
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

M−METRİK UZAY ve KISMİ METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Oğuz SOLAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2019

Oğuz SOLAK tarafından hazırlanan "M−METRİK UZAY VE KISMİ METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ...……

Başkan: Prof. Dr. Cemil YILDIZ

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ……...

Üye: Prof. Dr. İshak ALTUN

Matematik Ana Bilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ……...

Tez Savunma Tarihi: 24/06/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

……..…….

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Oğuz SOLAK

24/ 06/2019

M−METRİK UZAY VE KISMİ METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Oğuz SOLAK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2019

ÖZET

Sabit nokta teorisi, matematiğin çeşitli dallarında pek çok uygulamaya sahip olduğu için matematik dünyasında çok önemli bir yere sahiptir. Matthews metrik uzayların genelleştirilmesi olarak kısmi metrik uzayları tanımlamıştır ve tek değerli sabit nokta teoremlerini çalışmıştır. Ardından birçok yazar kısmi metrik uzaylarda tek ve küme değerli sabit nokta teoremlerini çalışmışlardır. Diğer taraftan, Asadi ve arkadaşları kısmi metrik uzayın bir genelleştirmesi olan M-metrik uzayı tanımladı ve bu uzayda tek değerli bazı sabit nokta teoremlerini vermişlerdir. Kısmi metrik uzay kavramını M-metrik uzaya genişlettiler. Bu çalışmada, M-metrik uzaylar, kısmi metrik uzaylar ile bu uzayların topolojileri ele alınmıştır. Daha sonra, Cauchy dönüşüm teoremi, r-Cauchy dizi, r-Cauchy fonksiyonu, yörüngesel süreklilik ve genişlemeyen özelliği gibi bazı kavramlar hatırlatıldı. Ardından, kısmi metrik uzaylar ve M-metrik uzaylarda farklı yörüngesel büzülme dönüşümleri karşılaştırılarak ele alındı. Son olarak M-metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri incelendi.

Bilim Kodu : 20405

Anahtar Kelimeler : Sabit nokta teoremleri, M-metrik uzay, kısmi metrik uzay, r-Cauchy, yörüngesel süreklilik, genişlemeyen özelliği, Cauchy dönüşüm teoremi, yörüngesel büzülme dönüşümleri

Sayfa Adedi : 67

Danışman : Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

SOME FIXED POINT THEOREMS IN M-METRIC SPACES AND PARTIAL METRIC SPACES

(M. Sc. Thesis)

Oğuz SOLAK

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2019

ABSTRACT

Fixed point theory has a very important place in the world of mathematics since it has many applications in various branches of mathematics. Matthews defined partial metric spaces as generalization of metric spaces and studied single valued fixed point theorems. Following that many authors studied single- and set-valued fixed point theorems on partial metric spaces. On the other hand, Asadi et al. identified the M-metric space, a generalization of the partial metric space and gave some single-set valued fixed point theorems on this space. So that, they extended notion of partial metric spaces to M-metric space. In this study, M-metric spaces, partial metric spaces and topologies of these spaces were examined. After that, some basic notions like Cauchy mapping theorem, r-Cauchy sequence, r-Cauchy function, orbital continuity and non-expansiveness were reminded. Then, different orbitally contraction mappings on partial metric spaces and M-metric spaces was discussed comparatively. Finally, fixed point theorems on M-metric spaces were viewed.

Science Code : 20405

Key Words : Fixed point theorems, M-metric space, partial metric space, r-Cauchy, orbital continuity, non-expansiveness, Cauchy mapping theorem, orbitally contractive maps

Page Number : 67

Supervisor : Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren, çalışmalarım boyunca destekleyen, yönlendiren ve yazımı sırasında bana zaman ayırarak yardımını esirgemeyen tez danışmanım Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU' na ve yardımcı olan arkadaşım Ar. Gör. Dr. Hakan ŞAHİN' e teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca tez dönemi boyunca benden desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen sevgili eşime, çok sevdiğim annem, babam ve kardeşlerime teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

SİMGELER VE KISALTMALAR viii

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL KAVRAMLAR 3

3. KISMİ METRİK UZAY VE M-METRİK UZAY 9

3.1. Kısmi Metrik Uzay 9

3.2. M-Metrik Uzay 10

3.3. M-Metrik Uzay Topolojisi 18

4. CAUCHY DÖNÜŞÜMLERİ VE YÖRÜNGESEL SÜREKLİLİK 27

4.1. r-Cauchy Dizi ve r-Cauchy Fonksiyonu 27

4.2. Yörüngesel Süreklilik 32

4.3. Cauchy Dönüşüm Teoremi 39

5. YÖRÜNGESEL BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ 43

5.1. Yörüngesel r-büzülme Dönüşümleri 43

5.2. Yörüngesel c_r–büzülme, Yörüngesel φ_r-büzülme ve Yörüngesel ϕ_r-büzülme Dönüşümleri 47

6. SONUÇ VE ÖNERİLER 63

KAYNAKLAR 65

ÖZGEÇMİŞ 67

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
(X, d)	Metrik uzay
$\boldsymbol{f: X \to X}$	f, X den X e bir dönüşüm
$\boldsymbol{d(x, y)}$	Metrik, x ile y arasındaki uzaklık
$\boldsymbol{B(x_0, r)}$	x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$\in$	Elemanıdır
$\exists$	En az bir
$\forall$	Her
$\lvert . \rvert$	Mutlak değer
$\subseteq$	Altkümesidir
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi

1. GİRİŞ

Sabit nokta teorisi $Sx_0 = 0$ gibi eşitliklerle ilgilenir ve bu denklemlerin çözümüyle uğraşır. Denklemin tipine uyan belirli bir operatör için bir sabit noktanın bulunması, problemin çözümünün bulunması demektir.

Fen ve Sosyal Bilimlerin birçoğundaki sorunlara matematiksel modelleme yaparak çözüm bulabiliriz. Bulunan modellemelerde denklemlere veya denklem sistemlerine ihtiyaç duyulur. Elde edilen denklemlerin çözümü her zaman mümkün olmayabilir. Çözümün varlığı dönüşümün tanımına bağlı olduğu gibi problemin tanımlandığı küme yapısına da bağlıdır. Çözüm var ise çözümün tekliği araştırılır.

Sabit nokta teori ile ilgili ilk çalışmalardan birini Banach 1922 yılında kendi adıyla bilinen büzülme ilkesi teoremini vererek yapmıştır [1]. Daha sonra Banach büzülme ilkesi farklı uzaylara genişletilmiştir.

1994'te Matthews aynı noktalar arasındaki mesafenin sıfır olmasının gerekmediği kısmi metrik uzay kavramını, standart metrik uzayların genelleştirilmesi olarak tanımlamıştır [2]. Ardından birçok yazar M-metrik uzaylarda ve kısmi metrik uzaylarda sabit nokta teoremini çalışmışlardır [3-25].

Kısmi metrik, veri akış ağlarının denotasyonel anlambilim çalışmalarında kullanılabilmektedir. Sabit nokta teorinin bilgisayar bilimlerindeki çalışma alanı kısmi metrik uzaylar ile daha da genişlemiştir [3-9].

O'Neill, negatif uzaklığı ekleyerek Matthews in kısmi metrik tanımını genişletti [10]. Bu çalışmada O'Neill in tanımladığı şekliyle yer verilecektir.

2013'te Haghi ve arkadaşları bazı sabit nokta teoremlerini kısmi metrik uzaylardan standart metrik uzaylara indirgemek için tamamlanmamış bir teknik geliştirdiler [11]. Kısmi metrik uzaylardaki sabit nokta genelleştirmelerinin metrik uzaylardaki sonuçlardan elde edilebileceğini gösterdiler.

2014'te Asadi ve arkadaşları, metrik uzayların genelleştirilmesi olarak M-metrik uzay kavramını kısmi metrik uzayların genelleştirilmesi olarak formüle ettiler [12]. Asadi, Haghi ve arkadaşlarının tekniğinin M-metrik uzaylarda uygulanamaz olduğundan bahsetmiştir [12]. Assaf ise daha uygun bir topolojiyi tanımladığı bir çalışma yapmıştır [13].

Boyd ve Wong "Φ-büzülme" olarak bilinen bir tanımı vermişlerdir: Bir (X, d) metrik uzayı üzerinde bir $f: X \to X$ dönüşümü için her $x, y \in X$ için $d(f(x), f(y)) \leq \Phi(d(x, y))$ olacak şekilde üstten yarı sürekli bir $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu vardır [14].

Alber ve Guerre-Delabriere "zayıf ϕ-büzülmesi" ni (X, d) Hilbert uzayı üzerinde bir $f: X \to X$ dönüşümü için $\phi(0) = 0$ ve her $x, y \in X$ için $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y) - \phi(d(x, y))$ kesin artan bir $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ dönüşümü vardır biçiminde tanımlayarak Φ-büzülmesi kavramını genelleştirmişlerdir [15].

Karapınar yaptığı çalışmayla bu tanımı 0 ile alttan sınırlı kısmi metrik uzaylara genişletmiştir [16].

Bu yüksek lisans tez çalışmasında yukarıda ve kaynakçada adı geçen yazarlar tarafından verilen tanım, lemma, teorem ve sonuçlar genellemeleri ile ilişkilendirilerek aktarılmıştır. Yörüngesel büzülme dönüşümlerinin kısmi metrik ve M-metrik uzaylardaki ifade, teorem ve ispat edilen özellikleri incelenmiş ve örneklendirilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1.1. Tanım

X boştan farklı bir küme ve $f: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $f(x_0) = x_0$ olacak şekildeki x_0 noktasına f dönüşümünün bir sabit noktasıdır denir.

Örnek

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ dönüşümünün sabit noktaları $x = 0$ ve $x = 1$ noktalarıdır.

Örnek

$X = (0, \infty), h: X \to X, g(x) = \frac{x}{7}$

olsun. Bu durumda g dönüşümü bir sabit noktaya sahip değildir.

2.1.2. Tanım

X boş olmayan bir küme ve $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f(n) = x_n \in X$ olmak üzere $f: \mathbb{N} \to X$ olacak şekilde tanımlı her fonksiyona X üzerinde bir dizi denir ve $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ veya kısaca (x_n) ile gösterilir.

2.1.3. Tanım

E reel sayıların boştan farklı bir alt kümesi olsun. E kümesinin alttan sınırlı olarak adlandırılması için gerek ve yeter şart her $a \in E$ için $a \geq m$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{R}$ elemanının var olmasıdır. Bu durumda m sayısına E kümesinin bir alt sınırı denir.

2.1.4. Tanım

X boş olmayan bir küme olsun. $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x, y, z \in X$ için;

$m_1)$ $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$m_2)$ $d(x,y) = d(y,x)$

$m_3)$ $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

koşullarını sağlıyorsa d ye X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine de metrik uzay denir.

2.1.5. Tanım

(X, d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun. Bu durumda;

$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar (veya x_0 ın r-açık komşuluğu) denir.

2.1.6. Tanım

(X, d) bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun.

$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine X de yakınsak dizi ve x e de bu dizinin limiti denir.

2.1.7. Tanım

(X, d) metrik uzayında bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi

$\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N}$ öyle ki $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon$

özelliğini sağlarsa $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi Cauchy dizisidir.

2.1.8. Tanım

(X, d) ve (Y, d') metrik uzaylar ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. X metrik uzayında $x \in X$ noktasına yakınsayan her (x_n) dizisi için Y uzayındaki $\big(f(x_n)\big)$ dizisi $f(x)$ noktasına yakınsıyor, yani $x_n \xrightarrow{d} x \Longrightarrow f(x_n) \xrightarrow{d'} f(x)$ ise f fonksiyonuna x noktasında dizisel süreklidir denir.

2.1.9. Tanım

X boştan farklı bir küme ve τ, X in kuvvet kümesi olan $P(X)$ in bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan τ ailesine X üzerinde bir topoloji (veya topolojik yapı) denir.

t_1) $\emptyset, X \in \tau$,
t_2) τ 'ya ait sonlu sayıdaki elemanların arakesiti yine τ ya aittir; yani
$A_1, A_2, \dots, A_n \in \tau$ için $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$,
t_3) τ 'ya ait keyfi sayıdaki elemanların birleşimi yine τ ya aittir; yani
$\forall \{A_i\}_{i \in I} \subset \tau$ için $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ dır.

τ nun elemanlarına X in açık alt kümeleri, (X, τ) çiftine topolojik uzay denir.

2.1.10. Tanım

τ_1 ve τ_2, X üzerinde iki topoloji olsun. Eğer τ_1 in her elemanı τ_2 'nın elemanı ise yani $\tau_1 \subset \tau_2$ ise, τ_1 topolojisi τ_2 den daha kabadır veya τ_2 topolojisi τ_1 den daha ince yapıya sahiptir denir.

2.1.11. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesini kapsayan bir U açık kümesinin her N üst kümesine, A kümesinin komşuluğu denir, yani,

(N, $A \subset X$ nın bir komşuluğu) ⇔ ($\exists U \subset X$ açığı var öyle ki $A \subset U \subset N$)

Eğer $A = \{x\}$ ise, bu durumda

(N, $x \in X$ noktasının bir komşuluğu) $\Leftrightarrow$ ($\exists U \subset X$ açığı var öyle ki $x \in U \subset N$).

2.1.12. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay ve $\beta \subset \tau$ olsun. τ topolojisinin her elemanı β nın elemanlarının herhangi bir birleşimi olarak yazılabiliyor ise, β ya τ topolojisinin bir tabanı (bazı) denir, yani

β, τ için bir taban $\Leftrightarrow \forall A \in \tau$ için $\exists \theta \subset \beta$ alt ailesi var öyle ki $A = \bigcup_{B \in \theta} B$ dır

veya

β, τ için bir taban $\Leftrightarrow \forall A \in \tau$ ve $\forall a \in A$ için $\exists B_a \in \beta$ var öyle ki $A = \bigcup_{a \in A} B_a$ dır.

Bu tanıma göre X üzerindeki τ topolojisi, β elemanları cinsinden yazılabilir, yani
$\tau = \{\bigcup_{B \in \theta} B : \theta \subset \beta\}$ dır.

2.1.13. Tanım

X, Y topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ fonksiyon olsun. Y deki her V açığı için $f^{-1}(V)$ kümesi X de açık ise f ye süreklidir denir.

2.1.14. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. X in farklı her x ve y elemanları için, birini içeren diğerini içermeyen en az bir komşuluk varsa, yani
Her $x, y \in X$ için $\exists N \in N(x)$ var öyle ki $y \notin N$ veya $\exists M \in N(y)$ var öyle ki $x \notin M$ ise, X topolojik uzayına T_0-uzayı denir.

2.1.15. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. X in farklı her bir x ve y elemanları için, bunlardan birini içeren ve diğerini içermeyen en az birer komşuluk varsa, yani

$\forall x, y \in X$ için $\exists N \in N(x)$ ve $\exists M \in N(y)$ var öyle ki $x \notin M$ ve $y \notin N$ ise, X topolojik uzayına T_1-uzayı denir.

2.1.16. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. X in farklı her x ve y elemanlarının ayrık komşulukları varsa, yani

$\forall x, y \in X$ için $\exists N \in N(x)$ ve $\exists M \in N(y)$ var öyle ki $N \cap M = \emptyset$ ise,
X topolojik uzayına T_2-uzayı (veya Hausdorff) denir.

2.1.17. Tanım

(X, d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $f: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ var öyle ki

$d(x_0, y) < \delta$ iken $f(x_0) - \epsilon < f(y)$

oluyorsa f fonksiyonuna x_0 noktasında alttan yarı sürekli fonksiyon denir. Benzer şekilde verilen her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ var öyle ki

$d(x_0, y) < \delta$ iken $f(y) < f(x_0) + \epsilon$

oluyorsa fonksiyonuna x_0 noktasında üstten yarı sürekli fonksiyon denir. Eğer f fonksiyonu X in her noktasında alttan (üstten) yarı sürekli ise f fonksiyonuna X de alttan (üstten) yarı sürekli fonksiyon denir.

2.1.18. Tanım

X bir reel (veya kompleks) vektör uzayı olsun. Her $\vec{x} \in X$ vektörünü $\|\vec{x}\|$ reel sayısına dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan reel değerli $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm denir.

n_1) $\forall \vec{x} \in X$ $(\vec{x} \neq \vec{0})$ için $\|\vec{x}\| > 0$ ve $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$,
n_2) $\forall \vec{x} \in X$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için $\|\vec{x}\| = |\lambda|\|\vec{x}\|$,
n_3) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in X$ için $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

Üzerinde norm tanımlanmış bir lineer X vektör uzayına normlu vektör uzay veya kısaca normlu uzay denir. (X, $\|.\|$) ile gösterilir.

2.1.19. Teorem

Her normlu uzay bir metrik uzaydır. Fakat tersi genellikle doğru değildir.

2.1.20. Tanım

X normlu uzay ve $f: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $x \in X$ olmak üzere

$$O(x, \infty) = (f^n(x))_{n \in \mathbb{N}} = \{x, fx, f^2x, \dots\}$$

dizisine x in f altındaki $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ yörüngesi (orbiti) denir.

3. KISMİ METRİK UZAY VE M-METRİK UZAY

3.1. Kısmi Metrik Uzay

3.1.1. Tanım

Boştan farklı X kümesi üzerinde bir $p: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa p ye bir kısmi metrik denir:

Her $x, y, z \in X$ için
(p−asnr): $p(x,x) \leq p(x,y)$.
(p−smt): $p(x,y) = p(y,x)$.
(p−ayr): $p(x,x) = p(x,y) = p(y,y) \Leftrightarrow x = y$.
(p−üçg): $p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)$.

Bu durumda (X, p) ikilisine de kısmi metrik uzay denir [13].

Uyarı

$x = z$ olduğunda herhangi bir $s: X \times X \to \mathbb{R}$, $s(x,y) = s(x,x) + s(x,y) - s(x,x)$ fonksiyonu için (p−üçg) aksiyomu sağlanır.

Daha fazla kısmi metrik örneği için [2, 10, 17, 18] kaynaklarına başvurabilirsiniz.

3.1.2. Lemma

(x_n), X kısmi metrik uzayı üzerinde bir yakınsak bir dizi olsun. $x_n \to x$ ve $x_n \to y$ şartları sağlansın. O halde

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = p(x,x) = p(y,y)$$

ise $x = y$ olur [19].

3.2. M-Metrik Uzay

3.2.1. Tanım

X boştan farklı bir küme ve $\sigma: X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

$m_{x,y} = min\{\sigma(x,x), \sigma(y,y)\}$
ve
$M_{x,y} = max\{\sigma(x,x), \sigma(y,y)\}$

biçiminde tanımlansın. $\sigma: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa σ ye bir M-metrik denir:

Her $x, y, z \in X$ için
(σ−asnr): $m_{x,y} \leq \sigma(x,y)$.
(σ−sim): $\sigma(x,y) = \sigma(y,x)$.
(σ−ayr): $\sigma(x,x) = \sigma(x,y) = \sigma(y,y) \Leftrightarrow x = y$.
(σ−üçg): $\sigma(x,y) - m_{x,y} \leq \sigma(x,z) - m_{x,z} + \sigma(z,y) - m_{z,y}$.

Bu durumda (X, σ) çiftine bir M-metrik uzay denir.

Her $x, y \in X$ için $m_{x,x} = M_{x,x} = \sigma(x,x)$ olduğu görülebilir [13].

Giriş bölümünde belirtildiği gibi, kısmi metriği genelleştirmek için M-metrik verildi. [12] de M-metrik, negatif olmayan değerlerle sınırlandırılmıştı. Burada negatif değerleri alması sağlanarak [12] de verilen M-metrik tanımı genişletildi. Bu nedenle O'Neill in [10] tanımıyla bizim M−metriğimiz, kısmi metriğin bir genelleştirmesi oldu.

Uyarı

(σ−asnr), (σ−üçg) dan elde edilebilir.

[12] kaynağındaki 1.2 Örnek de, $x \neq y$ için $\sigma^*(x,y) = \sigma(x,y) - m_{x,y}$ ve $\sigma^*(x,x) = 0$

olarak tanımlanan fonksiyonunun bir metrik olduğu ileri sürüldü. Aşağıda aksine bir örnek yer almaktadır.

Örnek

$X = \{a, b\}$ üzerinde bir σ M−metriği

$$\sigma(a,a) = \sigma(a,b) = \sigma(b,a) = 1 \text{ ve } \sigma(b,b) = 2 \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlansın. Dolayısıyla

$$m_{a,b} = min\{\sigma(a,a), \sigma(b,b)\} = 1$$

olur. Buradan, $a \neq b$ olmasına rağmen

$$\sigma^*(a,b) = \sigma(a,b) - m_{a,b} = 1 - 1 = 0$$

olur. $a \neq b$ için $\sigma(a,b) - m_{a,b} = 0$ olduğundan σ^* standart metrik ayırma aksiyomu sağlanmaz.

M-metrik olmanın arkasındaki basit fikirlerden biri (σ−asnr) aksiyomudur. Bu aksiyom $\sigma(x,y)$ ile yukarıdan sınırlandırılan $m_{x,y} = min\{\sigma(x,x), \sigma(y,y)\}$ eşitliğini sağlar.

Bundan farklı olarak $M_{x,y} = max\{\sigma(x,x), \sigma(y,y)\}$ herhangi bir sınırlamadan uzak kalır. $M_{x,y}$ yi sınırlamak için kullanılamayan (σ−üçg) ile bu düşünce kuvvetlendirildi. Bu nedenle [12] kaynağının Lemma 2.5 (B) şartındaki

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma(x_n, x_{n-1}) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sigma(x_n, x_n) = 0$$

iddiası doğru değildir. Aşağıda aksine bir örnek yer almaktadır [13].

Örnek

$(x_n)_{n\in N}$ dizisi,

$$x_n = \begin{cases} a, n \text{ tek ise} \\ b, n \text{ çift ise} \end{cases}$$

biçiminde verilsin.

$\sigma(a,a) = \sigma(a,b) = \sigma(b,a) = 0$ ve $\sigma(b,b) = 1$

ile tanımlanan σ, X üzerinde bir M-metrik olsun. Örneğin

$$\sigma(x_1,x_3) = \sigma(x_1,x_1) = \sigma(a,a) = 0 = \sigma(a,b) = \sigma(x_1,x_2) = \sigma(x_2,x_3)$$

olur. Diğer taraftan,

$$\sigma(x_2,x_4) = \sigma(x_2,x_2) = \sigma(b,b) = 1$$

bulunur. Böylece

her i için

$\sigma(x_{i+2},x_{i+1}) \leq c\sigma(x_{i+1},x_i)$

eşitsizliği [12] kaynağının Lemma 2.5 şartlarını sağlar.

$\lim_{n\to+\infty} \sigma(x_n,x_{n-1}) = 0$ olmasına rağmen $\lim_{n\to+\infty} \sigma(x_n,x_n)$ ifadesi 0 veya 1 değerlerinde gezindiğinden limitinin olmadığı açıktır.

[12] kaynağındaki Lemma 2.5 (B) koşulu, Lemma 2.5 (D) koşulu için önemlidir ve [12] de sabit nokta teoremleri sağladığını göstermek için verilmişti. [13] kaynağında [12] de bulunan teoremleri ispatlamak için kullanılan tekniklerin artık geçerli olmadığı aktarılmaktadır.

Asadi ve arkadaşları [12] de her kısmi metriğin bir M-metrik olduğunu gösterdi. Bu

ispatlara başka bir yaklaşım ise çok iyi bilinen bir özellik kullanılarak 3.2.2. Lemma da verilen ispattır [13].

3.2.2. Lemma

(Γ,+,≤) sıralı değişmeli bir grup olsun. O halde
her $a, b, c \in \Gamma$ için

$$min\{c, a\} + min\{c, b\} \leq c + min\{a, b\}$$
ve
$$c + max\{a, b\} \leq max\{c, a\} + max\{c, b\}$$

olur. Buradan X üzerinde bir σ M-metriği verildiğinde

her $x, y, z \in X$ için
$$-\sigma(z, z) \leq -m_{x,z} - m_{z,y} + m_{x,y}$$
ve
$$-M_{x,z} - M_{z,y} + M_{x,y} \leq -\sigma(z, z)$$

bulunur. Aşağıdaki örnekte, [12] kaynağının Örnek 1.1 i uyarlanarak bir M-metriğin kısmi metrik olmadığı verilmiştir [13].

Örnek

$X = \mathbb{R}$ olsun. $\sigma: X \times X \to \mathbb{R}$, her $x, y \in X$ için $\sigma(x, y) = x + y$ biçiminde tanımlansın. O halde σ, X üzerinde bir M-metriktir.

İspat

(σ−üçg) hariç diğer aksiyomların ispatı basittir. Genelliği bozmamak için $x \leq y \in X$ olduğunu kabul edelim. O halde

$$m_{x,y} = 2x$$

ve

$\sigma(x,y) - m_{x,y} = x + y - 2x = y - x$

vardır. $z \in X$ olsun:

1. Durum: $x \leq y \leq z$. O halde

$[\sigma(x,z) - m_{x,z}] + [\sigma(z,y) - m_{z,y}] =$

$[z - x] + [z - y] \geq z - x \geq y - x = \sigma(x,y) - m_{x,y}$

sağlanır.

2. Durum: $x \leq z \leq y$. Bu durumda

$[\sigma(x,z) - m_{x,z}] + [\sigma(z,y) - m_{z,y}] =$

$[z - x] + [y - z] \geq y - x = \sigma(x,y) - m_{x,y}$

sağlanır.

3. Durum: $z \leq x \leq y$. O halde

$[\sigma(x,z) - m_{x,z}] + [\sigma(z,y) - m_{z,y}] =$

$[x - z] + [y - z] \geq y - z \geq y - x = \sigma(x,y) - m_{x,y}$

sağlanır. Açıkçası, $x < y \in X$ ise

$2x < x + y < 2y$ olur, yani

$m_{x,y} < \sigma(x,y) < \sigma(y,y)$

bulunur. Bu nedenle σ kısmi metrik değildir.

X üzerinde bir M-metrikten yine X üzerinde bir kısmi metrik oluşturmayı gösterelim [13].

3.2.3. Teorem

σ, X üzerinde bir M-metrik olsun. $M_{x,y}$ ve $m_{x,y}$ 3.2.1. Tanım da olduğu gibi tanımlansın. Ayrıca,

$x, y \in X$ için
$p^{\sigma}(x,y) = \sigma(x,y) + M_{x,y} - m_{x,y}$

olsun. Bu durumda p^{σ}, X üzerinde bir kısmi metrik olur.

İspat

Her $x \in X$ için
$p^{\sigma}(x,x) = \sigma(x,x) + M_{x,x} - m_{x,x} = \sigma(x,x)$

sağlanır. (p−smt) aksiyomunun ispatı açıktır.
(p−asnr): Her $x, y \in X$ için (σ−asnr) den

$\sigma(x,y) - m_{x,y} \geq 0$

elde edilir. Dolayısıyla,

$p^{\sigma}(x,x) = \sigma(x,x) \leq M_{x,y} \leq M_{x,y} + \sigma(x,y) - m_{x,y} = p^{\sigma}(x,y)$

bulunur.

(p−ayr): $p^{\sigma}(x,x) = p^{\sigma}(x,y) = p^{\sigma}(y,y)$

olsun. Bu durumda

$\sigma(x,x) = p^{\sigma}(x,x) = p^{\sigma}(y,y) = \sigma(y,y)$

olur. Yani

$$\sigma(x,x) = \sigma(y,y) = m_{x,y} = M_{x,y}$$

yazılır. Bu nedenle

$$p^{\sigma}(x,y) = \sigma(x,y) + M_{x,y} - m_{x,y} = \sigma(y,y)$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\sigma(x,x) = \sigma(x,y) = \sigma(y,y)$$

olur ve böylece (σ−ayr) dan $x = y$ bulunur.

(p−üçg): Her $x, y, z \in X$ için

$$p^{\sigma}(x,y) = [\sigma(x,y) - m_{x,y}] + M_{x,y}$$

(σ−üçg) den

$$\leq [\sigma(x,z) - m_{x,z} + \sigma(z,y) - m_{z,y}\,] + M_{x,y}$$
$$= p^{\sigma}(x,z) + p^{\sigma}(z,y) - M_{x,z} - M_{z,y} + M_{x,y}$$

ve 3.2.2. Lemmadan

$$\leq p^{\sigma}(x,z) + p^{\sigma}(z,y) - \sigma(z,z)$$
$$= p^{\sigma}(x,z) + p^{\sigma}(z,y) - p^{\sigma}(z,z)$$

bulunur.

Eş. 3.1 in geçtiği örnekte görüleceği gibi, X üzerinde bir σ M−metriği ile oluşturulan

$$\sigma^{*}(x,y) = \sigma(x,y) - m_{x,y}$$

nin sıradan metrik olmasına gerek yoktur. Ancak, σ nın kısmi metrik olması şartıyla σ^{*} nın

bir standart metrik olduğu garanti edilebilir [13].

3.2.4. Lemma

σ, X üzerinde kısmi metrik ve her $x, y \in X$ için

$$\sigma^*(x,y) = \sigma(x,y) - m_{x,y}$$

olsun. Bu durumda σ^*, X de bir standart metriktir.

İspat

Eş. 3.1 i içeren örnekteki büyük sorun metrik ayırma aksiyomuydu. σ kısmi metrik olduğundan ve (p−asnr) dan her $x, y \in X$ için

$$\sigma(x,y) - \sigma(x,x) \geq 0$$

yazılır. Dolayısı ile

$$0 \leq \sigma(x,y) - \sigma(x,x) \leq \sigma(x,y) - m_{x,y} = \sigma^*(x,y)$$

olur. Buradan $\sigma^*(x,y) = 0$ ise

$$\sigma(x,x) = \sigma(x,y) = \sigma(y,y)$$

bulunur ve (p−ayr) özelliğinden $x = y$ bulunur [13].

3.2.5. Tanım

(X, σ) bir M-metrik uzay ve r_0 bir reel sayı olsun. (X, σ), r_0 ile alttan sınırlı denir ancak ve ancak her $x, y \in X$ için $r_0 \leq \sigma(x,y)$ sağlanır [13].

3.3. M-Metrik Uzay Topolojisi

σ, X üzerinde bir M-metrik olsun. [12] de Asadi ve arkadaşları A−açık yuvarları

her $x \in X$ ve $\epsilon > 0$ için
$B_\epsilon^A = \{y \in X \mid \sigma^*(x,y) = \sigma(x,y) - m_{x,y} < \epsilon\}$

biçiminde tanımladılar. Bu nedenle σ nın kısmi metrik olması özel durumundan ve 3.2.4. Lemma dan A−açık yuvarları bir metrik uzayı gerer. Buna ek olarak [12] kaynağının Teorem 2.1 inde yazarlar, A−açık yuvarların ürettiği uzayın Hausdorff olmadığını vurgulamışlardır. Bir standart metrik bir M-metrik olduğundan bu gereksiz bir ifadedir.

X üzerinde bir p kısmi metriği verilsin. Matthews [2] p-açık yuvarları

$B_\epsilon^p = \{y \in X \mid p(x,y) - p(x,x) < \epsilon\}$

biçiminde tanımlamıştır.

Matthews [2] açık p-yuvarlarının T_1 olması gerekmeyen T_0 topolojileri ürettiğini gösterdi. p-açık yuvar dendiğinde standart kısmi metrik yuvar olarak ele alınacaktır. [17] de, O'Neill den [10] alınan kısmi metriğin negatif değerler almasına rağmen standart kısmi metrik yuvarların tanımlanabildiği görülmüştür [13].

3.3.1. Lemma

σ, X üzerinde bir M-metrik olsun. B_ϵ^A yuvarlarının ürettiği τ_A topolojisi, B_ϵ^p yuvarlarının ürettiği τ_{σ_s} topolojisinden daha incedir.

İspat

Her $x \in X$ ve her bir $y \in B_\epsilon^p(x)$ yani $\sigma(x,y) - \sigma(x,x) < \epsilon$ eşitsizliğini sağlayan y ler için

$\delta = \epsilon - \sigma(x,y) + \sigma(x,x) > 0$

olsun. $B_\delta^A(y) \subseteq B_\epsilon^p(x)$ olduğunu gösterelim.

$z \in B_\delta^A(y)$ yani $\sigma(y,z) - m_{y,z} < \delta$

ise (p−üçg) ve $-\sigma(y,y) < -m_{y,z}$ yi kullanarak

$$\sigma(x,z) - \sigma(x,x)$$
$$\leq \sigma(x,y) + \sigma(y,z) - \sigma(y,y) - \sigma(x,x)$$
$$\leq \sigma(x,y) - \sigma(x,x) + \sigma(y,z) - m_{y,z}$$
$$< \sigma(x,y) - \sigma(x,x) + \delta = \epsilon$$

bulunur. Dolayısıyla $B_\delta^A(y) \subseteq B_\epsilon^p(x)$ bulunur. Böylece τ_A, τ_{σ_s} den daha incedir.

3.3.1. Lemma, $B_\epsilon^A(x)$ nın neden $B_\epsilon^p(x)$ nın en uygun bir genelleştirmesi olmadığını gösterir. σ nın kısmi metrik olması durumunda, $B_\epsilon^A(x)$ standart bir metrik yuvar olur. Dolayısıyla, bu durumda $B_\epsilon^A(x)$ ile üretilen topoloji $B_\epsilon^p(x)$ ile üretilen topolojiden daha ince olur.

Kısmi metriğin bir genelleştirmesi olarak bir M-metrik teorisi geliştirilecekse, verilen topoloji standart kısmi metrik topolojiden kesinlikle daha ince olmamalıdır. Aşağıda verilen M-açık yuvarlar bunu sağlamıştır [13].

3.3.2. Tanım

σ, X üzerinde bir M-metrik olsun. Her $x \in X$ ve $\epsilon > 0$ için x merkezli ϵ yarıçaplı M-açık yuvar:

$B_\epsilon^\sigma = \{y \in X \mid \sigma(x,y) + \sigma(y,y) - m_{x,y} - \sigma(x,x) < \epsilon\}$
biçiminde tanımlanır [13].

Uyarı

$\sigma(x,x) - \sigma(x,x) + \sigma(x,x) - m_{x,x} = 0$ olduğundan her $\epsilon > 0$ için $x \in B_\epsilon^\sigma(x)$ olduğu görülür. Buna ek olarak,

$$m_{x,y} = \sigma(y,y) \leq \sigma(x,y) \leq \sigma(x,x)$$

olacak şekilde $x, y \in X$ var ise

$$\sigma(x,y) + \sigma(y,y) - m_{x,y} - \sigma(x,x)$$
$$= [\sigma(x,y) - \sigma(x,x)] + [\sigma(y,y) - m_{x,y}\,]$$
$$= \sigma(x,y) - \sigma(x,x) \leq 0$$

olur. Böylece $m_{x,y} = \sigma(y,y) \leq \sigma(x,y) \leq \sigma(x,x)$ eşitliğini sağlayan bütün x merkezli M−açık yuvarlar, y yi de içerir [13].

3.3.3. Lemma

σ, X üzerinde bir M-metrik olsun. X üzerinde M−açık yuvarlarının $B^\sigma = \{B_\epsilon^\sigma(x)\}_{x \in X}^{\epsilon>0}$ ailesi X kümesinin bir tabanını oluşturur.

İspat

Her $x \in X$ ve $\epsilon > 0$ için $y \in B_\epsilon^\sigma(x)$ olsun. Bu durumda

$$\sigma(x,y) + \sigma(y,y) - m_{x,y} - \sigma(x,x) < \epsilon$$

olur.

$$\delta = \epsilon - \sigma(x,y) - \sigma(y,y) + m_{x,y} + \sigma(x,x) > 0 \qquad (3.2)$$

olarak alalım. $B_\delta^\sigma(y) \subseteq B_\epsilon^\sigma(x)$ olduğunu iddia edelim. $z \in B_\delta^\sigma(y)$ ise bu durumda

$$\sigma(y,z)+\sigma(z,z)-m_{y,z}-\sigma(y,y)<\delta \qquad (3.3)$$

bulunur. Böylece 3.2.1. Tanım daki (σ−üçg) aksiyomundan

$$\sigma(x,z)+\sigma(z,z)-m_{x,z}-\sigma(x,x)=[\sigma(x,z)-m_{x,z}\,]+\sigma(z,z)-\sigma(x,x)$$
$$\leq[\sigma(x,y)-m_{x,y}+\sigma(y,z)-m_{y,z}\,]+\sigma(z,z)\;-\;\sigma(x,x)$$

$\sigma(y,y)$ ekleyip çıkarak

$$=[\sigma(x,y)+\sigma(y,y)-\;m_{x,y}-\sigma(x,x)]+[\sigma(y,z)+\sigma(z,z)-m_{z,z}-\sigma(y,y)]$$

elde edilir. Eş. 3.3 ve 3.2 den,

$$\sigma(x,z)+\sigma(z,z)-m_{x,z}-\sigma(x,x)<\sigma(x,y)+\sigma(y,y)-m_{x,y}-\sigma(x,x)+\delta=\epsilon$$

elde edilir. Bu yüzden $B_\delta^\sigma(y)\subseteq B_\epsilon^\sigma(x)$ olur ve B^σ, X için bir tabandır [13].

3.3.4. Tanım

X kümesi üzerinde bir σ M−metriği verilsin. Aşağıdaki ifadeler vardır:

$$\tau_\sigma\colon B_\epsilon^\sigma(x)=\{y\in X\mid\sigma(x,y)+\sigma(y,y)-m_{x,y}-\sigma(x,x)<\epsilon\}$$

M-açık yuvarların ürettiği topolojidir.

$$\tau_{p^\sigma}\colon B_\epsilon^{p^\sigma}(x)=\{y\in X\mid p^\sigma(x,y)-p^\sigma(x,x)<\epsilon\}$$

p−açık yuvarlarının gerdiği standart kısmi metrik topolojidir ve p^σ, 3.2.3. Teorem deki σ m-metriğinden oluşturulan kısmi metriktir. Yani

$$B_\epsilon^{p^\sigma}(x)=\{y\in X\mid\sigma(x,y)+M_{x,y}-m_{x,y}-\sigma(x,x)<\epsilon\}$$

olur. σ kısmi metrik olması durumunda ise

$\tau_{\sigma_s}: B_\epsilon^{\sigma_s}(x) = \{y \in X \mid \sigma(x,y) - \sigma(x,x) < \epsilon\}$

p−açık yuvarları tarafından üretilen standart kısmi metrik topolojidir.

3.3.5. Lemma

σ, X üzerinde bir M-metrik olsun. O halde τ_σ, τ_{p^σ} den daha kabadır.

İspat

$B_\epsilon^\sigma(x)$, M-açık yuvar ve $y \in B_\epsilon^{p^\sigma}(x)$ olsun. Bu durumda 3.3.4. Tanım dan,

$\sigma(x,y) + M_{x,y} - m_{x,y} - \sigma(x,x) < \epsilon$

yazılır. Bundan dolayı

$\sigma(x,y) + \sigma(y,y) - m_{x,y} - \sigma(x,x) \leq \sigma(x,y) + M_{x,y} - m_{x,y} - \sigma(x,x) < \epsilon$

olur. Bu yüzden

$B_\epsilon^{p^\sigma}(x) \subseteq B_\epsilon^\sigma(x)$ olur ve dolayısıyla $\tau_\sigma \subseteq \tau_{p^\sigma}$ yazılır [13].

3.3.6. Lemma

σ, X üzerinde kısmi metrik uzay olsun. O halde $\tau_{\sigma_s} = \tau_\sigma$ vardır.

İspat

$B_\epsilon^{\sigma_s}(x)$ standart p-açık yuvar ve $y \in B_\epsilon^\sigma(x)$ olsun. Bu durumda

$\sigma(x,y) + \sigma(y,y) - m_{x,y} - \sigma(x,x) < \epsilon$
$\sigma(x,y) - \sigma(x,x) \leq \sigma(x,y) - \sigma(x,x) + \sigma(y,y) - m_{x,y} < \epsilon$

olur. Dolayısıyla $B_{\epsilon}^{\sigma}(x) \subseteq B_{\epsilon}^{\sigma_s}(x)$ bulunur. Bu nedenle $\tau_{\sigma_s} \subseteq \tau_{\sigma}$ olur.

Aksine, $y \in B_{\frac{\epsilon}{2}}^{\sigma_s}(x)$ olsun. O halde

$$\sigma(x,y) \leq \sigma(x,x) < \frac{\epsilon}{2}$$

bulunur.

1. Durum: $m_{x,y} = \sigma(x,x) \leq \sigma(y,y)$ ise bu durumda 3.1.1. Tanım daki (p−asnr) dan $\sigma(y,y) \leq \sigma(x,y)$ ve $m_{x,y} = \sigma(x,x)$ bulunur. Böylece

$$\sigma(x,y) + \sigma(y,y) - m_{x,y} - \sigma(x,x) \leq \sigma(x,y) + \sigma(x,y) - \sigma(x,x) - \sigma(x,x) < 2(\frac{\epsilon}{2}) = \epsilon$$

elde edilir.

2. Durum: $m_{x,y} = \sigma(y,y) \leq \sigma(x,x)$ ise $\sigma(y,y) - m_{x,y} = 0$ olur ve bu nedenle

$$\sigma(x,y) + \sigma(y,y) - m_{x,y} - \sigma(x,x) = \sigma(x,y) - \sigma(x,x) < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

yazılır. Dolayısıyla,

$B_{\frac{\epsilon}{2}}^{\sigma_s}(x) \subseteq B_{\epsilon}^{\sigma}(x)$ olur ve buradan $\tau_{\sigma_s} = \tau_{\sigma}$ sonucuna ulaşılır [13].

τ_{σ}, τ_{σ_s} ın bir uygun genelleştirmesi olduğu 3.3.5. Lemma ve 3.3.6. Lemma dan görülür [13].

Uyarı

σ, X üzerinde bir M-metrik olsun. Aşağıdakiler vardır:
M-metrik uzay $(X,\sigma) = (X,\tau_{\sigma})$ yazılır.
Kısmi metrik uzay $(X,p^{\sigma}) = (X,\tau_{p^{\sigma}})$ olur.
Bundan sonra σ kısmi metriğinden, standart kısmi metrik uzayı anlayacağız.

O halde standart kısmi metrik uzay için

$(X, \tau_{\sigma_s}) = (X, \tau_\sigma) = (X, \sigma)$

yazılabilir. Eğer her σ m-metriği için $\tau_\sigma = \tau_{p^\sigma}$ eşitliği geçerli olsaydı bütün çalışmamız kullanışsız olurdu. Aşağıdaki örnekte tanımlanan m−metriğinden elde etiğimiz $\tau_\sigma \subsetneq \tau_{p^\sigma}$ ifadesi buna bir örnektir [13].

Örnek

$X = \mathbb{R}$ kümesi üzerinde σ m−metriği,

$\sigma(x, y) = x + y$

ile tanımlansın. O halde $\tau_\sigma \subsetneq \tau_{p^\sigma}$ vardır.

İspat

$x \leq y \in X$ olarak alırsak

$\sigma(y, y) = 2y$ ve $\sigma(x, x) = m_{x,y} = 2x$

eşitlikleri elde edilir. 3.3.4. Tanım dan,

$B_\epsilon^\sigma(x) = \{y \in X \mid \sigma(x, y) + \sigma(y, y) - m_{x,y} - \sigma(x, x) < \epsilon\}$

M-açık yuvarları, τ_σ topolojisini üretir.

Eğer $y \leq x$ olursa

$\sigma(x, y) + \sigma(y, y) - m_{x,y} - \sigma(x, x) = y - x \leq 0 < \epsilon$

bulunur. Eğer $x < y$ olursa

$\sigma(x,y)+\sigma(y,y)-m_{x,y}-\sigma(x,x)=3(y-x)$

elde edilir. Dolayısıyla,

$B_{\epsilon}^{\sigma}(x)=\left(-\infty,x+\frac{\epsilon}{3}\right)$

yazılır. Yine 3.3.4. Tanım dan,

$B_{\epsilon}^{p^{\sigma}}(x)=\{y\in X\mid\sigma(x,y)+M_{x,y}-m_{x,y}-\sigma(x,x)<\epsilon\}$

p-açık yuvarları, $\tau_{p^{\sigma}}$ topolojisini üretir.

Eğer $y\leq x$ olursa

$\sigma(x,y)+M_{x,y}-m_{x,y}-\sigma(x,x)=x-y$

bulunur. Eğer $x<y$ olursa

$\sigma(x,y)+M_{x,y}-m_{x,y}-\sigma(x,x)=3(y-x)$

bulunur. O yüzden,

$B_{\epsilon}^{p^{\sigma}}(x)=\left(x-\epsilon,x+\frac{\epsilon}{3}\right)$

elde edilir. $\tau_{\sigma}\subsetneq\tau_{p^{\sigma}}$ olduğu açıktır [13].

3.3.7. Lemma

Her M-metrik uzayı T_o uzayıdır.

İspat

(X, σ) M-metrik uzay olsun. $x \neq y \in X$ olmak üzere genelliği bozmadan iki durumu ele alalım:

1. Durum: Eğer $\sigma(x,x) = \sigma(y,y)$ ise (3.1.1. Tanım daki) (σ−asnr) ve (σ−ayr) dan ve $x \neq y$ olduğundan

$$m_{x,y} = \sigma(x,x) = \sigma(y,y) < \sigma(x,y)$$

elde edilir. Bu nedenle

$$\sigma(x,y) + \sigma(y,y) - m_{x,y} - \sigma(x,x) = \sigma(x,y) - \sigma(x,x) > 0$$

bulunur. Sonuç olarak eğer $\epsilon = \sigma(x,y) - \sigma(x,x)$ ise $y \notin B_\epsilon^\sigma(x)$ olur.

2. Durum: Eğer $\sigma(x,x) < \sigma(y,y)$ ise (σ−asnr) dan $\sigma(x,y) - m_{x,y} \geq 0$ bulunur. Bu nedenle

$$\sigma(x,y) + \sigma(y,y) - m_{x,y} - \sigma(x,x) \geq \sigma(y,y) - \sigma(x,x) > 0$$

yazılır. Bu yüzden eğer $\epsilon = \sigma(y,y) - \sigma(x,x)$ ise $y \notin B_\epsilon^\sigma(x)$ olur.

Bir kısmi metrik bir M-metrik olduğundan, T_1-uzayı olmasına gerek olmayan M-metrik uzay örnekleri için [2, 17] kaynakları incelenebilir [13].

4. CAUCHY DÖNÜŞÜMLERİ VE YÖRÜNGESEL SÜREKLİLİK

4.1. r-Cauchy Dizi ve r-Cauchy Fonksiyonu

[17,18] kaynaklarındaki yaklaşımın M-metrik şartına uygulanması incelenecektir [13].

4.1.1. Tanım

σ, X üzerinde bir M-metrik ve r bir reel sayı olsun. X üzerinde bir $\{x_i\}_{i\in N}$ dizisi r-Cauchy dir ancak ve ancak

$$\lim_{i,j\to+\infty} \sigma(x_i, x_j) = r$$

vardır. r ye $\{x_i\}_{i\in N}$ dizisinin merkezi uzaklığı denir [13].

Uyarı

Başka bir şekilde, r-Cauchy dizisi aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\lim_{i\neq j\to+\infty} \sigma(x_i, x_j) = \lim_{i,j\to+\infty} m_{x_i,x_j} = r.$$

Bu tanım [12] de verilen tanıma yakındır fakat $\{x_i\}_{i\in N}$ dizisi

$$\lim_{i,j\to+\infty} \sigma(y_i, y_j) = r$$

sağlayan $\{y_i\}_{i\in N}$ alt dizisine sahip olduğundan küçük bir farkla daha genel bir tanım oluşturulabilir [13].

4.1.2. Lemma

$\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, (X, σ) M-metrik uzayı üzerinde bir r-Cauchy dizisi olsun. Bu durumda

(a) $\lim_{i\to+\infty} \sigma(x_i, x_i) = r$

(b) $\lim_{i,j\to+\infty} m_{x_i,x_j} = r$

ve

(c) $\lim_{i,j\to+\infty} M_{x_i,x_j} = r$

olur.

İspat

4.1.2. Lemma nın ispatı oldukça basittir. 4.1.1. Tanım dan (a) elde edilir. (a) dan (b) ve (c) elde edilir.

Limit, M-metrik uzay konusu içerisinde ele aldığımız bir topolojik tanımdır [13].

4.1.3. Tanım

$\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, (X, σ) M-metrik uzayı üzerinde bir r-Cauchy dizisi olsun. $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir limiti $a \in X$ dir denir ancak ve ancak

$$\lim_{i\to+\infty} \sigma(a, x_i) + \sigma(x_i, x_i) - m_{a,x_i} = \sigma(a, a)$$

sağlanır.

Burada şöyle bir soru akla gelebilir: $\sigma(a, a)$ ile r sayısının ilişkisi nedir? Bu sorunun cevabı [17] kaynağında kısmi metrik durumu için incelendi. Bir M-metrik olması halinde de sonuç aynıdır [13].

4.1.4. Lemma

$\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, (X, σ) M-metrik uzayı üzerinde bir r-Cauchy dizisi olsun. $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ dizisinin limiti a ise $r \leq \sigma(a, a)$ olur.

İspat

3.2.1. Tanım (σ−asnr) dan her bir i için $0 \leq \sigma(a, x_i) - m_{a,x_i}$ olduğunu biliyoruz. Her iki tarafa $\sigma(x_i, x_i)$ ekleyerek

$$\sigma(x_i, x_i) \leq \sigma(a, x_i) + \sigma(x_i, x_i) - m_{a,x_i}$$

elde edilir.

Her iki tarafın limiti alınarak 4.1.2. Lemma (a) ve 4.1.3. Tanım dan $r \leq \sigma(a, a)$ elde edilir. r-Cauchy dizisinin limiti tek olmak zorunda değildir. [17] de kısmi metrik durumu için verilen bir örnek incelendi.

Kısmi metrik literatürünü taradığımızda, örnek vermek gerekirse [10, 17, 18, 20, 21] kaynakları gibi, yukardaki limitin daha güçlü bir versiyonu düşünülebilir. M-metrik uzay, kısmi metrik uzayın istisnasız bir genelleştirmesidir [13].

4.1.5. Tanım

$\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, (X, σ) M-metrik uzayı üzerinde bir r-Cauchy dizisi olsun. Bir $a \in X$ elemanı $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ nin özel limitidir ancak ve ancak a, $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ nin bir limiti ve $\sigma(a, a) = r$ olur.

Normal limitin aksine, özel limit bir tektir [13].

4.1.6. Lemma

$\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, (X, σ) M-metrik uzayı üzerinde bir r-Cauchy dizisi olsun. a, $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ nin bir özel limiti ise a tektir.

İspat

a ve b, $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ nin iki özel limiti olsun. 4.1.5. Tanım dan

$r = \sigma(a,a) = \sigma(b,b) = m_{a,b}$

3.2.1. Tanım (σ−asnr) dan

$r = \sigma(a,a) = m_{a,b} \leq \sigma(a,b)$

olduğunu biliyoruz. Bu nedenle

$\sigma(a,b) = [\sigma(a,b) - m_{a,b}\ ] + r$

ve (σ−üçg) kullanılarak

her i için

$\leq \left[\sigma(a,x_i) - \ m_{a,x_i} + \sigma(b,x_i) - m_{b,x_i}\right] + r$

yazılır. Dolayısıyla $\sigma(x_i,x_i)$ ekleyip çıkartarak

$\sigma(a,b) \leq \left[\sigma(a,x_i) + \sigma(x_i,x_i) - m_{a,x_i}\right] + \left[\sigma(b,x_i) + \sigma(x_i,x_i) - m_{b,x_i}\right] - 2\sigma(x_i,x_i) + r$

elde edilir. Bir özel limit bir limit de olduğundan 4.1.5. Tanım ve 4.1.2. Lemma dan:

$\sigma(a,x_i) + \sigma(x_i,x_i) - m_{a,x_i} \to \sigma(a,a) = r$

$\sigma(b,x_i) + \sigma(x_i,x_i) - m_{b,x_i} \to \sigma(b,b) = r$

ve

$\sigma(x_i,x_i) \to \sigma(a,a) = r$

yazılır. Bu yüzden,

$\sigma(a,b) \leq r + r - 2r + r = r = \sigma(a,a)$

vardır. O yüzden

$\sigma(a,a) = \sigma(a,b)\ = \sigma(b,b)$

olur. 3.2.1. Tanım (σ−ayr) dan $a = b$ bulunur [13].

4.1.7. Lemma

$\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, (X, σ) M-metrik uzayı üzerinde bir r-Cauchy dizisi olsun. a, $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ nin bir özel limiti olsun. Bu durumda aşağıdakiler vardır:

(a) $\lim_{i\to+\infty} M_{a,x_i} = \sigma(a,a)$

(b) $\lim_{i\to+\infty} m_{a,x_i} = \sigma(a,a)$

ve

(c) $\lim_{i\to+\infty} \sigma(a,x_i) = \sigma(a,a)$.

İspat

(a) ve (b) şıkları açıktır. (c) nin ispatı için 4.1.3. Tanım kullanılarak

$$\lim_{i\to+\infty} \sigma(a,x_i) + \sigma(x_i,x_i) - m_{a,x_i} = \sigma(a,a)$$

elde edilir. Bundan dolayı 4.1.5. Tanım ve 4.1.2. Lemma (b) kullanılarak

$$\lim_{i\to+\infty} \sigma(a,x_i) = \lim_{i\to+\infty} \left(\left[\sigma(a,x_i) + \sigma(x_i,x_i) - m_{a,x_i}\right] - \sigma(x_i,x_i) + m_{a,x_i}\right)$$
$$= \sigma(a,a) - \sigma(a,a) + \sigma(a,a) = \sigma(a,a)$$

bulunur [13].

4.1.8. Lemma

$\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, (X, σ) M-metrik uzayı üzerinde bir r-Cauchy dizisi olsun. a, $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ nin bir özel limiti olursa

her $y \in X$ için

$\lim_{i\to+\infty} \sigma(y,x_i) - m_{y,x_i} = \sigma(y,a) - m_{y,a}$

sağlanır.

İspat

İspat doğrudan (σ−asnr) ve 4.1.7. Lemma dan elde edilir.

Geriye kalan özel bir limitin varlığını garantilemektir. Dolayısıyla, bir M-metrik uzayın tamlığı tanımını vereceğiz [13].

4.1.9. Tanım

Her r reel sayısı için X de her r-Cauchy dizisi bir özel limite sahip ise (X, σ) M-metrik uzayına tamdır denir [13].

4.1.10. Tanım

(X, σ) M-metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $f: X \to X$, X üzerinde bir fonksiyon olsun. f, x_0 da bir r-Cauchy fonksiyonudur ancak ve ancak $\{f^i(x_0)\}_{i\in\mathbb{N}}$, X de bir r-Cauchy dizisidir [13].

4.2. Yörüngesel Süreklilik

4.2.1. Tanım

(X, σ) M-metrik uzay, $f : X \to X$ bir fonksiyon ve $x_0, z_0 \in X$ olsun.

z_0, $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ ın limiti iken $f(z_0)$, $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ in limiti yani,

$$\lim_{n\to+\infty} p(f^n(x_0), z_0) = p(z_0, z_0) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} p\big(f^n(x_0), f(z_0)\big) = p\big(f(z_0), f(z_0)\big)$$

ise f, z_o için x_0 da yörüngesel süreklidir denir.

f her $z \in X$ için x_0 da yörüngesel sürekli ise f, x_0 da yörüngesel süreklidir. Her $x \in X$ da yörüngesel sürekli ise f, yörüngesel süreklidir [17].

4.2.2. Tanım

(X, σ) M-metrik uzay ve $x_0 \in X$ olsun. $f: X \to X$ fonksiyonu x_0 da zayıf yörüngesel süreklidir ancak ve ancak a, $\{f^i(x_0)\}_{i\in\mathbb{N}}$ ın özel limiti olduğunda $f(a)$, $\{f^i(x_0)\}_{i\in\mathbb{N}}$ ın limitidir [13].

Uyarı

$f(a)$ nın $\{f^i(x_0)\}_{i\in\mathbb{N}}$ ın özel limiti olmasından ziyade sadece limiti olması gereklidir [13].

4.2.3. Tanım

(X, p) kısmi metrik uzay olsun.

$$\lim_{m,n\to+\infty} p(x_m, x_n) = r$$

olacak şekilde en az bir $r \in \mathbb{R}$ var ise $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine (X, p) de bir Cauchy dizisi denir.

$$\lim_{n\to+\infty} p(a, x_n) = p(a, a)$$

ise bir $a \in X$ elemanına $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir limiti denir.

$$\lim_{m,n\to+\infty} p(x_m, x_n) = \lim_{n\to+\infty} p(a, x_n) = p(a, a)$$

ise bir $a \in X$ elemanına $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir özel limiti denir.

Sonuç olarak, (X, p) de her $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy dizisi bir $a \in X$ özel limitine yakınsarsa bir (X, p) kısmi metrik uzayı tamdır denir.

Kısmi metrik uzaylarda genelde limit tek değilken bir Cauchy dizisinin özel limitinin tek olduğu gösterilecektir [17].

4.2.4. Lemma

(X, p)kısmi metrik uzay ve (X, p) de her bir $a \in X$ özel limitine sahip $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy dizisi aşağıdaki şartı sağlar:

Her $y \in X$ için
$\lim_{n\to\infty} p(x_n, y) = p(a, y)$.

İspat

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy dizisi ve a, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir özel limiti olduğundan, 4.2.3. Tanım dan

$$\lim_{m,n\to\infty} p(x_m, x_n) = \lim_{n\to\infty} p(a, x_n) = p(a, a)$$

yazılır. $\epsilon > 0$ ve $y \in X$ sabit olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$p(x_n, y) \leq p(x_n, a) + p(a, y) - p(a, a)$$

yazılır.

Her $n \geq N_1$ için
$p(x_n, a) - p(a, a) < \epsilon$

olacak şekilde yeterince büyük N_1 sayısı seçilirse

$$p(x_n, y) < p(a, y) + \epsilon$$

olur. Tersine,

her $n \in \mathbb{N}$ için
$p(a, y) \leq p(a, x_n) + p(x_n, y) - p(x_n, x_n)$

bulunur.

$\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$

olarak tanımlansın ve

her $n \geq N_2$ için
$p(a, x_n) < p(a, a) + \epsilon'$ ve $p(x_n, x_n) > p(a, a) - \epsilon'$

olacak şekilde yeterince büyük N_2 sayısını seçilirse

her $n \geq N_2$ için
$p(a, y) < (p(a, a) + \epsilon') + p(x_n, y) - (p(a, a) - \epsilon') = p(x_n, y) + 2\epsilon' = p(x_n, y) + \epsilon$

olur. $N = maks\{N_1, N_2\}$ olarak tanımlanırsa,

her $n \geq N$ için
$p(a, y) - \epsilon < p(x_n, y) < p(a, y) + \epsilon$

elde edilir. $0 < \epsilon$ keyfi bir sabit olduğundan $\lim_{n\to\infty} p(x_n, y) = p(a, y)$ bulunur [17].

4.2.5. Tanım

(X, p) kısmi metrik uzayı, 0 ile alttan sınırlı ve

her $x, y \in X$ için
$p(f(x), f(y)) \leq cp(x, y)$

olacak şekilde en az bir $0 \leq c < 1$ varsa f bir büzülmedir denir [17].

4.2.6. Teorem

[2, Teorem 5.3] Her bir 0 ile alttan sınırlı (X, p) tam kısmi metrik uzayı ve $f: X \to X$ büzülme dönüşümü için $f(a) = a$ olacak şekilde bir tek $a \in X$ vardır, üstelik $p(a, a) = 0$ olur.

Bu çalışmada bu teoremin ispatı iki şekilde ele alınacaktır. Birincisi, negatif uzaklıkların olduğu uzayda fonksiyonun şartlarını zayıflatmaktır (Bkz. 4.3.2. Teorem), böylece sabit bir noktanın varlığı artık daha geniş bir fonksiyon ve uzay sınıfı için geçerli olur, ancak teklik kaybedilir. İkincisi, kendine uzaklığı sıfır olmayan sabit noktaları kabul edecek kadar genel bir fonksiyona izin vermektir.

4.2.7. Tanım

(X, p) kısmi metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $f: X \to X$ dönüşümü verilsin. x_0 ın f altındaki $\left(f^n(x_0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ yörüngesi (X, p) de bir Cauchy dizisi ise f, x_0 da Cauchy dir denir.

f, x_0 da Cauchy ve $\left(f^n(x_0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy dizisinin özel limiti a ise f fonksiyonuna a özel limiti ile x_0 da Cauchy dir denir. f, her $x \in X$ de Cauchy ise f, Cauchy dir denir.

(X, p), 0 ile alttan sınırlı ve f bir büzülme ise f in Cauchy olduğu fakat tersinin doğru olmadığı daha sonra verilecektir. Bu durumda Cauchy dönüşümlerinin sınıfı, 0 ile alttan sınırlı kısmi metrik uzaylarda büzülme dönüşümleri sınıfından daha geniştir [17].

4.2.8. Lemma

(X, p) kısmi metrik uzay, $x_0 \in X$ ve x_0 noktasında $a \in X$ özel limitine sahip aşağıdaki şartları sağlayan $f: X \to X$ dönüşümü bir Cauchy olsun:

$$\lim_{n\to\infty} p\left(f^n(x_0), f(a)\right) = p\left(a, f(a)\right)$$

Dahası aynı hipotezlerle f, a için x_0 da yörüngesel süreklidir

$$\Leftrightarrow p(f(a), f(a)) = p(a, f(a))$$

eşitliği doğrudur.

İspat

4.2.4. Lemma da $x_n = f^n(x_0)(n \in \mathbb{N})$ ve $y = f(a)$ olarak tanımlanırsa ilk ifade elde edilir. Aynı hipotez altında

f, a için x_0 da yörüngesel süreklidir

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} p\big(f^n x_0, f(a)\big) = p\big(f(a), f(a)\big)$
$\Leftrightarrow p(a, f(a)) = p(f(a), f(a))$

Yukardaki son satırda ancak ve ancak dizi ilk ifadeye eşit olur. Özel limitin tekliği bir sonuç olarak verilecektir [17].

4.2.9. Lemma

(X, σ) M-metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $f: X \to X$ fonksiyonu x_0 da zayıf yörüngesel sürekli olsun. a, $\{f^i(x_0)\}_{i\in\mathbb{N}}$ nın özel limiti ise

$m_{a,f(a)} = \sigma(a,a) \leq \sigma(a, f(a)) \leq \sigma(f(a), f(a))$

sağlanır.

İspat

Her i doğal sayısı için $x_i = f^i(x_0)$ dizisi tanımlansın. a, $\{f^i(x_0)\}_{i\in\mathbb{N}}$ nın özel limiti ve $f: X \to X$ fonksiyonu x_0 da zayıf yörüngesel sürekli olduğundan $f(a)$, $\{f^i(x_0)\}_{i\in\mathbb{N}}$ nın limitidir. Dolayısıyla, 4.1.4. Lemma dan,

$\sigma(a,a) \leq \sigma(f(a), f(a))$

ve böylece (σ−asnr) dan

$m_{a,f(a)} = \sigma(a,a) \leq \sigma(a, f(a))$

yazılır. Dahası,

her i için

$$\sigma(a, f(a)) = [\sigma(a, f(a)) - m_{a,f(a)}] + \sigma(a, a)$$

ve (σ−üçg) den

$$\leq [\sigma(a, x_i) - m_{a,x_i} + \sigma(x_i, f(a)) - m_{x_i,f(a)}] + \sigma(a, a)$$

yazılır, $\sigma(x_i, x_i)$ ekleyip çıkararak

$$= \sigma(a, x_i) - m_{a,x_i} + \sigma(x_i, f(a)) + \sigma(x_i, x_i) - m_{x_i,f(a)} - \sigma(x_i, x_i) + \sigma(a, a)$$

$i \to +\infty$ için limit alınırsa

$$= \sigma(a, a) - \sigma(a, a) + \sigma(f(a), f(a)) - \sigma(a, a) + \sigma(a, a) = \sigma(f(a), f(a))$$

bulunur. 4.2.9. Lemma ve (σ−ayr) dan a özel limitinin f fonksiyonun bir sabit noktası olması için $\sigma(f(a), f(a)) \leq \sigma(a, a)$ şartına ihtiyaç vardır. Bu çeşitli yollarla elde edilebilir. Bu çalışmada iki yol incelendi: birincisi genişlemeyen özelliğidir, ikincisi uzayın $\sigma(f(a), f(a))$ gibi bir alt sınıra sahip olmasıdır [13].

4.2.10. Lemma

(X, p) kısmi metrik uzay ve (X, p) de her $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy dizisi için X de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin en fazla bir tane özel limiti vardır.

İspat

X de $(x_n)_{n\in N}$ dizisinin iki özel limiti a ve b olsun. O halde, 4.2.3. Tanım dan,

$$\lim_{m,n\to\infty} p(x_m, x_n) = \lim_{m,n\to\infty} p(a, x_n) = p(a, a)$$
$$\lim_{m,n\to\infty} p(x_m, x_n) = \lim_{m,n\to\infty} p(b, x_n) = p(b, b)$$

elde edilir. Buradan hareketle $p(a,a) = p(b,b)$ bulunur. 4.2.4. Lemma dan da

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n, a) = p(b,a)$$

yazılır. Hepsi birleştirilerek

$$p(a,a) = p(a,b) = p(b,b)$$

elde edilir. (p−ayr) şartından $a = b$ sonucuna ulaşılır [17].

(X, d) metrik uzayı üzerinde $f : X \to X$ sürekli fonksiyonu dizisel süreklidir.

4.2.11. Lemma

(X, d) metrik uzayı üzerinde $f : X \to X$ sürekli dönüşümü yörüngesel süreklidir [17].

4.3. Cauchy Dönüşüm Teoremi

Kısmi metrik uzaylar için Cauchy Dönüşüm Teoremi önemlidir. Bu teorem (4.3.2. Teorem) kısmi metrik uzaylarda çeşitli sabit nokta teoremlerin temel ispatları için veriliyor. Kısmi metrik uzaylarda bilinen sabit nokta teoremlerin çoğu benzer yapıya sahiptir ve sonraki teoremler bu yapıdan çıkarılır.

4.3.1. Tanım

σ, X üzerinde bir M-metrik ve $f: X \to X$, X üzerinde bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu genişlemeyendir ancak ve ancak her $x, y \in X$ için

$$\sigma(f(x), f(y)) \leq \sigma(x,y)$$

olur [13].

4.3.2. Teorem (Kısmi metrik uzaylar için Cauchy Dönüşüm Teoremi)

(X, p) kısmi metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $f: X \to X$ Cauchy dönüşümü x_0 da
$a \in X$ özel limitine sahip olsun. Ayrıca, aşağıdaki koşullardan en az birinin geçerli olduğunu varsayalım:

(1) f, genişlemeyen ve a için x_0 da yörüngesel sürekli olsun;
(2) f, a için x_0 da yörüngesel sürekli ve (X, p), $p(f(a), f(a))$ ile alttan sınırlı;
(3) f genişlemeyen ve (X, p), $p(a, a)$ ile alttan sınırlı.

O halde a, f in bir sabit noktasıdır.

İspat

Üç durum ayrı ayrı incelenecek:

1.Durum: f, genişlemeyen ve a için x_0 da yörüngesel sürekli olsun. f, a için x_0 da yörüngesel sürekli olduğundan, 4.2.8. Lemma dan

$$p(a, f(a)) = p(f(a), f(a))$$

bulunur. f genişlemeyen olduğundan, ayrıca

$$p(a, f(a)) = p(f(a), f(a)) \leq p(a, a)$$

elde edilir. Bununla (p−asnr) şartı birleştirilerek

$$p(a, a) = p(a, f(a)) = p(f(a), f(a))$$

elde edilir. Bu yüzden, (p−ayr) şartından $f(a) = a$ bulunur, yani a, f in bir sabit noktasıdır.

2.Durum: f, a için x_0 da yörüngesel sürekli ve (X, p), $p(f(a), f(a))$ ile alttan sınırlı olsun. f, a için x_0 da yörüngesel sürekli olduğundan, 4.2.8. Lemma dan

$p(a, f(a)) = p(f(a), f(a))$

bulunur. (p−asnr) şartından $p(a, a) \leq p(a, f(a))$ elde edilir. (X, p), $p(f(a), f(a))$ ile alttan sınırlı olduğundan

$p(f(a), f(a)) \leq p(a, a) \leq p(a, f(a)) = p(f(a), f(a))$

bulunur. Sonuç olarak, (p−ayr) şartından $f(a) = a$ elde edilir, yani a, f in bir sabit noktasıdır.

3.Durum: f genişlemeyen ve (X, p), $p(a, a)$ ile alttan sınırlı olsun. f genişlemeyen olduğundan

$\forall n \in \mathbb{N}$ için
$p\left(f^{n+1}(x_0), f(a)\right) \leq p(f^n(x_0), a)$

bulunur. $n \to \infty$ giderken limit alırsak ve 4.2.4. Lemma uygulanarak

$p(a, f(a)) \leq p(a, a)$

elde edilir. (X, p), $p(a, a)$ ile alttan sınırlı olduğundan ve (p−asnr) şartından

$p(a, a) \leq p(f(a), f(a)) \leq p(a, f(a)) \leq p(a, a)$

bulunur. Böylece (p−ayr) şartından $f(a) = a$ elde edilir, yani a, f in bir sabit noktasıdır [17].

5. YÖRÜNGESEL BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ

5.1. Yörüngesel r-büzülme Dönüşümleri

Matthews kısmi metrik uzaylar için büzülme dönüşümlerini ispatladı.

(X, p) kısmi metrik uzay olsun. f fonksiyonunun x_0 da Cauchy olmasını sağlayan bir $x_0 \in X$ elemanı var olması varsayımı ile bir $f: X \to X$ fonksiyonun sabit bir noktasının varlığı gösterildi. Fonksiyonların özel sınıfından bu şartı sağlayan "yörüngesel r-büzülmesi" olarak adlandırılan bir örnek incelendi. 5.1.2. Lemma bu iddiayı pekiştirir. Bu fonksiyonlar, içeriğimize uygun olan büzülme (yörüngesel büzülme) fonksiyonlarının benzerleridir [17].

5.1.1. Tanım

(X, p) kısmi metrik uzay, $x_0 \in X$, $r \in \mathbb{R}$ ve $f: X \to X$ dönüşüm olsun.
$\forall n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki şartları sağlayan bir $0 \leq c < 1$ sayısı varsa f, x_0 da yörüngesel r-büzülmesidir denir:

$$r \leq p\left(f^n(x_0), f^n(x_0)\right)$$
$$p\left(f^{n+2}(x_0), f^{n+1}(x_0)\right) \leq r + c^{n+1}\,|p(f(x_0), x_0)|$$

f, her $x \in X$ de yörüngesel r-büzülmesi ise f, yörüngesel r-büzülmesidir.

(X, p), 0 ile alttan sınırlı ve f büzülme ise, bu durumda f in yörüngesel 0-büzülmesi olduğuna, fakat tersinin doğru olmadığına dikkat çekelim. Yörüngesel r-büzülme dönüşümleri sınıfı, 0 ile alttan sınırlı kısmi metrik uzaylardaki büzülme dönüşümlerinden bile daha geniştir [17].

5.1.2. Lemma

(X, p) kısmi metrik uzay, $x_0 \in X$, $r \in \mathbb{R}$ ve $f: X \to X$ dönüşümü x_0 da yörüngesel r-büzülmesi, x_0 ın f altındaki $\left(f^n(x_0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ yörüngesi

$$\lim_{m,n\to\infty} p\left(f^m(x_0), f^n(x_0)\right) = r$$

ile (X, p) de bir Cauchy dizisidir.

İspat

f, x_0 da yörüngesel r-büzülmesi olduğundan,

her $n \in \mathbb{N}$ için

$r \le p\left(f^n(x_0), f^n(x_0)\right)$

$p\left(f^{n+2}(x_0), f^{n+1}(x_0)\right) \le r + c^{n+1}|p(f(x_0), x_0)|$

olacak şekilde $0 \le c < 1$ vardır.

$m > n \ge 0$ bir sabit olsun. En az bir $k \ge 0$ için $m = n + k + 1$ olarak verilsin. O halde

$$\begin{aligned}
&p\left(f^{n+k+1}(x_0), f^n(x_0)\right) \\
&\le p\left(f^{n+k+1}(x_0), f^{n+k}(x_0)\right) + p\left(f^{n+k}(x_0), f^n(x_0)\right) - p\left(f^{n+k}(x_0), f^{n+k}(x_0)\right) \\
&\le r + c^{n+k}|p(f(x_0), x_0)| + p\left(f^{n+k}(x_0), f^n(x_0)\right) - r \\
&\le c^{n+k}|p(f(x_0), x_0)| + p\left(f^{n+k}(x_0), f^n(x_0)\right) \\
&\le \cdots \\
&\le (c^{n+k} + \cdots + c^{n+1})|p(f(x_0), x_0)| + p\left(f^{n+1}(x_0), f^n(x_0)\right) \\
&\le (c^{n+k} + \cdots + c^{n+1})|p(f(x_0), x_0)| + r + c^n|p(f(x_0), x_0)| \\
&\le (c^{n+k} + \cdots + c^{n+1} + c^n)|p(f(x_0), x_0)| + r \\
&\le r + c^n \frac{1 - c^{k+1}}{1-c}|p(f(x_0), x_0)| \\
&\le r + c^n \frac{1}{1-c}|p(f(x_0), x_0)|
\end{aligned}$$

elde edilir. $n \to \infty$ giderken limit alırsak, $0 \leq c < 1$ olduğundan yukardaki eşitliğin sağ tarafı r ye gider. Ayrıca

her $k, n \in \mathbb{N}$ için

$$r \leq p\left(f^n(x_0), f^n(x_0)\right) \leq p\left(f^{n+k+1}(x_0), f^n(x_0)\right)$$

olduğundan

$$\lim_{m,n\to\infty} p\left(f^m(x_0), f^n(x_0)\right) = r$$

yazılır ve böylece $\left(f^n(x_0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ bir Cauchy dir.

Böylece her $r \in \mathbb{R}$ için bir yörüngesel r-büzülme dönüşümünün Cauchy olduğu sonucu ortaya çıkar. Özellikle (X, p), 0 ile alttan sınırlı ve $f: X \to X$ büzülme ise bu durumda (f yörüngesel 0-büzülmesi olduğundan) f, Cauchy dir. Bu özellikten dolayı yörüngesel r-büzülme fonksiyonları sabit nokta teorem örneklerinin birçoğunu sağlar. Fakat bunun için özel limitlerin varlığına ihtiyaç vardır. Tamlık şartının zayıflatılması sabit nokta teoremlerinin çalışması için yeterlidir [17].

5.1.3. Tanım

(X, p) kısmi metrik uzay ve $f: X \to X$ bir dönüşüm olsun. (X, p) de $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ biçimindeki Cauchy dizisi $x_0 \in X$ için bir $a \in X$ özel limitine sahipse (X, p) uzayı f için yörüngesel tamdır denir [17].

5.1.4. Teorem

(X, p) kısmi metrik uzay, $x_0 \in X$, $r \in \mathbb{R}$, $f: X \to X$ x_0 da yörüngesel r-büzülmesi ve (X, p) uzayı f için yörüngesel tam olsun. Ayrıca, aşağıdakilerden birini sağladığını varsayalım:

(1) f genişlemeyen ve x_0 da yörüngesel sürekli olsun;

(2) f genişlemeyen ve (X, p), r ile alttan sınırlı olsun.

Bu durumda $f(a) = a$ ve $p(a, a) = r$ olacak şekilde $a \in X$ vardır. Dahası, (X, p), 0 ile alttan sınırlı ve f büzülme ise, bu durumda sabit nokta bir tektir.

İspat

5.1.2. Lemma dan, x_0 ın f altında $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ yörüngesi

$$\lim_{m,n\to\infty} p\left(f^m(x_0), f^n(x_0)\right) = r$$

ile birlikte bir Cauchy dizisidir.

(X, p) uzayı f için yörüngesel tam olduğundan, $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ nın bir özel limiti olan $a \in X$ vardır. 4.2.3. Tanım dan,

$$p(a, a) = \lim_{m,n\to\infty} p\left(f^m(x_0), f^n(x_0)\right) = r$$

elde edilir. Son olarak, 4.3.2. Teorem den $f(a) = a$ bulunur, yani a, f in bir sabit noktasıdır.

(X, p), 0 ile alttan sınırlı, f büzülme ve f in iki sabit noktası $a, b \in X$ olsun. O halde bir $0 \leq c < 1$ reel sayısı için

$$p(a, b) = p(f(a), f(b)) \leq cp(a, b)$$

vardır.

$c = 0$ ise o zaman $p(a, b) = 0$ olur. $0 < c < 1$ ise bu durumda $p(a, b) \neq 0$ ve buradan da $p(a, b) < p(a, b)$ yazılır ki bu çelişkidir.

Böylece bütün durumlarda, $p(a, b) = 0$ bulunur, $a = b$ elde edilir [17].

5.2. Yörüngesel c_r–büzülme, Yörüngesel φ_r-büzülme ve Yörüngesel ϕ_r-büzülme Dönüşümleri

5.2.1. Tanım

(X, σ) M-metrik uzay, $x_0 \in X$, $f: X \to X$, X üzerinde bir fonksiyon, r ve $0 < c < 1$ iki reel sayı olsun. f, x_0 da bir yörüngesel c_r-büzülmesidir (veya x_0 da f yörüngesel olarak c_r-büzülmesidir) denir ancak ve ancak her bir i doğal sayısı için

$$r \leq \sigma\left(f^{i+1}(x_0), f^{i+1}(x_0)\right) \leq r + c^i|\sigma(f(x_0), x_0)|$$

ve

$$\sigma\left(f^{i+2}(x_0), f^{i+1}(x_0)\right) \leq r + c^{i+1}|\sigma(f(x_0), x_0)|$$

sağlanır.

f fonksiyonunun bir r-Cauchy fonksiyonu olması farklı kriterlerle incelendi. Bu durumların çoğunu 4.1.10. Tanım ve 5.2.1. Tanım da verdiğimiz iki durumla özetleriz [13].

5.2.2. Lemma

(X, σ) M-metrik uzay, $x_0 \in X$, $f: X \to X$, X üzerinde bir fonksiyon, r ve $0 < c < 1$ iki reel sayı olsun. f x_0 da bir yörüngesel c_r–büzülmesi ise f, x_0 da bir r-Cauchy fonksiyonudur.

İspat

$\lim_{i \to +\infty} \sigma(x_i, x_i) = r$ ve dolayısıyla $\lim_{i,j \to +\infty} m_{x_i,x_j} = r$ olduğunu göstererek ispatımızı yapalım.

Benzer bir ispat için 5.2.5. Lemma ya bakılabilir [13].

Benzer sabit nokta teoremlerinin elde edilebileceği Cauchy olma özelliğini de yerine getiren "yörüngesel ϕ_r-büzülmesi" olarak adlandırılan başka bir fonksiyon sınıfını ele alalım. 5.2.6. Lemma bu iddiayı kanıtlıyor.

5.2.3. Tanım

(X, σ) M-metrik uzay, $x_0 \in X$, $f: X \to X$, X üzerinde bir fonksiyon, r bir reel sayı ve $\varphi: [r, +\infty) \subset \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = r$ özelliğini sağlayan azalmayan bir fonksiyon olsun.

f, x_0 da bir yörüngesel φ_r-büzülmesidir ancak ve ancak

her i ve j için

$$r \leq \sigma\left(f^{i+1}(x_0), f^{j+1}(x_0)\right) \leq \sigma\left(f^{i}(x_0), f^{j}(x_0)\right) - \varphi\left(\sigma\left(f^{i}(x_0), f^{j}(x_0)\right)\right)$$

sağlanır [13].

5.2.4. Tanım

(X, p) kısmi metrik uzay, $x_0 \in X$, $f: X \to X$, X üzerinde bir fonksiyon, r bir reel sayı ve $\phi: [r, +\infty) \subset \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $\phi(r) = 0$ ve her $t > r$ için $\phi(t) > 0$ özelliğini sağlayan sürekli ve azalmayan bir ϕ fonksiyonu her m ve n için aşağıdaki iki şartı sağlasın:

i) $r \leq p\left(f^{n}(x_0), f^{n}(x_0)\right)$

ii) $p\left(f^{m+1}(x_0), f^{n+1}(x_0)\right) \leq p\left(f^{n}(x_0), f^{n}(x_0)\right) - \phi\left(p\left(f^{i}(x_0), f^{j}(x_0)\right)\right)$.

f, her $x \in X$ da yörüngesel ϕ_r-büzülmesi ise f, yörüngesel ϕ_r-büzülmesidir denir.

Yukarıdaki tanımdan 0 ile alttan sınırlı bir kısmi metrik uzay anlamında [16] bir zayıf ϕ-büzülme dönüşümünün yörüngesel ϕ_0-büzülme dönüşümü olduğu (fakat tersinin doğru olmadığı) açıktır [17].

5.2.5. Lemma

(X, σ) M-metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $f: X \to X$, X üzerinde bir fonksiyon olsun. f, x_0 da bir yörüngesel φ_r-büzülmesi ise f, x_0 da bir r-Cauchy fonksiyonudur.

İspat

$x_0 \in X$ ve f, x_0 da bir yörüngesel φ_r-büzülmesi olsun. $x_i = f^i(x_0)$ dizisi tanımlansın. Oluşabilecek herhangi bir belirsizliği çözmek için ihtiyaç duyulduğunda $x_{(n_k+1)}$ ve $x_{n_{(k+1)}}$ arasında ayrım yapmak için parantez ekleyeceğiz.

1. Adım: $t_i = \sigma(x_{i+1}, x_i)$ olsun. Bu adımda, (verilen alışılmış topoloji ile birlikte) $\mathbb{R}$ topolojik uzayında bir $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ Cauchy dizisinin r ye yakınsadığını göstereceğiz.

5.2.3. Tanım dan,
her i için
$\sigma(x_{i+1}, x_{i+1}) \leq \sigma(x_i, x_i) - \varphi\big(\sigma(x_i, x_i)\big)$

olur ve her i için $\varphi(t_i) \geq 0$ yani $m_{x_i, x_{i+1}} = \sigma(x_{i+1}, x_{i+1})$ olduğundan $\{\sigma(x_i, x_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ azalan bir zincir oluşturur. Dahası, (σ−asnr) dan

$r \leq \sigma(x_{i+2}, x_{i+2}) = m_{x_{i+2}, x_{i+1}} \leq \sigma(x_{i+2}, x_{i+1}) = t_{i+1}$
ve
$t_{i+1} = \sigma(x_{i+2}, x_{i+1}) \leq \sigma(x_{i+1}, x_i) - \varphi\big(\sigma(x_{i+1}, x_i)\big)$
$= t_i - \varphi(t_i) \leq t_i$

yazılır. Bu nedenle

her i için
$r \leq t_{i+1} \leq t_i$

vardır, yani $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde r ile alttan sınırlı artmayan bir dizidir ve bu nedenle $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{R}$ alışılmış topolojisi bir tam metrik uzay olduğundan $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir L limiti her i için $t_i \geq L \geq r$ aralığındadır. φ azalmayan fonksiyon olduğundan,

$$\varphi(t_i) \geq \varphi(L) \geq \varphi(r) = 0$$

yani

$$-\varphi(t_i) \leq -\varphi(L) \leq 0$$

bulunur. Bu nedenle 5.2.3. Tanım dan

$$r \leq t_{i+1} \leq t_i - \varphi(t_i) \leq t_i - \varphi(L)$$
$$\leq t_{i-1} - \varphi(t_{i-1}) - \varphi(L) \leq t_{i-1} - 2\varphi(L)$$

bulunur. Matematiksel tümevarım metodu yardımıyla;
$t_{i+1} \leq t_1 - i\varphi(L)$ elde edilir.

$L > r$ olduğunu kabul edelim. 5.2.3. Tanım dan $\varphi(L) > 0$ bulunur.

$$i > \frac{t_1 - r}{\varphi(L)}$$

alarak

$$t_{i+1} \leq t_1 - i\varphi(L) < t_1 - \frac{t_1 - r}{\varphi(L)}\varphi(L) = r$$

elde edilir, $t_i \geq r$ olduğundan bu bir çelişkidir. Bu nedenle,

$$\lim_{i\to+\infty} t_i = \lim_{i\to+\infty} \sigma(x_i, x_{i+1}) = \lim_{i,j\to+\infty} m_{x_i,x_j} = r \qquad (5.1)$$

bulunur.

2. Adım: Aksine bir kabul ile $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ nin bir r-Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ bir r-Cauchy dizisi olmasın. $r \leq \sigma(x_i, x_j)$ olduğundan her N doğal sayısı için en az bir δ sayısı var öyle ki

$\sigma(x_i, x_j) \geq r + \delta > r$

olacak şekilde $i, j > N$ sayıları vardır.

1. Adımdan yeterli en büyük N yi seçerek her $i > N$ için

$r \leq \sigma(x_i, x_i) = m_{x_{i-1}, x_i} \leq \sigma(x_i, x_{i-1}) < r + \delta$

bulunur. Bu durumda

$\sigma(x_{h_1}, x_{j_1}) \geq r + \delta > r$

olacak şekilde $j_1 > h_1 > N$ sayıları vardır. n_1, $n_1 > h_1$ i sağlayan en küçük sayı ve

$\sigma(x_{h_1}, x_{n_1}) \geq r + \delta$

olsun.

$\sigma(x_{h_1}, x_{(n_1-1)}) < r + \delta$

olur.

$\sigma(x_{h_2}, x_{j_2}) \geq r + \delta > r$

olacak şekilde $j_2 > h_2 > n_1$ sayıları vardır. n_2, $n_2 > m_2$ yi sağlayan en küçük sayı ve

$\sigma(x_{h_2}, x_{n_2}) \geq r + \delta$

olsun. Bu durumda
$\sigma(x_{h_2}, x_{(n_2-1)}) < r + \delta$

olur. Bu işleme devam ederek, her k için

$$\sigma\left(x_{h_k}, x_{(n_k-1)}\right) < r + \delta \leq \sigma\left(x_{h_k}, x_{n_k}\right) \tag{5.2}$$

ve

$$m_{x_{h_k}, x_{n_k}} = \sigma\left(x_{h_k}, x_{n_k}\right)$$

şartlarını sağlayan $\mathbb{N}$ de artan $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ve $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizileri oluştururuz. Her k için $s_k = \sigma\left(x_{h_k}, x_{n_k}\right)$ tanımlansın. Burada

$$\sigma\left(x_{(h_k+1)}, x_{(n_k+1)}\right) \neq s_{k+1} = \sigma\left(x_{h_{(k+1)}}, x_{n_{(k+1)}}\right)$$

yerine 5.2.3. Tanım dan

$$\sigma\left(x_{h_{(k+1)}}, x_{n_{(k+1)}}\right) \leq \sigma\left(x_{h_k}, x_{n_k}\right) - \varphi\left(\sigma\left(x_{h_k}, x_{n_k}\right)\right) = s_k - \varphi(s_k) \tag{5.3}$$

olduğuna dikkat edelim. Bu nedenle, her $k > N$ için (N, 2. Adımın başında tanımlandı)

$$r + \delta \leq s_k = \sigma\left(x_{h_k}, x_{n_k}\right) = \left[\sigma\left(x_{h_k}, x_{n_k}\right) - m_{x_{h_k}, x_{n_k}}\right] + m_{x_{h_k}, x_{n_k}}$$

(σ− üçg) den

$$\leq \left[\sigma\left(x_{h_k}, x_{(n_k-1)}\right) - m_{x_{h_k}, x_{n_k-1}} + \sigma\left(x_{(n_k-1)}, x_{n_k}\right) - m_{x_{(n_k-1)}, x_{n_k}}\right] + m_{x_{h_k}, x_{n_k}}$$

Eş. 5.2 ve 1.Adımdan

$$\leq r + \delta - r + t_{(n_k-1)} - r + m_{x_{h_k}, x_{n_k}}$$

bulunur. Bu nedenle $k \to +\infty$ için limit alınarak Eş. 5.1 den ve 1.Adımdan

$$r + \delta \leq \lim_{k\to+\infty} s_k \leq r + \delta - r + r - r + r = r + \delta$$

bulunur. Sadece

$$\lim_{k\to+\infty} s_k = r + \delta$$

olacak şekilde $\delta > 0$ var olduğu gösterilecektir. Sonraki adımda ise $\delta = 0$ bularak bir çelişki elde edeceğiz. (σ−üçg) yi uygulayarak

$$\begin{aligned} s_k = \sigma\left(x_{h_k}, x_{n_k}\right) &= \left[\sigma\left(x_{h_k}, x_{n_k}\right) - m_{x_{h_k}, x_{n_k}}\right] + m_{x_{h_k}, x_{n_k}} \\ &\leq \left[\sigma\left(x_{h_k}, x_{(n_k+1)}\right) - m_{x_{h_k}, x_{(n_k+1)}} + \sigma\left(x_{(n_k+1)}, x_{n_k}\right) - m_{x_{(n_k+1)}, x_{n_k}}\right] + m_{x_{h_k}, x_{n_k}} \\ &\leq \sigma\left(x_{h_k}, x_{(n_k+1)}\right) - m_{x_{h_k}, x_{(n_k+1)}} + t_{n_k} - r + m_{x_{h_k}, x_{n_k}} \end{aligned}$$

bulunur. (σ−üçg) ni $\sigma\left(x_{h_k}, x_{(n_k+1)}\right) - m_{x_{h_k}, x_{(n_k+1)}}$ üzerinde tekrar uygulayarak

$$\begin{aligned} &s_k \\ &\leq \sigma\left(x_{h_k}, x_{(n_k+1)}\right) - m_{x_{h_k}, x_{(n_k+1)}} + \sigma\left(x_{(h_k+1)}, x_{(h_k+1)}\right) - m_{x_{(h_k+1)}, x_{(n_k+1)}} \\ &+ t_{n_k} - r + m_{x_{h_k}, x_{n_k}} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, Eş. 5.3 ve 1. Adımdan

$$s_k \leq t_{h_k} - r + s_k - \varphi(s_k) - r + t_{n_k} - r + m_{x_{h_k}, x_{n_k}}$$

yazılabilir, yani

$$0 \leq \varphi(s_k) \leq t_{h_k} - r + -r + t_{n_k} - r + m_{x_{h_k}, x_{n_k}}$$

olur. $k \to +\infty$ için limit alarak

$$0 \leq \lim_{k\to+\infty} \varphi(s_k) \leq r - r - r + r - r + r = 0$$

buluruz. Bundan dolayı ve φ azalmayan bir fonksiyon olduğundan ve $r + \delta \leq s_k$ eşitsizliğiyle

$$0 \leq \varphi(r+\delta) \leq \lim_{k\to+\infty} \varphi(s_k)$$

yani $r+\delta = r$ ve böylece $\delta = 0$ buluruz. Bu bir çelişkidir. 2. Adımın başlangıcında kabul edilen varsayım yanlış olduğundan $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ bir r-Cauchy dizisidir [13].

5.2.6. Lemma

(X, p) kısmi metrik uzay, $x_0 \in X$, $r \in \mathbb{R}$ ve $f: X \to X$ dönüşümü x_0 da yörüngesel ϕ_r-büzülmesi olsun. x_0 ın f altındaki $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ yörüngesi
$\lim_{m,n\to\infty} p\big(f^m(x_0), f^n(x_0)\big) = r$ ile (X, p) de bir Cauchy dizisidir.

İspat

Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} = f(x_n)$ olarak tanımlansın. $\phi: [r,\infty) \to [0,\infty)$ dönüşümü ile f in x_0 da yörüngesel ϕ_r-büzülmesi olduğuna dikkat çekelim. ϕ, $\phi(r) = 0$ ve her $t > r$ için $\phi(t) > 0$ şartlarını sağlayan sürekli ve azalmayan bir fonksiyondur. O halde

$$r \leq p(x_{n+2}, x_{n+1}) = p\big(f(x_{n+1}), f(x_n)\big) \leq p(x_{n+1}, x_n) - \phi\big(p(x_{n+1}, x_n)\big)$$

eşitsizliğini sağlar. $t_n = p(x_{n+1}, x_n)$ olarak tanımlansın. O halde

$$r \leq t_{n+1} \leq t_n - \phi(t_n) \leq t_n \qquad (5.4)$$

yazılır. Bu $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nin reel sayıların alttan r ile sınırlı artmayan bir dizisi olmasını gerektirir ve böylece en az bir $L \geq r$ ye yakınsar.

$L = r$ olmadığını kabul edelim diğer bir deyişle $L > r$ olur ve böylece $\phi(L) > 0$ bulunur. ϕ azalmayan olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\phi(L) \leq \phi(t_n)$ yazılır. Eş. 5.4 den

$$t_{n+1} \leq t_n - \phi(t_n) \leq t_n - \phi(L)$$
elde edilir ve böylece

$$t_{n+2} \leq t_{n+1} - \phi(t_{n+1}) \leq t_n - \phi(t_n) - \phi(t_{n+1}) \leq t_n - 2\phi(L)$$

bulunur. Matematiksel tümevarım metoduyla $t_{n+k} \leq t_n - k\phi(L)$ elde edilir, yeterince büyük $k \in \mathbb{N}$ lar için bu bir çelişkidir. Böylece $\phi(L) = 0$ bulunur ve bu yüzden $L = r$ olur. Sonuç olarak,

$$\lim_{n\to+\infty} p(x_{n+1}, x_n) = r$$

bulunur. Şimdi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nin $\lim_{m,n\to\infty} p(x_m, x_n) = r$ ile (X, p) de bir Cauchy dizisi olduğu gösterilecektir.

Bu durumun aksini kabul edelim. O halde
her $k \in \mathbb{N}$ için

$m(k) > n(k) \geq k$ ve

$$s_k = p\left(x_{m(k)}, x_{n(k)}\right) \geq \epsilon_0 \tag{5.5}$$

olacak şekilde $\epsilon_0 > r$ ve $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}, (m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tam sayı dizileri vardır.

Ayrıca, her bir k için $m(k)$ 'nın Eş. 5.5 i sağlayan $n(k)$ dan büyük en küçük sayı olduğunu varsayalım. Özellikle $k \in \mathbb{N}$ için $p\left(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}\right) < \epsilon_0$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}
\epsilon_0 \leq s_k &= p\left(x_{m(k)}, x_{n(k)}\right) \\
&\leq p\left(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}\right) + p\left(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}\right) - p\left(x_{m(k)-1}, x_{m(k)-1}\right) \\
&\leq t_{m(k)-1} + \epsilon_0 - r \\
&\leq t_k + \epsilon_0 - r
\end{aligned}$$

elde edilir. $\lim_{k\to\infty} t_k = r$ olduğundan

$$\lim_{k\to\infty}(t_k + \epsilon_0 - r) = r + \epsilon_0 - r = \epsilon_0$$

elde edilir. Sonuç olarak $\lim_{k\to\infty} s_k = \epsilon_0$ bulunur. Diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
s_k &= p\left(x_{m(k)}, x_{n(k)}\right) \\
&\leq p\left(x_{m(k)}, x_{m(k)+1}\right) + p\left(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}\right) - p\left(x_{m(k)+1}, x_{m(k)+1}\right) \\
&\leq t_{m(k)} - r + p\left(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}\right) \\
&\leq t_{m(k)} - r + p\left(x_{m(k)+1}, x_{m(k)+1}\right) + p\left(x_{n(k)+1}, x_{n(k)}\right) - p\left(x_{n(k)+1}, x_{n(k)+1}\right) \\
&\leq t_{m(k)} - r + t_{n(k)} - r + p\left(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}\right) \\
&\leq 2t_k - 2r + p\left(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}\right) \\
&\leq 2t_k - 2r + p\left(x_{m(k)}, x_{n(k)}\right) - \phi\left(p\left(x_{m(k)}, x_{n(k)}\right)\right) \\
&\leq 2t_k - 2r + s_k - \phi(s_k) \\
\Rightarrow \phi(s_k) &\leq 2t_k - 2r
\end{aligned}
$$

Yine $\lim_{k\to\infty} t_k = r$ olduğundan

$$\lim_{k\to\infty} (2t_k - 2r) = 2r - 2r = 0$$

elde edilir. Her $k \in \mathbb{N}$ için (ϕ tanımından) $\phi(s_k) \geq 0$ olduğundan $\lim_{k\to\infty} \phi(s_k) = 0$ elde edilir. ϕ sürekli olduğundan

$$0 = \lim_{k\to\infty} \phi(s_k) = \phi\left(\lim_{k\to\infty} s_k\right) = \phi(\epsilon_0)$$

yazılır, bu $\epsilon_0 > r$ ile bir çelişkidir. Böylece $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy dir. Bu her $r \in \mathbb{R}$ için bir yörüngesel ϕ_r-büzülme dönüşümünün bir Cauchy olduğunu gösterir.

Cauchy özelliğinden yörüngesel ϕ_r-büzülme fonksiyonları, sabit nokta teoremlerinin başka örneklerini sağlar. Sonuç olarak, aşağıdaki [16, Teorem 2.2] genelleştirmesi elde edilir [17].

5.2.7. Teorem

(X, p) kısmi metrik uzay, $x_0 \in X$, $r \in \mathbb{R}$, $\phi : [r, \infty) \to [0, \infty)$, $\phi(r) = 0$ ve her $t > r$ için $\phi(t) > 0$ ile tanımlanan sürekli ve azalmayan bir fonksiyon, $f: X \to X$ dönüşümü x_0 da yörüngesel ϕ_r-büzülmesi ve (X, p) uzayı f için yörüngesel tam olsun. Ayrıca, aşağıdakilerden birini sağladığını varsayalım:

(1) f genişlemeyen ve x_0 da yörüngesel sürekli;
(2) f genişlemeyen ve (X, p), r ile alttan sınırlı.

O halde $f(a) = a$ ve $p(a, a) = r$ olacak şekilde bir $a \in X$ vardır.

İspat

5.2.6. Lemma dan, x_0 ın f altındaki $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ yörüngesi
$\lim_{m,n\to\infty} p\big(f^m(x_0), f^n(x_0)\big) = r$ ile (X, p) de bir Cauchy dizisidir. (X, p) uzayı f için yörüngesel tam olduğundan, $\big(f^n(x_0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ bir özel limiti a olacak şekilde $a \in X$ vardır. 4.2.3. Tanım dan

$$p(a, a) = \lim_{m,n\to\infty} p\big(f^m(x_0), f^n(x_0)\big) = r$$

elde edilir. Sonuç olarak, 4.3.2. Teorem den, $f(a) = a$ bulunur, yani a, f in bir sabit noktasıdır [17].

Şimdi yörüngesel süreklilik ve genişlemeyen özelliğine bağlı sabit nokta teoremleri verilecektir.

5.2.8. Teorem

(X, σ) M-metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $f: X \to X$, $a \in X$ özel limitine sahip x_0 da r-Cauchy fonksiyonu olsun. Ayrıca, aşağıdaki şartlardan en az birinin sağladığını varsayalım:

(1) f, x_0 da zayıf yörüngesel sürekli ve genişlemeyen olsun.
(2) f, x_0 da zayıf yörüngesel sürekli ve (X, σ), $\sigma(f(a), f(a))$ ile alttan sınırlı olsun.
(3) f, genişlemeyen ve (X, σ), $\sigma(a, a)$ ile alttan sınırlı olsun.

Bu durumda a, f in bir sabit noktasıdır.

İspat

(1) ve (2) de, f, x_0 da zayıf yörüngesel sürekli olduğundan 4.2.9. Lemma dan

$$\sigma(a,a) \leq \sigma(a,f(a)) \leq \sigma(f(a),f(a))$$

elde edilir. f hem (1) de genişlemeyen hem de (2) de (X, σ), $\sigma(f(a),f(a))$ ile alttan sınırlı olduğundan

$$\sigma(f(a),f(a)) \leq \sigma(a,a)$$

bulunur. Bu nedenle,

$$\sigma(a,a) = \sigma(a,f(a)) = \sigma(f(a),f(a))$$

ve dolayısıyla, (σ−ayr) dan $f(a) = a$ bulunur.

(3) ün ispatı için f genişlemeyen ve (X, σ), $\sigma(a,a)$ ile alttan sınırlı olduğundan $\sigma(f(a),f(a)) = \sigma(a,a)$ olduğunu belirtebiliriz ve dolayısıyla, her i için

$$\lim_{i\to+\infty} m_{f(a),f(x_i)} = \lim_{i\to+\infty} m_{a,x_i} = \sigma(a,a) = \sigma\big(f(a),f(a)\big) = m_{f(a),a} \qquad (5.6)$$

Bu nedenle (σ−asnr) dan,

$$\sigma(a,a) = m_{a,f(a)} \leq \sigma(a,f(a))$$

elde edilir. (σ−üçg) dan her i için

$$\sigma(f(a),a) - m_{f(a),a} \leq \sigma\big(f(a),f(x_i)\big) - m_{f(a),f(x_i)} + \sigma\big(a,f(x_i)\big) - m_{a,f(x_i)}$$

bulunur. Genişlemeyen özelliğinden,

$$\sigma(f(a),a) \leq m_{f(a),a} + \sigma(a,x_i) - m_{f(a),f(x_i)} + \sigma\big(a,f(x_i)\big) - m_{a,f(x_i)}$$

yazılır. Eş. 5.6 kullanılarak $i \to +\infty$ için limit alınırsa

$$\sigma(f(a),a) \leq \sigma(a,a) + \sigma(a,a) - \sigma(a,a) + \sigma(a,a) - \sigma(a,a) = \sigma(a,a)$$

elde edilir. Dolayısıyla, (σ−ayr) dan $a = f(a)$ bulunur.

Hem 5.2.2. Lemma hem de 5.2.5. Lemma kendi koşulları ile f in bir r-Cauchy dizisi olduğunu iddia eder. 5.2.8. Teorem tekliği garanti etmeden sabit bir nokta elde etmenin koşullarını verir. [12] kaynağında verilen Teorem 3.1 ve Teorem 3.2 geçerli ispatları sırasıyla 5.2.9. Lemma ve 5.2.10. Lemma da verildi.

5.2.9. Lemma

(X, σ) bir tam M-metrik uzay ve $f: X \to X$ aşağıdaki şartı sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun:

her $x, y \in X$ için
$0 \leq \sigma(f(x),f(y)) \leq k\sigma(x,y)$ (5.7)

olacak şekilde en az bir $0 \leq k < 1$ varsa f bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat

$x_0 \in X$ keyfi bir eleman olsun. f fonksiyonu x_0 da $\varphi(t) = (1-k)t$ ifadesiyle, yörüngesel φ_0-büzülmesi ($r = 0$ için φ_r) olur. Bu nedenle 5.2.5. Lemma kullanılarak f, x_0 da 0−Cauchy fonksiyonu olur.

(X, σ) uzayı tam olduğundan a, $\{f^i(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ nın bir özel limitidir. f sürekli olduğundan, f, x_0 da zayıf yörüngesel süreklidir.

Ek olarak Eş. 5.7, f in genişlemeyen olduğunu da gösteriyor. Dolayısıyla, 5.2.8. Teorem (1) den, a özel limiti bir sabit noktadır.
Şimdi tekliğinin ispatını verelim. f in a ve b olmak üzere iki sabit noktası olsun. Bundan dolayı Eş. 5.7 den,

$\sigma(a,a) = \sigma(f(a),f(a)) \leq k\sigma(a,a) < \sigma(a,a)$
$\sigma(b,b) = \sigma(f(b),f(b)) \leq k\sigma(b,b) < \sigma(b,b)$
ve
$\sigma(a,b) = \sigma(f(a),f(b)) \leq k\sigma(a,b) < \sigma(a,b)$

olur. Bu yüzden

$\sigma(a,a) = \sigma(b,b) = \sigma(a,b) = 0$

ve dolayısıyla (σ−ayr) dan $a = b$ elde edilir [13].

5.2.10. Lemma

(X, σ) bir tam M-metrik uzay ve $f: X \to X$ aşağıdaki şartı sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun:

her $x, y \in X$ için
$0 \leq \sigma(f(x),f(y)) \leq k[\sigma(x,f(x)) + \sigma(y,f(y))]$ (5.8)

olacak şekilde en az bir
$0 \leq k < \frac{1}{2}$
varsa f bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat

$x_0 \in X$ keyfi bir eleman olsun ve $x_i = f^i(x_0)$ dizisi tanımlansın. Öncelikle f fonksiyonunun x_0 da yörüngesel c_0−büzülmesi ($r = 0$ için c_r) ve

$$c = 2k > \frac{k}{1-k}$$

olduğunu göstermeliyiz. Eş. 5.8 den her i için

$$\sigma(x_{i+1}, x_{i+1}) \leq 2k\sigma(x_{i+1}, x_i)$$

elde edilir. Dahası her i için

$$\sigma(x_{i+2}, x_{i+1}) \leq k\big(\sigma(x_{i+1}, x_{i+2}) + \sigma(x_i, x_{i+1})\big)$$

olur, yani

$$\sigma(x_{i+2}, x_{i+1}) \leq \frac{k}{1-k}\sigma(x_{i+1}, x_i) < c\sigma(x_{i+1}, x_i)$$

bulunur. Bundan dolayı

$$0 \leq \sigma(x_{i+2}, x_{i+2}) < \sigma(x_{i+2}, x_{i+1}) \leq c^{i+1}\sigma(x_1, x_0)$$

ve 5.2.2. Lemma dan f fonksiyonu x_0 da 0-Cauchy dir. (X, σ) uzayı tam olduğundan, $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, bir a özel limitine sahiptir. Bundan dolayı 4.1.5. Tanım dan $\sigma(a, a) = 0$ olur.

f fonksiyonu sürekli ve dolayısıyla x_0 da zayıf yörüngesel süreklidir. Bu nedenle 4.2.9. Lemma dan,

$$m_{a,f(a)} = \sigma(a, a) \leq \sigma(a, f(a)) \leq \sigma(f(a), f(a))$$

elde edilir. Ek olarak Eş. 5.8 den,

$$\sigma(f(a), f(a)) \leq 2k\sigma(a, f(a)) \leq 2k\sigma(f(a), f(a))$$

yazılır.

Dolayısıyla $\sigma(f(a), f(a)) = 0$, 5.2.8. Teorem (2) nin şartlarını sağlar. Teklik için a ve b, f in iki sabit noktası olsun. Böylece Eş. 5.8 den,

$$\sigma(a, b) = \sigma(f(a), f(b)) \leq 2k\sigma(a, b)$$
$$\sigma(a, a) = \sigma(f(a), f(a)) \leq 2k\sigma(a, a)$$

ve benzer şekilde

$$\sigma(b, b) = \sigma(f(b), f(b)) \leq 2k\sigma(b, b)$$

bulunur. Bu nedenle

$$\sigma(a, a) = \sigma(b, b) = \sigma(a, b) = 0$$

yazılır ve (σ−ayr) dan $a = b$ elde edilir [13].

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Birinci bölümde, sabit nokta teorinin önemi ve tezin amacı kısaca özetlenmiştir.

İkinci bölümde, çalışmanın devamında kullanılacak genel topoloji kapsamında temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, M-metrik uzay ve kısmi metrik uzaylarla ilgili tanım ve örnekler verilmiştir. M-metrik uzay ve kısmi metrik uzay topolojileri karşılaştırılarak aktarılmıştır.

Dördüncü bölümde ise son bölümde gerekli olan r-Cauchy dizi ve r-Cauchy fonksiyonları ile ilgili temel teorem ve lemmalar hatırlatılarak, yörüngesel süreklilik kavramı ve Cauchy dönüşüm teoremine yer verilmiştir.

Son bölümde ise yörüngesel büzülme dönüşüm sınıfları için bazı sabit nokta teoremlerine yer verilmiştir.

Araştırmacılar tarafından M-metrik uzaylarda büzülme ilkeleri daha detaylı ele alınabilir. Her sıradan metrik ve kısmi metrik uzay, M-metrik uzay olduğundan bu çalışmalar M-metrik uzaya genişletilebilir.

KAYNAKLAR

1. Banach, S. (1922). Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations untegrales, *Fund. Math.*, 3, 133-181.

2. Partial metric topology. (1994). *In Proc. 8th Summer Conference on General Topology and Applications.* 728, s. 183–197. Annals of the New York Academy of Sciences.

3. Durmaz, G. (2015). *Zayıf kısmi metrik uzayda bazı sabit nokta teoremleri,* Doktora Tezi, Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kırıkkale, 1-6.

4. De Bakker, J. W. (1991). Comparative semantics for flow of control in logic programming without logic*. *Information and Computation,* 94, 123-179.

5. Shahzad, N., & Valero, O. (2013). On 0-complete partial metric spaces and quantitative fixed point techniques in denotational semantics. *Abstract and Applied Analysis,* 1-11.

6. Wadge, W. W., & Ashcroft, E. A. (1985). *The dataflow programming language*. Academic Press.

7. Schellekens, M. (1995). The smyth completion: a common foundation for denotational the smyth completion a common foundation for denotational semantics and complexity analysis. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science,* 1, 0-22.

8. De Bakker, J. W., & Zucker, J. I. (1982). Processes and the denotational semantics of concurrency. *Information and Control,* 54, 70-120.

9. Wadge, W. W. (1981). An Extensional treatment of dataflow deadlock. *Theoretical Computer Science,* 13(Special issue on the semantics of concurrent computation), 1-15.

10. O'Neill, S. J. (1996). Partial metrics, valuations, and domain theory. *Annals of the New York Academy of Sciences,* 806, 304–315.

11. Haghi, R., Rezapour, S., & Shahzad, N. (2013). Be careful on partial metric fixed point results. topology and its applications. *Topology and Its Applications,* 60(3), 450-454.

12. Asadi, M., Karapınar, E., & Salimi, P. (2014). New extension of p−metric spaces with some fixed-point results on m−metric spaces. *Journal of Inequalities and Applications,* (18), 1-9.

13. Assaf, S. (2019). On m-metric spaces and fixed point theorems. *Topology Proceedings,* 54, 81-102.

14. Boyd, D. W., & Wong, S. W. (1969). On Nonlinear Contractions. *Proceedings of the American Mathematical Society,* 20, 458–464.

15. Alber, Y. I., & Guerre-Delabriere, S. (1997). Principle of weakly contractive maps in hilbert spaces. *In New Results in Operator Theory and Its Applications, Operator Theory: Advances and Applications,* 98.

16. Karapinar, E. (2011). Weak ϕ-contraction on partial metric spaces and existence of fixed points in partially ordered sets. *Mathematica Aeterna*, 1(4), 237–244.

17. Assaf, S., & Koushik, P. (2017). Partial metric spaces with negative distances and fixed point theorems. *Topology Proceedings*, 49, 19-40.

18. Bukatin, M., Kopperman, R., Matthews, S., & Pajoohesh, H. (2009). Partial metric spaces. *Am. Math. Mon.*, 116, 708–719.

19. Karapınar, E., Shobkolaei, N., Sedghi, S., & Vaezpour, S. M. (2012). A common fixed point theorem for cyclic operators on partial metric. *Faculty of Sciences and Mathematics*, 26(2), s. 407–414.

20. Karapınar, E., & Romaguera, S. (2013). Nonunique fixed point theorems in partial metric spaces. *Faculty of Sciences and Mathematics*, 27(7), 1305–1314.

21. Karapınar, E., & Erhan, I. M. (2011). Fixed point theorems for operators on partial metric spaces. *Applied Mathematics Letters*, 24, 1894–1899.

22. Altun, İ., Şahin, H., & Türkoğlu, D. (2018). Fixed point results for multivalued mappings of feng-liu type on m-metric spaces. *Journal of Nonlinear Functional Analysis*, 7.

23. Altun, I., Sola , F., ve Simsek, H. (2010). Generalized contractions on partial metric spaces. *Topology and Its Appl.*, 157(18), 2778-2785.

24. Altun , I., & Erduran,, A. (2011). Fixed point theorems for monotone mappings on partial metric. *Fixed Point Theory and Applications*, (508730), 1-10.

25. Karapınar, E. (2011). A note on common fixed point theorems in partial metric spaces. *Miskolc Mathematical Notes*, 12(2), 185-191.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler



Soyadı, adı	: SOLAK, Oğuz
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 23.05.1987, Ankara
Medeni hali	: Evli
Telefon	: 0 (506) 269 17 69
e-mail	: oguzhansolak@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik	Devam ediyor
Lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik	2011
Lise	Çubuk Yabancı Dil Ağırlıklı Lise	2005

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2013-Halen	Çorum AFAD İl Müdürlüğü	Çözümleyici
2012-2013	Çubuk İlçe Milli Eğitim Müdürlüğü	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Solak, O., & Türkoğlu, A. D. (2017, 11-13 Mayıs). *Some Fixed Point Theorems On Partial Metric and M-Metric Spaces.* International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2017) Konferansında sunuldu. Şanlıurfa.

Hobiler

Kitap, Binicilik, Yazılım



GAZİ GELECEKTİR..