BAZI ÜÇ-BANT MATRİSLERİN ÖZDEĞERLERİ ÜZERİNE

Simge ODABAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2009
ANKARA

Simge ODABAŞ tarafından hazırlanan BAZI ÜÇ-BANT MATRİSLERİN ÖZDEĞERLERİ ÜZERİNE adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Dursun TAŞÇI ………………………………….
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Dursun TAŞÇI
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi ………………………………

Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU
Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi ………………………………

Yrd. Doç. Dr. Naim Tuğlu
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi ………………………………….

Tarih: 17.06.09

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nail ÜNSAL ………………………………
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Simge ODABAŞ

BAZI ÜÇ-BANT MATRİSLERİN ÖZDEĞERLERİ ÜZERİNE
(Yüksek Lisans Tezi)

Simge ODABAŞ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Haziran 2009

ÖZET

Bu çalışmada Fibonacci ve Lucas sayılarının karekteristik özellikleri incelenerek; bu sayıların bilinen rekürans bağıntıları yardımıyla Binet formülleri verildi. Ayrıca birinci dereceden ve ikinci dereceden Chebyshev polinomları incelendi. Fibonacci ve Lucas sayılarının trigonometrik gösterimi ve çarpanlaması elde edildi. Bu çarpanlamanın sonunda elde edilen matrislerin determinantlarının birinci ve ikinci dereceden Chebyshev polinomları ile olan ilişkisi verildi. Önceden verilenlerin yardımıyla bazı üç-bant matrislerin özdeğerleri ve tersi hakkında bilgi verildi. Son olarak bu özdeğerlerin ikinci dereceden Chebyshev polinomu ile bağlantısı incelendi.

Bilim Kodu	**: 204.1.025**
Anahtar Kelimeler	**: Fibonacci, Lucas sayıları, Chebyshev polinomları, Binet formülü, üç-bant matrisler, özdeğerler**
Sayfa Adedi	**: 47**
Tez Yöneticisi	**: Prof. Dr. Dursun TAŞÇI**

ON THE EIGENVALUES OF SOME TRIDIAGONAL MATRICES

(M.Sc. Thesis)

Simge ODABAŞ

GAZİ UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

June 2009

ABSTRACT

In this study, by describing characteristic properties of Fibonacci and Lucas numbers Binet formulas of these numbers are examined with the help of recurrence relations. Additionally, the first and the second type of Chebyshev polynomials are some examined. Complex factorizations of Fibonacci and Lucas numbers are indicated. The relation between the determinants of obtained matrices in the end of this factorization and the first and the second type of Chebyshev polynomials are studied. The eigenvalues and inverse of some tridiagonal matrices are given. Finally, it is examined that relation between eigenvalues of the tridiagonal matrices and the second type of Chebyshev polynomials are given.

Science Code : 204.1.025

Key Words : Fibonacci, Lucas numbers, Chebyshev polynomials, Binet formula and tridioganal matrices,eigenvalues

Page Number: 47

Adviser : Prof. Dr. Dursun TAŞÇI

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren saygıdeğer hocam Prof. Dr. Dursun TAŞÇI' ya, yine tecrübelerinden faydalandığım, bu süreçte her türlü yardımını esirgemeyen ve bana destek olan sevgili hocam Araş. Gör. Mustafa AŞÇI' ya, hayat boyu her türlü sıkıntımda yanımda olan ve bu süreçte bana anlayış gösteren sevgili aile fertlerime en içten saygı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\det(A)$	A matrisinin determinantı
F_n	n. Fibonacci sayısı
L_n	n. Lucas sayısı
P_n	n. Pell sayısı
Q_n	n.Pell-Lucas sayısı
$F_n(x)$	n.Fibonacci polinomu
$L_n(x)$	n. Lucas polinomu
$P_n(x)$	n. Pell polinomu
$Q_n(x)$	n. Pell-Lucas polinomu
$T_n(x)$	Birinci türden Chebyshev polinomu
$U_n(x)$	İkinci türden Chebyshev polinomu

1. GİRİŞ

Bu bölümde Fibonacci, Lucas sayılarına ait bazı ön bilgiler verilerek Fibonacci , Lucas ve Chebyshev polinomlarından bahsedilecektir.

1.1. Tanım

Fibonacci sayıları, her $n \geq 1$ için ve $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \ , \ n \geq 1$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Burada F_n'e $n.$ Fibonacci sayısı denir. Fibonacci ve benzer diziler aşağıdaki gibi genelleştirilebilir:

$\{x_n\}$dizisi; $x_0 = a$, $x_1 = b$ başlangıç koşulları ile birlikte, her $n \geq 1$ için

indirgeme bağıntısı ile tanımlansın. $\{x_n\}$ dizisinin bazı özel durumlarını göz önüne alalım.

Eğer $k = 1$, $x_0 = 0$ ve $x_1 = 1$ ise $\{x_n\}$ dizisi $\{F_n\}$ Fibonacci dizisidir.
Eğer $k = 1$, $x_0 = 2$ ve $x_1 = 1$ ise $\{x_n\}$ dizisi $\{L_n\}$ Lucas dizisidir.
Eğer $k = 2$, $x_0 = 0$ ve $x_1 = 1$ ise $\{x_n\}$ dizisi $\{P_n\}$ Pell dizisidir.
Eğer $k = 2$, $x_0 = 2$ ve $x_1 = 2$ ise $\{x_n\}$ dizisi $\{R_n\}$ Pell-Lucas dizisidir.

Şimdi Fransız matematikçi Binet tarafından Fibonacci sayıları için verilen Binet formülünü vereceğiz.

1.1. Teorem

F_n ; $n.$ Fibonacci sayısı olmak üzere

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{1.1}$$

olup burada $\alpha = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, $\beta = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ ‘dir.

İspat

İspatı n üzerinden tümevarımla yapalım. $n=1$ olsun. O halde

$$F_1 = \frac{\alpha^1 - \beta^1}{\alpha - \beta} = 1$$

olup $n=1$ için ifade doğrudur. Şimdi eşitliğin n için doğru olduğunu kabul edelim. Buna göre $(n+1)$ için doğru olduğunu gösterelim. Fibonacci sayılarının tanımından ve kabulümüzden

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \\ &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^{n-1}(1+\alpha) - \beta^{n-1}(1+\beta)}{\alpha - \beta} \end{aligned} \tag{1.2}$$

yazarız. Burada $\alpha^2 = \alpha + 1$ ve $\beta^2 = \beta + 1$ olduğundan

$F_{n+1} = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$ elde edilir.

Böylece ispat tamamlanır.

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \tag{1.3}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{F_n\}$ dizisine Fibonacci dizisi ve F_n sayısına da $n.$ Fibonacci sayısı adı verilir.

Bu algoritmada α ve β Eş. 1.2 deki indirgeme bağıntısıyla ilişkili olan

$x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleridir.

$\alpha + \beta = 1$, $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ ve $\alpha\beta = -1$

olduğu açıktır.

Eş. 1.3 kullanarak

eşitliği elde edilir. Bu son ifadede n yerine sıfır ve negatif tamsayılar seçilerek elde edilen $\{F_n\}$ dizisine negatif indisli Fibonacci dizisi denir.

Böylece

$F_{-1} = F_1 - F_0 = 1, F_{-2} = F_0 - F_{-1} = -1 \cdots$, $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$

şeklinde negatif indisli Fibonacci sayıları elde edilir. Bunu aşağıdaki gibi sonuç olarak verip ispatlayalım.

1.1. Sonuç

Her n pozitif tamsayısı için

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n \tag{1.4}$$

dir.

İspat

Eş. 1.1 i kullanarak

$F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ yazarız.

Buradan

$$\begin{aligned} F_{-n} &= \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{(\alpha^{-1})^n - (\beta^{-1})^n}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^n - \left(\dfrac{1}{\beta}\right)^n}{\alpha - \beta} \end{aligned} \tag{1.5}$$

ifadesine ulaşılır.

$\frac{1}{\alpha} = -\beta$ ve $\frac{1}{\beta} = -\alpha$ olduğunda bu değerleri Eş. 1.5 de yerlerine yazarsak,

$$F_{-n} = \frac{(-\beta)^n - (-\alpha)^n}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{(-1)^n \beta^n - (-1)^n \alpha^n}{\alpha - \beta}$$

$$= (-1)^n \frac{(\beta^n - \alpha^n)}{\alpha - \beta}$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{(\alpha^n - \beta^n)}{\alpha - \beta}$$

$$= (-1)^{n+1} F_n$$

bulunur.

Eş. 1.2 ve Eş. 1.7 den F_n Fibonanacci sayılarına ait aşağıdaki tabloyu elde ederiz.

1.1. Çizelge Fibonacci sayıları

n	…	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
F_n	…	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	…

1.1. Tanım

Lucas sayıları, her $n \geq 1$ için $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ olmak üzere $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ bağıntısı ile tanımlanır. Burada L_n ' e $n.$ Lucas sayısı denir.

1.2. Teorem

L_n ; $n.$ Lucas sayısı olsun. $\alpha = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ ve $\beta = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ olmak üzere

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

dir.

Bu formüle Lucas sayıları için Binet formülü denir.

İspat

İspatımızı n üzerinden tümevarım yöntemi ile yapalım.

$n = 1$ için

$$\begin{aligned} L_1 &= \alpha^1 + \beta^1 \\ &= \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) + \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

olduğundan ifade açık olarak doğrudur.

$n = 2$ için

$$\begin{aligned} L_2 &= \alpha^2 + \beta^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^2 + \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^2 \end{aligned}$$

$$= 3$$

dir. Bu durumda $n = k \geq 2$ için doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$L_k = \alpha^k + \beta^k$$

olsun.

Şimdi $n = k+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$L_{k+1} = L_k + L_{k-1} = \alpha^k + \beta^k + \alpha^{k-1} + \beta^{k-1}$$

$$= (\alpha^k + \alpha^{k-1}) + (\beta^k + \beta^{k-1})$$

Bununla beraber $\alpha^2 = \alpha + 1$ olup $\alpha^{k+1} = \alpha^k + \alpha^{k-1}$ dir. Benzer şekilde $\alpha^2 = \alpha + 1$,

$\beta^2 = \beta + 1$ olup $\beta^{k+1} = \beta^k + \beta^{k-1}$'dir.

Bu durumda,

$$L_{k+1} = \alpha^{k+1} + \beta^{k+1}$$

dir.

Böylelikle $n = k+1$ için ifade doğru olup ispat tamamlanır. Benzer şekilde Lucas sayılarının tanımından ilk birkaç Lucas sayıları için aşağıdaki tabloyu göz önüne alarak

1.2. Çizelge Lucas sayıları;

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	37	66	…

ve bu sayıların tanımını kullanarak,negatif indisli terimleri elde etmek için Lucas sayılarının indirgeme bağıntısını geriye doğru genişleterek

1.3. Çizelge negatif indisli Lucas sayıları;

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
L_{-n}	2	-1	3	-4	7	-11	18	-29	37	-66	…

elde ederiz.

1.2. Sonuç

$$L_{-n} = (-1)^n L_n$$

İspat

$$L_{-n} = \alpha^{-n} + \beta^{-n}$$

$$= (-\beta)^n + (-\alpha)^n$$

$$= (-1)^n (\beta^n + \alpha^n)$$

$$= (-1)^n L_n \text{ dir.}$$

Fibonacci sayıları aşağıdaki 2×2 A matrisinin kuvvetleri alınmasıyla elde edilebilir.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{bmatrix}$$

dir.

n üzerinden tümevarım yöntemini uygulayalım.

$n=1$ için

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_2 & F_1\\ F_1 & F_0\end{bmatrix} \text{ olup}$$

doğrudur.

$n=2$ için

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_3 & F_2\\ F_2 & F_1\end{bmatrix} \text{ olup}$$

doğrudur.

n için doğru olsun. $n+1$ için doğruluğuna bakalım.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^{n+1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^n\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} F_{n+1}+F_n & F_{n+1} \\ F_n+F_{n-1} & F_n \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{bmatrix}$$

dir.

1.3. Teorem

İspat

Fibonacci sayıları için rekürans bağıntısı kullanılırsa;

$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n \Rightarrow F_n=F_{n+2}-F_{n+1}$ olup $i=1,2,3,\cdots,n$ için bu ifade yazılacak olursa;

$F_1=F_3-F_2$

$F_3=F_5-F_4$

$\vdots$

$F_{n-1}=F_{n+1}-F_n$

$F_n=F_{n+2}-F_{n+1}$

elde edilir. Bu ifadeler taraf tarafa toplanacak olursa;

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2}-F_2 = F_{n+2}-1$$

bulunur.

1.4. Teorem

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$$

İspat

Fibonacci sayıları için rekürans bağıntısı kullanılırsa;

$$F_1 = F_2 - F_0$$

$$F_3 = F_4 - F_2$$

$$F_5 = F_6 - F_4$$

$$\vdots$$

$$F_{2n-3} = F_{2n-2} - F_{2n-4}$$

$$F_{2n-1} = F_{2n} - F_{2n-2}$$

elde edilir. Bu ifadeler taraf tarafa toplanacak olursa;

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n} - F_0 = F_{2n}$$

bulunur.

1.5. Teorem

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$$

İspat

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = \sum_{i=1}^{2n} F_i - \sum_{i=1}^{n} F_{2i-1}$$

$$= (F_{2n+2} - 1) - F_{2n}$$

$$= (F_{2n+2} - F_{2n}) - 1$$

$$= F_{2n+1} - 1$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

1.6. Teorem

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^{\,2} = F_n F_{n+1}$$

İspat

n üzerinden tümevarım yöntemini uygulayalım;

$n = 1$ için

$$F_1^{\,2} = F_1 F_2$$

$$1 = 1$$

dir.

$n=2$ için

$$\sum_{i=1}^{2} F_i^{\ 2} = F_1^{\ 2} + F_2^{\ 2} = F_2 F_3$$

$$2 = 2$$

olup doğrudur.

$n-1$ için doğru olsun.

n için doğruluğunu gösterelim;

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} F_i^{\ 2} &= \sum_{i-1}^{n-1} F_i^{\ 2} + F_n^{\ 2} \\ &= F_{n-1}F_n + F_n^{\ 2} \\ &= (F_{n-1} + F_n)F_n \\ &= F_{n+1}F_n\end{aligned}$$

olup her $n \in Z^+$ için doğrudur.

1.7. Teorem

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^{\ 2} = (-1)^n \ , \qquad n \geq 1$$

İspat

$$\begin{aligned}F_{n-1}F_{n+1} - F_n^{\ 2} &= (F_{n-1} + F_n)F_{n-1} - F_n^{\ 2} \\ &= F_{n-1}^{\ 2} + F_n F_{n-1} - F_n^{\ 2}\end{aligned}$$

$$= F_{n-1}{}^2 + F_n(F_{n-1} - F_n)$$

$$= F_{n-1}{}^2 + F_n(-F_{n-2})$$

$$= F_{n-1}{}^2 - F_n F_{n-2}$$

$$= -(F_n F_{n-2} - F_{n-1}{}^2)$$

Bu işleme devam edilecek olursa;

$$-(F_n F_{n-2} - F_{n-1}{}^2) = (-1)^2 (F_{n-1} F_{n-3} - F_{n-2}{}^2)$$

$$= (-1)^3 (F_{n-2} F_{n-4} - F_{n-3}{}^2)$$

$$= \quad \vdots$$

$$= (-1)^{n-1} (F_2 F_0 - F_1{}^2)$$

$$= (-1)^n$$

Böylece

$$(F_{n-1} F_{n+1} - F_n{}^2) = (-1)^n$$

dir.

1.8. Teorem

Ardışık iki Fibonacci sayısı aralarında asaldır.

İspat

$(F_n, F_{n-1}) = 1$ olduğunu göstermeliyiz.

$(F_n, F_{n-1}) = d$ olduğunu varsayalım.

Bu durumda

$d | F_n$, $d | F_{n-1}$ dir.

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \Rightarrow F_{n-2} = F_n - F_{n-1}$

olduğundan

$d | F_{n-2}$ dir.

$F_{n-1} = F_{n-2} + F_{n-3} \Rightarrow F_{n-3} = F_{n-1} - F_{n-2}$

olduğundan

$d | F_{n-3}$

Bu şekilde devam edilirse

$d | F_1$ yani $d | 1$ olup;

buradan $d = 1$ sonucu elde edilir.

1.9. Teorem

$\sum_{i=1}^{n} L_i = L_{n+2} - 3$ dir.

İspat

Lucas sayıları için rekürans bağıntısı kullanılırsa;

$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \Rightarrow L_n = L_{n+2} - L_{n+1}$

$i = 1,2,3,\dots,n$ için

$$
\begin{aligned}
L_1 &= L_3 - L_2 \\
L_2 &= L_4 - L_3 \\
&\vdots \\
L_{n-1} &= L_{n+1} - L_n \\
L_n &= L_{n+2} - L_{n+1}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Bu ifadeler taraf tarafa toplanırsa;

$$\sum_{i=1}^{n} L_i = L_{n+2} - L_2 = L_{n+2} - 3$$

bulunur.

1.10. Teorem

$$\sum_{i=1}^{n} L_{2i-1} = L_{2n} - 2$$

İspat

Lucas sayıları için rekürans bağıntısı kullanılırsa;

$$L_1 = L_2 - L_0$$

$$L_3 = L_4 - L_2$$

$$L_5 = L_6 - L_4$$

$$\vdots$$

$$L_{2n-3} = L_{2n-2} - L_{2n-4}$$

$$L_{2n-1} = L_{2n} - L_{2n-2}$$

elde edilir.

Bu ifadeler taraf tarafa toplanacak olursa;

$$\sum_{i=1}^{n} L_{2i-1} = L_{2n} - L_0 = L_{2n} - 2$$

bulunur.

1.11. Teorem

$$\sum_{i=1}^{n} L_{2i} = L_{2n+1} - 1$$

İspat

$$\sum_{i=1}^{n} L_{2i} = \sum_{i=1}^{2n} L_i - \sum_{i=1}^{n} L_{2i-1}$$

$$= (L_{2n+2} - 3) - (L_{2n} - 2)$$

$$= (L_{2n+2} - L_{2n}) - 1$$

$$= L_{2n+1} - 1$$

1.12. Teorem

$$\sum_{i=1}^{n} L_i^{\;2} = L_n L_{n+1} - 2$$

İspat

n üzerinden tümevarım yöntemini uygulayalım;

$n = 1$ için

$$\sum_{i=1}^{1} L_i^{\;2} = L_1 L_2 - 2$$

$$1 = 1$$

olduğundan iddia doğrudur.

$n = 2$ için;

$$\sum_{i=1}^{2} L_i^{\;2} = L_1^{\;2} + L_2^{\;2} = L_2 L_3 - 2$$

$$2 = 2$$

olup doğrudur.

$n-1$ için doğru olsun.

n için doğruluğunu gösterelim;

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} L_i^{\ 2} &= \sum_{i=1}^{n-1} L_i^{\ 2} + L_n^{\ 2} \\ &= L_{n-1}L_n - 2 + L_n^{\ 2} \\ &= L_{n-1}L_n + L_n^{\ 2} - 2 \\ &= L_n(L_{n-1} + L_n) - 2 \\ &= L_n L_{n+1} - 2\end{aligned}$$

2. CHEBYSHEV POLİNOMLARI VE REKÜRANS BAĞINTILARI

Birinci ve ikinci türden olmak üzere iki çeşit Chebyshev polinomu vardır. Birinci türden Chebyshev polinomu T_n ile, ikinci türden Chebyshev polinomu U_n ile gösterilir.

Birinci türden Chebyshev polinomu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [16].

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$\vdots$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

İkinci türden Chebyshev polinomları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [16].

$$U_0(x) = 1$$

$$U_1(x) = 2x$$

$$U_2(x) = 4x^2 - 1$$

$$U_3(x) = 8x^3 - 4x$$

$$\vdots$$

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$$

2.1. Fibonacci ve Lucas Sayılarının Trigonometrik Gösterimi

Fibonacci ve Lucas sayılarının trigonometrik gösterimleri;

$$F_n = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - 2i\cos\frac{\pi k}{n}), \qquad n \geq 2 \tag{2.1}$$

$$L_n = \prod_{k=1}^{n} (1 - 2i\cos\frac{\pi(k - \frac{1}{2})}{n}), \quad n \geq 1 \tag{2.2}$$

ve genel halde

$$F_n = i^{n-1} \frac{\sin(n\cos^{-1}(\frac{-i}{2}))}{\sin(\cos^{-1}(\frac{-i}{2}))}, \quad n \geq 1 \tag{2.3}$$

$$L_n = 2i^n \cos(n\cos^{-1}(\frac{-i}{2})), \quad n \geq 1 \tag{2.4}$$

olarak verilir.

2.1. Tanım

Sadece sıfır olmayan elemanları köşegen etrafındaki bir bantta olan bir kare matrise bant matris denir. Böylece eğer $A = (a_{ij})$ kare matrisi $|i - j| > 1$ olduğunda $a_{ij} = 0$ şartını sağlarsa o zaman A bir üç-bant matristir.

2.1. Yardımcı Teorem

$H(n)$, $n = 1,2,3\ldots$ üç-bant matrisi

$$H(n)=\begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ h_{2,1} & h_{2,2} & h_{2,3} & & & & \vdots \\ 0 & h_{3,2} & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & & h_{n-1,n-1} & h_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & h_{n,n-1} & h_{n,n} \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

şeklinde ise, o zaman

$$|H(1)| = h_{1,1}$$

$$|H(2)| = h_{1,1}h_{2,2} - h_{1,2}h_{2,1}$$

$$|H(n)| = h_{n,n}|H(n-1)| - h_{n-1,n}h_{n,n-1}|H(n-2)| \tag{2.6}$$

dir.

İspat

İspatı tümevarım yöntemini kullanarak yapalım;

$n = 1,2,3$ için;

$$|H(1)| = |(h_{1,1})| = h_{1,1}$$

$$|H(2)| = \begin{vmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} \\ h_{2,1} & h_{2,2} \end{vmatrix} = h_{1,1}h_{2,2} - h_{1,2}h_{2,1}$$

$$|H(3)| = \begin{vmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & 0 \\ h_{2,1} & h_{2,2} & h_{2,3} \\ 0 & h_{3,2} & h_{3,3} \end{vmatrix} = h_{3,3}|H(2)| - h_{2,3}\begin{vmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} \\ 0 & h_{3,2} \end{vmatrix} = h_{3,3}|H(2)| - h_{2,3}h_{3,2}|H(1)|$$

dir.

k için doğru yani

$3 \le k \le n$

olsun.

$k+1$ için doğruluğunu gösterelim;

$$\left|H(k+1)\right| = \det\begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ h_{2,1} & h_{2,2} & h_{2,3} & & & & \vdots \\ 0 & h_{3,2} & h_{3,3} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & h_{k-1,k-1} & h_{k-1,k} & 0 \\ \vdots & & & & & h_{k,k} & h_{k,k+1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & h_{k+1,k} & h_{k+1,k+1} \end{bmatrix}$$

$$h_{k+1,k+1}\left|H(k)\right| - h_{k,k+1}\begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ h_{2,1} & h_{2,2} & h_{2,3} & & & & \vdots \\ 0 & h_{3,2} & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & h_{k-2,k-1} & 0 \\ \vdots & & & & & h_{k-1,k-1} & h_{k-1,k} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & h_{k+1,k} \end{bmatrix}$$

$$= h_{k+1,k+1}\left|H(k)\right| - h_{k,k+1}h_{k+1,k}\left|H(k-1)\right| \text{ dir.}$$

2.2. Fibonacci Sayılarının Çarpanlaması

$M(n), n = 1,2,3\cdots$

$m_{k,k} = 1, \quad 1 \le k \le n$, ve $m_{k-1,k} = m_{k,k-1} = i$, $2 \le k \le n$ olmak üzere

$$M(n) = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ i & 1 & i & & & & \vdots \\ 0 & i & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & & & i \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & i & 1 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanan $n \times n$ boyutlu bir üç-bant matris ise, o zaman Yardımcı Teorem 2.1 'e göre $M(n)$ matrisinin determinantı aşağıdaki gibidir.

$n = 1$ için $|M(1) = 1|$,

$n = 2$ için $|M(2)| = \begin{vmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{vmatrix} = 1^2 - i^2 = 2$,

$n = 3$ için $|M(3)| = \begin{vmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 1 & i \\ 0 & i & 1 \end{vmatrix} = 3$,

$\vdots$

(2.8)

Burada;

$$n \geq 2, \text{ için } \quad F_n = \left| M(n-1) \right| \tag{2.9}$$

dir. Yani

$n \geq 2,$ için $M(n-1)$ matisinin determinantı Fibonacci sayılarını verir.

$G(n), \ n = 1,2,3\ldots$

$g_{k,k} = 0 \quad 1 \leq k \leq n, \quad g_{k-1,k} = g_{k,k-1} = 1 \qquad 2 \leq k \leq n$ olmak üzere;

$$G(n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlanan $n \times n$ boyutlu bir üç-bant matris ise, o zaman

$M(n) = I + iG(n)$ dir. Gerçekten;

$$M(n) = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ i & 1 & i & & & & 0 \\ 0 & i & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & & & i \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & i & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & i & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ i & 0 & i & & & & \vdots \\ 0 & i & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & & & i \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & i & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= I + iG(n)$$

olduğu görülür.

$\lambda_j,\ j = 1,2,3,\cdots,n$ $G(n)$ matrisinin özdeğerleri olmak üzere bu

özdeğerlere karşılık gelen özvektörler x_j olsun.

Bu durumda her bir j için;

$$\begin{aligned} M(n)x_j &= [I + iG(n)]x_j \\ &= Ix_j + iG(n)x_j \\ &= x_j + i\lambda_j x_j \end{aligned}$$

$$= (1 + i\lambda_j)x_j$$

yazarız. Buradan $M(n)$ matrisinin özdeğerlerinin

$$\beta_j = 1 + i\lambda_j \quad j = 1,2,\cdots,n,$$

olduğu sonucu elde ederiz.

$$|M(n)| = \prod_{k=1}^{n}(1 + i\lambda_k) \quad n \geq 1 \tag{2.11}$$

λ_k, $G(n)$ karakteristik polinomun sıfırları ise, o zaman

$p_n(\lambda) = |G(n) - \lambda I|$ olup $G(n) - \lambda I$ matrisi bir üç-bant matrisidir. Yani

$$G(n) - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & & & & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

dir.

Yardımcı Teorem 2.1'i kullanarak $G(n)$, $n = 1,2,3,\cdots$ matrisinin karakteristik polinomlarını bulalım;

$$p_1(\lambda) = -\lambda$$

$$p_2(\lambda) = \lambda^2 - 1$$
$$\vdots \qquad (2.13)$$
$$p_n(\lambda) = -\lambda p_{n-1}(\lambda) - p_{n-2}(\lambda)$$

dir. Buradaki karakteristik polinomları $\{U_n(x), n \geq 1\}$, $\lambda \equiv -2x$ olmak üzere

aşağıdaki gibi vermek mümkündür.

$$U_1(x) = 2x$$

$$U_2(x) = 4x^2 - 1$$

$$\vdots$$

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x) \qquad (2.14)$$

$U_n(x)$, $n \geq 1$ ikinci türden Chebyshev polinomudur. İkinci türden Chebyshev polinomu için $x = \cos\theta$ alınırsa; [7]

$$x = \cos\theta \Rightarrow \theta = \arccos(x)$$

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta} \qquad (2.15)$$

Eş. 2.15 'ten

$U_n(x)$'in kökleri;

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta} = 0$$
$$\Rightarrow \sin((n+1)\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \theta_k = \frac{\pi k}{n+1} \qquad k = 1,2,\cdots n$$

$$x_k = \cos\theta_k = \cos\frac{\pi k}{n+1} \qquad k = 1,2,\cdots n$$

$\lambda_k = -2x$ olmak üzere $G(n)$'nin özdeğerleri;

$$\lambda_k = -2\cos\frac{\pi k}{n+1} \qquad \text{k=1,2, 3, } \cdots \text{ n} \tag{2.16}$$

Eş. 2.9 , Eş.2.11 , Eş.2.16'den

$$F_{n+1} = |M(n)| = \prod_{k=1}^{n}(1 + i\lambda_k) \qquad n \geq 1$$

$$= \prod_{k=1}^{n}(1 - 2i\cos\frac{\pi k}{n+1}) \qquad n \geq 1 \tag{2.17}$$

Chebyshev polinomunun matris formu Eş. 2.12 den;

$$A(n,x) = \begin{bmatrix} 2x & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2x & 1 & & & & 0 \\ 0 & 1 & 2x & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2x \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

yazarız.

İkinci türden Chebyshev polinomu;

$U_1(x) = 2x$

$U_2(x) = 4x^2 - 1$

$U_3(x) = 8x^3 - 4x$

$\vdots$

$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$ tanımlanmıştı.

$$|M(n)| = i^n \left| A(n, \frac{-i}{2}) \right| = i^n U_n(\frac{-i}{2}) \text{ dır.} \tag{2.19}$$

Gerçekten;

$U_1(\frac{-i}{2}) = 2.\frac{-i}{2} = -i.i = 1 = |M(1)|$

$U_2(\frac{-i}{2}) = 4.\left(\frac{-i}{2}\right)^2 - 1 = -2i^2 = 2 = |M(2)|$

$U_3(\frac{-i}{2}) = 8.\left(\frac{-i}{2}\right)^3 - 4\left(\frac{-i}{2}\right) = 8.\frac{-i^3}{8} + 4\frac{i}{2} = 3 = |M(3)|$

$\vdots$

dir.

2.3. Lucas Sayılarının Çarpanlaması

$s_{1,1} = \frac{1}{2}, s_{k,k} = 1 \quad 2 \le k \le n$

$s_{k-1,k} = s_{k,k-1} = i \quad 2 \le k \le n$

olmak üzere $S(n)$ matrisi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$S(n)=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & i & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ i & 1 & i & & & & 0 \\ 0 & i & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & & & i \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & i & 1 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

O halde Yardımcı Teorem 2.1 den

$$|S(1)|=\frac{1}{2}$$

$$|S(2)|=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & i \\ i & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}-i^2=\frac{3}{2}$$

$$|S(3)|=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & i & 0 \\ i & 1 & i \\ 0 & i & 1 \end{vmatrix}=2 \tag{2.21}$$

$$\vdots$$

$$|S(n)|=1.|S(n-1)-i^2||S(n-2)|=|S(n-1)|+|S(n-2)|$$

yazarız. Böylece $S(n)$ matrisinin determinantlarının iki katı Lucas sayılarıdır.

$$L_n = 2|S(n)| \qquad n \geq 1 \text{ için;} \tag{2.22}$$

$$|S(n)| = \frac{1}{2}|(I + e_1 e_1{}^T)S(n)| \tag{2.23}$$

Burada e_j birim matrisin j. sütunudur.

Eş. 2.23 verilen eşitliğin sağ tarafı için;

$$\frac{1}{2}|(I + e_1 e_1{}^T)S(n)| = \frac{1}{2}|I + i(G(n) + e_1 e_2{}^T)| \tag{2.24}$$

γ_k , $k = 1,2,\cdots$ $G(n) + e_1 e_2{}^T$ matrisinin özdeğerleri olsun. Herbir j için;

$$\begin{aligned}(I + i(G(n) + e_1 e_2{}^T))y_j &= Iy_j + i(G(n) + e_1 e_2{}^T)y_j \\ &= (1 + i\gamma_j)y_j\end{aligned}$$

Buradan;

$$\frac{1}{2}|I + i(G(n) + e_1 e_2{}^T)| = \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}(1 + i\lambda_k) \tag{2.25}$$

Her bir γ_k, $q_n(\gamma) = |G(n) + e_1 e_2{}^T - \gamma I|$ polinomunun sıfırlarıdır.

Biliyoruz ki; $\left|I - \frac{1}{2}e_1 e_1{}^T\right| = \frac{1}{2}$ dir.

γ_k özdeğerlerine karşılık gelen karakteristik polinom $q_n(\gamma)$ ise ;

$$=2.\left|(I-\frac{1}{2}e_1e_1^{\,T})(G(n)+e_1e_2^{\,T}-\gamma I\right| \qquad \text{dir.} \tag{2.26}$$

$q_n(\gamma)$,karakteristik polinomunun matris gösterimi ise;

$$q_n(\gamma)=\begin{bmatrix} \frac{-\gamma}{2} & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -\gamma & 1 & & & & 0 \\ 0 & 1 & -\gamma & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -\gamma \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

dir.

$q_n(\gamma)$ polinomu için;

$q_1(\gamma)=\frac{-\gamma}{2}$

$q_2(\gamma)=\frac{\gamma^2}{2}-1$

$q_3(\gamma)=\frac{-\gamma^3}{2}-\frac{\gamma}{2}$

$\vdots$

$$q_n(\gamma) = -\gamma q_{n-1}(\gamma) - q_{n-2}(\gamma) \tag{2.28}$$

$\gamma \equiv -2x$ olarak aldığımızda $\{T_n(x) : n \geq 1\}$ birinci türden Chebyshev polinomunu verir.

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$\vdots$$

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \tag{2.29}$$

Birinci türden Chebyshev polinomunda $x \equiv \cos\theta$ alınarak $[7]$;

$$T_n(x) = \cos n\theta \tag{2.30}$$

Eş. 2.30 'dan $T_n(x)$ polinomunun kökleri;

$T_n(x) = 0 \Rightarrow \cos n\theta = 0$ dır.

$$\theta_k = \frac{\pi(k - \frac{1}{2})}{n}, \qquad k = 1,2,3\cdots n \text{ ya da}$$

$$x_k = \cos\theta_k = \cos\frac{\pi(k - \frac{1}{2})}{n} \quad k = 1,2,3\cdots n$$

$\gamma \equiv -2x$, ve $q_n(\gamma) = 2.\left|(I - \frac{1}{2}e_1e_1^T)(G(n) + e_1e_2^T - \gamma I\right|$ polinomun kökleri aynı zamanda;

$\left|G(n)+e_1e_2^{\,T}-\gamma I\right|=0$ polinomunun kökleridir. Eş. 2.26

$G(n)+e_1e_2^{\,T}$ 'nin özdeğerleri;

$$\gamma_k=-2\cos\frac{\pi(k-\frac{1}{2})}{n} \qquad k=1,2,3\cdots n, \tag{2.31}$$

Diğer taraftan;

$L_n=2.\left|S(n)\right| \quad , \; n\geq 1$

$$\left|S(n)\right|=\frac{1}{2}\left|(I+e_1e_1^{\,T})(S(n)\right|$$

$$\left|S(n)\right|=\frac{1}{2}\left|(I+e_1e_1^{\,T})(S(n)\right|=\frac{1}{2}\left|I+i(G(n)+e_1e_2^{\,T})\right|$$

$$=\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}(1+i\lambda_k)$$

$\gamma_k=-2\cos\dfrac{\pi(k-\frac{1}{2})}{n} \qquad k=1,2,3\cdots n$ olduğundan;

$$\left|S(n)\right|=\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}(1-2i\cos\frac{\pi(k-\frac{1}{2})}{n}) \quad ; \; n\geq 1$$

dır.

Eş. 2.22 , Eş. 2.25, ve Eş. 2.31 ’den

$$L_n = \prod_{k=1}^{n} (1 - 2i \cos \frac{\pi(k - \frac{1}{2})}{n}) \qquad ; n \geq 1 \tag{2.32}$$

Eş. 2.27 ’den birinci türden Chebyshev polinomunun matris gösterimi;

$$B(n,x) = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2x & 1 & & & & 0 \\ 0 & 1 & 2x & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2x \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

dır.

Eğer $S(n) = iB(n, \frac{-i}{2})$ alırsak;

$$|S(n)| = i^n \left| B(n, \frac{-1}{2}) \right| = i^n T_n (\frac{-i}{2}) \quad \text{olur.} \tag{2.34}$$

Eş. 2.22 , Eş. 2.30 ve Eş. 2.34’ten;

$$L_n = 2i^n \cos(n \cos^{-1}(\frac{-i}{2})) \quad n \geq 1 \tag{2.35}$$

eşitliğini elde ederiz.

3. ÜÇ-BANT MATRİSLERİN TERSİ

Aşağıda tanımlanan matrislerin özdeğerleri ve özvektörleri ile ilgili çalışmalar yapıldı $[4]$.

$A = [\min\{i, j\}]_{i,j=1\cdots n}$ ve;

$B = [\min\{2i-1, 2j-1\}]_{i,j=1\cdots n}$

A ve B matrislerinin genel gösterimi;

C=$[\min\{ai-b, aj-b\}]_{i,j=1\cdots n}$ $\quad a > 0$ ve $a \neq b$

şeklindedir.

C matrisi her zaman tersi olan bir matrisdir ve tersi de üç-bant matrisdir.

Aşağıdaki tekil olmayan $n \times n$ üç-bant matrisin tersi için

$$T = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & & & & 0 \\ 0 & c_2 & 2x & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & & & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

Burada;

$$(T^{-1})_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j} b_{i.} \cdots b_j \theta_{i-1} \phi_{j+1} / \theta_n , i \le j \\ (-1)^{i+j} c_j \cdots c_{i-1} \theta_{j-1} \phi_{i+1} / \theta_n , i > j \end{cases}$$

dır.

$\theta_0 = 1$ ve $\theta_1 = a_1$ olmak üzere; $\theta_i = a_i \theta_{i-1} - b_{i-1} c_{i-1} \theta_{i-2}$, $i = 1,2,3 \cdots n$,

ve

$\phi_{n+1} = 1$ ve $\phi_n = a_n$ olmak üzere; $\phi_i = a_i \phi_{i+1} - b_i c_i \phi_{i+2}$, $i = 1,2,3 \cdots n$

dır.

3.1. Önerme

$a > 0$ *ve* $a \ne b$ *için*

Üç-bant matris olan T_n

$$T_n = \begin{bmatrix} 1+\dfrac{a}{a-b} & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & & 0 \\ 0 & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$(\frac{1}{a})C$ ' nin tersidir. C matrisi ise

C=$\left[\min\{ai-b, aj-b\}\right]_{i,j=1\cdots n}$ $\quad a>0$ ve $a \neq b\, dir.$

İspat

Birim matrise indirgeyerek C matrisinin tersini bulalım

$$C=\begin{bmatrix} a-b & a-b & a-b & \cdots & \cdots & \cdots & a-b \\ a-b & 2a-b & 2a-b & \cdots & \cdots & \cdots & 2a-b \\ a-b & 2a-b & 3a-b & \cdots & \cdots & \cdots & 3a-b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a-b & 2a-b & 3a-b & \cdots & \cdots & \cdots & (n-1)a-b \\ a-b & 2a-b & 3a-b & \cdots & \cdots & \cdots & na-b \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a-b & a-b & a-b & \cdots & \cdots & \cdots & a-b \\ 0 & a & a & \cdots & \cdots & \cdots & a \\ 0 & a & 2a & \cdots & \cdots & \cdots & 2a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a & 2a & \cdots & \cdots & \cdots & (n-1)a-a \\ 0 & a & 2a & \cdots & \cdots & \cdots & na-a \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a-b & a-b & a-b & \cdots & \cdots & \cdots & a-b \\ 0 & a & a & \cdots & \cdots & \cdots & a \\ 0 & a & a & \cdots & \cdots & \cdots & 2a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & \cdots & \cdots & a \\ 0 & a & a & \cdots & \cdots & \cdots & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & a & a & \cdots & \cdots & \cdots & a \\ 0 & 0 & a & \cdots & \cdots & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a & \cdots & \cdots & \cdots & a \\ 0 & 0 & a & \cdots & \cdots & \cdots & a \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Birim matrise indirgenmiş oldu. Bu durumda C matrsisinin tersi;

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a}+\frac{1}{a-b} & \frac{-1}{a} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{-1}{a} & \frac{2}{a} & \frac{-1}{a} & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{a} & \frac{1}{a} & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \frac{-1}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{a} \begin{bmatrix} 1+\frac{a}{a-b} & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & & 0 \\ 0 & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan $\frac{1}{a}C^{-1} = T_n$ olduğu kolaylıkla görülür.

3.1. Bazı Üç-Bant Matrislerin Özdeğerleri

Bir önceki bölüme göre; C matrisinin özdeğerlerini bulmak, üç-bant matrislerin özdeğerlerinin bulunduğu bölgeyi tanımlamak ile eşdeğerdir.

Başlangıç koşulları $Q_0(x) = 1$ ve $Q_1(x) = (ax+1)Q_0(x)$ olan

polinomların kümesini $\{Q_k(x)\}$ ile tanımlayalım;

Başlangıç koşulları $Q_0(x) = 1$ ve $Q_1(x) = (ax+1)Q_0(x)$ olan

$$Q_k(x) = (ax+2)Q_{k-1}(x) - Q_{k-2}(x) \qquad k = 1,2,3\cdots n-1$$

$$Q_n(x) = \left(ax + \frac{2a-b}{a-b}\right)Q_{n-1}(x) - Q_{n-2}(x)$$

Bu bağıntının matris formu;

$$x\cdot\begin{bmatrix}Q_{n-1}(x)\\Q_{n-2}(x)\\\vdots\\Q_1(x)\\Q_0(x)\end{bmatrix}=-\frac{1}{a}\begin{bmatrix}\frac{2a-b}{a-b} & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ -1 & 2 & -1 & & & & 0\\ 0 & & & \ddots & & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & 0\\ \vdots & & & & -1 & 2 & -1\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & -1\end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix}Q_{n-1}(x)\\Q_{n-2}(x)\\\vdots\\Q_1(x)\\Q_0(x)\end{bmatrix}+Q_n(x)\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\0\end{bmatrix}$$

dir

$Q_k(x)=U_k(\frac{ax}{2}+2)-U_{k-1}(\frac{ax}{2}+2)$ k=0, $\cdots$,n-1 için ve;

$$Q_n(x)=U_n\left(\frac{ax}{2}+1\right)-U_{n-1}\left(\frac{ax}{2}+1\right)-\left(1-\frac{a}{a-b}\right)\left(U_{n-1}(\frac{ax}{2}+1)-U_{n-2}(\frac{ax}{2}+1)\right)$$

Burada $U_k(x)$; $k=0,1,2\cdots n$ için ikinci türden Chebyshev polinomudur.

$Q_n(x)$ polinomunun sıfırları $-(\frac{1}{a})C$ matrisinin özdeğerleridir. Bu değerler aşağıdaki eşitlikte gösterilmiştir.

$$p_n(x)=1-\frac{a}{a-b} \tag{3.1}$$

Buradan;

$n \times n$ tipinde üç-bant matrisi için;

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & & & 0 \\ 0 & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -1+\frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan $n \times n$ boyutlu bir üç-bant matris ise o zaman; M matrisi

matrisi ters çevrilebilir matristir ve tersi $M^{-1} = [\max\{i, j\}]_{i,j=1,\cdots n}$ dir.

KAYNAKLAR

1. Koshy, T., “Fibonacci and Lucas Numbers with Applications”, ***Wiley-Interscience***, 24-35 (2001).

2. Cahill, N.D., Narayan, D.A., “Fibonacci and Lucas Numbers as tridiagonal matrix determinants”, ***The Fibonacci Quart.***, 42 (3): 216-221 (2004).

3. Ocal, A.A., Tuğlu, N., Altınışık, E., “On the representation of k-generalized Fibonacci and Lucas Numbers”, ***Applied Math. Comp***, 170: 584-596 (2005).

4. Fonseca, C.M., “On the eigenvalues of some tridiagonal matrices”, ***J. Comput. Appl. Math.***, 200(1): 283-286 (2007).

5. Jr, Miles, E.P., “Generalized Fibonacci numbers and associated matrices”, ***Amer.Math.Monthly***, 745-752 (1960).

6. Cahill, N.D., Errico, J.R.D., Narayan, A.D., Narayan, J.Y., “Fibonacci Determinants”, ***College Math. J.***, 33 (3): 221-225 (2002).

7. Cahill, N.D.http://www.ams.org/mathscinet/search/institution.html?code=1_KODAK, D'Errico, J.R., Spence, J.P., “Complex factorizations of the Fibonacci and Lucas numbers”, ***The Fibonacci Quart.***, 41: 1,13-19 (2003)

8. Horadam, A.F., “Pell Identities”, ***The Fibonacci Quart.***, 9 (3): 245-252, 263 (1971).

9. Horadam, A.F., Mahon, B.J.M., “Pell and Pell-Lucas Polynomials”, ***The Fibonacci Quart.***, 23 (1): 7-20 (1985).

10. Vorob’yev, N.N., “Fibonacci Numbers”, ***Blaisdell***, New York, 1-176 (1961).

11. Horadam, A.F., “A generalized Fibonacci sequence”, ***Americ. Math. Monthly.***, 68: 455- 459 (1961).

12. Vajda, S., “Fibonacci & Lucas numbers, and the golden section. Theory and applications”, ***John Wiley & Sons***, New York, 24-61 (1989).

13. Lee, G.Y., “k-Lucas numbers and associated bipartite graphs”, ***Linear Algebra Appl.***, 320 (1-3): 51-61 (2000).

14. Ercolano, J., "Matrix generators of Pell sequences", ***The Fibonacci Quart.,*** 17 (1): 71-77 (1979).

15. Er, M.C., "Sums of Fibonacci numbers by matrix methods", ***The Fibonacci Quart.,*** 22 (3): 204-207 (1984).

16. Rainville, E.D., "Special functions", Reprint of 1960 first edition, ***Chelsea Publishing Co., Bronx,*** N.Y, 365 (1971).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: ODABAŞ, Simge
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 19.11.1984 ZONGULDAK
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: 0 (312) 476 76 15
e-mail	: simge_3@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik Bölümü	2006
Lise	Zonguldak Atatürk Anadolu Lisesi	2002

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2006-2008	Karacan Dershanesi	Matematik Öğretmeni
2008-2009	Pi Eğitim	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Seyehat etmek, Müzik dinlemek, Sinema, Dans