



FUBINI TIPLİ POLİNOMLARIN GENELLEŞTİRMELERİ ÜZERİNE

Kübra ÇETİN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

TEMMUZ 2023

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Kübra ÇETİN

04/07/2023

FUBINI TIPLİ POLİNOMLARIN GENELLEŞTİRMELERİ ÜZERİNE
(Yüksek Lisans Tezi)

Kübra ÇETİN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2023

ÖZET

Bu çalışmada trigonometrik fonksiyonlar ve Euler formülü yardımıyla yüksek mertebeden kosinüs ve sinüs parametrelili Fubini polinomlarının yeni doğurucu fonksiyonları tanımlanmıştır. Daha sonra tanımlanan bu doğurucu fonksiyonlar yardımıyla ve trigonometrik bağıntılar da kullanarak yeni formüller elde edilmiştir. Ayrıca bu doğurucu fonksiyonların değişkenlerine göre kısmi türevleri alınarak bağıntılar incelenmiştir. Ardından Fubini tipli polinomlar ve Stirling sayıları arasında bağıntılar elde edilmiştir. Daha sonra Appell polinomları yardımıyla yeni bir kosinüs ve sinüs parametrelili Fubini polinomları tanımlanarak açık gösterimi ve determinant gösterimi incelenmiştir. Son olarak özel durumlar incelenerek Bernoulli ve Euler sayılarını içeren yeni Fubini tipli polinomlar tanımlanmıştır.

Bilim Kodu : 20406

Anahtar Kelimeler : Doğurucu fonksiyon, Fubini polinomları, toplam formülleri, trigonometrik bağıntılar

Sayfa Adedi : 78

Danışman : Prof. Dr. Bayram ÇEKİM

ON THE GENERALIZATIONS OF FUBINI TYPE POLYNOMIALS

(M. Sc. Thesis)

Kübra ÇETİN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2023

ABSTRACT

In this study, new generating functions of higher order Fubini type polynomials with cosine and sine parameters are defined with the help of trigonometric functions and Euler formula. Later, with the help of these generating functions, new formulas are obtained by using the trigonometric relations. In addition, by taking the partial derivatives of these generating functions with respect to their variables, the relations are examined. Then, the relations between Fubini type polynomials with and Stirling numbers are obtained. Then, with the help of Appell polynomials, new type higher order Fubini type polynomials with cosine and sine parameters are defined and their explicit representation and determinant representation are examined. Finally, by examining special cases, new Fubini type polynomials including Bernoulli and Euler numbers are defined.

Science Code : 20406

Key Words : Generating function, Fubini polynomials, summation formulas, trigonometric relations

Page Number : 78

Supervisor : Prof. Dr. Bayram ÇEKİM

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitiminin her aşamasında görüş ve önerileriyle beni yönlendiren, bilgi ve birikimlerinden bana faydalanma fırsatı veren, desteğini hiç esirgemeyen değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Bayram ÇEKİM'e en içten duygularıyla teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca bu süreçte çalışmalarım boyunca hep yanımda olan maddi manevi desteğini esirgemeyen sevgili aileme, her daim destek olan dostlarıma en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

| | Sayfa |
|--|-------|
| ÖZET | iv |
| ABSTRACT..... | v |
| TEŞEKKÜR..... | vi |
| İÇİNDEKİLER | vii |
| SİMGELER VE KISALTMALAR..... | viii |
| 1. GİRİŞ..... | 1 |
| 2. TEMEL KAVRAMLAR..... | 3 |
| 2.1. Ön Bilgiler..... | 3 |
| 2.2. Bazı Temel Lemmalar | 4 |
| 2.3. Bazı Özel Polinom Aileleri ve Sayı Dizileri | 5 |
| 3. PARAMETRİK TÜRDEN FUBINI TİPLİ POLİNOMLAR | 13 |
| 3.1. Fubini Polinomlarının Parametrik Türleri | 13 |
| 3.2. Bazı Özel Durumlar | 18 |
| 3.3. Kısmi Türevler | 20 |
| 4. YÜKSEK MERTEBEDEN FUBINI TİPLİ POLİNOMLARIN PARAMETRİK TÜRLERİ..... | 25 |
| 5. YÜKSEK MERTEBEDEN FUBINI TİPLİ APPELL POLİNOMLARIN PARAMETRİK TÜRLERİ VE ÖZELLİKLERİ ... | 57 |
| 6. SONUÇ VE ÖNERİLER | 71 |
| KAYNAKLAR | 73 |
| ÖZGEÇMİŞ | 77 |

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

| | |
|------------------------|---|
| $a_n^{(k)}(x)$ | k . Mertebeden Fubini Tipli Polinomlar |
| B_n | Bernoulli Sayıları |
| $B_n(x)$ | Bernoulli Polinomları |
| $C_k(u, v)$ | İki Değişkenli Kosinüs Parametrelili Üstel Fonksiyon |
| E_n | Euler Sayıları |
| $E_n(x)$ | Euler Polinomları |
| $E_n^{(c)}(x, y)$ | Kosinüs-Euler Polinomları |
| $E_n^{(s)}(x, y)$ | Sinüs-Euler Polinomları |
| $E_n^{(c,r)}(x, y)$ | r . Mertebeden Kosinüs-Euler Polinomları |
| $E_n^{(s,r)}(x, y)$ | r . Mertebeden Sinüs-Euler Polinomları |
| $F_n(y)$ | Fubini Polinomları |
| $F_n(x; y)$ | Klasik İki Değişkenli Fubini Polinomları |
| $F_n^{(r)}(x; y)$ | r . Mertebeden Fubini Polinomları |
| $F_n^{(c)}(u, v; w)$ | Kosinüs Parametrelili Fubini Polinomları |
| $F_n^{(s)}(u, v; w)$ | Sinüs Parametrelili Fubini Polinomları |
| $F_n^{(c,r)}(u, v; w)$ | r . Mertebeden Kosinüs Parametrelili Fubini Polinomları |
| $F_n^{(s,r)}(u, v; w)$ | r . Mertebeden Sinüs Parametrelili Fubini Polinomları |
| $G_A(x, t)$ | Appell Polinomları |

Simgeler**Açıklamalar**

$H_n^{(m)}(\mathbf{y})$

Frobenius-Euler Sayıları

$H_n^{(m)}(x, \mathbf{y})$

Frobenius-Euler Polinomları

$H_n^{(c,r)}(x, \mathbf{y}; \lambda, \mathbf{u})$

 r . Mertebeden Kosinüs Eulerian Tipli Polinomlar

$H_n^{(s,r)}(x, \mathbf{y}; \lambda, \mathbf{u})$

 r . Mertebeden Sinüs Eulerian Tipli Polinomlar

$S_1(n, k)$

Birinci Tür Stirling Sayıları

$S_2(n, k)$

İkinci Tür Stirling Sayıları

$S_k(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

İki Değişkenli Sinüs Parametrelili Üstel Fonksiyon

$\omega_g(n)$

Fubini Sayıları

$\omega_M(n)$

Fubini Tipli Sayılar

1. GİRİŞ

Guido Fubini, Fubini teoremi ve Fubini–Study metriği ile tanınan İtalyan matematikçidir. 19 Ocak 1879 Venedik'te doğup yaklaşık 64 yıl yaşadıktan sonra 6 Haziran 1943'te ölmüştür. Öğretmenleri ve matematik öğretmeni olan babası tarafından küçük yaşta matematiğe yönelmiştir. Çeşitli üniversitelerde çalışmıştır. Fubini'nin ilgi alanları, diferensiyel geometri başta olmak üzere çalışmalarından analize kadar uzanan son derece geniş bir alana sahiptir. Bu alanda diferensiyel denklemler, analitik fonksiyonlar ve kompleks fonksiyonlar üzerinde çalışmaları olup Weierstrass integralini, Lebesgue integraline indirgemeyi çalışarak lineer olmayan integral denklemler üzerine çeşitli çalışmalar yaptığı görülmektedir [1].

Fubini gruplar teorisi, lineer gruplar ve otomorfik fonksiyon grupları üzerinde de çalışmalar yapmıştır. En önemli çalışması, mutlak diferensiyel hesabı kullandığı diferensiyel projektif geometri üzerineydi. Birinci dünya savaşından sonra çalışmalarını daha uygulamalı alanlara verdi [1].

Fubini sayıları, 1907 yılına kadar sıralı Bell sayıları olarak bilinmekte olup sayılar teorisi ve diğer alanlarda kullanılmaktadır. Sıralı Bell sayıları 1859 yılında ilk olarak $n + 1$ tane belirli çınar ağaçlarından tamamen düzenli yapraklılarını saymak için Arthur Cayley'in "On the analytical forms called trees, second part" adlı çalışmasında yer almaktadır. Daha sonra Louis Comtet tarafından Fubini teoremindeki toplamların veya integrallerin sırasını yeniden düzenlemek adına farklı yollarını sayarak sıralı Bell sayıları Fubini sayıları olarak adlandırılmıştır [2]. Daha sonra Fubini sayıları yardımıyla Fubini polinomları tanımlanmıştır.

Bu çalışmada trigonometrik fonksiyonlar ve Euler formülü yardımıyla Fubini tipli polinomların yeni doğurucu fonksiyonlar tanımlanmıştır. Daha sonra tanımlanan bu doğurucu fonksiyonlar yardımıyla ve trigonometrik bağıntıları da kullanarak yeni formüller elde edilmiştir. Ayrıca bu doğurucu fonksiyonların değişkenlerine göre kısmi türevleri alınarak bağıntılar incelenmiştir. Ardından Fubini tipli polinomlar ve Stirling sayıları arasında bağıntılar elde edilmiştir.

Daha sonra Fubini tipli polinom ailelerinin yeni genel halleri Appell polinomları yardımıyla tanımlanmıştır. Böylece geniş iki yeni aile elde edilerek açık gösterimlerinin ardından yeni doğurucu fonksiyonlar yardımıyla polinomların determinant gösterimleri elde edilmiştir. Ayrıca bazı iyi bilinen sayılar kullanılarak alt ailelere örnekler verilerek, son olarak alt ailelerin açık gösterimleri ve determinant gösterimleri elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Ön Bilgiler

2.1.1. Tanım

g kompleks veya reel bir sayı olmak üzere

$$(g)_0 = 1, \quad g \neq 0$$

$$(g)_k = g(g+1)(g+2)\dots(g+k-1), \quad k = 1, 2, \dots$$

biçiminde tanımlanan $(g)_k$ ifadesine *Pochhammer sembolü* denir [3].

2.1.2. Tanım

$F(u, v)$ iki değişkenli fonksiyonu değişkenlerinden birine göre

$$F(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(u) v^n$$

biçiminde bir Taylor serisine açılabilirse $F(u, v)$ fonksiyonuna $\{f_n(u)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ fonksiyonlar ailesinin bir doğurucu fonksiyonu denir. Bu serinin tüm u ve v ler için yakınsak olması gerekmez. I belirli bir aralık r pozitif sabit olmak üzere $|v| < r$ ve $u \in I$ için yakınsak olması yeterlidir [4].

2.1.3. Tanım

$u, v \in \mathbb{R}$ ve $i^2 = -1$ olmak üzere $w = u + iv$ biçiminde olan sayılara karmaşık sayı denir. Bir $w = u + iv$ karmaşık sayısında, w karmaşık sayısının reel kısmına u sayısı, w karmaşık sayısının sanal (imajiner) kısmına v sayısı denir. Sırasıyla $u = \text{Re}\{w\}$, $v = \text{Im}\{w\}$ ile gösterilir [5].

2.1.4. Tanım

$u, v \in \mathbb{R}$ ve $i^2 = -1$ olmak üzere, $w = u + iv$ herhangi bir karmaşık sayı olsun. Bu sayının eşleniği (konjügesi) \bar{w} ile gösterilerek, $\bar{w} = u - iv$ ile tanımlanır [5].

2.1.5. Tanım

Trigonometrik fonksiyonlar ve üstel karmaşık fonksiyonlar arasındaki ilişkiyi veren

Euler formülü $exp(iz) = \cos(z) + isin(z)$ ile tanımlanır [5].

2.2. Bazı Temel Lemmalar

Bu çalışmada \mathbb{N}_0 sembolü ile $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ ve \mathbb{N} sembolü ile $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ kümelerini belirtmektedir.

2.2.1. Lemma

$m \in \mathbb{N}$ ve $A(k, n)$ ile k ve n ye bağlı bir dizi olsun. Bu durumda

$$\mathbf{a.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor} A(k, n - mk)$$

$$\mathbf{b.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor} A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n + mk)$$

eşitlikleri sağlanır [6].

2.2.2. Lemma

$m \in \mathbb{N}$ ve $A(k, n)$ ile k ve n ye bağlı bir dizi olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor} A(k, n - (m-1)k)$$

eşitliği sağlanır [6].

2.3. Bazı Özel Polinom Aileleri ve Sayı Dizileri

2.3.1. Tanım

$C_k(u, v)$, $S_k(u, v)$ iki değişkenli kosinüs ve sinüs parametrelili üstel doğurucu fonksiyonlar olmak üzere

$$e^{ut} \cos vt = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(u, v) \frac{t^k}{k!},$$

$$e^{ut} \sin vt = \sum_{k=0}^{\infty} S_k(u, v) \frac{t^k}{k!}$$

tanımlanmaktadır [7]. Açık gösterimleri ise

$$C_k(u, v) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{k}{2j} u^{k-2j} v^{2j}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$S_k(u, v) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{k}{2j+1} u^{k-2j-1} v^{2j+1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

şeklindedir [7].

2.3.2. Tanım

Her $n = 0, 1, 2, \dots$ için derecesi $der P_n(x) = n$ ve her $n = 1, 2, 3, \dots$ için $P'_n(x) = nP_{n-1}(x)$ özelliklerini sağlayan $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x) \dots$ polinomlar dizisine Appell polinomlar dizisi denir. Aynı zamanda $P_0(x) = 1$ olması durumu da $P_n(x)$ dizisine normalleştirilmiş Appell polinomlar dizisi denir [8, 9].

2.3.3. Tanım

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n \frac{t^n}{n!}, \quad A(0) \neq 0,$$

$t = 0$ da analitik fonksiyon ve $M_n = M_n(0)$ dır. $M_n(x)$ in türevi

$$M'_n(x) = nM_{n-1}(x)$$

dir [8, 9].

$$G_A(x, t) = A(t)e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} M_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

doğurucu fonksiyonu ile tanımlanan polinoma Appell polinomu denir [8, 9].

2.3.4. Tanım

B_n ile gösterilen Bernoulli sayıları, $t \in \mathbb{C}$ için

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < 2\pi$$

doğurucu fonksiyonu ile tanımlanmıştır [10, 11].

2.3.5. Tanım

Herhangi x reel sayısı için $B_n(x)$ ile gösterilen Bernoulli polinomları $t \in \mathbb{C}$ için

$$\frac{t}{e^t - 1} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < 2\pi$$

doğurucu fonksiyonu ile tanımlanmıştır [10, 11].

2.3.6. Tanım

$t \in \mathbb{C}$ olmak üzere E_n ile gösterilen Euler sayıları

$$\frac{2}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < \pi$$

doğurucu fonksiyonu ile tanımlanmıştır [10, 12, 13].

2.3.7. Tanım

$t \in \mathbb{C}$ olmak üzere herhangi bir x reel sayısı için $E_n(x)$ ile gösterilen Euler polinomları

$$\frac{2}{e^t + 1} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < \pi$$

doğurucu fonksiyonu ile tanımlanmıştır [10, 12, 13].

2.3.8. Tanım

Kosinüs-Euler ve sinüs-Euler polinomlarının doğurucu fonksiyonları

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(c)}(x, y) \frac{t^n}{n!} = \frac{2}{e^t + 1} e^{xt} \cos(yt),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(s)}(x, y) \frac{t^n}{n!} = \frac{2}{e^t + 1} e^{xt} \sin(yt)$$

şeklindedir [14].

2.3.9. Tanım

r . mertebeden kosinüs-Euler ve sinüs-Euler polinomlarının doğurucu fonksiyonları

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(c,r)}(x, y) \frac{t^n}{n!} = \left(\frac{2}{e^t + 1} \right)^r e^{xt} \cos(yt),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(s,r)}(x, y) \frac{t^n}{n!} = \left(\frac{2}{e^t + 1} \right)^r e^{xt} \sin(yt)$$

olarak verilmiştir [15].

2.3.10. Tanım

$y \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ ve $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere mertebesi m olan $H_n^{(m)}(y)$ ile gösterilen Frobenius-Euler sayıları

$$F_H(t; m, y) = \left(\frac{1-y}{e^t - y} \right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(m)}(y) \frac{t^n}{n!}$$

doğurucu fonksiyonu ile verilmiştir [16].

2.3.11. Tanım

$k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere kosinüs-Eulerian tipli polinomlar $H_n^{(c, k_1)}(x, y; \lambda, u)$ ve sinüs-Eulerian tipli polinomlar ise $H_n^{(s, k_2)}(x, y; \lambda, u)$ olmak üzere

$$F_{H_c}^{(k_1)}(t, x, y; \lambda, u) = \left(\frac{1-u}{\lambda e^t - u} \right)^{k_1} e^{xt} \cos(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(c, k_1)}(x, y; \lambda, u) \frac{t^n}{n!},$$

$$F_{H_s}^{(k_2)}(t, x, y; \lambda, u) = \left(\frac{1-u}{\lambda e^t - u} \right)^{k_2} e^{xt} \sin(yt) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(s, k_2)}(x, y; \lambda, u) \frac{t^n}{n!}.$$

doğurucu fonksiyonları ile tanımlanmıştır [17].

Burada kosinüs-Eulerian tipli polinomlarda $y = 0$, $\lambda = 1$ alınıp, sonra doğurucu fonksiyonda $u = y$ ($y \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$) ve $k_1 = m \in \mathbb{N}$ yazıldığında $H_n^{(m)}(x, y)$ ile gösterilen m . mertebeden Frobenius-Euler polinomlarının doğurucu fonksiyonu

$$F_H(x, t; m, y) = \left(\frac{1-y}{e^t - y} \right)^m e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(m)}(x, y) \frac{t^n}{n!}$$

olarak verilmiştir [16, 18].

2.3.12. Tanım

n, k negatif olmayan tam sayılar ve $k < n$ olmak üzere, n elemanlı bir küme üzerinde tanımlı k tane ayrık devirin çarpımından oluşan permütasyonların sayısına birinci tür Stirling sayıları denir ve $S_1(n, k)$ ile gösterilir. Birinci tür Stirling sayıları

$$\frac{(\log(1+t))^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} S_1(n, k) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < 1$$

doğurucu fonksiyonu ile tanımlanmıştır [12, 13].

2.3.13. Tanım

n, k negatif olmayan tam sayılar olmak üzere, n elemanlı bir kümenin k tane ayrık ve boş olmayan alt kümeye parçalanışlarının sayısına ikinci tür Stirling sayıları denir ve $S_2(n, k)$ ile gösterilir. İkinci tür Stirling sayılarının açık gösterimi

$$S_2(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} j^n$$

şekindedir [13, 19]. Ayrıca ikinci tür Stirling sayıları

$$z^n = \sum_{k=0}^n S_2(n, k) z(z-1)(z-2)\dots(z-k+1)$$

olup

$$(e^z - 1)^k = k! \sum_{n=k}^{\infty} S_2(n, k) \frac{z^n}{n!}$$

doğurucu fonksiyonu ile gösterilmiştir [13, 19].

2.3.14. Tanım

$\omega_g(n)$ ile gösterilen Fubini sayıları

$$F_{\omega_g}(t) = \frac{1}{2-e^t} = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_g(n) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < \ln 2$$

doğurucu fonksiyonu ile tanımlanmıştır [20, 21].

Bu Fubini sayılarının birkaç tanesi aşağıda listelenmiştir:

$$w_g(0) = 1, w_g(1) = 1, w_g(2) = 3, w_g(3) = 13, w_g(4) = 75, w_g(5) = 541, w_g(6) = 4683,$$

$$w_g(7) = 47293 \text{ [22].}$$

2.3.15. Tanım

$\omega_M(n)$ ile gösterilen Fubini tipli sayılar,

$$F_{\omega_M}(t) = \frac{e^t - 1}{2 - e^t} = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_M(n) \frac{t^n}{n!}$$

doğurucu fonksiyonu ile tanımlanmıştır. Burada $w_M(0) = 0$ dır [23].

2.3.16. Tanım

a_n sayıları

$$\frac{2}{(2-e^t)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$$

doğurucu fonksiyonu ile tanımlanmıştır [24].

Burada a_n sayılarının ilk 8 tanesi

$$a_0 = 2, a_1 = 4, a_2 = 16, a_3 = 88, a_4 = 616, a_5 = 5224, a_6 = 51976, a_7 = 593128$$

şeklindedir [22].

2.3.17. Tanım

Klasik tek değişkenli Fubini polinomu $F_n(y)$

$$\frac{1}{1-y(e^t-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(y) \frac{t^n}{n!}$$

doğurucu fonksiyona sahip olduğu gösterilmiştir [25].

2.3.18. Tanım

$n \in \mathbb{N}_0$ ve $k \in \mathbb{N}_0$ olsun. $f_{n,k}$ genelleştirilmiş Fubini sayıları

$$F_k(t) = \frac{e^t - 1}{k + 1 - ke^t} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n,k} \frac{t^n}{n!}$$

doğurucu fonksiyonu ile tanımlanmıştır [23].

$\forall n \in \mathbb{N}_0$ için $f_{n,1} = \omega_M(n)$ dir. Ayrıca $f_{0,k} = 1$ dir [23].

Birkaç genelleştirilmiş Fubini sayıları

$$f_{1,1} = 1, f_{1,2} = 1, f_{1,3} = 1, f_{2,1} = 3, f_{2,2} = 5, f_{2,3} = 7, f_{3,1} = 13, f_{3,2} = 37, f_{3,3} = 73, f_{4,1} = 75$$

şeklindedir [22].

2.3.19. Tanım

$k \in \mathbb{N}_0$ olsun. Herhangi bir x reel sayısı için mertebesi k olan $a_n^{(k)}(x)$ ile gösterilen Fubini tipli polinomlar

$$F_a(x; t, k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)}(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{2^k}{(2 - e^t)^{2k}} e^{xt}, \quad |t| < 2\pi$$

doğurucu fonksiyonu ile tanımlanmıştır [26].

2.3.20. Tanım

Klasik iki değişkenli Fubini polinomu $F_n(x; y)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x; y) \frac{t^n}{n!} = \frac{e^{xt}}{(1-y(e^t-1))}$$

doğurucu fonksiyonu ile tanımlanmıştır [26-29].

2.3.21. Tanım

İki değişkenli r . mertebeden Fubini polinomu $F_n^{(r)}(x; y)$

$$\frac{e^{xt}}{(1-y(e^t-1))^r} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(r)}(x; y) \frac{t^n}{n!} \quad (2.1)$$

doğurucu fonksiyon yardımıyla tanımlanmıştır [30]. Burada $x = 0$ olması durumunda tek değişkenli r . mertebeden Fubini polinomu $F_n^{(r)}(y)$

$$\frac{1}{(1-y(e^t-1))^r} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(r)}(y) \frac{t^n}{n!} \quad (2.2)$$

doğurucu fonksiyon ile tanımlanmıştır [30].

3. PARAMETRİK TÜRDEN FUBINI TIPLİ POLİNOMLAR

Fubini tipli polinom ailelerini kapsayan birçok çalışma yapılmış ve çeşitli özellikleri incelenmiştir. Bu bölümde Sharma, Khan ve Ryoo [31] tarafından tanıtılan trigonometrik fonksiyonlar ve Euler formülü yardımıyla Fubini tipli polinomların yeni doğurucu fonksiyonlarına yer verilecektir. Daha sonra [31] de tanımlanan bu doğurucu fonksiyonlar yardımıyla ve trigonometrik bağıntıları da kullanarak [31] de bulunan formüllere değinilecek ayrıca bu doğurucu fonksiyonların değişkenlerine göre kısmi türevleri alınarak bağıntılar hatırlatılacaktır.

3.1. Fubini Polinomlarının Parametrik Türleri

3.1.1. Tanım

Fubini polinomlarının iki parametrik türü $j \in \mathbb{N}_0$ için kosinüs Fubini polinomları $F_j^{(c)}(u, v; w)$ ve sinüs Fubini polinomları $F_j^{(s)}(u, v; w)$ doğurucu fonksiyonları

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(c)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{(1-w(e^t-1))} e^{ut} \cos(vt) \quad (3.1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(s)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{(1-w(e^t-1))} e^{ut} \sin(vt) \quad (3.2)$$

ile tanımlanmıştır [31].

$$F_n^{(c)}(u, v; w) = \frac{F_n(u+iv; w) + F_n(u-iv; w)}{2}$$

$$F_n^{(s)}(u, v; w) = \frac{F_n(u+iv; w) - F_n(u-iv; w)}{2i}$$

şeklinde ifade edilsin [31].

$$\frac{e^{xt}}{1-y(e^t-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x; y) \frac{t^n}{n!} \quad (3.3)$$

Fubini polinomunda x yerine $u+iv$ ve y yerine de w yazılarak

$$\frac{e^{(u+iv)t}}{1-w(e^t-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(u+iv; w) \frac{t^n}{n!} \quad (3.4)$$

elde edilmiştir [31]. Euler formülünün kullanılmasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(u+iv; w) \frac{t^n}{n!} = \frac{e^{ut} (\cos(vt) + i\sin(vt))}{1-w(e^t-1)} \quad (3.5)$$

elde edilir [31].

Şimdi ise (3.3) eşitlik (3.3) de x yerine $u-iv$ ve y yerine de w yazılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} F_n(u-iv; w) \frac{t^n}{n!} &= \frac{e^{(u-iv)t}}{1-w(e^t-1)} \\ &= \frac{e^{ut} (\cos(vt) - i\sin(vt))}{1-w(e^t-1)} \end{aligned} \quad (3.6)$$

olarak bulunur [31]. Burada (3.5) ve (3.6) eşitlikleri taraf tarafa toplanır

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} F_n(u+iv; w) \frac{t^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} F_n(u-iv; w) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [F_n(u+iv; w) + F_n(u-iv; w)] \frac{t^n}{n!} \\ &= \frac{e^{ut} (\cos(vt) + i\sin(vt) + \cos(vt) - i\sin(vt))}{1-w(e^t-1)} \\ &= \frac{1}{1-w(e^t-1)} 2e^{ut} \cos(vt) \end{aligned} \quad (3.7)$$

olur ve burada eşitliğin her iki tarafı 2 ye bölünürse

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(c)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{1-w(e^t-1)} e^{ut} \cos(vt) \quad (3.8)$$

elde edilir [31].

(3.5) eşitliğinden (3.6) eşitliğinin çıkarılması ile

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} F_n(u+iv; w) \frac{t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} F_n(u-iv; w) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [F_n(u-iv; w) - F_n(u-iv; w)] \frac{t^n}{n!} \\ &= \frac{e^{ut} (\cos(vt) + i \sin(vt) - \cos(vt) - i \sin(vt))}{1-w(e^t-1)} \\ &= \frac{1}{1-w(e^t-1)} 2ie^{ut} \sin(vt) \end{aligned} \quad (3.9)$$

olur ve burada eşitliğin her tarafı $2i$ ye bölünürse

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(s)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{1-w(e^t-1)} e^{ut} \sin(vt) \quad (3.10)$$

elde edilir [31]. Böylece kosinüs ve sinüs parametrelili Fubini polinomlarının doğurucu fonksiyonları

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(c)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{1-w(e^t-1)} e^{ut} \cos(vt) \quad (3.11)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(s)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{1-w(e^t-1)} e^{ut} \sin(vt) \quad (3.12)$$

ile verilmiş olur [31].

İlk dört $F_n^{(c)}(u, v; w)$ polinomu için

$$\frac{1}{1-w(e^t-1)} e^{ut} \cos(vt)$$

fonksiyonlarının seriye açılması ile

$$F_0^{(c)}(u, v; w) = 1,$$

$$F_1^{(c)}(u, v; w) = u + w,$$

$$F_2^{(c)}(u, v; w) = u^2 - v^2 + w + 2uw + 2w^2,$$

$$F_3^{(c)}(u, v; w) = u^3 - 3uv^2 + w + 3uw + 3u^2w - 3v^2w + 6w^2 + 6uw^2 + 6w^3$$

polinomları bulunur [31].

Aynı şekilde $F_n^{(s)}(u, v; w)$ polinomu için

$$\frac{1}{1-w(e^t-1)} e^{ut} \sin(vt)$$

fonksiyonları seriye açılırsa

$$F_0^{(s)}(u, v; w) = 0,$$

$$F_1^{(s)}(u, v; w) = v,$$

$$F_2^{(s)}(u, v; w) = 2uv + 2vw,$$

$$F_3^{(s)}(u, v; w) = 3u^2v - v^3 + 3vw + 6uvw + 6vw^2$$

polinomları bulunur [31].

Uyarı

(3.8) ve (3.10) doğurucu fonksiyonlarında $u = 0$ alınırsa aşağıda verilen

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(c)}(0, v; w) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{1-w(e^t-1)} \cos(vt) \quad (3.13)$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(s)}(0, v; w) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{1-w(e^t-1)} \sin(vt) \quad (3.14)$$

iki değişkenli polinom ailesi elde edilir [31].

Uyarı

(3.6) ve (3.8) doğurucu fonksiyonlarında $w = -\frac{1}{2}$ alınırsa Tanım 2.3.8 den

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(c)}\left(u, v; -\frac{1}{2}\right) \frac{t^n}{n!} = \frac{2}{e^t+1} e^{ut} \cos(vt) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(c)}(u, v) \frac{t^n}{n!}$$

$$\text{olup } F_n^{(c)}\left(u, v; -\frac{1}{2}\right) = E_n^{(c)}(u, v)$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(s)}\left(u, v; -\frac{1}{2}\right) \frac{t^n}{n!} = \frac{2}{e^t+1} e^{ut} \sin(vt) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(s)}(u, v) \frac{t^n}{n!}$$

$$\text{olup } F_n^{(s)}\left(u, v; -\frac{1}{2}\right) = E_n^{(s)}(u, v)$$

elde edilir [31].

3.2. Bazı Özel Durumlar

Bu bölümde (3.3), (3.11) ile tanımlanan doğurucu fonksiyonlar aracılığıyla ilk önce u yerine 0 ve daha sonra (3.3) fonksiyonunda u yerine $u + iv$, $u - iv$ değerleri yazılarak bazı eşitlikler elde edilmiştir.

1. Durum: $j \in \mathbb{N}_0$ için

$$F_j^{(c)}(0, v; w) = \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \binom{j}{2s} (-1)^s v^{2s} F_{j-2s}(w) \quad (3.15)$$

ve

$j \in \mathbb{N}$ için

$$F_j^{(s)}(0, v; w) = \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} \binom{j}{2s+1} (-1)^s v^{2s+1} F_{j-2s-1}(w) \quad (3.16)$$

özellikleri elde edilmiştir [31]. Burada $F_j(w)$ ler Tanım 2.3.17 daki Fubini polinomlarıdır.

Daha sonra (3.3) fonksiyonunda u yerine $u + iv$ ve $u - iv$ yazılarak

$$\begin{aligned} F_j(u + iv; w) &= \sum_{n=0}^j \binom{j}{n} (u + iv)^{j-n} F_n(w) \\ &= \sum_{n=0}^j \binom{j}{n} (iv)^{j-n} F_n(u; w) \end{aligned} \quad (3.17)$$

ve

$$\begin{aligned} F_j(u - iv; w) &= \sum_{n=0}^j \binom{j}{n} (u - iv)^{j-n} F_n(w) \\ &= \sum_{n=0}^j \binom{j}{n} (-1)^{j-n} (iv)^{j-n} F_n(u; w) \end{aligned} \quad (3.18)$$

eşitlikleri elde edilmiştir [31]. Buradaki $F_n(w)$ ler Tanım 2.3.17 de ki Fubini polinomları ve $F_n(u; w)$ ler ise Tanım 2.3.20 deki iki değişkenli Fubini polinomlarıdır.

2. *Durum:* $v \neq 0$ için $F_n^{(c)}(u, v; w)$ ve $F_n^{(s)}(u, v; w)$ polinomları

$$F_n^{(c)}(u, v; w) = H_n^{(c)}\left(u, v; \frac{1+w}{w}\right) \quad (3.19)$$

$$F_n^{(s)}(u, v; w) = H_n^{(s)}\left(u, v; \frac{1+w}{w}\right) \quad (3.20)$$

eşitliklerini sağlar [31]. Burada $H_n^{(c)}(u, v; w)$ ve $H_n^{(s)}(u, v; w)$ ler sırasıyla Tanım 2.3.11 de verilen kosinüs ve sinüs parametrelili Eulerian tipli polinomlarında $x \rightarrow u, y \rightarrow v, u \rightarrow w$ ve $k_1 = k_2 = \lambda = 1$ seçilmesiyle elde edilen özel durumlardır.

3. *Durum:* $F_n^{(c)}(u, v; w)$ ve $F_n^{(s)}(u, v; w)$ polinomlarında

$$F_n^{(c)}(u, v; w) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k(w) C_{n-k}(u, v) \quad (3.21)$$

$$F_n^{(s)}(u, v; w) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k(w) S_{n-k}(u, v) \quad (3.22)$$

özellikleri elde edilmiştir [31]. Buradaki $C_{n-k}(u, v)$ ve $S_{n-k}(u, v)$ polinomları Tanım 2.3.1 de verilmiştir.

4. *Durum:* $F_n^{(c)}(u, v; w)$ ve $F_n^{(s)}(u, v; w)$ polinomlarında eşitlik (3.11) ve (3.12) doğurucu fonksiyonlarında $n \in \mathbb{N}_0$ için u yerine $u + 1$ yazıldığında aşağıdaki

$$F_n^{(c)}(u+1, v; w) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} F_{n-m}^{(c)}(u, v; w), \quad (3.23)$$

$$F_n^{(s)}(u+1, v; w) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} F_{n-m}^{(s)}(u, v; w) \quad (3.24)$$

özellikler elde edilmiştir [31].

3.3. Kısmi Türevler

(3.11) ve (3.12) ile tanımlanan doğurucu fonksiyonlarında $n \in \mathbb{N}_0$ için $F_n^{(c)}(u, v; w)$ ve $F_n^{(s)}(u, v; w)$ polinomlarının u, v değişkenlerine göre kısmi türevleri yardımıyla aşağıdaki bağıntılar gösterilmiştir.

1. *Durum:* Eşitlik (3.11) de $n \in \mathbb{N}$ için u ya göre kısmi türev alınırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial u} F_n^{(c)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} &= \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{e^{ut} \cos(vt)}{1-w(e^t-1)} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(c)}(u, v; w) \frac{t^{n+1}}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1}^{(c)}(u, v; w) \frac{t^n}{(n-1)!} \end{aligned}$$

olup

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial u} F_n^{(c)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} n F_{n-1}^{(c)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir ki, $\frac{t^n}{n!}$ terimlerinin katsayıları eşitlenirse

$$\frac{\partial}{\partial u} F_n^{(c)}(u, v; w) = n F_{n-1}^{(c)}(u, v; w), \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.25)$$

elde edilmiş olur [31].

Şimdi benzer şekilde, (3.12) ile verilen doğurucu fonksiyonda $n \in \mathbb{N}$ için u değişkenine göre kısmi türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial u} F_n^{(s)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} &= \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{e^{ut} \sin(vt)}{1-w(e^t-1)} \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(s)}(u, v; w) \frac{t^{n+1}}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1}^{(s)}(u, v; w) \frac{t^n}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

olup

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial u} F_n^{(s)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} n F_{n-1}^{(s)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir ki $\frac{t^n}{n!}$ terimlerinin katsayıları eşitlenirse

$$\frac{\partial}{\partial u} F_n^{(s)}(u, v; w) = n F_{n-1}^{(s)}(u, v; w), \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.26)$$

elde edilir [31].

2. *Durum*: Eşitlik (3.11) eşitliğinin $n \in \mathbb{N}$ için v değişkenine göre kısmi türevi alınır ve (3.12) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial v} F_n^{(c)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} &= \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{e^{ut} \cos(vt)}{1-w(e^t-1)} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{1-w(e^t-1)} e^{ut} \cos vt \\
&= \frac{1}{1-w(e^t-1)} e^{ut} (-t) \sin vt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -t \frac{1}{1-w(e^t-1)} e^{ut} \sin vt \\
&= -t \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(s)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

olup

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial v} F_n^{(c)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = - \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(s)}(u, v; w) \frac{t^{n+1}}{n!}$$

elde edilir. Burada n yerine $n - 1$ yazılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial v} F_n^{(c)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = - \sum_{n=1}^{\infty} n F_{n-1}^{(s)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. $\frac{t^n}{n!}$ terimlerinin katsayıları eşitlenirse

$$\frac{\partial}{\partial v} F_n^{(c)}(u, v; w) = -n F_{n-1}^{(s)}(u, v; w), \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.27)$$

elde edilir [31].

Şimdi benzer şekilde eşitlik (3.12) nin v değişkenine göre kısmi türevi alınırsa ve (3.11) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial v} F_n^{(s)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} &= \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{e^{ut} \sin(vt)}{1-w(e^t-1)} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{1-w(e^t-1)} e^{ut} \sin vt \\
&= \frac{1}{1-w(e^t-1)} e^{ut}(t) \cos vt
\end{aligned}$$

$$= t \frac{1}{1-w(e^t-1)} e^{ut} \cos vt$$

$$= t \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(c)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial v} F_n^{(s)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(c)}(u, v; w) \frac{t^{n+1}}{n!}$$

olup n yerine $n - 1$ yazılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial v} F_n^{(s)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1}^{(c)}(u, v; w) \frac{t^n}{(n-1)!} \frac{n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} n F_{n-1}^{(c)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. $\frac{t^n}{n!}$ terimlerinin katsayıları eşitlenirse

$$\frac{\partial}{\partial v} F_n^{(s)}(u, v; w) = n F_{n-1}^{(c)}(u, v; w), \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.28)$$

elde edilir [31].

4. YÜKSEK MERTEBEDEN FUBINI TIPLİ POLİNOMLARIN PARAMETRİK TÜRLERİ

Bu bölümde [30] referansında tanımlanan (2.1) eşitliğinde kompleks değişken ve Euler formülünün kullanılmasıyla $F_n^{(c,r)}(u, v; w)$ kosinüs parametresine bağlı ve $F_n^{(s,r)}(u, v; w)$ sinüs parametresine bağlı iki yeni doğurucu fonksiyona sahip yeni aileler üzerine çalışılmıştır. Burada tanımlanan iki yeni aile [31] referansı ile verilen parametrik türden Fubini polinomlarının r . mertebeden hali ($r \in \mathbb{N}$) olup daha genel durumudur. Bu bölümde verilen bazı özellikler Çetin ve Çekim [32] tarafından “6th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences” konferansında sunulmuştur. Literatürde yoğun bir çalışma alanına sahip olan Fubini tipli polinomlar daha sonra [33] de parametrik türden Apostol tipli Bernoulli, Euler, Genocchi, Fubini polinomlarının birleştirilmiş geniş bir polinom ailesi ile tanımlanmıştır. Burada değişkenler özel olarak seçildiğinde bu bölümde çalışılan r . mertebeden parametrik türden Fubini polinomlarının doğurucu fonksiyonu elde edilip çarpımsal ve türev operatörleri, bazı toplam formülleri ve diferensiyel denklemi incelenmiştir. Bunun yanı sıra kosinüs ve sinüs parametrelili Fubini tipli polinomların bir başka tanımı da Srivastava ve Kızılateş [34] tarafından Tanım 2.3.19 da verilen doğurucu fonksiyonda kompleks bir değişken seçilip Euler formülünün uygulanmasıyla tanımlanmıştır. Daha sonra bazı toplam formülleri, türev bağıntıları, multiliner ve multilateral doğurucu fonksiyonlar elde etmişlerdir. Ayrıca Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler ve Apostol-Genocchi polinomlarını içeren yeni ilişkiler bulmuşlardır. [34] de tanımlanan parametrik türden Fubini tipli polinom ailesinin daha genel hali ise Srivastava ve diğerleri [35] tarafından tanımlanmıştır. Burada çarpımsal ve türev operatörleri, bazı toplam formülleri, diferensiyel denklemi ve türev bağıntıları elde edilip Gould-Hopper, Laguerre ve Hermite-Appell polinomları ve kesikli üstel fonksiyon kullanılarak alt polinom aileleri incelenmiştir. Diğer taraftan Fubini tipli polinomların özel polinom aileleri ile aralarında bazı bağıntılar ve ilişkiler vardır. Örneğin Kılar ve Şimşek [17] tarafından tanımlanan parametrik türden Eulerian tipli polinomların özel seçimlerinde bu bölümde tanımlanan parametrik türden Fubini polinomlar elde edilebilmektedir. Burada Kılar ve Şimşek [17] parametrik türden Eulerian tipli polinomlar için toplam formülleri ve türev bağıntıları elde etmişler. Daha sonra ise bu polinomların Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler ve Apostol-Genocchi sayıları ve polinomlarını ve Stirling sayılarını içeren ilişkiler elde etmişlerdir. Bu bölümde ise $F_n^{(c,r)}(u, v; w)$ ve $F_n^{(s,r)}(u, v; w)$ polinom ailelerinin farklı özellikleri üzerinde durulmuştur.

4.1.1. Tanım

(2.1) eşitliği yardımıyla $i^2 = -1$ olmak üzere

$$F_n^{(c,r)}(u, v; w) = \frac{F_n^{(r)}(u + iv; w) + F_n^{(r)}(u - iv; w)}{2}$$

$$F_n^{(s,r)}(u, v; w) = \frac{F_n^{(r)}(u + iv; w) - F_n^{(r)}(u - iv; w)}{2i}$$

şeklinde ifade edilsin.

(2.1) eşitliğinde x yerine $u+iv$ ve y yerine de w yazılırsa

$$\frac{e^{(u+iv)t}}{(1-w(e^t-1))^r} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(r)}(u+iv; w) \frac{t^n}{n!} \quad (4.1)$$

elde edilir.

Buradan

$$e^{(u+iv)t} = e^{ut} e^{ivt} = e^{ut} (\cos vt + i \sin vt) \quad (4.2)$$

Euler formülü [5] yardımıyla

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(r)}(u+iv; w) \frac{t^n}{n!} &= \frac{e^{(u+iv)t}}{(1-w(e^t-1))^r} \\ &= \frac{e^{ut} (\cos(vt) + i \sin(vt))}{(1-w(e^t-1))^r} \end{aligned} \quad (4.3)$$

elde edilir. Şimdide (2.1) eşitliğinde x yerine $u-iv$ ve y yerine de w yazılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(r)}(u-iv; w) \frac{t^n}{n!} &= \frac{e^{(u-iv)t}}{(1-w(e^t-1))^r} \\
&= \frac{e^{ut}(\cos(vt) - i\sin(vt))}{(1-w(e^t-1))^r}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

olarak bulunur. (4.3) ve (4.4) eşitlikleri toplanırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(r)}(u+iv; w) \frac{t^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(r)}(u-iv; w) \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[F_n^{(r)}(u+iv; w) + F_n^{(r)}(u-iv; w) \right] \frac{t^n}{n!} \\
&= \frac{e^{ut}(\cos(vt) + i\sin(vt) + \cos(vt) - i\sin(vt))}{(1-w(e^t-1))^r} \\
&= \frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} 2e^{ut} \cos(vt)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

olur ve burada eşitliğin 2 ile bölünmesi ile

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} e^{ut} \cos(vt) \tag{4.6}$$

elde edilir [32]. Eşitlik (4.3) den (4.4) çıkarılırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(r)}(u+iv; w) \frac{t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(r)}(u-iv; w) \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[F_n^{(r)}(u+iv; w) - F_n^{(r)}(u-iv; w) \right] \frac{t^n}{n!} \\
&= \frac{e^{ut}(\cos(vt) + i\sin(vt) - \cos(vt) - i\sin(vt))}{(1-w(e^t-1))^r}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} 2ie^{ut} \sin(vt) \quad (4.7)$$

olur ve burada eşitliğin her tarafı $2i$ ye bölünürse

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(s,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} e^{ut} \sin(vt) \quad (4.8)$$

elde edilir [32]. Böylece yüksek mertebeden Fubini polinomlarının kosinüs ve sinüs parametrelili doğurucu fonksiyonları

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} e^{ut} \cos(vt),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(s,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} e^{ut} \sin(vt)$$

ile tanımlanmış olur [32]. İlk dört $F_n^{(c,r)}(u, v; w)$ polinomu için

$$\frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} e^{ut} \cos(vt)$$

fonksiyonlarının seriye açılması ile

$$F_0^{(c,r)}(u, v; w) = 1,$$

$$F_1^{(c,r)}(u, v; w) = u + rw,$$

$$F_2^{(c,r)}(u, v; w) = -v^2 + 2rvw + u^2 + rw - rw^2(r-1) + 2r^2w^2,$$

$$F_3^{(c,r)}(u, v; w) = u^3 - 3uv^2 + rw(-3v^2 + 2w^2 + 3w + 1) + 3rw(u^2 + uw + u) \\ + 3r^2w^2(u + w + 1) + r^3w^3$$

polinomları bulunur [32]. Aynı şekilde $F_n^{(s,r)}(u, v; w)$ polinomu için

$$\frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} e^{ut} \sin(vt)$$

fonksiyonları seriye açılırsa

$$F_0^{(s,r)}(u, v; w) = 0,$$

$$F_1^{(s,r)}(u, v; w) = v,$$

$$F_2^{(s,r)}(u, v; w) = 2uv + 2r w v,$$

$$F_3^{(s,r)}(u, v; w) = -v^3 + 6r w u v + 3u^2 v + 3r w v - 3r w^2 v(r-1) + 6r^2 w^2 v$$

polinomları bulunur [32].

Uyarı

(4.6) ve (4.8) doğurucu fonksiyonlarında $u = 0$ alınırsa aşağıdaki polinomlar aileleri

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(c,r)}(0, v; w) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} \cos(vt) \quad (4.9)$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(s,r)}(0, v; w) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} \sin(vt) \quad (4.10)$$

elde edilir [32].

Uyarı

(4.6) ve (4.8) doğurucu fonksiyonlarında $w = -\frac{1}{2}$ alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(c,r)}\left(u, v; -\frac{1}{2}\right) \frac{t^n}{n!} = \frac{2^r}{(e^t + 1)^r} e^{ut} \cos(vt) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(c,r)}(u, v) \frac{t^n}{n!}$$

olup

$$F_n^{(c,r)}\left(u, v; -\frac{1}{2}\right) = E_n^{(c,r)}(u, v)$$

eşitliği ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(s,r)}\left(u, v; -\frac{1}{2}\right) \frac{t^n}{n!} = \frac{2^r}{(e^t + 1)^r} e^{ut} \sin(vt) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(s,r)}(u, v) \frac{t^n}{n!}$$

olup

$$F_n^{(s,r)}\left(u, v; -\frac{1}{2}\right) = E_n^{(s,r)}(u, v) \text{ eşitliği}$$

elde edilir [32]. Buradaki $E_n^{(c,r)}(u, v)$ ve $E_n^{(s,r)}(u, v)$ ler Tanım 2.3.9 da tanımlanmıştır.

4.1. Teorem

r . mertebeden kosinüs Fubini polinomu $j \in \mathbb{N}_0$ için

$$F_j^{(c,r)}(0, v; w) = \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \binom{j}{2s} (-1)^s v^{2s} F_{j-2s}^{(r)}(w) \quad (4.11)$$

ve

r . mertebeden sinüs Fubini polinomu $j \in \mathbb{N}$ için

$$F_j^{(s,r)}(0, v; w) = \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} \binom{j}{2s+1} (-1)^s v^{2s+1} F_{j-2s-1}^{(r)}(w) \quad (4.12)$$

özelliklerini sağlar. Buradaki $F_j^{(r)}(w)$ ler (2.2) de verilmiştir.

İspat

(4.6) eşitliğinde $u = 0$ alınıp eşitlik (2.2) ve $\cos(vt)$ fonksiyonunun Taylor seri açılımının kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} F_j^{(c,r)}(0, v; w) \frac{t^j}{j!} &= \frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} \cos(vt) \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} F_j^{(r)}(w) \frac{t^j}{j!} \right) \left(\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{v^{2s} t^{2s}}{(2s)!} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $j \rightarrow j - 2s$ yazılır ve Lemma 2.2.1 kullanılırsa

$$\sum_{j=0}^{\infty} F_j^{(c,r)}(0, v; w) \frac{t^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \binom{j}{2s} (-1)^s v^{2s} F_{j-2s}^{(r)}(w) \right) \frac{t^j}{j!} \quad (4.13)$$

elde edilir. $\frac{t^j}{j!}$ terimlerinin katsayıları eşitlenirse (4.11) eşitliği bulunur. Benzer şekilde (4.8)

eşitliğinde $u = 0$ alınıp eşitlik (2.2) ve $\sin(vt)$ fonksiyonunun Taylor seri açılımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} F_j^{(s,r)}(0, v; w) \frac{t^j}{j!} &= \frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} \sin(vt) \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} F_j^{(r)}(w) \frac{t^j}{j!} \right) \left(\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{v^{2s+1} t^{2s+1}}{(2s+1)!} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $j \rightarrow j - 2s - 1$ yazılırsa ve Lemma 2.2.1 kullanılırsa

$$\sum_{j=1}^{\infty} F_j^{(s,r)}(0, v; w) \frac{t^j}{j!} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} \binom{j}{2s+1} (-1)^s v^{2s+1} F_{j-2s-1}^{(r)}(w) \right) \frac{t^j}{j!} \quad (4.14)$$

elde edilir. $\frac{t^j}{j!}$ terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa (4.12) eşitliği bulunur. İspat tamamlanmış olur.

Uyarı

[17] de verilen kaynakta Teorem 4 ve Teorem 5 de değişkenlerin özel seçimleri ile (4.11) ve (4.12) eşitliklerine indirgendiği görülmektedir.

4.2. Teorem

r . mertebeden Fubini tipli polinomlar $j \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} F_j^{(r)}(u + iv; w) &= \sum_{n=0}^j \binom{j}{n} (u + iv)^{j-n} F_n^{(r)}(w) \\ &= \sum_{n=0}^j \binom{j}{n} (iv)^{j-n} F_n^{(r)}(u; w) \end{aligned} \quad (4.15)$$

ve

$$\begin{aligned} F_j^{(r)}(u - iv; w) &= \sum_{n=0}^j \binom{j}{n} (u - iv)^{j-n} F_n^{(r)}(w) \\ &= \sum_{n=0}^j \binom{j}{n} (-1)^{j-n} (iv)^{j-n} F_n^{(r)}(u; w) \end{aligned} \quad (4.16)$$

açık gösterimlerine sahiptir [32]. Buradaki $F_n^{(r)}(w)$ ler (2.2) de ve $F_n^{(r)}(u; w)$ lar (2.1) de verilmiştir.

İspat

(2.1) ile verilen doğurucu fonksiyonda

$$\sum_{j=0}^{\infty} F_j^{(r)}(u+iv; w) \frac{t^j}{j!} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(u+iv)^j t^j}{j!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(r)}(w) \frac{t^n}{n!} \right)$$

olup j yerine $j - n$ yazılırsa (Lemma 2.2.1 den)

$$\sum_{j=0}^{\infty} F_j^{(r)}(u+iv; w) \frac{t^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^j \frac{F_n^{(r)}(w) (u+iv)^{j-n}}{(j-n)! n!} \right) t^j$$

elde edilir. Buradan $\frac{t^j}{j!}$ terimlerinin katsayıları eşitlenirse

$$F_j^{(r)}(u+iv; w) = \sum_{n=0}^j \binom{j}{n} (u+iv)^{j-n} F_n^{(r)}(w)$$

elde edilir. Daha sonra

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} F_j^{(r)}(u+iv; w) \frac{t^j}{j!} &= e^{ivt} \frac{e^{ut}}{(1-w(e^t-1))^r} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ivt)^j}{j!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(r)}(u; w) \frac{t^n}{n!} \right) \end{aligned}$$

olduğundan, j yerine $j - n$ yazıldığında (Lemma 2.2.1 den)

$$\sum_{j=0}^{\infty} F_j^{(r)}(u+iv; w) \frac{t^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^j \frac{(iv)^{j-n} F_n^{(r)}(u; w)}{(j-n)! n!} t^j$$

olup $\frac{t^j}{j!}$ lerin katsayıları eşitlenirse

$$F_j^{(r)}(u + iv; w) = \sum_{n=0}^j \binom{j}{n} (iv)^{j-n} F_n^{(r)}(u; w)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} F_j^{(r)}(u - iv; w) \frac{t^j}{j!} &= e^{(u-iv)t} \frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(u-iv)^j t^j}{j!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(r)}(w) \frac{t^n}{n!} \right) \end{aligned}$$

olup j yerine $j - n$ yazılırsa (Lemma 2.2.1 den)

$$\sum_{j=0}^{\infty} F_j^{(r)}(u - iv; w) \frac{t^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^j \frac{(u-iv)^{j-n} F_n^{(r)}(w)}{(j-n)!n!} \right) t^j$$

elde edilir ki $\frac{t^j}{j!}$ lerin katsayıları eşitlenirse

$$F_j^{(r)}(u - iv; w) = \sum_{n=0}^j \binom{j}{n} (u-iv)^{j-n} F_n^{(r)}(w)$$

bulunur. Benzer şekilde doğurucu fonksiyondan yola çıkılarak

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} F_j^{(r)}(u - iv; w) \frac{t^j}{j!} &= e^{-ivt} \frac{e^{ut}}{(1-w(e^t-1))^r} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-ivt)^j}{j!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(r)}(u; w) \frac{t^n}{n!} \right) \end{aligned}$$

elde edilir ve j yerine $j - n$ alınır (Lemma 2.2.1 den)

$$\sum_{j=0}^{\infty} F_j^{(r)}(u-iv; w) \frac{t^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^j \frac{(-1)^{j-n} (iv)^{j-n} F_n^{(r)}(u; w)}{(j-n)!n!} t^j$$

olup $\frac{t^j}{j!}$ terimlerinin katsayıları eşitlenirse

$$F_j^{(r)}(u-iv; w) = \sum_{n=0}^j \binom{j}{n} (-1)^{j-n} (iv)^{j-n} F_n^{(r)}(u; w)$$

elde edilir.

4.3. Teorem

$F_n^{(c,r)}(u, v; w)$ polinomu

$$F_n^{(c,r)}(u+k, v; w) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} F_{n-m}^{(c,r)}(u, v; w) k^m \quad (4.17)$$

özelliğini sağlar [32].

İspat

(4.6) doğurucu fonksiyonu ile verilen fonksiyonda $j \in \mathbb{N}$ için u yerine $u+k$ yazılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(c,r)}(u+k, v; w) \frac{t^n}{n!} &= \frac{e^{(u+k)t} \cos(vt)}{(1-w(e^t-1))^r} \\ &= \frac{e^{ut} \cos(vt)}{(1-w(e^t-1))^r} e^{kt} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} F_n^{(c,r)}(u, v; w) k^m \frac{t^{n+m}}{n!m!} \end{aligned}$$

olup, n yerine $n-m$ yazılırsa (Lemma 2.2.1 den)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(c,r)}(u+k, v; w) \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n F_{n-m}^{(c,r)}(u, v; w) k^m \frac{t^n}{(n-m)! m! n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} F_{n-m}^{(c,r)}(u, v; w) k^m \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\frac{t^n}{n!}$ terimleri karşılaştırılırsa

$$F_n^{(c,r)}(u+k, v; w) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} F_{n-m}^{(c,r)}(u, v; w) k^m$$

olarak bulunur.

Sonuç

Teorem 4.3 de $k=1$ için

$$F_n^{(c,r)}(u+1, v; w) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} F_{n-m}^{(c,r)}(u, v; w)$$

elde edilirken, $k=u$ için

$$F_n^{(c,r)}(2u, v; w) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} F_{n-m}^{(c,r)}(u, v; w) u^m$$

elde edilir [32].

4.4. Teorem

$F_n^{(s,r)}(u, v; w)$ polinomları

$$F_n^{(s,r)}(u+k, v; w) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} F_{n-m}^{(s,r)}(u, v; w) k^m \quad (4.18)$$

özelliğini sağlar [32].

İspat

(4.8) doğurucu fonksiyonunda u yerine $u + k$ yazılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(s,r)}(u+k, v; w) \frac{t^n}{n!} &= \frac{e^{(u+k)t} \sin(vt)}{(1-w(e^t-1))^r} \\ &= \frac{e^{ut} \sin(vt)}{(1-w(e^t-1))^r} e^{kt} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} F_n^{(s,r)}(u, v; w) k^m \frac{t^{n+m}}{n!.m!} \end{aligned}$$

olup, n yerine $n - m$ yazılırsa (Lemma 2.2.1 den)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(s,r)}(u+k, v; w) \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n F_{n-m}^{(s,r)}(u, v; w) k^m \frac{t^n}{(n-m)!m! n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} F_{n-m}^{(s,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} k^m \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\frac{t^n}{n!}$ terimlerinin katsayıları eşitlenirse

$$F_n^{(s,r)}(u+k, v; w) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} F_{n-m}^{(s,r)}(u, v; w) k^m$$

elde edilir.

Sonuç

$k=1$ için Teorem 4.4 de

$$F_n^{(s,r)}(u+1, v; w) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} F_{n-m}^{(s,r)}(u, v; w)$$

elde edilirken, $k = u$ için

$$F_n^{(s,r)}(2u, v; w) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} F_{n-m}^{(s,r)}(u, v; w) u^m$$

elde edilir [32].

4.5. Teorem

$F_n^{(c,r)}$ ($u, v; w$) polinomları

$$F_n^{(c,r+\sigma)}(u, v; w) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{n-k}^{(c,r+\sigma)}(u, v; w) F_k^{(\sigma)}(0; w), \quad \sigma \in \mathbb{N} \quad (4.19)$$

özelliğini sağlar [32]. Buradaki $F_k^{(\sigma)}(0; w)$ lar (2.1) de verilmiştir.

İspat

(4.6) ile verilen doğurucu fonksiyonunda r yerine $r + \sigma$ alınırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(c,r+\sigma)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} &= \frac{e^{ut} \cos(vt)}{(1-w(e^t-1))^{r+\sigma}} \\ &= e^{ut} \cos(vt) \frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} \frac{1}{(1-w(e^t-1))^\sigma} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(\sigma)}(0; w) \frac{t^k}{k!} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada n yerine $n - k$ yazılırsa (Lemma 2.2.1 den)

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(c,r+\sigma)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{n-k}^{(c,r)}(u, v; w) F_k^{(\sigma)}(0; w) \frac{t^n}{n!}$$

olup, $\frac{t^n}{n!}$ terimlerinin katsayıları eşitlenirse

$$F_n^{(c,r+\sigma)}(u, v; w) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{n-k}^{(c,r)}(u, v; w) F_k^{(\sigma)}(0; w)$$

elde edilir.

Sonuç

Teorem 4.5 de $\sigma = 1$ için

$$F_n^{(c,r+1)}(u, v; w) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{n-k}^{(c,r)}(u, v; w) F_k(0; w)$$

elde edilirken, $\sigma = r$ için

$$F_n^{(c,2r)}(u, v; w) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{n-k}^{(c,r)}(u, v; w) F_k^{(r)}(0; w)$$

elde edilir [32].

4.6. Teorem

$F_n^{(s,r)}$ polinomları

$$F_n^{(s,r+\sigma)}(u, v; w) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{n-k}^{(s,r)}(u, v; w) F_k^{(\sigma)}(0; w), \quad \sigma \in \mathbb{N} \quad (4.20)$$

özelliğini sağlar [32]. Buradaki $F_k^{(\sigma)}(0; w)$ lar (2.1) de verilmiştir.

İspat

(4.8) ile verilen doğurucu fonksiyonda r yerine $r + \sigma$ yazılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(s,r+\sigma)}(u,v;w) \frac{t^n}{n!} &= \frac{e^{ut} \sin(vt)}{(1-w(e^t-1))^{r+\sigma}} \\ &= e^{ut} \sin(vt) \frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} \frac{1}{(1-w(e^t-1))^\sigma} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(s,r)}(u,v;w) \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(\sigma)}(0;w) \frac{t^k}{k!} \right) \end{aligned}$$

olup n yerine $n - k$ yazılırsa (Lemma 2.2.1 den)

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(s,r+\sigma)}(u,v;w) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{n-k}^{(s,r)}(u,v;w) F_k^{(\sigma)}(0;w) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. $\frac{t^n}{n!}$ terimlerinin katsayıları eşitlenirse

$$F_n^{(s,r+\sigma)}(u,v;w) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{n-k}^{(s,r)}(u,v;w) F_k^{(\sigma)}(0;w)$$

elde edilir.

Sonuç

$\sigma = 1$ için Teorem 4.6 da

$$F_n^{(s,r+1)}(u,v;w) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{n-k}^{(s,r)}(u,v;w) F_k(0;w)$$

elde edilirken, $\sigma = r$ için

$$F_n^{(s,r)}(u, v; w) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{n-k}^{(s,r)}(u, v; w) F_k^{(r)}(0; w)$$

elde edilir [32].

4.7. Teorem

$F_n^{(c,r)}(u, v; w)$ ve $F_n^{(s,r)}(u, v; w)$ polinom aileleri

$$F_n^{(s,r)}(u, 2v; w) = 2 \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1} v^{2k+1} F_{n-2k-1}^{(c,r)}(u, v; w), \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.21)$$

özelliği sağlar [32].

İspat

(4.6) ile verilen doğurucu fonksiyonun her iki tarafı $2 \sin(vt)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} 2 \sin(vt) \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} &= 2 \sin(vt) \frac{e^{ut} \cos(vt)}{(1-w(e^t-1))^r} \\ &= \frac{\sin(2vt)}{(1-w(e^t-1))^r} \end{aligned}$$

elde edilir. (4.8) doğurucu fonksiyonundan dolayı

$$2 \sin(vt) \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n^{(s,r)}(u, 2v; w) t^n}{n!}$$

elde edilir. Diğer taraftan eşitliğin sol tarafında $\sin(vt)$ fonksiyonunun Taylor serisi kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(s,r)}(u, 2v; w) \frac{t^n}{n!} = \left(2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k v^{2k+1} t^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} \right)$$

olup n yerine $n - 2k - 1$ yazılırsa (Lemma 2.2.1 den)

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} F_{n-2k-1}^{(c,r)}(u, v; w) \frac{(-1)^k v^{2k+1}}{(2k+1)!} \frac{1}{(n-2k-1)!} \frac{n!}{n!} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} F_n^{(s,r)}(u, 2v; w) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. $\frac{t^n}{n!}$ in katsayıları eşitlenirse

$$F_n^{(s,r)}(u, 2v; w) = 2 \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} v^{2k+1} F_{n-2k-1}^{(c,r)}(u, v; w) (-1)^k$$

elde edilir.

4.8. Teorem

$F_n^{(s,r)}(u, v; w)$ sinüs parametrelili Fubini polinomları

$$F_n^{(s,r)}(u, 2v; w) = 2 \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} v^{2k} F_{n-2k}^{(s,r)}(u, v; w) \quad (4.22)$$

özelliğini sağlar [32].

İspat

(4.8) ile verilen doğurucu fonksiyonunun her iki tarafı $2\cos(vt)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} 2\cos(vt) \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(s,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} &= 2\cos(vt) \frac{e^{ut} \sin(vt)}{(1-w(e^t-1))^r} \\ &= \frac{e^{ut}}{(1-w(e^t-1))^r} \sin(2vt) \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin sol tarafında $\cos(vt)$ fonksiyonunun Taylor açılımı kullanılırsa ve sağ tarafında (4.8) eşitliğinden dolayı

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(s,r)}(u, 2v; w) \frac{t^n}{n!} = 2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k v^{2k} t^{2k}}{(2k)!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(s,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} \right)$$

elde edilir. Burada n yerine $n - 2k$ yazılırsa (Lemma 2.2.1 den) ve $\frac{t^n}{n!}$ in katsayıları eşitlenirse

$$F_n^{(s,r)}(u, 2v; w) = 2 \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} v^{2k} F_{n-2k}^{(s,r)}(u, v; w)$$

elde edilir.

4.9. Teorem

$n \in \mathbb{N}$ için $F_n^{(c,r)}(u, v; w)$ ve $F_n^{(s,r)}(u, v; w)$ polinomları

$$\frac{\partial}{\partial u} F_n^{(c,r)}(u, v; w) = n F_{n-1}^{(c,r)}(u, v; w) \quad (4.23)$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial u} F_n^{(s,r)}(u, v; w) = n F_{n-1}^{(s,r)}(u, v; w) \quad (4.24)$$

özelliklerini sağlar.

İspat

(4.6) ile verilen doğurucu fonksiyonda $n \in \mathbb{N}$ için u ya göre kısmi türev alınırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial u} F_n^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{e^{ut} \cos(vt)}{(1-w(e^t-1))^r} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= t \frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} e^{ut} \cos vt \\
&= t \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^{n+1}}{n!}
\end{aligned}$$

olup n yerine $n - 1$ yazılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial u} F_n^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} n F_{n-1}^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir ki $\frac{t^n}{n!}$ terimlerinin katsayıları eşitlenirse

$$\frac{\partial}{\partial u} F_n^{(c,r)}(u, v; w) = n F_{n-1}^{(c,r)}(u, v; w)$$

olarak bulunur.

(4.8) ile verilen doğurucu fonksiyonda $n \in \mathbb{N}$ için u değişkenine göre kısmi türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial u} F_n^{(s,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} &= \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{e^{ut} \sin(vt)}{(1-w(e^t-1))^r} \right] \\
&= t \frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} e^{ut} \sin(vt) \\
&= t \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(s,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(s,r)}(u, v; w) \frac{t^{n+1}}{n!}$$

olup n yerine $n - 1$ alınırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial u} F_n^{(s,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} n F_{n-1}^{(s,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir ki $\frac{t^n}{n!}$ terimlerinin katsayıları eşitlenirse

$$\frac{\partial}{\partial u} F_n^{(s,r)}(u, v; w) = n F_{n-1}^{(s,r)}(u, v; w), \quad n \in \mathbb{N}$$

olarak bulunur.

4.10. Teorem

$n, m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $n \geq m$ için $F_n^{(c,r)}(u, v; w)$ ve $F_n^{(s,r)}(u, v; w)$ polinomları

$$\frac{\partial^m}{\partial u^m} F_n^{(c,r)}(u, v; w) = \frac{n!}{(n-m)!} F_{n-m}^{(c,r)}(u, v; w) \quad (4.25)$$

ve

$$\frac{\partial^m}{\partial u^m} F_n^{(s,r)}(u, v; w) = \frac{n!}{(n-m)!} F_{n-m}^{(s,r)}(u, v; w) \quad (4.26)$$

özelliklerini sağlar.

İspat

Teorem 4.9 dan yararlanarak kosinüs-Fubini polinomunun u değişkenine göre m kez türev alınır

$$\frac{\partial}{\partial u} F_n^{(c,r)}(u, v; w) = nF_{n-1}^{(c,r)}(u, v; w)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} F_n^{(c,r)}(u, v; w) = n \frac{\partial}{\partial u} F_{n-1}^{(c,r)}(u, v; w) = n(n-1)F_{n-2}^{(c,r)}(u, v; w)$$

$$\frac{\partial^m}{\partial u^m} F_n^{(c,r)}(u, v; w) = n(n-1)\dots(n-m+1)F_{n-m}^{(c,r)}(u, v; w) = \frac{n!}{(n-m)!} F_{n-m}^{(c,r)}(u, v; w)$$

elde edilir. Benzer şekilde Teorem 4.9 dan yararlanarak sinüs-Fubini polinomunun u değişkenine göre m kez türev alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial u} F_n^{(s,r)}(u, v; w) = nF_{n-1}^{(s,r)}(u, v; w)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} F_n^{(s,r)}(u, v; w) = n \frac{\partial}{\partial u} F_{n-1}^{(s,r)}(u, v; w) = n(n-1)F_{n-2}^{(s,r)}(u, v; w)$$

$$\frac{\partial^m}{\partial u^m} F_n^{(s,r)}(u, v; w) = n(n-1)\dots(n-m+1)F_{n-m}^{(s,r)}(u, v; w) = \frac{n!}{(n-m)!} F_{n-m}^{(s,r)}(u, v; w)$$

elde edilir.

4.11. Teorem

$n \in \mathbb{N}$ için $F_n^{(c,r)}(u, v; w)$ ve $F_n^{(s,r)}(u, v; w)$ polinom aileleri

$$\frac{\partial}{\partial v} F_n^{(c,r)}(u, v; w) = -nF_{n-1}^{(s,r)}(u, v; w) \quad (4.27)$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial v} F_n^{(s,r)}(u, v; w) = nF_{n-1}^{(c,r)}(u, v; w) \quad (4.28)$$

özelliklerini sağlar.

İspat

(4.6) ile verilen doğurucu fonksiyonda $n \in \mathbb{N}$ için v değişkenine göre kısmi türevi alınır ve (4.8) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial v} F_n^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} &= \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{e^{ut} \cos(vt)}{(1-w(e^t-1))^r} \right] \\
 &= \frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} e^{ut} (-t) \sin(vt) \\
 &= -t \frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} e^{ut} \sin(vt) \\
 &= -t \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(s,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} \\
 &= -\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(s,r)}(u, v; w) \frac{t^{n+1}}{n!}
 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada n yerine $n - 1$ yazılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial v} F_n^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = -n \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1}^{(s,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!}$$

olarak bulunur. $\frac{t^n}{n!}$ terimlerinin katsayıları eşitlenirse

$$\frac{\partial}{\partial v} F_n^{(c,r)}(u, v; w) = -n F_{n-1}^{(s,r)}(u, v; w), \quad n \in \mathbb{N}$$

elde edilir. Şimdi benzer şekilde (4.8) ile verilen doğurucu fonksiyonun v değişkenine göre kısmi türevi alınır ve (4.6) doğurucu fonksiyonu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial v} F_n^{(s,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} &= \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{e^{ut} \sin(vt)}{(1-w(e^t-1))^r} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} e^{ut} \sin(vt) \\
&= t \frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} e^{ut} \cos(vt) \\
&= t \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^{n+1}}{n!}
\end{aligned}$$

olup, n yerine $n - 1$ yazılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial v} F_n^{(s,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1}^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{(n-1)!} \frac{n}{n} = n \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1}^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!}$$

olarak bulunur. $\frac{t^n}{n!}$ terimlerinin katsayıları eşitlenirse

$$\frac{\partial}{\partial v} F_n^{(s,r)}(u, v; w) = n F_{n-1}^{(c,r)}(u, v; w), \quad n \in \mathbb{N}$$

elde edilir.

4.12. Teorem

$F_n^{(s,r)}(u, v; w)$ polinomları

$$\sum_{k=0}^n x^k F_{n-k}^{(s,r)}(u, 2v; w) = 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_{n-k}(x, v) F_k^{(c,r)}(u, v; w) \quad (4.29)$$

özelliğini sağlar. Buradaki $S_{n-k}(x, v)$ polinomları Tanım 2.3.1 de verilmiştir.

İspat

(4.8) ile verilen doğurucu fonksiyonda v yerine $2v$ yazılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n F_n^{(s,r)}(u, 2v; w) &= \frac{e^{ut} \sin(2vt)}{(1-w(e^t-1))^r} \\ &= \frac{2e^{ut} \sin(vt) \cos(vt)}{(1-w(e^t-1))^r} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı e^{xt} ile çarpılırsa

$$e^{xt} \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(s,r)}(u, 2v; w) \frac{t^n}{n!} = 2e^{xt} \sin(vt) \frac{e^{ut}}{(1-w(e^t-1))^r} \cos(vt)$$

elde edilir. Burada Tanım 2.3.1 in ve (4.6) doğurucu fonksiyonunun yerine yazılmasıyla

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k t^k}{k!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(s,r)}(u, 2v; w) \frac{t^n}{n!} \right) = 2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n(x, v) \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^k}{k!} \right)$$

olup, n yerine $n - k$ yazılırsa (Lemma 2.2.1 den)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k F_{n-k}^{(s,r)}(u, 2v; w) \frac{t^n}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_{n-k}(x, v) F_k^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir ve $\frac{t^n}{n!}$ terimlerinin katsayıları eşitlenirse

$$\sum_{k=0}^n x^k F_{n-k}^{(s,r)}(u, 2v; w) = 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_{n-k}(x, v) F_k^{(c,r)}(u, v; w)$$

olarak bulunur.

4.13. Teorem

$F_n^{(c,r)}(u, v; w)$ ve $F_n^{(s,r)}(u, v; w)$ polinomları

$$F_n^{(c,r)}(u, v; w) = H_n^{(c,r)}\left(u, v; \frac{1+w}{w}\right) \quad (4.30)$$

$$F_n^{(s,r)}(u, v; w) = H_n^{(s,r)}\left(u, v; \frac{1+w}{w}\right) \quad (4.31)$$

özelliklerini sağlar. Burada Tanım 2.3.11 de verilen doğurucu fonksiyonlarında $x \rightarrow u$, $y \rightarrow v$, $u \rightarrow w$, $k_1 = k_2 = r$ ve $\lambda = 1$ alınmasıyla $H_n^{(c,r)}(u, v; w)$ ve $H_n^{(s,r)}(u, v; w)$ polinomları

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = \left(\frac{1-w}{e^t - w}\right)^r e^{ut} \cos(vt)$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(s,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = \left(\frac{1-w}{e^t - w}\right)^r e^{ut} \sin(vt)$$

doğurucu fonksiyonları ile gösterilmektedir.

İspat

(4.6) ile verilen doğurucu fonksiyonun aşağıdaki şekilde düzenlenmesi ile

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} e^{ut} \cos(vt) \\ &= \left(\frac{1-\frac{1+w}{w}}{e^t - \frac{1+w}{w}}\right)^r e^{ut} \cos(vt) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada Tanım 2.3.11 de verilen doğurucu fonksiyonu göz önüne alındığında

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(c,r)} \left(u, v; \frac{1+w}{w} \right) \frac{t^n}{n!}$$

olarak bulunur. $\frac{t^n}{n!}$ in katsayıları eşitlenirse (4.30) elde edilir. Şimdi ise (4.8) doğurucu fonksiyonunda

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(s,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} e^{ut} \sin(vt) \\ &= \left(\frac{1-\frac{1+w}{w}}{e^t - \frac{1+w}{w}} \right)^r e^{ut} \sin(vt) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(s,r)} \left(u, v; \frac{1+w}{w} \right) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

olup, $\frac{t^n}{n!}$ in katsayıları eşitlenirse (4.31) elde edilir.

4.14. Teorem

$F_n^{(c,r)}(u, v; w)$ ve $F_n^{(s,r)}(u, v; w)$ polinomları

$$F_n^{(c,r)}(u, v; w) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k^{(r)}(w) C_{n-k}(u, v) \quad (4.32)$$

ve

$$F_n^{(s,r)}(u, v; w) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k^{(r)}(w) S_{n-k}(u, v) \quad (4.33)$$

özelliklerini sağlar. Burada $F_k^{(r)}(w)$ polinomları Tanım 2.3.21 ve $C_{n-k}(u, v)$, $S_{n-k}(u, v)$ polinomları Tanım 2.3.1 ile verilmiştir.

İspat

(4.6) doğurucu fonksiyonunda ve Tanım 2.3.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} &= e^{ut} \cos(vt) \frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n(u, v) \frac{t^n}{n!} \right) \left(\frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} \right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n(u, v) \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(r)}(w) \frac{t^k}{k!} \right) \end{aligned}$$

olup n yerine $(n - k)$ yazılırsa (Lemma 2.2.1 den)

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} C_{n-k}(u, v) F_k^{(r)}(w) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Burada $\frac{t^n}{n!}$ terimlerinin katsayıları eşitlenirse

$$F_n^{(c,r)}(u, v; w) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k^{(r)}(w) C_{n-k}(u, v)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde (4.8) doğurucu fonksiyonunda ve Tanım 2.3.1 kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(s,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = e^{ut} \sin(vt) \frac{1}{(1-w(e^t-1))^r}$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n(u, v) \frac{t^n}{n!} \right) \left(\frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} \right)$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n(u, v) \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(r)}(w) \frac{t^k}{k!} \right)$$

olup n yerine $(n - k)$ yazılırsa (Lemma 2.2.1 den)

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(s,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_{n-k}(u, v) F_k^{(r)}(w) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir ki $\frac{t^n}{n!}$ terimlerinin katsayıları eşitlenirse

$$F_n^{(c,r)}(u, v; w) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k^{(r)}(w) S_{n-k}(u, v)$$

olarak bulunur.

4.15. Teorem

$F_n^{(c,r)}(u, v; w)$ polinomları

$$F_n^{(c,r)}(u, v; w) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} C_{n-r}(u, v) \sum_{k=0}^m (r)_k w^k S_2(m, k) \quad (4.34)$$

özelliğini sağlar. Burada $C_n(u, v)$ polinomları Tanım 2.3.1 ve $S_2(m, k)$ ikinci tür Stirling sayıları Tanım 2.3.13 ile verilmiştir [32].

İspat

(4.6) doğurucu fonksiyonunda Tanım 2.3.1, Tanım 2.3.13 ve

$$\frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} = (1-w(e^t-1))^{-r} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{r}{k} w^k (e^t-1)^k}{k!}$$

seri açılımı kullanılarak yerine yazıldığında

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n(u, v) \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{r}{k} w^k (e^t-1)^k}{k!} \right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n(u, v) \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{r}{k} w^k}{k!} \right) \left(\sum_{m=k}^{\infty} k! S_2(m, k) \frac{t^m}{m!} \right)$$

olup n yerine $n - m$ yazılırsa (Lemma 2.2.1 den)

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} C_{n-m}(u, v) \sum_{k=0}^m \binom{r}{k} w^k S_2(m, k) \right) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. $\frac{t^n}{n!}$ in katsayıları eşitlenirse

$$F_n^{(c,r)}(u, v; w) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} C_{n-r}(u, v) \sum_{k=0}^m \binom{r}{k} w^k S_2(m, k)$$

olarak bulunur.

4.16. Teorem

$F_n^{(s,r)}(u, v; w)$ polinomları

$$F_n^{(s,r)}(u, v; w) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} S_{n-r}(u, v) \sum_{k=0}^m \binom{r}{k} w^k S_2(m, k) \quad (4.35)$$

özelliğini sağlar [32]. Burada $S_n(u, v)$ polinomları Tanım 2.3.1 ile $S_2(m, k)$ ikinci tür Stirling sayıları Tanım 2.3.13 ile tanımlanmıştır.

İspat

(4.8) doğurucu fonksiyonunda Tanım 2.3.1, Tanım 2.3.13 ve

$$\frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} = (1-w(e^t-1))^{-r} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{r}{k} w^k (e^t-1)^k}{k!}$$

seri açılımı kullanılarak yerine yazıldığında

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(s,r)}(u,v;w) \frac{t^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n(u,v) \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{r}{k} w^k (e^t-1)^k}{k!} \right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(s,r)}(u,v;w) \frac{t^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n(u,v) \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{r}{k} w^k}{k!} \right) \left(\sum_{m=k}^{\infty} k! S_2(m,k) \frac{t^m}{m!} \right)$$

olup n yerine $n - m$ yazılırsa (Lemma 2.2.1 den)

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(s,r)}(u,v;w) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} S_{n-m}(u,v) \sum_{k=0}^m \binom{r}{k} w^k S_2(m,k) \right) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. $\frac{t^n}{n!}$ in katsayıları eşitlenirse

$$F_n^{(s,r)}(u,v;w) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} S_{n-r}(u,v) \sum_{k=0}^m \binom{r}{k} w^k S_2(m,k)$$

olarak bulunur.

5. YÜKSEK MERTEBEDEN FUBINI TIPLİ APPELL POLİNOMLARIN PARAMETRİK TÜRLERİ VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde (4.6) ve (4.8) doğurucu fonksiyonları ile tanıtilan Fubini tipli polinom ailelerinin yeni bir genel hali Appell polinomları yardımıyla tanımlanacaktır. Böylece geniş iki yeni aile elde edilecektir. Açık gösterimleri elde edilip ardından yeni doğurucu fonksiyonlar yardımıyla polinomların determinant gösterimleri elde edilecektir. Ayrıca $A(t)$ fonksiyonunun özel seçimleri ile bazı iyi bilinen sayılar kullanılarak alt ailelere örnekler verilecektir. Son olarak alt ailelerin açık gösterimleri ve determinant gösterimleri verilecektir.

$r \in \mathbb{N}$ olmak üzere parametrik türden yüksek mertebeden Fubini tipli Appell polinomların doğurucu fonksiyonları

$$A(t) \frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} e^{ut} \cos(vt) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_A F_n^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!}, \quad (5.1)$$

$$A(t) \frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} e^{ut} \sin(vt) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_A F_n^{(s,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} \quad (5.2)$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada $A(t)$ fonksiyonu

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{t^k}{k!}, \quad \alpha_0 \neq 0, \quad (5.3)$$

seri gösterimine sahiptir. Ayrıca (5.1) ve (5.2) de $A(t) = 1$ olması ile doğurucu fonksiyonlar (4.6) ve (4.8) eşitliklerine indirgendiği kolaylıkla görülür.

5.1. Teorem

r . mertebeden kosinüs ve sinüs Fubini tipli Appell polinomlar aşağıda verilen açık gösterimlere sahiptir:

$${}_A F_n^{(c,r)}(u, v; w) = \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} \alpha_{n-k} C_m(u, w) F_{k-m}^{(r)}(w), \quad (5.4)$$

$${}_A F_n^{(s,r)}(u, v; w) = \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} \alpha_{n-k} S_m(u, w) F_{k-m}^{(r)}(w). \quad (5.5)$$

Burada $C_m(u, v)$, $S_m(u, v)$ polinomları Tanım 2.3.1 ile $F_k^{(r)}(w)$ polinomları Tanım 2.3.21 ile verilmiştir.

İspat

r . mertebeden kosinüs Fubini tipli Appell polinomları için Tanım 2.3.1, eşitlik (2.2) ve (5.3) ün seri gösterimleri yerlerine yazıldığında ve iki kez Lemma 2.2.1 kullanıldığında

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} {}_A F_n^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} &= A(t) \frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} e^{ut} \cos(vt) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(r)}(w) \frac{t^k}{k!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} C_m(u, w) \frac{t^m}{m!} \right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{t^n}{n!} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^k \binom{k}{m} C_m(u, w) F_{k-m}^{(r)}(w) \right) \frac{t^k}{k!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} \alpha_{n-k} C_m(u, w) F_{k-m}^{(r)}(w) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

olup $\frac{t^n}{n!}$ terimlerinin katsayıları eşitlenirse (5.4) eşitliği elde edilir. Benzer şekilde r . mertebeden sinüs Fubini tipli Appell polinomları için, Tanım 2.3.1, eşitlik (2.2) ve (5.3) ün seri gösterimleri yerlerine yazıldığında ve iki kez Lemma 2.2.1 kullanıldığında

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} {}_A F_n^{(s,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} &= A(t) \frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} e^{ut} \sin(vt) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(r)}(w) \frac{t^k}{k!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} S_m(u, w) \frac{t^m}{m!} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{t^n}{n!} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^k \binom{k}{m} S_m(u, w) F_{k-m}^{(r)}(w) \right) \frac{t^k}{k!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} \alpha_{n-k} S_m(u, w) F_{k-m}^{(r)}(w) \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

elde edilip, $\frac{t^n}{n!}$ terimlerinin katsayıları eşitlenirse (5.5) eşitliği elde edilir.

5.2. Teorem

r . mertebeden kosinüs Fubini tipli Appell polinomları aşağıda verilen determinant gösterime sahiptir:

$${}_A F_n^{(c,r)}(u, v; w) = \frac{(-1)^n}{(\gamma_0)^{n+1}} \begin{vmatrix} F_0^{(c,r)}(u, v; w) & F_1^{(c,r)}(u, v; w) & F_2^{(c,r)}(u, v; w) & \cdots & F_{n-1}^{(c,r)}(u, v; w) & F_0^{(c,r)}(u, v; w) \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{n-1} & \gamma_n \\ 0 & \gamma_0 & \binom{2}{1} \gamma_1 & \cdots & \binom{n-1}{1} \gamma_{n-2} & \binom{n}{1} \gamma_{n-1} \\ 0 & 0 & \gamma_0 & \cdots & \binom{n-1}{2} \gamma_{n-3} & \binom{n}{2} \gamma_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_0 & \binom{n}{n-1} \gamma_1 \end{vmatrix}. \quad (5.6)$$

Burada $\frac{1}{A(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \frac{t^k}{k!}$ ve $F_n^{(c,r)}(u, v; w) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \gamma_k {}_A F_{n-k}^{(c,r)}(u, v; w)$ dir.

İspat

$$A(t) \frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} e^{ut} \cos(vt) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_A F_n^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!}$$

olmak üzere

$$\frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} e^{ut} \cos(vt) = \frac{1}{A(t)} \sum_{n=0}^{\infty} {}_A F_n^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!}$$

şeklinde yazılabilmektedir. Burada

$$\frac{1}{A(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \frac{t^k}{k!}$$

seri gösterimi ve (4.6) doğurucu fonksiyonu kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \frac{t^k}{k!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}_A F_n^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} \right)$$

olup n yerine $n - k$ yazılırsa (Lemma 2.2.1 den dolayı)

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \gamma_k {}_A F_{n-k}^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir, ardından $\frac{t^n}{n!}$ terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa

$$F_n^{(c,r)}(u, v; w) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \gamma_k {}_A F_{n-k}^{(c,r)}(u, v; w)$$

olarak bulunur. Burada n yerine değerler vererek incelenirse

$$F_0^{(c,r)}(u, v; w) = \gamma_0 {}_A F_0^{(c,r)}(u, v; w)$$

$$F_1^{(c,r)}(u, v; w) = \gamma_0 {}_A F_1^{(c,r)}(u, v; w) + \gamma_1 {}_A F_1^{(c,r)}(u, v; w)$$

$$F_2^{(c,r)}(u, v; w) = \gamma_0 {}_A F_2^{(c,r)}(u, v; w) + \binom{2}{1} \gamma_1 {}_A F_1^{(c,r)}(u, v; w) + \gamma_2 {}_A F_0^{(c,r)}(u, v; w)$$

⋮

$$F_n^{(c,r)}(u, v; w) = \gamma_0 {}_A F_n^{(c,r)}(u, v; w) + \binom{n}{1} \gamma_1 {}_A F_{n-1}^{(c,r)}(u, v; w) + \cdots + \gamma_n {}_A F_0^{(c,r)}(u, v; w)$$

olduğu görülür ki $(n + 1)$ bilinmeyenli bir denklem sistemini çözmek için Cramer kuralı uygulanırsa

$${}_A F_n^{(c,r)}(u, v; w) = \frac{\begin{vmatrix} \gamma_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & F_0^{(c,r)}(u, v; w) \\ \gamma_1 & \gamma_0 & 0 & \cdots & 0 & F_1^{(c,r)}(u, v; w) \\ \gamma_2 & \binom{2}{1}\gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & 0 & F_2^{(c,r)}(u, v; w) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_n & \binom{n}{1}\gamma_{n-1} & \cdots & \cdots & \binom{n}{n-1}\gamma_1 & F_n^{(c,r)}(u, v; w) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \gamma_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \gamma_2 & \binom{2}{1}\gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ \gamma_n & \binom{n}{1}\gamma_{n-1} & \cdots & \cdots & \binom{n}{n-1}\gamma_1 & \gamma_0 \end{vmatrix}}$$

olup paydadaki determinant γ_0 parantezine alınırsa

$${}_A F_n^{(c,r)}(u, v; w) = \frac{1}{(\gamma_0)^{n+1}} \frac{\begin{vmatrix} \gamma_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & F_0^{(c,r)}(u, v; w) \\ \gamma_1 & \gamma_0 & 0 & \cdots & 0 & F_1^{(c,r)}(u, v; w) \\ \gamma_2 & \binom{2}{1}\gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & 0 & F_2^{(c,r)}(u, v; w) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_n & \binom{n}{1}\gamma_{n-1} & \cdots & \cdots & \binom{n}{n-1}\gamma_1 & F_n^{(c,r)}(u, v; w; r) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \gamma_2 & \binom{2}{1}\gamma_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 0 \\ \gamma_n & \binom{n}{1}\gamma_{n-1} & \cdots & \cdots & \binom{n}{n-1}\gamma_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

bulunur. Burada paydanın determinanti köşegenlerin çarpımına eşit olup 1 olacağından dolayı

$${}_A F_n^{(c,r)}(u, v; w) = \frac{1}{(\gamma_0)^{n+1}} \begin{vmatrix} \gamma_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & F_0^{(c,r)}(u, v; w) \\ \gamma_1 & \gamma_0 & 0 & \cdots & 0 & F_1^{(c,r)}(u, v; w) \\ \gamma_2 & \binom{2}{1} \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & 0 & F_2^{(c,r)}(u, v; w) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_n & \binom{n}{1} \gamma_{n-1} & \cdots & \cdots & \binom{n}{n-1} \gamma_1 & F_n^{(c,r)}(u, v; w) \end{vmatrix}$$

şeklinde bulunur. Daha sonra elemanter satır ve sütun işlemleri yapılarak

$${}_A F_n^{(c,r)}(u, v; w) = \frac{(-1)^n}{(\gamma_0)^{n+1}} \begin{vmatrix} F_0^{(c,r)}(u, v; w) & F_1^{(c,r)}(u, v; w) & F_2^{(c,r)}(u, v; w) & \cdots & F_{n-1}^{(c,r)}(u, v; w) & F_0^{(c,r)}(u, v; w) \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{n-1} & \gamma_n \\ 0 & \gamma_0 & \binom{2}{1} \gamma_1 & \cdots & \binom{n-1}{1} \gamma_{n-2} & \binom{n}{1} \gamma_{n-1} \\ 0 & 0 & \gamma_0 & \cdots & \binom{n-1}{2} \gamma_{n-3} & \binom{n}{2} \gamma_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_0 & \binom{n}{n-1} \gamma_1 \end{vmatrix}$$

şeklinde determinant gösterimi elde edilir.

5.3. Teorem

r . mertebeden sinüs Fubini tipli Appell polinomlar aşağıda verilen determinant gösterime sahiptir:

$${}_A F_n^{(s,r)}(u, v; w) = \frac{(-1)^n}{(\gamma_0)^{n+1}} \begin{vmatrix} F_0^{(s,r)}(u, v; w) & F_1^{(s,r)}(u, v; w) & F_2^{(s,r)}(u, v; w) & \cdots & F_{n-1}^{(s,r)}(u, v; w) & F_n^{(s,r)}(u, v; w) \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{n-1} & \gamma_n \\ 0 & \gamma_0 & \binom{2}{1} \gamma_1 & \cdots & \binom{n-1}{1} \gamma_{n-2} & \binom{n}{1} \gamma_{n-1} \\ 0 & 0 & \gamma_0 & \cdots & \binom{n-1}{2} \gamma_{n-3} & \binom{n}{2} \gamma_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_0 & \binom{n}{n-1} \gamma_1 \end{vmatrix}. \quad (5.7)$$

Burada $\frac{1}{A(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \frac{t^k}{k!}$ ve $F_n^{(s,r)}(u, v; w) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \gamma_k {}_A F_{n-k}^{(s,r)}(u, v; w)$ dir.

İspat

$$A(t) \frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} e^{ut} \sin(vt) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_A F_n^{(s,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!}$$

olmak üzere

$$\frac{1}{(1-w(e^t-1))^r} e^{ut} \sin(vt) = \frac{1}{A(t)} \sum_{n=0}^{\infty} {}_A F_n^{(s,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!}$$

şeklinde yazılabilmektedir. Burada

$$\frac{1}{A(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \frac{t^k}{k!}$$

seri gösterimi ve (4.8) doğurucu fonksiyonu yerine yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_A F_n^{(s,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \frac{t^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} {}_A F_n^{(s,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!}$$

olup n yerine $n - k$ yazılırsa (Lemma 2.2.1 den dolayı)

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_A F_n^{(s,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \gamma_{kA} {}_A F_{n-k}^{(s,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir, ardından $\frac{t^n}{n!}$ terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa

$$F_n^{(s,r)}(u, v; w) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \gamma_{kA} F_{n-k}^{(s,r)}(u, v; w)$$

olarak bulunur. Burada n yerine değerler vererek incelenirse

$$F_0^{(s,r)}(u, v; w) = \gamma_{0A} F_0^{(s,r)}(u, v; w)$$

$$F_1^{(s,r)}(u, v; w) = \gamma_{0A} F_1^{(s,r)}(u, v; w) + \gamma_{1A} F_1^{(s,r)}(u, v; w)$$

$$F_2^{(s,r)}(u, v; w) = \gamma_{0A} F_2^{(s,r)}(u, v; w) + \binom{2}{1} \gamma_{1A} F_1^{(s,r)}(u, v; w) + \gamma_{2A} F_0^{(s,r)}(u, v; w)$$

⋮

$$F_n^{(s,r)}(u, v; w) = \gamma_{0A} F_n^{(s,r)}(u, v; w) + \binom{n}{1} \gamma_{1A} F_{n-1}^{(s,r)}(u, v; w) + \cdots + \gamma_{nA} F_0^{(s,r)}(u, v; w)$$

olduğu görülür ki $(n + 1)$ bilinmeyenli bir denklem sistemini çözmek için Cramer kuralı uygulanırsa

$${}_A F_n^{(s,r)}(u, v; w) = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccccc} \gamma_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & F_0^{(s,r)}(u, v; w) \\ \gamma_1 & \gamma_0 & 0 & \cdots & 0 & F_1^{(s,r)}(u, v; w) \\ \gamma_2 & \binom{2}{1} \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & 0 & F_2^{(s,r)}(u, v; w) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_n & \binom{n}{1} \gamma_{n-1} & \cdots & \cdots & \binom{n}{n-1} \gamma_1 & F_n^{(s,r)}(u, v; w) \end{array} \right| \\ \hline \left| \begin{array}{cccccc} \gamma_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \gamma_2 & \binom{2}{1} \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ \gamma_n & \binom{n}{1} \gamma_{n-1} & \cdots & \cdots & \binom{n}{n-1} \gamma_1 & \gamma_0 \end{array} \right| \end{array}$$

olup paydadaki determinant γ_0 parantezine alınırsa

$${}_A F_n^{(s,r)}(u, v; w) = \frac{1}{(\gamma_0)^{n+1}} \begin{vmatrix} \gamma_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & F_0^{(s,r)}(u, v; w) \\ \gamma_1 & \gamma_0 & 0 & \cdots & 0 & F_1^{(s,r)}(u, v; w) \\ \gamma_2 & \binom{2}{1} \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & 0 & F_2^{(s,r)}(u, v; w) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_n & \binom{n}{1} \gamma_{n-1} & \cdots & \cdots & \binom{n}{n-1} \gamma_1 & F_n^{(s,r)}(u, v; w) \\ \hline 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \gamma_2 & \binom{2}{1} \gamma_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 0 \\ \gamma_n & \binom{n}{1} \gamma_{n-1} & \cdots & \cdots & \binom{n}{n-1} \gamma_1 & 1 \end{vmatrix}$$

bulunur. Burada paydanın determinanti köşegenlerin çarpımına eşit olup 1 olacağından dolayı

$${}_A F_n^{(s,r)}(u, v; w) = \frac{1}{(\gamma_0)^{n+1}} \begin{vmatrix} \gamma_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & F_0^{(s,r)}(u, v; w) \\ \gamma_1 & \gamma_0 & 0 & \cdots & 0 & F_1^{(s,r)}(u, v; w) \\ \gamma_2 & \binom{2}{1} \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & 0 & F_2^{(s,r)}(u, v; w) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_n & \binom{n}{1} \gamma_{n-1} & \cdots & \cdots & \binom{n}{n-1} \gamma_1 & F_n^{(s,r)}(u, v; w) \end{vmatrix}$$

şeklinde bulunur. Daha sonra elemanter satır ve sütun işlemleri yapılarak

$${}_A F_n^{(s,r)}(u, v; w) = \frac{(-1)^n}{(\gamma_0)^{n+1}} \begin{vmatrix} F_0^{(s,r)}(u, v; w) & F_1^{(s,r)}(u, v; w) & F_2^{(s,r)}(u, v; w) & \cdots & F_{n-1}^{(s,r)}(u, v; w) & F_n^{(s,r)}(u, v; w) \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{n-1} & \gamma_n \\ 0 & \gamma_0 & \binom{2}{1} \gamma_1 & \cdots & \binom{n-1}{1} \gamma_{n-2} & \binom{n}{1} \gamma_{n-1} \\ 0 & 0 & \gamma_0 & \cdots & \binom{n-1}{2} \gamma_{n-3} & \binom{n}{2} \gamma_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_0 & \binom{n}{n-1} \gamma_1 \end{vmatrix}$$

şeklinde determinant gösterimi elde edilir.

5.4. Tanım

(5.1) ve (5.2) doğurucu fonksiyonlarında $A(t) = \frac{t}{e^t - 1}$ için sırasıyla yüksek mertebeden kosinüs ve sinüs Fubini tipli Bernoulli polinomların doğurucu fonksiyonu sırasıyla

$$\frac{t}{e^t - 1} \frac{1}{(1 - w(e^t - 1))^r} e^{ut} \cos(vt) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_B F_n^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!},$$

$$\frac{t}{e^t - 1} \frac{1}{(1 - w(e^t - 1))^r} e^{ut} \sin(vt) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_B F_n^{(s,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir.

Sonuç

Teorem 5.1 de $A(t) = \frac{t}{e^t - 1}$ için sırasıyla yüksek mertebeden kosinüs ve sinüs Fubini tipli

Bernoulli polinomları aşağıda verilen açık gösterimlere sahiptir:

$${}_A F_n^{(c,r)}(u, v; w) = \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} B_{n-k} C_m(u, w) F_{k-m}^{(r)}(w),$$

$${}_A F_n^{(s,r)}(u, v; w) = \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} B_{n-k} S_m(u, w) F_{k-m}^{(r)}(w).$$

Burada ki B_n sayıları Tanım 2.3.4 ile verilen Bernoulli sayısıdır.

5.5. Tanım

(5.1) ve (5.2) doğurucu fonksiyonlarında $A(t) = \frac{2}{e^t + 1}$ için sırasıyla yüksek mertebeden kosinüs ve sinüs Fubini tipli Euler polinomların doğurucu fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$\frac{2}{e^t + 1} \frac{1}{(1 - w(e^t - 1))^r} e^{ut} \cos(vt) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_E F_n^{(c,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!}$$

$$\frac{2}{e^t + 1} \frac{1}{(1 - w(e^t - 1))^r} e^{ut} \sin(vt) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_E F_n^{(s,r)}(u, v; w) \frac{t^n}{n!}.$$

Sonuç

Teorem 5.1 de fonksiyonlarında $A(t) = \frac{2}{e^t + 1}$ için sırasıyla yüksek mertebeden kosinüs ve sinüs Fubini tipli Euler polinomlar aşağıda verilen açık gösterimlere sahiptir:

$${}_A F_n^{(c,r)}(u, v; w) = \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} E_{n-k} C_m(u, w) F_{k-m}^{(r)}(w),$$

$${}_A F_n^{(s,r)}(u, v; w) = \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} E_{n-k} S_m(u, w) F_{k-m}^{(r)}(w).$$

Burada ki E_n sayıları Tanım 2.3.6 ile verilen Euler sayısidir.

Sonuç

Teorem 5.2 ve 5.3 de $A(t) = \frac{t}{e^t - 1}$ için r . mertebeden kosinüs ve sinüs Fubini tipli Bernoulli polinomların determinant gösterimi sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$${}_B F_n^{(c,r)}(u, v; w) = (-1)^n \begin{vmatrix} F_0^{(c,r)}(u, v; w) & F_1^{(c,r)}(u, v; w) & F_2^{(c,r)}(u, v; w) & \cdots & F_{n-1}^{(c,r)}(u, v; w) & F_n^{(c,r)}(u, v; w) \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 1 & \binom{2}{1} \frac{1}{2} & \cdots & \binom{n-1}{1} \frac{1}{n-1} & \binom{n}{1} \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \binom{n-1}{2} \frac{1}{n-2} & \binom{n}{2} \frac{1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \binom{n}{n-1} \frac{1}{2} \end{vmatrix},$$

$${}_B F_n^{(s,r)}(u, v; w) = (-1)^n \begin{vmatrix} F_0^{(s,r)}(u, v; w) & F_1^{(s,r)}(u, v; w) & F_2^{(s,r)}(u, v; w) & \cdots & F_{n-1}^{(s,r)}(u, v; w) & F_n^{(s,r)}(u, v; w) \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 1 & \binom{2}{1} \frac{1}{2} & \cdots & \binom{n-1}{1} \frac{1}{n-1} & \binom{n}{1} \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \binom{n-1}{2} \frac{1}{n-2} & \binom{n}{2} \frac{1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \binom{n}{n-1} \frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

Burada $\frac{e^t - 1}{t} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{t^k}{k!}$ ve $F_n^{(c,r)}(u, v; w) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k A F_{n-k}^{(c,r)}(u, v; w)$ dir.

Sonuç

Teorem 5.2 ve 5.3 de $A(t) = \frac{2}{e^t + 1}$ için r . mertebeden kosinüs ve sinüs Fubini tipli Euler polinomların determinant gösterimi sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$${}_E F_n^{(c,r)}(u, v; w) = (-1)^n \begin{vmatrix} F_0^{(c,r)}(u, v; w) & F_1^{(c,r)}(u, v; w) & F_2^{(c,r)}(u, v; w) & \cdots & F_{n-1}^{(c,r)}(u, v; w) & F_n^{(c,r)}(u, v; w) \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \binom{2}{1} \frac{1}{2} & \cdots & \binom{n-1}{1} \frac{1}{2} & \binom{n}{1} \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \binom{n-1}{2} \frac{1}{2} & \binom{n}{2} \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \binom{n}{n-1} \frac{1}{2} \end{vmatrix},$$

$${}_E F_n^{(s,r)}(u, v; w) = (-1)^n \begin{vmatrix} F_0^{(s,r)}(u, v; w) & F_1^{(s,r)}(u, v; w) & F_2^{(s,r)}(u, v; w) & \cdots & F_{n-1}^{(s,r)}(u, v; w) & F_n^{(s,r)}(u, v; w) \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \binom{2}{1} \frac{1}{2} & \cdots & \binom{n-1}{1} \frac{1}{2} & \binom{n}{1} \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \binom{n-1}{2} \frac{1}{2} & \binom{n}{2} \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \binom{n}{n-1} \frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

Burada $\frac{e^t + 1}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} e_k \frac{t^k}{k!}$ ve $F_n^{(s,r)}(u, v; w) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e_{kA} F_{n-k}^{(s,r)}(u, v; w)$ dir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde ilk olarak bazı özel sayı dizileri ve polinom ailelerine değinilmiştir. Literatürde oldukça önemli bir çalışma alanına sahip olan özel polinom ailelerinden biri de Fubini polinomlarıdır. Fubini polinomları ve Fubini tipli polinomlar üzerine çok fazla çalışma yapılmaktadır. Son yıllarda üstel fonksiyonda kompleks değişkenler ele alınıp Euler formülünün kullanılmasıyla trigonometrik fonksiyonlar içeren yeni doğurucu fonksiyonlar elde edilmektedir. Bu çalışmada aynı metod kullanılarak [30]'da verilen Fubini polinomları yardımıyla kosinüs ve sinüs parametrelerine bağlı yüksek mertebeden Fubini polinomları iki yeni doğurucu fonksiyon ile tanımlanmıştır. Dolayısıyla [31]'de tanıtılan doğurucu fonksiyonların r . mertebeden hali incelenmiştir. Daha sonra yeni toplam formülleri, trigonometrik bağıntılar ve kısmi türevler yardımıyla bağıntılar incelenmiştir. Ardından Stirling sayıları ile arasındaki bağıntılara değinilmiştir. Son bölümde ise daha genel hali olan yüksek mertebeden sinüs ve kosinüs parametrelili iki yeni doğurucu fonksiyonlar Appell polinomları yardımıyla tanımlanmıştır. Daha sonra açık gösterimleri ve determinant gösterimleri incelenmiştir. Son olarak ise Bernoulli ve Euler sayıları yardımıyla alt aileler tanımlanmış, açık gösterimleri ve determinant gösterimleri üzerine çalışılmıştır.

KAYNAKLAR

1. İnternet: Guido Fubini. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Guido_Fubini, Son Erişim Tarihi: 20.09.2021.
2. İnternet: Bell numbers. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Ordered_Bell_number, Son Erişim Tarihi: 23.05.2023.
3. Andrews, G.E. (1974). Applications of basic hypergeometric functions. *SIAM Review*, 16(4), 441-484.
4. Altın, A. (2020). *Uygulamalı Matematik* (İkinci Baskı). Ankara: Gazi Kitabevi, 235.
5. Conway, J.B. (1978). *Functions of One Complex Variable*. Graduate Texts in Mathematics 11, New York, Springer, 2, 2, 38.
6. Rainville, E. D. (1960). *Special Functions*. New York: The Macmillan Company, 34-78.
7. Masjed-Jamei, M. and Koepf, W. (2017). Symbolic computation of some power-trigonometric series. *Journal of Symbolic Computation*, 80, 273-284.
8. Sheffer, I. M. (1945). Note on Appell polynomials, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 51(10), 739–744.
9. Appell P. (1880). *Sur une classe de pôlynomes*. Annales Scientifiques de l’Ecole Normale Supérieure; 9, 119-144 (in French).
10. Erdelyi, A. (1953). *Higher Transcendental Functions*. The Bateman Manuscript Project, Vol. I-III. New York: McGraw Hill Book Company Inc. 35–43.
11. Carlitz, L. (1968). Bernoulli numbers. *Fibonacci Quarterly*, 6(3), 71–85.
12. Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (1970). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. New York: Dover Publication, 803–819, 824.
13. Srivastava, H. M. and Choi, J. (2012). *Zeta and q- Zeta functions and associated series and integrals*. Amsterdam: Elsevier, 657.
14. Masjed-Jamei, M., Beyki, M. R. and Koepf, W. (2018). A new type of Euler polynomials and numbers. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 15, 1-17.
15. Alam, N., Khan, W. A., Obeidat, S., Muhiuddin, G., Diab, N. S., Zaidi, H. N., Altaieb, A. and Bachioua, L. (2023). A Note on Bell-Based Bernoulli and Euler Polynomials of Complex Variable. *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 135(1), 187-209.
16. Carlitz, L. (1960). Eulerian numbers and polynomials of higher order. *Duke Mathematical Journal*, 27(3), 401–423.

17. Kilar, N. and Simsek, Y. (2019). Two parametric kinds of Eulerian-type polynomials associated with Euler's formula. *Symmetry*, 11(9), 1097.
18. Kim, D. S. and Kim, T. (2012). Some new identities of Frobenius-Euler numbers and polynomials. *Journal of Inequalities and Applications*, 307 (2012).
19. Temme, N. M. (1996). *Special functions: An introduction to the classical functions of mathematical physics*. New York: John Wiley Sons Inc., 374.
20. Cayley, A. (1859). On the analytic forms called trees, Second part. *Philosophical Magazine*, 18, 374-378.
21. Good, I. J. (1975). The number of ordering of n candidates when ties are permitted. *Fibonacci Quarterly*, 13(1), 11-18.
22. Kilar, N. (2017). *Fubini tipli sayılar ve bunların üreteç fonksiyonları*. Yüksek Lisans Tezi, Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Antalya.
23. Muresan, M. (2009). *A concrete approach to classical analysis*. New York: Springer, Vol. 14.
24. Belbachir, H., Rahmani, M. and Sury, B. (2011). Sums involving moments of reciprocals of binomial coefficients. *Journal of Integer Sequences*, 14, Article 11.6.6.
25. Tanny, S. M. (1975). On some numbers related to the Bell numbers. *Canadian Mathematical Bulletin*, 17(5), 733-738.
26. Kilar, N. and Simsek, Y. (2017). A new family of Fubini type numbers and polynomials associated with Apostol-Bernoulli numbers and polynomials. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 54(5), 1605-1621.
27. Kargin, L. (2016). Some formulae for products of Fubini polynomials with applications. *arXiv preprint arXiv:1701.01023*.
28. Kim, T., Kim, D. S., Jang and G. W. (2017). A note on degenerate Fubini polynomials. In *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, 20(4), 521-531.
29. Su, D. D. and He, Y. (2019). Some identities for the two variable Fubini polynomials. *Mathematics*, 7(2), 115.
30. Kim, D. S., Kim, T., Kwon, H. I. and Park, J. W. (2018). Two variable higher-order Fubini polynomials. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 55(4), 975-986.
31. Sharma, S. K., Khan, W. A. and Ryoo, C. S. (2020). A parametric kind of Fubini polynomials of a complex variable. *Mathematics*, 8(4), 643.
32. Çetin, K. and Çekim, B. (2022) *Some properties of the parametric kind of Fubini polynomials with three variables of order r* . 6th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences, Ordu, Turkey.

33. Kurt, B. (2023). A parametric unified Apostol-type Bernoulli, Euler, Genocchi, Fubini polynomials and numbers. *Filomat*, 37(19), 6307-6317.
34. Srivastava, H. M. and Kızılateş, C. (2019). A parametric kind of the Fubini-type polynomials. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 113(4), 3253-3267.
35. Srivastava, H. M., Srivastava, R., Muhyi, A., Yasmin, G., Islahi, H. and Araci, S. (2021). Construction of a new family of Fubini-type polynomials and its applications. *Advances in Difference Equations*, 2021, 36 (2021), 1-25.



Gazili olmak ayrıcalıktır