
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN SABİT NOKTA TEORİSİ VE UYGULAMALARI

Hakan ŞAHİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ 2014

Hakan ŞAHİN tarafından hazırlanan "BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN SABİT NOKTA TEORİSİ VE UYGULAMALARI" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

Matematik, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum ..……

Başkan : Prof. Dr. Cemil YILDIZ

Matematik, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum ……...

Üye : Doç. Dr. İshak ALTUN

Matematik, Kırıkkale Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum ……...

Tez Savunma Tarihi: 22/07/2014

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

……..…….

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Hakan ŞAHİN

22.07.2014

BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN SABİT NOKTA TEORİSİ VE UYGULAMALARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Hakan ŞAHİN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2014

ÖZET

Sabit nokta teorisi matematiğin çok çeşitli dallarında uygulaması olması nedeniyle matematik dünyasında önemli bir yer tutmaktadır. Bu tez çalışmasında, metrik ve kısmi sıralı metrik uzaylarda büzülme dönüşümleri için bazı sabit nokta teoremleri ile bunların uygulamaları incelendi. İlk olarak metrik ve kısmi sıralı metrik uzaylardaki dönüşümler için sabit nokta teorisi ile ilgili ön bilgiler, bazı temel tanım ve teoremler verildi. Daha sonra, metrik uzaylarda sabit nokta teorinin başlangıcı olarak kabul edilen Banach sabit nokta teoremi ve bu çalışmanın kısmi sıralı metrik uzaylardaki versiyonu ifade edildi. Bu çalışma ise karma monotonluk özelliğine sahip dönüşümler ve bu dönüşümler için ikili sabit nokta teoremi verilerek genelleştirildi. Bundan sonra, uzaklık değiştiren fonksiyon tanımı ve zayıf büzülme dönüşümü tanımı verilerek, Banach büzülme ilkesinin metrik uzaylardaki başka bir genellemesi ifade edildi. Ayrıca, bu çalışmanın kısmi sıralı metrik uzaylardaki versiyonu ifade ve ispat edildi. Geraghty tarafından tanımlanan δ ailesine ait fonksiyonları kullanarak metrik uzaylarda Banach büzülme ilkesinin bir genellemesi ve yine bu çalışmanın kısmi sıralı metrik uzaylardaki versiyonu incelendi. Son olarak, kısmi sıralı metrik uzaylarda verilen dönüşümün artmayan olduğu veya monoton olmadığı durumda sabit nokta teorisi incelendikten sonra, bu çalışma kapsamında incelenen kısmi sıralı metrik uzaylarda sabit nokta teoremlerinin en genel halinin diferensiyel ve integral denklemlere uygulaması verildi.

Bilim Kodu	:	204.1.132
Anahtar Kelimeler	:	Sabit nokta, kısmi sıralı metrik uzay, ikili sabit nokta, zayıf büzülme dönüşümü
Sayfa Adedi	:	133
Danışman	:	Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

FIXED POINT THEORY AND APPLICATIONS FOR CONTRACTION MAPS

(M. Sc. Thesis)

Hakan ŞAHİN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2014

ABSTRACT

Fixed point theory has a very important place in the world of mathematics since it has many applications in various branches of mathematics. In this thesis, some fixed point theorems and their applications are examined for contraction mapping in metric and partially ordered metric spaces. Firstly, some preliminary information, basic definitions and theorems about the fixed point theory are given. Then, Banach fixed point theorem, which is considered as the beginning of the study the fixed point theory in metric spaces, and its version in partially ordered metric spaces have been expressed. This study is generalized by giving mixed monotone mappings and coupled fixed point theorems for these mappings. And then, another generalization of Banach contraction principle in metric spaces is stated by defining the altering distance function and weakly contractive map. Also, its version in partially ordered metric spaces is expressed and proved. The generalization of Banach contraction principle in metric spaces and its version in partially ordered metric spaces are examined by using functions belongs to δ family which is defined by Geraghty. Finally, after giving fixed point theorems for nonincreasing and nonmonotone mappings in partially metric spaces, the applications of the most general conditions of fixed point theorems in partially metric spaces to the differential and integral equations, which are examined in this study, are given.

Science Code : 204.1.132

Key Words : Fixed point, partial ordered metric space, coupled fixed point, weakly contractive map

Page Number : 133

Supervisor : Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren, çalışmalarım boyunca destekleyen, yönlendiren ve yazımı sırasında bana zaman ayırarak yardımını esirgemeyen tez danışmanım Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU' na teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca tez dönemi boyunca bana burs veren TÜBİTAK'a (Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumuna), benden desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen Arş. Gör. Dr. Demet BİNBAŞIOĞLU'na, çok sevdiğim annem, babam ve kardeşime teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

SİMGELER VE KISALTMALAR viii

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL KAVRAMLAR 5

2.1. Tanımlar 5

2.2. Temel Teoremler 13

3. BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ 15

3.1. Metrik ve Kısmi Sıralı Metrik Uzaylarda Büzülme Dönüşümleri İçin Sabit Nokta Teoremleri 15

4. ARTMAYAN OLAN VE MONOTON OLMAYAN FONKSİYONLAR İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ 85

4.1. Kısmi Sıralı Metrik Uzaylarda Artmayan Fonksiyonlar İçin Sabit Nokta Teoremleri 85

4.2. Metrik ve Kısmi Sıralı Metrik Uzaylarda Monoton Olmayan Fonksiyonlar İçin Sabit Nokta Teoremleri 90

5. UYGULAMALAR 105

5.1. Metrik ve Kısmi Sıralı Metrik Uzaylardaki Sabit Nokta Teoremlerinin İntegral ve Diferensiyel Denklemlere Uygulamaları 105

6. SONUÇ VE ÖNERİLER 127

KAYNAKLAR 129

ÖZGEÇMİŞ 133

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
(X, d)	Metrik uzay
$\boldsymbol{f: X \to X}$	f, X den X e bir dönüşüm
$\boldsymbol{d(x, y)}$	Metrik, x ile y arasındaki uzaklık
$\boldsymbol{B(x_0, r)}$	x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$\boldsymbol{\bar{B}(x_0, r)}$	x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar
$\boldsymbol{S(x_0, r)}$	x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar yüzeyi
$\in$	Elemanıdır
$\preccurlyeq$	Kısmi sıralama bağıntısı
$\exists$	En az bir
$\forall$	Her
C(I, $\mathbb{R}$)	I dan $\mathbb{R}$ ye tanımlı sürekli fonksiyonlar ailesi
$\lvert . \rvert$	Mutlak değer
$\subseteq$	Altkümesidir
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\boldsymbol{(x_n)}$	Dizi
limsup($\boldsymbol{x_n}$)	Üst limit

1. GİRİŞ

Matematiğin çeşitli dallarında $S(x) = 0$ veya $T(x) = x$ tipindeki denklemlerle sıkça karşılaşılır. Bu denklemleri çözmek başlı başına bir problemdir. Bunun için bazıları tam sonucu bazıları da yaklaşık sonucu veren metotlar vardır. Sabit nokta teoride bu metotlardan biridir.

X boş olmayan keyfi bir küme olsun. $f : X \to X$ dönüşümünün sabit noktası $f(x) = x$ olacak şekildeki bir $x \in X$ noktasıdır.

$$X = [0, \infty), \qquad f(x) = \frac{x}{2}, \qquad g(x) = x + 1$$

şeklinde tanımlanırsa $x_0 = 0$ noktası f dönüşümünün sabit noktasıdır ancak g dönüşümünün sabit noktası yoktur.

O halde bir dönüşümün sabit noktasının varlığı o dönüşümün tanımına bağlı olduğu gibi tanımlandığı kümenin yapısına da bağlıdır. Bu nedenle sabit nokta teori çalışmaları bir dönüşümün sabit noktasının hangi koşullar altında var olduğu, var ise tek olup olmadığı ve tek ise nasıl bulunabileceği sorularına cevap aramaktadır.

Sabit nokta teori matematiğin diferensiyel denklemler teorisi, integral denklemler teorisi, potansiyel teori, yaklaşım teorisi, oyun teorisi ve kontrol sistemleri gibi çeşitli alanlarında uygulaması olması nedeniyle matematik dünyasında önemli bir yer tutmaktadır. Bunun dışında istatistik, mühendislik, matematiksel ekonomi, esneklik teorisi gibi alanlarda da çalışma ve uygulamalarını görebiliriz.

Yukarıda bahsedilen sabit nokta ile ilgili çalışma ve uygulamaları şu kaynaklarda bulabiliriz: [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12].

Genel olarak sabit nokta teori çalışmaları iki yönde gelişmektedir. Birincisi tam metrik uzaylar üzerinde tanımlı büzülme ve büzülme tipi dönüşümler için sabit nokta teori, diğeri ise normlu lineer uzayların kompakt konveks alt kümeleri üzerinde tanımlı sürekli dönüşümler için sabit nokta teoridir.

Normlu lineer uzaylarda sabit nokta teori çalışmaları Brouwer ile başlamıştır.

$f : [a,b] \to [a,b]$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f(x_0) = x_0$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in [a,b]$ vardır. 1912 yılında Brouwer bu teoremi $n-$ boyutlu Öklit uzayına genişletmiştir [13]. Ardından 1930 yılında Schauder bazı ek şartlarla birlikte Brouwer in teoremini aşağıdaki şekilde sonsuz boyutlu uzaylara genişletmiştir:

"X bir Banach uzayı C, X in kompakt, konveks altkümesi ve $f: C \to C$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda f, C de en az bir sabit noktaya sahiptir".

Schauder in teoremindeki kompaktlık kuvvetli bir şarttır. Metrik uzaylarda kompakt her küme kapalı ve sınırlıdır fakat bunun tersi sonlu boyutlu uzaylarda geçerlidir. Sonsuz boyutlu uzaylarda kapalı ve sınırlı her küme kompakt olmamaktadır. Bu nedenle Schauder in teoremindeki kompaktlık şartı biraz daha hafifletilerek aşağıdaki şekilde verilmiştir:

"X bir Banach uzayı, C, X in kapalı, konveks altkümesi ve $f: C \to C$ sürekli ve kompakt bir dönüşüm olsun. Bu durumda f, C de en az bir sabit noktaya sahiptir".

Metrik uzaylarda sabit nokta teori çalışmaları ise Banach ile başlamıştır.

Banach 1922 de Banach sabit nokta teoremi veya büzülme ilkesi olarak bilinen aşağıdaki teoremi vermiştir:

"(X, d) bir tam metrik uzay ve $f: X \to X$ dönüşümü her $x,\ y \in X$ ve bir $\alpha \in [0,1)$ için $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x,y)$ eşitsizliğini sağlıyor olsun. Bu durumda f bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir, üstelik herhangi bir $x_0 \in X$ için $\{f^n(x_0)\}$ dizisi f nin $z \in X$ sabit noktasına yakınsar".

Kısmi sıralı metrik uzaylar düşünülerek metrik uzaylar üzerinde tanımlı büzülme dönüşümleri üzerine olan şartları zayıflatma eğilimi vardır. Bu yaklaşıma göre ilk olarak 2004 de Ran ve Reuring, Banach sabit nokta teoreminden esinlenerek kısmi sıralı metrik uzaylarda lineer olmayan büzülme dönüşümleri için sabit noktanın varlığını göstermiş ve matris denklemlere sonuçlarını uygulamışlardır [14]. 2004 den bu yana bazı

matematikçiler kısmi sıralı metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri üzerine çalışmışlardır [15-18]. Daha sonra Nieto ve Rodriguez Lopez, Ran ve Reuring nin çalışmasındaki sonuçları azalmayan dönüşümlere genişletmiş ve bir uygulama olarak periyodik sınır koşullarına sahip birinci mertebeden adi diferensiyel denklemin çözümünün varlığını ve tekliğini araştırmışlardır [17]. Sıralı metrik uzaylarda sabit nokta teorisi için çok önemli kavramlarından biri de Guo ve Lakshmikantham tarafından üretilen ikili sabit nokta kavramıdır [19]. 2006 da Bhaskar ve Lakshmikantham verilen bir dönüşüm için karma monotonluk özelliği kavramını üretmişlerdir. Yukarıda bahsedilen eğilim doğrultusunda karma monotonluk özelliğine sahip dönüşümler için bazı ikili sabit nokta teoremleri ispatlanarak, bu teoremlerin bir periyodik sınır değer probleminin çözümünün varlığını ve tekliğini göstermek için bazı uygulamaları verilmiştir [20]. Khan ve arkadaşları [21] tarafından ortaya konulan uzaklık değiştiren fonksiyon tanımını kullanarak Harjani ve Sadarangani kısmi sıralı tam metrik uzaylarda bazı sabit nokta teoremlerini ve bu sabit nokta teoremlerinin birinci ve ikinci mertebeden adi diferensiyel denklemlere bazı uygulamalarını vermişlerdir [22]. Bunun dışında Geraghty [23] tarafından tanımlanan $\beta(t_n) \to 1 \Rightarrow t_n \to 0$ özelliğine sahip fonksiyonlar ailesi δ kullanılarak kısmi sıralı metrik uzaylarda genelleştirilmiş büzülme dönüşümleri için bir başka sabit nokta teoremi Harandi ve Emami tarafından ifade edilmiş ve bir uygulama olarak periyodik sınır değer probleminin bir tek olan çözümünün varlığı araştırılmıştır [24].

Bu yüksek lisans tez çalışmasında yukarıdaki adı geçen yazarlar tarafından verilen tanım, lemma, teorem ve sonuçlar genellemeleri ile ilişkilendirilerek aktarılmıştır. Bu ilişkilendirmelerden yararlanılarak Banach büzülme ilkesinin bir genellemesi olan Khan ve arkadaşları [21] tarafından verilen teorem, kısmi sıralı metrik uzaylarda ifade ve ispat edilerek örneklendirilmiştir. Konunun daha somut ele alınabilmesi için son bölümde, üçüncü ve dördüncü bölümde yapılan çalışmaların integral ve diferensiyel denklemlere uygulamalarına yer verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Tanımlar

2.1.1. Tanım

X boş olmayan bir küme olsun. $d: X\ x\ X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall\ x,\ y,\ z \in X$ için;

$m_1)\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
$m_2)\ d(x,y) = d(y,x)$
$m_3)\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

koşullarını sağlıyorsa d ye X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine de metrik uzay denir.

2.1.2. Tanım

(X, d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun. Bu durumda;

$$B(x_0, r) = \{x\ \in\ X: d(x, x_0) < r\}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar(veya x_0 in r-açık komşuluğu),

$$\bar{B}(x_0, r) = \{x\ \in\ X: d(x, x_0) \leq r\}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar,

$$S(x_0, r) = \{x\ \in\ X: d(x, x_0) = r\}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı yuvar yüzeyi denir.

2.1.3. Tanım

(X, d) ve (Y, d') metrik uzaylar, $f: X \to Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $x \in B_d(x_0, \delta)$ olduğunda $f(x) \in B_{d'}(f(x_0), \varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir. Yani,

$f, x_0 \in X$ de sürekli$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ var öyle ki $f(B_d(x_0, \delta)) \subset B_{d'}(f(x_0), \varepsilon)$

şeklindedir.

2.1.4. Tanım

X boş olmayan bir küme ve $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f(n) = x_n \in X$ olmak üzere $f: \mathbb{N} \to X$ olacak şekilde tanımlı her fonksiyona X metrik uzayında bir dizi denir ve $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ veya kısaca (x_n) ile gösterilir.

2.1.5. Tanım

(X, d) bir metrik uzay (x_n), X de bir dizi $x_0 \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n \geq n_0$ iken $d(x_n, x_0) < r$ olacak şekilde ε a bağlı bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa, (x_n) dizisi x_0 a yakınsıyor denir ve $x_n \to x_0$ veya $lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ şeklinde yazılır. Yani,

$lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists\, n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ var öyle ki $\forall\, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_0) < \varepsilon$

şeklindedir.

2.1.6. Tanım

(X, d) bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir.

2.1.7. Tanım

(X, d) bir metrik uzay olsun. X deki her (x_n) Cauchy dizisi X de yakınsak ise (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir.

2.1.8. Tanım

(X, d) ve (Y, d′) metrik uzaylar ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. X metrik uzayında $x \in X$ noktasına yakınsayan her (x_n) dizisi için Y uzayındaki $(f(x_n))$ dizisi $f(x)$ noktasına yakınsıyor, yani $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$ ise f fonksiyonuna x noktasında dizisel süreklidir denir.

2.1.9. Tanım

X boştan farklı bir küme ve $f: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $f(x_0) = x_0$ olacak şekildeki x_0 noktasına f dönüşümünün bir sabit noktasıdır denir.

Uyarı

3. ve 4. bölümlerde eşitsizlikleri daha sade ifade edebilmek için $f(x)$ ifadesi yerine fx ifadesi kullanılacaktır.

Örnek

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$ dönüşümün sabit noktası $x = 1$ ve $x = 0$ noktasıdır.

Örnek

$X = (0, \infty), \quad f : X \to X, \quad f(x) = \frac{x}{4}$ olsun.

Bu durumda f dönüşümü bir sabit noktaya sahip değildir.

2.1.10. Tanım

(X, d) bir metrik uzay, $f: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için;

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$$

olacak şekilde $\alpha \geq 0$ sayısı varsa, f ye Lipschitz dönüşümü denir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük α sayısına f nin Lipschitz sabiti denir.

Bir f Lipschitz dönüşümü için, $\alpha < 1$ ise f ye bir büzülme dönüşümü, $\alpha \leq 1$ ise f ye genişlemeyen dönüşüm denir.

Ayrıca eğer $x \neq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için;

$$d\big(f(x), f(y)\big) < d(x, y)$$

oluyorsa f ye bir büzülebilir dönüşüm denir.

Uyarı

Bu tanımlardan her büzülme dönüşümünün büzülebilir, büzülebilir dönüşümün de genişlemeyen dönüşüm olduğu açıktır.

2.1.11. Tanım

X boş olmayan bir küme ve $\preccurlyeq$, X de bir bağıntı olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $\preccurlyeq$ bağıntısına kısmi sıralama bağıntısı denir.

S1) Her $x \in X$ için $x \preccurlyeq x$ dir (yansıma özelliği).
S2) Her $x, y \in X$ için $x \preccurlyeq y$ ve $y \preccurlyeq x$ ise $x = y$ dir (ters simetri özelliği).
S3) Her $x, y, z \in X$ için $x \preccurlyeq y$ ve $y \preccurlyeq z$ ise $x \preccurlyeq z$ dir (geçişme özelliği).

2.1.12. Tanım

X boş olmayan bir küme olsun. X üzerinde kısmi sıralama bağıntısı tanımlanmışsa X e kısmi sıralı küme denir ve genellikle (X, $\preccurlyeq$) ile gösterilir.

2.1.14. Tanım

(X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme olsun. Eğer $x, y \in X$ için $x \preccurlyeq y$ veya $y \preccurlyeq x$ oluyorsa x ile y elemanına karşılaştırılabilir elemanlar denir.

2.1.13. Tanım

(X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme olsun. Her $x,\ y \in X$ için $x \preccurlyeq y$ ya da $y \preccurlyeq x$ özelliklerinden birisi varsa yani, x ile y karşılaştırılabiliyorsa $\preccurlyeq$ bağıntısına tam sıralama bağıntısı, (X, $\preccurlyeq$) ikilisine de tam sıralı küme denir.

2.1.15. Tanım

(X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme ve $a \in X$ olsun. Eğer $a \preccurlyeq x$ olacak şekilde $x \in X$ yok ise a ya X nin maksimal elemanı denir. Benzer şekilde $b \in X$ için $x \preccurlyeq b$ olacak şekilde $x \in X$ yok ise b ye X nin minimal elemanı denir.

2.1.16. Tanım

(X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme olsun. Her $x \in X$ için $x \preccurlyeq a$ olacak şekildeki $a \in X$ elemanına X nin en büyük elemanı denir.

Benzer şekilde her $x \in X$ için $b \preccurlyeq x$ olacak şekildeki $b \in X$ elemanına X nin en küçük elemanı denir.

2.1.17. Tanım

(X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme ve $A \subseteq X$ olsun.

a) Her $x \in A$ için $x \preccurlyeq a$ olacak şekildeki $a \in X$ elemanına A kümesinin bir üst sınırıdır denir.
b) Her $x \in A$ için $b \preccurlyeq x$ olacak şekildeki $b \in X$ elemanına A kümesinin bir alt sınırıdır denir.

2.1.18. Tanım

(X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme ve $A \subseteq X$ olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan bir $a \in X$ elemanına A kümesinin en küçük üst sınırı veya supremumu denir ve $a = supA$ ile gösterilir:

i) a, A nın bir üst sınırıdır. Her $x \in A$ için $x \preccurlyeq a$ dir.
ii) a, A nın üst sınırları kümesinin en küçük elemanıdır. Yani c, A nın üst sınırı ise $a \preccurlyeq c$ dir.

Benzer şekilde aşağıdaki şartları sağlayan bir $b \in X$ elemanına A kümesinin en büyük alt sınırı veya infimumu denir ve $b = infA$ ile gösterilir:

i) b, A nın bir alt sınırıdır. Her $x \in A$ için $b \preccurlyeq x$ dir.
ii) b, A nın alt sınırları kümesinin en büyük elemanıdır. Yani d, A nın alt sınırı ise $d \preccurlyeq b$ dir.

2.1.19. Tanım

(X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme olsun. Eğer her $x,\ y \in X$ için $\{x, y\}$ kümesinin supremumu ve infimumu varsa (X, $\preccurlyeq$) ikilisine bir latis(örgü) adı verilir. Eğer bir latisin boştan farklı her A altkümesi bir supremuma ve bir infimuma sahipse bu latise tam latis denir.

2.1.20. Tanım

(X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme ve $f: X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer $x \preccurlyeq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için $f(x) \preccurlyeq f(y)$ oluyorsa, f ye azalmayan fonksiyon denir.

2.1.21. Tanım [20]

(X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme ve $F: X\ x\ X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer F fonksiyonu birinci bileşene göre monoton azalmayan ve ikinci bileşene göre monoton artmayan ise yani, her $x, y \in X$;

$x_1, x_2 \in X$ için $x_1 \preccurlyeq x_2 \Rightarrow F(x_1, y) \preccurlyeq F(x_2, y)$
ve
$y_1, y_2 \in X$ için $y_1 \preccurlyeq y_2 \Rightarrow F(x, y_1) \succcurlyeq F(x, y_2)$

ise F fonksiyonu karma monotonluk özelliğine sahiptir denir.

2.1.22. Tanım [19]

(X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme ve $F: X\ x\ X \to X$ bir fonksiyon olsun. $F(x, y) = x$ ve $F(y, x) = y$ olacak şekildeki $(x, y) \in X\ x\ X$ noktasına F dönüşümünün ikili sabit noktasıdır denir.

2.1.23. Tanım [21]

$\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ dönüşümü;

(a) φ sürekli ve azalmayandır,
(b) $\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$

özelliklerini sağlıyor ise φ dönüşümüne uzaklıkları değiştiren fonksiyon denir.

2.1.24. Tanım

(X, d) bir metrik uzay ve $f: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ sürekli, azalmayan dönüşümü $\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ olmak üzere her $x, y \in X$ için;

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x,y) - \varphi(d(x,y))$$

eşitsizliğini sağlıyor ise f dönüşümü zayıf büzülebilir dönüşümdür denir.

2.1.25. Tanım

(X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme ve $f: X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer $x \preccurlyeq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için $f(x) \succcurlyeq f(y)$ oluyorsa, f ye monoton artmayan fonksiyon denir.

2.1.26. Tanım

X boş olmayan bir küme ve $F: X\ x\ X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\emptyset \neq M \subseteq X^4$ olmak üzere M kümesi aşağıdaki özelliği sağlıyorsa F- değişmez olarak adlandırılır:

(i) $(x,\ y,\ z,\ w) \in M \Leftrightarrow (w,\ z,\ y,\ x) \in M$,
(ii) $(x,\ y,\ z,\ w) \in M \Rightarrow (F(x,y), F(y,x), F(z,w), F(w,z)) \in M$.

2.1.27. Tanım

X boş olmayan bir küme ve $M \subseteq X^4$ olsun. M kümesi $x,\ y,\ z,\ w, a,\ b \in X$ olmak üzere $(x,\ y,\ z,\ w) \in M$ ve $(z,\ w,\ a,\ b) \in M$ iken $(x,\ y,\ a,\ b) \in M$ oluyor ise geçişme özelliğine sahiptir denir.

2.1.29. Tanım

$t \in I = [0,T],\ T > 0$ ve $f: I\ x\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{cases} u'(t) = f\big(t, u(t)\big) \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

birinci mertebeden periyodik diferensiyel denkleminin bir alt çözümü;

$$\begin{cases} \alpha'(t) \leq f\big(t, \alpha(t)\big) \\ \quad \alpha(0) \leq \alpha(T) \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlı bir $\alpha \in C^1(I)$ fonksiyonudur.

2.1.30. Tanım

$(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ bir dizi olsun. (x_n) dizisinin limit inferior tanımı aşağıdaki şekildedir:

$\lim_{n\to\infty} inf x_n := sup_{n\geq 0} inf_{m\geq n} x_m = \sup\{\inf\{x_m : m \geq n\} : n \geq 0\}$.

2.1.31. Tanım

$(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ bir dizi olsun. (x_n) dizisinin limit superior tanımı aşağıdaki şekildedir:

$\lim_{n\to\infty} sup x_n := inf_{n\geq 0} sup_{m\geq n} x_m = \inf\{\sup\{x_m : m \geq n\} : n \geq 0\}$.

2.2. Temel Teoremler

2.2.1. Teorem

$X = C(I = [a, b], \mathbb{R})$ kümesi üzerinde tanımlanan;

$d : X \; x \; X \to \mathbb{R}$

$(x, y) \to d(x, y) = sup_{t\in I} |x(t) - y(t)|$ metriği ile bir tam metrik uzaydır.

İspat

$(x_n) \subseteq X$ bir Cauchy dizisi olsun. Buna göre;

her $\varepsilon > 0$ için $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n, m \geq n_0$ için;

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \Rightarrow sup_{t\in I} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ Her $t \in I$ için $|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ Her $t \in I$ için $(x_n(t))$ reel sayı dizisi Cauchy dizisidir.

$(\mathbb{R}, |.|)$ tam metrik uzay olduğundan $x_n(t) \to x(t)$ olacak şekilde $x(t)$ fonksiyonu vardır. Her bir $(x_n(t))$ sürekli olduğundan ve yakınsama düzgün olduğundan $x(t)$ süreklidir. Yani $x \in C(I, \mathbb{R})$ dir. Bu durumda $x_n \to x$ ve $x \in C(I, \mathbb{R})$ olduğundan $(X = C(I, \mathbb{R}), d)$ bir tam metrik uzaydır.

2.2.2. Teorem

(X, d) bir metrik uzay olsun. Bu durumda her $x,\ y,\ z,\ t \in X$ için;

$$d'\big((x,y),(z,t)\big) = d(x,\ z) + d(y,t)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm ile $X\ x\ X$ bir metrik uzaydır.

İspat

$x,\ y,\ z,\ t,\ u,\ v \in X$ olsun.

M1) $d'\big((x,y),(z,t)\big) = 0 \Leftrightarrow d(x,\ z) + d(y,t) = 0$

$\Leftrightarrow d(x,\ z) = 0$ ve $d(y,t) = 0$

$\Leftrightarrow x = z$ ve $y = t$

$\Leftrightarrow (x,\ y) = (z,\ t)$

M2) $d'\big((x,y),(z,t)\big) = d(x,\ z) + d(y,t) = d(z,\ x) + d(t,y) = d'\big((z,t),(x,y)\big)$

M3) $d'\big((x,y),(z,t)\big) = d(x,\ z) + d(y,t) \leq d(x,u) + d(u,z) + d(y,v) + d(v,t)$

$= d'\big((x,y),(u,v)\big) + d'\big((u,v),(z,t)\big)$

olup buna göre $(X\ x\ X,\ d')$ bir metrik uzaydır.

3. BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Sabit nokta teori çalışmaları iki ana dalda gelişmiştir. Bunlardan metrik uzaylarda sabit nokta teori Banach ile başlamıştır.

3.1. Metrik ve Kısmi Sıralı Metrik Uzaylarda Büzülme Dönüşümleri İçin Sabit Nokta Teoremleri

Banach aşağıdaki teoremi ispatlamıştır [25]:

3.1.1. Teorem

(X, d) bir tam metrik uzay ve $f: X \to X$ bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda f bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir, üstelik herhangi bir $x_0 \in X$ için $(f^n x_0)$ dizisi f nin bu sabit noktasına yakınsar.

İspat

$x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = f^n x_0$ olacak şekilde tanımlı (x_n) dizisini göz önüne alalım. Bu durumda ;

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(fx_{n-1}, fx_n) \\ &\leq \alpha d(x_{n-1}, x_n) \\ &. \\ &. \\ &. \\ &\leq \alpha^n d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. O halde $m > n$ için;

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m)$$

$$\leq \alpha^n d(x_0, x_1) + \alpha^{n+1} d(x_0, x_1) + \cdots + \alpha^{m-1} d(x_0, x_1)$$
$$= (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \cdots + \alpha^{m-1}) d(x_0, x_1)$$
$$= \alpha^n (1 + \alpha + \cdots + \alpha^{m-n-1}) d(x_0, x_1)$$
$$= \alpha^n \frac{1 - \alpha^{m-n}}{1 - \alpha}\, d(x_0, x_1) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha}\, d(x_0, x_1)$$

olup (x_n) dizisi bir Cauchy dizisidir.

X tam metrik uzay olduğundan $lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde $z \in X$ vardır. Üstelik f fonksiyonu sürekli olduğundan;

$$z = lim_{n\to\infty} x_{n+1} = lim_{n\to\infty} f x_n = f\, lim_{n\to\infty} x_n = fz$$

bulunur. O halde z, f dönüşümünün bir sabit noktasıdır.

Şimdi kabul edelim ki w, f fonksiyonun bir başka sabit noktası olsun. Buna göre,

$$0 < d(z, w) = d(fz, fw) \leq \alpha d(z, w) < d(z, w)$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. O halde f dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

İlk olarak 2004 de Ran ve Reuring, Banach sabit nokta teoreminden esinlenerek Teorem 3.1.1 i kısmi sıralı metrik uzaylara uygulamışlardır. Bunu yaparken f fonksiyonunu monoton yapmak pahasına büzülme şartını daha da zayıflatmışlardır. Şimdi bu teoremi ifade ve ispat edelim [14]:

3.1.2. Teorem

(X, d) bir tam metrik uzay ve (X, $\preccurlyeq$), her $x, y \in X$ için bir üst ve alt sınırsa sahip olacak şekilde kısmi sıralı bir küme olsun. $f: X \to X$ fonksiyonu sürekli, monoton olmak üzere karşılaştırılabilir her $x, y \in X$ için bir $\alpha \in (0, 1)$ var öyle ki

$$d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y) \qquad (3.1)$$

olacak şekilde tanımlı olsun. Bir $x_0 \in X$ için $x_0 \preccurlyeq fx_0$ veya $x_0 \succcurlyeq fx_0$ ise bu durumda f dönüşümü bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir. Üstelik her $x \in X$ için $lim_{n\to\infty} f^n x = z$ dir.

İspat

Bir $x_0 \in X$ var öyle ki $x_0 \preccurlyeq fx_0$ veya $x_0 \succcurlyeq fx_0$ olsun. f dönüşümünün monotonluğundan her $n \in \mathbb{N}$ için ya $f^n x_0 \preccurlyeq f^{n+1} x_0$ ya da $f^{n+1} x_0 \preccurlyeq f^n x_0$ şeklindedir.

Eş. 3.1 den;

$$d(f^{n+1}x_0, f^n x_0) \leq \alpha d(f^n x_0, f^{n-1} x_0)$$

elde edilir. Matematiksel tümevarım metodu yardımı ile;

$$d(f^{n+1}x_0, f^n x_0) \leq \alpha^n d(fx_0, x_0)$$

yazılabilir. İlk olarak göstereceğiz ki $(f^n x_0)$ dizisi bir Cauchy dizisidir.

$m > n$ olsun. Buna göre;

$$\begin{aligned} d(f^n x_0, f^m x_0) &\leq \sum_{i=n+1}^{m} d\left(f^i x_0, f^{i-1} x_0\right) \\ &\leq (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \cdots + \alpha^{m-1}) d(fx_0, x_0) \\ &\leq \alpha^n \frac{1-\alpha^{m-n}}{1-\alpha} d(fx_0, x_0) \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(fx_0, x_0) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu yüzden $(f^n x_0)$ dizisi bir Cauchy dizisi olup $lim_{n\to\infty} f^n x_0 = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. f dönüşümü sürekli olduğundan;

$z = \lim_{n\to\infty} f^{n+1} x_0 = \lim_{n\to\infty} f f^n x_0 = f \lim_{n\to\infty} f^n x_0 = fz$ olup

$z \in X$ noktası, f dönüşümünün sabit noktasıdır.

Şimdi ise göstermeliyiz ki z, f dönüşümünün bir tek sabit noktasıdır. Bunu gösterebilmek için öncelikle her $x \in X$ için $lim_{n\to\infty} f^n x = z$ olduğunu göstereceğiz. $x \in X$ keyfi olsun. İki durumda inceleyelim;

1. Durum: x ile x_0 karşılaştırılabilir olsun. Yani $x \preccurlyeq x_0$ veya $x_0 \preccurlyeq x$ olsun. Bu durumda f dönüşümü monoton olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $f^n x_0 \preccurlyeq f^n x$ ya da $f^n x \preccurlyeq f^n x_0$ şeklindedir. Buna göre;

$$d(f^n x, f^n x_0) \leq \alpha^n d(x,\ x_0)$$

olup $n \to \infty$ için limit alındığında $lim_{n\to\infty} f^n x = z$ olduğu gösterilmiş olur.

2. Durum: x ile x_0 karşılaştırılamaz olsun. Bu durumda hipotezden $x,\ x_0 \in X$ eleman çiftinin x_1 üst sınırı ve x_2 alt sınırı vardır. O zaman;

$x_2 \preccurlyeq x_0 \preccurlyeq x_1$ ve $x_2 \preccurlyeq x \preccurlyeq x_1$

şeklinde olur ki f dönüşümünün monotonluğundan her $n \in \mathbb{N}$ için ;

$$f^n x_2 \preccurlyeq f^n x \preccurlyeq f^n x_1 \text{ ve } f^n x_1 \preccurlyeq f^n x \preccurlyeq f^n x_2 \tag{3.2}$$

olup ilk durumdan;

$$lim_{n\to\infty} f^n x_2 = lim_{n\to\infty} f^n x_1 = z \tag{3.3}$$

yazılabilir. Eş. 3.2 ve Eş. 3.3 den;

$$lim_{n\to\infty} f^n x = z$$

elde edilir. Kabul edelim ki w, f dönüşümünün bir başka sabit noktası olsun. O zaman;

$$d(w,z) = d(f^n w, f^n z) \tag{3.4}$$

olup her $n \in \mathbb{N}$ için Eş. 3.4 yazılabileceğinden bu son eşitlikte $n \to \infty$ için limit alındığında $w = z$ elde edilir bu ise ispatı tamamlar.

Ran ve Reuring bu çalışmalarında sabit noktanın varlığını göstermek için tanımlanan dönüşümün sürekli olduğunu kabul etmişlerdir. Ancak Nieto ve Rodriguez-Lopez sürekli olmayan dönüşümlerin sabit noktasının varlığını gösterebilmek için X üzerinde ek bir varsayım kabul etmişlerdir [17]. Bu varsayım aşağıdaki şekildedir:

X deki $x_n \to x$ olacak şekildeki azalmayan her (x_n) dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preccurlyeq x$ şeklindedir.

Şimdi Nieto ve Rodriguez-Lopez nin azalmayan dönüşümler için bu ek varsayımla verdikleri teoremi ifade edelim [17]:

3.1.3. Teorem

(X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme ve (X, d) bir tam metrik uzay olsun. $f: X \to X$ monoton azalmayan dönüşümü, karşılaştırılabilir her $x, y \in X$ için bir $\alpha \in [0,1)$ var öyle ki

$$d(fx, fy) \leq \alpha d(x,y) \tag{3.5}$$

eşitsizliğini sağlasın. Ayrıca kabul edelim ki

X deki $x_n \to x$ olacak şekildeki azalmayan her (x_n) dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preccurlyeq x$ şeklinde olsun.

Bir $x_0 \in X$ var öyle ki $x_0 \preccurlyeq f x_0$ ise bu durumda f dönüşümü $z \in X$ sabit noktasına sahiptir.

İspat

$(f^n x_0)$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu bir önceki teoremin ispatında yapıldığı gibi gösterilebilir. (X, d) bir tam metrik uzay olduğundan $lim_{n\to\infty} f^n x_0 = z$ olacak şekilde $z \in X$ vardır. $x_0 \preccurlyeq fx_0$ ve f dönüşümü azalmayan olduğundan $(f^n x_0)$ dizisi azalmayandır. $(f^n x_0)$ dizisi azalmayan ve $lim_{n\to\infty} f^n x_0 = z$ olduğundan hipotezden her $n \in \mathbb{N}$ için $f^n x_0 \preccurlyeq z$ dir. Eş. 3.5 den;

$$d(fz,z) \le d(fz, f^{n+1}x_0) + d(f^{n+1}x_0, z) = d(fz, ff^n x_0) + d(f^{n+1}x_0, z)$$
$$\le \alpha d(z, f^n x_0) + d(f^{n+1}x_0, z)$$

Yukarıdaki son eşitsizlik her $n \in \mathbb{N}$ için geçerli olduğundan $n \to \infty$ için limit alındığında; $d(fz,z) \le 0$ olup böylece $z \in X$ noktasının f dönüşümünün sabit noktası olduğu gösterilmiş olur.

Nieto ve Rodriguez-Lopez f fonksiyonun sürekliliği yerine kabul ettikleri;

"X deki $x_n \to x$ olacak şekildeki azalmayan her (x_n) dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preccurlyeq x$ şeklinde olsun".

ek varsayımı aşağıdaki şekilde alındığında da yine sabit noktanın varlığını göstermişlerdir:

"X deki $y_n \to y$ olacak şekildeki artmayan her (y_n) dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ için $y \preccurlyeq y_n$ şeklinde olsun".

Şimdi bu ek varsayımla verilen teoremi ifade edelim [17]:

3.1.4. Teorem

(X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme ve (X, d) bir tam metrik uzay olsun. $f : X \to X$ monoton azalmayan dönüşümü, karşılaştırılabilir her $x, y \in X$ için bir $\alpha \in [0,1)$ var öyle ki

$$d(f(x), f(y)) \le \alpha d(x,y) \qquad (3.6)$$

eşitsizliğini sağlasın. Kabul edelim ki

X deki $y_n \to y$ olacak şekildeki artmayan her (y_n) dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ için $y \preccurlyeq y_n$ şeklinde olsun.

Bir $x_0 \in X$ var öyle ki $x_0 \succcurlyeq fx_0$ ise bu durumda f dönüşümü $z \in X$ sabit noktasına sahiptir.

İspat

$(f^n x_0)$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu Teorem 3.1.2 nin ispatında yapıldığı gibi gösterilebilir. (X, d) bir tam metrik uzay olduğundan $\lim_{n\to\infty} f^n x_0 = z$ olacak şekilde $z \in X$ vardır.

$x_0 \succcurlyeq fx_0$ ve f dönüşümü azalmayan olduğundan $(f^n x_0)$ dizisi artmayandır. $(f^n x_0)$ dizisi artmayan ve $\lim_{n\to\infty} f^n x_0 = z$ olduğundan hipotezden her $n \in \mathbb{N}$ için $f^n x_0 \succcurlyeq z$ dir. Eş. 3.6 dan;

$$d(fz, z) \leq d(fz, f^{n+1}x_0) + d(f^{n+1}x_0, z) = d(fz, ff^n x_0) + d(f^{n+1}x_0, z)$$
$$\leq \alpha d(z, f^n x_0) + d(f^{n+1}x_0, z)$$

Yukarıdaki son eşitsizlik her $n \in \mathbb{N}$ için geçerli olduğundan $n \to \infty$ için limit alındığında; $d(fz, z) \leq 0$ olup böylece $z \in X$ noktasının f dönüşümünün sabit noktası olduğu gösterilmiş olur. Teorem 3.1.3 ve Teorem 3.1.4 verilen dönüşümün sabit noktasının tekliğini garanti etmez:

Örnek

$X_1 = \{(1,0), (0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ve X_1 üzerinde aşağıdaki sıralama bağıntısını düşünelim:

$(x, y) \preccurlyeq (z, t) \Leftrightarrow x \leq z$ ve $y \leq t$.

$(X_1, \preccurlyeq)$ farklı elemanları karşılaştırılamayan kısmi sıralı bir kümedir. d_2 Euclidean metriği

olmak üzere (X_1, d_2) tam metrik uzaydır. $f(x,y) = (x,y)$ özdeşlik dönüşümü sürekli ve azalmayandır. Ayrıca büzülme şartı, X_1 kümesinin farklı elemanları karşılaştırılabilir olmadığından sağlanır. Bunun yanında $(1,0) \preccurlyeq f(1,0) = (1,0)$ dır. $\{(x_n, y_n)\} \subseteq X_1$ monoton azalmayan dizisi (x, y) $\in X_1$ noktasına yakınsıyor olsun. Buradan $\{(x_n, y_n)\}$ dizisi sabit dizi olup (x, y) dizinin terimlerinin bir üst sınırıdır. Teorem 3.1.3 ün bütün hipotezleri sağlanmasına rağmen f dönüşümünün sabit noktası tek değildir.

Ran ve Reuring sabit noktanın tekliği için;

"X de her eleman çifti bir üst ve alt sınıra sahiptir".

hipotezini kullanmışlardır [14]. Ancak Nieto ve Rodriguez-Lopez bu şartı daha da zayıflatmışlardır:

"X deki her eleman çifti bir üst veya alt sınıra sahiptir".

veya denk olarak

"Her $x, y \in X$ için bir $z \in X$ var öyle ki z, x ve y ile karşılaştırılabilirdir".

Öncelikle bu iki durumun denk olduğunu gösterelim:

X deki her eleman çifti bir üst veya alt sınır sahip ve $x, y \in X$ olsun. Bu durumda bir $z, t \in X$ var öyle ki $z \preccurlyeq x$ ve $z \preccurlyeq y$ veya $x \preccurlyeq t$ ve $y \preccurlyeq t$ şeklindedir. Bu durumda X de x ve y ile karşılaştırılabilir bir eleman vardır.

Şimdi her $x, y \in X$ için bir $z \in X$ var öyle ki z, x ve y ile karşılaştırılabilir ve $x, y \in X$ olsun. 4 durum vardır:

i) $z \preccurlyeq x$ ve $z \preccurlyeq y$
ii) $x \preccurlyeq z$ ve $y \preccurlyeq z$
iii) $y \preccurlyeq z \preccurlyeq x$
iv) $x \preccurlyeq z \preccurlyeq y$

Yukarıda verilen 4 durumda da $x, y \in X$ eleman çifti bir üst veya alt sınıra sahiptir.

Şimdi, Nieto ve Rodriguez-Lopez tarafından bu zayıflatılmış hipotez ile ortaya konan teoremi ifade ve ispat edelim [17]:

3.1.5. Teorem

(X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme ve (X, d) bir tam metrik uzay olsun. $f: X \to X$ monoton azalmayan dönüşümü, karşılaştırılabilir her $x, y \in X$ için bir $\alpha \in [0, 1)$ var öyle ki

$$d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y) \tag{3.7}$$

eşitsizliğini sağlasın. Kabul edelim ki

i) f sürekli bir dönüşüm
ya da
ii) X deki $x_n \to x$ olacak şekildeki azalmayan her (x_n) dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preccurlyeq x$ şeklinde olsun.

Ayrıca her $x, y \in X$ için bir $z \in X$ var öyle ki z, x ve y ile karşılaştırılabilir olsun. Bir $x_0 \in X$ için $x_0 \preccurlyeq fx_0$ ise bu durumda f dönüşümü bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir.

İspat

Verilen f fonksiyonu için i) koşulunun sağlanması durumunda Teorem 3.1.2 ya da bunun yerine X üzerinde ii) şeklindeki varsayım kabul edildiğinde Teorem 3.1.3 kullanılarak f fonksiyonunun sabit noktasının varlığı gösterilebilir. f dönüşümünün bu sabit noktası $y \in X$ olsun.

Şimdi f fonksiyonunun sabit noktasının tekliğini gösterelim:

Kabul edelim ki $x \in X$, f fonksiyonunun bir başka sabit noktası olsun. $d(x, y) = 0$ olduğunu göstermeliyiz. İspatı iki durumda inceleyelim:

1. Durum: x ile y karşılaştırılabilir olsun. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $f^n x = x$, $f^n y = y$ karşılaştırılabilir olup Eş. 3.7 den;

$$d(x,y) = d(f^n x, f^n y) \leq \alpha^n d(x,y)$$

yazılır ki buradan $d(x,y) = 0$ elde edilir.

2. Durum: x ile y karşılaştırılamaz olsun. Hipotezden bir $z \in X$ var öyle ki z, x ve y ile karşılaştırılabilirdir. f dönüşümünün monotonluğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $f^n z$, $f^n x = x$ ve $f^n y = y$ ile karşılaştırılabilir olup Eş. 3.7 den;

$$d(x,y) \leq d(f^n x, f^n z) + d(f^n z, f^n y) \leq \alpha^n d(x,z) + \alpha^n d(z,y)$$

yazılabilir. Buna göre her $n \in \mathbb{N}$ için bu son eşitsizlik yazılabileceğinden $n \to \infty$ için limit alındığında;

$d(x,y) = 0$ elde edilir.

Benzer şekilde Teorem 3.1.4 ün hipotezlerine ek olarak;

"her $x, y \in X$ için bir $z \in X$ var öyle ki z, x ve y ile karşılaştırılabilir" koşulu alınırsa

aşağıdaki teorem elde edilir:

3.1.6. Teorem

(X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme ve (X, d) bir tam metrik uzay olsun. $f: X \to X$ monoton azalmayan dönüşümü, karşılaştırılabilir her $x, y \in X$ için bir $\alpha \in [0,1)$ var öyle ki

$$d(fx, fy) \leq \alpha d(x,y) \qquad (3.8)$$

eşitsizliğini sağlasın.

Kabul edelim ki

i) f sürekli bir dönüşüm
ya da
ii) X deki $x_n \to x$ olacak şekildeki artmayan her (x_n) dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ için $x \preccurlyeq x_n$ şeklinde olsun.

Ayrıca her $x, y \in X$ için bir $z \in X$ var öyle ki z, x ve y ile karşılaştırılabilir olsun. Bir $x_0 \in X$ için $x_0 \succcurlyeq fx_0$ ise bu durumda f dönüşümü bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir.

İspat

Verilen f fonksiyonu için i) koşulunun sağlanması durumunda Teorem 3.1.2 ya da bunun yerine X üzerinde ii) şeklindeki varsayım kabul edildiğinde Teorem 3.1.4 kullanılarak f fonksiyonunun sabit noktasının varlığı gösterilebilir.

Teorem 3.1.5 de yapıldığı gibi yapılarak da sabit noktanın tekliği gösterilir.

Kısmi sıralı metrik uzaylar düşünülerek büzülme dönüşümü üzerindeki şartlar zayıflatılmaya çalışılmıştır. İlk olarak Ran ve Reuring yukarıda verdiğimiz teoremle bunu başarmışlardır. Bu sabit nokta teoremi Nieto ve Rodriguez-Lopez tarafından geliştirilmiştir. Bhaskar ve Lakshmikantham tarafından karma monoton operatör tanımı ortaya konularak bu iki çalışmada ortaya konan düşünce genelleştirilmiştir. Böylece uygulama alanı genişletilmiştir.

Şimdi Bhaskar ve Lakshmikantham tarafından ortaya konan çalışmayı ifade edelim [20]:

3.1.7. Teorem

(X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme ve (X, d) bir tam metrik uzay, $F: X\,x\,X \to X$, X üzerinde karma monotonluk özelliğine sahip, sürekli bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $x \succcurlyeq u$, $y \preccurlyeq v$ olacak şekildeki her $x,\ y,\ u,\ v \in X$ için bir $\alpha \in [0, 1)$ var öyle ki;

$$d\big(F(x,y),F(u,v)\big) \leq \frac{\alpha}{2}\big(d(x,u)+d(y,v)\big) \tag{3.9}$$

olsun. $x_0 \preccurlyeq F(x_0,y_0)$ ve $y_0 \succcurlyeq F(y_0,x_0)$ olacak şekilde $x_0, y_0 \in X$ var ise bu durumda F dönüşümü ikili sabit noktaya sahiptir.

İspat

$x_0 \preccurlyeq F(x_0,y_0) = x_1$ ve $y_0 \succcurlyeq F(y_0,x_0) = y_1$, $F(x_1,y_1) = x_2$ ve $F(y_1,x_1) = y_2$olduğunu kabul ederek,

$F^2(x_0,y_0) = F\big(F(x_0,y_0),F(y_0,x_0)\big) = F(x_1,y_1) = x_2$
ve
$F^2(y_0,x_0) = F\big(F(y_0,x_0),F(x_0,y_0)\big) = F(y_1,x_1) = y_2$

şeklinde belirleyelim. Bu notasyon ile F fonksiyonunun karma monoton özelliğine sahip olduğundan;

$x_2 = F^2(x_0,y_0) = F(x_1,y_1) \succcurlyeq F(x_0,y_0) = x_1$
ve
$y_2 = F^2(y_0,x_0) = F(y_1,x_1) \preccurlyeq F(y_0,x_0) = y_1$

elde edilir. Bunun yanında her $n = 0, 1, 2, ...$ için;

$x_{n+1} = F^{n+1}(x_0,y_0) = F\big(F^n(x_0,y_0),F^n(y_0,x_0)\big)$
ve
$y_{n+1} = F^{n+1}(y_0,x_0) = F\big(F^n(y_0,x_0),F^n(x_0,y_0)\big)$

şeklinde olduğunu kabul edelim. Kolaylıkla gösterebiliriz ki;

$x_0 \preccurlyeq F(x_0,y_0) = x_1 \preccurlyeq F^2(x_0,y_0) = x_2 \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq F^{n+1}(x_0,y_0) = x_{n+1} \preccurlyeq \ldots$
ve
$y_0 \succcurlyeq F(y_0,x_0) = y_1 \succcurlyeq F^2(y_0,x_0) = y_2 \succcurlyeq \ldots \succcurlyeq F^{n+1}(y_0,x_0) = y_{n+1} \succcurlyeq \ldots$

şeklindedir. Her $n \in \mathbb{N}$ için;

$$d\left(F^{n+1}(x_0,y_0),F^n(x_0,y_0)\right) \leq \frac{\alpha^n}{2}\left(d(F(x_0,y_0),x_0)+d(F(y_0,x_0),y_0)\right) \quad (3.10)$$

$$d\left(F^{n+1}(y_0,x_0),F^n(y_0,x_0)\right) \leq \frac{\alpha^n}{2}\left(d(F(y_0,x_0),y_0)+d(F(x_0,y_0),x_0)\right) \quad (3.11)$$

sağlandığını gösterelim. Gerçekten $n=1$ için $x_0 \preccurlyeq F(x_0,y_0)$ ve $y_0 \succcurlyeq F(y_0,x_0)$ olduğu kullanılarak;

$$d\left(F^2(x_0,y_0),F(x_0,y_0)\right) = d(F\left(F(x_0,y_0),F(y_0,x_0)\right),F(x_0,y_0))$$

$$\leq \frac{\alpha}{2}(\, d(F(x_0,y_0),x_0)+d(F(y_0,x_0),y_0))$$

ve benzer şekilde

$$d\left(F^2(y_0,x_0),F(y_0,x_0)\right) = d(F\left(F(y_0,x_0),F(x_0,y_0)\right),F(y_0,x_0))$$

$$= d(F(y_0,x_0),F\left(F(y_0,x_0),F(x_0,y_0)\right))$$

$$\leq \frac{\alpha}{2}(\, d(F(y_0,x_0),y_0)+d(F(x_0,y_0),x_0)$$

elde edilir. Kabul edelim ki Eş. 3.10 ve Eş. 3.11 sağlansın. Buna göre;

$F^n(x_0,y_0)=x_n \preccurlyeq F^{n+1}(x_0,y_0)$ ve $F^n(y_0,x_0)=y_n \succcurlyeq F^{n+1}(y_0,x_0)$ olduğunu kullanarak;

$$d\left(F^{n+2}(x_0,y_0),F^{n+1}(x_0,y_0)\right) =$$

$$= d(F\left(F^{n+1}(x_0,y_0),F^{n+1}(y_0,x_0)\right),F(F^n(x_0,y_0),F^n(y_0,x_0)))$$

$$\leq \frac{\alpha}{2}(d\left(F^{n+1}(x_0,y_0),F^n(x_0,y_0)\right)+d(F^{n+1}(y_0,x_0),F^n(y_0,x_0))$$

$$\leq \frac{\alpha^{n+1}}{2}\,(d(F(x_0,y_0),x_0)+d(F(y_0,x_0),y_0)).$$

Benzer şekilde gösterelim ki;

$$d\left(F^{n+2}(y_0,x_0),F^{n+1}(y_0,x_0)\right)\leq\frac{\alpha^{n+1}}{2}\left(d(F(y_0,x_0),y_0)+d(F(x_0,y_0),x_0)\right)$$

şeklindedir. Gerçekten;

$$\begin{aligned}d\left(F^{n+2}(y_0,x_0),F^{n+1}(y_0,x_0)\right)&=\\&=d(F\left(F^{n+1}(y_0,x_0),F^{n+1}(x_0,y_0)\right),F(F^n(y_0,x_0),F^n(x_0,y_0)))\\&\leq\frac{\alpha}{2}(d\left(F^{n+1}(y_0,x_0),F^n(y_0,x_0)\right)+d(F^{n+1}(x_0,y_0),F^n(x_0,y_0))\\&\leq\frac{\alpha^{n+1}}{2}\left(d(F(y_0,x_0),y_0)+d(F(x_0,y_0),x_0)\right).\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. $m>n$ olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned}d\left(F^m(x_0,y_0),F^n(x_0,y_0)\right)&\leq\\&\leq d\left(F^m(x_0,y_0),F^{m-1}(x_0,y_0)\right)+\cdots+d\left(F^{n+1}(x_0,y_0),F^n(x_0,y_0)\right)\\&\leq\frac{(\alpha^{m-1}+\cdots+\alpha^n)}{2}\left(d(F(x_0,y_0),x_0)+d(F(y_0,x_0),y_0)\right)\\&=\frac{(\alpha^n-\alpha^m)}{2(1-\alpha)}\left(d(F(x_0,y_0),x_0)+d(F(y_0,x_0),y_0)\right)\\&\leq\frac{\alpha^n}{2(1-\alpha)}\left(d(F(x_0,y_0),x_0)+d(F(y_0,x_0),y_0)\right)\end{aligned}$$

olup buradan $(F^n(x_0,y_0))$ dizisi Cauchy dizisidir. Benzer şekilde $(F^n(y_0,x_0))$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösteririz. Gerçekten $m>n$ olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned}d\left(F^m(y_0,x_0),F^n(y_0,x_0)\right)&\leq\\&\leq d\left(F^m(y_0,x_0),F^{m-1}(y_0,x_0)\right)+\cdots+d\left(F^{n+1}(y_0,x_0),F^n(y_0,x_0)\right)\\&\leq\frac{(\alpha^{m-1}+\cdots+\alpha^n)}{2}\left(d(F(y_0,x_0),y_0)+d(F(x_0,y_0),x_0)\right)\\&=\frac{(\alpha^n-\alpha^m)}{2(1-\alpha)}\left(d(F(y_0,x_0),y_0)+d(F(x_0,y_0),x_0)\right)\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\alpha^n}{2(1-\alpha)} \left(d(F(y_0, x_0)\,, y_0) + d(F(x_0, y_0)\,, x_0)\right)$$

elde edilir. Böylece $(F^n(y_0, x_0))$ dizisinin Cauchy dizisi olduğu gösterilmiş olur. (X, d) bir tam metrik uzay olduğundan;

$lim_{n\to\infty} F^n(x_0, y_0) = x$ ve $lim_{n\to\infty} F^n(y_0, x_0) = y$

olacak şekilde $x, y \in X$ vardır. $\varepsilon > 0$ olsun.

F fonksiyonu (x, y) noktasında sürekli olduğundan verilen $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ sayısına karşılık bir $\delta > 0$ sayısı var öyle ki $d(x,u) + d(y,v) < \delta$ olduğunda $d(F(x,y), F(u,v)) < \frac{\varepsilon}{2}$ dir. $lim_{n\to\infty} F^n(x_0, y_0) = x$ ve $lim_{n\to\infty} F^n(y_0, x_0) = y$ olduğundan, $\gamma = min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\delta}{2}\} > 0$ için bir n_0, m_0 var öyle ki her $n \geq n_0$, $m \geq m_0$ için;

$d(F^n(x_0, y_0), x) < \gamma$ ve $d(F^m(y_0, x_0), y) < \gamma$ şeklindedir.

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq max\{n_0, m_0\}$ için;

$$\begin{aligned} d(F(x,y),x) &\leq d\big(F(x,y), F^{n+1}(x_0,y_0)\big) + d(F^{n+1}(x_0,y_0),x) \\ &= d\left(F(x,y), F\big(F^n(x_0,y_0), F^n(y_0,x_0)\big)\right) + d(F^{n+1}(x_0,y_0),x) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \gamma \leq \varepsilon \end{aligned}$$

olup buradan $d(F(x,y),x) = 0$ elde edilir. Benzer şekilde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq max\{n_0, m_0\}$ için;

$$\begin{aligned} d\big(y, F(y,x)\big) &\leq d(y, F^{n+1}(y_0,x_0))) + d(F^{n+1}(y_0,x_0), F(y,x)) \\ &= d(y, F^{n+1}(y_0,x_0))) + d\left(F\big(F^n(y_0,x_0), F^n(x_0,y_0)\big), F(y,x)\right) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \gamma \leq \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre (x, y) noktası F dönüşümünün ikili sabit noktasıdır.

F fonksiyonunun sürekli olmadığı durumda X üzerinde ek bir şartla Bhaskar ve Lakshmikantham ikili sabit noktanın varlığını göstermişlerdir [20]:

3.1.8. Teorem

(X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme ve (X, d) bir tam metrik uzay, $F: X\ x\ X \to X$, X üzerinde karma monotonluk özelliğine sahip bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $x \succcurlyeq u,\ y \preccurlyeq v$ olacak şekildeki her $x,\ y,\ u,\ v \in X$ için bir $\alpha \in [0, 1)$ var öyle ki;

$$d\big(F(x,y),F(u,v)\big) \leq \frac{\alpha}{2}\big(d(x,u) + d(y,v)\big) \tag{3.12}$$

olsun. Ayrıca kabul edelim ki

i) X deki $x_n \to x$ olacak şekildeki azalmayan her (x_n) dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preccurlyeq x$,
ii) X deki $y_n \to y$ olacak şekildeki artmayan her (y_n) dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ için $y \preccurlyeq y_n$.

şeklinde olsun. $x_0 \preccurlyeq F(x_0, y_0)$ ve $y_0 \succcurlyeq F(y_0, x_0)$ olacak şekilde $x_0,\ y_0 \in X$ var ise bu durumda F ikili sabit noktaya sahiptir.

İspat

Teorem 3.1.7 nin ispatındaki gibi $lim_{n\to\infty} F^n(x_0, y_0) = x$ ve $lim_{n\to\infty} F^n(y_0, x_0) = y$ olacak şekilde $x, y \in X$ nin varlığı gösterilebilir. $\varepsilon > 0$ olsun.

$lim_{n\to\infty} F^n(x_0, y_0) = x$ ve $lim_{n\to\infty} F^n(y_0, x_0) = y$ olduğundan $n_1, n_2 \in N$ var öyle ki her $n \geq n_1$ ve $m \geq n_2$ için;

$d(F^n(x_0, y_0), x) < \frac{\varepsilon}{3}$ ve $d(F^m(y_0, x_0), y) < \frac{\varepsilon}{3}$ şeklindedir. $n \geq max\{n_1, n_2\}$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ alarak ve $F^n(x_0, y_0) \preccurlyeq x$ ve $F^n(y_0, x_0) \succcurlyeq y$ olduğundan;

$$\begin{aligned} d(F(x,y),x) &\leq d\big(F(x,y),F^{n+1}(x_0,y_0)\big) + d(F^{n+1}(x_0,y_0),x) \\ &= d\Big(F(x,y),F\big(F^n(x_0,y_0),F^n(y_0,x_0)\big)\Big) + d(F^{n+1}(x_0,y_0),x) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\alpha}{2}\left(d\left(x, F^n(x_0, y_0)\right) + d\left(y, F^n(y_0, x_0)\right)\right) + d(F^{n+1}(x_0, y_0), x)$$
$$\leq d\left(x, F^n(x_0, y_0)\right) + d\left(y, F^n(y_0, x_0)\right) + d(F^{n+1}(x_0, y_0), x) < \varepsilon$$

olur ki bu durumda $d(F(x,y),x) = 0$ elde edilir. Benzer şekilde

$n \geq max\{n_1, n_2\}$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ alarak ve $F^n(x_0, y_0) \preccurlyeq x$ ve $F^n(y_0, x_0) \succcurlyeq y$ olduğundan;

$$d\left(y, F(y,x)\right) \leq d(y, F^{n+1}(y_0, x_0))) + d(F^{n+1}(y_0, x_0), F(y,x))$$
$$= d(y, F^{n+1}(y_0, x_0))) + d\left(F\left(F^n(y_0, x_0), F^n(x_0, y_0)\right), F(y,x)\right)$$
$$\leq \frac{\alpha}{2}\left(d(F^n(y_0, x_0), y) + d(F^n(x_0, y_0), x) + d(y, F^{n+1}(y_0, x_0))\right)$$
$$\leq d(F^n(y_0, x_0), y) + d(F^n(x_0, y_0), x) + d\left(y, F^{n+1}(y_0, x_0)\right) < \varepsilon$$

olur ki bu durumda $d(F(y,x),y) = 0$ elde edilir.

Teorem 3.1.7 ve Teorem 3.1.8 ikili sabit noktanın tekliğini garanti etmez. Çünkü büzülme şartı sadece karşılaştırılabilir elemanlar için uygulanabilir. O halde ikili sabit noktanın tekliği için X x X üzerinde aşağıdaki ek şarta ihtiyaç vardır:

X x X deki her eleman çifti bir üst veya alt sınıra sahiptir.

veya denk olarak

her $(x,y),\ (x^*, y^*) \in X\ x\ X$ için bu eleman çifti ile karşılaştırılabilir $(z_1, z_2) \in X\ x\ X$ vardır.

Uyarı

(X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme bir küme olsun. Bu durumda $X\ x\ X$ aşağıdaki bağıntı ile kısmi sıralama bağıntısıdır:

$(x,y),(u,v) \in X\ x\ X\ için\ (x,y) \preccurlyeq (u,v) \Leftrightarrow u \succcurlyeq x, v \preccurlyeq y.$

Gerçekten;

S1) Her $(x, y) \in X\ x\ X$ için $x \succcurlyeq x, y \preccurlyeq y$ olduğundan $(x, y) \preccurlyeq (x, y)$ dir.
S2) $(x, y) \preccurlyeq (u, v)$ ve $(u, v) \preccurlyeq (x, y)$ ise $x = u$ ve $y = v$ dir.
S3) $(x, y) \preccurlyeq (u, v)$ ve $(u, v) \preccurlyeq (z, t)$ ise $u \succcurlyeq x$, $z \succcurlyeq u$ ve $v \preccurlyeq y$, $t \preccurlyeq v$ olup $(x, y) \preccurlyeq (z, t)$ dir.

Uyarı

Notasyonal uygunluk açısından $X\ x\ X$ üzerindeki metriği de aynı *"d"* sembolü ile göstereceğiz.

3.1.9. Teorem

(X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme ve (X, d) bir tam metrik uzay, $F: X\ x\ X \to X$, X üzerinde karma monotonluk özelliğine sahip bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $x \succcurlyeq u,\ y \preccurlyeq v$ olacak şekildeki her $x,\ y,\ u,\ v \in X$ için bir $\alpha \in [0, 1)$ var öyle ki;

$$d\big(F(x, y), F(u, v)\big) \leq \frac{\alpha}{2}\ \big(d(x, u) + d(y, v)\big) \qquad (3.13)$$

olsun. Kabul edelim ki

i) F sürekli,
ya da
ii) X deki $x_n \to x$ olacak şekildeki azalmayan her (x_n) dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preccurlyeq x$,
X deki $y_n \to y$ olacak şekildeki artmayan her (y_n) dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ için $y \preccurlyeq y_n$.

olsun. Ayrıca kabul edelim ki $X\ x\ X$ üzerinde her $(x, y), (x^*, y^*) \in X\ x\ X$ için bu eleman çifti ile karşılaştırılabilir $(z_1, z_2) \in X\ x\ X$ vardır. $x_0 \preccurlyeq F(x_0, y_0)$ ve $y_0 \succcurlyeq F(y_0, x_0)$ olacak şekilde $x_0, y_0 \in X$ var ise bu durumda F bir tek ikili sabit noktaya sahiptir.

İspat

F dönüşümünün bir ikili sabit noktaya sahip olduğu Teorem 3.1.7 ve Teorem 3.1.8 de gösterildi. Şimdi, ikili sabit noktanın tekliğini gösterelim. Kabul edelim ki F dönüşümünün başka bir ikili sabit noktası $(x^*, y^*) \in X\ x\ X$ olsun. Göstermeliyiz ki $d((x,y),(x^*,y^*)) = 0$ dir. İki durum vardır:

1. Durum: (x, y) ile (x^*, y^*) karşılaştırılabilir olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $(F^n(x,y), F^n(y,x)) = (x,y)$ ile $(F^n(x^*,y^*), F^n(y^*,x^*)) = (x^*,y^*)$ karşılaştırılabilirdir.

$$
\begin{aligned}
d\big((x,y),(x^*,y^*)\big) &= d(x,x^*) + d(y,y^*) \\
&= d\big(F^n(x,y), F^n(x^*,y^*)\big) + d(F^n(y,x), F^n(y^*,x^*)) \\
&= d\Big(F\big(F^{n-1}(x,y), F^{n-1}(y,x)\big), F\big(F^{n-1}(x^*,y^*), F^{n-1}(y^*,x^*)\big)\Big) + \\
&\quad + d(F\big(F^{n-1}(y,x), F^{n-1}(x,y)\big), F(F^{n-1}(y^*,x^*), F^{n-1}(x^*,y^*))) \\
&= \alpha[d(\big(F^{n-1}(x,y), F^{n-1}(x^*,y^*)\big)) + d(\big(F^{n-1}(y,x), F^{n-1}(y^*,x^*)\big) \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&= \alpha^{n-1}[d(\big(F(x,y), F(x^*,y^*)\big)) + d(\big(F(y,x), F(y^*,x^*)\big) \\
&= \alpha^n[d(x,x^*) + d(y,y^*)] \\
&= \alpha^n[d((x,y),(x^*,y^*))]
\end{aligned}
$$

olup buradan $d((x,y),(x^*,y^*)) = 0$ elde edilir.

2. Durum: (x, y) ile (x^*, y^*) karşılaştırılamaz olsun. Hipotezden bir $(z_1, z_2) \in X\ x\ X$ var öyle ki (z_1, z_2), (x, y) ve (x^*, y^*) ile karşılaştırılabilirdir. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $(F^n(z_1,z_2),\ F^n(z_2,z_1))$, $\big(F^n(x,y), F^n(y,x)\big)$ ve $\big(F^n(x^*,y^*), F^n(y^*,x^*)\big)$ ile karşılaştırılabilirdir.

Buna göre;

$$d((x,y),(x^*,y^*) = d(\big(F^n(x,y), F^n(y,x)\big), (F^n(x^*,y^*), F^n(y^*,x^*)))$$

$$\leq d\left(\left(F^n(x,y),F^n(y,x)\right),\left(F^n(z_1,z_2),F^n(z_2,z_1)\right)\right)+$$
$$+d\left(\left(F^n(z_1,z_2),F^n(z_2,z_1)\right),\left(F^n(x^*,y^*),F^n(y^*,x^*)\right)\right)$$
$$\leq \alpha^n\left\{\left[d\left((x,y),(z_1,z_2)\right)\right]+\left[d\left((z_1,z_2),(x^*,y^*)\right)\right]\right\}$$

olup her $n \in \mathbb{N}$ için bu eşitsizlik sağlandığından $d((x,y),(x^*,y^*))=0$ elde edilir.

X de ki her eleman çiftinin bir üst veya alt sınıra sahip olduğunu kabul ederek gösterebiliriz ki ikili sabit noktanın bileşenleri eşittir. Şimdi bununla ilgili olarak Bhaskar ve Lakshmikantham tarafından ortaya konan çalışmayı ifade ve ispat edelim [20]:

3.1.10. Teorem

Teorem 3.1.9 un hipotezlerine ek olarak kabul edelim ki X deki her eleman çifti bir üst veya alt sınıra sahip olsun. Bu durumda F dönüşümünün bir tek olan (x, y) ikili sabit noktasının bileşenleri eşittir.

İspat

İspatı iki durumda inceleyelim:

1. Durum: x ile y karşılaştırılabilir olsun Bu durumda Eş. 3. 13 den;

$$d(x,y)=d\left(F(x,y),F(y,x)\right)\leq \alpha d(x,y)$$

olup $0 \leq \alpha < 1$ olduğundan $d(x,y)=0$ dir.

2. Durum: x ile y karşılaştırılamaz olsun. Hipotezden x ve y nin bir üst veya alt sınırı vardır. Yani x ile y karşılaştırılabilir bir $z \in X$ vardır. Kabul edelim ki $x \preccurlyeq z$ ve $y \preccurlyeq z$ olsun. O zaman F dönüşümünün karma monotonluk özelliğinden;

$F(x,y) \preccurlyeq F(z,y)$
$F(x,y) \succcurlyeq F(x,z)$
$F(y,x) \preccurlyeq F(z,x)$
$F(y,x) \succcurlyeq F(y,z)$

şeklinde yazılabilir. Yine F dönüşümünün karma monoton özelliğinden;

(1) $F^2(x,y) = F(F(x,y),F(y,x)) \preccurlyeq F(F(z,y),F(y,z)) = F^2(z,y)$
(2) $F^2(y,x) = F(F(y,x),F(x,y)) \preccurlyeq F(F(z,x),F(x,z)) = F^2(z,x)$
(3) $F^2(x,y) = F(F(x,y),F(y,x)) \succcurlyeq F(F(x,z),F(z,x)) = F^2(x,z)$
(4) $F^2(y,x) = F(F(y,x),F(x,y) \succcurlyeq F(F(y,z),F(z,y)) = F^2(y,z)$

olup benzer ilişkiler $n > 2$ için de gösterilebilir. Buna göre;

$$\begin{aligned} d(x,y) &= d(F^{n+1}(x,y),F^{n+1}(y,x)) \\ &= d(F\big(F^n(x,y),F^n(y,x)\big),F(F^n(y,x),F^n(x,y))) \\ &\le d\left(F\big(F^n(x,y),F^n(y,x)\big),F\big(F^n(x,z),F^n(z,x)\big)\right) + \\ &\qquad + d(F\big(F^n(x,z),F^n(z,x)\big),F(F^n(y,x),F^n(x,y))) \\ &\le d\left(F\big(F^n(x,y),F^n(y,x)\big),F\big(F^n(x,z),F^n(z,x)\big)\right) + \\ &\qquad + d(F\big(F^n(x,z),F^n(z,x)\big),F(F^n(z,x),F^n(x,z))) + \\ &\qquad + d(F\big(F^n(z,x),F^n(x,z)\big),F(F^n(y,x),F^n(x,y))) \end{aligned}$$

olup F üzerindeki büzülme şartından;

$$\begin{aligned} d(x,y) \le \frac{\alpha}{2}[\, & d\big(F^n(x,y),F^n(x,z)\big) + d\big(F^n(y,x),F^n(z,x)\big) + \\ & + d\big(F^n(x,z),F^n(z,x)\big) + d\big(F^n(z,x),F^n(x,z)\big) + \\ & + d\big(F^n(z,x),F^n(y,x)\big) + d\big(F^n(x,z),F^n(x,y)\big)] \\ = \alpha[\, & d\big(F^n(x,y),F^n(x,z)\big) + d\big(F^n(y,x),F^n(z,x)\big) + d\big(F^n(x,z),F^n(z,x)\big)] \end{aligned}$$

Bu şekilde devam edilerek;

$$d(x,y) \le \alpha^{n+1}[d(x,z) + d(z,y)]$$

elde edilir ki bu eşitsizlik her $n \in \mathbb{N}$ için geçerli olduğundan $n \to \infty$ için limit alındığında $d(x,y) = 0$ elde edilir.

Bhaskar ve Lakshmikanthan nin çalışmasından Nieto ve Rodriguez-Lopez nin çalışması $fx = F(x, y)$ ve $fy = F(y, x)$ şeklindeki bir seçim ile elde edilebilir. F dönüşümü karma monotonluk özelliğine sahip olduğundan f dönüşümü azalmayandır ve $u = x, v = y$ seçimi ile de Nieto ve Rodriguez-Lopez nin çalışmasındaki büzülme şartı elde edilir. Bhaskar ve Lakshmikantham, F dönüşümünün bir tek ikili sabit noktaya sahip olduğunu üstelik bu ikili sabit noktanın bileşenlerinin de eşit olduğunu göstermişlerdir. Böylece f dönüşümünün bir tek olan sabit noktasının varlığı gösterilmiş olur.

Çalışma alanının daha da genelleştirilmesi adına Bhaskar ve Lakshmikantham nın çalışmasının genellemesi Luong ve Thuan tarafından ortaya konmuştur [26]. Bu çalışmadan önce teoremin ifadesinde kullanacağımız tanımlamaları ifade edelim:

Φ, φ: $[0, \infty) \to [0, \infty)$ şeklinde tanımlı;

(i) φ sürekli ve azalmayandır,
(ii) $\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$,
(iii) Her $t, s \in [0, \infty)$ için $\varphi(t + s) \leq \varphi(t) + \varphi(s)$.

özelliklerini sağlayan bütün fonksiyonlar ailesi ve Ψ, ψ: $[0, \infty) \to [0, \infty)$ şeklinde tanımlı;

(a) Her $r > 0$ için $lim_{t \to r} \psi(t) > 0$,
(b) $lim_{t \to 0^+} \psi(t) = 0$.

özelliklerini sağlayan bütün fonksiyonlar ailesi olsun.

Örnek

$\varphi_1(t) = kt, \quad k > 0$
$\varphi_2(t) = \dfrac{t}{t+1}$
$\varphi_3(t) = In(t+1)$
$\varphi_4(t) = min\{t, 1\}$

şeklinde tanımlı fonksiyonlar Φ ailesine ait fonksiyonlardır.

Örnek

$\psi_1(t) = kt, \ \ k > 0$

$\psi_2(t) = In(2t + 1)$

$$\psi_3(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t = 0 \\ \dfrac{t}{t+1} & , \quad 0 < t < 1 \\ 1 & , \quad t = 1 \\ \frac{1}{2}t & , \quad t > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonlar ise Ψ ailesine ait fonksiyonlardır.

3.1.11. Teorem

(X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme ve (X, d) bir tam metrik uzay olsun. $F : X \times X \to X$ dönüşümü X üzerinde karma monotonluk özelliğine sahip bir dönüşüm olsun ve kabul edelim ki $x_0, \ y_0 \in X$ var öyle ki $x_0 \preccurlyeq F(x_0, y_0)$ ve $y_0 \succcurlyeq F(y_0, x_0)$ şeklinde olsun. Kabul edelim ki $\varphi \in \Phi$ ve $\psi \in \Psi$ olmak üzere $x \succcurlyeq u$ ve $y \preccurlyeq v$ olacak şekildeki her $x, \ y, \ u, \ v \in X$ için ;

$$\varphi\left(d\big(F(x,y), F(u,v)\big)\right) \leq \frac{1}{2}\varphi\left(d(x,u) + d(y,v)\right) - \psi\left(\frac{d(x,u) + d(y,v)}{2}\right) \qquad (3.14)$$

eşitsizliği sağlansın. Ayrıca kabul edelim ki

i) F süreklidir,

ya da

ii) X deki $x_n \to x$ olacak şekildeki azalmayan her (x_n) dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preccurlyeq x$,
X deki $y_n \to y$ olacak şekildeki artmayan her (y_n) dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ için $y \preccurlyeq y_n$ dir.

O zaman F dönüşümü X de ikili sabit noktaya sahiptir.

İspat

$x_0, y_0 \in X$ var öyle ki $x_0 \preccurlyeq F(x_0, y_0)$ ve $y_0 \succcurlyeq F(y_0, x_0)$ olsun. Her $n \geq 0$ için

$$x_{n+1} = F(x_n, y_n) \text{ ve } y_{n+1} = F(y_n, x_n) \tag{3. 15}$$

şeklindeki X de (x_n) ve (y_n) dizilerini tanımlayalım. Biz göstermeliyiz ki her $n \geq 0$ için;

$$x_n \preccurlyeq x_{n+1} \tag{3.16}$$

ve

$$y_n \succcurlyeq y_{n+1} \tag{3.17}$$

şeklindedir. Bunu göstermek için tümevarım metodunu kullanalım;

$n = 0$ için hipotezden $x_0 \preccurlyeq F(x_0, y_0) = x_1$ ve $y_0 \succcurlyeq F(y_0, x_0) = y_1$ olur. Kabul edelim ki herhangi bir n doğal sayısı için Eş. 3. 16 ve Eş. 3.17 sağlansın. Bu durumda $x_n \preccurlyeq x_{n+1}$ ve $y_n \succcurlyeq y_{n+1}$ olup F karma monotonluk özelliğine sahip olduğundan;

$$x_{n+2} = F(x_{n+1}, y_{n+1}) \succcurlyeq F(x_n, y_n) = x_{n+1} \tag{3.18}$$

ve

$$y_{n+2} = F(y_{n+1}, x_{n+1}) \preccurlyeq F(y_n, x_n) = y_{n+1} \tag{3.19}$$

olur. Eş. 3. 18 ve Eş. 3.19 den $x_{n+1} \preccurlyeq x_{n+2}$ ve $y_{n+1} \succcurlyeq y_{n+2}$ olup tümevarım metodundan Eş. 3. 16 ve Eş. 3.17 her $n \geq 0$ için sağlanır.

Bu nedenle

$$x_0 \preccurlyeq x_1 \preccurlyeq x_2 \preccurlyeq x_3 \ldots \preccurlyeq x_n \preccurlyeq x_{n+1} \preccurlyeq \ldots \tag{3.20}$$

ve

$$y_0 \succcurlyeq y_1 \succcurlyeq y_2 \succcurlyeq y_3 \ \ldots \succcurlyeq y_n \succcurlyeq y_{n+1} \succcurlyeq \ldots \tag{3.21}$$

şeklinde yazılabilir. Her $n \geq 0$ için $x_n \succcurlyeq x_{n-1}$ ve $y_n \preccurlyeq y_{n-1}$ olduğu için Eş. 3. 14 ve Eş. 3.15 den aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\varphi\left(d(x_{n+1},x_n)\right)=\varphi\left(d\big(F(x_n,y_n),F(x_{n-1},y_{n-1})\big)\right)$$
$$\leq\frac{1}{2}\,\varphi\left(d(x_n,x_{n-1})+d(y_n,y_{n-1})\right)-$$
$$-\psi\left(\frac{d(x_n,x_{n-1})+d(y_n,y_{n-1})}{2}\right) \qquad (3.22)$$

ve benzer şekilde $y_{n-1}\succcurlyeq y_n$ ve $x_{n-1}\preccurlyeq x_n$ olduğu için Eş. 3. 14 ve Eş. 3.15 den aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\varphi\left(d(y_n,y_{n+1})\right)=\varphi\left(d\big(F(y_{n-1},x_{n-1}),F(y_n,x_n)\big)\right)$$
$$\leq\frac{1}{2}\,\varphi\left(d(y_{n-1},y_n)+d(x_{n-1},x_n)\right)-$$
$$-\psi\left(\frac{d(y_{n-1},y_n)+d(x_{n-1},x_n)}{2}\right) \qquad (3.23)$$

Eş. 3. 22 ve Eş. 3.23 den;

$$\varphi\left(d(x_{n+1},x_n)\right)+\varphi\left(d(y_{n+1},y_n)\right)\leq\varphi\left(d(x_n,x_{n-1})+d(y_n,y_{n-1})\right)-$$
$$-2\,\psi\left(\frac{d(x_n,x_{n-1})+d(y_n,y_{n-1})}{2}\right) \qquad (3.24)$$

eşitsizliğini elde ederiz. φ fonksiyonunun (iii) özelliğinden

$$\varphi\left(d(x_{n+1},x_n)+d(y_{n+1},y_n)\right)\leq\varphi\left(d(x_{n+1},x_n)\right)+\varphi\left(d(y_{n+1},y_n)\right) \qquad (3.25)$$

yazılabilir ki Eş. 3.24 ve Eş. 3.25 den

$$\varphi\left(d(x_{n+1},x_n)+d(y_{n+1},y_n)\right)\leq\varphi\left(d(x_n,x_{n-1})+d(y_n,y_{n-1})\right)-$$
$$-2\,\psi\left(\frac{d(x_n,x_{n-1})+d(y_n,y_{n-1})}{2}\right) \qquad (3.26)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu son eşitsizlikten;

$$\varphi\left(d(x_{n+1},x_n)+d(y_{n+1},y_n)\right)\leq\varphi\left(d(x_n,x_{n-1})+d(y_n,y_{n-1})\right)$$

elde edilir. φ fonksiyonunun azalmayan olduğu kullanıldığında;

$$d(x_{n+1}, x_n) + d(y_{n+1}, y_n) \leq d(x_n, x_{n-1}) + d(y_n, y_{n-1})$$

bulunur. $\delta_n = d(x_{n+1}, x_n) + d(y_{n+1}, y_n)$ şeklinde tanımlı (δ_n) dizisini tanımlayalım. Son eşitsizlikten görülebilir ki (δ_n) dizisi azalandır. Bu yüzden bir $\delta \geq 0$ sayısı var öyle ki

$$lim_{n\to\infty}\, \delta_n = lim_{n\to\infty}\, d(x_{n+1}, x_n) + d(y_{n+1}, y_n) = \delta \tag{3.27}$$

şeklindedir. Şimdi biz gösterelim ki $\delta = 0$ dır. Kabul edelim ki $\delta > 0$ olsun. Eş. 3.26 eşitsizliğinin her iki tarafının $n \to \infty$ (denk olarak $\delta_n \to \delta$) için limit alınırsa her $r > 0$ için $lim_{t\to r}\, \psi(t) > 0$ ve φ süreklidir kabulümüzden;

$$\varphi(\delta) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\delta_n) \leq \lim_{n\to\infty} \left[\varphi(\delta_{n-1}) - 2\psi\left(\frac{\delta_{n-1}}{2}\right)\right] = \varphi(\delta) - 2 \lim_{\delta_{n-1}\to\delta} \psi\left(\frac{\delta_{n-1}}{2}\right)$$
$$< \varphi(\delta)$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde kabul yanlış olup;

$$lim_{n\to\infty}\, \delta_n = lim_{n\to\infty}\, d(x_{n+1}, x_n) + d(y_{n+1}, y_n) = 0 \tag{3.28}$$

elde edilir. Devamında göstermeliyiz ki (x_n) ve (y_n) dizileri Cauchy dizileridir. Aksini kabul edelim, (x_n) ve (y_n) dizilerinden en az biri Cauchy dizisi olmasın. O zaman bir $\varepsilon > 0$ var öyle ki $n(k) > m(k) \geq k$ olacak şekilde (x_n) dizisinin $\left(x_{n(k)}\right)$ ve $\left(x_{m(k)}\right)$ ve (y_n) dizisinin $\left(y_{n(k)}\right), \left(y_{m(k)}\right)$,

$$d\left(x_{n(k)}, x_{m(k)}\right) + d\left(y_{n(k)}, y_{m(k)}\right) \geq \varepsilon \tag{3.29}$$

eşitsizliğini sağlayan alt dizileri vardır. Burada $n(k)$ tamsayısını $m(k)$ tamsayısına tekabül eden ve Eş. 3.29 eşitsizliğini sağlayan $n(k) > m(k) \geq k$ olacak şekildeki en küçük tamsayı olarak alabiliriz. O zaman;

$$d\left(x_{n(k)-1}, x_{m(k)}\right) + d\left(y_{n(k)-1}, y_{m(k)}\right) < \varepsilon \tag{3.30}$$

elde edilir. Eş. 3.29, Eş. 3.30 eşitsizlikleri ve üçgen eşitsizliği kullanılırsa;

$$\varepsilon \le r_k := d\left(x_{n(k)}, x_{m(k)}\right) + d\left(y_{n(k)}, y_{m(k)}\right)$$
$$\le\ d\left(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}\right) + d\left(x_{n(k)-1}, x_{m(k)}\right) + d\left(y_{n(k)}, y_{n(k)-1}\right) + d\left(y_{n(k)-1}, y_{m(k)}\right)$$
$$\le\ d\left(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}\right) +\ d\left(y_{n(k)}, y_{n(k)-1}\right) + \varepsilon$$

Son eşitsizlikte $k \to \infty$ için limit alındığında ve Eş. 3.28 eşitsizliği kullanıldığında;

$$lim_{k\to\infty}\, r_k = lim_{k\to\infty}\left[\, d\left(x_{n(k)}, x_{m(k)}\right) + d\left(y_{n(k)}, y_{m(k)}\right)\right] = \varepsilon \qquad (3.31)$$

elde edilir. Üçgen eşitsizliğinden;

$$r_k =\ d\left(x_{n(k)}, x_{m(k)}\right) + d\left(y_{n(k)}, y_{m(k)}\right)$$
$$\le\ d\left(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}\right) + d\left(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1}\right) + d\left(x_{m(k)+1}, x_{m(k)}\right) + d\left(y_{n(k)}, y_{n(k)+1}\right) +$$
$$+ d\left(y_{n(k)+1}, y_{m(k)+1}\right) + d\left(y_{m(k)+1}, y_{m(k)}\right)$$
$$\le\ \delta_{n(k)} + \delta_{m(k)} + d\left(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1}\right) + d\left(y_{n(k)+1}, y_{m(k)+1}\right)$$

dir. φ dönüşümünün özelliğinden;

$$\varphi(\, r_k) \le \varphi(\delta_{n(k)} + \delta_{m(k)} + d\left(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1}\right) + d\left(y_{n(k)+1}, y_{m(k)+1}\right))$$
$$\le \varphi\left(\delta_{n(k)} + \delta_{m(k)}\right) + \varphi\left(d\left(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1}\right)\right) +$$
$$+ \varphi\left(d\left(y_{n(k)+1}, y_{m(k)+1}\right)\right) \qquad (3.32)$$

bulunur. $n(k) > m(k)$ olduğu için $x_{m(k)} \preccurlyeq x_{n(k)}$ ve $y_{m(k)} \succcurlyeq y_{n(k)}$ olur ki Eş. 3.14 ve Eş. 3.15 den;

$$\varphi\ \left(d\left(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1}\right)\right) = \varphi\ \left(d\left(F\left(x_{n(k)}, y_{n(k)}\right), F\left(x_{m(k)}, y_{m(k)}\right)\right)\right)$$
$$\le \frac{1}{2}\ \varphi\ \left(d\left(x_{n(k)}, x_{m(k)}\right) + d\left(y_{n(k)}, y_{m(k)}\right)\right) -$$
$$-\psi\left(\frac{d\left(x_{n(k)}, x_{m(k)}\right) + d\left(y_{n(k)}, y_{m(k)}\right)}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\ \varphi(\, r_k) - \psi\left(\frac{r_k}{2}\right) \qquad (3.33)$$

elde edilir. Benzer şekilde biz aynı zamanda;

$$\varphi\left(d\left(y_{m(k)+1}, y_{n(k)+1}\right)\right) = \varphi\left(d\left(F\left(y_{m(k)}, x_{m(k)}\right), F\left(y_{n(k)}, x_{n(k)}\right)\right)\right)$$
$$\leq \frac{1}{2}\varphi\left(d\left(x_{n(k)}, x_{m(k)}\right) + d\left(y_{n(k)}, y_{m(k)}\right)\right) -$$
$$-\psi\left(\frac{d\left(x_{n(k)}, x_{m(k)}\right) + d\left(y_{n(k)}, y_{m(k)}\right)}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\varphi(r_k) - \psi\left(\frac{r_k}{2}\right) \qquad (3.34)$$

elde edebiliriz. Eş. 3.32, Eş. 3.33 ve Eş. 3.34 eşitsizliklerinden;

$$\varphi(r_k) \leq \varphi\left(\delta_{n(k)} + \delta_{m(k)}\right) + \varphi(r_k) - 2\psi\left(\frac{r_k}{2}\right)$$

yazabiliriz. Eş. 3.28 ve Eş. 3.31 eşitsizliklerini kullanarak ve yukarıdaki son eşitsizliğin her iki tarafının $k \to \infty$ için limiti alınırsa;

$$\varphi(\varepsilon) \leq \varphi(0) + \varphi(\varepsilon) - 2\lim_{k\to\infty}\psi\left(\frac{r_k}{2}\right) = \varphi(\varepsilon) - 2\lim_{r_k\to\varepsilon}\psi\left(\frac{r_k}{2}\right) < \varphi(\varepsilon)$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde kabul yanlış $(x_n)\ ve\ (y_n)$ dizileri Cauchy dizileridir. X bir tam metrik uzay olduğundan *x, y* ∈ *X* var öyle ki

$$lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ ve } lim_{n\to\infty} y_n = y \qquad (3.35)$$

şeklinde yazılır. Şimdi hipotezimizdeki i) varsayımının doğru olduğunu kabul edelim. Eş. 3.15 eşitliklerinde $n \to \infty$ için limit alınır ve Eş. 3.35 eşitsizliği kullanılırsa;

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} F(x_{n-1}, y_{n-1}) = F(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}, \lim_{n\to\infty} y_{n-1}) = F(x, y)$$

ve

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} F(y_{n-1}, x_{n-1}) = F(\lim_{n\to\infty} y_{n-1}, \lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = F(y, x)$$

elde ederiz. Yani;

$x = F(x, y)$ ve $y = F(y, x)$

elde etmiş oluruz. Son olarak hipotezimizdeki ii) varsayımının doğru olduğunu kabul edelim. (x_n) azalmayan bir dizi ayrıca $x_n \to x$ ve (y_n) artmayan bir dizi olup $y_n \to y$ olduğundan her n için $x_n \preccurlyeq x$ ve $y_n \succcurlyeq y$ olur.

$$d\big(x, F(x, y)\big) \leq d(x, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, F(x, y))$$
$$= d(x, x_{n+1}) + d(F(x_n, y_n)), F(x, y))$$

olup bu yüzden;

$$\varphi\left(d\big(x, F(x, y)\big)\right) \leq \varphi\big(d(x, x_{n+1})\big) + \varphi(d(F(x_n, y_n)), F(x, y)))$$
$$\leq \varphi\big(d(x, x_{n+1})\big) + \frac{1}{2}\varphi\left(d(x_n, x) + d(y_n, y)\right) -$$
$$-\psi\left(\frac{d(x_n, x) + d(y_n, y)}{2}\right)$$

elde edilir ki yukarıdaki bu son eşitsizliğin her iki tarafının $n \to \infty$ için limiti alınır, Eş. 3.35 eşitsizliği ve ψ dönüşümünün özelliği kullanılırsa;

$$\varphi\left(d\big(x, F(x, y)\big)\right) = 0$$

yazılır. Buradan;

$d\big(x, F(x, y)\big) = 0$ elde edilir ki metrik özelliğinden $x = F(x, y)$ şeklinde yazılır. Benzer şekilde;

$$d\big(y, F(y, x)\big) \leq d(y, y_{n+1}) + d(y_{n+1}, F(y, x))$$
$$= d(y, y_{n+1}) + d(F(y_n, x_n)), F(y, x))$$

olup bu yüzden;

$$\varphi\left(d\big(y,F(y,x)\big)\right) \leq \varphi\big(d(y,y_{n+1})\big) + \varphi(d(F(y_n,x_n)),F(y,x)))$$

$$\leq \varphi\big(d(y,y_{n+1})\big) + \frac{1}{2}\,\varphi\left(d(y_n,y\,) + d(x_n,x\,)\right) -$$

$$-\psi\left(\frac{d(y_n,y\,) + d(x_n,x\,)}{2}\right)$$

elde edilir ki yukarıdaki bu son eşitsizliğin her iki tarafının $n \to \infty$ için limit alınır, Eş. 3.35 ve ψ dönüşümünün özelliği kullanılırsa;

$$\varphi\left(d\big(y,F(y,x)\big)\right) = 0$$

yazılır. Buradan $d\big(y,F(y,x)\big) = 0$ elde edilir ki metrik özelliğinden $y = F(y,x)$ şeklinde yazılır. Böylece F dönüşümünün bir ikili sabit noktaya sahip olduğunu göstermiş oluruz.

Teorem 3.11, F dönüşümünün ikili sabit noktasının tekliğini garanti etmez. Şimdi ise ikili sabit noktanın tekliğini elde edebileceğimiz teoremi ifade ve ispat edelim [26]:

3.1.12. Teorem

Teorem 3.1.11 nin hipotezlerine ek olarak her (x,y), $(z,t) \in X \times X$ için bir $(u,v) \in X \times X$ var öyle ki (u, v), (x, y) ve (z, t) ile karşılaştırılabilirdir. O zaman F dönüşümü X de bir tek ikili sabit noktaya sahiptir.

İspat

Teorem 3.1.11 nin ispatında olduğu gibi yapılarak gösterilebilir ki F dönüşümü ikili sabit noktaya sahiptir. Kabul edelim ki (x, y) ve (z, t), F dönüşümünün ikili sabit noktası olsun.

Yani;

$x = F(x,y)$, $y = F(y,x)$ ve $z = F(z,\ t)$, $t = F(t,\ z)$

şeklinde olsun. Biz göstermeliyiz ki $x = z$ ve $y = t$ şeklindedir. Kabulümüzden bir $(u, v) \in X \times X$ var öyle ki (u, v), (x, y) ve (z, t) ile karşılaştırılabilirdir. (u_n) ve (v_n) dizilerini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

Her n için $u_0 = u$, $v_0 = v$, $u_{n+1} = F(u_n, v_n)$ ve $v_{n+1} = F(v_n, u_n)$.

(u, v), (x, y) ile karşılaştırılabilir olduğundan biz kabul edebiliriz ki $(x,\ y) \succcurlyeq (u,\ v) = (u_0,\ v_0)$ şeklindedir. Matematiksel tümevarım metodunu kullanarak her n için $(x, y) \succcurlyeq (u_n, v_n)$ olduğunu görebiliriz. Gerçekten;

$n =\ 0$ için $(x, y) \succcurlyeq (u_0, v_0)$ (Kabulümüzden).
$n = 1$ için göstermeliyiz ki$(F(x, y), F(y, x)) = (x, y) \succcurlyeq (u_1, v_1) = (F(u_0, v_0), F(v_0, u_0))$ şeklindedir. F dönüşümün karma monotonluk özelliğinden;

$F(x, y) \succcurlyeq F(u_0, v_0)$ ve $F(y, x) \preccurlyeq F(v_0, u_0)$

olup $X \times X$ üzerinde tanımlanan sıralama bağıntısından;

$\big(F(x, y), F(y, x)\big) = (x, y) \succcurlyeq (u_1, v_1) = (F(u_0, v_0), F(v_0, u_0))$

elde edilir. $n = k$ için $(x, y) \succcurlyeq (u_k, v_k)$ olsun. F dönüşümün karma monotonluk özelliğinden;

$F(x, y) \succcurlyeq F(u_k, v_k)$ ve $F(y, x) \preccurlyeq F(v_k, u_k)$

olup $X \times X$ üzerinde tanımlanan sıralama bağıntısından;

$(F(x, y), F(y, x)) = (x, y) \succcurlyeq (u_{k+1}, v_{k+1}) = (F(u_k, v_k), F(v_k, u_k))$

elde edilir. Böylece her n için;

$(x, y) \succcurlyeq (u_n, v_n)$ (3.36)

olduğunu göstermiş oluruz. Eş 3.14 ve Eş. 3.36 dan;

$$\varphi\big(d(x,u_{n+1})\big) = \varphi\left(d\big(F(x,y),F(u_n,v_n)\big)\right)$$
$$\leq \frac{1}{2}\varphi\big[\big(d(x,u_n)+d(y,v_n)\big)\big] - \psi\left(\frac{d(x,u_n)+d(y,v_n)}{2}\right) \qquad (3.37)$$

ve benzer şekilde;

$$\varphi\big(d(v_{n+1},y)\big) = \varphi\left(d\big(F(v_n,u_n),F(y,x)\big)\right)$$
$$\leq \frac{1}{2}\,\varphi\big[\big(d(v_n,y\,)+d(u_n,x)\big)\big] - \Psi\left(\frac{d(v_n,y\,)+d(u_n,x)}{2}\right) \qquad (3.38)$$

elde edilir. Eş. 3.37, Eş. 3.38 ve φ dönüşümünün (iii) özelliğinden;

$$\varphi(d(x,u_{n+1})+d(y,v_{n+1})) \leq \varphi(d(x,u_{n+1})) + \varphi(d(y,v_{n+1}))$$
$$\leq \varphi(d(x,u_n)+d(y,v_n)) - 2\psi\left(\frac{d(x,u_n)+d(y,v_n)}{2}\right) \qquad (3.39)$$

olur ki buradan;

$$\varphi(d(x,u_{n+1})+d(y,v_{n+1})) \leq \varphi(d(x,u_n)+d(y,v_n))$$

elde edilir. φ dönüşümünün azalmayan olmasından;

$$d(x,u_{n+1})+d(y,v_{n+1}) \leq\ d(x,u_n)+d(y,v_n)$$

şeklinde yazabiliriz. Yani, $(\mathrm{d}(\mathrm{x},u_n)+\mathrm{d}(\mathrm{y},v_n))$ dizisi azalandır. Bu yüzden bir $\alpha \geq 0$ sayısı var öyle ki;

$$lim_{n\to\infty}[\,d(x,u_n)+d(y,v_n)] = \alpha \qquad (3.40)$$

yazabiliriz. Şimdi göstermeliyiz ki $\alpha = 0$ dir. Kabul edelim ki $\alpha > 0$ olsun. Eş. 3.39 eşitsizliğinde her iki tarafın $n \to \infty$ için limit alınırsa;

$$\varphi(\alpha) \leq \varphi(\alpha) - 2 \lim_{n\to\infty} \psi\left(\frac{\mathrm{d(x,}u_n) + \mathrm{d(y,}v_n)}{2}\right) < \varphi(\alpha)$$

olup bu bir çelişkidir. O halde kabul yanlış $\alpha = 0$ 'dir. Yani;

$$\lim_{n\to\infty}[\, d(x,u_n) + d(y,v_n)] = 0$$

olur. Buradan söylenebilir ki;

$$lim_{n\to\infty}\ d(x,u_n) = \lim_{n\to\infty} d(y,v_n) = 0 \qquad (3.41)$$

şeklindedir. Benzer şekilde gösterilebilir ki;

$$\lim_{n\to\infty}\ d(z,u_n) = \lim_{n\to\infty} d(t,v_n) = 0 \qquad (3.42)$$

dir. Eş. 3.41 ve Eş.3.42 den $x = z$ ve $y = t$ elde edilir.

Şimdi de F dönüşümünün bir tek olan ikili sabit noktasının bileşenlerinin eşit olması için gerekli olan ek şartı verelim [26]:

3.1.13. Teorem

Teorem 3.1.12 nin hipotezlerine ek olarak eğer x_0 ile y_0 karşılaştırılabilir ise F dönüşümünün sahip olduğu ikili sabit noktasının bileşenleri eşittir.

İspat

Teorem 3.1.12 nin ispatında yapıldığı gibi F dönüşümünün bir tek (x, y) ikili sabit noktaya sahip olduğu gösterilebilir. Biz sadece göstermeliyiz ki $x = y$ dir. Hipotezimizde x_0 ile y_0 karşılaştırılabilir olduğundan $x_0 \succcurlyeq y_0$ kabul edebiliriz. Her $n = 0, 1, 2, \ldots$ için $x_{n+1} = F(x_n, y_n)$ ve $y_{n+1} = F(y_n, x_n)$ şeklindeki (x_n) ve (y_n) dizilerini tanımladığımızda matematiksel tümevarım metodu ile gösterebiliriz ki her $n \geq 0$ için;

$$x_n \succcurlyeq y_n \tag{3.43}$$

şeklindedir.

Üçgen eşitsizliğini kullanarak;

$$\begin{aligned} d(x,y) &\le d(x,x_{n+1}) + d(x_{n+1},y_{n+1}) + d(y_{n+1},y) \\ &= d(x,x_{n+1}) + d(y_{n+1},y) + d(F(x_n,y_n),F(y_n,x_n)) \end{aligned}$$

elde edilir ki φ dönüşümünün azalmayan olmasından ve (iii) özelliğinden;

$$\begin{aligned} \varphi(d(x,y)) &\le \varphi(d(x,x_{n+1}) + d(y_{n+1},y)) + \varphi(d\big(F(x_n,y_n),F(y_n,x_n)\big)) \\ &\le \varphi\big(d(x,x_{n+1}) + d(y_{n+1},y)\big) + \frac{1}{2}\varphi\big[\big(d(x_n,y_n) + d(y_n,x_n)\big)\big] - \\ &\qquad - \psi\left(\frac{d(x_n,y_n) + d(y_n,\ x_n)}{2}\right) \\ &= \varphi\big(d(x,x_{n+1}) + d(y_{n+1},y)\big) + \frac{1}{2}\varphi[d(x_n,y_n) + d(y_n,x_n)] - \psi\big(d(x_n,y_n)\big) \\ &\le \varphi\big(d(x,x_{n+1}) + d(y_{n+1},y)\big) + \varphi(d(x_n,y_n)) - \psi\big(d(x_n,y_n)\big) \end{aligned} \tag{3.44}$$

elde edilir. Kabul edelim ki $x \neq y$ yani; $d(x,y) > 0$ olsun. Eş. 3.44 eşitsizliğinde her iki tarafın $n \to \infty$ için limiti alınırsa;

$$\varphi(d(x,y)) \le \varphi(0) + \varphi(d(x,y)) - \lim_{n\to\infty} \Psi\big(d(x_n,y_n)\big)$$

yazılabilir ki buradan;

$$\lim_{n\to\infty} \Psi\big(d(x_n,y_n)\big) \le 0$$

olur ki bu bir çelişkidir. O halde kabul yanlış $x = y$ şeklindedir.

3.1.1. Sonuç

(X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme ve (X, d) bir tam metrik uzay olsun. $F : X \times X \to X$ dönüşümü X üzerinde karma monotonluk özelliğine sahip bir dönüşüm olsun ve kabul edelim ki $x_0, y_0 \in X$ var öyle ki $x_0 \preccurlyeq F(x_0, y_0)$ ve $y_0 \succcurlyeq F(y_0, x_0)$ şeklinde olsun. Kabul edelim ki $\psi \in \Psi$ olmak üzere $x \succcurlyeq u$ ve $y \preccurlyeq v$ olacak şekildeki her $x,\ y,\ u,\ v \in X$ için ;

$$d\big(F(x,y),F(u,v)\big) \leq \frac{1}{2}\ \big(d(x,u) + d(y,v)\big) - \Psi(\frac{d(x,u)+d(y,v)}{2})$$

eşitsizliği sağlansın. Ayrıca kabul edelim ki

i) F süreklidir,
ya da
(ii) X deki $x_n \to x$ olacak şekildeki azalmayan her (x_n) dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preccurlyeq x$,
X deki $y_n \to y$ olacak şekildeki artmayan her (y_n) dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ için $y \preccurlyeq y_n$.

şeklinde olsun. Her $(x, y), (z, t) \in X \times X$ için bir $(u, v) \in X \times X$ var öyle ki (u, v), (x, y) ve (z, t) ile karşılaştırılabilirdir. Bunun yanında kabul edelim ki x_0 ile y_0 karşılaştırılabilir olsun. O zaman F dönüşümü X de bir ikili sabit noktaya sahiptir ve sahip olduğu ikili sabit noktasının bileşenleri eşittir.

İspat

Teorem 3.1.13 de $\varphi(t) = t$ alınırsa istenilen gösterilmiş olur.

Teorem 3.1.13 de $\varphi(t) = t$ ve $\Psi(t) = (1-\alpha)t$ alınırsa Bhaskar ve Lakshmikantham tarafından ortaya konan çalışma elde edilir. Böylece Bhaskar ve Lakshmikantham nın çalışması Luong ve Thuan nın çalışmasının bir özel halidir.

Skof [27] ve Delbosco [28] aşağıdaki özelliklere sahip $\varphi: R^+ \to R^+$ fonksiyonlarını kullanarak tam metrik uzaylar üzerinde tanımlı $f: X \to X$ dönüşümü için sabit nokta teoremini ispatlamışlardır:

(1) φ, R^+ üzerinde sürekli ve artandır,
(2) $\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$,
(3) Her $t > 0$ için $\varphi(t) \geq Mt^{\mu}$ olacak şekilde $M, \mu > 0$ sabitleri vardır.

Biz yukarıdaki φ fonksiyonlarının ailesini Φ ile tanımlayalım. Skof aşağıdaki teoremi ispatlamıştır [27]:

3.1.14. Teorem

(X, d) bir tam metrik uzay, $f: X \to X$ bir dönüşüm ve $\varphi \in \Phi$ fonksiyonu için $0 \leq a + b + c < 1$ olmak üzere her $x, y \in X$ için;

$$\varphi\big(d(fx, fy)\big) \leq a\varphi\big(d(x, y)\big) + b\varphi\big(d(x, fx)\big) + c\varphi\big(d(y, fy)\big) \tag{3.45}$$

eşitsizliği sağlansın. O halde f bir tek sabit noktaya sahiptir.

Eş. 3.45 ile belirtilen eşitsizlikte d metriğinin simetri özelliğinden dolayı $b = c$ kabul edebiliriz. Khan ve arkadaşları, Skof nin çalışmasındaki Eş. 3.45 şartındam daha genel bir durumu çalışmış ve $\varphi \in \Phi$ fonksiyonunun sağladığı (3) özelliği olmadan da aynı sonucu elde etmişlerdir. Böylece Khan ve arkadaşları uzaklık değiştiren fonksiyonlar kavramını ortaya koyarak aşağıdaki teoremi ispatlamışlardır [21]:

3.1.15. Teorem

(X, d) bir tam metrik uzay, $\varphi: R^+ \to R^+$ azalmayan, sürekli ve (2) özelliğini sağlayan bir dönüşüm olsun. Ayrıca $a, b, c: R^+ \backslash \{0\} \to [0, 1)$ artmayan fonksiyonları her $t > 0$ için $a(t) + 2b(t) + c(t) < 1$ olacak şekilde tanımlı olsun. Kabul edelim ki $f : X \to X$ dönüşümü $x \neq y$ olacak şekildeki her $x,\ y \in X$ için;

$$\varphi\big(d(fx, fy)\big) \leq a\big(d(x, y)\big)\varphi\big(d(x, y)\big) + b\big(d(x, y)\big)\big[\varphi\big(d(x, fx)\big) + \varphi\big(d(y, fy)\big)\big] + \\ + c\big(d(x, y)\big)\, min\big\{\varphi\big(d(x, fy)\big), \varphi\big(d(y, fx)\big)\big\} \tag{3.46}$$

eşitsizliğini sağlasın. O halde f bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat

$x_0 = fx_0$ ise ispat açıktır. Kabul edelim ki $x_0 \neq fx_0$ olsun. Her $n \geq 0$ için $x_{n+1} = f(x_n)$ olacak şekilde tanımlı (x_n) dizisini tanımlayalım. En az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için $x_{n_0} = x_{n_0+1}$ ise ispat tamamlanır. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n+1}$ olup;

$$\begin{aligned}\varphi\big(d(x_{n+2}, x_{n+1})\big) &= \varphi\big(d(fx_{n+1}, fx_n)\big) \\ &\leq a\big(d(x_{n+1}, x_n)\big)\varphi\big(d(x_{n+1}, x_n)\big) + \\ &\quad + b\big(d(x_{n+1}, x_n)\big)\big[\varphi\big(d(x_{n+1}, fx_{n+1})\big) + \varphi\big(d(x_n, fx_n)\big)\big] + \\ &\quad + c(d(x_{n+1}, x_n))min\{\varphi\big(d(x_n, fx_{n+1})\big), \varphi\big(d(x_{n+1}, fx_n)\big)\} \\ &= a\big(d(x_{n+1}, x_n)\big)\varphi\big(d(x_{n+1}, x_n)\big) + \\ &\quad + b\big(d(x_{n+1}, x_n)\big)\big[\varphi\big(d(x_{n+1}, x_{n+2})\big) + \varphi\big(d(x_n, x_{n+1})\big)\big]\end{aligned}$$

olup buradan;

$$\begin{aligned}(1 - b\big(d(x_{n+1}, x_n)\big))\varphi\big(d(x_{n+2}, x_{n+1})\big) &\leq \\ &\leq \big[a\big(d(x_{n+1}, x_n)\big) + b\big(d(x_{n+1}, x_n)\big)\big]\varphi\big(d(x_n, x_{n+1})\big) \\ \varphi\big(d(x_{n+2}, x_{n+1})\big) &\leq \frac{\big[a\big(d(x_{n+1}, x_n)\big) + b\big(d(x_{n+1}, x_n)\big)\big]\varphi\big(d(x_n, x_{n+1})\big)}{1 - b(d(x_{n+1}, x_n))}\end{aligned}$$

olup a, b, c fonksiyonlarının tanımından;

$$\varphi\big(d(x_{n+2}, x_{n+1})\big) < \varphi\big(d(x_n, x_{n+1})\big)$$

yazılır ki φ azalmayan olduğundan;

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) < d(x_n, x_{n+1})$$

elde edilir. $\tau_n = d(x_n, x_{n+1})$ olarak tanımlanırsa (τ_n) reel sayı dizisi alttan sınırlı ve azalan olduğundan öyle bir $\tau^* \geq 0$ sayısı var öyle ki;

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n = \tau^*$$

dir. Şimdi gösterelim ki $\tau^* = 0$ dır. Kabul edelim ki $\tau^* > 0$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\tau_n \geq \tau^*$ olup a ve b fonksiyonları artmayan olduğundan;

$a(\tau_n) \leq a(\tau^*)$ ve $b(\tau_n) \leq b(\tau^*)$ şeklindedir. Buna göre;

$$\varphi\big(d(x_{n+2}, x_{n+1})\big) \leq \frac{\big[a\big(d(x_{n+1}, x_n)\big) + b\big(d(x_{n+1}, x_n)\big)\big]\varphi\big(d(x_n, x_{n+1})\big)}{1 - b(d(x_{n+1}, x_n))}$$

$$\Rightarrow \varphi(\tau_{n+1}) = \frac{[a(\tau_n) + b(\tau_n)]\varphi(\tau_n)}{1 - b(\tau_n)}$$

$$\leq \frac{[a(\tau^*) + b(\tau^*)]\varphi(\tau_n)}{1 - b(\tau^*)}$$

$n \to \infty$ için limit alınırsa;

$\varphi(\tau^*) < \varphi(\tau^*)$

olup bu bir çelişkidir. O halde kabul yanlış $\tau^* = 0$ dır. Gösterelim ki (x_n) bir Cauchy dizisidir. Kabul edelim ki olmasın. Bu durumda bir $\varepsilon > 0$ var öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için $p(n) > q(n) \geq n$ ve $d\big(x_{p(n)}, x_{q(n)}\big) \geq \varepsilon$ olacak şekilde $(p(n))$ ve $(q(n))$ dizileri vardır. Burada $n \in \mathbb{N}$ için $p(n), q(n)$ e karşılık gelen ve $d\big(x_{p(n)}, x_{q(n)}\big) \geq \varepsilon$ olacak şekildeki en küçük tamsayı olsun. Bu durumda $d\big(x_{p(n)-1}, x_{q(n)}\big) < \varepsilon$ şeklindedir. Her $n \in \mathbb{N}$ için;
$s_n = d\big(x_{p(n)}, x_{q(n)}\big)$ olacak şekilde (s_n) dizisini tanımlayalım.

$$\varepsilon \leq d\big(x_{p(n)}, x_{q(n)}\big) \leq d\big(x_{p(n)}, x_{p(n)-1}\big) + d\big(x_{p(n)-1}, x_{q(n)}\big)$$
$$< \varepsilon + d\big(x_{p(n)}, x_{p(n)-1}\big)$$

olup $n \to \infty$ için limit alınırsa;

$lim_{n\to\infty} s_n = \varepsilon$

elde edilir. Ayrıca üçgen eşitsizliğinden;

$$-d\big(x_{p(n)}, x_{p(n)+1}\big) - d\big(x_{q(n)}, x_{q(n)+1}\big) + d\big(x_{p(n)}, x_{q(n)}\big) \leq$$

$$\leq d\left(x_{p(n)+1}, x_{q(n)+1}\right)$$
$$\leq d\left(x_{p(n)}, x_{p(n)+1}\right) + d\left(x_{q(n)}, x_{q(n)+1}\right) + d\left(x_{p(n)}, x_{q(n)}\right)$$

olup buradan;

$$\lim_{n\to\infty} d\left(x_{p(n)+1}, x_{q(n)+1}\right) = \varepsilon$$

elde edilir. Eş. 3.46 dan;

$$\varphi\left(d\left(x_{p(n)+1}, x_{q(n)+1}\right)\right) = \varphi\left(d\left(fx_{p(n)}, fx_{q(n)}\right)\right)$$
$$\leq a\left(d\left(x_{p(n)}, x_{q(n)}\right)\right)\varphi\left(d\left(x_{p(n)}, x_{q(n)}\right)\right) +$$
$$+b\left(d\left(x_{p(n)}, x_{q(n)}\right)\right)\left[\varphi\left(d\left(x_{p(n)}, x_{p(n)+1}\right)\right) + \varphi\left(d\left(x_{q(n)}, x_{q(n)+1}\right)\right)\right] +$$
$$+c(d\left(x_{p(n)}, x_{q(n)}\right))min\{\varphi\left(d\left(x_{p(n)}, x_{q(n)+1}\right)\right), \varphi\left(d\left(x_{q(n)}, x_{p(n)+1}\right)\right)\}$$

yazılabilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $s_n \geq \varepsilon \Rightarrow a(s_n) \leq a(\varepsilon)$
$b(s_n) \leq b(\varepsilon)$
$c(s_n) \leq c(\varepsilon)$ olur. Buradan;

$$\varphi\left(d\left(x_{p(n)+1}, x_{q(n)+1}\right)\right) = \varphi\left(d\left(fx_{p(n)}, fx_{q(n)}\right)\right)$$
$$\leq a(\varepsilon)\varphi(s_n) +$$
$$+b(\varepsilon)\left[\varphi\left(\tau_{p(n)}\right) + \varphi\left(\tau_{q(n)}\right)\right] + c(\varepsilon)\,\varphi\left(\tau_{p(n)} + \tau_{q(n)} + s_n\right)$$

olup $n \to \infty$ için limit alınırsa;

$$\varphi(\varepsilon) \leq (a(\varepsilon) + c(\varepsilon))\,\varphi(\varepsilon) < \varphi(\varepsilon)$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde kabul yanlış $(x_n) \subseteq X$ bir Cauchy dizisidir. (X, d) bir tam metrik uzay olduğundan bir $z \in X$ var öyle ki $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ dir. Son olarak göstermeliyiz ki $fz = z$ dir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\tau_n > 0$ olduğundan (x_n) dizisinin bir $(x_{h(n)})$ alt dizisi var öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{h(n)} \neq z$ dir.

Her $n \in \mathbb{N}$ için, $\rho_n = d(z, x_n)$ olacak şekilde (ρ_n) dizisini oluşturalım. $b < \frac{1}{2}$ olduğu için Eş. 3.46 dan;

$$\begin{aligned}
\varphi\left(d\left(x_{h(n)+1}, fz\right)\right) &= \varphi\left(d\left(fx_{h(n)}, fz\right)\right) \\
&\leq a\left(d\left(x_{h(n)}, z\right)\right)\varphi\left(d\left(x_{h(n)}, z\right)\right) + \\
&\quad + b\left(d\left(x_{h(n)}, z\right)\right)\left[\varphi\left(d\left(x_{h(n)}, x_{h(n)+1}\right)\right) + \varphi\left(d(z, fz)\right)\right] + \\
&\quad + c(d\left(x_{h(n)}, z\right))min\{\varphi\left(d\left(x_{h(n)}, fz\right)\right), \varphi\left(d\left(z, x_{h(n)+1}\right)\right)\} \\
&= a\left(\rho_{h(n)}\right)\varphi\left(\rho_{h(n)}\right) + \\
&\quad + b\left(\rho_{h(n)}\right)\left[\varphi\left(\tau_{h(n)}\right) + \varphi\left(d(z, fz)\right)\right] + \\
&\quad + c(\rho_{h(n)})min\{\varphi\left(d\left(x_{h(n)}, fz\right)\right), \varphi\left(\rho_{h(n)+1}\right)\} \\
&< \varphi\left(\rho_{h(n)}\right) + \frac{1}{2}\left[\varphi\left(\tau_{h(n)}\right) + \varphi\left(d(z, fz)\right)\right] + \\
&\quad + min\{\varphi\left(d\left(x_{h(n)}, fz\right)\right), \varphi\left(\rho_{h(n)+1}\right)\}
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu son eşitsizlik her $n \in \mathbb{N}$ için geçerli olduğundan limitsup alınırsa;

$$\lim_{n\to\infty} sup\, \varphi\left(d\left(fz, x_{h(n)+1}\right)\right) \leq \frac{1}{2}\, \varphi\left(d(z, fz)\right) \tag{3.47}$$

elde edilir. Diğer taraftan üçgen eşitsizliğinden;

$$d(z, fz) \leq \rho_{h(n)} + \tau_{h(n)} + d\left(fz, x_{h(n)+1}\right)$$

olup her iki tarafın limsup alınırsa;

$$\varphi\left(d(z, fz)\right) \leq \lim_{n\to\infty} sup\, \varphi\left(d\left(fz, x_{h(n)+1}\right)\right) \tag{3.48}$$

elde edilir. Eş. 3.47 ve Eş. 3.48 göz önüne alınırsa;

$$\varphi\left(d\left(z, f(z)\right)\right) \leq \frac{1}{2}\varphi\left(d\left(z, f(z)\right)\right)$$

olur ki buradan $\varphi\left(d\left(z,f(z)\right)\right) = 0$ olup $d(z,f(z)) = 0$ elde edilir.

Şimdi f dönüşümünün sabit noktasının tekliğini gösterelim. Kabul edelim ki $x, y \in X$, f dönüşümün iki farklı sabit noktası olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned}\varphi\big(d(x,y)\big) &= \varphi\big(d(fx,fy)\big)\\ &\leq a\big(d(x,y)\big)\varphi\big(d(x,y)\big) + b\big(d(x,y)\big)\big[\varphi\big(d(x,fx)\big) + \varphi\big(d(y,fy)\big)\big] +\\ &\qquad + c(d(x,y))min\{\varphi\big(d(x,fy)\big)\big), \varphi\big(d(y,fx)\big)\}\\ &= \{a\big(d(x,y)\big) + c(d(x,y)\}\,\varphi\big(d(x,y)\big) < \varphi\big(d(x,y)\big)\end{aligned}$$

olup bu bir çelişkidir. O halde kabul yanlış f dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

3.1.2. Sonuç

(X, d) bir tam metrik uzay, $\varphi: R^+ \to R^+$ azalmayan, sürekli ve (2) özelliğini sağlayan bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $f : X \to X$ dönüşümü her $x, y \in X$ için bir $a \in [0,1)$ var öyle ki;

$$\varphi\big(d(fx,fy)\big) \leq a\varphi\big(d(x,y)\big)$$

eşitsizliğini sağlasın. O halde f bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat

Teorem 3.1.15 de yer alan Eş. 3.46 ile verilen eşitsizlikte b, c fonksiyonları özel olarak sıfır fonksiyonu ve her $t > 0$ için $a(t) = a,\ \ a \in [0,1)$ şeklinde alınırsa ispat tamamlanır.

Şimdi Khan ve arkadaşlarının yukarıdaki çalışmasındaki f fonksiyonunu monoton yapmak pahasına Eş. 3.46 yı daha da zayıflatabilmek ve çalışma alanını daha da genişletmek için Teorem 3.1.15 nin kısmi sıralı metrik uzaylardaki versiyonunu ifade ve ispat edelim:

3.1.16. Teorem

(X, ≼) kısmi sıralı bir küme, (X, d) bir tam metrik uzay, $\varphi: R^+ \to R^+$ azalmayan, sürekli ve (2) özelliğini sağlayan bir dönüşüm olsun. Bunun yanında $a, b, c: \mathrm{R}^+\backslash\{0\} \to [0, 1)$ artmayan fonksiyonları her $t > 0$ için $a(t) + 2b(t) + c(t) < 1$ olacak şekilde tanımlı olsun. Kabul edelim ki $f: X \to X$ sürekli, azalmayan dönüşümü birbirinden farklı karşılaştırılabilir her $x, y \in X$ için;

$$\varphi\big(d(fx,fy)\big) \le a\big(d(x,y)\big)\varphi\big(d(x,y)\big) + b\big(d(x,y)\big)\big[\varphi\big(d(x,fx)\big) + \varphi\big(d(y,fy)\big)\big] + \\ + c\big(d(x,y)\big)\, min\big\{\varphi\big(d(x,fy)\big), \varphi\big(d(y,fx)\big)\big\} \quad (3.49)$$

eşitsizliğini sağlasın. $x_0 \preccurlyeq fx_0$ olacak şekilde $x_0 \in X$ var ise f dönüşümü X üzerinde bir sabit noktaya sahiptir.

İspat

$x_0 = fx_0$ ise ispat biter. Kabul edelim ki $x_0 \neq fx_0$ olsun.

$x_0 \preccurlyeq fx_0$ ve f dönüşümü azalmayan olduğundan;

$x_0 \preccurlyeq fx_0 \preccurlyeq f^2x_0 \ldots \preccurlyeq f^nx_0 \preccurlyeq f^{n+1}x_0 \preccurlyeq \cdots$

şeklinde elde edilir. Her $n \ge 0$ için $x_{n+1} = fx_n$ olacak şekilde tanımlı (x_n) dizisini tanımlayalım. Her $n \ge 0$ için $x_n \preccurlyeq x_{n+1}$ olup eğer en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için $x_{n_0} = x_{n_0+1}$ ise ispat tamamlanır. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathrm{x_n} \preccurlyeq \mathrm{x_{n+1}}$ ve $x_n \neq x_{n+1}$ olduğundan;

$$\begin{aligned}\varphi\big(d(x_{n+2},x_{n+1})\big) &= \varphi\big(d(fx_{n+1},fx_n)\big) \\ &\le a\big(d(x_{n+1},x_n)\big)\varphi\big(d(x_{n+1},x_n)\big) + \\ &\quad + b\big(d(x_{n+1},x_n)\big)\big[\varphi\big(d(x_{n+1},fx_{n+1})\big) + \varphi\big(d(x_n,fx_n)\big)\big] + \\ &\quad + c(d(x_{n+1},x_n))min\{\varphi\big(d(x_n,fx_{n+1})\big), \varphi\big(d(x_{n+1},fx_n)\big)\} \\ &= a\big(d(x_{n+1},x_n)\big)\varphi\big(d(x_{n+1},x_n)\big) + \\ &\quad + b\big(d(x_{n+1},x_n)\big)\big[\varphi\big(d(x_{n+1},x_{n+2})\big) + \varphi\big(d(x_n,x_{n+1})\big)\big]\end{aligned}$$

olup buradan;

$$(1 - b\big(d(x_{n+1}, x_n)\big))\varphi\big(d(x_{n+2}, x_{n+1})\big) \leq$$

$$\leq \big[a\big(d(x_{n+1}, x_n)\big) + b\big(d(x_{n+1}, x_n)\big)\big]\varphi\big(d(x_n, x_{n+1})\big)$$

$$\varphi\big(d(x_{n+2}, x_{n+1})\big) \leq \frac{\big[a\big(d(x_{n+1}, x_n)\big) + b\big(d(x_{n+1}, x_n)\big)\big]\varphi\big(d(x_n, x_{n+1})\big)}{1 - b(d(x_{n+1}, x_n))}$$

olup a, b, c fonksiyonlarının tanımından;

$$\varphi\big(d(x_{n+2}, x_{n+1})\big) < \varphi\big(d(x_n, x_{n+1})\big)$$

yazılır ki φ azalmayan olduğundan;

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) < d(x_n, x_{n+1})$$

elde edilir. $\tau_n = d(x_n, x_{n+1})$ olarak tanımlanırsa (τ_n) reel sayı dizisi alttan sınırlı ve azalan olduğundan bir $\tau^* \geq 0$ sayısı var öyle ki;

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n = \tau^*$$

dir. Şimdi gösterelim ki $\tau^* = 0$ dır. Kabul edelim ki $\tau^* > 0$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\tau_n \geq \tau^*$ olup a ve b fonksiyonları artmayan olduğundan;

$$a(\tau_n) \leq a(\tau^*) \text{ ve } b(\tau_n) \leq b(\tau^*)$$

şeklindedir. Buna göre;

$$\varphi\big(d(x_{n+2}, x_{n+1})\big) \leq \frac{\big[a\big(d(x_{n+1}, x_n)\big) + b\big(d(x_{n+1}, x_n)\big)\big]\varphi\big(d(x_n, x_{n+1})\big)}{1 - b(d(x_{n+1}, x_n))}$$

$$\Rightarrow \varphi(\tau_{n+1}) \leq \frac{[a(\tau_n) + b(\tau_n)]\varphi(\tau_n)}{1 - b(\tau_n)}$$

$$\leq \frac{[a(\tau^*) + b(\tau^*)]\varphi(\tau_n)}{1 - b(\tau^*)}$$

$n \to \infty$ için limit alınırsa;

$$\varphi(\tau^*) < \varphi(\tau^*)$$

olup bu bir çelişkidir. O halde kabul yanlış $\tau^* = 0$ dır. Gösterelim ki (x_n) bir Cauchy dizisidir. Kabul edelim ki olmasın. Bu durumda bir $\varepsilon > 0$ var öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için $p(n) > q(n) \geq n$ ve $d\left(x_{p(n)}, x_{q(n)}\right) \geq \varepsilon$ olacak şekilde $(p(n))$ ve $(q(n))$ dizileri vardır. Burada $n \in \mathbb{N}$ için $p(n)$, $q(n)$ e karşılık gelen ve $d\left(x_{p(n)}, x_{q(n)}\right) \geq \varepsilon$ olacak şekildeki en küçük tamsayı olarak kabul edebiliriz. Bu durumda $d\left(x_{p(n)-1}, x_{q(n)}\right) < \varepsilon$ şeklindedir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $s_n = d\left(x_{p(n)}, x_{q(n)}\right)$ olacak şekilde (s_n) dizisini tanımlayalım. Buna göre;

$$\begin{aligned}\varepsilon \leq d\left(x_{p(n)}, x_{q(n)}\right) &\leq d\left(x_{p(n)}, x_{p(n)-1}\right) + d\left(x_{p(n)-1}, x_{q(n)}\right) \\ &< \varepsilon + d\left(x_{p(n)}, x_{p(n)-1}\right)\end{aligned}$$

olup $n \to \infty$ için limit alınırsa;

$$lim_{n\to\infty}\, s_n = \varepsilon$$

elde edilir. Ayrıca üçgen eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned}-d\left(x_{p(n)}, x_{p(n)+1}\right) - d\left(x_{q(n)}, x_{q(n)+1}\right) + d\left(x_{p(n)}, x_{q(n)}\right) \leq \\ \leq d\left(x_{p(n)+1}, x_{q(n)+1}\right) \leq \\ \leq d\left(x_{p(n)}, x_{p(n)+1}\right) + d\left(x_{q(n)}, x_{q(n)+1}\right) + d\left(x_{p(n)}, x_{q(n)}\right)\end{aligned}$$

olup buradan;

$$lim_{n\to\infty}\, d\left(x_{p(n)+1}, x_{q(n)+1}\right) = \varepsilon$$

elde edilir. En az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için $x_{p(n_0)} = x_{q(n_0)}$ olduğunu kabul edersek f dönüşümünün bir sabit noktaya sahip olduğunu göstermiş oluruz. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{p(n)} \neq x_{q(n)}$ ve $x_{q(n)} \preccurlyeq x_{p(n)}$ şeklindedir. Eş. 3.49 dan;

$$\varphi\left(d\left(x_{p(n)+1}, x_{q(n)+1}\right)\right) = \varphi\left(d\left(fx_{p(n)}, fx_{q(n)}\right)\right)$$
$$\leq a\left(d\left(x_{p(n)}, x_{q(n)}\right)\right)\varphi\left(d\left(x_{p(n)}, x_{q(n)}\right)\right) +$$
$$+b\left(d\left(x_{p(n)}, x_{q(n)}\right)\right)\left[\varphi\left(d\left(x_{p(n)}, x_{p(n)+1}\right)\right) + \varphi\left(d\left(x_{q(n)}, x_{q(n)+1}\right)\right)\right] +$$
$$+c(d\left(x_{p(n)}, x_{q(n)}\right))min\{\varphi\left(d\left(x_{p(n)}, x_{q(n)+1}\right)\right), \varphi\left(d\left(x_{q(n)}, x_{p(n)+1}\right)\right)\}$$

yazılabilir. Hipotezden a, b, c fonksiyonları artamayan olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için;

$$s_n \geq \varepsilon \Rightarrow a(s_n) \leq a(\varepsilon)$$
$$b(s_n) \leq b(\varepsilon)$$
$$c(s_n) \leq c(\varepsilon)$$

yazılabilir. Buradan;

$$\varphi\left(d\left(x_{p(n)+1}, x_{q(n)+1}\right)\right) = \varphi\left(d\left(fx_{p(n)}, fx_{q(n)}\right)\right)$$
$$\leq a(\varepsilon)\varphi(s_n) +$$
$$+b(\varepsilon)\left[\varphi\left(\tau_{p(n)}\right) + \varphi\left(\tau_{q(n)}\right)\right] + c(\varepsilon)\,\varphi\left(\tau_{p(n)} + \tau_{q(n)} + s_n\right)$$

olup $n \to \infty$ için limit alınırsa;

$$\varphi(\varepsilon) \leq (a(\varepsilon) + c(\varepsilon))\,\varphi(\varepsilon) < \varphi(\varepsilon)$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde kabul yanlış $(x_n) \subseteq X$ bir Cauchy dizisidir.

(X, d) bir tam metrik uzay olduğundan bir $z \in X$ var öyle ki $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ dir. Son olarak göstermeliyiz ki $fz = z$ dir. f dönüşümü sürekli olduğundan;

$$z = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} fx_n = f \lim_{n\to\infty} x_n = fz$$

yazılabilir ki böylece $z \in X$, f dönüşümünün sabit noktasıdır.

Örnek

$X = \{(-1,0), \left(0, \frac{1}{2}\right), (0,1)\}$ şeklinde tanımlanan X kümesi üzerinde aşağıdaki sıralama bağıntısını tanımlayalım:

$(x,y) \preccurlyeq (z,t) \Leftrightarrow x \leq z$ ve $y \geq t.$

Bu şekilde tanımlanan sıralama bağıntısı ile X kısmi sıralı bir kümedir. Euclidean metriği ile X bir tam metrik uzaydır.

$\varphi: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$t \longrightarrow \varphi(t) = t^2$ şeklinde tanımlanan φ fonksiyonu sürekli, azalmayan ve (2) özelliğini sağlayan bir dönüşümdür.

$$a(t) = \frac{3}{4}$$
$$b(t) = 0$$
$$c(t) = \frac{1}{5}$$

şeklinde tanımlanan a, b ve c fonksiyonları artmayandır.

$f : X \to X$, $f((-1,0)) = (-1,0)$

$$f\left(\left(0, \frac{1}{2}\right)\right) = (0, \frac{1}{2})$$

$$f\big((0,1)\big) = (0, \frac{1}{2})$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu azalmayan ve süreklidir. Eş. 3.46 ile verilen eşitsizlik $x = (-1,\ 0)$ ve $y = (0,\ \frac{1}{2})$ için sağlanmazken Eş. 3.49 sağlanır. O halde Teorem 3.1.15 ile f dönüşümünün sabit noktasının varlığı gösterilemezken Teorem 3.1.16 ile gösterilebilir.

3.1.3. Sonuç

(X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme, (X, d) bir tam metrik uzay, $\varphi: R^+ \to R^+$ azalmayan, sürekli ve (2) özelliğini sağlayan bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $f: X \to X$ sürekli, azalmayan dönüşümü karşılaştırılabilir her $x, y \in X$ için bir $a \in [0, 1)$ var öyle ki

$$\varphi\big(d(fx, fy)\big) \leq a\varphi\big(d(x, y)\big)$$

eşitsizliğini sağlasın. $x_0 \preccurlyeq fx_0$ olacak şekilde $x_0 \in X$ var ise f dönüşümü X üzerinde bir sabit noktaya sahiptir.

İspat

Teorem 3.1.16 da yer alan Eş. 3.49 ile belirtilen eşitsizlikte b, c fonksiyonları özel olarak sıfır fonksiyonu ve her $t > 0$ için $a(t) = a$, $a \in [0, 1)$ şeklinde alınırsa ispat tamamlanır.

Büzülme ilkesinin bir başka genellemesi Alber ve Guerre-Delabriere tarafından Hilbert uzaylarda yapıldı [29]. Bunu ortaya koydukları büzülebilir dönüşümleri tarafından kapsanan aynı zamanda büzülme dönüşümlerini kapsayan yeni bir büzülebilir dönüşümler sınıfı olan zayıf büzülebilir dönüşüm tanımı yardımıyla gerçekleştirmişlerdir. Ancak Rhoades onların çalışmalarının herhangi tam metrik uzaylarda geçerli olduğunu göstermiştir. Şimdi bu sonucu ifade ve ispat edelim [30]:

3.1.17. Teorem

(X, d) bir tam metrik uzay, $f: X \to X$ şeklinde tanımlı dönüşüm, $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ sürekli, azalmayan dönüşümü $\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ olmak üzere her $x, y \in X$ için;

$$d(fx, fy) \leq d(x, y) - \varphi(d(x, y))$$

eşitsizliğini sağlasın. O zaman f dönüşümü X de bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat

$x_0 \in X$ keyfi olsun ve her $n \in N$ için $x_{n+1} = fx_n$ olacak şekildeki (x_n) dizisini tanımlayalım. O zaman f dönüşümünün zayıf büzülebilir olma tanımından;

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq d(fx_n, fx_{n+1}) \leq d(x_n, x_{n+1}) - \varphi(d(x_n, x_{n+1}))$$

olup her $n \in \mathbb{N}$ için $\rho_n = d(x_n, x_{n+1})$ olacak şekilde tanımlanırsa;

$$\rho_{n+1} \leq \rho_n - \varphi(\rho_n) \leq \rho_n \tag{3.50}$$

eşitsizliği elde edilir. Buna göre (ρ_n) negatif olmayan reel sayıların artmayan bir dizisi olup ;

$$lim_{n\to\infty} \rho_n = \rho^*$$

olacak şekilde $\rho^* \geq 0$ vardır. Kabul edelim ki $\rho^* > 0$ olsun. φ azalmayan olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\varphi(\rho_n) \geq \varphi(\rho^*) > 0$ olur. Eş. 3.50 den;

$$\rho_{n+1} \leq \rho_n - \varphi(\rho^*) \tag{3.51}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik her $n \in \mathbb{N}$ için geçerli olduğundan $n \to \infty$ için limit alınırsa;

$$\rho^* \leq \rho^* - \varphi(\rho^*) < \rho^*$$

olup bu bir çelişkidir. O halde kabul yanlış $\rho^* = 0$ dır. Şimdi gösterelim ki (x_n) dizisi bir Cauchy dizisidir. $\varepsilon > 0$ ve N sayısını $d(x_N, x_{N+1}) < \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \varphi(\frac{\varepsilon}{2})\}$ olacak şekilde seçelim. $f: B(x_N, \varepsilon) \to B(x_N, \varepsilon)$ olduğunu gösterirsek istenileni ispatlamış oluruz.
$x \in B(x_N, \varepsilon)$ olsun.

İki durumda inceleyelim:

1. Durum: $d(x, x_N) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ olsun.

$$d(fx, x_N) \leq d(fx, fx_N) + d(fx_N, x_N) \leq d(x, x_N) - \varphi(d(x, x_N)) + d(x_{N+1}, x_N)$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2. Durum: $\frac{\varepsilon}{2} < d(x, x_N) < \varepsilon$ olsun. Bu durumda $\varphi(d(x, x_N)) \geq \varphi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ olur. Buna göre;

$$d(fx, x_N) \leq d(fx, fx_N) + d(fx_N, x_N) \leq d(x, x_N) - \varphi(d(x, x_N)) + d(x_{N+1}, x_N)$$
$$\leq d(x, x_N) - \varphi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + \varphi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$
$$\leq d(x, x_N) < \varepsilon$$

elde edilir ki buradan her $n > N$ için $x_n \in B(x_N, \varepsilon)$ yazılabilir. Böylece (x_n) dizisi bir Cauchy dizisidir. (X, d) bir tam metrik uzay olduğundan bir z ∈ X var öyle ki $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ şeklindedir. f dönüşümü sürekli olduğundan;

$$z = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} fx_n = f \lim_{n\to\infty} x_n = fz$$

yazılabilir ki böylece $z \in X$, f dönüşümünün sabit noktasıdır. Şimdi bu sabit noktanın tekliğini gösterelim. Kabul edelim ki $y \in X$, f dönüşümünün farklı bir sabit noktası olsun. Bu durumda;

$$d(y, z) = d(fy, fz) \leq d(y, z) - \varphi(d(y, z)) < d(y, z)$$

olur ki bu bir çelişkidir. O halde kabul yanlış f dönüşümünün sabit noktası tektir.

Şimdi yukarıda bahsettiğimiz Khan ve arkadaşları ile Rhoades tarafından Banach büzülme ilkesini genelleyen çalışmalarının Dutta ve Choudhury tarafından verilen genellemesini ifade ve ispat edelim [31]:

3.1.18. Teorem

(X, d) bir tam metrik uzay ve $f: X \to X$ dönüşümü, $\psi, \varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ sürekli, monoton azalmayan ve $\psi(t) = \varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere her $x, y \in X$ için;

$$\psi\big(d(fx,fy)\big) \leq \psi\big(d(x,y)\big) - \varphi(d(x,y)) \tag{3.52}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda f bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat

Herhangi bir $x_0 \in X$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = fx_{n-1}$ olacak şekildeki (x_n) dizisini tanımlayalım. Eş. 3.52 de $x = x_{n-1}$ ve $y = x_n$ olarak alınırsa;

$$\psi\big(d(x_n,x_{n+1})\big) \leq \psi\big(d(x_{n-1},x_n)\big) - \varphi(d(x_{n-1},x_n)) \tag{3.53}$$

elde edilir ki ψ fonksiyonunun monotonluğundan;

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq d(x_{n-1},x_n) \tag{3.54}$$

bulunur. O halde $(d(x_n,x_{n+1}))$ reel sayı dizisi monoton azalan olduğundan bir $r \geq 0$ sayısı var öyle ki;

$$lim_{n\to\infty}\, d(x_n,x_{n+1}) = r \tag{3.55}$$

olur. Eş. 3.53 de $n \to \infty$ için limit alınırsa;

$$\psi(r) \leq \psi(r) - \varphi(r) \tag{3.56}$$

elde edilir ki buradan $r = 0$ bulunur. Yani;

$$lim_{n\to\infty}\, d(x_n,x_{n+1}) = 0 \tag{3.57}$$

şeklindedir. Göstermeliyiz ki (x_n) dizisi bir Cauchy dizisidir. Kabul edelim ki (x_n) dizisi bir Cauchy dizisi olmasın. Bu durumda en az bir $\varepsilon > 0$ var öyle ki her k tamsayısı için $n(k) > m(k) > k$ ve

$$d(x_{m(k)},x_{n(k)}) \geq \varepsilon \tag{3.58}$$

olacak şekilde (x_n) dizisinin $(x_{n(k)})$ ve $(x_{m(k)})$ alt dizileri vardır. Bunun yanında $n(k)$ tamsayısını $m(k)$ sayısına karşılık gelen $n(k) > m(k)$ ve Eş. 3.58 eşitsizliğini sağlayan en küçük tamsayı olarak seçebiliriz. O zaman;

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) < \varepsilon \tag{3.59}$$

şeklinde elde edilir. Buna göre;

$$\begin{aligned} \varepsilon \leq d\big(x_{m(k)}, x_{n(k)}\big) &\leq d\big(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}\big) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) \\ &< \varepsilon + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) \end{aligned} \tag{3.60}$$

yazılabilir. Eş. 3.57 kullanılarak, Eş. 3.60 da $k \to \infty$ için limit alınırsa;

$$lim_{k\to\infty}\, d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \; = \varepsilon \tag{3.61}$$

elde edilir. Üçgen eşitsizliği ile;

$$d\big(x_{n(k)}, x_{m(k)}\big) \leq d\big(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}\big) + d\big(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}\big) + d(x_{m(k)-1}, x_{m(k)})$$

ve

$$d\big(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}\big) \leq d\big(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}\big) + d\big(x_{n(k)}, x_{m(k)}\big) + d(x_{m(k)-1}, x_{m(k)})$$

yazılabilir. Yukarıdaki son iki eşitsizlikte $k \to \infty$ için limit alınır ve Eş. 3.57, Eş. 3.61 kullanılırsa;

$$lim_{k\to\infty}\, d\big(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}\big) = \varepsilon \tag{3.62}$$

elde edilir. Eş. 3.52 de $x \; = x_{m(k)-1}, \; y \; = x_{n(k)-1}$ olarak alınır ve Eş. 3.58 kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \psi(\varepsilon) \leq \; \psi\Big(d\big(x_{m(k)}, x_{n(k)}\big)\Big) \; \leq \; \psi\Big(d\big(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}\big)\Big) - \\ - \varphi\Big(d\big(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}\big)\Big) \end{aligned} \tag{3.63}$$

yazılabilir ki burada $k \to \infty$ için limit alınır ve Eş. 3.61 ve Eş. 3.62 kullanılırsa;

$\psi(\varepsilon) \leq \psi(\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)$

olup buradan $\varepsilon = 0$ sonucuna ulaşılır ki bu bir çelişkidir. O halde kabul yanlış (x_n) dizisi bir Cauchy dizisidir. (X, d) bir tam metrik uzay olduğundan bir $z \in X$ var öyle ki;

$lim_{n\to\infty} x_n = z$ (3.64)

şeklindedir. Eş. 3.52 de $x = x_{n-1}$, $y = z$ olarak alınırsa;

$\psi(d(x_n, fz)) \leq \psi\big(d(x_{n-1}, z)\big) - \varphi\big(d(x_{n-1}, z)\big)$ (3.65)

olup $n \to \infty$ için limit alınır, Eş. 3. 64 ve ψ, φ fonksiyonlarının sürekliliği kullanılırsa;

$\psi(d(z, fz)) \leq \psi(0) - \varphi(0) = 0$

elde edilir ki buradan $d(z, fz) = 0$ yani $z = fz$ sonucuna ulaşılır. Yani $z \in X$, f dönüşümünün sabit noktasıdır. Şimdi f dönüşümünün belirtilen şartlar altında bir tek sabit noktaya sahip olduğunu gösterelim. Bunun için z_1 ve z_2, f dönüşümünün iki sabit noktası olsun. Eş. 3.52 de $x = z_1$, $y = z_2$ olarak alınırsa;

$\psi\big(d(z_1, z_2)\big) = \psi\big(d(fz_1, fz_2)\big) \leq \psi\big(d(z_1, z_2)\big) - \varphi\big(d(z_1, z_2)\big)$

$\varphi\big(d(z_1, z_2)\big) = 0$ elde edilir ve buradan $z_1 = z_2$ yazılır. Böylece f dönüşümünün bir tek sabit noktaya sahip olduğunu göstermiş oluruz.

Teorem 3.1.18 de özel olarak $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere her $t > 0$ için $\varphi(t) = (1 - \alpha)\psi(t)$ şeklinde alınırsa Khan ve arkadaşlarının çalışmasının bir sonucu olan Sonuç 3.1.2 ve her $t \geq 0$ için $\psi(t) = t$ seçilirse Rhoades nin çalışması olan ve Teorem 3.1.17 ile belirttiğiniz çalışma elde edilir. Böylece Khan ve arkadaşlarının çalışması ile Rhoades nin çalışması Dutta ve Choudhury nin çalışmasının bir özel halidir.

Örnek

$X = [0,1] \cup \{2,3,4,\dots,n\}$ ve

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & x,y \in [0,1] \\ x+y, & x \text{ veya } y \notin [0,1] \text{ ve } x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa (X, d) bir tam metrik uzaydır.

$\psi: [0,\infty) \to [0,\infty)$

$$t \to \psi(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ t^2, & t > 1 \end{cases}$$

ve

$\varphi: [0,\infty) \to [0,\infty)$

$$t \to \varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & t > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Ayrıca,

$f: X \to X$

$$x \to fx = \begin{cases} x - \frac{1}{2}x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1, & x \in \{2,3,\dots,n\} \end{cases}$$

olsun. Genelliği bozmadan kabul edebiliriz ki $x > y$ dir. Aşağıdaki durumları inceleyelim:

1. Durum: $x \in [0,1]$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} \psi(d(fx,fy)) &= \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) - \left(y - \frac{1}{2}y^2\right) \\ &= (x-y) - \tfrac{1}{2}(x-y)(x+y) \leq (x-y) - \tfrac{1}{2}(x-y)^2 \quad (x-y \leq x+y) \\ &= d(x,y) - \frac{1}{2}(d(x,y))^2 \end{aligned}$$

$$= \psi\big(d(x,y)\big) - \frac{1}{2}\big(d(x,y)\big)^2$$
$$= \psi\big(d(x,y)\big) - \varphi(d(x,y))$$

2. Durum: $x \in \{3,4,\dots,n\}$ olsun. O zaman,

$$d(fx,fy) = d\left(x-1, y-\frac{1}{2}y^2\right), y \in [0,1]$$
$$d(fx,fy) = x-1+y-\frac{1}{2}y^2 \leq x+y-1,$$

veya

$$d(fx,fy) = d(x-1,y-1),\ y \in \{2,3,\dots,n\}$$
$$d(fx,fy) = x+y-2 < x+y-1.$$

Sonuç olarak,

$$\psi(d(fx,fy)) = (d(fx,fy))^2 \leq (x+y-1)^2 < (x+y-1)(x+y+1)$$
$$= (x+y)^2 - 1 < (x+y)^2 - \frac{1}{2}$$
$$= \psi\big(d(x,y)\big) - \varphi(d(x,y))$$

3. Durum: $x = 2$ olsun. O zaman $y \in [0,1]$, $fx = 1$ ve $d(fx,fy) = 1 - (y - \frac{1}{2}y^2) \leq 1$ dir. Buna göre $\psi(d(fx,fy)) = d(fx,fy) \leq 1$ ve yine $d(x,y) = 2+y$. Bu yüzden,

$$\psi\big(d(x,y)\big) - \varphi\big(d(x,y)\big) = (2+y)^2 - \varphi((2+y)^2)$$
$$= (2+y)^2 - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{7}{2} + 4y + y^2 > 1$$
$$\geq \psi(d(fx,fy)).$$

ψ, φ ve f, Teorem 3.1.18 nin hipotezlerini sağlar. Bu durumda f bir tek sabit noktaya sahiptir. Açıkça görülüyor ki "0", f nin bir tek sabit noktasıdır.

Şimdi Harjani ile Sadarangani tarafından ortaya konan uzaklık değiştiren fonksiyonları içeren ve Sonuç 3.1.3 ifadesini genelleyen, Teorem 3.1.18 nin kısmi sıralı metrik uzaylardaki versiyonu olan çalışmayı ifade ve ispat edelim [22]:

3.1.19. Teorem

(X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme, (X, d) bir tam metrik uzay olsun. $f: X \to X$ dönüşümü sürekli, monoton azalmayan olsun ve ψ , φ uzaklık değiştiren fonksiyonlar olmak üzere karşılaştırılabilir her $x, y \in X$ için;

$$\psi\big(d(fx, fy)\big) \leq \psi\big(d(x, y)\big) - \varphi(d(x, y)) \tag{3.66}$$

eşitsizliğini sağlasın. Eğer $x_0 \preccurlyeq fx_0$ olacak şekilde $x_0 \in X$ var ise bu durumda f sabit noktaya sahiptir.

İspat

$fx_0 = x_0$ ise ispat biter. Bu durumda $x_0 \preccurlyeq fx_0$ şeklindedir. $x_0 \preccurlyeq fx_0$ ve f dönüşümü azalmayan olduğundan tümevarım metodu ile;

$$x_0 \preccurlyeq fx_0 \preccurlyeq f^2x_0 \preccurlyeq f^3x_0 \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq f^nx_0 \preccurlyeq f^{n+1}x_0 \preccurlyeq \ldots$$

elde edilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} = fx_n$ olacak şekilde (x_n) dizisini tanımlayalım. x_n ile x_{n-1} karşılaştırılabilir elemanlar olduklarından Eş. 3.66 dan;

$$\begin{aligned}\psi\big(d(x_{n+1}, x_n)\big) \leq \psi\big(d(fx_n, fx_{n-1})\big) &\leq \psi\big(d(x_n, x_{n-1})\big) - \varphi(d(x_n, x_{n-1})) \\ &\leq \psi\big(d(x_n, x_{n-1})\big)\end{aligned} \tag{3.67}$$

olup ψ azalmayan olduğundan;

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq d(x_n, x_{n-1}) \tag{3.68}$$

yazılabilir. Eğer $d(x_{n_0}, x_{n_0-1}) = 0$ olacak şekilde bir $n_0 \in N$ var ise $x_{n_0} = f x_{n_0-1} = x_{n_0-1}$ olup f dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir. Aksi takdirde kabul edelim ki her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_{n_0}, x_{n_0-1}) \neq 0$ olsun. Eş. 3.68 göz önüne alınırsa $(d(x_{n+1}, x_n))$ reel sayı dizisi azalandır. Bu nedenle bir $r \geq 0$ sayısı var öyle ki $n \to \infty$ için $\mathrm{d}(\mathrm{x_{n+1}}, \mathrm{x_n}) \to r$ şeklindedir. Eş. 3.67 de $n \to \infty$ için limit alınırsa;

$$\psi(r) \leq \psi(r) - \varphi(r) \leq \psi(r)$$

olup $\varphi(r) = 0$ elde edilir. φ uzaklıkları değiştiren fonksiyon olduğundan $r = 0$ dır. Yani;

$$lim_{n \to \infty}\, d(x_{n+1}, x_n) = 0 \tag{3.69}$$

şeklindedir. Şimdi göstereceğiz ki $(\mathrm{x_n})$ dizisi bir Cauchy dizisidir. Kabul edelim ki (x_n) dizisi bir Cauchy dizisi olmasın. Bu durumda en az bir $\varepsilon > 0$ var öyle ki her k tamsayısı için $n(k) > m(k) \geq k$ ve

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \geq \varepsilon \tag{3.70}$$

olacak şekilde (x_n) dizisinin $(x_{n(k)})$ ve $(x_{m(k)})$ alt dizileri vardır. Bunun yanında $n(k)$ tamsayısını $m(k)$ sayısına karşılık gelen, $n(k) > m(k)$ ve Eş. 3.70 eşitsizliğini sağlayan en küçük tamsayı olarak seçebiliriz. O zaman;

$$d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)}) < \varepsilon \tag{3.71}$$

şeklinde elde edilir. Eş. 3.70, Eş. 3.71 ve üçgen eşitsizliğinden;

$$\varepsilon \leq d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) < \varepsilon + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)})$$

yazılabilir. Eş. 3.69 kullanılır ve $k \to \infty$ için limit alınırsa;

$$lim_{k \to \infty}\, d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) = \varepsilon \tag{3.72}$$

elde edilir. Yine üçgen eşitsizliği ile;

$$d\left(x_{n(k)}, x_{m(k)}\right) \leq d\left(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}\right) + d\left(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}\right) + d(x_{m(k)-1}, x_{m(k)})$$

ve

$$d\left(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}\right) \leq d\left(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}\right) + d\left(x_{n(k)}, x_{m(k)}\right) + d(x_{m(k)-1}, x_{m(k)})$$

yazılabilir. Yukarıdaki iki eşitsizlikte $k \to \infty$ için limit alınır ve Eş. 3.69, Eş. 3.72 kullanılırsa;

$$lim_{k\to\infty}\, d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}) \;=\; \varepsilon \tag{3.73}$$

elde edilir. $n(k) > m(k)$ olduğu için $x_{n(k)-1}$ ile $x_{m(k)-1}$ karşılaştırılabilir olup Eş. 3.66 da $x \;= x_{n(k)-1}, y = x_{m(k)-1}$ olarak alınır ise;

$$\psi\left(d\left(x_{n(k)}, x_{m(k)}\right)\right) \;\leq\; \psi\left(d\left(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}\right)\right) - \\ - \varphi\left(d\left(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}\right)\right) \tag{3.74}$$

yazılabilir ki burada $k \;\to \infty$ için limit alınır ve Eş. 3.72, Eş. 3.73 kullanılırsa;

$$\psi(\varepsilon) \leq\; \psi(\varepsilon) - \varphi(\varepsilon) \leq \psi(\varepsilon)$$

olup φ uzaklıkları değiştiren fonksiyon olduğundan $\varphi(\varepsilon) = 0$ olup buradan $\varepsilon = 0$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde kabul yanlış (x_n) dizisi bir Cauchy dizisidir. (X, d) bir tam metrik uzay olduğundan bir $z \in X$ var öyle ki;

$$lim_{n\to\infty}\, x_n \;= z$$

şeklindedir. f dönüşümü sürekli olduğundan;

$$z = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f\, x_n = f \lim_{n\to\infty} x_n \;= fz$$

sonucuna ulaşılır. Yani $z \;\in\; X$, f dönüşümünün sabit noktasıdır.

Teorem 3.1.19 da özel olarak $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere her $t > 0$ için $\varphi(t) = (1-\alpha)\psi(t)$ şeklinde alınırsa Teorem 3.1.16 nın bir sonucu olan Sonuç 3.1.3 elde edilir.

Burada f dönüşümü sürekli olmasa bile X üzerine ek bir varsayımla f dönüşümünün sabit noktasının varlığını gösterebiliriz [22]:

3.1.20. Teorem

(X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme, (X, d) bir tam metrik uzay olsun. $f: X \to X$ dönüşümü monoton azalmayan olsun ve ψ, φ uzaklık değiştiren fonksiyonlar olmak üzere karşılaştırılabilir her $x, y \in X$ için;

$$\psi\big(d(fx, fy)\big) \leq \psi\big(d(x,y)\big) - \varphi(d(x,y))$$

eşitsizliğini sağlasın. Kabul edelim ki X aşağıdaki özelliği sağlasın:

X deki $x_n \to x$ olacak şekildeki azalmayan her (x_n) dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preccurlyeq x$ dir.

$x_0 \preccurlyeq fx_0$ olacak şekilde $x_0 \in X$ var ise bu durumda f sabit noktaya sahiptir.

İspat

Teorem 3.1.19 un ispatındaki gibi yapılarak $n \to \infty$ için $x_n \to z$ olduğu gösterilebilir. Biz sadece göstermeliyiz ki $fz = z$ dir. (x_n) azalmayan bir dizi ve $n \to \infty$ için $x_n \to z$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preccurlyeq z$ dir.

Sonuç olarak;

$$\psi\big(d(x_{n+1}, fz)\big) = \psi\big(d(fx_n, fz)\big) \leq \psi\big(d(x_n, z)\big) - \varphi(d(x_n, z))$$

olup $n \to \infty$ için limit alınırsa;

$\psi\big(d(z,fz)\big) \leq \psi(0) - \varphi(0) = 0$

elde edilir ki ψ uzaklıkları değiştiren fonksiyon olduğundan $z = fz$ elde edilir.

Şimdi, Teorem 3.1.19 ve Teorem 3.1.20 ile varlığını gösterdiğimiz sabit noktanın tekliğini inceleyelim. Bunun için X nin aşağıdaki özelliği sağlaması gerekir:

X deki her eleman çifti bir üst veya alt sınır sahiptir.

veya denk olarak

Her $x,\ y \in X$ için bir $z \in X$ var öyle ki z, x ve y ile karşılaştırılabilirdir.

Şimdi bu sonucu ifade ve ispat edelim [22]:

3.1.21. Teorem

(X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme, (X, d) bir tam metrik uzay olsun. $f: X \to X$ dönüşümü monoton azalmayan olsun ve ψ, φ uzaklıkları değiştiren fonksiyonlar olmak üzere karşılaştırılabilir her $x, y \in X$ için;

$$\psi\big(d(fx,fy)\big) \leq \psi\big(d(x,y)\big) - \varphi(d(x,y)) \qquad (3.75)$$

eşitsizliğini sağlasın. Kabul edelim ki ya

i) f sürekli bir dönüşüm
ya da
ii) X deki $x_n \to x$ olacak şekildeki azalmayan her (x_n) dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preccurlyeq x$ şeklinde olsun.

Ayrıca her $x, y \in X$ için bir $z \in X$ var öyle ki z, x ve y ile karşılaştırılabilir olsun. Bir $x_0 \in X$ var öyle ki $x_0 \preccurlyeq fx_0$ ise bu durumda f dönüşümü bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir.

İspat

Verilen f fonksiyonu için i) doğru ise Teorem 3.1.19 ya da bunun yerine X üzerinde ii) ek şartı var ise Teorem 3.1.20 kullanılarak f fonksiyonunun sabit noktasının varlığı gösterilebilir. f dönüşümünün bu sabit noktası $z \in X$ olsun.

Şimdi f fonksiyonunun sabit noktasının tekliğini gösterelim:

Kabul edelim ki $y \in X$ noktası f fonksiyonunun bir başka sabit noktası olsun. $d(y,z) = 0$ olduğunu göstermeliyiz. İspatı iki durumda inceleyelim:

1. Durum: y ile z karşılaştırılabilir olsun. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $f^n y = y$, $f^n z = z$ karşılaştırılabilir olup Eş. 3.75 den;

$$\begin{aligned}\psi\big(d(z,y)\big) &= \psi\big(d(f^n z, f^n y)\big)\\ &\leq \psi\big(d(f^{n-1} z, f^{n-1} y)\big) - \varphi(d(f^{n-1} z, f^{n-1} y))\\ &\leq \psi\big(d(z,y)\big) - \varphi(d(z,y))\end{aligned}$$

yazılır ki ψ, φ uzaklıkları değiştiren fonksiyonlar olduklarından buradan $d(z,y) = 0$ elde edilir.

2. Durum: y ile z karşılaştırılamaz olsun. Hipotezden bir $x \in X$ var öyle ki x, y ve z ile karşılaştırılabilirdir. f dönüşümünün monotonluğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $f^n x$, $f^n y = y$ ve $f^n z = z$ ile karşılaştırılabilir olup Eş. 3.75 den;

$$\begin{aligned}\psi\big(d(z, f^n x)\big) &= \psi\big(d(f^n z, f^n x)\big)\\ &\leq \psi\big(d(f^{n-1} z, f^{n-1} x)\big) - \varphi(d(f^{n-1} z, f^{n-1} x))\\ &\leq \psi\big(d(z, f^{n-1} x)\big) - \varphi(d(z, f^{n-1} x)) \leq \psi\big(d(z, f^{n-1} x)\big)\end{aligned} \qquad (3.76)$$

yazılabilir. Buna göre son eşitsizlikten $(\psi\big(d(z, f^n x)\big))$ negatif olmayan azalan bir reel sayı dizisidir. ψ dönüşümünün monotonluğundan $(d(z, f^n x))$ dizisi negatif olmayan azalan bir reel sayı dizisidir. Bu durumda bir $\gamma \geq 0$ sayısı var öyle ki;

$lim_{n\to\infty} d(z, f^n x) = \gamma$

şeklindedir. Eş. 3.76 da $n \to \infty$ için limit alınır ve $\psi,\ \varphi$ dönüşümlerinin uzaklık değiştiren fonksiyonlar olduğu göz önüne alınırsa;

$\psi(\gamma) \leq \psi(\gamma) - \varphi(\gamma) \leq \psi(\gamma)$

elde edilir ki buradan $\gamma = 0$ dir. Benzer şekilde;

$lim_{n\to\infty} d(y, f^n(x)) = 0$

elde edilebilir. Son olarak $lim_{n\to\infty} d(y, f^n x) = lim_{n\to\infty} d(z, f^n x) = 0$ olup limitin tekliğinden $y = z$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Uyarı

Teorem 3.1.21 koşulları altında z, f dönüşümünün sabit noktası olmak üzere her $x \in X$ için;

$lim_{n\to\infty} f^n x = z$

olduğu gösterilebilir. Böylece sabit noktanın varlığı, tekliği yanında nasıl bulunabileceği de gösterilmiş olur. Gerçekten;

x ile z noktası karşılaştırılabilir ise Teorem 3.1.21 de yapıldığı gibi yapılarak;

$lim_{n\to\infty} f^n x = z$

olduğu gösterilebilir. Kabul edelim ki x ile z karşılaştırılabilir olmasın. Bu durumda x ve z ile karşılaştırılabilecek $y \in X$ vardır. Teorem 3.1.21 de yapıldığı gibi yapılarak;

$lim_{n\to\infty} d(z, f^n y) = lim_{n\to\infty} d(f^n z, f^n y) = 0$ ve $lim_{n\to\infty} d(f^n x, f^n y) = 0$

elde edilir ki buradan;

$$d(z, f^n x) \leq d(z, f^n y) + d(f^n y, f^n x)$$

yazılabilir ki $n \to \infty$ için limit alınırsa;

$$\lim_{n\to\infty} f^n x = z$$

elde edilir [22].

Sıralı metrik uzaylarda bir başka sabit nokta teoremi vermek için $\beta(t_n) \to 1 \Rightarrow t_n \to 0$ özelliğine sahip $\beta : [0, \infty) \to [0,1)$ fonksiyonlar ailesini tanımlayalım. Bu özelliğe sahip fonksiyonlar sınıfı δ olsun. 1973 yılında Geraghty yukarıdaki özelliğe sahip β fonksiyonlarını kullanarak tam metrik uzaylara Banach sabit nokta teoreminin bir genellemesini ispatlamıştır. Şimdi bu çalışmayı ifade edelim [23]:

3.1.22. Teorem

(X, d) bir tam metrik uzay ve $\beta \in \delta$ olmak üzere, $f : X \to X$ dönüşümü her $x, y \in X$ için;

$$d(fx, fy) \leq \beta\big(d(x, y)\big)d(x, y) \tag{3.77}$$

eşitsizliğini sağlasın. O halde f bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir ve her $x \in X$ için $(f^n x)$ dizisi z noktasına yakınsar.

İspat

$x_0 \in X$ keyfi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = f x_{n-1}$ olacak şekilde (x_n) dizisini tanımlayalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için;

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_{n+2}) &= d(f x_n, f x_{n+1}) \\ &\leq \beta\big(d(x_n, x_{n+1})\big)d(x_n, x_{n+1}) \\ &< d(x_n, x_{n+1}) \end{aligned} \tag{3.78}$$

yazılabilir. O zaman $(d(x_n, x_{n+1}))$ dizisi azalan ve alttan sınırlı olduğundan bir $r \geq 0$ sayısı var öyle ki;

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = r$$

şeklindedir. Eş. 3.78 den her $n \in \mathbb{N}$ için;

$$\frac{d(x_{n+1}, x_{n+2})}{d(x_n, x_{n+1})} \leq \beta\big(d(x_n, x_{n+1})\big)$$

yazılabilir ki bu son eşitsizlikten;

$$lim_{n\to\infty}\, \beta\big(d(x_n, x_{n+1})\big) = 1$$

elde edilir. $\beta \in \delta$ olduğundan;

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$$

yazılır. Şimdi gösterelim ki (x_n) dizisi bir Cauchy dizisidir. Kabul edelim ki (x_n) dizisi bir Cauchy dizisi olmasın. Bu durumda bir $\varepsilon > 0$ var öyle ki her $N \in \mathbb{N}$ için dizinin her kuyruğu $\mathrm{D_N} = sup\{d(\mathrm{x_n}, \mathrm{x_m}) : n, m \geq N\} \geq \varepsilon$ çapına sahiptir. Herhangi $n > 0$ için N_n, her $m \geq N_n$ için $d(x_m, x_{m+1}) < \frac{1}{n}$ olacak şekilde olsun. $d(x_m, x_{m+1}) \to 0$ olduğu için böyle bir N_n seçmek mümkündür. Durumla çelişecek şekilde iki alt dizi çifti oluşturacağız.

$h_n \geq N_n$ olacak şekilde en küçük tamsayı olmak üzere öyle ki bazı $k_n > h_n$ için $d(x_{k_n}, x_{h_n}) \geq \varepsilon$ şeklinde olsun. Böyle bir çift yukarıdaki çap koşulunu sağlar. Burada $k_n,\ k_n > h_n$ olacak şekilde en küçük tamsayı olarak seçilirse;

$$d(x_{k_n - 1}, x_{h_n}) < \varepsilon$$

elde edilir. Biz buradan;

$$\varepsilon \leq d\big(x_{h_n}, x_{k_n}\big) \leq d\big(x_{h_n}, x_{k_n - 1}\big) + d(x_{k_n - 1}, x_{k_n})$$

$$< \varepsilon + d\left(x_{k_n-1}, x_{k_n}\right) < \varepsilon + \frac{1}{n}$$

olur ki buradan;

$$\beta(d\left(x_{h_n}, x_{k_n}\right)) \geq \frac{d(fx_{h_n}, fx_{k_n})}{d(x_{h_n}, x_{k_n})} \geq \frac{d\left(x_{h_n}, x_{k_n}\right)-\frac{2}{n}}{d(x_{h_n}, x_{k_n})}$$

elde edilir ve $d\left(x_{h_n}, x_{k_n}\right) \to \varepsilon > 0$ iken $\beta(d\left(x_{h_n}, x_{k_n}\right)) \to 1$ olması çelişki oluşturur. O halde kabul yanlış (x_n) dizisi bir Cauchy dizisidir. (X, d) bir tam metrik uzay olduğundan bir $z \in X$ var öyle ki;

$$\lim_{n\to\infty} x_n = z$$

şeklindedir. Şimdi $z \in X$ noktasının f dönüşümünün sabit noktası olduğunu gösterelim;

$$d(x_{n+1}, fz) = d(f^{n+1}x_0, fz) \leq \beta(d(f^n x_0, z))d(f^n x_0, z)$$

olup $n \to \infty$ için limit alınırsa $d(z, fz) = 0$ elde edilir.

Şimdi sabit noktanın tekliğini gösterelim. Kabul edelim ki z ve x , f dönüşümünün iki farklı sabit noktası olsun. Buna göre her $n \in \mathbb{N}$ için;

$$d(x, z) = d(fx, fz) \leq \beta(d(x, z))d(x, z) < d(x, z)$$

olur ki bu bir çelişkidir. O halde kabul yanlış f dönüşümünün sabit noktası tektir. Son olarak her $x \in X$ için;

$$lim_{n\to\infty} f^n x = z$$

olduğunu gösterelim. $x \in X$ keyfi olsun;

$$d(z, f^n x) = d(f^n z, f^n x) \leq$$
$$\leq \beta\left(d(f^{n-1}z, f^{n-1}x)\right)d(f^{n-1}z, f^{n-1}x) < d(z, f^{n-1}x) \qquad (3.79)$$

elde edilir ki buradan $\gamma_n = d(z, f^n x)$ dizisi azalan ve alttan sınırlı olduğundan bir $\gamma \geq 0$ var öyle ki;

$$lim_{n\to\infty} d(z, f^n x) = \gamma$$

şeklindedir. Şimdi gösterelim ki $\gamma = 0$ dır. Kabul edelim ki $\gamma > 0$ olsun. Eş. 3.79 da $n \to \infty$ için limit alınırsa;

$$\gamma \leq \lim_{n\to\infty} \beta(d(z, f^{n-1}x))\,\gamma \Rightarrow (1 - \lim_{n\to\infty} \beta(d(z, f^{n-1}x))\,\gamma \leq 0$$
$$\Rightarrow 1 - \lim_{n\to\infty} \beta(d(z, f^{n-1}x) \leq 0\ (\gamma\ >\ 0)$$
$$\Rightarrow 1 \leq lim_{n\to\infty}\, \beta(d(z, f^{n-1}x)$$
$$\Rightarrow lim_{n\to\infty}\, \beta(d(z, f^{n-1}x) = 1$$

olup $\beta \in \delta$ olduğundan;

$$\lim_{n\to\infty} d(z, f^{n-1}x) = 0$$

elde edilir. Bu ise $\gamma > 0$ olmasıyla çelişir. O halde kabul yanlış $\gamma = 0$ dır.

Şimdi Harandi ve Emami tarafından ortaya konan Teorem 3.1.22 nin kısmi sıralı metrik uzaylardaki versiyonunu ifade ve ispat edelim [24]:

3.1.23. Teorem

(X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme, (X, d) bir tam metrik uzay ve $\beta \in \delta$ olmak üzere, $f : X \to X$ azalmayan dönüşümü karşılaştırılabilir olacak şekildeki her $x, y \in X$ için;

$$d(fx, fy) \leq \beta\big(d(x,y)\big)d(x,y) \qquad (3.80)$$

eşitsizliğini sağlasın. Kabul edelim ki

i) f süreklidir

ya da

ii) X deki $x_n \to x$ olacak şekildeki azalmayan her (x_n) dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preccurlyeq x$ şeklinde olsun.

Bunun yanında her $x, y \in X$ için x ve y ile karşılaştırılabilir bir $z \in X$ var ve $x_0 \preccurlyeq fx_0$ olacak şekilde $x_0 \in X$ var ise o halde f bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir.

İspat

İlk olarak gösterelim ki f dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir. $x_0 \preccurlyeq fx_0$ ve f azalmayan bir fonksiyon olduğundan tümevarım metodu ile;
$x_0 \preccurlyeq fx_0 \preccurlyeq f^2x_0 \preccurlyeq ... \preccurlyeq f^n x_0 \preccurlyeq f^{n+1}x_0 \preccurlyeq ...$

elde edilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = f^n x_0$ şeklinde tanımlı (x_n) dizisini oluşturalım. Buna göre x_n ile x_{n+1} karşılaştırılabilir olduğundan Eş. 3.80 den;

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_{n+2}) &= d(f^{n+1}x_0, f^{n+2}x_0) \\ &\leq \beta\big(d(x_n, x_{n+1})\big)d(x_n, x_{n+1}) \\ &< d(x_n, x_{n+1}) \end{aligned} \tag{3.81}$$

yazılabilir. O zaman $(d(x_n, x_{n+1}))$ dizisi azalan ve alttan sınırlı olduğundan bir $r \geq 0$ sayısı var öyle ki;

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = r$$

şeklindedir. Kabul edelim ki $r > 0$ olsun. Eş. 3.81 den her $n \in \mathbb{N}$ için;

$$\frac{d(x_{n+1}, x_{n+2})}{d(x_n, x_{n+1})} \leq \beta\big(d(x_n, x_{n+1})\big)$$

yazılabilir ki bu son eşitsizlikten;

$$lim_{n\to\infty}\, \beta\big(d(x_n, x_{n+1})\big) = 1$$

dir. $\beta \in \delta$ olduğundan;

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$$

yazılır. Şimdi gösterelim ki (x_n) dizisi bir Cauchy dizisidir. Aksini kabul edelim. Bu durumda;

$$\lim_{n,m\to\infty} sup\, d(x_n, x_m) > 0$$

olsun. Üçgen eşitsizliğinden;

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_m)$$

yazılabilir ki buradan;

$$d(x_n, x_m) \leq \left(1 - \beta\left(d(x_n, x_m)\right)\right)^{-1} [d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{m+1}, x_m)]$$

elde edilir. Buna göre $lim_{n,m\to\infty} sup\, d(x_n, x_m) > 0$ ve $lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$ olduğu için;

$$\lim_{n,m\to\infty} sup \left(1 - \beta\left(d(x_n, x_m)\right)\right)^{-1} = \infty$$

yazılır ki buradan $lim_{n,m\to\infty} sup\, \beta\left(d(x_n, x_m)\right) = 1$ elde edilir. $\beta \in \delta$ olduğundan;

$$lim_{n,m\to\infty} sup\, d(x_n, x_m) = 0$$

elde edilir. Bu bir çelişkidir. O halde kabul yanlış ve (x_n) dizisi bir Cauchy dizisidir. (X, d) bir tam metrik uzay olduğundan bir $z \in X$ var öyle ki;

$$\lim_{n\to\infty} x_n = z$$

yazılır. Hipotezdeki i) koşulu sağlanıyor ise;

$$z = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f^{n+1} x_0 = f \lim_{n\to\infty} f^n x_0 = fz$$

olup z, f dönüşümünün sabit noktasıdır. Kabul edelim ki hipotezdeki ii) koşulu sağlansın. Buna göre;

$$d(fz,z) \le d(fz,x_{n+1}) + d(x_{n+1},z) = d(fz,f^{n+1}x_0) + d(x_{n+1},z)$$
$$\le \beta(d(f^n x_0,z))d(f^n x_0,z) + d(x_{n+1},z)$$
$$< d(x_n,z) + d(x_{n+1},z)$$

olup $n \to \infty$ için limit alınırsa $d(x_n,z) \to 0$ olduğundan $fz = z$ dir. Şimdi sabit noktanın tekliğini gösterelim. f nin bir başka sabit noktası y olsun. Hipotezden y ve z ile karşılaştırılabilir bir $x \in X$ vardır. f monoton olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $f^n x$, $f^n y$ ve $f^n z$ ile karşılaştırılabilirdir. Eş. 3.80 den;

$$d(z,f^n x) = d(f^n z, f^n x)$$
$$\le \beta\big(d(f^{n-1}z,f^{n-1}x)\big)d(f^{n-1}z,f^{n-1}x) < d(z,f^{n-1}x) \qquad (3.82)$$

elde edilir ki buradan $(\gamma_n) = (d(z,f^n x))$ dizisi azalan ve alttan sınırlı olduğundan bir $\gamma \ge 0$ var öyle ki;

$$lim_{n\to\infty}\, d(z,f^n x) = \gamma$$

şeklindedir. Şimdi gösterelim ki $\gamma = 0$ dır. Kabul edelim ki $\gamma > 0$ olsun. Eş. 3.82 de $n \to \infty$ için limit alınırsa;

$$\gamma \le \lim_{n\to\infty} \beta(d(z,f^{n-1}x))\,\gamma \Rightarrow (1 - \lim_{n\to\infty} \beta(d(z,f^{n-1}x)))\,\gamma \le 0$$
$$\Rightarrow 1 - \lim_{n\to\infty} \beta(d(z,f^{n-1}x)) \le 0\ (\gamma > 0)$$
$$\Rightarrow 1 \le\ lim_{n\to\infty}\, \beta(d(z,f^{n-1}x))$$
$$\Rightarrow lim_{n\to\infty}\, \beta(d(z,f^{n-1}x)) = 1$$

olup $\beta \in \delta$ olduğundan;

$$\lim_{n\to\infty} d(z,f^{n-1}x) = 0$$

elde edilir. Bu ise $\gamma > 0$ olmasıyla çelişir. O halde kabul yanlış $\gamma = 0$ dir. Benzer şekilde;

$$\lim_{n\to\infty} d(y, f^n x) = 0$$

elde edilir. Son olarak her $n \in \mathbb{N}$ için;

$$d(y,z) \leq d(y, f^n x) + d(f^n x, z)$$

olup $n \to \infty$ için limit alınırsa $d(y,z) = 0$ elde edilir. Böylece f dönüşümünün bir tek sabit noktaya sahip olduğunu göstermiş oluruz.

4. ARTMAYAN VE MONOTON OLMAYAN FONKSİYONLAR İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ

4.1. Kısmi Sıralı Metrik Uzaylarda Artmayan Fonksiyonlar İçin Sabit Nokta Teoremleri

Teorem 3.1.3, Teorem 3.1.4 ve Teorem 3.1.5 de Nieto ve Rodriguez-Lopez tarafından kısmi sıralı metrik uzaylarda azalmayan dönüşümler için sabit noktanın varlığını ve tekliğini ortaya koyan çalışmalarından bahsettik. Şimdi ise Nieto ve Rodriguez-Lopez tarafından ortaya konan kısmi sıralı metrik uzaylarda artmayan dönüşümler için sabit noktanın varlığı ve tekliği ile ilgili çalışmalarından bahsedeceğiz.

Nieto ve Rodriguez-Lopez tarafından ortaya konan bu çalışmayı ifade ve ispat edelim [32]:

4.1.1. Teorem

(X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme ve (X, d) bir tam metrik uzay olsun. $f: X \to X$ artmayan dönüşümü karşılaştırılabilir her $x, y \in X$ için bir $\alpha \in [0, 1)$ var öyle ki

$$d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y)$$

eşitsizliğini sağlasın. Kabul edelim ki

i) f sürekli bir dönüşüm
ya da
ii) X deki $x_n \to x$ olacak şekildeki ardışık terimleri karşılaştırılabilir her (x_n) dizisi her bir terimi x ile karşılaştırılabilir bir (x_{n_k}) alt dizisine sahip olsun.

Ayrıca her $x, y \in X$ için bir $z \in X$ var öyle ki z, x ve y ile karşılaştırılabilir olsun. Bir $x_0 \in X$ var öyle ki $x_0 \preccurlyeq fx_0$ veya $x_0 \succcurlyeq fx_0$ ise bu durumda f dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat

$fx_0 = x_0$ ise ispat biter.

Kabul edelim ki $f\mathrm{x}_0 \neq \mathrm{x}_0$ olsun. Göstereceğiz ki $(f^n\mathrm{x}_0)$ dizisi X de yakınsaktır. Gerçekten hipotezden her $n \in \mathbb{N}$ için $f^{n+1}\mathrm{x}_0$ ile $f^n\mathrm{x}_0$ ile karşılaştırılabilr olduğundan tümevarım metodu ile;

$$d(f^{n+1}x_0, f^n x_0) \leq \alpha^n d(fx_0, x_0)$$

yazılabilir. İlk olarak göstereceğiz ki $(f^n x_0)$ dizisi bir Cauchy dizisidir.

$m > n$ olsun. Buna göre;

$$\begin{aligned} d(f^n x_0, f^m x_0) &\leq \sum_{i=n+1}^{m} d\left(f^i x_0, f^{i-1} x_0\right) \\ &\leq (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \cdots + \alpha^{m-1}) d(fx_0, x_0) \\ &\leq \alpha^n \frac{1-\alpha^{m-n}}{1-\alpha} d(fx_0, x_0) \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\, d(fx_0, x_0) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu yüzden $(f^n x_0)$ dizisi bir Cauchy dizisi olup $lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = \overline{x}$ olacak şekilde bir $\overline{x} \in X$ vardır. Şimdi gösterelim ki $\overline{x}$, f dönüşümün sabit noktasıdır. Kabul edelim ki f sürekli olsun. Bu durumda;

$$\overline{x} = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}x_0 = \lim_{n\to\infty} f f^n x_0 = f \lim_{n\to\infty} f^n x_0 = f\overline{x}$$

elde edilir. Şimdi f dönüşümünün sürekliliği yerine hipotezdeki ii) koşulunun sağlandığını düşünelim. f dönüşümü artmayan olduğundan $(f^n x_0)$ dizisi monoton değildir. Ancak ardışık terimleri karşılaştırılabilir yakınsak bir dizi olduğundan hipotezden terimleri $\overline{\mathrm{x}}$ ile karşılaştırılabilir bir $(f^{n_k} x_0)$ alt dizisine sahiptir. Buna göre her $k \in \mathbb{N}$ için;

$$d(f\overline{x}, \overline{x}) \leq d(f\overline{x}, f^{n_k+1}x_0) + d(f^{n_k+1}x_0, \overline{x})$$

$$\leq kd(\overline{x}, f^{n_k}x_0) + d(f^{n_k+1}x_0, \overline{x})$$
$$< d(\overline{x}, f^{n_k}x_0) + d(f^{n_k+1}x_0, \overline{x})$$

olup $k \to \infty$ için limit alındığında $d(f\overline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}}) = 0$ elde edilir. Şimdi f dönüşümünün sabit noktasının tekliğini gösterelim. Bunun için kabul edelim ki $\overline{x}$ ve $\overline{y}$, f dönüşümünün iki sabit noktası olsun. İki durumda inceleyelim:

1. Durum: $\overline{x}$ ile $\overline{y}$ karşılaştırılabilir olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $f^n\overline{\mathrm{x}}$ ile $f^n\overline{\mathrm{y}}$ karşılaştırılabilir olup;

$d(\overline{x}, \overline{y}) = d(f^n\overline{\mathrm{x}}, f^n\overline{\mathrm{y}}) \leq \alpha^n d(\overline{x}, \overline{y})$ olup bu ancak $\overline{\mathrm{x}} = \overline{\mathrm{y}}$ olması ile mümkündür.

2. Durum: $\overline{x}$ ile $\overline{y}$ karşılaştırılamaz olsun. Bu durumda bir $\overline{\mathrm{z}} \in X$ var öyle ki $\overline{x}$ ve $\overline{y}$ ile karşılaştırılabilirdir. f artmayan olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $f^n\overline{\mathrm{z}}$, $f^n\overline{\mathrm{x}}$ ve $f^n\overline{\mathrm{y}}$ ile karşılaştırılabilirdir. Buna göre;

$$d(\overline{x}, \overline{y}) = d(f^n\overline{x}, f^n\overline{y}) \leq d(f^n\overline{x}, f^n\overline{z}) + d(f^n\overline{z}, f^n\overline{y})$$
$$\leq \alpha^n d(\overline{x}, \overline{z}) + \alpha^n d(\overline{z}, \overline{y})$$

olup $n \to \infty$ için limit alındığında $d(\overline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{y}}) = 0$ elde edilir.

Buradan görülüyor ki monoton durumlarda terimleri limit ile karşılaştırılabilir bir alt dizinin varlığı ile dizinin bütün terimlerinin limit ile karşılaştırılabilir olması birbirine denktir. Şimdi bununla ilgili ortaya konulan sonucu ifade edelim [32]:

4.1.2. Teorem

(X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme ve (X, d) bir tam metrik uzay olsun. $f: X \to X$ monoton (azalmayan veya artmayan) dönüşümü karşılaştırılabilir her $x, y \in X$ için bir $\alpha \in [0, 1)$ var öyle ki

$$d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y)$$

eşitsizliğini sağlasın. Kabul edelim ki ya

i) f sürekli bir dönüşüm

ya da

ii) X deki $x_n \to x$ olacak şekildeki ardışık terimleri karşılaştırılabilir her (x_n) dizisi her bir terimi x ile karşılaştırılabilir bir (x_{n_k}) alt dizisine sahip olsun.

Ayrıca her $x, y \in X$ için bir $z \in X$ var öyle ki z, x ve y ile karşılaştırılabilir olsun. Bir $x_0 \in X$ var öyle ki $x_0 \preccurlyeq fx_0$ veya $x_0 \succcurlyeq fx_0$ ise bu durumda f dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat

f dönüşümü artmayan olduğunda ispatı Teorem 4.1.1 de yapıldığı gibi yapılarak sabit noktanın var ve tek olduğu gösterilebilir. f dönüşümü azalmayan olsun. Bu durumda;

$fx_0 = x_0$ ise ispat biter.

Kabul edelim ki $fx_0 \neq x_0$ olsun. Göstereceğiz ki $(f^n x_0)$ dizisi X de yakınsaktır. Gerçekten hipotezden her $n \in \mathbb{N}$ için $f^{n+1}x_0$ ile $f^n x_0$ ile karşılaştırılabilr olduğundan tümevarım metodu ile;

$$d(f^{n+1}x_0, f^n x_0) \leq \alpha^n d(fx_0, x_0)$$

yazılabilir. İlk olarak göstereceğiz ki $(f^n x_0)$ dizisi bir Cauchy dizisidir.

$m > n$ olsun. Buna göre;

$$\begin{aligned} d(f^n x_0, f^m x_0) &\leq \sum_{i=n+1}^{m} d\left(f^i x_0, f^{i-1} x_0\right) \\ &\leq (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \cdots + \alpha^{m-1}) d(fx_0, x_0) \\ &\leq \alpha^n \frac{1-\alpha^{m-n}}{1-\alpha} d(fx_0, x_0) \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\, d(fx_0, x_0) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu yüzden $(f^n x_0)$ dizisi bir Cauchy dizisi olup X tam metrik uzay olduğundan $\lim_{n\to\infty} f^n x_0 = \overline{x}$ olacak şekilde bir $\overline{x} \in X$ vardır. Şimdi gösterelim ki $\overline{x}$, f dönüşümünün sabit noktasıdır. Kabul edelim ki f sürekli olsun. Bu durumda;

$$\overline{x} = \lim_{n\to\infty} f^{n+1} x_0 = \lim_{n\to\infty} f f^n x_0 = f \lim_{n\to\infty} f^n x_0 = f\overline{x}$$

elde edilir. Şimdi f dönüşümünün sürekliliği yerine hipotezdeki ii) koşulunun sağlandığını düşünelim. f dönüşümü azalmayan olduğundan $(f^n x_0)$ dizisi ardışık terimleri karşılaştırılabilir yakınsak bir dizi olup hipotezden terimleri $\overline{x}$ ile karşılaştırılabilir bir $(f^{n_k} x_0)$ alt dizisine sahiptir. Buna göre her $k \in \mathbb{N}$ için;

$$\begin{aligned} d(f\overline{x}, \overline{x}) &\le d(f\overline{x}, f^{n_k+1} x_0) + d(f^{n_k+1} x_0, \overline{x}) \\ &\le \alpha d(\overline{x}, f^{n_k} x_0) + d(f^{n_k+1} x_0, \overline{x}) \\ &< d(\overline{x}, f^{n_k} x_0) + d(f^{n_k+1} x_0, \overline{x}) \end{aligned}$$

olup $k \to \infty$ için limit alındığında $d(f\overline{\mathrm{x}},\ \overline{\mathrm{x}}) = 0$ elde edilir. Şimdi f dönüşümünün sabit noktasının tekliğini gösterelim. Bunun için kabul edelim ki $\overline{x}$ ve $\overline{y}$, f dönüşümünün iki sabit noktası olsun. İki durumda inceleyelim:

1. Durum: $\overline{x}$ ile $\overline{y}$ karşılaştırılabilir olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $f^n\overline{\mathrm{x}}$ ile $f^n\overline{\mathrm{y}}$ karşılaştırılabilir olup;

$d(\overline{x}, \overline{y}) = d(f^n\overline{\mathrm{x}}, f^n\overline{\mathrm{y}}) \le \alpha^n d(\overline{x}, \overline{y})$ olup bu ancak $\overline{\mathrm{x}} = \overline{\mathrm{y}}$ olması ile mümkündür.

2. Durum: $\overline{x}$ ile $\overline{y}$ karşılaştırılamaz olsun. Bu durumda bir $\overline{z} \in X$ var öyle ki $\overline{x}$ ve $\overline{y}$ ile karşılaştırılabilirdir. f azalmayan olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $f^n\overline{\mathrm{z}}$, $f^n\overline{\mathrm{x}}$ ve $f^n\overline{\mathrm{y}}$ ile karşılaştırılabilirdir. Buna göre;

$$\begin{aligned} d(\overline{x}, \overline{y}) = d(f^n\overline{x}, f^n\overline{y}) &\le d(f^n\overline{x}, f^n\overline{z}) + d(f^n\overline{z}, f^n\overline{y}) \\ &\le \alpha^n d(\overline{x}, \overline{z}) + \alpha^n d(\overline{z}, \overline{y}) \end{aligned}$$

olup $n \to \infty$ için limit alındığında $d(\overline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{y}}) = 0$ elde edilir.

4.2. Metrik ve Kısmi Sıralı Metrik Uzaylarda Monoton Olmayan Fonksiyonlar İçin Sabit Nokta Teoremleri

Bir önceki bölümde monoton f fonksiyonunun sürekli olmaması durumunda bir tek sabit noktaya hangi şartlar altında sahip olduğunu gösterdik. Bu bölümde ise f fonksiyonunun monoton olmaması durumunda bir tek sabit noktaya sahip olması için gerekli durum incelenecektir. f dönüşümünün monoton olmaması durumunda aşağıdaki ek koşula ihtiyaç vardır:

f, karşılaştırılabilir elemanları korur yani; karşılaştırılabilir elemanlardan karşılaştırılabilir elemanlara tanımlı bir dönüşümdür.

Şimdi bununla ilgili Nieto ve Lopez tarafından ortaya konulan çalışmayı ifade ve ispat edelim [32]:

4.2.1. Teorem

(X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme ve (X, d) bir tam metrik uzay olsun. $f: X \to X$ karşılaştırılabilir elemanlardan karşılaştırılabilir elamanlara tanımlı yani;

$$x, y \in X, x \preccurlyeq y \Rightarrow \begin{cases} f(x) \preccurlyeq f(y) \\ veya \\ f(x) \succcurlyeq f(y) \end{cases}$$

ve karşılaştırılabilir her $x, y \in X$ için bir $\alpha \in [0, 1)$ var öyle ki;

$$d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y)$$

eşitsizliğini sağlayan bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki

i) f sürekli bir dönüşüm
ya da
ii) X deki $x_n \to x$ olacak şekildeki ardışık terimleri karşılaştırılabilir her (x_n) dizisi her bir terimi x ile karşılaştırılabilir bir (x_{n_k}) alt dizisine sahip olsun.

Ayrıca her $x, y \in X$ için bir $z \in X$ var öyle ki z, x ve y ile karşılaştırılabilir olsun. Bir $x_0 \in X$ var öyle ki $x_0 \preccurlyeq fx_0$ veya $x_0 \succcurlyeq fx_0$ ise bu durumda f dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir. Üstelik her $x \in X$ için $lim_{n\to\infty} f^n x = \overline{x}$ dir.

İspat

Eğer $fx_0 = x_0$ ise ispat biter.

Kabul edelim ki $fx_0 \neq x_0$ olsun. Göstereceğiz ki $(f^n x_0)$ dizisi X de yakınsaktır. Gerçekten hipotezden x_0 ile fx_0 karşılaştırılabilir olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $f^n x_0$ ile $f^{n+1}x_0$ karşılaştırılabilir olup tümevarım metodu ile;

$$d(f^{n+1}x_0, f^n x_0) \leq \alpha^n d(fx_0, x_0)$$

yazılabilir. İlk olarak göstereceğiz ki $(f^n x_0)$ dizisi bir Cauchy dizisidir. $m > n$ olsun. Buna göre;

$$\begin{aligned} d(f^n x_0, f^m x_0) &\leq \sum_{i=n+1}^{m} d\left(f^i x_0, f^{i-1} x_0\right) \\ &\leq (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \cdots + \alpha^{m-1}) d(fx_0, x_0) \\ &\leq \alpha^n \frac{1-\alpha^{m-n}}{1-\alpha} d(fx_0, x_0) \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\, d(fx_0, x_0) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu yüzden $(f^n x_0)$ dizisi bir Cauchy dizisi olup $\lim_{n\to\infty} f^n x_0 = \overline{x}$ olacak şekilde bir $\overline{x} \in X$ vardır. Şimdi gösterelim ki $\overline{x}$, f dönüşümün sabit noktasıdır. Kabul edelim ki i) hipotezi sağlansın. Bu durumda;

$$\overline{x} = \lim_{n\to\infty} f^{n+1} x_0 = \lim_{n\to\infty} f f^n x_0 = f \lim_{n\to\infty} f^n x_0 = f\overline{x}$$

elde edilir. Şimdi f dönüşümünün sürekliliği yerine hipotezdeki ii) koşulunun sağlandığını düşünelim.f dönüşümü karşılaştırılabilir elemanları karşılaştırılabilir elemanlara dönüştürdüğünden $(f^n x_0)$ dizisi ardışık terimleri karşılaştırılabilir yakınsak bir dizi olup

hipotezden terimleri $\overline{x}$ ile karşılaştırılabilir bir $(f^{n_k}x_0)$ alt dizisine sahiptir. Buna göre her k ∈ ℕ için;

$$\begin{aligned} d(f\overline{x},\overline{x}) &\leq d(f\overline{x},f^{n_k+1}x_0)+d(f^{n_k+1}x_0,\overline{x}) \\ &\leq \alpha d(\overline{x},f^{n_k}x_0)+d(f^{n_k+1}x_0,\overline{x}) \\ &< d(\overline{x},f^{n_k}x_0)+d(f^{n_k+1}x_0,\overline{x}) \end{aligned}$$

olup $k \to \infty$ için limit alındığında $d(f\overline{x},\overline{x})=0$ elde edilir. Şimdi f dönüşümünün sabit noktasının tekliğini gösterelim. Bunun için kabul edelim ki $\overline{x}$ ve $\overline{y}$, f dönüşümünün iki sabit noktası olsun. İki durumda inceleyelim:

1. Durum: $\overline{x}$ ile $\overline{y}$ karşılaştırılabilir olsun. f dönüşümünün tanımından her $n \in \mathbb{N}$ için $f^n\overline{x}$ ile $f^n\overline{y}$ karşılaştırılabilir olup;

$d(\overline{x},\overline{y})=d(f^n\overline{x},f^n\overline{y}) \leq \alpha^n d(\overline{x},\overline{y})$ olup bu ancak $\overline{x}=\overline{y}$ olması ile mümkündür.

2. Durum: $\overline{x}$ ile $\overline{y}$ karşılaştırılamaz olsun. Bu durumda bir $\overline{z} \in X$ var öyle ki $\overline{x}$ ve $\overline{y}$ ile karşılaştırılabilirdir. f dönüşümü karşılaştırılabilir elemanları karşılaştırılabilir elemanlara dönüştürdüğünden her $n \in \mathbb{N}$ için $f^n\overline{z}$, $f^n\overline{x}$ ve $f^n\overline{y}$ ile karşılaştırılabilirdir. Buna göre;

$$\begin{aligned} d(\overline{x},\overline{y})=d(f^n\overline{x},f^n\overline{y}) &\leq d(f^n\overline{x},f^n\overline{z})+d(f^n\overline{z},f^n\overline{y}) \\ &\leq \alpha^n d(\overline{x},\overline{z})+\alpha^n d(\overline{z},\overline{y}) \end{aligned}$$

olup $n \to \infty$ için limit alındığında $d(\overline{x},\overline{y})=0$ elde edilir.

Son olarak her $x \in X$ için $lim_{n\to\infty} f^n x=\overline{x}$ olduğunu gösterelim:

Teorem 4.2.1 koşulları altında $\overline{x}$, f dönüşümünün sabit noktası olmak üzere her $x \in X$ için;

$$lim_{n\to\infty} f^n x = \overline{x}$$

olduğu gösterilebilir. Böylece sabit noktanın varlığı, tekliği yanında nasıl bulunabileceği de gösterilmiş olur. Gerçekten;

x ile $\overline{x}$ noktası karşılaştırılabilir ise f dönüşümünün tanımından her $n \in \mathbb{N}$ için f^nx, $f^n\overline{x}$ karşılaştırılabilirdir. Buna göre;

$$d(\overline{x}, f^n x) = d(f^n\overline{x}, f^n x) \leq \alpha^n d(\overline{x}, x)$$

olup $n \to \infty$ için limit alındığında;

$$lim_{n\to\infty} f^n x = \overline{x}$$

elde edilir. Kabul edelim ki x ile $\overline{x}$ karşılaştırılabilir olmasın. Bu durumda x ve $\overline{x}$ ile karşılaştırılabilecek $y \in X$ vardır. f dönüşümünün tanımından her $n \in \mathbb{N}$ için f^ny, f^nx ve $f^n\overline{x}$ karşılaştırılabilirdir. Buna göre;

$$lim_{n\to\infty} d(\overline{x}, f^n y) = lim_{n\to\infty} d(f^n\overline{x}, f^n y) = 0 \text{ ve } lim_{n\to\infty} d(f^n x, f^n y) = 0$$

elde edilir ki buradan;

$$d(\overline{x}, f^n x) \leq d(\overline{x}, f^n y) + d(f^n y, f^n x)$$

yazılabilir ki $n \to \infty$ için limit alınırsa;

$$\lim_{n\to\infty} f^n x = \overline{x}$$

elde edilir.

Bir önceki bölümde Bhaskar ve Lakshmikantham tarafından ortaya konan Teorem 3.1.7 ve Teorem 3.1.8 nin bir genellemesini Sintunavarat, Kumam ve Cho karma monoton özelliğine sahip olmayan fonksiyonları kullanarak elde etmiştir [33]. Bhaskar ve Lakshmikantham a göre kısmi sıralı metrik uzaylarda ikili sabit noktanın varlığını göstermek için dönüşümün karma monoton özelliğine sahip olması gerekiyordu. Ancak her dönüşüm karma monotonluk özelliğine sahip olmayabilir. İşte bu nedenle aşağıdaki çalışma önemlidir.

Örnek

$X = \mathbb{R}$, her x, y $\in \mathbb{R}$ için $d(x,y) = |x-y|$ alışılmış metrik ile bir tam metrik uzay ve aşağıdaki bağıntı ile kısmi sıralı bir kümedir:

$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow y - x \in [0, \infty)$.

$F: X\ x\ X \to X$

$$(x,y) \to\ F(x,y) = \frac{x+y+2}{3}$$

sürekli dönüşümünü tanımlayalım. Buna göre $y_1 = 2$ ve $y_2 = 3$ alınırsa $y_1 \preccurlyeq y_2$ olsun, ancak $F(x,y_1) \preccurlyeq\ F(x,y_2)$ olup F dönüşümü karma monotonluk özelliğine sahip değildir.

Şimdi karma monotonluk özelliğine sahip olmayan dönüşümler için verilen çalışmayı ifade ve ispat edelim [33]:

4.2.2. Teorem

(X, d) bir tam metrik uzay ve $M \subseteq X^4$ olsun. Kabul edelim ki $\varphi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ dönüşümü, $0 = \varphi(0) < \varphi(t) <$ t ve her $t > 0$ için $\lim_{r \to t^+} \varphi(\mathrm{r}) < t$ şeklinde tanımlı olmak üzere $F : X\ x\ X \to X$ dönüşümü her $(x,\ y,\ u,\ v) \in M$ için;

$$d(F(x,y), F(u,v)) \leq \varphi\left(\frac{d(x,u)+d(y,v)}{2}\right) \qquad (4.1)$$

eşitsizliğini sağlasın. Kabul edelim ki

i) F süreklidir

ya da

ii) Her $n \in \mathbb{N}$ için $(x_{n+1}, y_{n+1}, x_n, y_n) \in M$ ve $x_n \to x\ ,\ y_n \to y$ olacak şekildeki her (x_n), (y_n) dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ için $(x, y, x_n, y_n) \in M$ olacak şekildedir.

$(F(x_0,y_0), F(y_0,x_0), x_0\ , y_0) \in M$ olacak şekilde $(x_0,y_0) \in X\ x\ X$ var ayrıca M kümesi geçişme ve F- değişmez özelliklerini sağlıyorsa F ikili sabit noktaya sahiptir.

İspat

$F(X\ x\ X\ ) \subseteq X$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için X üzerinde;

$$x_n = F(x_{n-1}, y_{n-1}) \text{ ve } y_n = F(y_{n-1}, x_{n-1}) \tag{4.2}$$

olacak şekilde (x_n) ve (y_n) dizilerini oluşturabiliriz. En az bir $n^* \in \mathbb{N}$ için $x_{n^*-1} = x_{n^*}$ ve $y_{n^*-1} = y_{n^*}$ ise o zaman F dönüşümü (x_{n^*-1}, y_{n^*-1}) ikili sabit noktaya sahiptir. Bu ise ispatı tamamlar. Bu yüzden kabul edelim ki her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n-1} \neq x_n$ veya $y_{n-1} \neq y_n$ olsun.

$$(F(x_0, y_0), F(y_0, x_0), x_0\ , y_0) = (x_1, y_1, x_0\ , y_0) \in M$$

olup M, F- değişmez özelliğine sahip olduğundan;

$$(F(x_1, y_1), F(y_1, x_1), F(x_0, y_0), F(y_0, x_0) = (x_2, y_2, x_1\ , y_1) \in M$$

elde edilir ki tekrar M kümesinin F- değişmez özelliğinden;

$$(F(x_2, y_2), F(y_2, x_2), F(x_1, y_1), F(y_1, x_1) = (x_3, y_3, x_2\ , y_2) \in M$$

yazılabilir. Bu şekilde devam edilirse her $n \in \mathbb{N}$ için;

$$(F(x_{n-1}, y_{n-1}), F(y_{n-1}, x_{n-1}), x_{n-1}, y_{n-1}) = (x_n, y_n, x_{n-1}\ , y_{n-1}) \in M$$

yazılır. Her $n \in \mathbb{N}$ için;

$$\delta_{n-1} = d(x_n, x_{n-1}) + d(y_n, y_{n-1})$$

olacak şekilde tanımlı (δ_n) dizisini tanımlayalım. Göstermeliyiz ki her $n \in \mathbb{N}$ için;
$\delta_n \leq 2\varphi(\frac{\delta_{n-1}}{2})$ eşitsizliği sağlanır. Gerçekten, her $n \in \mathbb{N}$ için $(x_n, y_n, x_{n-1}\ , y_{n-1}) \in M$ olduğundan Eş. 4.1 den;

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq d(F(x_n, y_n), F(x_{n-1}, y_{n-1}))$$
$$\leq \varphi\left(\frac{d(x_n, x_{n-1}) + d(y_n, y_{n-1})}{2}\right) = \varphi\left(\frac{\delta_{n-1}}{2}\right) \quad (4.3)$$

elde edilir. M, F- değişmez ve her $n \in \mathbb{N}$ için $(x_n, y_n, x_{n-1}, y_{n-1}) \in M$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $(y_{n-1}, x_{n-1}, y_n, x_n) \in M$ elde edilir. Eş. 4.1 ve her $n \in \mathbb{N}$ için $(y_{n-1}, x_{n-1}, y_n, x_n) \in M$ olduğundan;

$$d(y_{n+1}, y_n) \leq d(F(y_n, x_n), F(y_{n-1}, x_{n-1}))$$
$$= d(F(y_{n-1}, x_{n-1}), F(y_n, x_n))$$
$$\leq \varphi\left(\frac{d(y_{n-1}, y_n) + d(x_{n-1}, x_n)}{2}\right) = \varphi\left(\frac{\delta_{n-1}}{2}\right) \quad (4.4)$$

yazılabilir. Buna göre Eş. 4.3 ve Eş. 4.4 den her $n \in \mathbb{N}$ için;

$$\delta_n \leq 2\varphi\left(\frac{\delta_{n-1}}{2}\right) \quad (4.5)$$

elde edilir. Her $t > 0$ için $\varphi(t) < t$ olduğu ve Eş. 4.5 göz önüne alınırsa her n ∈ ℕ için;

$$\delta_n \leq 2\,\varphi\left(\frac{\delta_{n-1}}{2}\right) < \delta_{n-1}$$

elde edilir. Yani (δ_n) azalan bir dizidir. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} \delta_n = \delta$ olacak şekilde $\delta \geq 0$ sayısı vardır. Şimdi göstereceğiz ki $\delta = 0$ dır. Kabul edelim ki $\delta > 0$ olsun. Eş. 4.5 nin her iki tarafının $n \to \infty$ için limit alınır ve $lim_{r\to t^+} \varphi(r) < t$ olduğundan;

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \delta_n \leq 2 \lim_{n\to\infty} \varphi\left(\frac{\delta_{n-1}}{2}\right) = 2 \lim_{\delta_{n-1}\to\delta^+} \varphi\left(\frac{\delta_{n-1}}{2}\right) < 2\frac{\delta}{2} = \delta$$

olup bu bir çelişkidir. O halde kabul yanlış $\delta = 0$ dır. Yani;

$$lim_{n\to\infty}\, \delta_n = lim_{n\to\infty}\, d(x_{n+1}, x_n) + d(y_{n+1}, y_n) = 0 \quad (4.6)$$

şeklindedir. Şimdi göstermeliyiz ki (x_n) ve (y_n) dizileri Cauchy dizileridir. Kabul edelim ki en az biri Cauchy dizisi olmasın. Bu durumda bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $k \in \mathbb{N}$ için $n_k > m_k \geq k$ olacak şekildeki n_k ve m_k tamsayılarının iki alt dizisi var öyle ki her $k \in \mathbb{N}$ için;

$$r_k = d(x_{m_k}, x_{n_k}) + d(y_{m_k}, y_{n_k)}) \geq \varepsilon \tag{4.7}$$

şeklindedir. Burada n_k, $n_k > m_k$ olacak şekilde m_k sayısına karşılık gelecek şekilde Eş. 4.7 i sağlayan en küçük tamsayı olsun. O zaman;

$$d\left(x_{m_k}, x_{n_k-1}\right) + d\left(y_{m_k}, y_{n_{k-1}}\right) < \varepsilon \tag{4.8}$$

olur. Eş. 4.7 ve Eş. 4.8 i kullanarak;

$$\begin{aligned} \varepsilon \leq r_k &= d(x_{m_k}, x_{n_k}) + d(y_{m_k}, y_{n_k}) \\ &\leq d\left(x_{m_k}, x_{n_k-1}\right) + d\left(x_{n_k-1}, x_{n_k}\right) + d\left(y_{m_k}, y_{n_{k-1}}\right) + d\left(y_{n_k-1}, y_{n_k}\right) \\ &= \left[d\left(x_{m_k}, x_{n_k-1}\right) + d\left(y_{m_k}, y_{n_{k-1}}\right)\right] + \left[d\left(x_{n_k-1}, x_{n_k}\right) + d\left(y_{n_k-1}, y_{n_k}\right)\right] \\ &< \varepsilon + \delta_{n_{k-1}} \end{aligned} \tag{4.9}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $k \to \infty$ için limit alınır ve Eş. 4.6 kullanılırsa;

$$lim_{n\to\infty}\, r_k = \varepsilon > 0$$

elde edilir. $n_k > m_k$ olup, M geçişme ve F-değişmez özelliklerine sahip olduğundan;

$$(x_{n_k}, y_{n_k}, x_{m_k}, y_{m_k}) \in M \text{ ve } (y_{m_k}, x_{m_k}, y_{n_k}\, x_{n_k}) \in M \tag{4.10}$$

elde edilir. Eş. 4.1 ve Eş. 4.10 dan;

$$\begin{aligned} d\left(x_{m_k+1}, x_{n_k+1}\right) &= d(F(x_{m_k}, y_{m_k}), F\left(x_{n_k}, y_{n_k}\right)) \\ &= d(F\left(x_{n_k}, y_{n_k}\right), F\left(x_{m_k}, y_{m_k}\right)) \end{aligned}$$

$$\leq \varphi\left(\frac{d(x_{n_k}, x_{m_k}) + d(y_{n_k}, y_{m_k})}{2}\right) = \varphi\left(\frac{r_k}{2}\right) \tag{4.11}$$

ve

$$d(y_{m_k+1}, y_{n_k+1}) = d(F(y_{m_k}, x_{m_k}), F(y_{n_k}, x_{n_k}))$$
$$\leq \varphi\left(\frac{d(x_{n_k}, x_{m_k}) + d(y_{n_k}, y_{m_k})}{2}\right) = \varphi\left(\frac{r_k}{2}\right) \tag{4.12}$$

elde edilir ki Eş. 4.11 ve Eş. 4.12 kullanılarak her $k \in \mathbb{N}$ için;

$$r_{k+1} \leq 2\varphi\left(\frac{r_k}{2}\right) \tag{4.13}$$

sonucuna ulaşılır. Eş. 4.13 in her iki tarafının $k \to \infty$ için limit alınırsa ve her $t > 0$ için $lim_{r \to t^+} \varphi(r) < t$ olduğundan;

$$\varepsilon = \lim_{k\to\infty} r_{k+1} \leq 2 \lim_{k\to\infty} \varphi\left(\frac{r_k}{2}\right) = 2 \lim_{r_k \to \varepsilon^+} \varphi\left(\frac{r_k}{2}\right) < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur ki bu bir çelişkidir. O halde kabul yanlış (x_n) ve (y_n) dizileri Cauchy dizileridir. X tam metrik uzay olduğundan bir $x, y \in X$ var öyle ki;

$$lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ ve } lim_{n\to\infty} y_n = y \tag{4.14}$$

şeklindedir. Son olarak göstermeliyiz ki (x, y) noktası F dönüşümünün ikili sabit noktasıdır. Kabul edelim ki i) varsayımı doğru olsun. Bu durumda;

$$x = lim_{n\to\infty} x_{n+1} = lim_{n\to\infty} F(x_n, y_n) = F(lim_{n\to\infty} x_n, lim_{n\to\infty} y_n) = F(x, y) \tag{4.15}$$

ve

$$y = lim_{n\to\infty} y_{n+1} = lim_{n\to\infty} F(y_n, x_n) = F(lim_{n\to\infty} y_n, lim_{n\to\infty} x_n) = F(y, x) \tag{4.16}$$

olur ki bu durumda F dönüşümü ikili sabit noktaya sahiptir. Şimdi kabul edelim ki ii) varsayımı doğru olsun. Bu durumda kabulümüzden her $n \in \mathbb{N}$ için $(x, y, x_n, y_n) \in M$ olur. Buna göre üçgen eşitsizliği ve Eş. 4.1 den;

$$d(F(x,y),x) \leq d(F(x,y),x_{n+1}) + d(x_{n+1},x) = d(F(x,y),F(x_n,y_n)) + d(x_{n+1},x)$$
$$\leq \varphi\left(\frac{d(x,x_n)+d(y,y_n)}{2}\right) + d(x_{n+1},x) \quad (4.17)$$

yazılır. Bu son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa $d(F(x,y),x) = 0$ ve dolayısıyla $F(x,y) = x$ elde edilir. Benzer şekilde;

$$d(F(y,x),y) \leq d(F(y,x),y_{n+1}) + d(y_{n+1},y) = d(F(y,x),F(y_n,x_n)) + d(y_{n+1},y)$$
$$\leq \varphi\left(\frac{d(y,y_n+d(x,x_n))}{2}\right) + d(y_{n+1},y) \quad (4.18)$$

olup son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa $d(F(y,x),y) = 0$ ve dolayısıyla $F(y,x) = y$ elde edilir. Bu durumda F dönüşümü ikili sabit noktaya sahiptir.

Şimdi ikili sabit noktanın tekliği ile ilgili yapılan çalışmayı ifade edelim [33]:

4.2.3. Teorem

Teorem 4.2.2 nin hipotezlerine ek olarak her $(x,y),(z,t) \in X\ x\ X$ için bir $(u,v) \in X\ x\ X$ var öyle ki $(x,y,u,v) \in M$ ve $(z,t,u,v) \in M$ dir. O halde F bir tek ikili sabit noktaya sahiptir.

İspat

Teorem 4.2.2 den biliyoruz ki F dönüşümü ikili sabit noktaya sahiptir. Kabul edelim ki (x, y) ve (z, t), F dönüşümünün sabit noktaları yani; $x = F(x,y), y = F(y,x)$ ve $z = F(z,t), t = F(t,z)$ olsun. Şimdi biz göstermeliyiz ki $x = z$ ve $y = t$ dir. Hipotezden $(u,v) \in X\ x\ X$ var öyle ki $(x,y,u,v) \in M$ ve $(z,t,u,v) \in M$ dir.

$u_0 = u$, $v_0 = v$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için;

$u_n = F(u_{n-1}, v_{n-1})$ ve $v_n = F(v_{n-1}, u_{n-1})$

olacak şekilde (u_n) ve (v_n) dizilerini oluşturalım. M, F-değişmez olup $(x, y, u_0, v_0) = (x, y, u, v) \in M$ olduğundan $(F(x,y), F(y,x), F(u,v), F(v,u)) \in M$ yani, $(x, y, u_1, v_1) \in M$ dir. $(x, y, u_1, v_1) \in M$ ve yine M, F-değişmez olduğundan, $(F(x,y), F(y,x), F(u_1,v_1), F(v_1,u_1)) \in M$ yani, $(x, y, u_2, v_2) \in M$ dir. Bu şekilde devam edilerek her $n \in \mathbb{N}$ için;

$$(x, y, u_n, v_n) \in M \tag{4.19}$$

elde edilir. Eş. 4.1 ve Eş. 4.19 dan;

$$d(x, u_{n+1}) = d(F(x,y), F(u_n, v_n)) \leq \varphi\left(\frac{d(x,u_n) + d(y,v_n)}{2}\right) \tag{4.20}$$

şeklindeki eşitsizlik elde edilir. M, F-değişmez ve her $n \in \mathbb{N}$ için $(x, y, u_n, v_n) \in M$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için;

$$(v_n, u_n, y, x) \in M \tag{4.21}$$

yazılır. Eş. 4.1 ve Eş. 4.21 den;

$$d(v_{n+1}, y) = d(F(v_n, u_n), F(y,x)) \leq \varphi\left(\frac{d(y,v_n) + d(x,u_n)}{2}\right) \tag{4.22}$$

elde edilir. Buna göre Eş. 4.20 ve 4.22 den $n \in \mathbb{N}$ için;

$$\frac{d(x,u_{n+1}) + d(y,v_{n+1})}{2} \leq \varphi\left(\frac{d(x,u_n) + d(y,v_n)}{2}\right) \tag{4.23}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu şekilde devam edilerek;

$$\frac{d(x,u_{n+1}) + d(y,v_{n+1})}{2} \leq \varphi^n\left(\frac{d(x,u_1) + d(y,v_1)}{2}\right) \tag{4.24}$$

elde edilir. Her $t > 0$ için $\varphi(t) < t$ ve $\lim_{r\to t^+} \varphi(\mathrm{r}) < t$ şeklinde tanımlı olduğundan her $t > 0$ için $\lim_{n\to\infty} \varphi^n(t) = 0$ elde edilir. Buna göre Eş. 4.24 den;

$$\lim_{n\to\infty}[d(x,u_{n+1}) + d(y,v_{n+1})] = 0 \tag{4.25}$$

ve benzer şekilde;

$$\lim_{n\to\infty}[d(z,u_{n+1}) + d(t,v_{n+1})] = 0 \tag{4.26}$$

bulunur. Üçgen eşitsizliğinden her $n \in \mathbb{N}$ için;

$$\begin{aligned} d(x,z) + d(y,t) &\le d(x,u_{n+1}) + d(z,u_{n+1}) + d(y,v_{n+1}) + d(t,v_{n+1}) \\ &= [d(x,u_{n+1}) + d(y,v_{n+1})] + [d(z,u_{n+1}) + d(t,v_{n+1})] = 0 \end{aligned} \tag{4.27}$$

elde edilir ki son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa $x = z$ ve $y = t$ sonucuna ulaşılır. Böylece ikili sabit noktanın tekliği gösterilmiş olur.

4.2.1. Sonuç [33]

(X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme ve (X, d) bir tam metrik uzay, $F: X\ x\ X \to X$, X üzerinde karma monotonluk özelliğine sahip bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ dönüşümü, $0 = \varphi(0) < \varphi(t) < t$ ve her $t > 0$ için $\lim_{r\to t^+} \varphi(\mathrm{r}) < t$ şeklinde tanımlı olmak üzere $F : X\ x\ X \to X$ dönüşümü $x \succcurlyeq u$, $y \preccurlyeq v$ olacak şekildeki her $x,\ y,\ u,\ v \in X$ için;

$$d(F(x,y),F(u,v)) \le \varphi\left(\frac{d(x,u) + d(y,v)}{2}\right) \tag{4.28}$$

eşitsizliği sağlansın. Kabul edelim ki

i) F süreklidir

ya da

ii) X deki $\mathrm{x_n} \to x$ olacak şekildeki azalmayan her (x_n) dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathrm{x_n} \preccurlyeq x$,

X deki $\mathrm{y_n} \to y$ olacak şekildeki artmayan her (y_n) dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ için $y \preccurlyeq \mathrm{y_n}$.

Ayrıca kabul edelim ki X x X üzerinde her $(x,y),(z,t) \in X\,x\,X$ için $x \succcurlyeq u$, $y \preccurlyeq v$ ve $z \succcurlyeq u$, $t \preccurlyeq v$ olacak şekilde $(u,v) \in X\,x\,X$ vardır. Eğer $x_0 \preccurlyeq F(x_0,y_0)$ ve $y_0 \succcurlyeq F(y_0,x_0)$ olacak şekilde $x_0, y_0 \in X$ var ise bu durumda F bir tek ikili sabit noktaya sahiptir.

İspat

İlk olarak $M \subseteq X^4$ kümesini $M = \{(a,b,c,d) \in X^4 : a \succcurlyeq c \; ve \; b \preccurlyeq d\}$ şeklinde tanımlayalım. Gösterelim ki bu küme F-değişmez ve geçişme özelliğini sağlar. Gerçekten;

(i) $(x,y,z,w) \in M$ olsun. Bu durumda M kümesinin tanımından;

$x \succcurlyeq z$ ve $y \preccurlyeq w$

olup buna göre $w \succcurlyeq y$ ve $z \preccurlyeq x$ olduğundan $(w,z,y,x) \in M$ elde edilir. Benzer şekilde $(w,z,y,x) \in M$ ise $(x,y,z,w) \in M$ elde edilir.

(ii) $(x,y,z,w) \in M$ olsun. Bu durumda M kümesinin tanımından;

x $\succcurlyeq z$ ve y $\preccurlyeq$ w

yazılır. F dönüşümü karma monotonluk özelliğine sahip olduğundan;

$F(x,y) \succcurlyeq F(z,y) \succcurlyeq F(z,w)$ ve $F(y,x) \preccurlyeq F(w,x) \preccurlyeq F(w,z)$

elde edilir ki M kümesinin tanımından;

$(F(x,y),F(y,x),F(z,w),F(w,z)) \in M$

yazılır. Böylece M kümesi F- değişmez özelliğine sahiptir.

Şimdi de M kümesinin geçişme özelliğine sahip olduğunu gösterelim:

$(x,\ y,\ z,\ w) \in M$ ve $(z,\ w,\ u,\ t) \in M$ olsun. Buna göre;

$x \succcurlyeq z$ ve $y \preccurlyeq w$, $z \succcurlyeq u$ ve $w \preccurlyeq t$ olup kısmi sıralama bağıntısının özelliğinden $x \succcurlyeq u$ ve $y \preccurlyeq t$ elde edilir. Böylece $(x,\ y,\ u,\ t) \in M$ yazılabilir. Eş. 4.28 den; her $(x,\ y,\ u,\ v) \in M$ için;

$$d(F(x,y),F(u,v)) \leq \varphi\left(\frac{d(x,u)+d(y,v)}{2}\right)$$

eşitsizliği sağlanır. $x_0 \preccurlyeq F(x_0,y_0)$ ve $y_0 \succcurlyeq F(y_0,x_0)$ olacak şekilde $x_0, y_0 \in M$ var ise M kümesinin tanımından;

$(F(x_0,y_0),F(y_0,x_0),x_0,y_0) \in M$ bulunur. Ayrıca ii) varsayımından;

X üzerinde $x_n \to x$ olacak şekildeki azalmayan (x_n) dizisi, $y_n \to y$ olacak şekildeki artmayan (y_n) dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için;

$x_1 \preccurlyeq x_2 \preccurlyeq x_3 \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq x_n \preccurlyeq x_{n+1} \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq x$

ve

$y_1 \succcurlyeq y_2 \succcurlyeq y_3 \succcurlyeq \ldots \succcurlyeq y_n \succcurlyeq y_{n+1} \succcurlyeq \ldots \succcurlyeq y$

elde edilir. Bu yüzden her $n \in \mathbb{N}$ için $(x,\ y,\ x_n,\ y_n) \in M$ olur. Böylece Teorem 4.2.2 deki ii) koşulu sağlanmış olur. O halde Teorem 4.2.2 nin bütün hipotezleri sağlandığından F dönüşümü bir ikili sabit noktaya sahiptir. Şimdi bu sabit noktanın tekliğini gösterelim. Şimdi Teorem 4.2.3 ün hipotezlerini kontrol edelim: Hipotezden her $(x,y),(z,t) \in X\ x\ X$ için $x \succcurlyeq u$, $y \preccurlyeq v$ ve $z \succcurlyeq u$, $t \preccurlyeq v$ olacak şekilde $(u,\ v) \in X\ x\ X$ var olması demek, her $(x,y),(z,t) \in X\ x\ X$ için bir $(u,v) \in X\ x\ X$ var öyle ki $(x,\ y,\ u,\ v) \in M$ ve $(z,\ t,\ u,\ v) \in M$ olması demektir. Böylece Teorem 4.2.3 nin bütün hipotezleri sağlandığından F dönüşümü bir tek ikili sabit noktaya sahiptir.

4.2.2. Sonuç [33]

(X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme ve (X, d) bir tam metrik uzay, $F: X\ x\ X \to X$, X üzerinde karma monotonluk özelliğine sahip bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $x \succcurlyeq u,\ y \preccurlyeq v$ olacak şekildeki her $x,\ y,\ u,\ v \in X$ için bir $\alpha \in [0,1)$ var öyle ki;

$$d\big(F(x,y),F(u,v)\big) \leq \frac{\alpha}{2}\left(d(x,u)+d(y,v)\right)$$

olsun. Kabul edelim ki

i) F sürekli

ya da

ii) X deki $x_n \to x$ olacak şekildeki azalmayan her (x_n) dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preccurlyeq x$,

X deki $y_n \to y$ olacak şekildeki artmayan her (y_n) dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için $y \preccurlyeq y_n$.

olsun. $x_0 \preccurlyeq F(x_0,y_0)$ ve $y_0 \succcurlyeq F(y_0,x_0)$ olacak şekilde $x_0, y_0 \in X$ var ise bu durumda F dönüşümü bir tek ikili sabit noktaya sahiptir.

İspat

Sonuç 4.2.1 de φ fonksiyonu $\alpha \in [0,1)$ olmak üzere $\varphi(t) = \alpha t$ olarak alınırsa ispat tamamlanır.

5. UYGULAMALAR

5.1. Metrik ve Kısmi Sıralı Metrik Uzaylardaki Sabit Nokta Teoremlerinin İntegral ve Diferensiyel Denklemlere Uygulamaları

Bu bölümde biz öncelikle 3. bölümde ispatlanan Sonuç 3.1.1 sabit nokta teoreminin bir uygulaması olarak lineer olmayan bir integral denklemin bir tek olan çözümünün varlığını araştıracağız. Bundan önce bu bölümde kullanacağımız tanımımızı ifade edelim [26]:

5.1.1. Tanım

$t \in I = [a,b]$ olmak üzere;

$$x(t) = \int_a^b (K_1(t,s) + K_2(t,s)) \left(f\big(s,x(s)\big) + g\big(s,x(s)\big)\right) ds + h(t)$$

integral denklemi düşünelim.

Eğer her $t \in [a,b]$ için $\alpha(t) \leq \beta(t)$ ve

$$\alpha(t) \leq \int_a^b K_1(t,s) \left(f\big(s,\alpha(s)\big) + g\big(s,\beta(s)\big)\right) ds + \int_a^b K_2(t,s) \left(f\big(s,\beta\ (s)\big) + g\big(s,\alpha(s)\big)\right) ds + h(t)$$

$$\beta(t) \geq \int_a^b K_1(t,s) \left(f\big(s,\beta(s)\big) + g\big(s,\alpha(s)\big)\right) ds + \int_a^b K_2(t,s) \left(f\big(s,\alpha(s)\big) + g\big(s,\beta(s)\big)\right) ds + h(t)$$

ise $(\alpha,\ \beta) \in C(I,\mathbb{R}) \times C(I,\mathbb{R})$ yukarıdaki integral denklemin üst ve alt çözüm çifti olarak adlandırılır.

$\theta\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ şeklinde tanımlı θ dönüşümü aşağıdaki iki durumu sağlıyor olsun:

(i) θ artandır,

(ii) Bir $\psi \in \Psi$ var öyle ki her $x \in [0,\infty)$ için $\theta(x) = \frac{x}{2} - \psi\left(\frac{x}{2}\right)$. Burada Ψ ailesi 3. bölümde Luang ve Thuan tarafından tanımlanan fonksiyonlar ailesidir.

Bu şekilde tanımlı bütün θ fonksiyonlarının ailesini Θ ile tanımlayalım.

Örnek

$0 \leq k < \frac{1}{2}$ olmak üzere $\theta(x) = kx$

$\theta(x) = \dfrac{x^2}{2(x+1)}$,

şeklinde tanımlı θ fonksiyonları Θ ailesine ait fonksiyonlardır. Şimdi, $t \in I = [a, b]$ olmak üzere;

$$x(t) = \int_a^b (K_1(t,s) + K_2(t,s)) \Big(f\big(s, x(s)\big) + g\big(s, x(s)\big)\Big) ds + h(t) \qquad (5.1)$$

integral denklemi göz önüne alalım ve kabul edelim ki K_1, K_2, f ve g aşağıdaki özellikleri sağlıyor olsun.

5.1.1. Varsayım

(i) Her $t,\ s \in [a, b]$ için $K_1(t,s) \geq 0$ ve $K_2(t,s) \leq 0$.

(ii) $\lambda,\ \mu > 0$ ve $\theta \in \Theta$ var öyle ki $x \geq y$ olacak şekildeki her $x,\ y \in \mathbb{R}$ için;

$$0 \leq f(t,x) - f(t,y) \leq \lambda\theta(x-y)$$

ve

$$-\mu\theta(x-y) \leq g(t,x) - g(t,y) \leq 0$$

(iii) $max\{\lambda, \mu\}\, sup_{t\in I} \int_a^b (K_1(t,s) - K_2(t,s))ds \leq \dfrac{1}{2}$

şeklinde olsun.

5.1.1. Teorem [26]

$K_1,\ K_2 \in C(I \times I,\ \mathbb{R})$, $f,\ g \in C(I \times \mathbb{R},\ \mathbb{R})$ ve $h \in C(I,\ \mathbb{R})$ olmak üzere Eş. 5.1 ile verilen integral denklemi düşünelim ve kabul edelim ki Varsayım 5.1.1 sağlansın. Bu durumda Eş. 5.1 ile verilen integral denklemin üst ve alt çözümünün varlığı Eş. 5.1 ile verilen integral denklemin $C(I,\ \mathbb{R})$ de bir tek çözümünün varlığını garanti eder.

İspat

$X := C(I,\ \mathbb{R})$ olsun. X üzerinde $x, y \in C(I,\ \mathbb{R})$ olmak üzere;

$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow$ her $t\ \in [a,b]\ için\ x(t) \leq y(t)$

şekilde tanımlı sıralama bağıntısı tanımlayalım. Bu sıralama bağıntısı ile X kısmi sıralı bir kümedir. X kümesi üzerinde her $x, y \in C(I,\ \mathbb{R})$ için $d(x,y) = sup_{t\in I}|x(t) - y(t)|$ şekilde tanımlı supremum metriği ile tam metrik uzaydır.

Kabul edelim ki X üzerinde monoton azalmayan bir (u_n) dizisi bir $u \in X$ noktasına yakınsıyor olsun. Bu durumda her $t \in I$ için;

$u_1(t) \leq\ u_2(t) \leq u_3(t) \leq \ldots \leq u_n(t) \leq u_{n+1}(t) \leq \ldots$

şeklindeki reel sayı dizisi $u(t)$ noktasına yakınsar. Bu yüzden her $t \in I$ için $u_n(t) \leq$ u(t) olup her n için $u_n \preccurlyeq$ u olur. Benzer şekilde gösterebiliriz ki X üzerinde artmayan (v_n) dizisinin limiti olan v, dizinin bütün elemanları için bir alt sınırdır.

Yani her n için $v_n \succcurlyeq v$ şeklinde olur. Bu yüzden Sonuç 3.1.1 nin ii) şartını sağlar.

Ayrıca, $X \times X = C(I,\ \mathbb{R}) \times C(I,\ \mathbb{R})$ üzerinde tanımlanan $(x,y),\ (u,v) \in X \times X$ olmak üzere;

$(x,y) \preccurlyeq (u,v) \Leftrightarrow$ her $t \in I$ için, $x(t) \leq u(t)$ ve $y(t) \geq v(t)$

şeklinde tanımlı sıralama bağıntısı ile kısmi sıralı bir kümedir.

$x, y \in X$ keyfi olmak üzere her $t \in I$ için $max\{x(t), y(t)\}$ ve $min\{x(t), y(t)\}$ sırasıyla x, y nin üst ve alt sınırlarıdır. Bu yüzden her $(x,y), (u,v) \in X \times X$ için (x, y) ve (u, v) ile karşılaştırılabilir $(max\{x,u\}, min\{y,v\}) \in X \times X$ vardır. $F : X \times X \to X$ fonksiyonunu her $t \in I$ için;

$$F(x,y)(t)=\int_a^b K_1(t,s)\left(f\left(s,x(s)\right)+g\left(s,y(s)\right)\right)ds+$$
$$+\int_a^b K_2(t,s)\left(f\left(s,y(s)\right)+g\left(s,x(s)\right)\right)ds+h(t)$$

şeklinde tanımlayalım. Şimdi gösterelim ki F dönüşümü karma monotonluk özelliğine sahiptir. Gerçekten $x_1 \preccurlyeq x_2$ yani, her $t\in[a,b]$ için $x_1(t)\le x_2(t)$ olduğunda;

$$F(x_1,y)(t)-F(x_2,y)(t)=\int_a^b K_1(t,s)\left(f\left(s,x_1(s)\right)+g\left(s,y(s)\right)\right)ds+$$
$$+\int_a^b K_2(t,s)\left(f\left(s,y\,(s)\right)+g\left(s,x_1(s)\right)\right)ds$$
$$-\int_a^b K_1(t,s)\left(f\left(s,x_2(s)\right)+g\left(s,y(s)\right)\right)ds-$$
$$-\int_a^b K_2(t,s)\left(f\left(s,y(s)\right)+g\left(s,x_2(s)\right)\right)ds$$
$$=\int_a^b K_1(t,s)\left(f\left(s,x_1(s)\right)-f\left(s,x_2(s)\right)\right)ds+$$
$$+\int_a^b K_2(t,s)\left(g\left(s,x_1(s)\right)-g\left(s,x_2(s)\right)\right)ds\le 0$$

Varsayım 5.1.1 den her $t\in[a,b]$ için $F(x_1,y)(t)-F(x_2,y)(t)\le 0$ olup bu $F(x_1,y)\preccurlyeq F(x_2,y)$ olması demektir.

Benzer şekilde $y_1 \succcurlyeq y_2$, yani her $t\in[a,b]$ için $y_1(t)\ge y_2(t)$ oduğunda;

$$F(x,y_1)(t)-F(x,y_2)(t)=\int_a^b K_1\,(t,s)(f\left(s,x(s)+g\left(s,y_1(s)\right)\right)ds+$$
$$+\int_a^b K_2\,(t,s)(f\left(s,y_1(s)+g\left(s,x(s)\right)\right)ds-$$
$$-\int_a^b K_1\,(t,s)(f\left(s,x(s)+g\left(s,y_2(s)\right)\right)ds-$$
$$-\int_a^b K_2\,(t,s)(f(s,y_2(s)+g(s,x(s)))ds$$

$$= \int_a^b K_1(t,s)\left(g\big(s,y_1(s)\big) - g\big(s,y_2(s)\big)\right)ds +$$

$$+ \int_a^b K_2(t,s)(f(s,y_1(s) - f(s,y_2(s))ds \le 0$$

Varsayım 5.1.1 ile her t ∈ [a,b] için $F(x,y_1)(t) \le F(x,y_2)(t)$ olup $F(x,y_1) \preccurlyeq F(x,y_2)$ dir. Bu yüzden F dönüşümü karma monoton özelliğine sahiptir.

Şimdi, $x \succcurlyeq u$ ve $y \preccurlyeq v$ yani her $t \in [a,b]$ için $x(t) \ge u(t)$ ve $y(t) \le v(t)$ olduğunda;

$$d\big(F(x,y),F(u,v)\big) = sup_{t\in I}|F(x,y)(t) - F(u,v)(t)| =$$

$$= sup_{t\in I}\left|\int_a^b K_1(t,s)(f(s,x(s) + g(s,y(s)))ds +\right.$$

$$+ \int_a^b K_2(t,s)(f\left(s,y(s) + g\big(s,x(s)\big)\right)ds -$$

$$- \int_a^b K_1(t,s)(f\left(s,u(s) + g\big(s,v(s)\big)\right)ds -$$

$$\left. - \int_a^b K_2(t,s)(f(s,v(s) + g(s,u(s)))ds\right| =$$

$$= sup_{t\in I}\left|\int_a^b K_1(t,s)[(f(s,x(s) - f\big(s,u(s)\big)\right.$$

$$+(g\big(s,y(s)\big) - g\big(s,v(s)\big))]ds +$$

$$+ \int_a^b K_2(t,s)[(f(s,y(s) - f\big(s,v(s)\big) +$$

$$\left. +(g\big(s,x(s)\big) - g\big(s,u(s)\big))]ds\right|$$

$$= sup_{t\in I}\left|\int_a^b K_1(t,s)[(f(s,x(s) - f\big(s,u(s)\big)\right.$$

$$-(g\big(s,v(s)\big) - g\big(s,y(s)\big))]ds -$$

$$- \int_a^b K_2(t,s)[(f(s,v(s) - f\big(s,y(s)\big) -$$

$$\left. -(g\big(s,x(s)\big) - g\big(s,u(s)\big))]ds\right|$$

$$\le sup_{t\in I}\left|\int_a^b K_1(t,s)[\lambda\,\theta(x(s) - u(s)) + \mu\theta(v(s) - y(s))]ds -\right.$$

$$-\int_a^b K_2(t,s)[\lambda\,\theta(v(s)-y(s))+\mu\theta(x(s)-u(s))]ds\Big|$$

$$\leq \max\{\lambda,\mu\}\, sup_{t\in I}\int_a^b |(K_1(t,s)-K_2(t,s)[\theta\big(x(s)-u(s)\big)+$$

$$+\theta\big(v(s)-y(s)\big)]ds|$$

θ artan fonksiyon ve $x \succcurlyeq u$, $y \preccurlyeq v$ olduğundan her $s \in [a,b]$ için;

$\theta\big(x(s)-u(s)\big) \leq \theta(d(x,u))$ ve $\theta\big(v(s)-y(s)\big) \leq \theta(d(v,y))$ olup

$$d(F(x,y),F(u,v)) \leq \max\{\lambda,\mu\}\ [\theta\big(d(x,u)\big)+\ \theta\big(d(v,y)\big)]\times$$

$$\times sup_{t\in I}\int_a^b (K_1(t,s)-K_2(t,s))\,ds$$

$$\leq \frac{1}{2}[\theta\big(d(x,u)\big)+\ \theta\big(d(v,y)\big)]$$

$$\leq \theta(d(x,u)+\ d(v,y))$$

$$= \frac{d(x,u)+\ d(v,y)}{2} - \psi(\frac{d(x,u)+\ d(v,y)}{2})$$

elde edilir ki buradan $x \succcurlyeq u$, $y \preccurlyeq v$ için;

$$d\big(F(x,y),F(u,v)\big) \leq \frac{d(x,u)+\ d(v,y)}{2} - \psi(\frac{d(x,u)+\ d(v,y)}{2})$$

dir. Şimdi (α,β), Eş. 5.1 ile verilen integral denklemin bir alt ve üst çözüm çifti olduğundan her $t \in [a,b]$ için;

$$\alpha(t) \leq F(\alpha,\beta)(t)\ ve\ \beta(t) \geq F(\beta,\alpha)(t)$$

Yani;

$$\alpha \preccurlyeq F(\alpha,\beta)\ ve\ \beta \succcurlyeq F(\beta,\alpha)$$

elde edilir. Ayrıca $\alpha \preccurlyeq \beta$ olduğundan Sonuç 3.1.1 nin bütün hipotezleri sağlanır. Böylece

F dönüşümü bir tek (x, y) ikili sabit noktaya sahiptir üstelik ikili sabit noktasının bileşenleri eşittir. Bu yüzden $x = y$, yani her $t \in [a, b]$ için $x(t) = y(t)$ sonucuna varılır ki buna göre $x = F(x, x)$ olup x, Eş. 5.1 ile verilen integral denklemin bir tek çözümüdür.

Şimdi 3. bölümde Teorem 3.1.21 ile verilen çalışmanın Harjani ve Sadarangani tarafından birinci mertebeden periyodik bir diferensiyel denkleme uygulamasını ifade edelim. $t \in [0, T]$, $T > 0$ ve $f : I\ x\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{cases} u'(t) = f\big(t, u(t)\big) \\ \quad u(0) = u(T) \end{cases} \tag{5.2}$$

birinci mertebeden periyodik diferensiyel denklemi düşünelim. $C(I)$(I = [0, T]) olsun. $C(I)$, üzerinde $x, y \in C(I)$ olmak üzere;

$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow$ her t $\in I$ için $x(t) \leq y(t)$

şeklindeki sıralama bağıntısı ile $C(I)$ kısmi sıralı bir kümedir. $C(I)$ kümesi üzerinde her $x, y \in C(I)$ için $d(x, y) = sup_{t \in I}|x(t) - y(t)|$ şeklinde tanımlı supremum metriği ile tam metrik uzaydır. Bunun yanında açık bir şekilde $x, y \in C(I)$ keyfi olmak üzere her $t \in I$ için $max\{x(t), y(t)\}$ ve $min\{x(t), y(t)\}$ sırasıyla x, y nin üst ve alt sınırlarıdır. Ayrıca kabul edelim ki $C(I)$ üzerinde monoton azalmayan bir (u_n) dizisi bir $u \in C(I)$ noktasına yakınsıyor olsun. Bu durumda her $t \in I$ için;

$u_1(t) \leq u_2(t) \leq u_3(t) \leq \ldots \leq u_n(t) \leq u_{n+1}(t) \leq \ldots$

şeklindeki reel sayı dizisi $u(t)$ noktasına yakınsar. Bu yüzden he $t \in I$ için $u_n(t) \leq$ u(t) olup her n için $u_n \preccurlyeq$ u olur.

5.1.2. Teorem [22]

$f : I\ x\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu ile Eş. 5.2 ile ifade edilen diferensiyel denklemi düşünelim. Kabul edelim ki;

$$\alpha \leq (\frac{2\lambda(e^{\lambda T}-1)}{T(e^{\lambda T}+1)})^{\frac{1}{2}}$$

olacak şekilde $\lambda, \alpha > 0$ var öyle ki $x \geqslant y$ olacak şekildeki her $x, y \in \mathbb{R}$ için;

$$0 \leq f(t,y) + \lambda y - [f(t,x) + \lambda x] \leq \alpha\sqrt{ln[(y-x)^2+1]}$$

eşitsizliği sağlansın. Eğer Eş. 5.2 ile ifade edilen diferensiyel denklemin bir alt çözümü var ise bu denklemin bir tek çözümü vardır.

İspat

Eş. 5.2. ile verilen diferensiyel denklem $t \in [0,T]$ için;

$$\begin{cases} u'(t) + \lambda u(t) = f\big(t,u(t)\big) + \lambda u(t) \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir. Bu problem $G(t,s)$,

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{e^{\lambda(T+s-t)}}{e^{\lambda T}-1}, & 0 \leq s < t \leq T \\ \dfrac{e^{\lambda(s-t)}}{e^{\lambda T-1}}, & 0 \leq t < s \leq T \end{cases}$$

şeklinde olmak üzere aşağıdaki integral denkleme denktir:

$$u(t) = \int_0^T G(t,s)\big[f\big(s,u(s)\big) + \lambda u(s)\big]ds \qquad (5.3)$$

Öncelikle Eş. 5.2 ile verilen diferensiyel denklemin Eş. 5.3 ile verilen integral denkleme denk olduğunu gösterelim. Buna göre İntegral denklemin bir çözümü diferensiyel denklemin bir çözümüdür. Eş. 5.3 ile verilen integral denklemi göz önüne alalım.

$$u(0) = \int_0^T G(0,s)\big[f\big(s,u(s)\big) + \lambda u(s)\big]ds$$

$$= \int_0^T \frac{e^{\lambda s}}{e^{\lambda T-1}}\big[f\big(s,u(s)\big) + \lambda u(s)\big]ds$$

$$= \int_0^T G(T,s)\big[f\big(s,u(s)\big) + \lambda u(s)\big]ds = u(T)$$

olup sınır koşulları sağlanır. Ayrıca;

$$u(t) = \int_0^t G(t,s)\big[f\big(s,u(s)\big) + \lambda u(s)\big]ds + \int_t^T G(t,s)\big[f\big(s,u(s)\big) + \lambda u(s)\big]ds$$

$$= \int_0^t \frac{e^{\lambda(T+s-t)}}{e^{\lambda T}-1}\big[f\big(s,u(s)\big) + \lambda u(s)\big]ds + \int_t^T \frac{e^{\lambda(s-t)}}{e^{\lambda T-1}}\big[f\big(s,u(s)\big) + \lambda u(s)\big]ds$$

$$= e^{-\lambda t}\int_0^t \frac{e^{\lambda(T+s)}}{e^{\lambda T}-1}\big[f\big(s,u(s)\big) + \lambda u(s)\big]ds + e^{-\lambda t}\int_t^T \frac{e^{\lambda s}}{e^{\lambda T-1}}\big[f\big(s,u(s)\big) + \lambda u(s)\big]ds$$

$$u'(t) = -\lambda e^{-\lambda t}\int_0^t \frac{e^{\lambda(T+s)}}{e^{\lambda T}-1}\big[f\big(s,u(s)\big) + \lambda u(s)\big]ds +$$

$$+e^{-\lambda t}\left(\frac{e^{\lambda(T+t)}}{e^{\lambda T}-1}\big[f\big(t,u(t)\big) + \lambda u(t)\big]\right) -$$

$$-\lambda e^{-\lambda t}\int_t^T \frac{e^{\lambda s}}{e^{\lambda T-1}}\big[f\big(s,u(s)\big) + \lambda u(s)\big]ds -$$

$$-e^{-\lambda t}\left(\frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda T-1}}\big[f\big(t,u(t)\big) + \lambda u(t)\big]\right)$$

$$= -\lambda u(t) + e^{-\lambda t}\big(f\big(t,u(t)\big) + \lambda u(t)\big)\frac{e^{\lambda(T+t)} - e^{\lambda t}}{e^{\lambda T}-1}$$

$$= -\lambda u(t) + f\big(t,u(t)\big) + \lambda u(t) = f\big(t,u(t)\big)$$

olup diferensiyel denklem sağlanır. Şimdi diferensiyel denkleminin bir çözümünün integral denklemin çözümü olduğunu gösterelim:

$$\begin{cases} u'(t) = f\big(t, u(t)\big) \\ \quad u(0) = u(T) \end{cases}$$

diferensiyel denklemi $t \in [0, T]$ için;

$$\begin{cases} u'(t) + \lambda u(t) = f\big(t, u(t)\big) + \lambda u(t) \\ \qquad\qquad u(0) = u(T) \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir. Bu son eşitliğin her iki tarafı $e^{\lambda s}$ ile çarpılıp integrallenirse;

$$\Rightarrow \int_0^t [u'(s) + \lambda u(s)]\, e^{\lambda s} ds = \int_0^t e^{\lambda s} [f\big(s, u(s)\big) + \lambda u(s)]\, ds$$

$$\Rightarrow \int_0^t d(\, e^{\lambda s} u(s)) = \int_0^t e^{\lambda s} [f\big(s, u(s)\big) + \lambda u(s)]\, ds$$

$$\Rightarrow e^{\lambda t} u(t) = u(0) + \int_0^t e^{\lambda s} \big[f\big(s, u(s)\big) + \lambda u(s)\big]\, ds \qquad (5.4)$$

$$e^{\lambda T} u(0) = e^{\lambda T} u(T) = u(0) + \int_0^T e^{\lambda s} \big[f\big(s, u(s)\big) + \lambda u(s)\big]\, ds$$

olur ki buradan;

$$u(0) = \int_0^T \frac{e^{\lambda s}}{e^{\lambda T - 1}} \big[f\big(s, u(s)\big) + \lambda u(s)\big]\, ds$$

elde edilir. Buna göre $u(0)$, Eş. 5.4 de yerine yazılırsa;

$$u(t) = \int_0^T G(t, s) \big[f\big(s, u(s)\big) + \lambda u(s)\big]\, ds$$

bulunur. $F: C(I) \to C(I)$ fonksiyonunu;

$$(Fu)(t) = \int_0^T G(t,s)\big[f\big(s,u(s)\big) + \lambda u(s)\big]ds$$

şeklinde tanımlayalım. Gösterelim ki $u \in C(I)$, F dönüşümünün sabit noktasıdır. Böylece $u \in C(I)$, verilen diferensiyel denklemin çözümü olur. Bu nedenle 3. bölümde Teorem 3.1.21 nin hipotezlerini kontrol edelim. F dönüşümü azalmayandır. Gerçekten;

$$u \succcurlyeq v \Rightarrow f(t,u) + \lambda u \geq f(t,v) + \lambda v$$

olup $G(t,s) > 0$ olduğundan her $t \in I$ için;

$$\begin{aligned}(Fu)(t) &= \int_0^T G(t,s)\big[f\big(s,u(s)\big) + \lambda u(s)\big]ds \\ &\geq \int_0^T G(t,s)\big[f\big(s,v(s)\big) + \lambda v(s)\big]ds = (Fv)(t)\end{aligned}$$

elde edilir. Bunun yanı sıra u $\succcurlyeq v$ için;

$$\begin{aligned}d(Fu,Fv) &= \sup\{|(Fu)(t) - (Fv)(t)| : t \in I\} = \sup\{(Fu)(t) - (Fv)(t)) : t \in I\} \\ &= \sup\left\{\int_0^T G(t,s)\big[f\big(s,u(s)\big) + \lambda u(s) - f\big(s,v(s)\big) - \lambda v(s)\big]ds : t \in I\right\} \\ &\leq \sup\left\{\int_0^T G(t,s)\alpha\sqrt{\ln\Big[\big(u(s)-v(s)\big)^2 + 1\Big]}\,ds : t \in I\right\} \qquad (5.5)\end{aligned}$$

bulunur ki bu son integralde Cauchy- Schwarz eşitsizliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned}&\int_0^T G(t,s)\alpha\sqrt{\ln\Big[\big(u(s)-v(s)\big)^2 + 1\Big]}\,ds \leq \\ &\leq \left(\int_0^T \big(G(t,s)\big)^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T \alpha^2 \ln\Big[\big(u(s)-v(s)\big)^2 + 1\Big]ds\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (5.6)\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 5.6 da eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk integralden;

$$\int_0^T \big(G(t,s)\big)^2 ds = \int_0^t \big(G(t,s)\big)^2 ds + \int_t^T \big(G(t,s)\big)^2 ds$$
$$= \int_0^t \frac{e^{2\lambda(T+s-t)}}{(e^{\lambda T}-1)^2} ds + \int_t^T \frac{e^{2\lambda(s-t)}}{(e^{\lambda T}-1)^2} ds$$
$$= \frac{e^{2\lambda T}-1}{2\lambda(e^{\lambda T}-1)^2}$$
$$= \frac{e^{\lambda T}+1}{2\lambda(e^{\lambda T}-1)} \qquad (5.7)$$

elde edilir. Eş. 5.6 da eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci integralden;

$$\int_0^T \alpha^2 \ln\Big[\big(u(s)-v(s)\big)^2+1\Big] ds \le \alpha^2 \ln(d(u,v)^2+1)\,.\,T \qquad (5.8)$$

dir. Eş. 5.5, Eş. 5.6, Eş. 5.7 ve Eş. 5.8 birlikte düşünülürse;

$$d(Fu,Fv) \le \sup\left\{\left(\frac{e^{\lambda T}+1}{2\lambda(e^{\lambda T}-1)}\right)^{\frac{1}{2}} (\alpha^2 \ln(d(u,v)^2+1)\,.\,T)^{\frac{1}{2}} : t \in I\right\}$$
$$= \left(\frac{e^{\lambda T}+1}{2\lambda(e^{\lambda T}-1)}\right)^{\frac{1}{2}} \alpha\sqrt{T}(\ln(d(u,v)^2+1))^{\frac{1}{2}}$$

olup bu son eşitsizlikten;

$$d(Fu,Fv)^2 \le \frac{e^{\lambda T}+1}{2\lambda(e^{\lambda T}-1)}\ \alpha^2 \ln(d(u,v)^2+1)\,.\,T$$

veya denk olarak;

$$2\lambda(e^{\lambda T}-1)d(Fu,Fv)^2 \le (e^{\lambda T}+1)\ \alpha^2 \ln(d(u,v)^2+1)\,.\,T$$

elde edilir. Hipotezden;

$$\alpha \leq (\frac{2\lambda(e^{\lambda T}-1)}{T(e^{\lambda T}+1)})^{\frac{1}{2}}$$

olup buna göre;

$$2\lambda(e^{\lambda T}-1)d(Fu,Fv)^2 \leq 2\lambda(e^{\lambda T}-1)\ln(d(u,v)^2+1)$$

dir. Bu yüzden;

$$\begin{aligned} d(Fu,Fv)^2 &\leq \ln(d(u,v)^2+1) \\ &= d(u,v)^2-(d(u,v)^2-\ln(d(u,v)^2+1)) \end{aligned} \tag{5.9}$$

yazılır. $\psi(x)=x^2$ ve $\varphi(x)=x^2-\ln(x^2+1)$ olsun. Bu şekilde tanımlanan ψ, φ uzaklık değiştiren fonksiyonlarıdır. Eş. 5.9 dan $u \succcurlyeq v$ için;

$$\psi\big(d(Fu,Fv)\big) \leq \psi\big(d(u,v)\big)-\varphi(d(u,v))$$

yazılır. Son olarak $\alpha(t)$, diferensiyel denklemin bir alt çözümü olsun. İddia ediyoruz ki $\alpha \preccurlyeq F(\alpha)$ şeklindedir. Gerçekten her $t \in I$ için;

$$\alpha'(t)+\lambda\alpha(t) \leq f\big(t,\alpha(t)\big)+\lambda\alpha(t)$$

olup son eşitliğinin her iki tarafı $e^{\lambda t}$ ile çarpılırsa her $t \in I$ için;

$$(\alpha(t)e^{\lambda t})' \leq (f\big(t,\alpha(t)\big)+\lambda\alpha(t))e^{\lambda t}$$

yazabiliriz ki buradan her $t \in I$ için;

$$\alpha(t)e^{\lambda t} \leq \alpha(0)+\int_0^t \Big(f\big(s,\alpha(s)\big)+\lambda\alpha(s)\Big)e^{\lambda s}ds \tag{5.10}$$

sonucuna ulaşılır. $\alpha(0) \leq \alpha(T)$ olduğu için son eşitsizlikten;

$$\alpha(0)e^{\lambda T} \leq \alpha(T)e^{\lambda T} \leq \alpha(0) + \int_0^T (f\big(s,\alpha(s)\big) + \lambda\alpha(s))e^{\lambda s}ds$$

ve böylece;

$$\alpha(0) \leq \int_0^T \frac{e^{\lambda s}}{e^{\lambda T}-1}(f\big(s,\alpha(s)\big) + \lambda\alpha(s))ds$$

elde edilir. Bu son eşitsizlik ve Eş. 5.10 dan;

$$\alpha(t)e^{\lambda t} \leq \int_0^t \frac{e^{\lambda(T+s)}}{e^{\lambda T}-1}(f\big(s,\alpha(s)\big) + \lambda\alpha(s))ds + \int_t^T \frac{e^{\lambda s}}{e^{\lambda T}-1}\Big(f\big(s,\alpha(s)\big) + \lambda\alpha(s)\Big)ds$$

bulunur ki sonuç olarak t ∈ I için;

$$\alpha(t) \leq \int_0^t \frac{e^{\lambda(T+s-t)}}{e^{\lambda T}-1}(f\big(s,\alpha(s)\big) + \lambda\alpha(s))ds + \int_t^T \frac{e^{\lambda(s-t)}}{e^{\lambda T}-1}\Big(f\big(s,\alpha(s)\big) + \lambda\alpha(s)\Big)ds$$
$$= \int_0^t G(t,s)(f\big(s,\alpha(s)\big) + \lambda\alpha(s))ds = (F\alpha)(t)$$

yazılır. Böylece Teorem 3.1.21 den *F* dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

Uyarı

Eş. 5.2 ile verilen diferensiyel denkleminin bir tek olan çözümü her $x \in C(I)$ için $\lim_{n\to\infty} F^n(x)$ ile elde edilebilir.

Şimdi, yukarıda incelediğimiz, $t \in I = [0,T]$, $T > 0$ ve $f: I\ x\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere;

$$\begin{cases} u'(t) = f\big(t, u(t)\big) \\ \quad u(0) = u(T) \end{cases} \tag{5.11}$$

birinci mertebeden periyodik diferensiyel denklemin Teorem 3.1.23 ile çözümünü araştıracağız. δ ailesi Teorem 3.1.23 de tanımlı fonksiyonlar ailesi ve $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ şeklinde tanımlı aşağıdaki özellikleri sağlayan fonksiyonlar sınıfı $\mathcal{A}$ olsun:

(i) ϕ azalmayandır,
(ii)Her $x > 0$ için $\phi(x) < x$ dir,
(iii)$\beta(x) = \dfrac{\phi(x)}{x} \in \delta.$

Örnek

$\phi(t) = \mu t, 0 \le \mu < 1$
$\phi(\mathrm{t}) = \dfrac{t}{1+t}$

şeklinde tanımlı fonksiyonlar $\mathcal{A}$ ailesine ait fonksiyonlardır.

5.1.3. Teorem [24]

$f : I\ x\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu ile Eş. 5.11 ile ifade edilen diferensiyel denklemi düşünelim. Kabul edelim ki $\lambda > 0$ ve $\phi \in \mathcal{A}$ var öyle ki $y \ge x$ olacak şekildeki her $x, y \in \mathbb{R}$ için;

$$0 \le f(t,y) + \lambda y - [f(t,x) + \lambda x] \le \lambda\phi(y - x)$$

eşitsizliği sağlansın. Eğer Eş. 5.11 ile ifade edilen diferensiyel denklemin bir alt çözümü var ise bu denklemin bir tek çözümü vardır.

İspat

Eş. 5.11 ile verilen diferensiyel denklem $t \in [0, T]$ için;

$$\begin{cases} u'(t) + \lambda u(t) = f\big(t, u(t)\big) + \lambda u(t) \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir. Bu problem G(t, s) fonksiyonu;

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{e^{\lambda(T+s-t)}}{e^{\lambda T} - 1}, & 0 \le s < t \le T \\ \dfrac{e^{\lambda(s-t)}}{e^{\lambda T - 1}}, & 0 \le t < s \le T \end{cases}$$

şeklinde olmak üzere aşağıdaki integral denkleme denktir:

$$u(t) = \int_0^T G(t,s)\big[f\big(s, u(s)\big) + \lambda u(s)\big]ds. \qquad (5.12)$$

Diferensiyel denklem ile integral denklemin denk olduğu Teorem 5.1.2 de yapıldığı gibi yapılabilir. Buna göre integral denklemin bir çözümü diferensiyel denklemin bir çözümüdür. $C(I)$(I $= [0, \mathrm{T}]$) olsun. $C(I)$ üzerinde $x, y \in C(I)$ olmak üzere;

$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow$ her t $\in I$ için $x(t) \le y(t)$

şekilde tanımlı sıralama bağıntısı tanımlayalım. Bu sıralama bağıntısı ile $C(I)$ kısmi sıralı bir kümedir. $C(I)$ kümesi üzerinde her $x, y \in C(I)$ için $d(x,y) = sup_{t\in I}|x(t) - y(t)|$ şekilde tanımlı supremum metriği ile tam metrik uzaydır.

$F: C(I) \to C(I)$ fonksiyonunu;

$$(Fu)(t) = \int_0^T G(t,s)\big[f\big(s, u(s)\big) + \lambda u(s)\big]ds$$

şeklinde tanımlayalım. Gösterelim ki $u \in C(I)$, F dönüşümünün sabit noktasıdır. Böylece $u \in C(I)$, verilen diferensiyel denklemin çözümüdür. Bu nedenle 3. bölümde yer alan Teorem 3.1.23 nin hipotezlerini kontrol edelim.

$u \succcurlyeq v \Rightarrow f\big(t, u(t)\big) + \lambda u(t) \ge f\big(t, v(t)\big) + \lambda v(t), \forall t \in [0, T]$ olup $G(t,s) > 0$

olduğundan her $t \in I$ için;

$$(Fu)(t) = \int_0^T G(t,s)\big[f\big(s,u(s)\big) + \lambda u(s)\big]ds$$
$$\geq \int_0^T G(t,s)\big[f\big(s,v(s)\big) + \lambda v(s)\big]ds = (Fv)(t)$$

elde edilir. Ayrıca;

$$d(Fu,Fv) = sup_{t\in I}|(Fu)(t) - (Fv)(t)|$$
$$= sup_{t\in I}[(Fu)(t) - (Fv)(t)]$$
$$\leq sup_{t\in I}\int_0^T G(t,s)\big[f\big(s,u(s)\big) + \lambda u(s) - f\big(s,v(s)\big) - \lambda v(s)\big]ds$$
$$\leq sup_{t\in I}\int_0^T G(t,s)\lambda\,\phi(u(s) - v(s))ds$$

ϕ azalmayan dönüşüm olduğundan;

$$d(Fu,Fv) \leq \lambda\phi(d(u,v))sup_{t\in I}\int_0^T G(t,s)ds$$
$$= \lambda\,\phi(d(u,v))sup_{t\in I}\int_0^t \frac{e^{\lambda(T+s-t)}}{e^{\lambda T}-1}ds + \int_t^T \frac{e^{\lambda(s-t)}}{e^{\lambda T}-1}ds$$
$$= \lambda\,\phi\big(d(u,v)\big)\frac{e^{\lambda T}-1}{\lambda e^{\lambda T}-1} = \phi\big(d(u,v)\big)$$
$$= \frac{\phi\big(d(u,v)\big)}{d(u,v)}d(u,v) = \beta(d(u,v))d(u,v)$$

olup büzülme şartı sağlanır. Son olarak $\alpha(t)$, diferensiyel denklemin bir alt çözümü olsun. İddia ediyoruz ki $\alpha \preccurlyeq F(\alpha)$ şeklindedir. Gerçekten her $t \in I$ için;

$$\alpha'(t) + \lambda\alpha(t) \leq f\big(t,\alpha(t)\big) + \lambda\alpha(t)$$

olup son eşitliğinin her iki tarafı $e^{\lambda t}$ ile çarpılırsa her $t \in I$ için;

$$(\alpha(t)e^{\lambda t})' \leq (f\big(t,\alpha(t)\big) + \lambda\alpha(t))e^{\lambda t}$$

yazabiliriz ki buradan her t ∈ I için;

$$\alpha(t)e^{\lambda t} \leq \alpha(0) + \int_0^t \Big(f\big(s,\alpha(s)\big) + \lambda\alpha(s)\Big)e^{\lambda s}ds \tag{5.13}$$

sonucuna ulaşılır. $\alpha(0) \leq \alpha(T)$ olduğu için son eşitsizlikten;

$$\alpha(0)e^{\lambda T} \leq \alpha(T)e^{\lambda T} \leq \alpha(0) + \int_0^T (f\big(s,\alpha(s)\big) + \lambda\alpha(s))e^{\lambda s}ds$$

ve böylece;

$$\alpha(0) \leq \int_0^T \frac{e^{\lambda s}}{e^{\lambda T}-1}(f\big(s,\alpha(s)\big) + \lambda\alpha(s))ds$$

elde edilir. Bu son eşitsizlik ve Eş. 5.13 den;

$$\alpha(t)e^{\lambda t} \leq \int_0^t \frac{e^{\lambda(T+s)}}{e^{\lambda T}-1}(f\big(s,\alpha(s)\big) + \lambda\alpha(s))ds + \int_t^T \frac{e^{\lambda s}}{e^{\lambda T}-1}\Big(f\big(s,\alpha(s)\big) + \lambda\alpha(s)\Big)ds$$

bulunur ki sonuç olarak t ∈ I için;

$$\alpha(t) \leq \int_0^t \frac{e^{\lambda(T+s-t)}}{e^{\lambda T}-1}(f\big(s,\alpha(s)\big) + \lambda\alpha(s))ds + \int_t^T \frac{e^{\lambda(s-t)}}{e^{\lambda T}-1}\Big(f\big(s,\alpha(s)\big) + \lambda\alpha(s)\Big)ds$$

$$= \int_0^t G(t,s)(f\big(s,\alpha(s)\big) + \lambda\alpha(s))ds = (F\alpha)(t)$$

yazılır. Böylece Teorem 3.1.23 den F dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir. Şimdi ise bir önceki bölümde verilen Teorem 4.2.2 ile aşağıdaki lineer olmayan integral denklemin çözümünü araştıralım:

$T > 0$ bir reel sayı ve $f : [0,T]\ x\ \mathbb{R}\ x\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon;

$$x(t) = \int_0^T f\big(t, x(s), y(s)\big)ds, \qquad t \in [0,T]$$

$$y(t) = \int_0^T f\big(t, y(s), x(s)\big)ds, \qquad t \in [0,T] \tag{5.14}$$

$X = C([0,T],\ \mathbb{R})$, $[0,T]$ aralığında tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonlar sınıfı olsun. Her $x, y \in C([0,T],\ \mathbb{R})$, için $d(x,y) = sup_{t\in[0,T]}|x(t) - y(t)|$ şekilde tanımlı supremum metriği ile tam metrik uzaydır.

5.1.1. Tanım

Bir $(\alpha, \beta) \in C([0,T], \mathbb{R})\ x\ C([0,T], \mathbb{R})$, eğer her $t \in [0, \mathrm{T}]$ için $\alpha(t) \le \beta(t)$

ve

$$\alpha(t) \le \int_0^T f\big(t, \alpha(s), \beta(s)\big)ds, \qquad t \in [0,T]$$

$$\beta(t) \ge \int_0^T f\big(t, \beta(s), \alpha(s)\big)ds, \qquad t \in [0,T]$$

ise $(\alpha,\ \beta)$, Eş. 5.1.4 ile verilen integral denklemin bir alt ve üst çözüm çifti olarak adlandırılır.

5.1.2. Varsayım

$f : [0,T]\ x\ \mathbb{R}\ x\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon, $\varphi : [0\ ,\infty) \to [0\ ,\infty)$ şeklinde tanımlı fonksiyon sürekli, azalmayan ve $0 = \varphi(0) < \varphi(t) < t$ ve her $t > 0$ için $\lim_{r\to t^+} \varphi(r) < t$ olmak üzere her $t \in [0,T]$ ve $x \ge u,\ y \le v$ olacak şekildeki her $x,\ y,\ u,\ v \in \mathbb{R}$ için;

$$0 \le f(t,x,y) - f(t,u,v) \le \frac{1}{T}\varphi\left(\frac{x-u+v-y}{2}\right)$$

eşitsizliği sağlansın.

Şimdi Eş. 5.14 ile verilen integral denklemlerin bir tek olan çözümünün varlığını araştıralım:

5.1.4. Teorem [33]

Kabul edelim ki Varsayım 5.1.2 sağlansın. Eğer Eş. 5.14 ile verilen integral denklemleri bir alt ve üst çözüm ikilisine sahip ise bu integral denklemler bir tek çözüme sahiptir.

İspat

$F: C([0,T],\mathbb{R})\ x\ C([0,T],\mathbb{R}) \to C([0,T],\mathbb{R})$ dönüşümünü $x, y \in C([0,T],\mathbb{R})$ ve $t \in [0,T]$ için;

$$F(x,y)(t) = \int_0^T f(t,x(s),y(s))ds$$

şeklinde ve M kümesini;

$$M = \{(x,y,u,v) \in X^4 : t \in [0,T]\ için\ x(t) \geq u(t) \text{ ve } y(t) \leq v(t)\}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu şekilde tanımlanan M kümesi F- değişmez ve geçişme özelliğini sağlar. Bunun yanında her $n \geq 1$ için $(x_{n+1}, y_{n+1}, x_n, y_n) \in M$ ve $x_n \to x,\ y_n \to y$ olacak şekildeki (x_n) ve (y_n) dizilerini alalım. Her $n \geq 1$ ve her $t \in [0,T]$ için $x_{n+1}(t) \geq x_n(t)$ ve $y_{n+1}(t) \leq y_n(t)$ olduğundan her $n \geq 1$ ve her $t \in [0,T]$ için $(x_n(t))$ azalmayan ve $(y_n(t))$ artmayan bir dizidir. $x_n \to x$ olduğundan her $t \in [0,T]$ için $x_n(t) \to x(t)$ olup her $n \in \mathbb{N}$ ve $t \in [0,T]$ için $x_n(t) \leq x(t)$ ve benzer şekilde $y_n(t) \geq y(t)$ olduğu gösterilebilir. O halde M kümesinin tanımından her $n \geq 1$ için $(x,\ y,\ x_n,\ y_n) \in M$ dir. Böylece Teorem 4.2.2 nin ii) koşulu sağlanır. $(x,\ y,\ u,\ v) \in M$ olsun. Varsayım 5.1.2 den her $t \in [0,T]$ için;

$$|F(x,y)(t) - F(u,v)(t)| = \int_0^T \left[f\big(t,x(s),y(s)\big) - f\big(t,u(s),v(s)\big)\right]ds$$

$$\leq \frac{1}{T}\int_0^T \varphi\left(\frac{x(s)-u(s)+v(s)-y(s)}{2}\right) ds$$

$$\leq \frac{1}{T}\int_0^T \varphi\left(\frac{sup_{z\in[0,T]}|x(z)-u(z)| + sup_{z\in[0,T]}|v(z)-y(z)|}{2}\right) ds$$

$$= \varphi\left(\frac{sup_{z\in[0,T]}|x(z)-u(z)| + sup_{z\in[0,T]}|v(z)-y(z)|}{2}\right)$$

elde edilir ki buradan;

$$sup_{t\in[0,T]}|F(x,y)(t) - F(u,v)(t)| \leq$$

$$\leq \varphi\left(\frac{sup_{z\in[0,T]}|x(z)-u(z)| + sup_{z\in[0,T]}|v(z)-y(z)|}{2}\right)$$

olup buna göre her $(x,\ y,\ u,\ v) \in M$ için;

$$d\big(F(x,y),F(u,v)\big) \leq \varphi\left(\frac{d(x,u)+d(y,v)}{2}\right)$$

elde edilir. Böylece Teorem 4.2.2 nin Eş. 4.1 ile verilen koşulu sağlanır. Bunun yanında Tanım 5.1.1 den her t ∈ [0, T] için;

$$x_0(t) \leq \int_0^T f(t,x_0(s),y_0(s))ds$$

ve

$$y_0(t) \geq \int_0^T f(t,y_0(s),x_0(s))ds$$

olacak şekilde $(x_0,y_0) \in C([0,T],\mathbb{R})\ x\ C([0,T],\mathbb{R})$ alt ve üst çözüm ikilisi var olduğunu biliyoruz. Buna göre her $t \in [0,T]$ için;

$x_0(t) \leq F(x_0, y_0)(t)$ ve $y_0(t) \geq F(y_0, x_0)(t)$

olduğundan M kümesinin tanımından $(F(x_0, y_0), F(y_0, x_0), x_0, y_0) \in M$ dir. O halde Teorem 4.2.2 den F dönüşümü bir ikili sabit noktaya sahiptir. Şimdi Teorem 4.2.3 ile F dönüşümünün bir tek ikili sabit noktaya sahip olduğunu gösterelim:

$(x, y), (z, t) \in X\ x\ X$ için $u = min\{x, z\}$, $v = max\{y, t\} \in X$ var öyle ki; $(x,\ y,\ u,\ v) \in M$ ve $(z,\ t,\ u,\ v) \in M$ olur. Buna göre F dönüşümü bir tek ikili sabit noktaya sahiptir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Birinci bölümde, sabit nokta teorinin kullanım alanları ile gelişimi hakkında bilgi verilerek metrik ve kısmi sıralı metrik uzaylarda yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, metrik ve kısmi sıralı metrik uzaylardaki dönüşümler için sabit nokta teorisi ile ilgili ön bilgiler, bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, ikili sabit nokta teoremlerini kullanarak azalmayan dönüşümler için kısmi sıralı metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri genelleştirilmiştir. Ayrıca uzaklık değiştiren fonksiyonlar ve zayıf büzülebilir dönüşümleri tanımları verilerek Banach büzülme ilkesinin bir genellemesi ifade edilmiştir. Son olarak Geraghty tarafından tanımlanan δ ailesi kullanılarak Banach büzülme ilkesinin bir başka genellemesi ifade edilip bu çalışmanın kısmi sıralı metrik uzaylardaki versiyonu ispat edilmiştir.

Dördüncü bölüm, iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısmında kısmi sıralı metrik uzaylarda artmayan dönüşümler için sabit nokta teoremleri verilirken ikinci kısımda monoton olmayan dönüşümler için metrik ve kısmi sıralı metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri verilmiştir.

Son bölümde ise üçüncü ve dördüncü bölümde ifade edilen çalışmaların en genel olanlarının lineer olmayan integral denklemlere ve periyodik sınır koşullarına sahip birinci mertebeden diferensiyel denklemlere olan uygulamalarına yer verilmiştir.

Araştırmacılar tarafından metrik ve kısmi sıralı metrik uzaylardaki büzülme dönüşümleri için verilen çalışmalardan yararlanarak kısmi metrik uzay ve G-metrik uzaylarda da büzülme dönüşümleri için sabit nokta teoremleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

1. Agarwal, R. P., Meehan, M. and O'Regan, D. (2001). Fixed Point Theory and Applications. ***Cambridge University Press***, Cambridge, 1-112.

2. Altun, I., Türkoğlu, D. ve Rhoades B. E. (2007). Fixed Points of Weakly Compatible Maps Satisfying a General Contractive Condition of İntegral Type", ***Fixed Point Theory and Applications***, 17301, 1-9.

3. Altun, İ., Hançer. A. H. ve Türkoğlu, D. (2008). Fixed Point Theorems on d -complete Topological Spaces. ***Carpathian J. Math.*** , 24 (1),1-7.

4. Berinde, V. (2007). Iterative Approximation of Fixed Points. ***Springer-verlag***, Berlin Heidelberg, 31-59.

5. Border, K. C. (1985). Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory. ***Cambridge University Press***, Cambridge, 23-38.

6. Ćirić, L. B. (2003). Fixed Point Theory: Contraction Mapping Principle. ***Faculty of Mechanical Engineering, University of Belgrade***, Beograd, 66-72.

7. Goebel, K. (1990). Topics in Metric Fixed Point Theory. ***Cambridge University Press***, Cambridge, 1-37.

8. Hadžić, O. and Pap, E. (2001). Fixed Point Theory in Probabilistic Metric Spaces. ***Kluwer Academic Publishers***, Dordrecht, 47-91.

9. Istratescu, V. I. (1981). Fixed Point Theory: An Introduction. **D. *Reidel Publishing Company***, Dordrecht, 1-177.

10. Kirk, W. A. and Sims, B. (2001). Handbook of Metric Fixed Point Theory. ***Kluwer Academic Publishers***, Dordrecht, 1-47.

11. Smart, D. R. (1974). Fixed Point Theorems. ***Cambridge University Press***, Cambridge, 1-32.

12. Türkoğlu, D. ve Altun, İ. (2007). A Common Fixed Point Theorem for Weakly Compatible Mappings in Symmetric Spaces Satisfying an Implicit Relation. ***Bul. de la Soc. Math. Mexicana***, 13 (1), 195-205.

13. Brouwer, L. E. J. (1910). Uber Abbildung von Mannigfaltigkeiten. ***Math. Ann.,*** 71: 97- 115.

14. Ran, A. C. M. and Reurings, M. C. B. (2004). A Fixed Point Theorem in Partially Ordered Sets and Some Applications to Matrix Equations. ***Proc. Am. Math. Soc.*** 132, 1435-1443.

15. Cho, Y. J., Saadati, R. and Wang, S. (2011). Common Fixed Point Theorems on Generalized Distance in Order Cone Metric Spaces. ***Comput. Math. Appl***. 61, 1254-1260.

16. Graily, E, Vaezpour, S. M., Saadati, R. and Cho, Y. J. (2011). Generalization of Fixed Point Theorems in Ordered Metric Spaces Concerning Generalized Distance. ***Fixed Point Theory Appl***. 2011,30.

17. Nieto J. J. and Lopez, R. R. (2005). Contractive Mapping Theorems in Partially Ordered Sets and Applications to Ordinary Differential Equations, 22, 223–239.

18. Sintunavarat, W., Cho, Y. J. and Kumam, P. (2011). Common Fixed Point Theorems for c-distance in Ordered Cone Metric Spaces***. Comput. Math. Appl.*** 62, 1969-1978.

19. Guo, D. and Lakshmikantham, V. (1987). Coupled Fixed Points of Nonlinear Operators with Applications. ***Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.***, 11, 623-632.

20. Bhaskar, T. G. and Lakshmikantham, V. (2006). Fixed Point Theorems in Partially Ordered Metric Spaces and Applications. ***Nonlinear Anal***. 65, 1379-1393.

21. Khan, M. S., Swaleh, M. and Sessa, S. (1984). Fixed Point Theorems by Altering Distances Between the Points. ***Bulletin of the Australian Mathematical Society***, 30(1), 1–9.

22. Harjani, J. and Sadarangani, K. (2010). Generalized Contractions in Partially Ordered Metric Spaces and Applications to Ordinary Differential Equations. ***Nonlinear Analysis***, 72, 1188-1197.

23. Geraghty, M. (1973). On Contractive Mappings. ***Proc. Amer. Math. Soc.***, 40, 604–608.

24. Harandi, A. A. and Emami, H. (2012). A Fixed Point Theorem for Contraction Type Maps in Partially Ordered Metric Spaces and Application to Ordinary Differential Equations. ***Nonlinear Analysis***, 72, 2238-2242.

25. Banach, S. (1922). Sur Les Operations Dans Les Ensembles Absraits Et Leur Application Aux Equations Untegrales, ***Fund. Math.***, 3, 133-181.

26. Luong N. V., Thuan N. X. (2011). Coupled Fixed Points in Partially Ordered Metric Spaces and Application. ***Nonlinear Analysis***,74, 983-992.

27. Skof , F. (1977). Teorema Di Punti Fisso Per Applicazioni Negli Spazi Metrici. ***Atti. Aooad. Soi.*** Torino, 111, 323-329.

28. Delbosco, D. (1977). Un'estensione di un Teorema sul Punto Fisso di S. Reich. ***Rend. Sem. Mat. Univers. Politean***. Torino, 35, 233-235.

29. Alber, Y. I. and Guerre- Delabriere, S. (1997). Principles of Weakly Contractive Maps in Hilbert Spaces. In I. Gohberg and Y. Lyubich(Eds.), ***New Results in Operator Theory, Advances and Appl.***, Birkhauser Verlag, Basel 98, 7-22.

30. Rhoades, B. E. (2001). Some Theorems on Weakly Contractive Maps. ***Nonlinear Analysis.,*** 47, 2683-2693.

31. Dutta, P. N. and Choudhury, B. S. (2008). A Generalisation of Contraction Principle in Metric Spaces. ***Fixed Point Theory and Applications***, 1-8.

32. Nieto, J. J. and Lopez, R. R. (2007). Existence and Uniqueness of Fixed Point in Partially Ordered Sets and Applications to Ordinary Differential Equations. ***Acta Math. Sin. Engl. Ser.*** 23, 2205-2212.

33. Sintunavarat, W., Kumam, P. and Cho, Y. J. (2012). Coupled Fixed Point Theorems for Nonlinear Contractions Without Mixed Monotone Property. ***Fixed Point Theory and Applications***, 170.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: Hakan ŞAHİN
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 18.07.1989, Ankara
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: 0 (505) 831 72 66
Faks	:
E-Posta	: hakansahin@gazi.edu.tr



Eğitim

Derece	Okul/Program	Mezuniyet tarihi
Lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik	2011
Lise	Fatih Sultan Mehmet Lisesi	2006

İş Deneyimi

Yıl	Çalıştığı Yer	Görev
2012-2013	Amasya Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2013-Halen	Gazi Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Sempozyumlar

1. Şahin, H. ve Türkoğlu, D. (2014). *Kısmi Sıralı Metrik Uzaylarda Noktalar Arasındaki Uzaklıkları Değiştiren Fonksiyonlar İle Bazı Sabit Nokta Teoremleri*. 13. Matematik Sempozyumunda sunuldu. Karabük.

Hobiler

Sinema, Tiyatro, Bilgisayar Teknolojisi, Yüzme



GAZİ GELECEKTİR..