebilir $\phi(t)$ fonksiyonu,

$$\phi^{(n)}(t) = g\left(t, \phi(t), \phi^{'}(t), ..., \phi^{(n-1)}(t)\right) \tag{2.32}$$

eşitliğini sağlıyor ise $a < t < b$ üzerinde

$$x^{(n)}(t) = g\left(t, x(t), x^{'}(t), ..., x^{(n-1)}(t)\right) \tag{2.33}$$

diferensiyel denkleminin bir çözümü $\phi(t)$ fonksiyonu olarak tanımlanır.

Eş. 2.33 diferensiyel denklemini, birinci basamaktan bir diferensiyel denklem sistemine çevirmek için

$$\begin{cases} x & = & x_1 \\ x' & = & x_2 \\ \vdots & & \\ x^{(n-1)} & = & x_n \end{cases} \tag{2.34}$$

denilirse

$$\begin{cases} x_1^{'} & = & x_2 \\ x_2^{'} & = & x_3 \\ \vdots & & \\ x_n^{'} & = & g(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases} \tag{2.35}$$

elde edilir.

Eş. 2.35 diferensiyel denklem sistemini vektör-matris notasyonu şeklinde göstermek için

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ denilirse } \; X^{'}=\begin{bmatrix} x_1^{'} \\ x_2^{'} \\ \vdots \\ x_n^{'} \end{bmatrix} \text{ ve } \; F(t,X)=\begin{bmatrix} f_1(t,X) \\ f_2(t,X) \\ \vdots \\ f_n(t,X) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ g(t,x_1,x_2,...,x_n) \end{bmatrix}$$

alınırsa

$$\begin{cases} x_1^{'} &= f_1(t,x_1,x_2,...,x_n) \\ x_2^{'} &= f_2(t,x_1,x_2,...,x_n) \\ \vdots & \\ x_n^{'} &= f_n(t,x_1,x_2,...,x_n) \end{cases} \tag{2.36}$$

biçiminde bir diferensiyel denklem sistemi elde edilir. Böylece vektör-matris notasyonu ile birinci basmaktan diferensiyel denklem sistemi,

$$X^{'}=F(t,X) \tag{2.37}$$

biçiminde yazılır.

$f_1,f_2,...,f_n, B\subset\mathbb{R}^{n+1}$'de verilen fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{cases} x_1^{'} &= f_1(t,x_1,x_2,...,x_n) \\ x_2^{'} &= f_2(t,x_1,x_2,...,x_n) \\ \vdots & \\ x_n^{'} &= f_n(t,x_1,x_2,...,x_n) \end{cases} \tag{2.38}$$

diferensiyel denklem sistemi göz önüne alınsın. Bu diferensiyel denklem sisteminin çözümü için aşağıdaki tanım verilir.

2.1.5. Tanım (Diferensiyel Denklem Sisteminin Çözümü)

Eğer $t \in I$ için $\phi = (\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n)$ fonksiyonu,

(i) $\phi_1^{'}(t), ..., \phi_n^{'}(t)$ var

(ii) $(t, \phi_1(t), ..., \phi_n(t)) \in B \subset \mathbb{R}^{n+1}$

(iii) $i = 1, 2, ..., n$ için $\phi_i^{'}(t) = f_i(t, \phi_1(t), ..., \phi_n(t))$

şartlarını sağlıyorsa I üzerinde $\phi(t)$ fonksiyonuna Eş. 2.38 diferensiyel denklem sisteminin çözümü denir.

Diferensiyel denklem sistemin çözümünü bulmak için Özdeğer ve Özvektör, Belirsiz katsayılar, Parametrelerin değişimi, Üstel Fonksiyon, Yok etme, Laplace dönüşümü ile Sylvester ve Putzer Metodu gibi çeşitli yöntemler yardımıyla kantitatif inceleme yapılabilmekte ve elemanter yöntemler ile çözüm bulunabilmektedir. Ancak, bu tez boyunca kalitatif inceleme yapılarak çözümü bulmadan çözümün davranışı incelenecektir.

2.2. Sınır Değer Problemleri için Varlık Teklik Teoremleri

Önceki bölümde bağımsız değişkenin bir tek değerine ilişkin başlangıç değer problemlerinin varlığı ve tekliği üzerinde durulmuştur. Bu bölümde ise bağımsız değişkenlerinin iki değerine ilişkin olarak sınır değer problemlerinin varlığı ve tekliği üzerinde durulacaktır [9, s. 216].

2.2.1. Tanım (Sınır Değer Problemi)

Bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerini bağımsız değişkenin birden fazla noktasında belirten yardımcı koşullara sınır koşulları, sınır koşulları ile birlikte diferensiyel denklemden oluşan probleme de sınır değer problemi adı verilir.

Sınır değer problemleri ile ilgili çalışmalar arasında özdeğerler, öz fonksiyonlar,

Sturm-Liouville problemleri, Fourier serileri, öz fonksiyon açılımları, Green fonksiyonu ve de Lyapunov tipi eşitsizlikler önemli yer tutar.

J, $\mathbb{R}$'de kapalı bir aralık olsun ve bu aralıktaki t değerleri için $p_0(t) \not\equiv 0$ olsun. n-yinci basamaktan

$$L_n(x) = p_0(t)x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(t)x' + p_n(t)x = f(t) \tag{2.39}$$

lineer diferensiyel denklemini göz önüne alınsın. a ve b'ler J aralığında ve a_{ij} ile b_{ij} reel sabitleri hepsi birden sıfır olmayan sayılar olmak üzere $1 \leq i \leq n$ için

$$U(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x^{(j-1)}(a) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x^{(j-1)}(b) = \gamma_i \tag{2.40}$$

koşullarına iki noktalı sınır koşulları denir. Dolayısıyla Eş. 2.39 ve Eş. 2.40'tan oluşan probleme de iki noktalı sınır değer problemi adı verilir. Örneğin $n = 2$ alınırsa,

$$\begin{cases} L_2(x) &= f(t) \\ u_1(x) &= a_{11}x(a) + a_{12}x'(a) + b_{11}x(b) + b_{12}x'(b) = \gamma_1 \\ u_2(x) &= a_{21}x(a) + a_{22}x'(a) + b_{21}x(b) + b_{22}x'(b) = \gamma_2 \end{cases} \tag{2.41}$$

sınır değer problemi elde edilir. İlk aşamada

$$\begin{cases} L_2(x) &= x'' + p(t)x' + q(t)x &= f(t) \\ u_1(x) &= a_1x(a) + a_2x'(a) &= \gamma_1 \\ u_2(x) &= b_1x(b) + b_2x'(b) &= \gamma_2 \end{cases} \tag{2.42}$$

iki noktalı sınır değer problemi üzerinde durulacaktır. Eş. 2.42'deki sınır koşullarına ayrılmış sınır koşulları denir.

İkinci basamaktan Eş. 2.42 sınır değer problemi göz önüne alınsın. Burada p, q ve f fonksiyonları $J = [a,b]$ aralığında sürekli ve a_1, b_1, a_2 ve b_2'ler

$$|a_1| + |b_1| \neq 0 \text{ ve } |a_2| + |b_2| \neq 0 \tag{2.43}$$

özelliğine sahip reel sabitlerdir. $f(t) \equiv 0$ ve $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ise sınır değer problemine homogen sınır değer problemi denir.

Genel anlamda bir sınır değer problemini çözmek için öncelikle diferensiyel denklemin genel çözüm uygun yöntemler yardımıyla bulunur, daha sonra sınır koşulları uygulanarak keyfi sabitler belirlenir. Sınır değer problemleri ile başlangıç değer problemleri her noktada uygulamalarda aynı derecede öneme sahip iseler de esas olarak sınır değer probleminin çözümü daha zordur. Sınır değer problemi için hatta lineer olanlar için bir tek çözüm olabilir, çok çözüm olabilir ya da çözüm olmayabilir.

Şimdi literatürde önem teşkil eden sınır değer problemi için varlık ve tekliğe ilişkin temel sonuçlar ifade edilecektir.

2.2.1. Teorem

$p(t)$ ve $q(t)$, J aralığında sürekli olsun.

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0 \tag{2.44}$$

diferensiyel denkleminin iki lineer bağımsız çözümü x_1 ve x_2 olsun. Buna göre

$$\begin{cases} L_2(x) &= 0 \\ u_1(x) &= a_1x(a) + b_1x'(a) = 0 \\ u_2(x) &= a_2x(b) + b_2x'(b) = 0 \end{cases} \tag{2.45}$$

homogen sınır değer probleminin aşikar olmayan çözümlere sahip olması

$$D(U) = \begin{vmatrix} a_1x_1(a) + b_1x_1'(a) & a_1x_2(a) + b_1x_2'(a) \\ a_2x_1(b) + b_2x_1'(b) & a_2x_2(b) + b_2x_2'(b) \end{vmatrix} = 0 \tag{2.46}$$

olmasıyla eşdeğerdir. Eğer Eş. 2.46'daki determinant sıfırdan farklı ise tek çözüm aşikar çözümdür.

İspat

Eş. 2.44 diferensiyel denkleminin genel çözümü $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ olsun. Çözüm, sınır koşullarını sağladığından

$$\begin{aligned} a_1\left[c_1x_1(a) + c_2x_2(a)\right] + b_1\left[c_1x_1^{'}(a) + c_2x_2^{'}(a)\right] &= 0 \\ a_2\left[c_1x_1(b) + c_2x_2(b)\right] + b_2\left[c_1x_1^{'}(b) + c_2x_2^{'}(b)\right] &= 0 \end{aligned} \tag{2.47}$$

elde edilir. c_1 ve c_2 ortak parantezine alınarak diferensiyel denklem sistemi yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} \left(a_1x_1(a) + b_1x_1^{'}(a)\right)c_1 + \left(a_1x_2(a) + b_1x_2^{'}(a)\right)c_2 &= 0 \\ \left(a_2x_1(b) + b_2x_1^{'}(b)\right)c_1 + \left(a_2x_2(b) + b_2x_2^{'}(b)\right)c_2 &= 0 \end{aligned} \tag{2.48}$$

elde edilir. Bu diferensiyel denklem sisteminin sıfırdan farklı çözüme sahip olması için Eş. 2.46'nın var olması gereklidir.

2.2.2. Teorem

$p(t), q(t)$ ve $f(t)$, J aralığında sürekli olsunlar.

$$\begin{cases} x^{''} + p(t)x^{'} + q(t)x &= f(t) \\ a_1x(a) + b_1x^{'}(a) &= \gamma_1 \\ a_2x(b) + b_2x^{'}(b) &= \gamma_2 \end{cases} \tag{2.49}$$

homogen olmayan sınır değer probleminin bir tek çözüme sahip olması bu probleme karşılık gelen Eş. 2.45 homogen sınır değer probleminin sadece aşikar çözüme sahip olmasıyla eşdeğerdir.

İspat

x_1 ve x_2 homogen denklemin lineer bağımsız iki çözümü, x_p'de homogen olmayan

diferensiyel denklemin bir özel çözümü olmak üzere

$$x^{''} + p(t)x^{'} + q(t)x = f(t) \tag{2.50}$$

diferensiyel denkleminin genel çözümü

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + x_p(t) \tag{2.51}$$

biçimindedir. $x(t)$ çözümü, sınır koşullarını sağladığından

$$\begin{aligned} a_1\left(c_1x_1(a) + c_2x_2(a) + x_p(a)\right) + b_1\left(c_1x_1^{'}(a) + c_2x_2^{'}(a) + x_p^{'}(a)\right) &= \gamma_1 \\ a_2\left(c_1x_1(b) + c_2x_2(b) + x_p(b)\right) + b_2\left(c_1x_1^{'}(b) + c_2x_2^{'}(b) + x_p^{'}(b)\right) &= \gamma_2 \end{aligned} \tag{2.52}$$

ve böylece

$$\begin{aligned} \left(a_1x_1(a) + b_1x_1^{'}(a)\right)c_1 + \left(a_1x_2(a) + b_1x_2^{'}(a)\right)c_2 &= \gamma_1 - a_1x_p(a) - b_1x_p^{'}(a) \\ \left(a_2x_1(b) + b_2x_1^{'}(b)\right)c_1 + \left(a_2x_2(b) + b_2x_2^{'}(b)\right)c_2 &= \gamma_2 - a_2x_p(b) - b_2x_p^{'}(b) \end{aligned} \tag{2.53}$$

elde edilir. Parametrelerin değişimi yönteminden

$$x_p(t) = \int_a^t \frac{x_1(s)x_2(t) - x_2(s)x_1(t)}{w\left(x_1, x_2\right)(s)} f(s)ds \tag{2.54}$$

olduğu bilinmektedir. $x_p(a)$ değerinin

$$x_p(a) = \int_a^a \frac{x_1(s)x_2(a) - x_2(s)x_1(a)}{w\left(x_1, x_2\right)(s)} f(s)ds = 0 \tag{2.55}$$

olduğu kolaylıkla görülür. Leibnitz formülü yardımıyla da $x_p^{'}(t)$

$$x_p^{'}(t) \quad = \int_a^t \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{x_1(s)x_2(t) - x_2(s)x_1(t)}{w\left(x_1, x_2\right)(s)} f(s)\right]ds + \frac{x_1(t)x_2(t) - x_2(t)x_1(t)}{w\left(x_1, x_2\right)(t)} \tag{2.56}$$

ve böylece

$$x_p^{'}(a) = \int_a^a \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{x_1(s)x_2(t) - x_2(s)x_1(t)}{w\left(x_1, x_2\right)(s)} f(s)\right]ds = 0 \tag{2.57}$$

elde edilir. Eş. 2.55 ve Eş. 2.57, Eş. 2.53'te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\left(a_1x_1(a)+b_1x_1^{'}(a)\right)c_1+\left(a_1x_2(a)+b_1x_2^{'}(a)\right)c_2&=\gamma_1\\ \left(a_2x_1(b)+b_2x_1^{'}(b)\right)c_1+\left(a_2x_2(b)+b_2x_2^{'}(b)\right)c_2&=\gamma_2-a_2x_p(b)-b_2x_p^{'}(b)\end{aligned} \tag{2.58}$$

elde edilir.

Bilindiği üzere Eş. 2.58 diferensiyel denklem sisteminin tek çözüm aşikar çözüme sahip olması için homogen kısmın katsayılar determinantının sıfırdan farklı olması gerekmektedir. Yani,

$$D(U)=\begin{vmatrix} u_1(x_1) & u_1(x_2)\\ u_2(x_1) & u_2(x_2)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1x_1(a)+b_1x_1^{'}(a) & a_1x_2(a)+b_1x_2^{'}(a)\\ a_2x_1(b)+b_2x_1^{'}(b) & a_2x_2(b)+b_2x_2^{'}(b)\end{vmatrix}\neq 0 \tag{2.59}$$

olmalıdır. Buradan homogen olmayan sınır değer probleminin bir tek çözüme sahip olduğu görülür.

2.3. Diferensiyel Denklemlerden Oluşan Sistem için Varlık Teklik Teoremleri

Birinci basamaktan diferensiyel denklemlerden oluşan

$$\begin{cases} x_1^{'} &= f_1(t,x_1,x_2,...,x_n),\ x_1(t_0)=x_{10}\\ x_2^{'} &= f_2(t,x_1,x_2,...,x_n),\ x_2(t_0)=x_{20}\\ \vdots & \\ x_n^{'} &= f_n(t,x_1,x_2,...,x_n),\ x_n(t_0)=x_{n0}\end{cases} \tag{2.60}$$

başlangıç değer problemi göz önüne alınsın. $X_0=(x_{10},x_{20},...,x_{n0})$, $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ ve $F=(f_1,f_2,...,f_n)$, $\mathbb{R}^n$'de vektörler olmak üzere yukarıdaki diferensiyel denklemlerden oluşan sistem vektör notasyon formunda

$$\begin{cases} X^{'}=F(t,X)\\ X(t_0)=X_0\end{cases} \tag{2.61}$$

şeklinde yazılabilir (Bkz. s. 6). Burada Ω, $\mathbb{R}^{n+1}$'de bir açık küme olmak üzere $F\in\mathbb{C}(\Omega,\mathbb{R}^n)$'dir [8].

2.3.1. Tanım (Diferensiyel Denklemlerden Oluşan Sistem için Başlangıç Değer Probleminin Çözümü)

J üzerinde tanımlı reel değerli bir $\Phi(t)$ fonksiyonu

(i) $t \in J$ için $\Phi'(t)$ var

(ii) $t_0 \in J$ için $\Phi(t_0) = X_0$

(iii) $(t, \Phi(t)) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$

(iv) $t \in J$ için $\Phi'(t) = F(t, \Phi(t))$

şartlarını sağlıyorsa Eş. 2.61 başlangıç değer probleminin bir çözümüdür denir.

J üzerinde türevlenebilir $X(t)$ fonksiyonun Eş. 2.61 başlangıç değer probleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart $t \in J$ için $X(t)$'nin

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, X(s))\, ds \tag{2.62}$$

Volterra integral denkleminin bir çözümü olmasıdır.

Şimdi Bölüm 2.1'de elde edilen sonuçlar, Eş. 2.61 şeklindeki başlangıç koşullarına sahip diferensiyel denklemlerden oluşan bir sisteme genişletilir. n tane birinci basamaktan diferensiyel denklemden oluşan bir sistem, n-inci basamaktan bir tek skaler diferensiyel denkleme dönüştürülebilir. Elde edilen sonuçların genelde herhangi basamaktan diferensiyel denklemlerden oluşan bir sistem için ve n-inci basamaktan skaler diferensiyel içinde geçerli olduğuna dikkat edilmelidir.

$F(t, X)$, Ω'de X'in bileşenlerine ve t'ye göre sürekli türevlenebilir ise $F \in \mathbb{C}^1(\Omega)$ yazılır.

$i = 1,2,...,n$ için $\frac{\partial F}{\partial x_i}$, $(t,X) \in \Omega$ için

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\| \leq L \tag{2.63}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde pozitif bir L sabiti var olsun. B_0, $\mathbb{R}^{n+1}$'de herhangi kapalı ve sınırlı bölge olmak üzere $F \in \mathbb{C}^1(B_0)$ ise Eş. 2.63 eşitsizliğinin otomatik olarak sağlandığına dikkat edilmelidir. Her değişkene ayrı ayrı ortalama değer teoremi uygulanırsa (t,X), $(t,Y) \in \Omega$ için

$$\|F(t,X) - F(t,Y)\| \leq L\|X - Y\| \tag{2.64}$$

elde edilir.

Eş. 2.64 eşitsizliği için bir başka ispat aşağıdaki gibidir. $0 \leq \sigma \leq 1$ için G fonksiyonu

$$G(\sigma) = F(t, Y + \sigma(X - Y)) \tag{2.65}$$

şeklinde tanımlansın.

$$F(t,X) - F(t,Y) = G(1) - G(0) = \int_0^1 G'(\sigma)\, d\sigma \tag{2.66}$$

olduğu açıktır. Zincir kuralından

$$\begin{aligned} G'(\sigma) &= F_{x_1}(t, Y + \sigma(X - Y))(x_1 - y_1) + F_{x_2}(t, Y + \sigma(X - Y))(x_2 - y_2) + \\ &\quad ... + F_{x_n}(t, Y + \sigma(X - Y))(x_n - y_n) \end{aligned} \tag{2.67}$$

elde edilir. Eş. 2.63 eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \|F(t,X) - F(t,Y)\| &\leq \int_0^1 G'(\sigma)\, d\sigma \\ &\leq L(|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + ... + |x_n - y_n|) \\ &\leq L\|X - Y\| \end{aligned} \tag{2.68}$$

elde edilir. Bu ise Eş. 2.64 eşitsizliğinin ispatını tamamlar.

Bir F fonksiyonu, (t,X),$(t,Y) \in \Omega$ için Eş. 2.64 eşitsizliğini sağlıyorsa L Lipschitz sabiti olmak üzere Ω'da F'in Lipschitz koşullarını sağladığı söylenir. Fakat Eş. 2.64 eşitsizliğini sağlayan bir F fonksiyonunun $\mathbb{C}^1$ sınıfından olmasına gerek yoktur ve Bölüm 2.1'deki skaler g fonksiyonu için de geçerlidir.

Şimdi Eş. 2.61 başlangıç değer probleminin varlığı ve tekliği bazı sonuçlar verilsin.

2.3.1. Teorem (Picard-Lindelöf Teoremi)

a ve b pozitif reel sayılar olmak üzere $F(t,X)$ fonksiyonu, $B_0 = \{(t,X) : t_0 \leq t \leq t_0 + a; \|X - X_0\| < b\}$ üzerinde sürekli ve B_0 üzerinde Lipschitz şartını sağlasın.

$$\mu = \underset{(t,X)\in B_0}{maks} \|F(t,X)\| \text{ ve } \alpha = \min\left(a, \frac{b}{\mu}\right) \tag{2.69}$$

olsun. Böylece Eş. 2.61 başlangıç sınır değer problemi $[t_0, t_0 + \alpha]$ üzerinde bir tek çözüme sahiptir.

2.3.1 Uyarı

Picard-Lindelöf Teoreminin ispatı, mutlak değerin vektör değerli $X \in \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun bir normu ile yer değiştirmesi dışında benzerdir. $\|\cdot\|$ normu, $\mathbb{R}^n$'deki herhangi uygun bir norm olabilir.

$$\|X\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \text{ veya } \|X\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} \text{ (Öklidyen normu)} \tag{2.70}$$

olmak zorunda değildir.

2.3.2 Uyarı

Teorem 2.1.2. ve Lemma 2.1.3.'ün ispatlarından $\alpha = \min\left(a, \frac{b}{\mu}\right)$'nin seçimi doğaldır.

Teorem 2.3.1.'ün ispatı:

$t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ ve $k = 1,2,...,n$ için

$$\begin{aligned} X_0(t) &= X_0 \\ X_k(t) &= X_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, X_{k-1}(s))\, ds \end{aligned} \tag{2.71}$$

fonksiyonlarının bir dizisi tanımlansın. $F(t, X(t))$, $[t_0, t_0 + \alpha]$ kapalı aralığında sürekli olduğundan $X_0(t), X_1(t), ..., X_n(t)$, $[t_0, t_0 + \alpha]$ üzerinde tanımlı ve sürekli fonksiyonlar olduğu açıktır. Yani, $(t, X_0(t)) \in B_0$'dır. Sonuç olarak

$$\|X_1(t) - X_0\| \leq \mu (t - t_0) \leq \mu \alpha \leq b \tag{2.72}$$

eşitsizliği sağlanır ve böylece $(t, X_1(t)) \in B_0$'dır. Ayrıca, $\|X_k(t) - X_0\| \leq b$ olduğu tümevarım yöntemiyle gösterilebilir ve sonuç olarak $k = 2,3,...,n$ için $(t, X_k(t)) \in B_0$'dır.

$$Z_n(t) = X_n(t) - X_{n-1}(t) \tag{2.73}$$

tanımlansın. F, B_0'da Eş. 2.64 Lipschitz şartını sağladığından

$$\begin{aligned} \|Z_2(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t} \|F(s, X_1(s)) - F(s, X_0(s))\|\, ds \leq L \int_{t_0}^{t} \|X_1(s) - X_0(s)\|\, ds \\ &\leq L \int_{t_0}^{t} \mu (s - t_0)\, ds = L\mu \frac{(t - t_0)^2}{2!} \end{aligned} \tag{2.74}$$

eşitsizliği elde edilir. Tümevarım yöntemiyle $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ ve $k = 1,2,...,n$ için

$$\|Z_k(t)\| \leq \mu L^{k-1} \frac{(t - t_0)^k}{k!} \tag{2.75}$$

bulunur. Bunu ispat etmek için $t \in [t_0, t_0+\alpha]$ ve $k = 2,3,...,n$ için

$$\|Z_{k-1}(t)\| \leq \mu L^{k-2} \frac{(t-t_0)^{k-1}}{(k-1)!} \tag{2.76}$$

olsun. Böylece $t \in [t_0, t_0+\alpha]$ için

$$\begin{aligned} \|Z_n(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t} \|F(s, X_{n-1}(s)) - F(s, X_{n-2}(s))\| \, ds \\ &\leq L \int_{t_0}^{t} \|X_{n-1}(s) - X_{n-2}(s)\| \, ds = L \int_{t_0}^{t} \|Z_{n-1}(s)\| \, ds \\ &\leq \mu L^{n-1} \int_{t_0}^{t} \frac{(s-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} ds = \mu L^{n-1} \frac{(t-t_0)^n}{n!} \end{aligned} \tag{2.77}$$

elde edilir. Böylece Eş. 2.75 eşitsizliği elde edilir. Şimdi

$$X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(t) \tag{2.78}$$

sonsuz serisini göz önüne alınsın. Bu serinin n-inci kısmi toplamlar dizisi $X_n(t)$, yani,

$$X_n(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{n} Z_k(t) \tag{2.79}$$

sağlanır. Sonuç olarak, $\{X_n(t)\}$ dizisinin yakınsak olması gerek ve yeter şart Eş. 2.78 serisinin de yakınsak olmasıdır. Eş. 2.75 eşitsizliğinden Eş. 2.78 serisi, $[t_0, t_0+\alpha]$ kapalı aralığında düzgün yakınsaktır. Eş. 2.78 serisinin toplamı $X(t)$ olsun. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} X_n(t) = X(t) \tag{2.80}$$

olduğundan $X_n(t)$, $X(t)$'ye düzgün yakınsak ve B_0 üzerinde $F(t,X)$'in sürekliliğinden $n \to \infty$ iken $[t_0, t_0+\alpha]$ üzerinde $F(t, X_n(t)) \to F(t, X(t))$'e düzgün yakınsaktır. Sonuç olarak,

Eş. 2.71 fonksiyonundaki integraller için terim terime integral alınabilir ve

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, X(s))\, ds \tag{2.81}$$

sağlanır. Böylece $X(t)$, Eş. 2.61 başlangıç değer probleminin bir çözümüdür. Tekliği ispat etmek için $[t_0, t_0+\alpha]$'da Eş. 2.61 başlangıç değer probleminin herhangi diğer bir çözümü $Y(t)$ olsun. Böylece

$$Y(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, Y(s))\, ds \tag{2.82}$$

elde edilir. Sonuç olarak, negatif olmayan $Z(t) = \|X(t) - Y(t)\|$ fonksiyonu

$$Z(t_0) = 0 \tag{2.83}$$

ve

$$Z(t) \leq \int_{t_0}^{t} \|F(s, X(s)) - F(s, Y(s))\|\, ds \leq L \int_{t_0}^{t} Z(s)\, ds \tag{2.84}$$

eşitsizliğini sağlar. Bu ise $Z(t) \equiv 0$ değil ise $Z(t) \geq 0$ ile çelişen $Z(t) \leq 0$'dir.

Şimdi, teklik iddiası ve Lipschitz şartı olmadan bir ispatsız varlık teoremi verilecektir. Bu varlık teoremini ispat etmek için aşağıdaki gibi [8]'deki Lemma 1.3.4'ün genellemesine ihtiyaç vardır.

2.3.1. Lemma (Ascoli-Arzela)

Bir kompakt $X \in B_0 \subset \mathbb{R}^n$ üzerinde $n = 1, 2, \ldots$ için $\{F_n(x)\}$, düzgün sınırlı ve eş sürekli fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu durumda B_0'da $\{F_{n_k}(X)\}$'in düzgün yakınsak bir alt dizisi vardır.

2.3.2. Teorem (Peano'nun Varlık Teoremi: Vektör Durumu)

$B_0 = \{(t,X) \in \Omega : \ t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha, \ \|X - X_0\| \leq b\}$ olmak üzere $F \in \mathbb{C}[B_0, \mathbb{R}^n]$ olsun ve B_0 üzerinde $\|F(t,X)\| \leq \mu$ olsun. Böylece Eş. 2.61 başlangıç değer probleminin, $\alpha = \min\left(a, \frac{b}{\mu}\right)$ olmak üzere $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ aralığında en az bir $X(t)$ çözümü vardır.

3. LİTERATÜRDEKİ LYAPUNOV TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde, çeşitli sınır koşulları altında sistemler ve yüksek basamaktan sınır değer problemleri için literatürde elde edilen Lyapunov tipi eşitsizliklerine ilişkin bazı sonuçlar verilecektir.

3.1. Literatürdeki İkinci Basamaktan Sınır Değer Problemleri için Lyapunov Tipi Eşitsizlikler

Lyapunov'un temel makalesi [1]'de elde edilen

$$\int_a^b h(s)ds \geq \frac{4}{b-a} \tag{3.1}$$

klasik Lyapunov eşitsizliğinin ilk kez ortaya çıkışından bu yana literatürde çeşitli ispatlar, genellemeler ve iyileştirmeler ortaya çıkmıştır [2-7], [10-16].

Şimdi bu alt bölümde ikinci basamaktan sınır değer problemleri için elde edilen Lyapunov tipi eşitsizlikler verilecektir. Hartman [5] 1982 yılında,

$$x(a) = 0 = x(b) \tag{3.2}$$

Dirichlet sınır koşulları altında

$$-x'' = h(t)x \tag{3.3}$$

lineer diferensiyel denklemi için Lyapunov tipi eşitsizlikler elde etmiştir. Hartman eğer $x(t)$, Eş. 3.3 lineer diferensiyel denkleminin Eş. 3.2 Dirichlet sınır koşulunu sağlayan aşikar olmayan bir çözümü ise

$$\int_a^b |h(s)| \frac{(s-a)(b-s)}{b-a} ds \geq 1 \tag{3.4}$$

Lyapunov tipi eşitsizliğinin sağlandığını göstermiştir. Eş. 3.4 eşitsizliğindeki h fonksiyonu pozitif alınıp yanındaki fonksiyonun maksimumu alındığında Eş. 3.1 klasik Lyapunov eşitsizliği elde edildiğine dikkat edilmelidir. Burada önemli olan en iyi olasılıklı sabiti elde

etmektir. Eş. 3.1 eşitsizliğinde 4 sabitinin daha büyük bir sabitle değiştirilmesi durumunda eşitsizliğin sağlanmamasından dolayı, 4 sabiti bu eşitsizliğin mümkün olan en iyi olasılığıdır [5, s. 345], [6, s. 267]. Bu anlamda en iyi sonuç olarak kabul edilir. Yukarıda maksimum almak ile kastedilen açık bir şekilde ifade edilecek olunursa; Eş. 3.4 eşitsizliğindeki $(s-a)(b-s)$ fonksiyonun maksimumundan

$$M(t) = (t-a)(b-t) \leq \underset{a\leq t\leq b}{maks} M(t) = M\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \tag{3.5}$$

elde edilir. Sonuç olarak, Eş. 3.4 eşitsizliğinden Eş. 3.1 klasik Lyapunov eşitsizliği elde edildiğinden Eş. 3.4 Lyapunov tipi eşitsizliğin daha iyi bir sonuç olduğu görülür.

Şimdi tez boyunca önem arz eden bir fonksiyonun tanımı ve bir özelliğinden bahsedilecektir;

$$h^+(t) = maks\{0, h(t)\}, \tag{3.6}$$

$h(t)$'nin negatif olmayan kısmıdır ve $|h(t)| \geq h^+(t)$ eşitsizliği sağlanır.

$x(t)$, Eş. 3.2-Eş. 3.3 sınır değer probleminin $c \in (a,b)$ için $x'(c) = 0$ koşulunu sağlayan aşikar olmayan bir çözümü ise

$$\int_a^c h^+(s)ds > \frac{1}{c-a} \quad \text{ve} \quad \int_c^b h^+(s)ds > \frac{1}{b-c} \tag{3.7}$$

eşitsizliklerinin geçerli olduğu Kwong [17] tarafından 1981 yılında gösterilmiştir. Dolayısıyla

$$\int_a^b h^+(s)ds > \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c} = \frac{b-a}{(c-a)(b-c)} \geq \frac{4}{b-a} \tag{3.8}$$

eşitsizliği sağlanır. Eş. 3.8 Lyapunov tipi eşitsizlikte $h(t)$ pozitif alındığında Eş. 3.1 klasik Lyapunov eşitsizliğidir.

Böylece Eş. 3.1 klasik Lyapunov eşitsizliğini Kwong, Eş. 3.2-Eş. 3.3 sınır değer problemi

için daha iyi bir sonuç olarak

$$\int_a^b h^+(s)ds \geq \frac{4}{b-a} \tag{3.9}$$

eşitsizliğiyle güçlendirdi.

Pinasco [18] 2004 yılında; Lyapunov eşitsizliğini, lineer diferensiyel denklemden Eş. 3.2 Dirichlet sınır koşulu altında $p > 1$ için $\varphi_p(x) = |x|^{p-2}x$ olmak üzere

$$-\left(\varphi_p(x')\right)' = h(t)\varphi_p(x) \tag{3.10}$$

ikinci basamaktan yarı lineer diferensiyel denklemine genelleştirmiştir. Pinasco eğer $x(t)$, Eş. 3.2 Dirichlet sınır koşulunu sağlayan Eş. 3.10 yarı lineer diferensiyel denkleminin aşikar olmayan bir çözümü ise

$$\int_a^b h(s)\,ds \geq 2\left(\frac{2}{b-a}\right)^{p-1} \tag{3.11}$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermiştir. Sonuç olarak, Eş. 3.1 klasik Lyapunov eşitsizliğinden daha genel bir sonuç elde edilmiştir.

Sim ve Lee [19] 2010 yılında, Eş. 3.11 Lyapunov tipi eşitsizliğini, Eş. 3.2 Dirichlet sınır koşulu altında Eş. 3.10 ikinci basamaktan yarı lineer diferensiyel denklem için geliştirmiştir. Sim ve Lee eğer $x(t)$, Eş. 3.2 Dirichlet sınır koşulunu sağlayan Eş. 3.10 yarı lineer diferensiyel denkleminin aşikar olmayan bir çözümü ise

$$\int_a^b h(s)\left[\frac{2(s-a)(b-s)}{b-a}\right]^{p-1} ds \geq 2 \tag{3.12}$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermişlerdir. Sonuç olarak, Eş. 3.12 Lyapunov tipi eşitsizliğinde $h(t)$'nin yanındaki fonksiyonun maksimumu alındığında Eş. 3.11 eşitsizliği elde edildiğinden daha iyi bir sonucun ortaya konulduğu görülmektedir.

Yang [20] 2003 yılında, Eş. 3.11 Lyapunov tipi eşitsizliğini, $p > 1$ olmak üzere Eş. 3.2

Dirichlet sınır koşulu altında

$$-\left(r(t)\varphi_p(x')\right)' = h(t)\varphi_p(x) \tag{3.13}$$

ikinci basamaktan yarı lineer diferensiyel denklem için genelleştirmiştir. Yang eğer $x(t)$, Eş. 3.2 Dirichlet sınır koşulunu sağlayan ikinci basamaktan Eş. 3.13 yarı lineer diferensiyel denkleminin aşikar olmayan bir çözümü ise

$$\int_a^b h^+(s)ds \geq \frac{2^p}{\left(\int_a^b r^{1/(1-p)}(s)ds\right)^{p-1}} \tag{3.14}$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermiştir. Eş. 3.14 eşitsizliğinde $h(t) > 0$, $p = 2$ ve $r(t) = 1$ alındığında klasik Lyapunov eşitsizliği elde edilmektedir.

Wang [21] 2011 yılında, Eş. 3.14 Lyapunov tipi eşitsizliğini, Eş. 3.2 Dirichlet sınır koşulu altında genelleştirmiştir. Wang eğer $x(t)$, Eş. 3.2 Dirichlet sınır koşulunu sağlayan ikinci basamaktan Eş. 3.13 yarı lineer diferensiyel denkleminin aşikar olmayan bir çözümü ise

$$\int_a^b h^+(s)\left[\frac{\int_a^s r^{1/(1-p)}(u)du \int_s^b r^{1/(1-p)}(u)du}{\int_a^b r^{1/(1-p)}(u)du}\right]^{p-1} ds \geq \begin{cases} 1 \quad , 1 < p < 2 \\ 2^{2-p}, \quad p \geq 2 \end{cases} \tag{3.15}$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermiştir.

2019 yılında Yang ve diğerleri [22],

$$\mathscr{A} = \left\{ h \in L^1_{loc}((a,b),[0,\infty)) : \int_a^b h(s)(s-a)(b-s)ds < \infty \right\} \tag{3.16}$$

olmak üzere $h \in \mathscr{A}$ ve Eş. 3.2 Dirichlet sınır koşuluna sahip ve lineer olmayan

$$-\left(\frac{x'}{\sqrt{1-|x'|^2}}\right)' = h(t)x \tag{3.17}$$

probleminin pozitif bir çözümü varsa

$$\int_a^b h(s)(s-a)(b-s)\,ds > b-a \tag{3.18}$$

Lyapunov tipi eşitsizliğin sağlandığını göstermişlerdir. Bu çalışma p relativistik operatörünü içeren bir sınır değer problemi için Lyapunov tipi eşitsizlik elde eden ilk çalışma olarak dikkat çekmektedir.

3.2. Literatürdeki Yüksek Basamaktan Sınır Değer Problemleri için Lyapunov Tipi Eşitsizlikler

Bu alt bölümde yüksek basamaktan sınır değer problemleri için elde edilen Lyapunov tipi eşitsizlikler verilecektir.

Çakmak [23] 2010 yılında, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $h(t) \in C([a,b])$, $a = t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ olmak üzere $k = 1,2,...,n-1$, $t \in [a,b]$, $t \in (t_k, t_{k+1})$ için

$$x(a) = x(t_2) = \cdots x(t_{n-1}) = x(b) = 0 \tag{3.19}$$

Dirichlet sınır koşuluna sahip

$$-x^{(n)} = h(t)x \tag{3.20}$$

n-inci basamaktan sınır değer problemi ele alındığında $x(t) \not\equiv 0$ olmak üzere bir $x(t)$ çözümü varsa

$$\int_a^b |h(s)|\,ds > \frac{(n-2)!n^n}{(n-1)^{n-1}(b-a)^{n-1}} \tag{3.21}$$

Lyapunov tipi eşitsizliğinin sağlandığını göstermiştir. Ayrıca, Çakmak $k = 0,1,...,n-1$ ve $t \in (a,b)$ için

$$x^{(2k)}(a) = x^{(2k)}(b) = 0 \tag{3.22}$$

Dirichlet sınır koşuluna sahip

$$-x^{(2n)} = h(t)\,x \tag{3.23}$$

çift basamaktan sınır değer problemi ele alındığında $x(t) \not\equiv 0$ olmak üzere bir $x(t)$ çözümü varsa

$$\int_a^b |h(s)|\,ds > \frac{2^{2n}}{(b-a)^{2n-1}} \tag{3.24}$$

Lyapunov tipi eşitsizliğinin sağlandığını göstermiştir.

Wang [24] 2012 yılında, $\varphi_p(x) = |x|^{p-2}x$ olmak üzere $(n+1)$-inci basamaktan

$$-\left(\varphi_p\left(x^{(n)}\right)\right)' = h(t)\,\varphi_p(x) \tag{3.25}$$

yarı lineer diferensiyel denkleminin $k = 0,1,...,n$ olmak üzere

$$x^{(k)}(a) + x^{(k)}(b) = 0 \tag{3.26}$$

anti periyodik sınır koşulunu sağlayan aşikar olmayan $x(t)$ çözümü varsa

$$\int_a^b |h(s)|\,ds > 2\left(\frac{2}{b-a}\right)^{n(p-1)} \tag{3.27}$$

Lyapunov tipi eşitsizliğinin sağlandığını göstermiştir. Ayrıca; Wang, $k = 0,1,...,n$ için

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(x^n\right)\right)' = \lambda h(t)\,\varphi_p(x) \\ x^{(k)}(a) + x^{(k)}(b) = 0 \end{cases} \tag{3.28}$$

öz değer probleminin bir öz değeri λ olmak üzere Eş. 3.27 eşitsizliğini kullanarak λ özdeğeri için

$$|\lambda| > \frac{2}{\int_a^b |h(s)|\,ds}\left(\frac{2}{b-a}\right)^{n(p-1)} \tag{3.29}$$

şeklinde bir alt sınır bulmuştur. Böylece elde edilen Eş. 3.27 Lyapunov tipi eşitsizlik yardımıyla λ özdeğerinin bir alt sınırını bularak bir uygulama vermiştir.

Aktaş [25] 2021 yılında, $p>1$ için $n\in\mathbb{N}$, $k=0,1,...,n-1$, $h_k(t)\in C([0,\infty),\mathbb{R})$ olmak üzere $k=0,1,...,n$ için $x(t)$'nin

$$x^{(k)}(a)+x^{(k)}(b)=0 \tag{3.30}$$

anti-periyodik sınır koşulu altında $\phi_p(v)=\frac{|v|^{p-2}v}{(1-|v|^p)^{\frac{p-1}{p}}}$ ve $\Phi_q(u)=\frac{|u|^{q-2}u}{(1+|u|^q)^{\frac{q-1}{q}}}$ olmak üzere $(n+1)$-inci basamaktan

$$-\left(\phi_p\left(x^{(n)}\right)\right)'=\sum_{k=0}^{n-1}h_k(t)\,\Phi_q(x^{(k)}) \tag{3.31}$$

lineer olmayan sınır değer problemi için Lyapunov tipi eşitsizlikler elde etmiştir. Eğer $x(t)$, Eş. 3.30 anti-periyodik sınır koşulları ile birlikte Eş. 3.31 probleminin aşikar olmayan bir çözümü ise $Re(z)>1$, $\zeta(z)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^z}$ ve $n=1,2,...$ için $S_n=\frac{\left(2^{2n}-1\right)(b-a)^{2n-1}}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\zeta(2n)$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left((b-a)\,S_{n-k}\right)^{(p-1)/2}\int_a^b|h_k(s)|\,ds>2 \tag{3.32}$$

ve

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{(n-k)(p-1)}\int_a^b|h_k(s)|\,ds>2 \tag{3.33}$$

Lyapunov tipi eşitsizliklerinin sağlandığını göstermiştir.

Burada elde edilen sonuçlar, p relativistik ve q eğrilik operatörlerini içeren yüksek basamaktan bir sınır değer problemi için Lyapunov tipi eşitsizlik elde eden ilk çalışma olması açısından önemlidir.

3.3. Literatürdeki Diferensiyel Denklem Sistemleri için Lyapunov Tipi Eşitsizlikler

Bu bölümde öncelikli olarak genel belirli problemler tanıtılıp sonrasında bu problemlere ilişkin özelden genele doğru literatürde elde edilmiş sonuçlardan bahsedilecektir.

Şimdi, $t \in \mathbb{R}$ ve $k = 1,2$ için $r_k, h_k \in C([a,b],\mathbb{R})$, $r_k(t) > 0$ ve $p > 1$ için $\varphi_p(x) = |x|^{p-2}x$ olmak üzere

$$\begin{cases} -\left(r_1(t)\varphi_{p_1}\left(x_1'\right)\right)' = h_1(t)\varphi_{\alpha_1}(x_1)|x_2|^{\alpha_2} \\ -\left(r_2(t)\varphi_{p_2}\left(x_2'\right)\right)' = h_2(t)\varphi_{\beta_2}(x_2)|x_1|^{\beta_1} \end{cases} \tag{3.34}$$

diferensiyel denklem sistemi göz önüne alınsın. $a,b \in \mathbb{R}$ için $a < b$ iken $[a,b]$ olmak üzere özdeş olarak sıfırdan farklı $k = 1,2$ için x_k, Eş. 3.34 diferensiyel denklem sisteminin reel ve aşikar olmayan bir çözümü olsun. Ayrıca,

$$x_k(a) = 0 = x_k(b) \tag{3.35}$$

Dirichlet sınır koşulunu sağlayacak şekilde $1 < p_k < \infty$ ve $\alpha_2 \geq 0$, $\beta_1 \geq 0$;

$$\frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2} = 1 \text{ ve } \frac{\beta_1}{p_1} + \frac{\beta_2}{p_2} = 1 \tag{3.36}$$

şartları sağlansın. Diğer yandan, $t \in \mathbb{R}$ ve $k = 1,2,...,n$ için $r_k, h_k \in C([a,b],\mathbb{R})$, $r_k(t) > 0$ ve $\gamma > 1$ için $\varphi_\gamma(x) = |x|^{\gamma-2}x$ olmak üzere $n \in \mathbb{N}$ için $(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$,

$$x_k(a) = 0 = x_k(b) \tag{3.37}$$

Dirichlet sınır koşulunu sağlayacak şekilde

$$-\left(r_k(t)\varphi_{p_k}\left(x_k'\right)\right)' = h_k(t)\varphi_{\alpha_k}(x_k)\prod_{i=1(\neq k)}^{n}|x_i|^{\alpha_i} \tag{3.38}$$

diferensiyel denklem sisteminin reel ve aşikar olmayan bir çözümü olsun. $1 < p_k < \infty$ ve

negatif olmayan α_k parametreleri

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{p_k} = 1 \tag{3.39}$$

koşulunu sağlasın. Özdeğer problemlerinde özdeğerin alt sınırını bulmanın, probleme karşılık gelen Lyapunov tipi eşitsizliği bulmaya dayandığı bilinmektedir. Şimdi ele alınan problemlerin bir uygulamasını vermek için aşağıdaki özdeğer problemleri göz önüne alınsın. Eş. 3.38 diferensiyel denklem sisteminde $k = 1,2,...,n$ ve $t \in \mathbb{R}$ için $h_k(t) = \lambda_k \alpha_k r(t) > 0$ alınırsa Eş. 3.38 diferensiyel denklem sistemi Eş. 3.37 Dirichlet sınır koşulu ve Eş. 3.39 koşulu altında

$$-\left(r_k(t)\,\varphi_{p_k}\left(x_k^{'}\right)\right)^{'} = \lambda_k \alpha_k r(t)\,\varphi_{\alpha_k}(x_k) \prod_{i=1(\neq k)}^{n} |x_i|^{\alpha_i} \tag{3.40}$$

problemine indirgendiğine dikkat edilmelidir.

Şimdi yukarıdaki problemlerin özel durumlarında bilinen problemlere indirgendiği gösterilecektir. $n = 1$, $p_1 = 2$ ve $r_1(t) = 1$ ise Eş. 3.38-Eş. 3.39 problemi, Eş. 3.37 sınır koşulu altında

$$-x_1^{''} = h_1(t)\,x_1 \tag{3.41}$$

problemine indirgenir. Ayrıca $k = 1,2,...,n$ için $\alpha_k = p_k$ iken $i = 1,2,...,n$ için $i \neq k$ $\alpha_i = 0$ olmak üzere Eş. 3.38 diferensiyel denklem sisteminden yine Eş. 3.41 tek denklemi elde edilir.

Şimdi tezde kolaylık sağlaması açısından bazı kısaltmalar verilsin. $k = 1,2,...,n$ olmak üzere

$$h_k^{+}(t) = maks\{0, h_k(t)\}\,(h_k(t)\text{'nin negatif olmayan kısmı}) \tag{3.42}$$

$$\xi_k(t) = \int_a^x r_k^{1/(1-p_k)}(s)\,ds, \eta_k(t) = \int_x^b r_k^{1/(1-p_k)}(s)\,ds, \tag{3.43}$$

$$D_k(t) = \frac{[\xi_k(t)\,\eta_k(t)]^{p_k-1}}{\xi_k^{p_k-1}(t)+\eta_k^{p_k-1}(t)},\; E_k(t) = 2^{p_k-2}\left(\frac{\xi_k(t)\,\eta_k(t)}{\xi_k(t)+\eta_k(t)}\right)^{p_k-1}, \tag{3.44}$$

ve

$$F_k = 2^{-p_k}\left(\xi_k(t)+\eta_k(t)\right)^{p_k-1} = 2^{-p_k}\left(\int_a^b r_k^{1/(1-p_k)}(s)\,ds\right)^{p_k-1} \tag{3.45}$$

ifadeleri tanımlansın.

Şimdi yukarıdaki problemlere ilişkin özelden genele doğru literatürde elde edilmiş sonuçlardan bahsedilecektir. $n=1$ için $\alpha_1 = p_1$ olmak üzere Eş. 3.38-Eş. 3.39 problemi Eş. 3.37 Dirichlet sınır koşulu altında

$$-\left(r_1(t)\varphi_{p_1}\left(x_1'\right)\right)' = h_1(t)\,\varphi_{p_1}(x_1) \tag{3.46}$$

problemine indirgediği açıkça görülür. Hatırlanacağı üzere bu doğrultuda Wang [21], çalışmaları sonucunda

$$\int_a^b h_1^+(s)\,E_1(s)\,ds > 2^{p_1-2}\begin{cases} 1 & ,\ 1<p_1<2 \\ 2^{2-p_1}, & p_1\geq 2 \end{cases} \tag{3.47}$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermiştir (Bkz. s. 26).

Napoli ve Pinasco [26], $n=2$ ve $k=1,2$ için $r_k(t)=1$ olmak üzere Eş. 3.38 diferensiyel denklem sistemi için Lyapunov tipi eşitsizlik bulma problemiyle ilgilenmişlerdir. $h_1 \in C([a,b],[0,\infty))$ olmak üzere

$$\int_a^b h_1(s)\,ds \geq \frac{4}{b-a} \tag{3.48}$$

ve

$$\int_a^b h_1(s)\,ds \geq 2\left(\frac{2}{b-a}\right)^{p_1-1} \tag{3.49}$$

eşitsizliklerinin genelleştirilmesinde $k=1,2$ için $h_k \in C([a,b],[0,\infty))$ ve $(x_1(t),x_2(t))$, $[a,b]$ aralığında $n=2$ ve $k=1,2$ için $r_k(t)=1$ olan Eş. 3.38-Eş. 3.39 problemi için aşikar olmayan bir çözüm ise

$$\prod_{k=1}^{2}\left(\int_a^b h_k(s)\,ds\right)^{\alpha_k/p_k} \geq 2^{\alpha_1+\alpha_2}(b-a)^{1-(\alpha_1+\alpha_2)} \tag{3.50}$$

eşitsizliği elde edilmiştir. Napoli ve Pinasco, ayrıca, Eş. 3.50 eşitsizliğini kullanarak $n=2$ ve $k=1,2$ için $r_k(t)=1$ ve Eş. 3.39 koşulu ve Eş. 3.35 Dirichlet sınır koşulu altında Eş. 3.40 probleminin her genelleştirilmiş özdeğeri (λ_1,λ_2) için

$$\lambda_2 \geq k_1(\lambda_1) \tag{3.51}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde

$$k_1(\lambda_1) = \frac{1}{\alpha_2}\left\{2^{\alpha_1+\alpha_2}(b-a)^{1-(\alpha_1+\alpha_2)}\left[(\lambda_1\alpha_1)^{\alpha_1/p_1}\int_a^b r(s)\,ds\right]^{-1}\right\}^{p_2/\alpha_2} \tag{3.52}$$

fonksiyonunun var olduğunu gösterip, Eş. 3.40 sisteminin özdeğerlerinin bir alt sınırını elde etmişlerdir. Böylece özdeğer probleminin bir özdeğeri için alt sınırı Eş. 3.50 eşitsizliği yardımıyla bularak bir uygulama vermişlerdir.

Çakmak ve Tiryaki [27], Eş. 3.34 diferensiyel denklem sistemi için, $k=1,2$ olmak üzere $h_k \in C([a,b],\mathbb{R})$ ve $(x_1(t),x_2(t))$, Eş. 3.35 Dirichlet sınır koşulu altında Eş. 3.34-Eş. 3.36 problemi için $[a,b]$ aralığında aşikar olmayan bir çözüm ise

$$\left(\int_a^b r_1^{1/(1-p_1)}(s)\,ds\right)^{\frac{\beta_1(p_1-1)}{p_1}}\left(\int_a^b r_2^{1/(1-p_2)}(s)\,ds\right)^{\frac{\alpha_2(p_2-1)}{p_2}}$$
$$\times\left(\int_a^b h_1^+(s)\,ds\right)^{\frac{\beta_1}{p_1}}\left(\int_a^b h_2^+(s)\,ds\right)^{\frac{\alpha_2}{p_2}} > 2^{\alpha_2+\beta_1} \tag{3.53}$$

eşitsizliğinin sağlandığını bulmuşlardır.

Çakmak ve Tiryaki [28], $k=1,2,...,n$ için $h_k \in C([a,b],\mathbb{R})$ ve $(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$, $[a,b]$ aralığında $k=1,2,...,n$ için $r_k(t)=1$ ile birlikte Eş. 3.38-Eş. 3.39 probleminin aşikar olmayan bir çözümü ise $k=1,2,...,n$ için $|x_k(c_k)| = \underset{a<t<b}{maks}\ |x_k(t)|$ olmak üzere

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\int_a^b h_k^+(s)\,ds\right)^{\alpha_k/p_k} \geq \prod_{k=1}^{n}\left[(c_k-a)^{1-p_k}+(b-c_k)^{1-p_k}\right]^{\alpha_k/p_k} \tag{3.54}$$

eşitsizliğini elde ederek diferensiyel denklem sistemini ikinci boyuttan n-inci boyuta genişletmiş ve genelleştirmişlerdir. Ayrıca, Çakmak ve Tiryaki, Eş. 3.54 eşitsizliğini kullanarak $k=1,2,...,n$ için $r_k(t)=1$ olan Eş. 3.40 sisteminin özdeğerlerinin alt sınırını, Eş. 3.39 koşulu ve Eş. 3.37 Dirichlet sınır koşulu altında Eş. 3.40 probleminin her genelleştirilmiş özdeğeri $(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$ için

$$\lambda_n \geq k_{n-1}(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{n-1}) \tag{3.55}$$

sağlanacak şekilde $k=1,2,...,n$ için $|x_k(c_k)| = \underset{a<t<b}{maks}\,|x_k(t)|$ olmak üzere

$$k_{n-1}(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{n-1})$$
$$=\frac{1}{\alpha_n}\left\{\prod_{k=1}^{n}\left[(c_k-a)^{1-p_k}+(b-c_k)^{1-p_k}\right]^{\frac{\alpha_k}{p_k}}\left[\prod_{k=1}^{n-1}(\lambda_k\alpha_k)^{\frac{\alpha_k}{p_k}}\int_a^b r(s)\,ds\right]^{-1}\right\}^{\frac{p_n}{\alpha_n}} \tag{3.56}$$

fonksiyonunu elde etmişlerdir.

Diğer yandan, $m(t) := \frac{1}{t-a} + \frac{1}{b-t}$ fonksiyonunda $t \in (a,b)$ için $A = t-a > 0$ ve $B = b-t > 0$ seçilerek

$$4AB \leq (A+B)^2 \tag{3.57}$$

eşitsizliği kullanıldığında $\min_{a<t<b} m(t) = m\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{4}{b-a}$ için

$$\frac{1}{t-a} + \frac{1}{b-t} \geq \frac{4}{b-a} \tag{3.58}$$

eşitsizliğine ulaşmışlardır. Eş. 3.39 koşulu ve Eş. 3.37 Dirichlet sınır koşulu altında Eş. 3.40 probleminde $n = 2$ alınırsa, Eş. 3.58 eşitsizliği sağlandığından Eş. 3.55 eşitsizliğinin Eş. 3.51 eşitsizliğini geliştirdiği ve genelleştirdiği gözlemlenir. Benzer şekilde Eş. 3.58 eşitsizliği kullanılarak Eş. 3.53 eşitsizliği Eş. 3.50 eşitsizliğini genelleştirir.

Tang ve He [29], Çakmak ve Tiryaki'nin [27], [28] fikirlerinde küçük değişiklikler yaparak sırasıyla Eş. 3.35 ve Eş. 3.37 Dirichlet sınır koşulu altında Eş. 3.34 ve Eş. 3.38 diferensiyel denklem sistemleri için aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir:

İlk olarak, iki boyutlu diferensiyel denklem sistemi için aşağıdaki sonucu elde ettiler; $k = 1,2$ için $h_k \in C([a,b],\mathbb{R})$ ve $(x_1(t), x_2(t))$, Eş. 3.35 Dirichlet sınır koşulu altında Eş. 3.34-Eş. 3.36 problemi için $[a,b]$ aralığında aşikar olmayan bir çözüm ise

$$\begin{aligned} &\left(\int_a^b h_1^+(s) D_1(s)\, ds\right)^{\frac{\alpha_1\beta_1}{p_1^2}} \left(\int_a^b h_2^+(s) D_1(s)\, ds\right)^{\frac{\beta_1\alpha_2}{p_1p_2}} \\ &\times \left(\int_a^b h_1^+(s) D_2(s)\, ds\right)^{\frac{\beta_1\alpha_2}{p_1p_2}} \left(\int_a^b h_2^+(s) D_2(s)\, ds\right)^{\frac{\alpha_2\beta_2}{p_2^2}} > 1 \end{aligned} \tag{3.59}$$

eşitsizliği sağlanır.

Ayrıca, n boyutlu diferensiyel denklem sistemi için elde ettikleri sonuç aşağıdaki gibidir; $k = 1,2,...,n$ için $h_k \in C([a,b],\mathbb{R})$ ve $(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$, Eş. 3.38-Eş. 3.39 problemi

için $[a,b]$ aralığında aşikar olmayan bir çözüm ise

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_a^b h_i^+(s)\,D_k(s)\,ds\right)^{\frac{\alpha_k\alpha_i}{p_k p_i}} > 1 \tag{3.60}$$

eşitsizliği sağlanır.

($\alpha_2 = 0$ ve $\alpha_1 = p_1$) veya ($\beta_1 = 0$ ve $\beta_2 = p_2$) için Eş. 3.59 eşitsizliği veya $n = 1$ için Eş. 3.60 eşitsizliğinin Wang [21] tarafından verilen Eş. 3.47 eşitsizliğinden $1 < p_1 < 2$ ve $p_1 > 2$ durumlarında da daha iyi bir sonuç verdiğine dikkat edilmelidir.

Tang ve He [29], Napoli ve Pinasco [26]'nın, Eş. 3.51 eşitsizliğini elde etmek için kullandığı tekniğe benzer bir teknik kullanarak, $k = 1,2,...,n$ için $r_k(t) = 1$ olan Eş. 3.40 sistemi için Eş. 3.60 eşitsizliğinden λ_n'nin n-inci özdeğeri için alt sınır veren aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

Eş. 3.39 koşulu ve Eş. 3.37 Dirichlet sınır koşulu altında Eş. 3.40 probleminin her genelleştirilmiş özdeğeri $(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$ için Eş. 3.55 eşitsizliği sağlanacak şekilde ve $k = 1,2,...,n$ için $r_k(t) = 1$ olmak üzere

$$k_{n-1}(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{n-1}) = \frac{1}{\alpha_n}\left[\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i\alpha_i)^{\frac{\alpha_i}{p_i}}\prod_{k=1}^{n}\left(\int_a^b \frac{[(s-a)(b-s)]^{p_k-1}}{(s-a)^{p_k-1}+(b-s)^{p_k-1}}h(s)\,ds\right)^{\frac{\alpha_k}{p_k}}\right]^{-\frac{p_n}{\alpha_n}} \tag{3.61}$$

fonksiyonu vardır.

Şimdi, Tiryaki ve diğerleri [30] tarafından elde edilen genelleştirilmiş Lyapunov tipi eşitsizliklerden bahsedilecektir.

Eğer $k = 1,2$ için $h_k \in \mathbb{C}([a,b],\mathbb{R})$ ve $(x_1(t),x_2(t))$, Eş. 3.35 Dirichlet sınır koşulu altında

Eş. 3.34-Eş. 3.36 problemi için $[a,b]$ aralığında aşikar olmayan bir çözüm ise

$$1 < \left(\int_a^b h_1^+(t) D_1^{\alpha_1/p_1}(t) D_2^{\alpha_2/p_2}(t) dt \right)^{\beta_1/p_1} \left(\int_a^b h_2^+(t) D_1^{\beta_1/p_1}(t) D_2^{\beta_2/p_2}(t) dt \right)^{\alpha_2/p_2} \tag{3.62}$$

ve

$$1 < \left(\int_a^b h_1^+(t) E_1^{\alpha_1/p_1}(t) E_2^{\alpha_2/p_2}(t) dt \right)^{\beta_1/p_1} \left(\int_a^b h_2^+(t) E_1^{\beta_1/p_1}(t) E_2^{\beta_2/p_2}(t) dt \right)^{\alpha_2/p_2} \tag{3.63}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Yukarıda görüldüğü gibi Tiryaki ve diğerleri Eş. 3.34-Eş. 3.35 problemi için iki tane Lyapunov tipi eşitsizlik elde etmişlerdir. Bu iki sonuç kendi içerisinde karşılaştırılırsa; $k = 1,2$ için $p_k > 2$ olduğunda Eş. 3.62 eşitsizliği Eş. 3.63 eşitsizliğinden daha iyi iken $k = 1,2$ için $1 < p_k < 2$ olduğunda Eş. 3.63 eşitsizliğinin Eş. 3.62 eşitsizliğinden daha iyi bir sonuç olduğuna dikkat edilmelidir.

Eğer $k = 1,2,...,n$ için $h_k \in \mathbb{C}([a,b],\mathbb{R})$ ve $(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$, $[a,b]$ üzerinde Eş. 3.37 Dirichlet sınır koşulu altında Eş. 3.38-Eş. 3.39 problemi için aşikar olmayan bir çözüm ise

$$1 < \prod_{k=1}^{n} \left(\int_a^b h_k^+(t) \prod_{i=1}^{n} D_i^{\alpha_i/p_i}(t) dt \right)^{\alpha_k/p_k} \tag{3.64}$$

ve

$$1 < \prod_{k=1}^{n} \left(\int_a^b h_k^+(t) \prod_{i=1}^{n} E_i^{\alpha_i/p_i}(t) dt \right)^{\alpha_k/p_k} \tag{3.65}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Yukarıda görüldüğü gibi Tiryaki ve diğerleri Eş. 3.38-Eş. 3.39 problemi için de iki tane Lyapunov tipi eşitsizlik elde etmişlerdir. Bu iki sonuç kendi içerisinde karşılaştırılırsa; $k = 1,2$ için $p_k > 2$ olduğunda Eş. 3.64 eşitsizliği Eş. 3.65 eşitsizliğinden daha iyi iken $k = 1,2$ için $1 < p_k < 2$ olduğunda Eş. 3.65 eşitsizliğinin Eş. 3.64 eşitsizliğinden daha iyi olduğuna dikkat edilmelidir.

Diğer yandan, Tiryaki ve diğerleri yukarıdaki elde ettikleri sonuçların genel durumda literatürdeki sonuçlar ile karşılaştırılamadığına sadece özel durumlarında karşılaştırılabildiğine dikkat edilmelidir.

Son olarak; Tiryaki ve diğerleri [30], elde ettikleri sonuçların bir uygulaması olarak, Eş. 3.39 özdeğer probleminin n bileşenli $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ genelleştirilmiş herhangi bir özdeğeri için alt sınır veren aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

Eş. 3.64 Lyapunov tipi eşitsizlik için

$$k_{n-1}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1}) = \frac{1}{\alpha_n}\left[\prod_{k=1}^{n-1}(\lambda_k \alpha_k)^{\alpha_k/p_k}\int_a^b r(s)\prod_{i=1}^{n} D_i(t)^{\alpha_i/p_i}(t)dt\right]^{-p_n/\alpha_n} \tag{3.66}$$

Eş. 3.65 Lyapunov tipi eşitsizlik için

$$k_{n-1}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1}) = \frac{1}{\alpha_n}\left[\prod_{k=1}^{n-1}(\lambda_k \alpha_k)^{\alpha_k/p_k}\int_a^b r(s)\prod_{i=1}^{n} E_i(t)^{\alpha_i/p_i}(t)dt\right]^{-p_n/\alpha_n} \tag{3.67}$$

olmak üzere Eş. 3.37 Dirichlet sınır koşulu altında Eş. 3.39-Eş. 3.40 probleminin herhangi bir $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ genelleştirilmiş özdeğeri için

$$k_{n-1}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1}) < \lambda_n \tag{3.68}$$

olacak şekilde $k_{n-1}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1})$ fonksiyonu vardır.

Aktaş [31] 2022 yılında, Lyapunov tipi eşitsizlikler üzerine

$$x_1(a) = x_1(b) = 0 \tag{3.69}$$

Dirichlet sınır koşulu altında p relativistik ve q öngörülen operatörlerini içeren

$$\begin{cases} x_1' &= h_2(t)x_1 + \dfrac{|x_2|^{p-2}x_2}{(1+|x_2|^p)^{\frac{p-1}{p}}} \\ x_2' &= -h_1(t)\dfrac{|x_1|^{q-2}x_1}{(1+|x_1|^q)^{\frac{q-1}{q}}} - h_2(t)x_2 \end{cases} \tag{3.70}$$

Hamiltonian tipi diferensiyel denklem sistemi için yeni sonuçlar ortaya koymuştur.

Eğer $(x_1(t), x_2(t))$, Eş. 3.69 Dirichlet sınır koşulu altında Eş. 3.70 probleminin aşikar olmayan bir çözümü ise

$$1 \leq \int_a^b \frac{h_1^+(s)}{\left(\int_a^s e^{-p\int_s^v h_2(\theta)d\theta} dv\right)^{1-q} + \left(\int_s^b e^{-p\int_s^v h_2(\theta)d\theta} dv\right)^{1-q}} ds \tag{3.71}$$

ve

$$1 \leq \int_a^b 2^{q-2} \left(\frac{1}{\int_a^s e^{-p\int_s^v h_2(\theta)d\theta} dv} + \frac{1}{\int_s^b e^{-p\int_s^v h_2(\theta)d\theta} dv} \right)^{1-q} h_1^+(s) ds \tag{3.72}$$

eşitsizliklerinin sağlandığını göstermiştir. Yüksek basamaktan Eş. 3.31 diferensiyel denklemi ve Eş. 3.70 diferensiyel denklem sisteminin özel durumlarında hangi diferensiyel denkleme indirgendiğini görmek için sırasıyla, $p = 2$ ve $n = 1$ ve $p = q = 2$ ve $h_2(t) = 0$ alınırsa

$$-\left(\frac{x_1'}{\sqrt{1-|x_1'|^2}}\right)' = h_1(t)\frac{x_1}{\sqrt{1+|x_1|^2}} \tag{3.73}$$

tek diferensiyel denklemine indirgendiğine dikkat edilmelidir.

Ayrıca, p relativistik ve q eğrilik operatörlerini içeren Hamiltonian tipi diferensiyel denklem sistemi şeklindeki sınır değer problemi için Lyapunov tipi eşitsizlik elde eden ilk çalışma olması açısından önemlidir. Bu doğrultuda literatürde yer alan, p relativistik veya q eğrilik operatörlerini içeren sınır değer problemi için Lyapunov tipi eşitsizliğe ilişkin sonuçlardan esinlenerek; bu tezde, yüksek boyutlu belirli bir diferensiyel denklem sistemi için farklı sınır şartları altında yeni ve orijinal Lyapunov tipi eşitsizlikler elde edilmiştir.

4. LYAPUNOV TİPİ EŞİTSİZLİKLER ÜZERİNE YENİ TEOREMLER VE SONUÇLAR

Bu tezde $v \in (-1,1)$ ve $p > 1$ için p relativistik

$$\phi_p(v) = \frac{|v|^{p-2} v}{\left(1-|v|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}} \tag{4.1}$$

operatörünü ve $u \in \mathbb{R}$ ve $q > 1$ için q öngörülen eğrilik

$$\Phi_q(u) = \frac{|u|^{q-2} u}{\left(1+|u|^q\right)^{\frac{q-1}{q}}} \tag{4.2}$$

operatörünü içeren $n \in \mathbb{N}$ ve $k = 1,2,...,n$ için farklı sınır koşulları altında lineer olmayan

$$-\left(\phi_{p_k}\left(x_k'\right)\right)' = h_k(t)\,\Phi_{\alpha_{kk}}(x_k)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\frac{|x_i|^{\alpha_{ki}}}{\left(1+|x_i|^{\alpha_{ki}}\right)^{\frac{\alpha_{ki}-1}{\alpha_{ki}}}} \tag{4.3}$$

diferensiyel denklem sistemi için yeni Lyapunov tipi eşitsizlikler elde edilecektir. Lineer olmayan Eş. 4.3 diferensiyel denklem sistemi $n = 1$ ve $\alpha_{11} = p_1 = 2$ alınırsa

$$-\left(\frac{x_1'}{\sqrt{1-|x_1'|^2}}\right)' = h_1(t)\frac{x_1}{\sqrt{1+|x_1|^2}} \tag{3.73}$$

tek diferensiyel denkleme indirgenir. Tezde bundan sonraki kısımlarda kolaylık sağlaması açısından aşağıdaki notasyonlar kulanılacaktır. Herhangi kompakt $[a,b]$ alt aralığında $n \in \mathbb{N}$ ve $k = 1,2,...,n$ için $h_k \not\equiv 0$, Eş. 3.42'de verildiği gibi olmak üzere, $k,i = 1,2,...,n$ için $1 < p_k < \infty$, α_{ki} negatif olmayan sabitler olmak üzere

$$\mathscr{A}_k = \left\{ h_k^+ \in L^1_{loc}(a,b) : \int_a^b h_k^+(s)\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{[(s-a)(b-s)]^{p_i-1}}{(s-a)^{p_i-1}+(b-s)^{p_i-1}}\right)^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}} ds < \infty \right\} \tag{4.4}$$

olsun. $a,b \in \mathbb{R}$ iken $a < b$ ve $m = 0,1$, $k = 1,2,...,n$ için x_k, $[a,b]$ aralığında özdeş olarak

sıfırdan farklı olmak üzere

$$x_k^{(m)}(a) + x_k^{(m)}(b) = 0 \tag{4.5}$$

anti-periyodik sınır koşulları veya

$$x_k(a) = 0 = x_k(b) \tag{4.6}$$

Dirichlet sınır koşulunu sağlayan lineer olmayan Eş. 4.3 sınır değer probleminin özdeş olarak sıfırdan farklı bir reel çözümü $(x_1, x_2, ..., x_n)$ olsun. $x_k \in C^1[a,b]$, $\left\|x_k'\right\|_\infty < 1$ ve $k = 1,2,...,n$ için $\phi_{p_k}\left(x_k'\right)$, (a,b) herhangi bir kompakt alt aralığında mutlak sürekli ve x_k, lineer olmayan Eş. 4.3 diferensiyel denklem sistemini ve Eş. 4.5 anti-periyodik sınır koşulunu (veya Eş. 4.6 Dirichlet sınır koşulunu) sağlarsa $(x_1, x_2, ..., x_n)$ çözümünün lineer olmayan Eş. 4.3 diferensiyel denklem sisteminin bir çözümü olduğu söylenir.

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere p relativistik operatör ϕ_p'nin tersinin $\Phi_q(u) = \phi_p^{-1}(u)$ olduğuna dikkat edilmelidir. Ayrıca; ϕ_p, ± 1'de tekil bir fonksiyon iken Φ_q sınırlı düzgün bir fonksiyondur $\left(\left|\Phi_q\right| < 1\right)$. $p = q = 2$ alınırsa bunlar diferensiyel geometri ve kısmi diferensiyel denklemde çok dikkat çeken relativistik ve eğrilik operatörü olarak ortaya çıkarlar [32,33]. Bu tezde, Eş. 4.5 anti-periyodik sınır koşulu (veya Eş. 4.6 Dirichlet sınır koşulu) altında p relativistik operatör ϕ_p ve q eğrilik operatörü Φ_q'yu içeren lineer olmayan Eş. 4.3 diferensiyel denklem sistemi için yeni ve orijinal Lyapunov tipi eşitsizlikler ele alınmıştır. Bu operatörleri içeren sonuçlar için [25, 31, 34-36]'daki makaleler incelenebilir. Bu çalışma bilindiği kadarıyla p relativistik operatörü ϕ_p ve q eğrilik operatörün Φ_q içeren Eş. 4.3 diferensiyel denklem sistemini ilk defa göz önüne alarak Lyapunov tipi eşitsizlikler üzerine sonuçlar elde eden ilk çalışmadır. Motivasyonumuz Aktaş [25, 31, 37-40], Tiryaki ve diğerleri [30,41], Aktaş ve diğerleri [42] ve Yang ve diğerlerinin [22] makalelerinden gelmektedir.

Çeşitli sınır koşulları altındaki farklı diferensiyel denklem sistemleri için Lyapunov tipi eşitsizlikler üzerine en son yapılan çalışmaların bazıları için [19, 27, 28, 30, 36, 38, 43-45] referanslarına bakılabilir.

4.0.1. Teorem

$0 < \sum_{i=1}^{n} e_i^2$ ve $k = 1,2,...,n$ için $0 \leq e_k$ olmak üzere

$$e_k \left(1 - \frac{\alpha_{kk}}{p_k}\right) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{\alpha_{ik}}{p_k} e_i = 0 \tag{4.7}$$

lineer diferensiyel denklem sisteminin özdeş olarak sıfırdan farklı bir çözümü $(e_1, e_2, ..., e_n)$ olsun. Eğer $(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$, Eş. 4.6 Dirichlet sınır koşuluna sahip Eş. 4.3 problemi için $[a,b]$ aralığında özdeş olarak sıfırdan farklı bir çözüm ve $k = 1,2,...,n$ için $h_k^+ \in \mathscr{A}_k$ ise $h_k^+(t)$, Eş. 3.42'deki gibi tanımlanmak üzere

$$1 < \prod_{k=1}^{n} \left[\int_a^b h_k^+(s) \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{[(s-a)(b-s)]^{p_i - 1}}{(s-a)^{p_i-1} + (b-s)^{p_i-1}} \right)^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}} ds \right]^{e_k} \tag{4.8}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

$n \in \mathbb{N}$ ve $k = 1,2,...,n$ için $a, b \in \mathbb{R}$ iken $a < b$ ve x_k, $[a,b]$ aralığı üzerinde sıfırdan farklı olmak üzere Eş. 4.6 Dirichlet sınır koşulu sağlansın. $k = 1,2,...,n$ için $x_k(a) = 0$ ve Hölder eşitsizliğinden $t \in [a,b]$ için

$$|x_k(t)| \leq \int_a^t \left| x_k'(s) \right| ds \leq (t-a)^{\frac{p_k - 1}{p_k}} \left(\int_a^t \left| x_k'(s) \right|^{p_k} ds \right)^{\frac{1}{p_k}} \tag{4.9}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece, $k = 1,2,...,n$ ve $t \in [a,b]$ için

$$|x_k(t)|^{p_k} (t-a)^{1-p_k} \leq \int_a^t \left| x_k'(s) \right|^{p_k} ds \tag{4.10}$$

eşitsizliği sağlanır. Öte yandan, $x_k(b) = 0$ ve Hölder eşitsizliğinden $k = 1,2,...,n$ ve $t \in [a,b]$

için

$$|x_k(t)|^{p_k}(b-t)^{1-p_k} \leq \int_t^b \left|x_k^{'}(s)\right|^{p_k} ds \tag{4.11}$$

eşitsizliği elde edilir. Eş. 4.10 ve Eş. 4.11 eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa $k = 1,2,...,n$ ve $t \in [a,b]$ için

$$|x_k(t)|^{p_k} \leq \frac{[(t-a)(b-t)]^{p_k-1}}{(t-a)^{p_k-1}+(b-t)^{p_k-1}} \int_a^b \left|x_k^{'}(s)\right|^{p_k} ds \tag{4.12}$$

eşitsizliği sağlanır. $\forall t \in (a,b)$ ve $k = 1,2,...,n$ için $x_k^{'}(t) \neq 0$ olduğuna dikkat edilirse, $t \in (a,b)$ ve $k = 1,2,...,n$ için $x_k^{'}(t) \equiv 0$ ise Eş. 4.12 eşitsizliğinden Eş. 4.6 Dirichlet sınır koşulu ile çelişen $t \in (a,b)$ ve $k = 1,2,...,n$ için $x_k(t) \equiv 0$ elde edilir. Böylece, $\forall t \in (a,b)$ ve $k = 1,2,...,n$ için $x_k^{'}(t) \neq 0$ sağlanır. Sonuç olarak, $k = 1,2,...,n$ ve $t \in [a,b]$ için

$$B_k = \int_a^b \left|x_k^{'}(s)\right|^{p_k} ds \text{ ve } C_k(t) = \frac{[(t-a)(b-t)]^{p_k-1}}{(t-a)^{p_k-1}+(b-t)^{p_k-1}} \tag{4.13}$$

olmak üzere

$$|x_k(t)|^{p_k} < B_k C_k(t) \tag{4.14}$$

eşitsizliği elde edilir. Eş. 4.14 eşitsizliğinin $\frac{\alpha_{ik}}{p_k}$-inci kuvveti alınırsa $k = 1,2,...,n$ ve $t \in [a,b]$ için

$$|x_k(t)|^{\alpha_{ik}} < B_k^{\frac{\alpha_{ik}}{p_k}} C_k^{\frac{\alpha_{ik}}{p_k}}(t) \tag{4.15}$$

elde edilir. Eş. 4.15 eşitsizliğinde $i = k$ alınıp $h_k^+(t) \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} |x_i(t)|^{\alpha_{ki}}$ ile çarpılır ve a'dan b'ye integral alınırsa $k = 1,2,...,n$ için

$$\int_a^b h_k^+(s) \prod_{i=1}^{n} |x_i(s)|^{\alpha_{ki}} ds < B_k^{\frac{\alpha_{kk}}{p_k}} \int_a^b h_k^+(s) C_k^{\frac{\alpha_{kk}}{p_k}}(s) \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} |x_i(s)|^{\alpha_{ki}} ds \tag{4.16}$$

elde edilir. Öte yandan; lineer olmayan Eş. 4.3 diferensiyel denklem sisteminin k-inci

denkleminin, x_k ile çarpılması ve a'dan b'ye integral alınmasıyla $k = 1,2,...,n$ için

$$\begin{aligned} B_k &= \int_a^b \left|x_k^{'}(s)\right|^{p_k} ds \leq \int_a^b \frac{\left|x_k^{'}(s)\right|^{p_k}}{\left(1-\left|x_k^{'}(s)\right|^{p_k}\right)^{\frac{p_k-1}{p_k}}} ds \\ &= \int_a^b h_k(s) \prod_{i=1}^{n} \frac{|x_i(s)|^{\alpha_{ki}}}{\left(1+|x_i(s)|^{\alpha_{ki}}\right)^{\frac{\alpha_{ki}-1}{\alpha_{ki}}}} ds \\ &\leq \int_a^b h_k^+(s) \prod_{i=1}^{n} |x_i(s)|^{\alpha_{ki}} ds \end{aligned} \tag{4.17}$$

eşitsizliği elde edilir. Eş. 4.16 eşitsizliğinde Eş. 4.17 eşitsizliği kullanılarak $k = 1,2,...,n$ için

$$B_k < B_k^{\frac{\alpha_{kk}}{p_k}} \int_a^b h_k^+(s) C_k^{\frac{\alpha_{kk}}{p_k}}(s) \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} |x_i(s)|^{\alpha_{ki}} ds \tag{4.18}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece Eş. 4.18 eşitsizliğinde Eş. 4.15 eşitsizliği kullanılarak $k = 1,2,...,n$ için

$$B_k^{1-\frac{\alpha_{kk}}{p_k}} < \int_a^b h_k^+(s) C_k^{\frac{\alpha_{kk}}{p_k}}(s) \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} B_i^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}} C_i^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}}(s) ds \tag{4.19}$$

eşitsizliği sağlanır ve dolayısıyla

$$B_k^{1-\frac{\alpha_{kk}}{p_k}} < \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} B_i^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}} \int_a^b h_k^+(s) \prod_{i=1}^{n} C_i^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}}(s) ds \tag{4.20}$$

elde edilir. Eş. 4.20 eşitsizliğinin her iki tarafının sırasıyla her $k = 1,2,...,n$ için e_k-inci kuvvetleri alınırsa ve elde edilen eşitsizlikler taraf tarafa çarpılırsa

$$\prod_{k=1}^{n} B_k^{e_k\left(1-\frac{\alpha_{kk}}{p_k}\right)} < \prod_{k=1}^{n} \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} B_i^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}} \right)^{e_k} \prod_{k=1}^{n} \left(\int_a^b h_k^+(s) \prod_{i=1}^{n} C_i^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}}(s) ds \right)^{e_k} \tag{4.21}$$

ve böylece

$$\prod_{k=1}^{n} B_k^{e_k\left(1-\frac{\alpha_{kk}}{p_k}\right)} < \prod_{k=1}^{n} B_k^{\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \frac{\alpha_{ik}}{p_k} e_i} \prod_{k=1}^{n} \left(\int_a^b h_k^+(s) \prod_{i=1}^{n} C_i^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}}(s) ds \right)^{e_k} \tag{4.22}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi, $k = 1,2,...,n$ için $B_k > 0$ olduğu ispatlanacaktır. $k = 1,2,...,n$ için $B_k > 0$ sağlanmıyorsa $B_{k_0} = \int\limits_a^b \left| x'_{k_0}(s) \right|^{p_{k_0}} ds = 0$ olacak şekilde $k_0 \in \{1,2,...,n\}$ vardır. $t \in [a,b]$ için

$$x'_{k_0}(t) \equiv 0 \tag{4.23}$$

elde edilir. Eş. 4.12 eşitsizliğini Eş. 4.23 ile birleştirilerek Eş. 4.6 Dirichlet sınır koşulu ile çelişen $a \leq t \leq b$ için $x_{k_0}(t) \equiv 0$ elde edilir. Sonuç olarak, $k = 1,2,...,n$ için $B_k > 0$ sağlanır. Böylece, $k = 1,2,...,n$ için

$$\theta_k = e_k \left(1 - \frac{\alpha_{kk}}{p_k}\right) - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \frac{\alpha_{ik}}{p_k} e_i \tag{4.24}$$

olmak üzere

$$\prod_{k=1}^{n} B_k^{\theta_k} < \prod_{k=1}^{n} \left(\int_a^b h_k^+(s) \prod_{i=1}^{n} C_i^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}}(s) ds \right)^{e_k} \tag{4.25}$$

eşitsizliği sağlanır. Varsayımdan $j \in \{1,2,...,n\}$ için en az bir $0 < e_j$ ve $k = 1,2,...,n$ için $0 \leq e_k$ olmak üzere $k = 1,2,...,n$ için $\theta_k = 0$ olacak şekilde Eş. 4.7 lineer diferensiyel denklem sisteminin özdeş olarak sıfırdan farklı $(e_1, e_2, ..., e_n)$ bir çözümü vardır. $(e_1, e_2, ..., e_n)$ çözümlerinden biri seçilirse Eş. 4.25 eşitsizliğinden Eş. 4.8 eşitsizliği elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

4.0.1 Uyarı

$h_1(t) \geq 0$ olmak üzere Eş. 4.8 eşitsizliğinde $n = 1$ ve $\alpha_{11} = p_1 = 2$ alınırsa, Eş. 4.8 eşitsizliğinin Eş. 3.18 eşitsizliğine indirgendiğine dikkat edilmelidir.

$M(t) = \frac{[(t-a)(b-t)]^{p_k-1}}{(t-a)^{p_k-1}+(b-t)^{p_k-1}}$ fonksiyonunun mutlak maksimum değerini $\frac{a+b}{2}$ noktasında alır. Yani, $k = 1,2,...,n$ için

$$M(t) \leq \underset{a\leq t\leq b}{maks} M(t) = M\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{(b-a)^{p_k-1}}{2^{p_k}} \tag{4.26}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan, aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.0.1. Sonuç

Eş. 4.7 lineer diferensiyel denklem sisteminin özdeş olarak sıfırdan farklı bir çözümü $(e_1,e_2,...,e_n)$ olsun. Eş. 4.6 Dirichlet sınır koşuluna sahip Eş. 4.3 problemi için $[a,b]$ aralığında özdeş olarak sıfırdan farklı $(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$ bir çözümse ve $k = 1,2,...,n$ için

$$\mathscr{A}_2 = \left\{ h_k^+ \in L^1_{loc}(a,b) : \int_a^b h_k^+(s)ds < \infty \right\} \tag{4.27}$$

ise ve $h_k^+(t)$, Eş. 3.42'de verildiği gibi olmak üzere

$$1 < \prod_{k=1}^{n} \left[\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{(b-a)^{p_i-1}}{2^{p_i}} \right)^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}} \int_a^b h_k^+(s)ds \right]^{e_k} \tag{4.28}$$

eşitsizliği sağlanır.

4.0.2 Uyarı

$h_1(t) \geq 0$ olmak üzere Eş. 4.28 eşitsizliğinde $n = 1$ ve $\alpha_{11} = p_1 = 2$ alınırsa

$$\int_a^b h_1(s)ds > \frac{4}{b-a} \tag{4.29}$$

klasik Lyapunov eşitsizliği elde edilir.

Burada $i = 1,2,...,n$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_{ik}}{p_k} = 1 \tag{4.30}$$

koşulunun sağlanması halinde Teorem 4.0.1.'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.0.2. Sonuç

Eğer Eş. 4.30 koşulu altında Eş. 4.6 Dirichlet sınır koşuluna sahip Eş. 4.3 problemi için $[a,b]$ aralığında özdeş olarak sıfırdan farklı bir çözümü $(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$ ve $k = 1,2,...,n$ için $h_k^+(t) \in \mathscr{A}_k$ ise $h_k^+(t)$, Eş. 3.42'de verildiği gibi olmak üzere

$$1 < \prod_{k=1}^{n} \left[\int_a^b h_k^+(s)ds \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{[(s-a)(b-s)]^{p_i-1}}{(s-a)^{p_i-1} + (b-s)^{p_i-1}} \right)^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}} ds \right]^{\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{\alpha_{jk}}{p_k}} \tag{4.31}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

Teorem 4.0.1.'in ispatındaki gibi devam edilirse $k = 1,2,...,n$ için

$$\theta_k = e_k \left(1 - \frac{\alpha_{kk}}{p_k} \right) - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \frac{\alpha_{ik}}{p_k} e_i \tag{4.24}$$

olmak üzere Eş. 4.25 eşitsizliği elde edilir. Teorem 4.0.1.'den $k = 1,2,...,n$ için $0 \leq e_k$ ve $j \in \{1,2,...,n\}$ için en az bir $0 < e_j$ olmak üzere $k = 1,2,...,n$ için $\theta_k = 0$ olacak şekilde Eş. 4.7 lineer diferensiyel denklem sistemi, (özdeş olarak sıfırdan farklı) $(e_1,e_2,...,e_n)$ çözümüne sahiptir. Eş. 4.7 lineer diferensiyel denklem sisteminde Eş. 4.30 koşulu kullanılırsa $k = 1,2,...,n$ için

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} e_k \frac{\alpha_{ki}}{p_i} = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \frac{\alpha_{ik}}{p_k} e_i \tag{4.32}$$

diferensiyel denklem sistemi elde edilir. Eş. 4.32 homogen diferensiyel denklem sistemin katsayılar matrisi üzerinde elemanter satır işlemleri yapılırsa sıfır satırlı bir matris elde edilir. Dolayısıyla Eş. 4.32 homogen diferensiyel denklem sisteminin sonsuz sayıda özdeş olarak sıfırdan farklı $(e_1, e_2, ..., e_n)$ çözümü vardır. Dolayısıyla $j,k = 1,2,...,n$ ve $j \neq k$ için $e_k = \frac{\alpha_{jk}}{p_k}$ alınabilir ve Eş. 4.25 eşitsizliğinden

$$1 < \prod_{k=1}^{n} \left(\int_a^b h_k^+(s)ds \prod_{i=1}^{n} C_i^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}}(s)ds \right)^{\frac{\alpha_{jk}}{p_k}} \tag{4.33}$$

elde edilir. $j = 1,2,...,n$ için $j \neq k$ olmak üzere elde edilen eşitsizlikler çarpılırsa Eş. 4.31 eşitsizliği elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Hölder eşitsizliği, Eş. 4.31 eşitsizliğine uygulanırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.0.3. Sonuç

$k = 1,2,...,n$ için $h_k^+ \in \mathscr{A}_k$ ve Eş. 4.30 şartı altında Eş. 4.6 Dirichlet sınır koşuluna sahip Eş. 4.3 problemi için $(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$, $[a,b]$ aralığında özdeş olarak sıfırdan farklı bir çözümse $h_k^+(t)$, Eş. 3.42'de verildiği olmak üzere

$$1 < \prod_{k=1}^{n} \prod_{i=1}^{n} \left(\int_a^b h_k^+(s) \frac{[(s-a)(b-s)]^{p_i-1}}{(s-a)^{p_i-1} + (b-s)^{p_i-1}} ds \right)^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{\alpha_{jk}}{p_k}} \tag{4.34}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi Eş. 4.30 koşulu yerine $k = 1,2,...,n$ için

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_{ik}}{p_k} = 1 \tag{4.35}$$

koşulu alınırsa, Teorem 4.0.1.'den aşağıdaki sonuç elde edilir. İspat, $k = 1,2,...,n$ için $e_k = 1$ alınırsa Sonuç 4.0.2.'nin ispatı ile hemen hemen aynıdır bu nedenle ispatsız olarak verilecektir.

4.0.4. Sonuç

$k = 1,2,...,n$ için $h_k^+ \in \mathscr{A}_k$ ve Eş. 4.35 koşulu altında Eş. 4.6 Dirichlet sınır koşuluna sahip Eş. 4.3 problemi için $(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$, $[a,b]$ aralığında özdeş olarak sıfırdan farklı bir çözümse $h_k^+(t)$, Eş. 3.42'de verildiği olmak üzere

$$1 < \prod_{k=1}^{n} \int_a^b h_k^+(s) \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{[(s-a)(b-s)]^{p_i-1}}{(s-a)^{p_i-1}+(b-s)^{p_i-1}} \right)^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}} ds \tag{4.36}$$

geçerlidir.

Şimdi Eş. 4.5 anti-periyodik sınır koşulu altında Eş. 4.3 problemi için elde edilen sonuçların ispatlarında kullanılacak bir lemma verilecektir. Aşağıdaki lemmanın ispatı, [24, Lemma 3.1] ve [45, Lemma 2.1]'deki lemmaların ispatlarına benzer olduğundan burada verilmemiştir.

4.0.1. Lemma

Eş. 4.5 anti-periyodik sınır koşulu altında Eş. 4.3 probleminin özdeş olarak sıfırdan farklı bir çözümü $(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$ ise $k = 1,2,...,n$ için

$$|x_k(t)| \leq \frac{(b-a)^{\frac{p_k-1}{p_k}}}{2} \left(\int_a^b \left| x_k'(s) \right|^{p_k} ds \right)^{\frac{1}{p_k}} \tag{4.37}$$

eşitsizliği sağlanır.

Aşağıdaki teorem, Eş. 4.5 anti-periyodik sınır koşulu altındaki Eş. 4.3 problemi için bu tezin diğer bir ana sonucudur.

4.0.2. Teorem

Eş. 4.7 lineer diferensiyel denklem sisteminin özdeş olarak sıfırdan farklı bir çözümü $(e_1,e_2,...,e_n)$ olsun. Eş. 4.5 anti-periyodik sınır koşuluna sahip Eş. 4.3 problemi için $[a,b]$ aralığında $k = 1,2,...,n$ için $h_k^+(t) \in \mathscr{A}_2$ olmak üzere $(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$ özdeş olarak

sıfırdan farklı bir çözümü ise $h_k^+(t)$, Eş. 3.42'de verildiği gibi olmak üzere

$$1 < \prod_{k=1}^{n} \left[\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{(b-a)^{p_i-1}}{2^{p_i}} \right)^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}} \int_a^b h_k^+(s)ds \right]^{e_k} \tag{4.38}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

$a,b \in \mathbb{R}$ iken $a < b$ olmak üzere $m = 0,1$ ve $k = 1,2,...,n$ için Eş. 4.5 anti periyodik sınır koşulu ve $k = 1,2,...,n$ için x_k, $[a,b]$ aralığında özdeş olarak sıfırdan farklı olsun. Lemma 4.0.1.'deki Eş. 4.37 eşitsizliği kullanılarak $k = 1,2,...,n$ için

$$|x_k(t)|^{p_k} \leq \frac{(b-a)^{\frac{p_k-1}{p_k}}}{2^{p_k}} \int_a^b \left| x_k'(s) \right|^{p_k} ds \tag{4.39}$$

elde edilir. $\forall t \in (a,b)$ ve $k = 1,2,...,n$ için $x_k'(t) \neq 0$ durumu Teorem 4.0.1.'in ispatında gösterildiği gibidir. Sonuç olarak, $k = 1,2,...,n$ için

$$|x_k(t)|^{p_k} < \frac{(b-a)^{\frac{p_k-1}{p_k}}}{2^{p_k}} \int_a^b \frac{\left| x_k'(s) \right|^{p_k}}{\left(1 - \left| x_k'(s) \right|^{p_k} \right)^{\frac{p_k-1}{p_k}}} ds \tag{4.40}$$

eşitsizliğini görmek kolaydır. Teorem 4.0.1.'in ispatı ile benzer işlemler yapılarak ispat tamamlanır ve bu nedenle ispatın geri kalan kısmına devam edilmemiştir.

4.0.3 Uyarı

$n = 1$ ve $\alpha_{11} = p_{11} = 2$ olduğunda $h_1^+ \in \mathscr{A}_2$ ve $x_1(t)$, $[a,b]$ aralığında Eş. 4.5 anti-periyodik sınır koşuluna sahip Eş. 3.73 tek denkleminin özdeş olarak sıfırdan farklı bir çözümü ise Eş. 4.38 eşitsizliğinden Eş. 3.1 klasik Lyapunov eşitsizliği elde edilir.

Eş. 4.5 anti-periyodik sınır koşulu altında elde edilen aşağıdaki sonuçların ispatları sırasıyla

Eş. 4.6 Dirichlet sınır koşulu altında elde edilen sonuçların ispatlarıyla hemen hemen aynıdır. Bu sebeple aşağıdaki sonuçlar ispatsız olarak verilecektir.

4.0.5. Sonuç

$[a,b]$ aralığında $(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$, Eş. 4.30 koşulu ve $k=1,2,...,n$ için $h_k^+ \in \mathscr{A}_2$ şartları altında Eş. 4.5 anti-periyodik sınır koşuluna sahip Eş. 4.3 problemi için özdeş olarak sıfırdan farklı bir çözümse ve $h_k^+(t)$, Eş. 3.42'de verildiği gibi olmak üzere

$$1 < \prod_{k=1}^{n} \left[\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{(b-a)^{p_i-1}}{2^{p_i}} \right)^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}} \int_a^b h_k^+(s)ds \right]^{\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{\alpha_{jk}}{p_k}} \tag{4.41}$$

eşitsizliği sağlanır.

4.0.6. Sonuç

$[a,b]$ aralığında $(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$, Eş. 4.35 koşulu ve $k=1,2,...,n$ için $h_k^+ \in \mathscr{A}_2$ şartları altında Eş. 4.5 anti-periyodik sınır koşuluna sahip Eş. 4.3 problemi için özdeş olarak sıfırdan farklı bir çözümse ve $h_k^+(t)$, Eş. 3.42'de verildiği gibi olmak üzere

$$1 < \prod_{k=1}^{n} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{(b-a)^{p_i-1}}{2^{p_i}} \right)^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}} \int_a^b h_k^+(s)ds \tag{4.42}$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi Teorem 4.0.1. ve Teorem 4.0.2.'nin doğrudan sonuçları olarak Eş. 4.5 anti-periyodik sınır koşulu veya Eş. 4.6 Dirichlet sınır koşuluna sahip Eş. 4.3 sınır değer probleminin aşikar olmayan çözümlerinin var olmaması için yeterli koşulları verilecektir.

4.0.7. Sonuç

(a) $(e_1,e_2,...,e_n)$, Eş. 4.7 lineer diferensiyel denklem sisteminin özdeş olarak sıfırdan farklı

bir çözüm olsun, $h_k^+(t)$, Eş. 3.42'de verildiği gibi olmak üzere

$$1 \geq \prod_{k=1}^{n} \left[\int_a^b h_k^+(s) \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{[(s-a)(b-s)]^{p_i-1}}{(s-a)^{p_i-1}+(b-s)^{p_i-1}} \right)^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}} ds \right]^{e_k} \tag{4.43}$$

eşitsizliği sağlanır ise Eş. 4.6 Dirichlet sınır koşulu altında Eş. 4.3 probleminin aşikar olmayan çözümü yoktur.

(b) $(e_1, e_2, ..., e_n)$, Eş. 4.7 lineer diferensiyel denklem sisteminin özdeş olarak sıfırdan farklı bir çözüm olsun, $h_k^+(t)$, Eş. 3.42'de verildiği gibi olmak üzere

$$1 \geq \prod_{k=1}^{n} \left[\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{(b-a)^{p_i-1}}{2^{p_i}} \right)^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}} \int_a^b h_k^+(s) ds \right]^{e_k} \tag{4.44}$$

eşitsizliği sağlanır ise Eş. 4.5 anti-periyodik sınır koşulu altında Eş. 4.3 probleminin aşikar olmayan çözümü yoktur.

Şimdi $t \in (a,b)$ iken Eş. 4.5 anti periyodik veya Eş. 4.6 Dirichlet sınır koşulları altında $n \in \mathbb{N}, k, i = 1, 2, ..., n, t \in (a,b)$ için $h_k, f_k \in \mathbb{C}([a,b], \mathbb{R})$, $p_k > 1$ ve α_{ki} negatif olmayan bir sabit olmak üzere

$$-\left(\phi_{p_k}\left(x_k'\right)\right)' = h_k(t)\,\Phi_{\alpha_{kk}}(x_k) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{|x_i|^{\alpha_{ki}}}{\left(1+|x_i|^{\alpha_{ki}}\right)^{\frac{\alpha_{ki}-1}{\alpha_{ki}}}} + f_k(t) \tag{4.45}$$

homogen olmayan sınır değer problemi ile Eş. 4.8 ve Eş. 4.38 Lyapunov tipi eşitsizliklerin uygulaması olarak çözümün tekliği için yeterli bir koşul verilecektir.

4.0.3. Teorem

$(e_1, e_2, ..., e_n)$, Eş. 4.7 lineer diferensiyel denklem sisteminin özdeş olarak sıfırdan farklı bir çözüm olsun. Eğer Eş. 4.43, Eş. 4.44 eşitsizlikleri geçerliyse Eş. 4.45 homogen olmayan sınır değer probleminin tek bir çözümü vardır.

İspat

Tekliği ispatlamak için Eş. 4.45'in homogen sınır değer problem kısmının sadece aşikar çözümü olduğunu göstermek yeterlidir. Aksine $x(t) \not\equiv 0$, Eş. 4.45'in homogen sınır değer problem kısmının bir çözümü olsun. Böylece Eş. 4.8 veya Eş. 4.38 Lyapunov tipi eşitsizliklerini kullanarak sırasıyla Eş. 4.43 veya Eş. 4.44 eşitsizlikleri ile çelişen

$$\prod_{k=1}^{n}\left[\int_{a}^{b}|h_k(s)|\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{[(s-a)(b-s)]^{p_i-1}}{(s-a)^{p_i-1}+(b-s)^{p_i-1}}\right)^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}}ds\right]^{e_k}>1 \tag{4.46}$$

veya

$$\prod_{k=1}^{n}\left[\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{(b-a)^{p_i-1}}{2^{p_i}}\right)^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}}\int_{a}^{b}|h_k(s)|\,ds\right]^{e_k}>1 \tag{4.47}$$

elde edilir. Bu nedenle Eş. 4.45'in homogen sınır değer problemi kısmı sadece aşikar bir çözüme sahiptir. Sınır değer problemlerinin teorisi nedeniyle Eş. 4.45 homogen olmayan sınır değer probleminin tek bir çözümü vardır.

Teorem 4.0.3.'e örnek olarak $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ olmak üzere $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = x\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ Dirichlet sınır koşulu veya $x\left(\frac{\pi}{2}\right) + x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$, $x'\left(\frac{\pi}{2}\right) + x'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ anti periyodik sınır koşulları altında

$$\left(\frac{x'}{\sqrt{1-|x'|^2}}\right)' + \frac{x}{4\sqrt{1+|x|^2}} = -\frac{1}{\cos^2 t} + \frac{\cos t}{4\sqrt{1+\cos^2 t}} \tag{4.48}$$

homogen olmayan sınır değer problemi göz önüne alınacaktır.

Eş. 4.43, Eş. 4.44 koşulları sağlandığından Eş. 4.48 probleminin tek bir çözümü vardır. Eş. 4.48 probleminin bu tür bir çözümü $x(t) = \cos t$ şeklindedir. $\left|x'\right| < 1$ ve Eş. 4.48'in homogen sınır değer problem kısmının sadece aşikar çözümü olduğuna dikkat edilmelidir.

Şimdiki kısımda $n \in \mathbb{N}$, $m = 0, 1$, $k = 1, 2, ..., n$, $p_k > 1$ için $t \in (a, b)$ olmak üzere Eş. 4.5 anti periyodik veya Eş. 4.6 Dirichlet sınır koşulları altında $n \in \mathbb{N}$ ve $k, i = 1, 2, ..., n$ $h_k \in$

$\mathbb{C}([a,b],\mathbb{R})$ için α_{ki} negatif olmayan bir sabit ve λ bir özdeğer parametresi olmak üzere

$$-\left(\phi_{p_k}\left(x_k'\right)\right)' = \lambda h_k(t)\,\Phi_{\alpha_{kk}}(x_k)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\frac{|x_i|^{\alpha_{ki}}}{\left(1+|x_i|^{\alpha_{ki}}\right)^{\frac{\alpha_{ki}-1}{\alpha_{ki}}}} \tag{4.49}$$

lineer olmayan sınır değer probleminin özdeğerleri için bir alt sınır Eş. 4.8 ve Eş. 4.38 Lyapunov tipi eşitsizlikler yardımıyla bulunacaktır. Teorem 4.0.1. ve Teorem 4.0.2.'nin doğrudan sonucu olarak aşağıdaki teorem elde edilir.

4.0.4. Teorem

(a) $(e_1,e_2,...,e_n)$, Eş. 4.7 lineer diferensiyel denklem sisteminin özdeş olarak sıfırdan farklı bir çözümü olduğunu ve λ'nın Eş. 4.49 sınır değer probleminin bir özdeğeri olsun. Böylece

$$\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\left[\int_a^b |h_k(s)|\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{[(s-a)(b-s)]^{p_i-1}}{(s-a)^{p_i-1}+(b-s)^{p_i-1}}\right)^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}}ds\right]^{e_k}} < |\lambda| \tag{4.50}$$

eşitsizliği sağlanır.

(b) $(e_1,e_2,...,e_n)$, Eş. 4.7 lineer diferensiyel denklem sisteminin özdeş olarak sıfırdan farklı bir çözümü ve λ'nın Eş. 4.49 sınır değer probleminin bir özdeğeri olsun. Böylece

$$\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\left[\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{(b-a)^{p_i-1}}{2^{p_i}}\right)^{\frac{\alpha_{ki}}{p_i}}\int_a^b |h_k(s)|\,ds\right]^{e_k}} < |\lambda| \tag{4.51}$$

eşitsizliği sağlanır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, diferensiyel denklem sistemi içeren sınır değer problemleri için elde edilen Lyapunov tipi eşitsizlikler üzerinde durulmuştur. Giriş Bölümünde, klasik Lyapunov eşitsizliğinin tarihçesinden kısaca bahsedilmiştir. İkinci Bölümde; sırasıyla, başlangıç ve sınır değer problemlerine ek olarak diferensiyel denklem sistemleri için temel tanımlar ve varlık-teklik teoremleri verilmiştir. Üçüncü Bölümde; sırasıyla ikinci ve yüksek basamaktan sınır değer problemlerine ek olarak sistemler için literatürdeki bazı sonuçlardan atıflar yapılarak bahsedilmiştir. Son Bölümde ise p relativistik ve q eğrilik operatörlerini içeren ilk defa tanımlanan bir sistem için yeni ve orijinal Lyapunov tipi eşitsizlikler ispatları ile birlikte verilmiştir. Ayrıca; uygulama olarak, çözümlerin var olmaması ve tekliği için yeter koşulların yanı sıra homogen olmayan problemin tek çözümünün varlığına ilişkin sonuçlar verilmiştir. Problemin önemini ortaya koymak için homogen olmayan bir problem için çözümü bilinen bir örnek verilmiştir. Son olarak, lineer olmayan bir sınır değer probleminin özdeğeri için bir alt sınır bulunmuştur.

Diferensiyel, fark, zaman skalası ve q-analizde yer alan salınımlılık, diskonjuge, özdeğer problemleri, kararlılık, varlık-teklik ve diğer uygulamalarda Lyapunov tipi eşitsizliklerin kullanışlı bir araç olmasından dolayı tezde bu alanında çalışacak olan bilim insanlarını bilgilendireceği ve çalışmalarında yardımcı olabileceği düşüncesindeyiz. Bu tezde sistem içeren sınır değer problemleri için Lyapunov tipi eşitsizlikler üzerine çalışmamıza rağmen farklı analizlerde farklı sınır değer problemleri için bu tezdeki yöntem kullanılarak yeni Lyapunov tipi eşitsizlikler elde edilip uygulamaları verilebilir. Bu konuya ilgi duyan okuyucular tarafından, önce ikinci ve daha sonra yüksek basamaktan sınır değer problemleri için Lyapunov tipi eşitsizlikler üzerine incelemeler yapabilir. Dolayısıyla buradan elde edilen bilgiler ışığında farklı sınır değer problemleri için yeni ve önemli sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

1. Lyapunov, A. M. (1907). Probleme general de la stabilite du mouvement. *Annales de la Faculte des Sciences Universite Toulouse* (Ninth Edition), 203-474.

2. Agarwal, R. P., Bohner, M., Özbekler, A. (2021). *Lyapunov Inequalities and Applications* (First Edition). Switzerland: Springer, 607.

3. Canada, A., Villegas, S. (2015). *A Variational Approach to Lyapunov Type Inequalities* (Sixth Edition). Switzerland: Springer Briefs Mathematics, 120.

4. Canada, A., Montero, J. A., Villegas, S. (2005). *Lyapunov-type Inequalities and Applications to PDE. Progress in Nonlinear Differential Equations Applications* (First Edition). Basel: Birkhauser Verlag, 179-193.

5. Hartman, P. (1982). *Ordinary Differential Equations* (Fifth Edition). Wiley, New York, 1964 an Boston: Birkhauser, 632.

6. Kelley, W. G., Peterson, A. C. (2010). *The Theory of Differential Equations, Classical and Qualitative*(Second Edition). New York: Springer, 87.

7. Pinasco, J. P. (2013). *Lyapunov-type Inequalities* (Second Edition). Springer Briefs Math. New York: Springer, 131.

8. Rao, M. R. M. (1980). *Ordinary Differential Equations* (Tenth Edition). Kanpur India: Edward Arnold, 13-50.

9. Ince, E. L. (1944). *Ordinary Differential Equations* (Third Edition). New York: Dover Publications, 573.

10. Çakmak, D., Aktaş, M. F., Tiryaki, A. (2013). Lyapunov-type inequalities for nonlinear systems involving the $(p_1, p_2, ..., p_n)$-Laplacian. *Electronic Journal of Differential Equations*, 128, 1-10.

11. Aktaş, M. F., Çakmak, D., Ahmetoğlu, A. (2019). Lyapunov-type inequalities for fourth-order boundary value problems. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas Fisicas Naturales Serie A Matematicas RACSAM*, 2, 615-625.

12. Aktaş, M. F., Çakmak, D. (2019). Lyapunov-type inequalities for third order linear differential equations with two points boundary conditions. *Hacettepe Journal Mathematics and Statistics*, 1, 59-66.

13. Aktaş, M. F., Çakmak, D. (2018). Lyapunov-type inequalities for third-order linear differential equations under the non-conjugate boundary conditions. *Differential Equations Applications*, 2, 219-226.

14. Aktaş, M. F., Çakmak, D. (2017). Lyapunov-type inequalities for third-order linear differential equations. *Electronic Journal of Differential Equations* , 139, 1-14.

15. Aktaş, M. F., Çakmak, D., Tiryaki, A. (2015). On the Lyapunov-type inequalities of a three-point boundary value problem for third order linear differential equations. *Applied Mathematics Letters*, 45, 1-6.

16. Aktaş, M. F., Çakmak, D., Tiryaki, A. (2012). A note on Tang and He's paper. *Applied Mathematics and Computation*, 218, 4867-4871.

17. Kwong, M. K. (1981). On Lyapunov's inequality for disfocality. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 83, 486-494.

18. Pinasco, J. P. (2004). Lower bounds for eigenvalues of the one-dimensional p-Laplacian. *Abstract and Applied Analysis*, 2, 147-153.

19. Sim, I., Lee, Y. (2010). Lyapunov inequalities for one-dimensional p-Laplacian problems with a singular weight function. *Journal of Inequalities and Applications*, Article ID 865096, 9 pp.

20. Yang, X. (2003). On inequalities of Lyapunov type. *Applied Mathematics and Computation*, 134, 293-300.

21. Wang, X. (2011). Lyapunov type inequalities for second-order half-linear differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 382, 792-801.

22. Yang, R., Sim, I., Lee, Y. H. (2019). Lyapunov-type inequalities for one-dimensional Minkowski-curvature problems. *Applied Mathematics Letters*, 91, 188-193.

23. Çakmak, D. (2010). Lyapunov-type integral inequalities for certain higher order differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 216, 368-373.

24. Wang, Y. (2012). Lyapunov-type inequalities for certain higher order differential equations with anti-periodic boundary conditions. *Applied Mathematics Letters*, 25, 2375-2380.

25. Aktaş, M. F. (2021). On Lyapunov-type inequalities for $(n+1)$st order nonlinear differential equations with the anti-periodic boundary conditions. *Turkish Journal of Mathematics*, 45, 2614-2622.

26. Napoli, P. L., Pinasco, J. P. (2006). Estimates for eingenvalues of quasilinear elliptic systems. *Journal of Differential Equations*, 227, 102-115.

27. Çakmak, D., Tiryaki, A. (2010). On Lyapunov-type inequality for quasilinear systems. *Applied Mathematics and Computation*, 216, 3584-3591.

28. Çakmak, D., Tiryaki, A. (2010). Lyapunov-type inequality for a class of Dirichlet quasilinear systems involving the $(p_1, p_2, ..., p_n)$-Laplacian. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* , 369, 76-81.

29. Tang, X. H., He, X. (2012). Lower bounds for generalized eingenvalues of the quasilinear system. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* , 385, 72-85.

30. Tiryaki, A., Çakmak, D., Aktaş, M. F. (2014). Lyapunov-type inequalities for two classes of Dirichlet quasilinear systems. *Mathematical Inequalities Applications* , 17, 843-863.

31. Aktaş, M. F. (2022). On Lyapunov-type inequalities for nonlinear Hamiltonian-type problems. *Filomat*, 36, 3423-3432.

32. Gilbarg, D., Trundinger, N. S. (2001). *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order* (Fourth Edition). Berlin, New York: Springer Verlag, 401.

33. Wang, X. J. (1998). Interior gradient estimates for mean curvature equations. *Mathematische Zeitschrift*, 228, 73-81.

34. Jebelean, P., Mawhin, J., Serban, C. (2020). Multiple critical orbits to partial periodic perturbations of the p-relativistic operator. *Applied Mathematics Letters*, 104, 106220.

35. Jebelean, P., Mawhin, J., Serban, C. (2017). A vector p-Laplacian type approach to multiple periodic solutions for the prelativistic operator. *Communications in Contemporary Mathematics*, 19, 1-16.

36. Jebelean, P., Serban, C. (2015). Boundary value problems for discontinuous perturbations of singular ϕ-Laplacian operator. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 431, 662-681.

37. Aktaş, M. F. (2020). Periodic solutions of relativistic Lienard-type equations. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 38, 1-12.

38. Aktaş, M. F. (2018). Lyapunov-type inequalities for two classes of nonlinear systems with homogeneous Dirichlet boundary conditions. *Ukrainian Mathematical Journal*, 6, 837-850.

39. Aktaş, M. F. (2014). On the multivariate Lyapunov inequalities. *Applied Mathematics and Computation*, 232, 784-786.

40. Aktaş, M. F. (2013). Lyapunov-type inequalities for n-dimensional quasilinear systems. *Electronıc Journal of Differential Equations*, 67, 1-8.

41. Tiryaki, A., Çakmak, D., Aktaş, M. F. (2012). Lyapunov-type inequalities for a certain class of nonlinear systems. *Computers and Mathematics with Applications*, 64, 1804-1811.

42. Aktaş, M. F., Çakmak, D., Tiryaki, A. (2014). Lyapunov-type inequality for quasilinear systems with anti-periodic boundary conditions. *Journal of Mathematical Inequalities*, 2, 313-320.

43. Çakmak, D. (2014). On Lyapunov-type inequality for a class of quasilinear systems. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 9, 1-10.

44. Çakmak, D. (2013). On Lyapunov-type inequality for a class of nonlinear systems. *Mathematical Inequalities Applications*, 16, 101-108.

45. Çakmak, D. (2013). Lyapunov-type inequalities for two classes of nonlinear systems with anti-periodic boundary conditions. *Applied Mathematics and Computation*, 223, 237-242.



Gazili olmak ayrıcalıktır