


# İKİ BAĞIMSIZ ÖRNEK İÇİN TESTLER

BÖLÜM 6

1

## İki Bağımsız Örnek İçin Testler

- Konum İle İlgili Testler
  - Medyan Testi
  - Mann-Whitney Testi
  - Wald-Wolfowitz Dizi Parçaları Testi
  - Kolmogorov-Smirnov Testi
  - Fisher Tam Olasılık Testi
- Dağılış İle İlgili Testler
  - Mood Testi
  - Siegel-Tukey Testi



2

# Medyan Testi

Varsayımlar:

a. Veri $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ ve $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$ bağımsız gözlemlerinden oluşur.
b. İlgilenilen değişkenin ölçme düzeyi en az sıralamadır.
c. İlgilenilen değişken süreklidir.

$$H_0: M_1 = M_2$$
$$H_1: M_1 \neq M_2$$



3

# Medyan Testi

| | Örnek no | | Toplam |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | |
| **Birleştirilmiş örnek medyanından büyük değerli olanların sayısı** | A | B | $A + B$ |
| **Birleştirilmiş örnek medyanından küçük değerli olanların sayısı** | C | D | $C + D$ |
| **Toplam** | $A + C = n_1$ | $B + D = n_2$ | $n$ |

$m$ : Birleştirilmiş örnek medyanı
$A$ : Birinci örnekte birleştirilmiş örnek medyanından büyük değerli olanların sayısı
$B$ : İkinci örnekte birleştirilmiş örnek medyanından büyük değerli olanların sayısı
$C$ : Birinci örnekte birleştirilmiş örnek medyanından küçük değerli olanların sayısı
$D$ : İkinci örnekte birleştirilmiş örnek medyanından küçük değerli olanların sayısı



4

# Medyan Testi

$$P_1 = \frac{A}{n_1}, P_2 = \frac{B}{n_2}, P = \frac{A+B}{n}$$

$$Z = \frac{P_1 - P_2}{\sqrt{P(1-P)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

| Karar kuralı | |
|---|---|
| $Z_h < -Z_{\alpha/2}$ veya $Z_h > Z_{\alpha/2}$ | ise $H_0$ reddedilir, |
| $-Z_{\alpha/2} < Z_h < Z_{\alpha/2}$ | ise $H_0$ reddedilemez |



5

# Örnek

| $X_i$ | $Y_i$ |
|---|---|
| 18, 42, 67, 18, 28, 27, 11, 24, 18, 16, 27, 18, 7, 9, 41, 67, 71, 18, 24, 61, 60, 18, 24, 32, 31, 61, 43, 30, 18, 21 | 24, 21, 7, 18, 16, 40, 37, 60, 70, 32, 30, 27, 18, 29, 38, 37, 40, 90, 18, 71 |

$$H_0: M_1 = M_2$$
$$H_1: M_1 \neq M_2$$



6

# Örnek

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 9 | 9 | 11 | 16 | 16 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 |
| 21 | 21 | 24 | 24 | 24 | 24 | 27 | 27 | 27 | 28 | 29 | 30 | 30 | 31 | 32 | 32 |
| 37 | 37 | 38 | 40 | 40 | 41 | 42 | 43 | 60 | 60 | 61 | 61 | 67 | 67 | 70 | 71 |
| 71 | 90 | | | | | | | | | | | | | | |

$$m = \frac{27 + 28}{2} = 27.5$$



7

# Örnek

| | Örnek no | | Toplam |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | |
| **27.5'den büyük değerli olanların sayısı** | 13 | 12 | 25 |
| **27.5'den küçük değerli olanların sayısı** | 17 | 8 | 25 |
| **Toplam** | 30 | 20 | 50 |

$$P_1 = \frac{13}{30}, \qquad P_2 = \frac{12}{20}, \qquad P = \frac{13 + 12}{50} = \frac{25}{50}$$

$$Z_h = \frac{\frac{13}{30} - \frac{12}{20}}{\sqrt{0.5(1 - 0.5)\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{20}\right)}} = -1.1547$$



8

# Örnek

Anlamlılık düzeyi 0.05 olduğundan T1'den $Z_{\alpha/2} = 1.96$ bulunur. Bu sonuçlara göre $-1.96 < -1.1547 < 1.96$ olduğundan $H_0$ reddedilemez. %95 güven düzeyinde A ve B ilaçlarının etkileri arasında fark yoktur.

Bu problem için T1'den

$$\begin{aligned} p\text{-değeri} &= P(Z < -1.1547) \\ &= 1 - P(Z < 1.1547) \\ &= 1 - 0.8749 \\ &= 0.1251 \end{aligned}$$

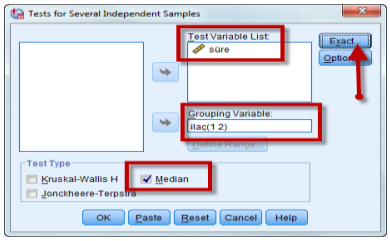
olarak hesaplanır. Bu sonuca göre $p$-değeri $\not< \alpha/2$ olduğundan $H_0$ reddedilemez kararı verilir.



9

# SPSS Uygulama

| | ilaç | süre |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 18 |
| 2 | 1 | 42 |
| 3 | 1 | 67 |
| 4 | 1 | 18 |
| 5 | 1 | 28 |
| 6 | 1 | 27 |
| 7 | 1 | 11 |
| 8 | 1 | 24 |
| 9 | 1 | 18 |
| 10 | 1 | 16 |
| 11 | 1 | 27 |
| 12 | 1 | 18 |
| 13 | 1 | 7 |
| 14 | 1 | 9 |
| 15 | 1 | 41 |
| 16 | 1 | 67 |
| 17 | 1 | 71 |
| 18 | 1 | 18 |
| 19 | 1 | 24 |
| 20 | 1 | 61 |
| 21 | 1 | 60 |
| 22 | 1 | 18 |
| 23 | 1 | 24 |
| 24 | 1 | 32 |
| 25 | 1 | 31 |




**Frequencies**

| | | ilaç | |
|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 |
| süre | > Median | 13 | 12 |
| | <= Median | 17 | 8 |

| | | süre |
|---|---|---|
| N | | 50 |
| Median | | 27,50 |
| Chi-Square | | 1,333 |
| df | | 1 |
| Asymp. Sig. (2-tailed test) | | ,248 |
| Yates' Continuity Correction | Chi-Square | ,750 |
| | df | 1 |
| | Asymp. Sig. | ,386 |
| Exact Sig. (2-tailed test) | | ,387 |
| Point Probability | | ,239 |



10

# Mann-Whitney Testi

Bu test için varsayımlar aşağıdadır.

a. Veri $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ ve $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$ bağımsız gözlemlerinden oluşur.
b. Örnekler bağımsızdır.
c. Gözlenen değişken sürekli rastgele değişkendir.
d. Ölçme düzeyi en az sıralamadır.

$X$ gözlemlerine atanan sıra sayılarının toplamı $S$ olmak üzere, Mann-Whitney test istatistiği,

$$T = S - \frac{n_1(n_1+1)}{2}$$





# Mann-Whitney Testi

| $X_i$ | 20 | 24 | 16 | 40 | 18 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y_i$ | 60 | 41 | 35 | 33 | 21 | 52 |

| $X_i$ | $R(X_i)$ Sıra sayısı | $Y_i$ | $R(Y_i)$ Sıra sayısı |
|---|---|---|---|
| 20 | 3 | 60 | 11 |
| 24 | 5 | 41 | 9 |
| 16 | 1 | 35 | 7 |
| 40 | 8 | 33 | 6 |
| 18 | 2 | 21 | 4 |
| | | 52 | 10 |
| | **19** | | |

$$T = S - \frac{n_1(n_1+1)}{2}$$

$$T_h = 19 - \frac{5(6)}{2}$$

$$= 4$$

# Mann-Whitney Testi

| $H_1$ | Karar kuralı | | |
|---|---|---|---|
| $M_1 < M_2$ | $T_h \leq W_\alpha$ | ise $H_0$ reddedilir, | $P(T \leq W_\alpha) = \alpha$ |
| $M_1 > M_2$ | $T_h \geq W'_\alpha$ | ise $H_0$ reddedilir, | $W'_\alpha = n_1 n_2 - W_\alpha$ |
| $M_1 \neq M_2$ | $T_h \leq W_{\alpha/2}$ veya $T_h \geq W'_{\alpha/2}$ | ise $H_0$ reddedilir, | $P(T \leq W_{\alpha/2}) = \alpha/2$ <br> $W'_{\alpha/2} = n_1 n_2 - W_{\alpha/2}$ |



13

# Mann-Whitney Testi

$P(T \leq 6) = 0.001$
$P(T \leq 10) = 0.005$
$P(T \leq 12) = 0.010$
$P(T \leq 16) = 0.025$
$P(T \leq 19) = 0.050$
$P(T \leq 23) = 0.100$

| | $n_2$ | 2 | 3 | ⋯ | 9 | ⋯ | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_1$ | p | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| ⋮ | | | | | | | |
| 8 | 0.001 | | | | 6 | | |
| | 0.005 | | | | 10 | | |
| | 0.010 | | | ⋯ | 12 | ⋯ | |
| | 0.025 | | | | 16 | | |
| | 0.050 | | | | 19 | | |
| | 0.100 | | | | 23 | | |
| ⋮ | | | | | | | |
| 20 | | | | | | | |



14

# Örnek

| $X_i$ (A yöntemi) | $Y_i$ (B yöntemi) |
|---|---|
| 30, 20, 40, 60, 41, 50, 90, 15, 47, 56, 12, 51 | 37, 80, 82, 59, 38, 91, 88, 68 |

$H_0: M_1 = M_2$
$H_1: M_1 < M_2$

**1. örnek için**

| $X_i$ | 30 | 20 | 40 | 60 | 41 | 50 | 90 | 15 | 47 | 56 | 12 | 51 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R(X_i)$ | 4 | 3 | 7 | 14 | 8 | 10 | 19 | 2 | 9 | 12 | 1 | 11 |

**2. örnek için**

| $Y_i$ | 37 | 80 | 82 | 59 | 38 | 91 | 88 | 68 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R(Y_i)$ | 5 | 16 | 17 | 13 | 6 | 20 | 18 | 15 |



# Örnek

Birinci örnek için sıra sayılarının toplamı

$$S = 4 + 3 + 7 + 14 + 8 + 10 + 19 + 2 + 9 + 12 + 1 + 11 = 100$$

hesaplanır. $S = 100$ ve $n_1 = 12$ değerleri yerlerine konursa,

$$T = S - \frac{n_1(n_1 + 1)}{2}$$

$$T_h = 100 - \frac{12(12 + 1)}{2}$$

$$= 22$$

# Örnek

$n_1 = 12, n_2 = 8$ ve $\alpha = 0.05$ iken $W_\alpha$ kritik değeri

$$P(T \leq W_\alpha) = \alpha$$

bilgisi ile T12'den $W_\alpha = 27$ olarak bulunur. Buna göre $T_h < W_\alpha$, yani $22 < 27$, olduğundan $H_0$ reddedilir.

Bu *p-değeri* T12'den yaklaşık olarak bulunabilir. $n_1 = 12$ ve $n_2 = 8$ iken T12'den

$$P(T \leq 18) = 0.01 \quad \text{ve} \quad P(T \leq 23) = 0.025$$

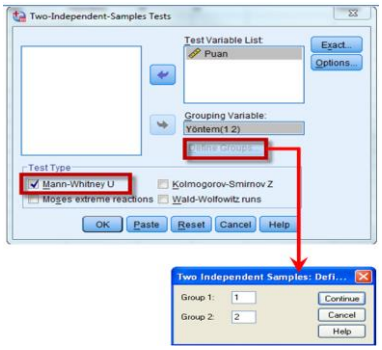
bulunur. Bu sonuca göre $0.01 < P(T \leq 22) < 0.025$, yani $0.01 <$ *p-değeri* $< 0.025$ elde edilir. Sonuç olarak *p-değeri*<α olduğundan $H_0$ reddedilir.



17

# SPSS Uygulama

| | Yöntem | Puan |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 30 |
| 2 | 1 | 20 |
| 3 | 1 | 40 |
| 4 | 1 | 60 |
| 5 | 1 | 41 |
| 6 | 1 | 50 |
| 7 | 1 | 90 |
| 8 | 1 | 15 |
| 9 | 1 | 47 |
| 10 | 1 | 56 |
| 11 | 1 | 12 |
| 12 | 1 | 51 |
| 13 | 2 | 37 |
| 14 | 2 | 80 |
| 15 | 2 | 82 |
| 16 | 2 | 59 |
| 17 | 2 | 38 |
| 18 | 2 | 91 |
| 19 | 2 | 88 |
| 20 | 2 | 68 |
| 21 | | |




**Ranks**

| | Yöntem | N | Mean Rank | Sum of Ranks |
|---|---|---|---|---|
| Puan | A | 12 | 8,33 | 100,00 |
| | B | 8 | 13,75 | 110,00 |
| | Total | 20 | | |

**Test Statistics[b]**

| | puan |
|---|---|
| Mann-Whitney U | 22,000 |
| Wilcoxon W | 100,000 |
| Z | -2,006 |
| Asymp. Sig. (2-tailed) | ,045 |
| Exact Sig. [2*(1-tailed Sig.)] | ,047[a] |
| Exact Sig. (2-tailed) | ,047 |
| Exact Sig. (1-tailed) | ,024 |
| Point Probability | ,004 |



18

# Örnek

| $X_i$ (A gübresi) | $Y_i$ (B Gübresi) |
|---|---|
| 36, 48, 61, 70, 81, 67, 78, 90, 70, 14 | 28, 36, 90, 17, 29, 30, 21, 8, 10 |

$H_0: M_1 = M_2$
$H_1: M_1 > M_2$

**1. örnek için**

| $X_i$ | 36 | 48 | 61 | 70 | 81 | 67 | 78 | 90 | 70 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R(X_i)$ | 9.5 | 11 | 12 | 14.5 | 17 | 13 | 16 | 18.5 | 14.5 | 3 |

**2. örnek için**

| $Y_i$ | 28 | 36 | 90 | 17 | 29 | 30 | 21 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R(Y_i)$ | 6 | 9.5 | 18.5 | 4 | 7 | 8 | 5 | 1 | 2 |



19

# Örnek

Birinci örnek için sıra sayılarının toplamı,

$$S = 9.5 + 11 + 12 + 14.5 + 17 + 13 + 16 + 18.5 + 14.5 + 3 = 129$$

hesaplanır. $S = 129$ ve $n_1 = 10$ değerleri yerlerine konursa,

$$T = S - \frac{n_1(n_1 + 1)}{2}$$

$$T_h = 129 - \frac{10(10 + 1)}{2}$$

$$= 74$$



20

# Örnek

$n_1 = 10$, $n_2 = 9$ ve $\alpha = 0.05$ iken $W_\alpha = 25$ kritik değeri T12'den bulunur.

$$\begin{aligned} W'_\alpha &= n_1 n_2 - W_\alpha \\ &= 10(9) - 25 \\ &= 65 \end{aligned}$$

$T_h > W'_\alpha$, yani $74 > 65$, olduğundan %5 anlamlılık düzeyinde $H_0$ reddedilir.

Bu problem için *p-değeri*

$$p\text{-değeri} = P(T \geq 74)$$

olarak ifade edilir. Bu *p-değeri* T12'den yaklaşık olarak bulunabilir.



21

# Örnek

$n_1 = 10$ ve $n_2 = 9$ iken T12'den

$$P(T \leq 14) = 0.005 \text{ ve } P(T \leq 17) = 0.01$$

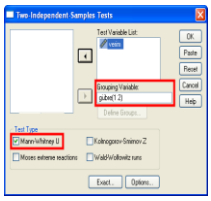
olarak bulunur. Bu sonuca göre $0.005 < P(T \geq 74) < 0.01$, yani $0.005 < p\text{-değeri} < 0.01$, elde edilir.



22

# SPSS Uygulama

| | Gübre | Verim |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 36 |
| 2 | 1 | 48 |
| 3 | 1 | 61 |
| 4 | 1 | 70 |
| 5 | 1 | 81 |
| 6 | 1 | 67 |
| 7 | 1 | 78 |
| 8 | 1 | 90 |
| 9 | 1 | 70 |
| 10 | 2 | 14 |
| 11 | 2 | 28 |
| 12 | 1 | 36 |
| 13 | 2 | 90 |
| 14 | 2 | 17 |
| 15 | 2 | 29 |
| 16 | 2 | 30 |
| 17 | 2 | 21 |
| 18 | 2 | 8 |
| 19 | 2 | 10 |
| 20 | | |




**Ranks**

| | gübre | N | Mean Rank | Sum of Ranks |
|---|---|---|---|---|
| verim | A | 10 | 12,90 | 129,00 |
| | B | 9 | 6,78 | 61,00 |
| | Total | 19 | | |

**Test Statistics[b]**

| | verim |
|---|---|
| Mann-Whitney U | 16,000 |
| Wilcoxon W | 61,000 |
| Z | -2,371 |
| Asymp. Sig. (2-tailed) | ,018 |
| Exact Sig. [2*(1-tailed Sig.)] | ,017[a] |
| Exact Sig. (2-tailed) | ,016 |
| Exact Sig. (1-tailed) | ,008 |
| Point Probability | ,001 |

a. Not corrected for ties.

b. Grouping Variable: gübre



# Wald-Wolfowitz Dizi Parçaları Testi

Varsayımlar:

a. Veri, $n_1$ ve $n_2$ hacimli $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ ve $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$ gözlemlerinden oluşur.
b. İlgilenilen değişken süreklidir.

Wald-Wolfowitz dizi parçaları testinde hipotezler,

$H_0$: $X$ ve $Y$ gözlemleri benzer dağılımlı yığınlardan gelmişlerdir.

$H_1$: $X$ ve $Y$ gözlemleri benzer dağılımlı yığınlardan gelmemişlerdir.

$H_0: F_1(x) = F_2(x)$, tüm $x$ değerleri için
$H_1: F_1(x) \neq F_2(x)$, bazı $x$ değerleri için

# Örnek

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | 20 | 10 | 18 | 25 | 32 | |
| $Y_i$ | 12 | 28 | 29 | 36 | 40 | 42 |

| Sıralanmış değerler | 10 | 12 | 18 | 20 | 25 | 28 | 29 | 32 | 36 | 40 | 42 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Simge | X | Y | X | X | X | Y | Y | X | Y | Y | Y |

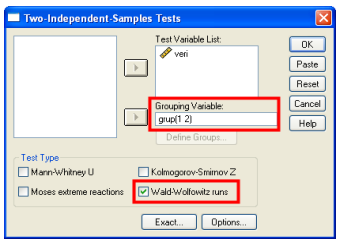
$r$ istatistiğinin değeri $r_h = 6$ olur.



25

# SPSS Uygulama

| | grup | veri |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 20 |
| 2 | 1 | 10 |
| 3 | 1 | 18 |
| 4 | 1 | 25 |
| 5 | 1 | 32 |
| 6 | 2 | 12 |
| 7 | 2 | 28 |
| 8 | 2 | 29 |
| 9 | 2 | 36 |
| 10 | 2 | 40 |
| 11 | 2 | 42 |
| 12 | | |




**Frequencies**

| | grup | N |
|---|---|---|
| veri | X | 5 |
| | Y | 6 |
| | Total | 11 |

**Test Statistics[b,c]**

| | | Number of Runs | Z | Exact Sig. (1-tailed) | Point Probability |
|---|---|---|---|---|---|
| veri | Exact Number of Runs | 6[a] | ,000 | ,522 | ,260 |

a. No inter-group ties encountered.
b. Wald-Wolfowitz Test
c. Grouping Variable: grup



26

# Örnek

| $X_i$ (A gübresi) | $Y_i$ (B gübresi) |
|---|---|
| 420, 430, 428, 400, 460, 462, 475, 500, 406, 525 | 390, 380, 422, 424, 427, 466, 472, 474, 473, 576 |

| Sıra no | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sıralanmış değerler | 380 | 390 | 400 | 406 | 420 | 422 | 424 | 427 | 428 | 430 |
| Simge | Y | Y | X | X | X | Y | Y | Y | X | X |

| Sıra no | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sıralanmış değerler | 460 | 462 | 466 | 472 | 473 | 474 | 475 | 500 | 525 | 576 |
| Simge | X | X | Y | Y | Y | Y | X | X | X | Y |





# SPSS Uygulama

| | gübre | verim |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 420 |
| 2 | 1 | 430 |
| 3 | 1 | 428 |
| 4 | 1 | 400 |
| 5 | 1 | 460 |
| 6 | 1 | 462 |
| 7 | 1 | 475 |
| 8 | 1 | 500 |
| 9 | 1 | 406 |
| 10 | 1 | 525 |
| 11 | 2 | 390 |
| 12 | 2 | 380 |
| 13 | 2 | 422 |
| 14 | 2 | 424 |
| 15 | 2 | 427 |
| 16 | 2 | 466 |
| 17 | 2 | 472 |
| 18 | 2 | 474 |
| 19 | 2 | 473 |
| 20 | 2 | 576 |
| 21 | | |

**Frequencies**

| | gübre | N |
|---|---|---|
| verim | A | 10 |
| | B | 10 |
| | Total | 20 |

**Test Statistics[b,c]**

| | | Number of Runs | Z | Exact Sig. (1-tailed) | Point Probability |
|---|---|---|---|---|---|
| verim | Exact Number of Runs | 7[a] | -1,608 | ,051 | ,033 |

# Kolmogorov-Smirnov Testi

$F_1(x)$ : 1. örneğin geldiği yığının bilinmeyen dağılım fonksiyonu

$F_2(x)$ : 2. örneğin geldiği yığının bilinmeyen dağılım fonksiyonu

$H_0: F_1(x) = F_2(x)$, $x$ değerlerinin hepsi için

$H_1: F_1(x) \neq F_2(x)$, $x$ değerlerinin en az biri için



29

# Kolmogorov-Smirnov Testi

$S_1(x)$ : 1. örneğe ilişkin gözlenen dağılım fonksiyonu (örnekten elde edilen dağılım fonksiyonu)

$S_2(x)$ : 2. örneğe ilişkin gözlenen dağılım fonksiyonu (örnekten elde edilen dağılım fonksiyonu)

$$S_1(x) = \frac{\text{Birinci örnekte } x \text{ değerine eşit ya da daha küçük değerli örnek birimlerinin sayısı}}{n_1}$$

$$S_2(x) = \frac{\text{İkinci örnekte } x \text{ değerine eşit ya da daha küçük değerli örnek birimlerinin sayısı}}{n_2}$$

$$D = \text{Enbüyük}|S_1(x) - S_2(x)|$$



30

# Kolmogorov-Smirnov Testi

$$D = \text{Enbüyük}|S_1(x) - S_2(x)|$$

| Karar kuralı | |
|---|---|
| $D_h \geq D_k$ | ise $H_0$ reddedilir, |
| $D_h < D_k$ | ise $H_0$ reddedilemez, |



31

# Örnek

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ (kız öğrencilerin puanı) | 40 | 50 | 54 | 60 | 70 | 84 | |
| $Y_i$ (erkek öğrencileri puanı) | 45 | 56 | 59 | 62 | 64 | 75 | 90 |

$H_0: F_1(x) = F_2(x)$, $x$ değerlerinin hepsi için
$H_1: F_1(x) \neq F_2(x)$, $x$ değerlerinin en az biri için



32

# Örnek

| $X_i$ | $Y_i$ | $S_1(x) - S_2(x)$ | | |
|---|---|---|---|---|
| 40 | | $1/6 - 0$ | = | 7/42 |
| | 45 | $1/6 - 1/7$ | = | 1/42 |
| 50 | | $2/6 - 1/7$ | = | 8/42 |
| 54 | | $3/6 - 1/7$ | = | **15/42** |
| | 56 | $3/6 - 2/7$ | = | 9/42 |
| | 59 | $3/6 - 3/7$ | = | 3/42 |
| 60 | | $4/6 - 3/7$ | = | 10/42 |
| | 62 | $4/6 - 4/7$ | = | 4/42 |
| | 64 | $4/6 - 5/7$ | = | −2/42 |
| 70 | | $5/6 - 5/7$ | = | 5/42 |
| | 75 | $5/6 - 6/7$ | = | −1/42 |
| 84 | | $6/6 - 6/7$ | = | 6/42 |
| | 90 | $6/6 - 7/7$ | = | 0.00 |



33

# Örnek

$n_1 = 6$ ve $n_2 = 7$ olduğundan kritik değer T13(B) tablosundan bulunur. $n_1 = 6, n_2 = 7$, iki-yanlı test ve 0.90 güven düzeyinde ($\alpha = 0.10$ anlamlılık düzeyinde) $D_k$ kritik değeri T13(B) tablosundan $4/7$ olarak bulunur. Sonuçta $15/42 < 4/7$ olduğundan yokluk hipotezi reddedilemez. $F_1(x)$ ve $F_2(x)$ dağılım fonksiyonları aynıdır. Diğer bir ifadeyle kız ve erkek öğrencilerin başarıları arasında fark bulunmamıştır.

Bu test işlemi için *p-değeri*

$$p\text{-değeri} = P(D \geq 15/42)$$

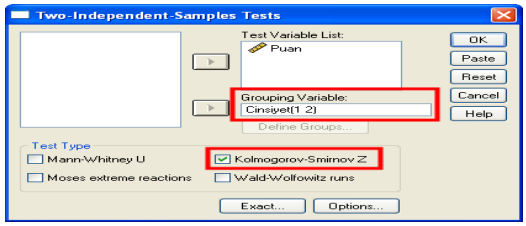
olur.



34

# SPSS Uygulama

| | Cinsiyet | Puan |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 40 |
| 2 | 1 | 50 |
| 3 | 1 | 54 |
| 4 | 1 | 60 |
| 5 | 1 | 70 |
| 6 | 1 | 84 |
| 7 | 2 | 45 |
| 8 | 2 | 56 |
| 9 | 2 | 59 |
| 10 | 2 | 62 |
| 11 | 2 | 64 |
| 12 | 2 | 75 |
| 13 | 2 | 90 |
| 14 | | |




**Test Statistics**[a]

| | | Puan |
|---|---|---|
| Most Extreme Differences | Absolute | ,357 |
| | Positive | ,048 |
| | Negative | -,357 |
| Kolmogorov-Smirnov Z | | ,642 |
| Asymp. Sig. (2-tailed) | | ,804 |
| Exact Sig. (2-tailed) | | ,712 |
| Point Probability | | ,089 |

a. Grouping Variable: Cinsiyet





# Kolmogorov-Smirnov Testi

$F_1(x)$ : 1. örneğin geldiği yığının bilinmeyen dağılım fonksiyonu

$F_2(x)$ : 2. örneğin geldiği yığının bilinmeyen dağılım fonksiyonu

$H_0: F_1(x) = F_2(x)$, $x$ değerlerinin hepsi için

$H_1: F_1(x) > F_2(x)$, $x$ değerlerinin en az biri için

$$D^+ = \text{Enbüyük}(S_1(x) - S_2(x))$$

# Kolmogorov-Smirnov Testi

$F_1(x)$ : 1. örneğin geldiği yığının bilinmeyen dağılım fonksiyonu

$F_2(x)$ : 2. örneğin geldiği yığının bilinmeyen dağılım fonksiyonu

$H_0: F_1(x) = F_2(x)$, $x$ değerlerinin hepsi için

$H_1: F_1(x) < F_2(x)$, $x$ değerlerinin en az biri için

$$D^- = \text{Enbüyük}(S_2(x) - S_1(x))$$



37

# Fisher Tam Olasılık Testi

Varsayımlar:

a. Veri $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ ve $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$ gözlemlerinden oluşur.
b. Her bir gözlem (ölçüm) iki ayrık sonuçtan birine sınıflandırılabilir.

Fisher Tam Olasılık testinde yokluk hipotezi, yığınlar için ilgilenilen özellik bakımından oranlar sırasıyla $\pi_1$ ve $\pi_2$ olmak üzere,

$$H_0: \pi_1 = \pi_2$$



38

# Fisher Tam Olasılık Testi

| Örnek No | İlgilenilen özellikte olanlar | İlgilenilen özellikte olmayanlar | Toplam |
|---|---|---|---|
| **1** | $a$ | $n_1 - a$ | $n_1$ |
| **2** | $b$ | $n_2 - b$ | $n_2$ |
| **Toplam** | $a + b$ | $n - (a + b)$ | $n$ |

$b$ : İkinci örnekte ilgili özellikte olan birimlerin sayısı

$$f(b,a) = \frac{\binom{n_2}{b}\binom{n_1}{a}}{\binom{n_1+n_2}{a+b}}$$



39

# Fisher Tam Olasılık Testi

| $H_1$ | Karar kuralı | | |
|---|---|---|---|
| $\pi_2 < \pi_1$ | $b_h \leq b_\alpha$ | ise $H_0$ reddedilir, | $P(b \leq b_\alpha) = \alpha$ |
| $\pi_2 > \pi_1$ | $b_h \geq b'_\alpha$ | ise $H_0$ reddedilir, | $P(b \geq b'_\alpha) = \alpha$ |
| $\pi_2 \neq \pi_1$ | $b_h \leq b_{\alpha/2}$ | ise $H_0$ reddedilir, | $P(b \leq b_{\alpha/2}) = \alpha/2$ |
| | veya | | |
| | $b_h \geq b'_{\alpha/2}$ | ise $H_0$ reddedilir, | $P(b \geq b'_{\alpha/2}) = \alpha/2$ |



40

# Örnek

| Örnek No | İlgilenilen özellikte olanlar | İlgilenilen özellikte olmayanlar | Toplam |
|---|---|---|---|
| **1** | 9 | 1 | 10 |
| **2** | 1 | 3 | 4 |
| **Toplam** | 10 | 4 | 14 |

| $X_i$ | $P(b = x)$ |
|---|---|
| 0 | 1/1001 |
| 1 | 40/1001 |
| 2 | 270/1001 |
| 3 | 480/1001 |
| 4 | 210/1001 |
| | 1.000 |

$$P(b=0)=\frac{\binom{4}{0}\binom{10}{10}}{\binom{14}{10}}=\frac{1}{1001}$$

$$P(b=1)=\frac{\binom{4}{1}\binom{10}{9}}{\binom{14}{10}}=\frac{40}{1001}$$

$$P(b=2)=\frac{\binom{4}{2}\binom{10}{8}}{\binom{14}{10}}=\frac{270}{1001}$$

$$P(b=3)=\frac{\binom{4}{3}\binom{10}{7}}{\binom{14}{10}}=\frac{480}{1001}$$

$$P(b=4)=\frac{\binom{4}{4}\binom{10}{6}}{\binom{14}{10}}=\frac{210}{1001}$$



41

# Örnek

Yukarıdaki olasılık dağılımına göre $H_1: \pi_2 < \pi_1$, $n_1 = 10$, $n_2 = 4$ ve $\alpha = 0.04$ iken,

$$\begin{aligned} P(b \le 1) &= \frac{1}{1001} + \frac{40}{1001} \\ &= \frac{41}{1001} \\ &= 0.041 \end{aligned}$$

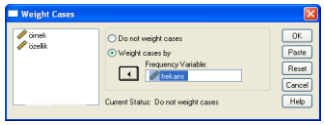
olduğundan $b_\alpha = 1$ bulunur.

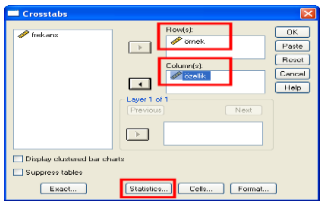


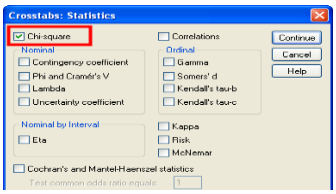
42

# SPSS Uygulama

| | örnek | özellik | frekans | var |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 9 | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | |
| 3 | 2 | 1 | 1 | |
| 4 | 2 | 2 | 3 | |




| | | özellik | | |
|---|---|---|---|---|
| | | ilgilenilen özellikte olanlar | ilgilenilen özellikte olmayanlar | Total |
| örnek | 1 | 9 | 1 | 10 |
| | 2 | 1 | 3 | 4 |
| Total | | 10 | 4 | 14 |

**Chi-Square Tests**

| | Value | df | Asymp. Sig. (2-sided) | Exact Sig. (2-sided) | Exact Sig. (1-sided) |
|---|---|---|---|---|---|
| Pearson Chi-Square | 5,915[b] | 1 | ,015 | | |
| Continuity Correction[a] | 3,159 | 1 | ,076 | | |
| Likelihood Ratio | 5,751 | 1 | ,016 | | |
| Fisher's Exact Test | | | | ,041 | ,041 |
| Linear-by-Linear Association | 5,493 | 1 | ,019 | | |
| N of Valid Cases | 14 | | | | |

a. Computed only for a 2x2 table

b. 3 cells (75,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 1,14.



43

# Örnek

| | Olumsuz | Olumlu | Toplam |
|---|---|---|---|
| İlaçla | 5 | 3 | 8 |
| Cerrahi | 1 | 7 | 8 |
| Toplam | 6 | 10 | 16 |

$$H_0: \pi_2 = \pi_1$$
$$H_1: \pi_2 < \pi_1$$

$n_1 = 8, n_2 = 8, b_h = 1, a = 5$ ve $a + b = 6$ olur.



44

# Örnek

$$P(b=0)=\frac{\binom{8}{0}\binom{8}{6}}{\binom{16}{6}}=\frac{28}{8008}$$

$$P(b=1)=\frac{\binom{8}{1}\binom{8}{5}}{\binom{16}{6}}=\frac{448}{8008}$$

$$P(b\le 1)=\frac{28}{8008}+\frac{448}{8008}=0.059$$

olduğundan $b_\alpha = 1$ bulunur. Bu sonuca göre $b_h \le b_\alpha$ olduğundan $H_0$ reddedilir.

Bu test işlemi için *p-değeri* de aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$p\text{-değeri} = P(b \le b_h) = P(b \le 1) = 0.059$$

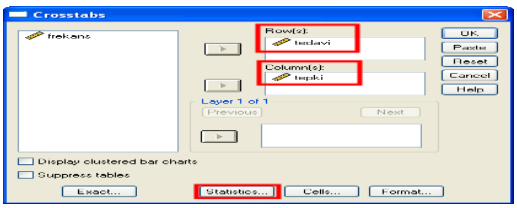
Test tek-yanlı olduğu için, $p$-değeri $\le \alpha$ eşitsizliği sağlandığından $H_0$ reddedilir.





# SPSS Uygulama

| | tedavi | tepki | frekans |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 5 |
| 2 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 1 | 1 |
| 4 | 2 | 2 | 7 |
| 5 | | | |




| | | tepki | | |
|---|---|---|---|---|
| | | olumsuz | olumlu | Total |
| tedavi | İlaçla | 5 | 3 | 8 |
| | Cerrahi | 1 | 7 | 8 |
| Total | | 6 | 10 | 16 |

**Chi-Square Tests**

| | Value | df | Asymp. Sig. (2-sided) | Exact Sig. (2-sided) | Exact Sig. (1-sided) |
|---|---|---|---|---|---|
| Pearson Chi-Square | 4,267[b] | 1 | ,039 | | |
| Continuity Correction[a] | 2,400 | 1 | ,121 | | |
| Likelihood Ratio | 4,557 | 1 | ,033 | | |
| Fisher's Exact Test | | | | ,119 | ,059 |
| Linear-by-Linear Association | 4,000 | 1 | ,046 | | |
| N of Valid Cases | 16 | | | | |

# Mood Testi

Varsayımlar:

a. $n_1 \leq n_2$ olmak üzere, veri, $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ ve $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$ gözlemlerinden oluşur.
b. İlgili değişken süreklidir.
c. Ölçme düzeyi en az sıralamadır.
d. Yığınların medyanları aynıdır.

$$H_0: \sigma_1 = \sigma_2$$

$$M = \sum_{i=1}^{n_1} \left( r_i - \frac{n+1}{2} \right)^2$$



47

# Örnek

| $X_i$ | $R(X_i)$ Sıra sayısı | $Y_i$ | $R(Y_i)$ Sıra sayısı |
|---|---|---|---|
| 10 | 1 | 24 | 3 |
| 12 | 2 | 29 | 5 |
| 26 | 4 | 30 | 6 |
| 48 | 9 | 35 | 7 |
| 42 | 8 | | |

$$n_1 = 5, n_2 = 4, n = n_1 + n_2 = 9 \text{ ve } \frac{n+1}{2} = 5$$



48

# Örnek

| $r_i$ | $r_i - 5$ | $(r_i - 5)^2$ |
|---|---|---|
| 1 | –4 | 16 |
| 2 | –3 | 9 |
| 4 | –1 | 1 |
| 9 | 4 | 16 |
| 8 | 3 | 9 |
| | | 51 |

Bu işlemlerden $M$ istatistiğinin hesaplanan değeri olan $M_h = 51$ bulunur.





# Mood Testi

| $H_1$ | Karar kuralı | | |
|---|---|---|---|
| $\sigma_1 < \sigma_2$ | $M_h \leq M_\alpha$ | ise $H_0$ reddedilir, | $P(M \leq M_\alpha) = \alpha$ |
| $\sigma_1 > \sigma_2$ | $M_h \geq M'_\alpha$ | ise $H_0$ reddedilir, | $P(M \geq M'_\alpha) = \alpha$ |
| $\sigma_1 \neq \sigma_2$ | $M_h \leq M_{\alpha/2}$ | ise $H_0$ reddedilir, | $P(M \leq M_{\alpha/2}) = \alpha/2$ |
| | veya | | |
| | $M_h \geq M'_{\alpha/2}$ | ise $H_0$ reddedilir, | $P(M \geq M'_{\alpha/2}) = \alpha/2$ |

# Mood Testi

| $n_1$ | $n_2$ | ... | 0.05 | ... |
|---|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | | ⋮ | |
| 6 | 7 | | 45 | |
| | | | 0.0466 | |
| | | ... | 46 | ... |
| | | | 0.0524 | |
| ⋮ | ⋮ | | ⋮ | |

$n_1 = 6$ ve $n_2 = 7$ iken

$P(M \leq 45) = 0.0466$



51

# Örnek

| $X_i$ (puan) | 60 | 40 | 45 | 50 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $Y_i$ (puan) | 80 | 20 | 30 | 62 | 90 |

$H_0: \sigma_1 = \sigma_2$
$H_1: \sigma_1 < \sigma_2$

| $X_i$ | $R(X_i)$ Sıra sayısı | $Y_i$ | $R(Y_i)$ Sıra sayısı |
|---|---|---|---|
| 60 | 6 | 80 | 8 |
| 40 | 3 | 20 | 1 |
| 45 | 4 | 30 | 2 |
| 50 | 5 | 62 | 7 |
| | | 90 | 9 |



52

# Örnek

$$M = \sum_{i=1}^{n_1} \left( r_i - \frac{n+1}{2} \right)^2$$

$$M_h = [(6-5)^2 + (3-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2] = 6$$

$n_1 = 4$, $n_2 = 5$ ve $\alpha = 0.05$ iken T14'den $P(M \leq 10) = 0.0397$ ve $P(M \leq 11) = 0.0556$ değerleri bulunabilir. $P(M \leq M_\alpha) = \alpha$ daha önce verilmişti. Bu olasılıklardan ikincisi 0.05'e daha yakın olduğundan $M_\alpha$ değeri 11 olur. $M_\alpha = 11$ ve $M_h = 6$ değerleri karşılaştırılırsa $6 < 11$ olduğundan yokluk hipotezi reddedilir.





# Siegel-Tukey Testi

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & i.\text{sıradaki değer } X \text{ gözlemi ise} \\ 0, & i.\text{sıradaki değer } Y \text{ gözlemi ise} \end{cases}$$

$$a_i = \begin{cases} 2i, & i.\text{çift ve } 1 < i \leq (n/2) \text{ ise} \\ 2i-1, & i.\text{tek ve } 1 \leq i \leq (n/2) \text{ ise} \\ 2(n-i)+2, & i.\text{çift ve } (n/2) < i \leq n \text{ ise} \\ 2(n-i)+1, & i.\text{tek ve } (n/2) < i < n \text{ ise} \end{cases}$$

$$ST = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_i$$

# Siegel-Tukey Testi

$n$ çift iken, örneğin $n = 10$ iken, ağırlık katsayısı olarak adlandırılan $a_i$ değerleri verilen formülün kullanımı ile,

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_i$ | 1 | 4 | 5 | 8 | 9 | 10 | 7 | 6 | 3 | 2 |

$n$ tek olduğunda küçükten büyüğe doğru sıralama yapıldığında ortadaki değer atılır ve aynı ağırlık katsayıları kullanılır.



55

# Örnek

| $X_i$ | 20 | 24 | 28 | 30 |
|---|---|---|---|---|
| $Y_i$ | 10 | 21 | 31 | 40 |

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_i$ | 1 | 4 | 5 | 8 | 7 | 6 | 3 | 2 |
| Sıralı veri | 10 (Y) | 20 (X) | 21 (Y) | 24 (X) | 28 (X) | 30 (X) | 31 (Y) | 40 (Y) |
| $\delta_i$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

$$ST_h = 1(0) + 4(1) + \cdots + 2(0)$$
$$= 25$$

Eğer $Y$ gözlemleri $X$'in yerini alsaydı, 0 ile 1 değerleri yer değiştireceğinden

$$ST_h = 11$$



56

# Siegel-Tukey Testi

| $H_1$ | Karar kuralı | | |
|---|---|---|---|
| $\sigma_1 > \sigma_2$ | $ST_h \leq ST_\alpha$ | ise $H_0$ reddedilir, | $P(ST \leq ST_\alpha) = \alpha$ |
| $\sigma_1 < \sigma_2$ | $ST_h \geq ST'_\alpha$ | ise $H_0$ reddedilir, | $P(ST \geq ST'_\alpha) = \alpha$ |
| $\sigma_1 \neq \sigma_2$ | $ST_h \leq ST_{\alpha/2}$ veya $ST_h \geq ST'_{\alpha/2}$ | ise $H_0$ reddedilir, | $P(ST \leq ST_{\alpha/2}) = \alpha/2$ <br> $P(ST \geq ST'_{\alpha/2}) = \alpha/2$ |



57

# Siegel-Tukey Testi

Siegel-Tukey testi için kritik değerler Mann-Whitney testinin kritik değerlerine bağlı olarak ifade edilebilir. $W_\alpha$, $W'_\alpha$, $W_{\alpha/2}$ ve $W'_{\alpha/2}$ değerleri Mann-Whitney testi için kritik değerler olmak üzere,

$$ST_\alpha = W_\alpha + \frac{n_1(n_1+1)}{2}$$

$$ST'_\alpha = W'_\alpha + \frac{n_1(n_1+1)}{2}$$

$$ST_{\alpha/2} = W_{\alpha/2} + \frac{n_1(n_1+1)}{2}$$

$$ST'_{\alpha/2} = W'_{\alpha/2} + \frac{n_1(n_1+1)}{2}$$



58

# Örnek

| $X_i$ (Erkek) | 7.6 | 11.2 | 10.1 | 19.1 | 20.2 | 19.6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y_i$ (Kadın) | 9.3 | 12.6 | 14.1 | 15.2 | 19.2 | 14.4 |

$$H_0: \sigma_1 = \sigma_2$$
$$H_1: \sigma_1 > \sigma_2$$

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_i$ | 1 | 4 | 5 | 8 | 9 | 12 | 11 | 10 | 7 | 6 | 3 | 2 |
| Sıralı veri | 7.6 (X) | 9.3 (Y) | 10.1 (X) | 11.2 (X) | 12.6 (Y) | 14.1 (Y) | 14.4 (Y) | 15.2 (Y) | 19.1 (X) | 19.2 (Y) | 19.6 (X) | 20.2 (X) |
| $\delta_i$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |

$$ST = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_i \qquad ST_h = 26$$



59

# Örnek

$n_1 = 6, n_2 = 6$ ve $\alpha = 0.05$ iken T12'den $W_\alpha = 8$ ve

$$ST_\alpha = W_\alpha + \frac{n_1(n_1+1)}{2}$$
$$= 8 + \frac{6(6+1)}{2}$$
$$= 29$$

Bu sonuçlara göre, $ST_h < ST_\alpha$, yani $26 < 29$, olduğundan $H_0$ reddedilir.



60

# Örnek

| $X_i$ (şehir) | 36 | 38 | 20 | 42 | 45 | 44 | 46 | 39 | 33 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y_i$ (kırsal) | 28 | 26 | 19 | 15 | 50 | 51 | 43 | | |

$$H_0: \sigma_1 = \sigma_2$$
$$H_1: \sigma_1 < \sigma_2$$

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_i$ | 1 | 4 | 5 | 8 | 9 | 12 | 13 | 16 | 15 | 14 | 11 | 10 | 7 | 6 | 3 | 2 |
| Sıralı veri | 15 (Y) | 19 (Y) | 20 (X) | 26 (Y) | 28 (Y) | 33 (X) | 36 (X) | 38 (X) | 39 (X) | 42 (X) | 43 (Y) | 44 (X) | 45 (X) | 46 (X) | 50 (Y) | 51 (Y) |
| $\delta_i$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

$$ST = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_i \qquad ST_h = 98$$



61

# Örnek

$n_1 = 9, n_2 = 7$ ve $\alpha = 0.05$ iken T12'den $W_\alpha = 16$ ve

$$W'_\alpha = 9(7) - 16 = 47$$

bulunur. Buna göre

$$ST'_\alpha = W'_\alpha + \frac{n_1(n_1+1)}{2}$$
$$= 47 + \frac{9(9+1)}{2}$$
$$= 92$$

hesaplanır.

Bu sonuçlara göre, $ST_h > ST'_\alpha$, yani $98 > 92$, olduğundan $H_0$ reddedilir.



62