
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

FARKLI BELİRSİZLİK ORTAMLARINDA VERİ BİRLEŞTİRMESİ

Fatma ATEŞ

DOKTORA TEZİ
ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARALIK 2021

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Fatma ATEŞ

30/12/2021

FARKLI BELİRSİZLİK ORTAMLARINDA VERİ BİRLEŞTİRMESİ

(Doktora Tezi)

Fatma ATEŞ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Aralık 2021

ÖZET

Bilgi (veri) kavramı belirsizlik kavramı ile yakından ilişkilidir. Belirsizlik, bazı bilgi eksikliğinin ortaya konması, bilgi ise belirsizliği azaltmak için gerekli kapasitedir. Bilgi eksikliğini azaltmanın yollarından bir tanesi ortamda farklı kaynakların varlığından yararlanmaktır. Veri birleştirme teknikleri kullanılarak, birden fazla kaynaktan alınan sonuçların bir araya getirilmesi ile elde edilen sonuçlar, bağımsız tek bir kaynağın elde edebileceği bilgilerden daha sağlıklı, zengin ve duyarlı olacaktır. Bu tez çalışmasında görüntü bulanık kümeler için Bonferroni ortalamasına bağlı üç tane birleştirme operatörü önerilmiştir. Bu operatörlerin elde ettiği sonuçların da bir görüntü bulanık sayı olduğu ayrıca birleştirme operatörlerinin arzu edilen bazı özelliklerini sağladıkları ispat edilmiştir. Görüntü bulanık bilgiler için bir karar verme modeli geliştirilerek operatörlerin uygulanabilirliği gösterilmiş mevcut operatörler ile karşılaştırılmıştır. Bilgi eksikliğini göstermenin bir yolu olan belirsizliği ele alan farklı yaklaşımlar vardır. Bu tez çalışmasında Zadeh'in "bir olayın olası olması için mümkün olması gerekir" tutarlılık prensibi göz önünde bulundurularak üst sınırın fiziksel olabilirlikten, alt sınırın ise bilgisel olabilirlikten oluştuğu aralıklı olabilirlik yapıları önerilmiştir. Önerilen yeni belirsizlik yaklaşımından olasılık bilgisinin elde edildiği bir dönüşüm yöntemi ortaya koyulmuştur. Dönüşüm yönteminin literatürdeki arzu edilen özellikleri sağladığı ispat edilerek bir sayısal örnek ile gösterilmiştir. Önerilen birleştirme operatörü ile ortamdaki aralıklı olabilirlik bilgilerinin birleştirildiği, önerilen dönüşüm yöntemi ile ise aralıklı olabilirliklerin olasılık bilgisine çevirildiği bir gerçek hayat problemi sayısal örneği çözülerek yöntemlerin uygulanabilirliği gösterilmiştir.

Bilim Kodu : 90601

Anahtar Kelimeler : Çok kaynaklı bilgi birleştirme, heterojen bilgi birleştirme, olasılık-olabilirlik dönüşümü, aralıklı olabilirlik

Sayfa Adedi : 201

Danışman : Prof. Dr. Diyar AKAY

DATA FUSION IN DIFFERENT UNCERTAIN ENVIRONMENT

(Ph.D. Thesis)

Fatma ATEŞ

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

December 2021

ABSTRACT

The concept of knowledge (data) is closely related to the concept of uncertainty. Uncertainty is the capacity to reveal some lack of knowledge, and knowledge is the capacity to reduce uncertainty. One of the ways to reduce the lack of information is to take advantage of the presence of different sources in the environment. Using data aggregation techniques, the results obtained by combining the results from more than one source will be healthier, richer and more sensitive than the information that a single independent source can obtain. In this thesis, three aggregation operators based on Bonferroni mean are proposed for picture fuzzy sets. It has been proven that the results obtained by these operators are also a picture fuzzy number, and they also provide some desirable properties of the aggregation operators. A decision making model for picture fuzzy information has been developed and the applicability of the operators has been demonstrated and compared with the existing operators in literature. There are different approaches to addressing uncertainty, which is a way of demonstrating a lack of knowledge. In this thesis, taking into consideration Zadeh's principle of consistency, "for an event to be probable, it must be possible", interval possibility structures are proposed, where the upper limit is physical possibility and the lower limit is epistemic possibility. A transformation method, in which probability information is obtained from the proposed new uncertainty approach, is introduced. It has been exemplified by an application by proving that the transformation method provides the desired properties in the literature. The feasibility of the methods has been demonstrated by solving a numerical example of real-life problem in which the interval possiblity information in the environment is combined with the proposed aggregation operator, and the interval posibilities are converted into probability information with the proposed transformation method.

Science Code : 90601

Key Words : Multi-source information fusion, heterogeneous information fusion, possibility-probability transformation, interval possibility.

Page Number : 201

Supervisor : Prof. Dr. Diyar AKAY

TEŞEKKÜR

Tez çalışması boyunca değerli bilgi birikimi ve katkılarıyla bana destek olan danışmanım Prof. Dr. Diyar AKAY'a çok teşekkür ederim. Tez izleme komitesinde görev alan ve tezime katkı sağlayan saygıdeğer öğretim üyeleri Prof. Dr. Feyzan ARIKAN ÖKTEMER'e ve Dr. Öğr. Üyesi Salih TEKİN'e çok teşekkür ederim. Manevi destekleriyle bana her zaman destek olan çok değerli aileme ve arkadaşlarıma çok teşekkür ederim. Tez çalışmamı başından itibaren maddi olarak destekleyen TÜBİTAK'a çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

ÇİZELGELERİN LİSTESİ x

ŞEKİLLERİN LİSTESİ xii

SİMGELER VE KISALTMALAR xiv

1. GİRİŞ 1

2. BELİRSİZLİK 9

2.1. Belirsizliğin Sınıflandırılması 9

2.2. Belirsizlik Teorileri 12

2.2.1. Olasılık teorisi 12

2.2.2. Kanıt teorisi 14

2.2.3. Olabilirlik teorisi 18

2.3. Olabilirlik ve Bulanık Küme İlişkisi 26

2.4. Olabilirlik/Olasılık Dönüşüm Yöntemleri 28

2.4.1. Olabilirliğe dönüşüm yöntemleri 31

2.4.2. Olasılığa dönüşüm yöntemleri 39

3. BULANIK KÜME TİPLERİ 47

3.1. Kafes Bulanık Küme 47

3.2. Tip-1 Bulanık Kümeler 49

3.3. Aralıklı Bulanık Kümeler 51

3.4. Tip-2 Bulanık Küme 53

Sayfa

3.5. Aralıklı Tip-2 Bulanık Küme 55
3.6. Küme Değerli Bulanık Küme 57
3.7. Tereddütlü Bulanık Küme 57
3.8. Sezgisel Bulanık Küme 58
3.9. Pisagor Bulanık Küme 59
3.10. Görüntü Bulanık Küme 60
3.11. İki Kutuplu Bulanık Küme 62
3.12. Karmaşık Bulanık Küme 63
3.13. Nötrosofik Küme 64
3.14. Kaba Küme 65
3.15. Bulanık Kümeler Arasındaki bağlantılar 71
4. VERİ BİRLEŞTİRMESİ 75
4.1. Birleştirme Operatörleri 77
4.1.1. Basit birleştirme operatörleri 80
4.1.2. OWA operatörü 83
4.1.3. t-norm ve t-konorm operatörleri 85
4.1.4. Bulanık integraller 87
4.2. Birleştirme Kuralları 98
4.2.1. D-S birleştirme kuralı 99
4.2.2. Yager'ın birleştirme kuralı 101
4.2.3. Inakagi'nin birleştirilmiş birleştirme kuralı 102
4.2.4. Dubois ve Prade'in birleştirme kuralı 104
4.2.5. Smets'in birleştirme kuralı 104
4.2.6. Lefevre'nin birleştirme kuralı 105

Sayfa

4.2.7. Ağırlıklı ortalama kuralı 106

4.2.8. Zhang'ın merkez birleştirme kuralı 106

4.2.9. Azaltma ve birleştirme kuralı. 107

4.2.10. Karma ya da ortalama kuralı 107

4.2.11. Dezert-Smarandache birleştirme kuralı 108

4.2.12. Dezert-Smarandache çelişkinin orantısal dağıtımı birleştirme kuralı 109

4.2.13. Birleştirme kurallarının değerlendirilmesi 110

5. GÖRÜNTÜ BULANIK KÜMELERDE BONFERRONI ORTALAMASINA BAĞLI ÖNERİLEN ÜÇ TANE BİRLEŞTİRME OPERATÖRÜ 117

5.1. Önerilen Görüntü Bulanık Bonferroni Ortalama Operatörü..... 125

5.2. Önerilen Görüntü Bulanık Normalleştirilmiş Ağırlıklı Bonferroni Ortalama Operatörü..... 141

5.3. Önerilen Görüntü Bulanık Sıralı Ağırlıklı Bonferroni Ortalama Operatörü 144

5.4. Görüntü Bulanık Bilgiler İçin Önerilen Bir Karar Verme Modeli 146

5.5. Sayısal Örnek..... 148

5.6. Değerlendirme 152

6. ÖNERİLEN ARALIKLI DEĞERLİ OLABİLİRLİK ÖLÇÜSÜ VE DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ..... 153

6.1. Temel Tanımlar 155

6.2. Aralıklı Olabilirlik Ölçüsünün Alfa Kesmesi 157

6.3. Aralıklı Olabilirlik Ölçüsünden Aralıklı Olasılık Ölçüsüne Önerilen Dönüşüm Yöntemi 162

6.4. Kesin Olasılık Değerlerinin Bulunması..... 169

7. SAYISAL ÖRNEK..... 171

8. SONUÇ VE ÖNERİLER 185

Sayfa

KAYNAKLAR 187

ÖZGEÇMİŞ 199

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

Çizelge 2.1. Odak elemanların kütle atama, inanç ve mümkünlük değerleri 19

Çizelge 2.2. Tekli odak elemanların kütle atama, inanç ve mümkünlük değerleri 19

Çizelge 2.3. Odak elemanların kütle atama ve olabilirlik değerleri..... 25

Çizelge 2.4. Olasılık ve olabilirlik teorilerinin temel özellikleri 26

Çizelge 3.1. Kaba küme bilgi sistemi değerleri 67

Çizelge 4.1. Genel t-norm ve t-konormlar..... 86

Çizelge 4.2. Parametreye bağlı t-norm ve t-konormlar 86

Çizelge 4.3. Odak elemanlar ve değerleri..... 101

Çizelge 4.4. İki doktorun kütle atamalarının birleşimleri..... 110

Çizelge 4.5. Dubois ve Prade'in kuralından sağlanan birleşimler 112

Çizelge 4.6. Birleştirme kurallarının cebirsel özellikleri..... 114

Çizelge 5.1. Genel ve parametreye bağlı bazı t-norm ve t-konorm aileleri..... 118

Çizelge 5.2. Ortalama operatörleri 118

Çizelge 5.3. Görüntü bulanık karar matrisi..... 148

Çizelge 5.4. Dönüştürülmüş görüntü bulanık karar matrisi 149

Çizelge 5.5. Aday KKP sistemlerinin birleştirilmiş sonuçları..... 149

Çizelge 5.6. Aday KKP sistemlerinin skor fonksiyonları 150

Çizelge 5.7. Aday KKP sistemlerinin sıralaması 150

Çizelge 5.8. Farklı modellerin sıralama sonuçları..... 151

Çizelge 5.9. Farklı parametre değerlerine göre alternatiflerin sıralanması..... 151

Çizelge 6.1. Hans'ın kahvaltıda yediği yumurtaya ilişkin olabilirlik ve olasılık dağılımı 154

Çizelge 6.2. Olabilirliklerin alt ve üst sınırları..... 160

Çizelge 6.3. Alt ve üst kesin kümeler 161

Çizelge **Sayfa**

Çizelge 7.1. Olabilirliklerin alt ve üst sınırları 179

Çizelge 7.2. Alt ve üst kesin kümeler 180

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

Şekil 1.1. Tezin organizasyonu 7

Şekil 2.1. Smets'in bilgi türleri sınıflandırması 10

Şekil 2.2. Smitshon'ın bilgisizlik sınıflandırması 12

Şekil 2.3. İnanç ve mümkünlük fonksiyonları arasındaki ilişki 17

Şekil 2.4. Olabilirlik dağılımı 22

Şekil 2.5. Olabilirlik ölçüsünün iç içe geçmiş odak elemanları 26

Şekil 2.6. Genç bulanık kümesi 28

Şekil 3.1. Kısmi sıralı küme 47

Şekil 3.2. Kafes yapı 48

Şekil 3.3. Farklı tipte bulanık kümeler: (a) Kesikli bulanık küme (b) Sürekli bulanık küme 50

Şekil 3.4. Aralıklı bulanık küme 52

Şekil 3.5. (a) Üçgensel Tip-1 üyelik fonksiyonu (b) Bulanıklaştırılmış Üçgensel Tip-1 üyelik fonksiyonu 53

Şekil 3.6. (a) 3 boyutlu tip-2 üyelik fonksiyonu (b) x=2 noktasında tip-2 Üyelik fonksiyonunun dikey kesit gösterimi 54

Şekil 3.7. (a) 3 boyutlu aralıklı tip-2 üyelik fonksiyonu (b) x=2 noktasında aralıklı tip-2 üyelik fonksiyonunun dikey kesit gösterimi 56

Şekil 3.8. Sezgisel bulanık küme 59

Şekil 3.9. Pisagor bulanık küme 60

Şekil 3.10. Görüntü bulanık küme 61

Şekil 3.11. (a) 25 değerinin SBK'de gösterimi (b) Genç bipolar bulanık kümesi 62

Şekil 3.12. Nötrosofik küme 65

Şekil 3.13. Kaba küme 68

Şekil 3.14. Bulanık küme tipleri arasındaki bağlantı 72

Şekil **Sayfa**

Şekil 3.15. Farklı kümeler arasındaki ilişki 73

Şekil 4.1. *f* fonksiyonunun integrali 89

Şekil 4.2. *f* fonksiyonunun integrali 90

Şekil 4.3. *f* fonksiyonunun integrali 91

Şekil 4.4. *f* fonksiyonunun integrali 92

Şekil 4.5. Birleştirme operatörleri arasındaki ilişki 98

Şekil 7.1. FKS kritik noktalardaki tehdit olasılıklarının belirlenmesi süreci 171

Şekil 7.2. FKS modeli 173

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
A	Herhangi bir küme
$\widetilde{\mathbf{A}}$	Herhangi bir bulanık küme
$\boldsymbol{X}$	Evrensel küme
$\boldsymbol{\alpha}$	Alfa kesmesi
$\boldsymbol{\mu_A(x_i)}$	x_i elemanının A kümesine aitlik derecesi
$\boldsymbol{\varsigma}$	X evrensel kümesinde X'in alt kümelerinin boş olmayan ailesi
$\boldsymbol{g}$	(X,ς) 'de bulanık ölçü
m	Kütle atama fonksiyonu
Bel	İnanç ölçüsü
Pl	Mümkünlük ölçüsü
Nec	Gereklilik ölçüsü
Pos	Olabilirlik ölçüsü
$\boldsymbol{\pi}$	Olabilirlik dağılım fonksiyonu
K	Dempster-Shafer teoride kaynaklar arası çelişki
q	Yager'ın birleştirmesinde taban olasılık kütle ataması
$\boldsymbol{m^Y(X)}$	Yager'ın birleştirmesinde evrensel küme kütle ataması
$\boldsymbol{m^Y(\emptyset)}$	Yager'ın birleştirmesinde boş küme kütle ataması
BetP	Oranlı olasılık fonksiyonu
$\vee$	Veya operatörü
$\forall$	Evrensel niceleyici
$\exists$	Varoluşsal niceleyici
$\oplus$	Toplama işlemi
$\otimes$	Çarpma İşlemi

Kısaltmalar	Açıklamalar
ABK	Aralıklı Bulanık Küme
AT2BK	Aralıklı Tip-2 Bulanık Küme
BKK	Bulanık Kaba Küme
D-S	Dempster-Shafer
GBBOO	Görüntü Bulanık Bonferroni Ortalama Operatörü
GBK	Görüntü Bulanık Küme
GBIKO	Görüntü Bulanık İlişki Kareler Ortalama
GBKO	Görüntü Bulanık Kareler Ortalama
GBO	Görüntü Bulanık Ortalama
GGBBO	Genelleştirilmiş Görüntü Bulanık Bonferroni Ortalama
GBNABO	Görüntü Bulanık Normalleştirilmiş Ağırlıklı Bonferroni Ortalama
GBSABO	Görüntü Bulanık Sıralı Ağırlıklı Bonferroni Ortalama
İKBK	İki Kutuplu Bulanık Küme
KABK	Karmaşık Bulanık Küme
KBK	Kafes Bulanık Küme
KDBK	Küme Değerli Bulanık Küme
KK	Kaba Küme
NK	Nötrosofik Küme
PBK	Pisagor Bulanık Küme
SBK	Sezgisel Bulanık Küme
T1BK	Tip-1 Bulanık Küme
T2BK	Tip-2 Bulanık Küme
TBK	Tereddütlü Bulanık Küme
VB	Veri Birleştirmesi

1. GİRİŞ

Bu bölümde araştırmaya yol açan ön bilgilere genel bir gözden geçirme sağlanmaktadır. Motivasyon tartışmalarına dayalı olarak, araştırma farklı tür belirsizlik ortaya koyan kaynaklardan gelen bilgilerin birleştirildiği *farklı belirsizlik ortamlarında veri füzyonu* olarak tanımlanmaktadır. Bu doğrultuda, çalışmanın amaç ve kapsamı araştırma için teknik bir yol haritasının ana hatlarıyla birlikte tanımlanmaktadır.

Ön bilgi ve motivasyon

Karmaşık, ilk defa karşılaşılmış, nihai sonucun beklendiği ya da kritik durumları daha iyi anlamak ve analiz edebilmek için kararların birleştirilmesi doğuştan gelen bir insani reflekstir. Çok eski zamanlardan beri insanlar çevrelerini daha iyi anlamak için fikirlerinin birleştirilmesi gerektiği konusunda bilinçli olmuşlardır. Bu gerekliliğin temelinde de bağdaşan ya da çelişen, kesin ya da belirsiz farklı tür bilgilerin birleştirilmesi fikri yatmaktadır. Örneğin insan ilk defa gördüğü bir nesnenin ne olduğunu anlamaya çalışırken görme duyusunu ve gerektiği zaman ek olarak koklama, dokunma, işitme ve tatma duyularını kullanıp her bir deneyimden elde ettiği çıkarımları birleştirerek ilgili nesne hakkında fikir sahibi olmaya çalışır. Kimi zaman ise aynı nesne hakkında fikir sahibi olmak için birden fazla kişinin görüşleri birleştirilir. Çok eski zamanlardan beri çevrelerini daha iyi anlamak için insanlar tarafından yapılan bu eylem, günümüzde karmaşık durumları daha iyi anlamak ve karara bağlamak adına *veri/bilgi birleştirmesi* olarak gerçekleşmektedir.

Veri birleştirmesi (VB) kısaca, aynı veya farklı tür kaynaklardan elde edilen veri ve bilgilerin değerlendirilip birleştirilmesi ile daha kaliteli ve daha alakalı sonuçlar çıkarılarak tek kaynak kullanımından daha etkili, daha güvenilir, daha doğru ve verimli sonuçlar elde edilmesi için kullanılır. VB ham sensör verilerinin birleştirildiği veri seviyesinde, farklı özellik bakımından veri sağlayan sensör verilerinin birleştirildiği özellik seviyesinde ve uzman görüşlerinin birleştirildiği karar seviyesinde yapılabilir. Karar seviyesinde birleştirme yaparken birleştirilen bilgiler insan gibi sübjektif bir varlığın gölgesinde belirsizdir.

Günlük hayatta, iş hayatında, insan ilişkilerinde, karar vermede kısacası hayatın her alanında karşılaşılan belirsizlik, 1600'lü yıllarda şans oyunları ile ortaya çıkmış ve 20. yüzyılın ortalarına kadar nesnel olasılık olarak ifade edilmiştir [1]. Belirsizlik önlenemediği zaman çözümünün çok kolay olduğu, olasılık teorisi ile sorunun çözüleceği ifade edilmiş fakat belirsizlik içeren bazı problemlerde, belirsizliğin nadiren rassallık sonucu ortaya çıktığı görüldüğünde belirsizliğin sadece olasılık teorisi ile ifade edilemeyecek kadar geniş kapsamlı olduğunun farkına varılmıştır. Belirsizliğin farklı türlerinin olabileceği ilk defa Zadeh tarafından ortaya atılmıştır. Zadeh çalışmalarında bulanık küme kavramı ile ilgilenmiştir [2]. Böylece bir nesnenin klasik küme teorisindeki tek bir kümeye ait olma zorunluluğu ortadan kalkmış, nesne birden fazla kümeye belirli bir üyelik derecesi ile ait olabilmiştir. Daha sonraki yıllarda belirsizlik üzerine rassallık dışında kimi durumlarda birbirlerinden ayrılırken kimi durumlarda ise birbirlerini kapsayan yaklaşımlar çoğalmıştır [3-7].

Bulanık kümelerinin bir genişlemesi olarak Atanassov tarafından ortaya koyulan sezgisel bulanık kümelerde bir elemanın bir kümeye olan üyelik derecesinin ve üye olmama derecesinin toplamının bulanık kümelerdeki gibi 1 olması zorunluluğu yoktur [3]. Böylece belirsizliği ifade etmede daha esnek bir yaklaşım sağlar. Sezgisel bulanık kümelerin bir genişlemesi olarak Cuong tarafından ortaya koyulan görüntü bulanık kümelerde ise üyelik derecesi ve üye olmama derecesinin yanı sıra nötr üyelik derecesi vardır [4]. Nötr üyelik derecesi oy kullanma örneğinde çekimser oy kullanma durumuna olan üyelik derecesini ifade eder. Görüntü bulanık kümeler evet ya da hayır dışında cevapların da olabileceği durumları dikkate almada daha esnek bir yaklaşım sağlar.

Tek bir evrensel küme hakkındaki olasılıksal inançların birleştirildiği Dempster Shafer (D-S) birleştirme kuralı ve D-S tipi kurallardan, toplamsal olması gerekmeyen bulanık ölçülerin etkileşimlerini de dikkate alan bulanık integrallere ve birden fazla evrensel küme hakkındaki bilgilerin birleştirildiği birleştirme operatörlerine kadar çok fazla VB yöntemi vardır [8-14]. Birden fazla evrensel kümede görüş bildirirken (örneğin arabanın kırmızı olması ve arabanın yakıt tüketimi) görüşlerin olasılıksal olması gerekmez. Çünkü arabanın rengi ve yakıt tüketimi arasında bir ilişki yoktur. Bu durumda VB yaparken birleştirme operatörlerine başvurulur. Bulanık küme, sezgisel bulanık küme, görüntü bulanık küme, pisagor bulanık küme gibi farklı belirsizlik yaklaşımlarında aynı temel varsayımlara bağlı farklı birçok birleştirme operatörü önerilebilir [15-26]. Birleştirme operatörü önerilirken

dikkat edilmesi gereken iki konu işlemsel kuralların tanımlanması ve birleştirme fonksiyonunun seçilmesidir. İşlemsel kurallar t-norm ve t-konorm ailelerine bağlı seçilirken, birleştirme fonksiyonu olarak herhangi bir ortalama operatörü seçilebilir. Bu sayede farklı işlemsel kural ve birleştirme fonksiyonu kombinasyonları ile çok sayıda birleştirme operatörü elde edilir [17, 27-33].

Zadeh'in bulanık küme kavramından yola çıkarak olarak ortaya koyduğu olabilirlik teorisi, Dempster tarafından temelleri atılıp Shafer tarafından geliştirilen, bir olaya karşı inanç derecesinin o olayın tümleyenine olan inanç derecesi hakkında bilgi vermemesi ile öznel inancın daha iyi ifade edildiği D-S teorisinin iç içe geçmiş odak elemanlarla ilgilenen özel bir dalıdır. Zadeh'in görüşüne göre olabilirlik doğal dil ifadeleri ile dereceli semantiği buluşturmak için var olsa da olabilirlik teorisi çeşitli başka yorumlamalara da açıktır [34]. Bu yorumlamalardan bir tanesi "mümkün" kelimesinin "ne yapılabilir" ve "ne olabilir" anlamına gelen iki farklı kullanımına dayanmaktadır [35]. İlkinde durumun meydana gelmesindeki fiziksel yeterlilik ifade edilirken ikincisinde durumun meydana gelme eğilimi ifade edilmektedir. Bir durumun meydana gelebilmesi için ise fiziksel olarak yapılabilir olması gerekir.

VB yapılırken kaynaklardan elde edilen bilgiler yetersizlik noktalarının farklı olmalarından kaynaklı olarak her zaman aynı tür belirsizlik içermezler. Durum hakkında bir kaynaktan rassal bilgi elde edilirken diğer bir kaynaktan öznel bilgi elde edilebilir. Bu durumda VB yapmadan önce farklı türdeki belirsizliklerin aynı tür belirsizliğe çevrilmesi gerekir. Bir başka durumda ise birleştirilen olabilirlik bilgilerinin karar verme aşamasında kullanılabilmesi için olasılık bilgisine dönüştürülmesi gerekebilir. Ya da birleştirilen olasılık bilgilerinin bilgi kaynağının güvenilirliği zayıf olduğundan olabilirlik bilgisine dönüştürülmesi gerekebilir. Literatürde olasılık ve olabilirlik bilgileri arasındaki dönüşümler için birtakım prensiplere bağlı çok sayıda yöntem önerilmiştir [9, 36-44].

Amaç ve kapsam

Bu tez çalışmasının amacı farklı belirsizlik ortamlarından sağlanan bilgilerin birleştirildiği bir prosedür sunmaktır. Böylece bir durum veya olay hakkında farklı yapılardaki bilgilerden en fazla yarar sağlanarak daha verimli, daha sağlıklı, daha güvenilir sonuçlar ortaya konulacaktır.

Bu kapsamda ilk olarak çoklu kaynaklardan elde edilen aynı tür bilgilerin birleştirilebileceği bir birleştirme operatörü önermek adına, cebirsel işlem kuralları birleştirilen elemanlar arasındaki etkileşimleri de dikkate alan Bonferroni ortalama operatörü içerisinde kullanılarak görüntü bulanık sayılar için bazı birleştirme operatörleri geliştirilmiştir. İki farklı olabilirlik yorumu olan fiziksel olabilirlik ve bilgisel olabilirlik dağılımlarının sırasıyla üst sınır ve alt sınır olarak kabul edildiği yeni bir belirsizlik yaklaşımı olarak kurulan aralıklı olabilirlik ölçüsü farklı bulanık küme yaklaşımlarının birbirine denkliği kullanılarak görüntü bulanık sayı olarak ifade edilmiştir. Böylece aralıklı olabilirlik değerleri görüntü bulanık kümeler için önerilen birleştirme operatörleri kullanılarak birleştirilebilmiştir.

Karar verme sürecinde seçenekler arasında tercih yapabilmek için öncelikle seçeneklerin sıralanması gerekir. Aralıklı yapıdaki sayıların sıralanması kesin sayıların sıralanması kadar kolay değildir. Bu süreçte olabilirlik bilgisinden ziyade olasılık bilgisi tercih edilir. Aralıklı olabilirlik bilgisinin aralıklı alfa kesmeleri ile ifade edilebileceği gösterilmiş, aralıklı olabilirliklerden aralıklı kütle atamalarının elde edildiği bir dönüşüm yöntemi önerilmiştir. Aralıklı kütle atama değerleri elde edilen iç içe geçmiş alt kümeler için oranlı dönüşüm yardımıyla küme elemanlarının aralıklı olasılık değerleri bulunmuştur. Olasılık ölçüsünün toplamsallığı ve olasılık değerlerinin alt ve üst sınırlarının kısıtları oluşturduğu, belirsizliği minimize etmeyi amaçlayan doğrusal olmayan bir model ile elemanların kesin olasılık değerleri hesaplanmıştır.

Literatüre yeni bir belirsizlik yaklaşımı olarak sunulan aralıklı olabilirlik ölçüsü kavramının uygulanabilir olduğunu göstermek için gerçek hayat uygulamalarına ihtiyaç duyulmaktadır. Bu açıdan tezin uygulama bölümünde belirsizliğin aralıklı olabilirlik olarak ortaya koyulduğu bir problem ele alınarak uygulanabilirliği gösterilmiştir.

Tez organizasyonu

Şekil 1.1 ile bu teze ait motivasyon, literatür araştırması, problem tanımı, metodoloji, uygulama ve sonuçları içeren teknik yol haritası sunulmaktadır. Tezin ilerleyen bölümlerinde neler yapıldığı kısaca açıklanmaktadır.

İkinci bölümde problemin temelinde yer alan belirsizlik kavramı tanımlanmış, birinci alt bölümde bilgisizliğin bir türü olarak belirsizlik, belirsizliğin farklı sınıflandırmaları ve farklı türleri tanıtılmıştır. İkinci alt bölümde literatürdeki belirsizlik üzerine ortaya koyulan teorilere yer verilmiştir. Üçüncü alt bölümde olabilirlik teorisi ve bulanık kümeler arasındaki ilişki açıklanarak dördüncü alt bölümdeki olasılık ve olabilirlik arasındaki dönüşüm yöntemleri literatürüne temel hazırlanmıştır.

Üçüncü bölümde farklı bulanık küme tiplerinin tanımlamaları örnekleri ile birlikte sunulmuştur. Bu bulanık küme tipleri arasındaki bağlantılar şekil üzerinde gösterilmiştir.

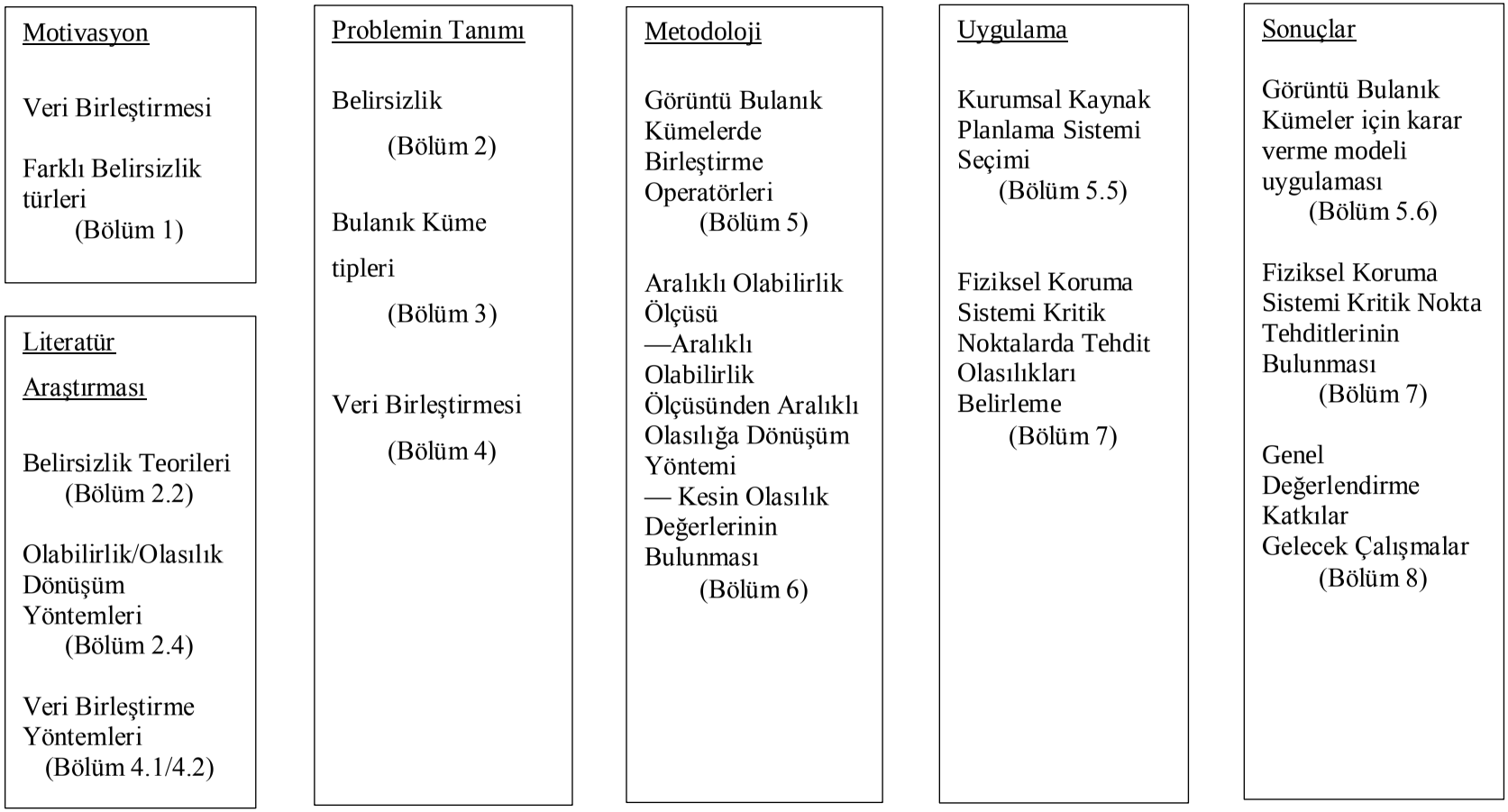
Dördüncü bölümde VB kavramı tanımlanmış, VB yapmanın gerekliliklerinden bahsedilmiştir. Birinci alt bölümde en basit birleştirme operatörleri, Sıralı Ağırlıklı ortalama (OWA) operatörü, t-norm ve t-konorm aileleri, bulanık integraller gibi VB'de kullanılan yöntemler örnekler ile açıklanmıştır. İkinci alt bölümde D-S birleştirme kuralı ve D-S birleştirme kuralı tipi birleştirme kuralları kullanılış yeri ve biçimine göre incelenmiş avantaj ve dezavantajları tartışılmıştır.

Beşinci bölümde görüntü bulanık sayılar için t-norm ve t-konorm ailelerine bağlı işlemsel kurallar tanımlanmıştır. Birinci alt bölümde görüntü bulanık Bonferroni ortalama operatörü önerilmiş, bu operatör kullanılarak yapılan birleştirme işleminde elde edilen sonucun da bir görüntü bulanık sayı olduğu ve bu birleştirme operatörünün bazı arzu edilen özellikleri sağladığı ispatlanmıştır. İkinci alt bölümde görüntü bulanık normalleştirilmiş ağırlıklı Bonferroni ortalama operatörü önerilmiş, bu operatör kullanılarak yapılan birleştirme işleminde elde edilen sonucun da bir görüntü bulanık sayı olduğu ve bu birleştirme operatörünün bazı arzu edilen özellikleri sağladığı ispatlanmıştır. Üçüncü alt bölümde görüntü bulanık sıralı ağırlıklı ortalama operatörü önerilmiş, bu operatör kullanılarak yapılan birleştirme işleminde elde edilen sonucun da bir görüntü bulanık sayı olduğu ve bu birleştirme operatörünün bazı arzu edilen özellikleri sağladığı ispatlanmıştır. Dördüncü alt bölümde görüntü bulanık bilgiler için bir karar verme modeli önerilmiş, beşinci alt bölümde bu model bir probleme uygulanarak önerilen operatörlerin kullanılabilirliği gösterilmiştir. Altıncı alt bölümde önerilen operatörlerin mevcut literatürdeki operatörler arasındaki yeri tartışılmıştır.

Altıncı bölümde aralıklı değerli olabilirlik ölçüsü kavramına giriş yapılmış, birinci alt bölümde temel tanımlara yer verilmiştir. İkinci alt bölümde aralıklı olabilirlik ölçüsünün alfa kesmesi ve aralıklı alfa kesmesi ile gösterilebileceği ispatlanmıştır. Üçüncü alt bölümde aralıklı olabilirlik ölçülerinin aralıklı alfa kesmesi gösterimi kullanılarak aralıklı olabilirlik ölçüsünden aralıklı kütle atama olasılığı bulan yeni bir yöntem önerilmiştir. Önerilen yöntemin literatürde tanımlanmış özellikleri sağladığı ispat edilmiştir. Elde edilen aralıklı kütle atama olasılıklarından aralıklı oranlı dönüşüm yöntemi ile aralıklı olasılıklar hesaplanmıştır. Dördüncü alt bölümde karar verme problemlerinde tercih işlemini kolaylaştırmak adına aralıklı değerler yerine kesin değerler arzu edildiğinden belirsizliği minimize edecek kesin olasılık değerleri için doğrusal olmayan programlama modeli kurulmuştur.

Yedinci bölümde beşinci bölümün ikinci alt bölümünde önerilen görüntü bulanık normalleştirilmiş ağırlıklı Bonferroni ortalama operatörü ve altıncı bölümün üçüncü alt bölümünde önerilen aralıklı olabilirlikten olasılığa dönüşüm yöntemi kullanılarak bir fiziksel koruma sistemi (FKS)'nde belirlenen kritik noktaların tehdit olasılıkları hesaplanmıştır.

Sekizinci bölümde bu tez kapsamında önerilen yöntemler genel hatlarıyla değerlendirilmiş, tezin literatüre katkıları özetlenmiştir. Gelecekte üzerine çalışabilinecek alanlara değinilerek tez sonuçlandırılmıştır.



Şekil 1.1. Tezin organizasyonu

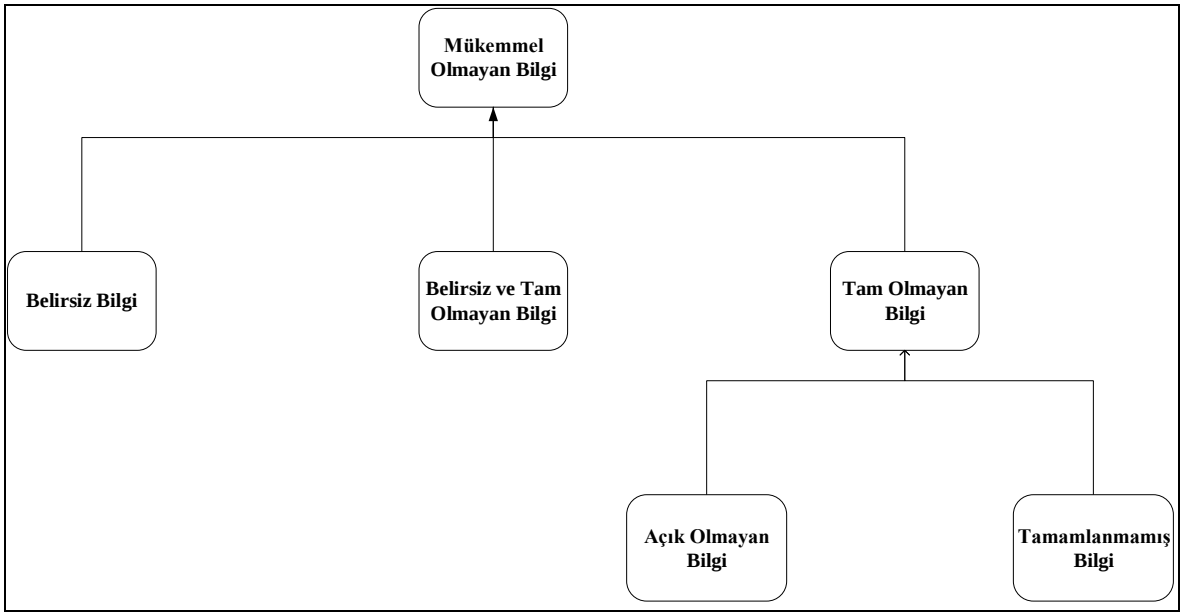
2. BELİRSİZLİK

Webster'in 20. yüzyıl sözlüğüne göre belirsizlik; kesin olarak bilinmeyen, tartışmaya açık, şüpheli, tanımlanmamış ya da belirlenmemiş değer, kesin olmayan, kesin bilgiye sahip olmayan, güvenilir olmayan, anlamı açık olmayan, sabit ya da durağan olmayan, değişken, değişmeye eğimli, güvenilmez olarak tanımlanmıştır [45].

Bilgi, kesin ve tam ise mükemmeldir. Bilginin kesin ve tam olması için nesneleri ifade eden sınıf tekli olmalı, bir özellik veya özellikler kümesi ile ilişkilendirilen güven derecesi 1'e eşit olmalı ve önerilen nesne, veri tabanına kayıtlı bilinen hedefler kümesinin bir parçası olmalıdır. Bu şartlardan biri sağlanmazsa yani bilgi kesin ve/veya tam değilse mükemmel de değildir [46]. Belirsizlik kavramı bilgi kavramı ile yakından ilişkilidir. Belirsizlik, bazı bilgi eksikliğinin ortaya konması; bilgi ise belirsizliği azaltmak için gerekli kapasitedir. Yani herhangi bir problemde bulunan belirsizlik, bazı bilgi eksikliği sonucu ortaya çıkmaktadır.

2.1. Belirsizliğin Sınıflandırılması

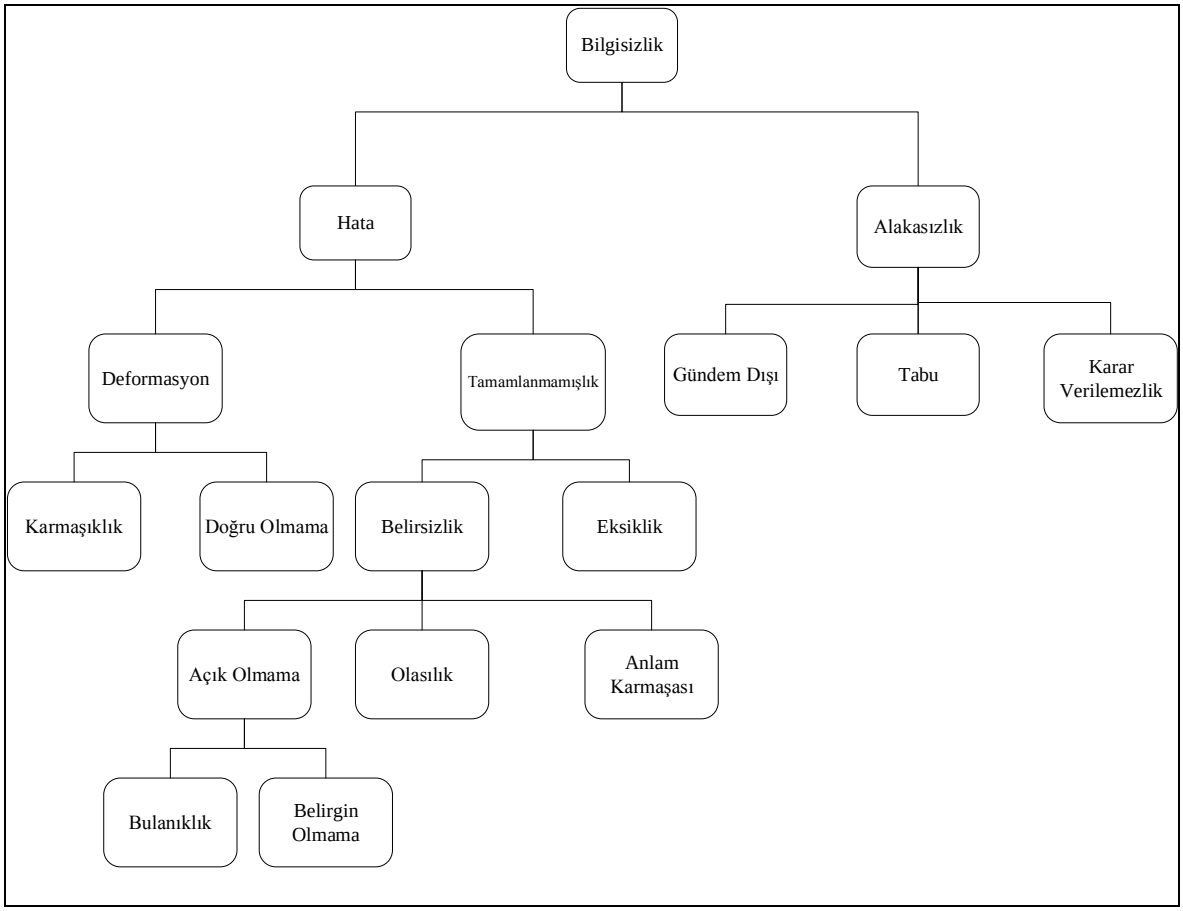
Literatürde belirsizliğin farklı sınıflandırmaları mevcuttur [45-49]. Smets mükemmel olmayan bilgiyi 'nesnelerin veri tabanına kayıtlı bilinen hedefler kümesinin bir parçası olması' şartını sağladığını varsayarak sınıflandırmıştır. Bu varsayıma göre, hedefler kümesinde 10 adet nesne varsa bilgi küme dışından 11. bir nesne ile alakalı olamaz. Smets'in Şekil 2.1'de gösterilen sınıflandırmasına göre belirsizlik kusurlu bilginin bir türüdür [46]. Belirsizlik, durumun doğru ya da yanlış olduğu kararının verilmesinde evrensel kümedeki bilgi eksikliğidir. Mükemmel bilginin bir özellik veya özellikler kümesi ile ilişkilendirilen güven derecesi 1'e eşit olmalı şartını sağlamaz. Tam olmamada ise mevcut bilgi, ya evrensel küme (nesne) ile alakalı değil ya da birden fazla kümeyle (nesne) alakalı olabilir. Mükemmel bilginin nesneleri ifade eden sınıf tekli olmalı şartını sağlamaz. Tam olmama bilginin kendisi ile ilgili bir özellik iken, belirsizlik evrensel küme (nesne) hakkındaki malumatımız ve bilgi arasındaki ilişkinin bir özelliğidir.



Şekil 2.1. Smets'in bilgi türleri sınıflandırması

Tam olmayan bilgi veri tabanındaki birden fazla nesne ile ilgili olan bilgidir. "Ayşe sınavdan en az 80 aldı" ifadesinde sınavdan alınan not tam olmama özelliği gösterir fakat kesindir. "Ayşe'nin sınavdan 88 alması 0,8 güven derecesine sahiptir" ifadesinde sınavdan alınan not tam bilgidir fakat kesin değil belirsizdir. "Ayşe'nin sınavdan 80-88 arasında not alması, 0,9 güven derecesine sahiptir" ifadesinde ise tam olmama ve belirsizlik aynı anda bulunmaktadır. Fakat genelde tam olmama durumu ne kadar fazlaysa kesinlik de o kadar fazla, tam olmama durumu ne kadar azsa kesinlik de o kadar azdır. Yani gerçek bilgiyi barındıran evrensel küme ne kadar geniş ise bu bilgiye olan güven de o kadar yüksektir. Gerçek bilgiyi barındıran küme daraldıkça bilgiye olan güven derecesi de azalacaktır. Tamamlanmamış bilgi doğruluğu, güven derecesi bilinmeyen fakat güven derecesinin üst sınırı bilinen bilgidir. Güven derecesi yerine güven derecesinin üst sınırı bilindiğinden tamamlanmamış denir. "Yaklaşan hedefin uçak olması muhtemeldir", örneğinde güven derecesi yerine güven derecesinin üst sınırı bilindiğinden tamamlanmamış bilgi vardır. Açık olmayan bilgi ise iyi tanımlanmamış nitelikle ifade edilmiş bilgidir. İyi tanımlanmamış bir nitelik sınıfına, bilinen bir nesnenin üyeliğinin kesin olmasındansa (1-ait,0-değil), üyeliğin bulanık olması tercih edilir. Açık olmayan bilgi türünde nesneler dilsel veya sezgisel ifadeler ile nitelendirilir. "Gözlenen hedefin büyük nesneler kümesine üyeliğinin derecesi 0,9'dur", örneğinde büyük niteliği dilsel ve sezgisel bir ifadedir [14].

Smithson belirsizliği bilgisizliğin bir türü olarak ele almıştır [48, 50]. Smithson'ın Şekil 2.2'de gösterilen sınıflandırmasına göre bilgisizlik aktif ve pasif bilgisizlik olarak ikiye ayrılır. Pasif bilgisizlik habersiz olunan alanlar, aktif bilgisizlik ise görmezden gelinen alanlar ile ilgilidir. Pasif bilgisizlik kapsamındaki bilinmeyenler için hata kavramı, aktif bilgisizlik kapsamındaki bilinmeyenler için alakasızlık kavramı kullanılır. Bilgisizlik, ihmal etme ve bilgisiz olma açısından ele alındığında; ihmal etme aktif yapıdadır ve bir şeye karşı göz yumma, kasten veya bilinçsiz olarak gözden kaçırmayı ifade ederken, bir şey hakkında bilgisiz olma pasif yapıdadır ve bozulmuş ya da tamamlanmamış bilgiyi ifade eder. İhmal etme eylemi alakasızlık kapsamında yer alırken bilgisiz olma hata kapsamında yer alır. Alakasızlık kavramının en aşikâr türü güncel olmamadır. Özel bir konu hakkında görüşüldüğünde bazı konular gündem dışı kalacaktır. Örneğin savunma politikası kararlarında çocuk oyuncaklarının ücreti gündem olarak düşünülmeyecektir. Alakasızlığın diğer iki türünden biri olan karar verilemezlik, insanların ya problemi çözümsüz görmelerinden ya da sorunun doğrulanabilirliğinin geçersiz olmasından dolayı doğru ya da yanlışı belirlemede aciz olmalarını ifade eder. Tabu konular ise insanların bilmemesi gereken hatta hakkında sormaması gereken konulardır. Tarih alanında önemli yeri vardır. Örneğin; 2. Dünya savaşı sırasında Japonya'nın nükleer bombalanması ya da Avustralya aborjinlerinin ölümü üzerine inceleme yapmak daha fazla tartışmaya neden olabileceğinden tabu konulardır. Hata ya tamamlanmamış ya da deforme olmuş kanılardan doğar. Deformasyon, doğru olmama ve karışıklık kavramları ile ifade edilir. "Tüm kuğular beyazdır" ifadesi doğru olmamaya örnektir. Sabun rafına peynir kalıplarının yerleştirilmesi ise karışıklığa bir örnektir ve haksız ikameyi belirtir. Tamamlanmamışlık deformasyona göre daha düzeltilebilir olduğundan daha çok üzerinde durulan bir kavramdır. Türde tamamlanmamışlık eksiklik ile ifade edilirken derecede tamamlanmamışlık belirsizlik ile ifade edilir. Eksiklik bilgideki bilinen ya da bilinmeyen boşluklardır. Belirsizlik ise tek bir disiplinle alakalı olmayan karmaşık bir kavramdır.



Şekil 2.2. Smitshon'ın bilgisizlik sınıflandırması

Belirsizlik, bilgisizliğin en yönetilebilir türlerinden bir tanesidir. Belirsizlik olasılık, açık olmama ve anlam karmaşası kavramları ile ifade edilir. Buradaki olasılık kavramı rassallığı ifade eder. En klasik örneği bozuk para atma oyunudur. Para 100 kere atılacak ve her yazı gelişinde 1 para birimi kazanılacaktır. Bu oyundan ne kadar para kazanılacağı belirsizdir. Fakat 100 atışı, yazı gelme olasılığı olan ½ ile çarparak beklenen miktar hesaplanabilir. Oyunun geliri hakkındaki belirsizlik olasılıksaldır ve ölçülebilir. Açık olmama bir süreklilik içinde olası değerler aralığı ile ilişkilidir. 0-100 para birimi arası bir miktar paranın miras olarak kaldığı düşünüldüğünde ortalaması 50 para birimi kabul edilerek olasılık teorisi burada uygulanamaz. 50'nin 0-100 arasındaki diğer tahminlere göre tercih edilme üstünlüğü yoktur. Bu tür belirsizlik olasılıkla ifade edilemez. Bilginin açık olmaması ile ifade edilir ve ölçülemez. Bulanıklık ve belirgin olmama açık olmamanın iki türüdür. Bulanıklık kesin olmayan bulanık sınırları ifade eder. Örneğin 'yaklaşan kişi gençtir' ifadesinde gençliğin sınırları bilinmediğinden ifade bulanıktır. "Okulun yakınında yaşıyorum" ifadesinin yürüyerek 5 dakika ya da arabayla 5 dakika olduğuna dair herhangi bir belirti vermemesi belirgin olmamasıdır. Anlam karmaşası ise dilsel örnekle en iyi ifade

edilen türüdür. Bir nesneyi niteleyen kelimenin birden fazla anlama gelmesi o nesne hakkında doğru bilgi elde edilmesini engelleyebilir.

2.2. Belirsizlik Teorileri

Bu alt bölümde sırasıyla temel belirsizlik teorileri olan olasılık teorisi, kanıt teorisi ve olabilirlik teorisi kavramlarına yer verilmiştir.

2.2.1. Olasılık teorisi

Sadece bir alternatifin doğru olduğu ve o alternatifin hangisi olduğu konusunda emin olunmadığı sınırlı X kümesinde doğru alternatif hakkındaki belirsizlik $p : X \rightarrow [0,1]$ ile tanımlanır.

$$\sum_{x \in X} p(x) = 1 \tag{2.1}$$

Eş. 2.1 *olasılık dağılım fonksiyonunu* verir. *P* olasılık dağılım fonksiyonu olmak üzere X kümesindeki her A alt kümesi için olasılık ölçüsü, *P*, Eş. 2.2 ile hesaplanır.

$$P(A) = \sum_{x \in A} p(x) \tag{2.2}$$

A ve B ayrık kümeleri için Eş. 2.3 olasılık ölçüsünün toplamsallığını ifade eder.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{2.3}$$

Bir olayın ortaya çıkmasının olaya uygun sonuç sayısına ve toplam sonuç sayısına bağlı olduğu objektif olasılıkta, mevcut belirsizlik şansa ve tekrarlanabilen rastgele deneylere dayalı belirsizliktir, bilgiyle azaltılamaz [14, 46, 47]. Atılan bir zarın tek gelme olasılığı, tek gelme olayına uygun sonuç sayısının, zar atıldığında ortaya çıkması mümkün eşit olasılıklı sonuçlara oranı ile bulunur. Objektif olasılığın tekrarı mümkün olmayan olaylardaki belirsizliği ifade etmede yetersiz kalması ile kişilerin kendi görüş ve deneyimlerine yer verdiği sübjektif olasılık devreye girmiştir.

Bayes Olasılık Teorisi bir olayın olma olasılığı hakkında kişilerin kendi görüşlerine yer verdikleri sübjektif olasılıkla ilgilenir [14, 46]. Gözlenen olay hakkında verilen hipotezin olasılığını hesaplamak için kullanılır. X evrensel kümesinde A ve B kümeleri için A ve B'nin olasılıkları sıfırdan büyük olmak şartı ile, B biliniyorken A'nın şartlı olasılığı Eş. 2.4, A biliniyorken B'nin şartlı olasılığı ise Eş. 2.5'deki gibi hesaplanır.

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{2.4}$$

$$P(B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{2.5}$$

Eş. 2.4 ve Eş. 2.5'den yararlanarak $P(A \setminus B)P(B) = P(B \setminus A)P(A)$ elde edilir. Bu eşitsizlikten elde edilen Eş. 2.6 Bayes teoremi olarak bilinir.

$$P(A \setminus B)\frac{P(B \setminus A)P(A)}{P(B)} \tag{2.6}$$

Eş. 2.6'da $P(B) = \sum P(A_i \cap B) = \sum P(B \setminus A_i)P(A_i)$ yerine yazılırsa Eş. 2.7 elde edilir.

$$P(A \setminus B) = \frac{P(B \setminus A)P(A)}{\sum P(B \setminus A_i)P(A_i)} \tag{2.7}$$

Örnek 2.1

Bir araştırmaya göre her 71 çocuktan 1 tanesi, yetişkinlikte ortaya çıkan belli bir hastalığa yakalanmakta ve tam güvenilir olmamasına rağmen yapılan test sonuçlarına göre, hastalıklı bir çocuğun testi %85 pozitif, sağlıklı bir çocuğun testi ise %10 pozitif sonuç vermektedir. Bu bilgilere göre test sonucu pozitif olan bir çocuğun gerçekten hasta olma olasılığı nedir?

P(A):Çocuğun hasta olma olasılığı=1/71
P(B): Testin pozitif çıkma olasılığı= 1/71*0,85+70/71*0,10=0,11
P(B\A):Hastalıklı çocuğun testinin pozitif çıkma olasılığı=0,85
P(A\B): Test sonucunun pozitif olduğu bilinen çocuğun hasta olma olasılığı?
P(A\B)=(P(B\A)*P(A))/P(B)=(0,85*1/71)/0,11=0,11

Bayes modelinde $P(A)+P(\bar{A})=1$ olduğundan, test sonucunun pozitif olduğu bilinen çocuğun hasta olma olasılığı 0,11 bulunurken test sonucunun pozitif olduğu bilinen çocuğun hasta olmama olasılığı 0,89 olur. Yani bir A önermesi hakkında sahip olunan bilgi onun tümleyeni hakkında da bilgi sahibi olmamızı sağlar. Emin olmadığımız A'nın tümleyeni içindeki olaylara olasılık değerleri atamaktan kaçınamayız. A hakkındaki inancımız bizi A'nın tümleyeni hakkında da inanç sahibi olmaya zorlar. Bu durum gerçek hayat ve uygulamalarda çok kısıtlayıcı olabilir. A hakkındaki bilgi her zaman A'nın tümleyeni hakkında da bilgi vermeyebilir. Sonuç olarak olasılık teorisi ile A'nın tümleyeni hakkındaki bilgisizliği göstermekte yetersiz kalınır [51].

2.2.2. Kanıt teorisi

Günlük hayatta bazı durumlar vardır, doğru olduğu bilinir; bazı durumlar vardır, yanlış olduğu bilinir; fakat çoğu durumların doğru ya da yanlış olduğu hakkında bilgimiz yoktur. Bu tür durumlar belirsizdir [1, 52]. Kesin doğru ya da yanlış anlayışına bilmiyorum seçeneğinin eklenmesi ile Dempster [53]'in alt ve üst olasılıklar olarak temellerini attığı daha sonra da Shafer [54] tarafından geliştirilen ve D-S teorisi olarak da anılan kanıt teorisi devreye girer. Kanıt teorisi, Bayes öznel olasılık teorisinin genelleştirilmiş halidir ve bir olaya karşı inanç derecesinin o olayın tümleyenine olan inanç derecesi hakkında bilgi vermemesi ile öznel inancın daha iyi ifade edilmesini sağlar. Kanıt teorisinde bir durumun olası sonuçları kesin olursa olasılık teorisine dönüşmektedir [14, 55-58]. Kanıt teorisinde durumların alacağı değerlerin oluşturduğu kümenin tüm alt kümelerine bir değer atanır ve atanan bu değerlerin toplamı 1'e eşittir. Atanan bu değer kütle ataması olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.

Herhangi bir durumun alabileceği değerlerin oluşturduğu küme ζ ve bu kümenin alt kümelerini gösteren küme $\wp$ olsun. $m:\wp(\zeta)\to[0,1]$ fonksiyonunun kütle atama fonksiyonu olması için aşağıda belirtilen özellikleri sağlaması gerekir.

(1) $m(\varnothing)=0$

(2) $\sum_{A \in \wp(\zeta)} m(A) = 1$

$m(A)$ değeri A kümesine atanan kanaatin ölçüsü olarak tanımlanır. $m(A) > 0$ olan herhangi bir A alt kümesi odak eleman olarak adlandırılır. Tüm odak elemanlar tekli ise inanç ve mümkünlük fonksiyonları olasılık fonksiyonuna dönüşür. $m(A)$, sadece A kümesinin kanıtının derecesidir, A'nın alt kümelerinin derecesi olarak kabul edilmez. A'nın özel bir alt kümesi $m(B)$ gibi başka bir kütle atama ile gösterilir. A B'yi kapsadığı zaman $m(B) \leq m(A)$ olmak zorunda değildir. $m(A)$ ve tümleyeni arasında ilişki yoktur ve $m(\zeta) = 1$ olmak zorunda değildir [57, 58].

Tanım 2.2.

A kümesine ve A kümesinin bütün alt kümelerine atanan kanaat değeri inanç fonksiyonu olarak adlandırılıp *Bel* ile Eş. 2.8'de tanımlanmıştır.

$$Bel(A) = \sum_{B \setminus B \subseteq A} m(B) \tag{2.8}$$

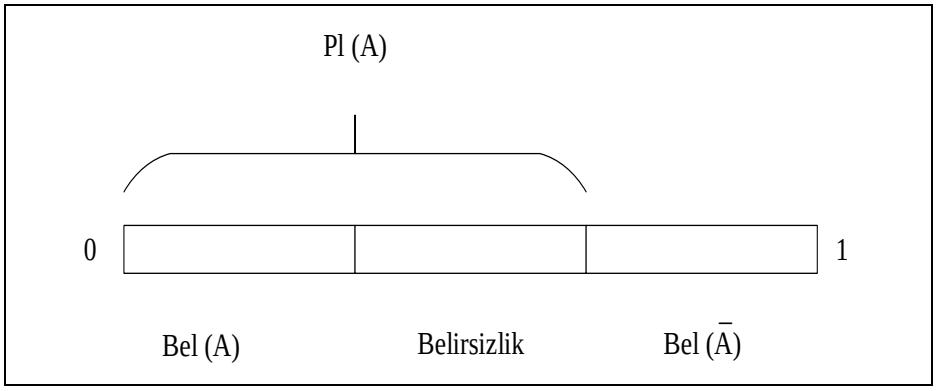
A kümesi ve A kümesiyle kesişen tüm kümelere atanan kanaat değeri mümkünlük fonksiyonu olarak adlandırılıp *Pl* ile Eş. 2.9'da tanımlanmıştır.

$$Pl(A) = \sum_{B \setminus A \cap B \neq \varnothing} m(B) \tag{2.9}$$

İnanç ve mümkünlük fonksiyonları arasındaki ilişki Eş. 2.10 ve Eş. 2.11'de tanımlanmış, Şekil 2.3'de gösterilmiştir.

$$Pl(A) = 1 - Bel(\bar{A}) \tag{2.10}$$

$$Bel(A) = 1 - Pl(\bar{A}) \tag{2.11}$$



Şekil 2.3. İnanç ve mümkünlük fonksiyonları arasındaki ilişki

Şekil 2.3'den anlaşıldığı gibi belirsizliğin azalması A olayına duyulan inancın artmasını sağlayacaktır. Belirsizliğin olmadığı durumlarda inanç ve mümkünlük değerleri birbirine eşittir. Bu durum olasılık teorisine denk düşmektedir.

Teorem 2.1.

(X,m) içiçe geçmiş evreni tanımlasın. Bu durumda inanç ve mümkünlük ölçüleri aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(1) $Bel(A \cap B) = \min[Bel(A), Bel(B)]$

(2) $Pl(A \cup B) = \max[Pl(A), Pl(B)]$

İspat

X'teki odak elemanlar iç içe geçmiş ve altküme ilişkisiyle sıralanmış olsun. *t*, *X*'ten keyfi seçilen *A* altkümesindeki en büyük *i* tamsayısı; *z*, *X*'ten keyfi seçilen *B* altkümesindeki en büyük i tamsayısı olsun.

$X = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ ve $A_i \subset A_j, i < j$

$A_t \subset A$ ve $A_i \subset B$ eğer $i \le t$ ve $i \le z$.

$A_i \subseteq A \cap B$ eğer $i \leq \min(t, z)$

$$Bel(A \cap B) = \sum_{i=1}^{\min(t,z)} m(A_i) = \min\left[\sum_{i=1}^{\min(t)} m(A_i), \sum_{i=1}^{\min(z)} m(A_i)\right]$$
$$= \min[Bel(A), Bel(B)]$$

$$Pl(A \cup B) = 1 - Bel(\overline{A \cup B}) = 1 - Bel(\bar{A} \cap \bar{B})$$
$$= 1 - \min[Bel(\bar{A}), Bel(\bar{B})]$$
$$= \max[1 - Bel(\bar{A}), 1 - Bel(\bar{B})]$$
$$= \max[Pl(A), Pl(B)]$$

Örnek 2.2. [59]

Rafael tarafından yapıldığı düşünülen eski bir tablo bulunmuştur. Fakat bulunan tablonun durumuyla ilgili aşağıda belirtilen kuşkular söz konusudur.

1. Tablo Rafael tarafından yapılmıştır.
2. Tablo Rafael'in öğrencilerinden biri tarafından yapılmıştır.
3. Tablo sahtedir.

Bu 3 durum R (Rafael), D (Öğrenci), C (Sahte) $\zeta = \{R, D, C\}$ evrensel kümesini oluştursun. Odak elemanlar ve bu elemanların değerleri Çizelge 2.1'de verilmiştir. Tablonun Rafael veya Rafael'in öğrencilerinden biri tarafından yapıldığı fikrine olan inanç değeri 0,20'ye eşittir. Tablonun Rafael veya Rafael'in öğrencilerinden biri tarafından yapıldığı fikrine olan karşıt inanç değeri ise 0,05'dir. Bu durumda bir belirsizlik söz konusu olup belirsizlik değeri 0,75'e eşittir. Aslında Tablonun Rafael veya Rafael'in öğrencilerinden biri tarafından yapıldığı fikrine olan inanç değeri [0,20; 0,95] aralığında değişmektedir. Bu durumun Bayes öznel olasılık teorisindeki yorumu olasılık değerinin [0,20; 0,95] arasında herhangi bir değere sahip olabileceğidir.

Çizelge 2.1 Odak elemanların kütle atama, inanç ve mümkünlük değerleri

Odak Elemanlar	*m*	*Bel*	*Pl*
R	0,05	0,05	0,90
D	0	0	0,80
C	0,05	0,05	0,80
$R \cup D$	0,15	0,20	0,95
$R \cup C$	0,10	0,20	1
$D \cup C$	0,05	0,10	0,95
$R \cup D \cup C$	0,60	1	1

$$Bel(R) = m(R) = 0,05$$

$$Bel(R \cup D) = \sum_{B \setminus B \subseteq R \cup D} m(B) = m(R) + m(D) + m(R \cup D) = 0,20$$

Örnek 2.2'de odak elemanların Çizelge 2.2'deki gibi tekli elemanlardan oluştuğu durumda Tablonun Rafael tarafından yapıldığına olan inanç değeri 0,45, karşıt inanç değeri ise 0,55'tir. Bu durumda herhangi bir belirsizlik olmayıp kanıt teorisi Bayes öznel olasılık teorisine dönüşmektedir.

Çizelge 2.2. Tekli odak elemanların kütle atama, inanç ve mümkünlük değerleri

Odak Elemanlar	*m*	*Bel*	*Pl*
R	0,45	0,45	0,45
D	0,30	0,30	0,25
C	0,25	0,25	0,25

2.2.3. Olabilirlik teorisi

Olabilirlik teorisi, farklı tiplerde belirsizlik içeren durumları analiz ve karakterize etmede uygun olan matematiksel yapılardan bir tanesidir. Zadeh, tarafından ortaya konulan olabilirlik teorisi odak elemanların iç içe geçtiği kanıt şekli ile ilgilenen, kanıt teorisinin özel bir dalıdır. İnanç ve mümkünlük ölçülerinin olabilirlik teorisindeki karşılıkları sırasıyla gereklilik ve olabilirlik ölçüleridir [60].

Tanım 2.3.

$\wp(\zeta)$'te tanımlı $\forall x \in \zeta$ için $Nec : \zeta \to [0,1]$ fonksiyonu *Nec* olarak tanımlanan gereklilik ölçüsü fonksiyonudur. Bu fonksiyon aşağıdaki şartları sağlayan bir fonksiyondur.

(1) $Nec(\varnothing) = 0$

(2) $Nec(\zeta) = 1$

I'nın keyfi indeks olduğu herhangi bir $\{A_i \mid A_i \in \wp(\zeta), i \in I\}$ ailesi için Eş. 2.12 gereklilik ölçüsünün gerekliliğidir.

$$Nec\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = eba_{i \in I} Nec(A_i) \tag{2.12}$$

Burada *eba* gereklilik ölçülerinin en büyük alt sınırını ifade eder.

$\wp(\zeta)$'te tanımlı $\forall x \in \zeta$ için $\Pi : \zeta \to [0,1]$ fonksiyonu *Pos* olarak tanımlanan olabilirlik dağılım fonksiyonudur. Bu fonksiyon aşağıdaki şartları sağlayan bir fonksiyondur.

(1) $Pos(\emptyset) = 0$

(2) $Pos(\zeta) = 1$

I'nın keyfi indeks olduğu herhangi bir $\{A_i \mid A_i \in P(X), i \in I\}$ ailesi için Eş. 2.13 olabilirlik ölçüsünün şartıdır.

$$Pos\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = ekü_{i \in I} Pos(A_i) \tag{2.13}$$

Burada *ekü* olabilirlik ölçülerinin en küçük üst sınırını ifade eder.

Teorem 2.2.

(X,m) içiçe geçmiş evreni tanımlasın. Bu durumda gereklilik ve olabilirlik ölçüleri aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(1) $Nec(A \cap B) = \min[Nec(A), Nec(B)]$

(2) $Pos(A \cup B) = \max[Pos(A), Pos(B)]$

Teorem 2.2'nin ispatı Teorem 2.1'in ispatı gibidir. Teorem 2.2'den aşağıdaki özellikler kolayca çıkarılabilir.

(1) $Nec(A \cap \bar{A}) = \min[Nec(A), Nec(\bar{A}) = 0$

(2) $Pos(A \cup \bar{A}) = \max[Pos(A), Pos(\bar{A}) = 1$

Gereklilik ve olabilirlik ölçüleri inanç ve mümkünlük ölçülerinin özel durumları olduğundan Eş. 2.14 – Eş. 2.16'daki şartları sağlarlar.

$$Nec(A) + Nec(\bar{A}) \leq 1 \tag{2.14}$$

$$Pos(A) + Pos(\bar{A}) \geq 1 \tag{2.15}$$

$$Nec(A) = 1 - Pos(\bar{A}) \tag{2.16}$$

Teorem 2.3.

$\wp(\zeta)$'de tanımlı bir A alt kümesinin gerekliliği 0'dan büyükse olabilirliği 1; olabilirliği 1'den küçükse gerekliliği 0'dır.

İspat

$$Nec(A) > 0 \Rightarrow Nec(\bar{A}) = 0$$

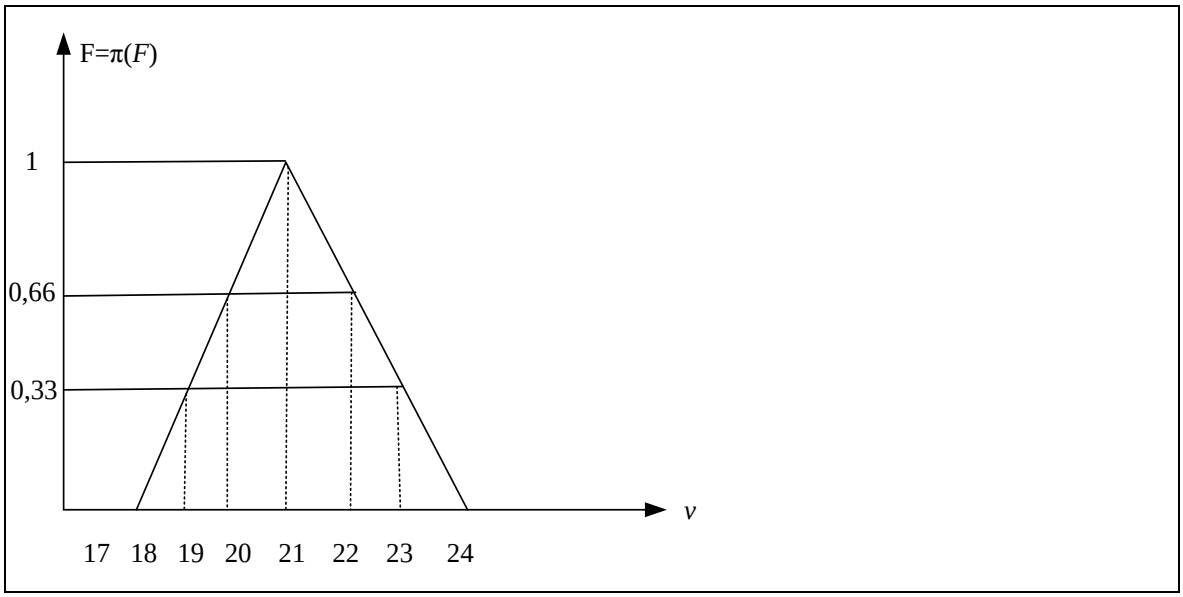
$$Pos(A) = 1 - Nec(\bar{A}) = 1$$

$$Pos(A) < 1 \Rightarrow Pos(\bar{A}) = 1$$

$$Nec(A) = 1 - Pos(\bar{A}) = 0$$

Örnek 2.3.

X evrensel kümesinde $V \subseteq X$, $v \in V$ olmak üzere $\pi_F : V \to [0,1]$ fonksiyonu küme elemanlarının "Ali gençtir" önermesine olabilirliğini gösterir. Olabilirlik dağılımı Şekil 2.4 ile gösterilmiş, A alfa kesmesi (Tanım 3.3'de verilmiştir.) kümelerinin olabilirlik ve gereklilik ölçüleri hesaplanmıştır.



Şekil 2.4. Olabilirlik dağılımı

$$\pi(19) = 0,33$$

$$\pi(20) = 0,66$$

$\pi(21)=1$

$\pi(22)=0,66$

$\pi(23)=0,33$

$A_{\alpha}=\{\nu\in A\big|\mu_A(\nu)\geq\alpha\}$

$A_1=\{21\}$

$A_{0,7}=\{20,21,22\}$

$A_{0,5}=\{19,20,21,22,23\}$

$Pos(A_1)=1$

$Pos(A_{0,7})=1$

$Pos(A_{0,5})=1$

$Pos(\bar{A}_1)=0,66$ $\quad$ $Nec(A_1)=0,33$

$Pos(\bar{A}_{0,7})=0,33$ $\quad$ $Nec(A_{0,7})=0,66$

$Pos(\bar{A}_{0,5})=0$ $\quad$ $Nec(\mathrm{A}_{0,5})=1$

Teorem 2.4.

$\wp(\zeta)$'deki her olabilirlik ölçüsü, olabilirlik dağılım fonksiyonu tarafından Eş. 2.17 ile belirlenebilir [37, 61].

$$Pos(A)=\max_{x\in A}\pi(x) \tag{2.17}$$

İspat

Bu teorem A kümesinin kardinalitesi üzerinde tümevarımla ispatlanabilir. A kümesinin kardinalitesi, $|A|$, 1 olsun. O halde $x \in \zeta$ için $A = \{x\}$ olur.

$$\begin{aligned} Pos(A) &= \max\left[Pos(\{x_1, x_2, ..., x_{n-1}\}), Pos(\{x_n\})\right] \\ &= \max\left[\max\left[Pos(\{x_1\}), ..., Pos(\{x_{n-1}\})\right], Pos(\{x_n\})\right] \\ &= \max\left[Pos(\{x_1\}), ..., Pos(\{x_{n-1}\}), Pos(\{x_n\})\right] \\ &= \max_{x \in A} \pi(x) \end{aligned}$$

$X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ evrensel küme ve $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n (= X)$, $A_i = \{x_1, x_2, ..., x_i\}, i \in N_n$ olan iç içe kümeler olmak üzere kütle atama değerleri aşağıdaki şartları sağlar.

(1) $m(A) = 0, A \neq A_i$

(2) $\sum_{i=1}^{n} m(A_i) = 1$

$x_i \in X$ için $\pi_i = \pi(x_i) = Pos(\{x_i\}) = Pl(\{x_i\})$, kütle atama değerlerinden olabilirlik ölçüsü Eş. 2.18 ile belirlenir.

$$\pi_i = Pl(\{x_i\}) = \sum_{k=i}^{n} m(A_k) = \sum_{k=i}^{n} m_k \qquad (2.18)$$

Örnek 2.4.

Çizelge 2.3'de olabilirlik ölçüsü alt kümeleri, kütle atama değerleri ve kütle atama değerlerinden elde edilen olabilirlik değerleri verilmiş, Şekil 2.5'de şema üzerinde gösterilmiştir.

Çizelge 2.3 Odak elemanların kütle atama ve olabilirlik değerleri

Kümeler	Odak Elemanlar Kümesi	$m(A_i)$	π_i
A_1	X_1	0,2	1
A_2	$X_1 \cup X_2$	0,1	0,8
A_3	$X_1 \cup X_2 \cup X_3$	0,4	0,7
A_4	$X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4$	0,2	0,3
A_5	$X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4 \cup X_5$	0,1	0,1

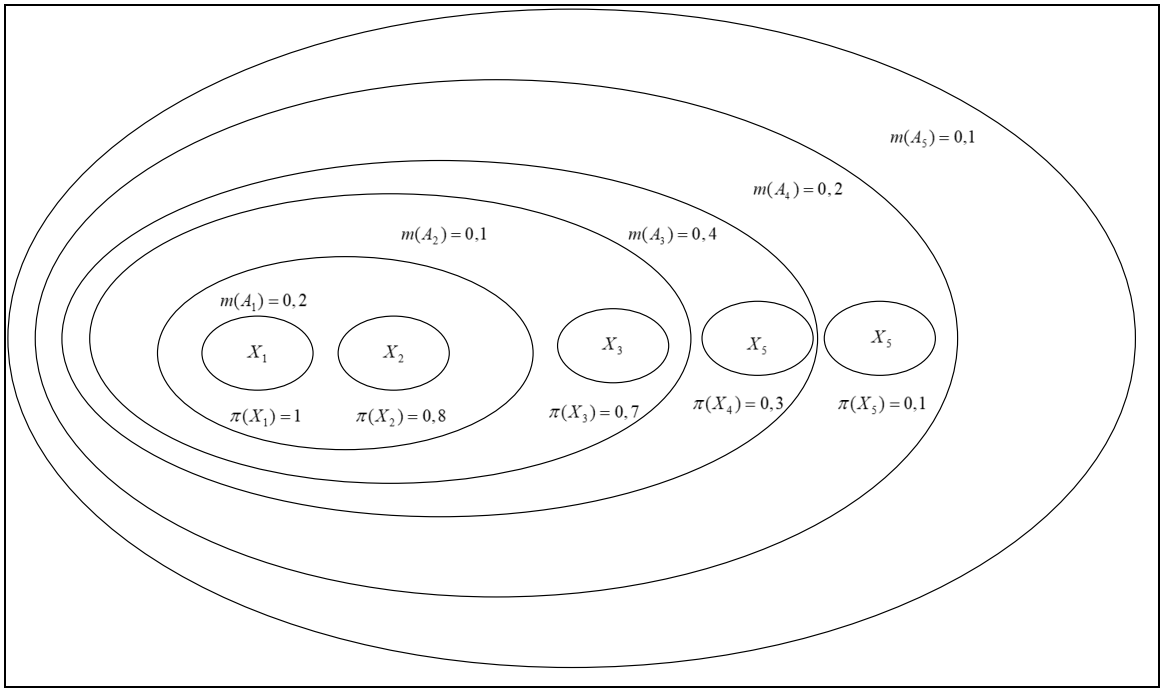
$$r_1 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5$$
$$= 0,2 + 0,1 + 0,4 + 0,2 + 0,1$$
$$= 1$$

$$r_2 = m_2 + m_3 + m_4 + m_5$$
$$= 0,1 + 0,4 + 0,2 + 0,1$$
$$= 0,8$$

$$r_3 = m_3 + m_4 + m_5$$
$$= 0,4 + 0,2 + 0,1$$
$$= 0,7$$

$$r_4 = m_4 + m_5$$
$$= 0,2 + 0,1 = 0,3$$

$$r_5 = m_5 = 0,1$$



Şekil 2.5. Olabilirlik ölçüsünün iç içe geçmiş odak elemanları

Kanıt teorisinin iki özel dalı olan olasılık teorisi ve olabilirlik teorisinin bir takım benzerlik ve farklılıkları bulunmaktadır. Bu özellikleri Çizelge 2.4'de verilmiştir.

Çizelge 2.4. Olasılık ve olabilirlik teorilerinin temel özellikleri

Olasılık Teorisi	Olabilirlik Teorisi
Ölçümler tek tiptir. Olasılık ölçüsü vardır.	Ölçümler iki tiptir. Olabilirlik ve gereklilik ölçüsü vardır.
Odak elemanlar tekil elemanlardır.	Odak elemanlar iç içe geçmiş alt küme elemanlarıdır.
$p : X \rightarrow [0,1]$	$\pi : X \rightarrow [0,1]$
$P(A) = \sum_{x \in A} p(x)$	$Pos(A) = \max_{x \in A} \pi(x)$
$\sum_{x \in X} p(x) = 1$	$\max_{x \in X} \pi(x) = 1$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	$Pos(A \cup B) = \max[Pos(A), Pos(B)]$ $Nec(A \cap B) = \min[Nec(A), Nec(B)]$
$P(A) + P(\bar{A}) = 1$	$Pos(A) + Pos(\bar{A}) \geq 1$ $Nec(A) + Nec(\bar{A}) \leq 1$
Bilgisizlik $p(x) = 1/\lvert X \rvert, \forall x \in X$	Bilgisizlik $\pi(x) = 1, \forall x \in X$

2.3. Olabilirlik ve Bulanık Küme İlişkisi

Olabilirlik teorisi ve bulanık kümeler arasındaki ilişki *bulanık kısıtlama* [62]'dan geçmektedir. *X*, elemanları *u* olan *U* evrensel kümesinde değer alan değişken iken; *X*=u, *X*'e u değerinin atandığını gösterir. *F*, μ_F üyelik fonksiyonu ile nitelendirilen, *X*'in bulanık bir alt kümesi iken; eğer *F*, *X*'e atanabilecek değerler (u değerlerinin X'e atanması) üzerinde elastik bir kısıt gibi davranırsa, *F*, *X*'te bir bulanık kısıtlamadır [34].

$$X = u : \mu_F(u) \tag{2.19}$$

Eş. 2.19'da $\mu_F(u)$, *X*'e *u* değeri atandığında *F* ile temsil edilen bulanık kısıtlamanın tatmin edilme derecesi olarak yorumlanır.

R(X), X ile ilişkili bulanık kısıtlama olsun. *F*'in *X* ile ilgili bulanık kısıtlaması Eş. 2.20 ile gösterilir.

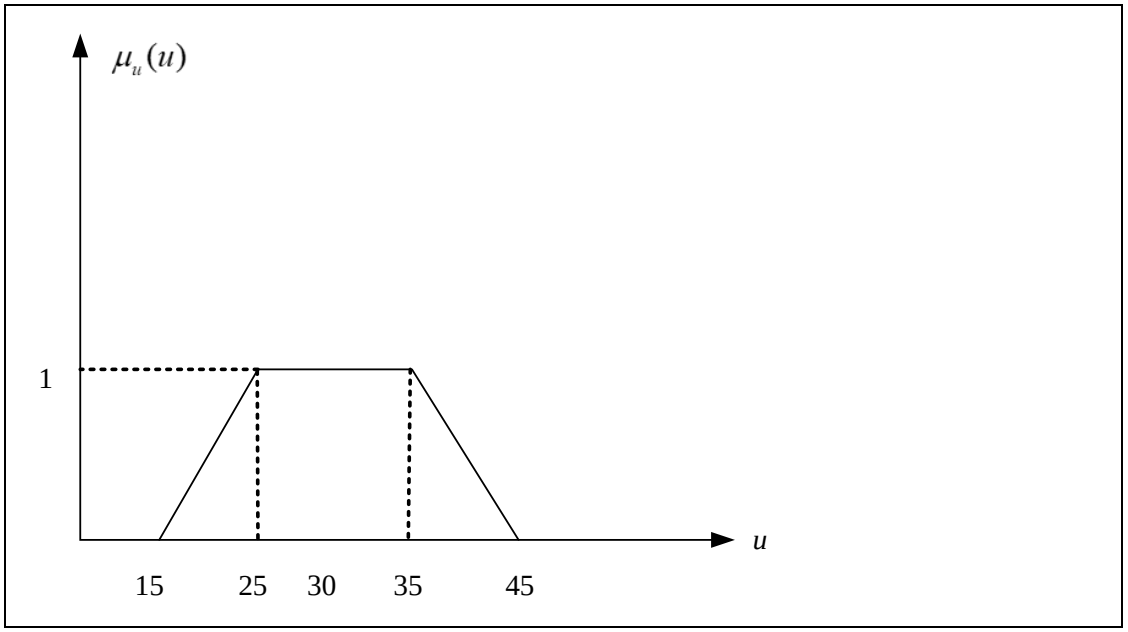
$$R(X) = F \tag{2.20}$$

Eş. 2.20, *X* ile ilişikli kısıtlamaya bir bulanık kümenin atanmasını gösteren *ilişkisel atama denklemi* olarak adlandırılır. $p \triangleq X\ F$ 'tir önermesinde 'Ali çok zekidir', 'X küçük bir sayıdır', 'Ayşe sarışındır ifadesi oldukça doğrudur' örneklerinde görüldüğü gibi *X* değişken, nesne ya da özelliğin adı; *F* ise *U*'nun bulanık kümesinin adıdır. Böyle bir önermenin dönüşümü Eş. 2.21 ile ifade edilir.

$$R(A(X)) = F \tag{2.21}$$

Burada *A(X), U*'da değer alan *X*'in bir özelliğini gösterir ve Eş. 2.21, $p \triangleq X\ F$ önermesinin *A(X)*'in değerleri üzerindeki bulanık kısıtlamaya *F*'i atama etkisine sahip olduğunu gösterir. Eş. 2.21'e göre Ali gençtir önermesi, A genç bulanık kümesi U=[0,100] evrensel kümenin bulanık alt kümesi olmak üzere, Eş. 2.22'deki gibi dönüştürülür. U evrensel kümesindeki $\mu_A(u) : U \rightarrow [0,1]$ fonksiyonlu bir A genç bulanık kümesi Şekil 2.6'da gösterilmiştir.

$$Ali\ gençtir \rightarrow R(yaş(Ali)) = Genç \tag{2.22}$$



Şekil 2.6. Genç bulanık kümesi

Bulanık kısıtlama kavramını olabilirlik dağılımı ile ilişkilendirilirken bulanık kısıtlamadaki Eş. 2.22'nin sağ tarafı (genç) aşağıdaki gibi yorumlanır.

Sayısal olarak, yaş değeri u=23'ün genç bulanık kümesindeki üyelik derecesi 0,7'dir. Bulanık kümede 0,7 değeri, genç etiketine 23'ün uygunluğunun derecesi olarak yorumlanır. Olabilirlik teorisinde ise "Ali gençtir" önermesine "Ali 23'tür" ifadesinin olabilirliğinin derecesine dönüştürür. Kısacası *u* değerinin genç bulanık kümesine üyelik derecesi, verilen 'Ali gençtir' önermesine *u* değerinin olabilirliğinin derecesine dönüşür.

Eş. 2.20'yi sağlayan $p \triangleq X\ F$ önermesi olabilirlik dağılımı, Π_X, ile *X*'i Eş. 2.23'deki gibi ilişkilendirir [34].

$$\Pi_X = R(X) \tag{2.23}$$

π_x, *X* ile ilgili olabilirlik dağılım fonksiyonudur ve sayısal olarak *F*'in üyelik fonksiyonuna eşittir.

$$\pi_X \triangleq \mu_F \tag{2.24}$$

Eş. 2.24'de, $\pi_X(u)$, X=u'nun olabilirliğini ifade eder ve $\mu_F(u)$ ile eşit olduğu varsayılır. Eş. 2.20 ve Eş. 2.23'den yararlanarak Eş. 2.25 elde edilir.

$$\Pi_X = F \tag{2.25}$$

Eş. 2.25'deki olabilirlik dağılım fonksiyonu olabilirlik ölçüsü ile bulanık kümelere genişletilir.

$$Pos_X(A) = ek\ddot{u}_{u \in U} \min[F(u), A(u)] \tag{2.26}$$

Eş. 2.26, U'da tanımlanan tüm A bulanık kümeleri için kurulabilir. Burada *ekü* en küçük üst sınırı ifade eder. $A = \varnothing$ olduğu zaman $Pos_X(A) = 0$ 'dır.

Olabilirlik teorisinin bulanık küme yorumu, bulanık kümeler ve olabilirlik ölçülerinin yukarıda gösterilen matematiksel yapılarındaki benzerlikten dolayı doğal olarak ortaya çıkar. Bu benzerlik iç içe geçmiş kümeler ailelerinden kaynaklanır. Olabilirlik teorisinde bu aileler odak elemanlardan, bulanık kümelerde ise α kesmelerinden oluşur [63].

2.4. Olabilirlik/Olasılık Dönüşüm Yöntemleri

Belirsizliği ele alan iki temel teoriden rassallık ve kararsızlık durumlarında kantitatif model sunan olasılık ile kısmi bilgisizliğin kalitatif gösterimini sağlayan olabilirliğin birbirlerine dönüşümü veri havuzunun genişletilip çeşitlendirilmesi açısından önemlidir. Bir olay veya durum karşısında bazı kaynaklar olasılık ölçüsü üretiyorken bazı kaynaklar olabilirlik ölçüsü üretebilir. Örneğin Ali'nin kahvaltıda yediği yumurta hakkında 'Ali kahvaltıda 0,6 olasılıkla 2 yumurta yer' ve 'Ali'nin kahvaltıda 2 yumurta yemesinin olabilirliği 1'dir' şeklinde iki farklı tür bilgi bulunabilir. Bu iki farklı bilginin içerdiği belirsizlik türleri aynı değildir. Bu durumlarda bilgilerin karşılaştırılıp değerlendirilebilmeleri için belirsizliklerin aynı türe dönüştürülmesi gerekir. Bu dönüşümler olasılıktan olabilirliğe ve olabilirlikten olasılığa olmak üzere iki yönlü yapılabilmektedir. Olabilirlik ve olasılık arasındaki dönüşümler olasılık ve bulanık kümeler arasındaki ilişki ile mümkündür. Bu ilişki bulanık kümelerin üyelik fonksiyonunun olabilirlik dağılımını tanımlamada kullanılması ve

olabilirlik derecesinin olasılık derecesinin üst sınırı olarak kabul edilmesi ile mümkündür [38].

Olasılık ve olabilirlik yaklaşımları belirsizliğin iki denk gösterimi olmadığından iki yönlü dönüşümlerde her zaman simetri yoktur. Olabilirlik gösterimi toplamsaldan ziyade sırasal bir yapı benimsediğinden ve kesin olmama durumunu ele aldığından olasılık gösterimine göre daha zayıftır [36]. Olasılık ölçüsünden olabilirlik ölçüsüne dönmek bilgi kaynağının zayıf olduğu durumlarda ya da olabilirlik hesaplamanın olasılık hesaplamaktan daha basit olduğu durumlarda faydalı sonuçlar verecektir [38]. Olabilirlik ölçüsünden olasılık ölçüsüne dönmek ise kesin bir sonucun tercih edildiği karar verme problemlerinde kullanılmaktadır [64, 65]. Çünkü karar verici 'ileride neler mümkün' sorusunun cevabı yerine 'gelecekte muhtemelen nelerin olacağı' sorusunun cevabını bilmek isteyecektir [66]. Olasılık dağılımından olabilirlik dağılımı ve tersi (olabilirlik dağılımından olasılık dağılımı) elde edilirken bu dönüşümler bazı ilkelere dayandırılmıştır.

Zadeh olasılık ve olabilirlik arası dönüşümlerin bu dağılımlar arasındaki tutarlılığa bağlı olduğunu kabul etmiştir. Olasılık olabilirlik tutarlılığı ilkesi 'mümkün olan'ın etkilemesi ve 'olası olan'dan etkilenmesinin sonucudur. Bu ilkeye göre bir olayın olabilirliğinin azaltılması onun olasılığını azaltma eğilimindeyken tersi her zaman doğru değildir [34]. Olasılık ve olabilirlik arasındaki tutarlılık ölçüsü Eş. 2.27'de gösterilmiştir.

$$C_Z(\pi, p) = \sum_{i=1}^{n} \pi(x_i)\, p(x_i) \tag{2.27}$$

C değerinin büyük olması iki kavram arasındaki daha büyük tutarlılığı yansıtır. Zadeh daha sonra ortaya koyduğu bu prensibin kesin bir kural ya da olasılık ve olabilirlik dağılımları arasında bir ilişki olmadığına dikkat çekmiştir. Sadece bir olayın olabilirliğinin azalması olasılığını da azaltma eğiliminde iken tersi durumun geçerli olmadığı olabilirlik ve olasılık arasındaki sezgisel ilişkinin formülüdür. Bu formülasyonda bazı araştırmacılar tarafından problemler bulunmuş ve yeni olasılık olabilirlik tutarlılığı prensipleri önerilmiştir.

Dubois ve Prade'in tutarlılığa bakış açısı bir olay karşısında olabilirliğin desteğinin olasılık kadar güçlü olmadığı ve dolayısıyla olabilirliğin olasılıktan daha zayıf bir kavram olduğu

fikrine dayalıdır. Olabilirlik ölçüsü Π, olasılık ölçüsünün $P(\Pi)$ ailesi ile eş değerdir. Burada $P(\Pi) = \{P, \forall A \text{ ölçülebilir}, P(A) \leq \Pi(A)\}$'dır. $P \in P(\Pi)$ ise olasılık ölçüsü P ve olabilirlik ölçüsü Π tutarlıdır [38]. Bu tutarlılık Eş. 2.28'de ifade edilmiştir.

$$C_{DP}(\pi, p) = \begin{cases} 1 \text{ eğer } \forall A \text{ için } \Pi(A) \geq P(A) \text{ ise,} \\ 0 \text{ d.d.} \end{cases} \tag{2.28}$$

Yukarıda gösterilenler başta olmak üzere literatürde önerilmiş farklı tutarlılık hesapları vardır [11, 40, 67].

Klir'ın tutarlılık anlayışı mevcut dağılımın ve dönüşümden sonra elde edilen dağılımın içerdiği belirsizliklerin eşit olduğunu kabul eder. Eğer dağılımlardan birinde tam bilgisizlik meydana gelmişse bu bilgisizlik diğer dağılımdaki karşılığına aktarılmalıdır. Olasılıkta bilgisizlik tüm alternatiflerin eşit olasılığa (1/n) sahip olması ile ifade edilirken olabilirlikte bilgisizlik evrendeki tüm alternatiflerin olabilirliğinin 1 olmasıdır. Klir'ın dönüşüm ilkeleri her π_i değerini p_i / p_1 (p'ler azalan sıra)'in bir fonksiyonu olmaya zorlar. Bu dönüşümler olabilirliğin olasılık dağılımının fonksiyonu olduğu bir skalanın varlığına bağlıdır. Ayrıca Klir'ın iddia ettiği belirsizliğin değişmezliği ilkesine göre de dönüşümden önceki belirsizlik sayısal olarak dönüşümden sonraki belirsizliğe eşit olmalıdır. Son olarak da olası olan olabilir olmalı, $\pi(u) \geq p(u)$ tutarlılık şartı sağlanmalıdır [68].

Olabilirlik dağılımına göre eğer x elemanı y elemanına tercih ediliyorsa bu önceliğin olasılık kurulurken de korunmasını gerektirir. Böylece daha mümkün olan daha olası olaylar göz önüne çıkarılır. Amaç olabilirlik ölçüsünün özelliklerini kaybetmeden mümkün olasılık ölçüsünü bulmaktır. Olabilirlik dağılımından elde edilen olasılık dağılımı, $\pi(x) > \pi(y)$ sadece ve sadece $p(x) > p(y)$ ise önceliğin korunmasını, $p(x) > p(y)$ ise $\pi(x) > \pi(y)$'dir, zayıf önceliğin korunmasını ifade eder. Burada eşit olasılıklı olaylar eşit olabilirliğe sahip olmak zorunda değildir [38].

2.4.1. Olabilirliğe dönüşüm yöntemleri

Olasılıktan olabilirliğe dönüşümlerde nokta değerlilikten aralıklı değerliliğe geçiş yapılır. Klir'ın skala dönüşümleri oran skala, fark skala, aralıklı skala, log-aralıklı skaladır [68].

Oran Skala dönüşümü α'nın pozitif sabit olduğu $\pi_i = \alpha p_i$ eşitliğinden yararlanarak yapılır. Olabilirliksel normalizasyon ($\pi_1 = 1$), eşitlikte kullanıldığında $1 = \alpha p_1$ ve sonuç olarak Eş. 2.29 elde edilir.

$$\pi_i = \frac{p_i}{p_1} \tag{2.29}$$

Burada p_i'ler azalan sırada sıralanmıştır. Bu dönüşüm oran özelliğinden ($\pi_i / p_i = \alpha$) başka özellikleri koruma adına çok katıdır. Oranların neden korunması gerektiğinin açık bir nedeni yoktur.

Örnek 2.5.

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ evrensel kümesindeki elemanların olasılık değerleri verilmiştir.

$p(x_1) = 0,4$

$p(x_2) = 0,3$

$p(x_3) = 0,2$

$p(x_4) = 0,1$

Bu olasılıklara ait oran skala dönüşümleri Eş. 2.29 kullanılarak elde edilmiştir.

$$\pi_1 = \frac{p_1}{p_1} = 1$$

$$\pi_2 = \frac{p_2}{p_1} = 0,75$$

$$\pi_3 = \frac{p_3}{p_1} = 0,5$$

$$\pi_1 = \frac{p_4}{p_1} = 0,25$$

Fark Skala dönüşümünde β'nin pozitif sabit olduğu $\pi_i = p_i + \beta$ eşitliği kullanılır. Olabilirliksel normalizasyon bu eşitlikte kullanıldığında Eş. 2.30'daki dönüşüm elde edilir.

$$\pi_i = 1 - (p_1 - p_i) \tag{2.30}$$

Örnek 2.5'de verilen olasılıklara ait fark skala dönüşümleri Eş. 2.30 kullanılarak elde edilmiştir.

$$\pi_1 = 1 - (p_1 - p_1) = 1$$

$$\pi_2 = 1 - (0,4 - 0,3) = 0,9$$

$$\pi_3 = 1 - (0,4 - 0,2) = 0,8$$

$$\pi_4 = 1 - (0,4 - 0,1) = 0,7$$

Aralık Skala dönüşümünde α (α>0) ve β'nın pozitif sabit olduğu $\pi_i = \alpha p_i + \beta$ eşitliği kullanılır. Olabilirliksel normalizasyondan β değeri elde edildiğinde Eş. 2.31'deki dönüşüm elde edilir.

$$\pi_i = 1 - \alpha(p_1 - p_i) \tag{2.31}$$

α değerini belirlemek için olasılıktaki ve olabilirlikteki belirsizliğin eşit olduğunu kabul eden belirsizliğin değişmezliği prensibi uygulanır. Olasılık dağılımında belirsizliğin ölçüsü Shannon entropi (S), olabilirlik dağılımında belirsizliğin ölçüsü spesifk olmama (SO) ve çelişme (C) ölçülerinin toplamıdır. Olasılıksal belirsizlik ölçüsü ve olabilirliksel belirsizlik ölçüsünün (SOC) eşitliğinden faydalanarak α değeri bulunabilir. İlgili eşitlikler Eş. 2.32 – Eş. 2.36'da verilmiştir.

$$S(p) = SO(\pi) + C(\pi) = SOC(\pi) \tag{2.32}$$

$$S(p) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i) \log_2 x_i \tag{2.33}$$

$$SO(\pi) = \sum_{i=2}^{n} \pi_i \log_2 \frac{i}{i-1} \tag{2.34}$$

$$C(\pi) = \sum_{i=2}^{n} (\pi_i - \pi_{i+1}) \log_2 \frac{i}{\sum_{j=1}^{i} \pi_j} \tag{2.35}$$

$$SOC(\pi) = \sum_{i=2}^{n} (\pi_i - \pi_{i+1}) \log_2 \frac{i^2}{\sum_{j=1}^{i} \pi_j} \tag{2.36}$$

Örnek 2.5'de verilen olasılıklara ait aralık skala dönüşümleri $\alpha = 0,3$ için Eş. 2.31 kullanılarak elde edilmiştir.

$$\pi_1 = 1 - 0,3(0,4 - 0,4) = 1$$

$$\pi_2 = 1 - 0,3(0,4 - 0,3) = 0,97$$

$$\pi_3 = 1 - 0,3(0,4 - 0,2) = 0,94$$

$$\pi_4 = 1 - 0,3(0,4 - 0,1) = 0,91$$

Log-Aralıklı Skala dönüşümleri α ve β'nın pozitif sabit olduğu $\pi_i = \beta p_i^{\alpha}$ eşitliğini kullanır. β değeri olabilirliksel normalizasyon kullanılarak belirlendiğinde α değeri belirsizliklerin eşitsizliğini ifade eden Eş. 2.32'den yararlanılarak kurulan Eş. 2.37 kullanılarak hesaplanır.

$$S(P) = \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{p_i}{p_1} \right)^{\alpha} \log_2 \frac{i}{i-1} \tag{2.37}$$

Bu eşitliğin çözümünden elde edilen α değeri Eş. 2.38'de yerine konduğunda arzu edilen olabilirlik dağılımı elde edilir.

$$\pi_i = \left(\frac{p_i}{p_1} \right)^{\alpha} \tag{2.38}$$

Örnek 2.5'de verilen olasılıklara ait log-aralık skala dönüşümleri $\alpha = 0,3$ için Eş. 2.38 kullanılarak elde edilmiştir.

$$\pi_1 = \left(\frac{p_1}{p_1} \right)^{0,3} = 1$$

$$\pi_2 = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{0,3} = \left(\frac{0,2}{0,5} \right)^{0,3} = 0,76$$

$$\pi_3 = \left(\frac{p_3}{p_1} \right)^{0,3} = \left(\frac{0,15}{0,5} \right)^{0,3} = 0,7$$

$$\pi_4 = \left(\frac{p_4}{p_1} \right)^{0,3} = \left(\frac{0,1}{0,5} \right)^{0,3} = 0,62$$

$$\pi_5 = \left(\frac{p_5}{p_1} \right)^{0,3} = \left(\frac{0,05}{0,5} \right)^{0,3} = 0,5$$

Dubois, Klir'ın skala dönüşümlerinin olabilirliği olasılığın bir fonksiyonu olarak kabul etmesinin olasılık-olabilirlik tutarlılığı prensibine $(\Pi \geq P)$ ters düşebileceğini öne sürmüştür [36]. Ayrıca olasılıksal bilgi ölçüsü ile olabilirliksel bilgi ölçüsünün eşit olduğu varsayımı, olabilirlik ve olasılık arasındaki farkın sadece çeviri farkı olduğu, birinin diğerine ne bir üstünlüğü ne de bir zayıflığının olmadığı şeklinde yorumlanır. Bu durumda olasılıksal ve olabilirliksel belirsizlik ölçülerinin farklı olmalarına rağmen aynı tür belirsizliği ifade etmeleri anlamına gelir.

Dubois ve Prade'in Eş. 2.39'da önerdiği dönüşüm, Klir'in dikkate aldığı belirsizliğin eşit olması varsayımını dikkate almaz. Bu dönüşümde olabilirlik-olasılık tutarlılığı, önceliğin

korunması ve olasılıktan mümkün olduğu kadar çok bilginin korunarak maksimum bilgi içeren olabilirliğin bulunması yani maksimum belirli olabilirlik dağılımının bulunması prensipleri göz önünde bulundurulur [37, 69]. Eş. 2.39'da *p*'ler azalan sırada sıralanmıştır.

$$\pi_i = \sum_{j=i}^{n} p_j \tag{2.39}$$

Eş. 2.39'dan sonra aynı değere sahip p'leri de dikkate alan asimetrik dönüşüm Eş. 2.40'da ortaya koyulmuştur.

$$\pi_1 = 1$$

$$\pi_i = \sum_{j=i}^{n} p_j \quad \text{eğer } p_{i-1} > p_i \text{ ise} \tag{2.40}$$

$$\pi_i = \pi_{i-1} \quad \text{eğer } p_{i-1} = p_i \text{ ise}$$

Örnek 2.5'de verilen olasıklara ait Dubois ve Prade'in asimetrik dönüşümleri Eş. 2.40 kullanılarak elde edilmiştir.

$$\pi_1 = \sum_{j=1}^{4} p_j = 1$$

$$\pi_2 = \sum_{j=2}^{4} p_j = 0,6$$

$$\pi_3 = \sum_{j=3}^{4} p_j = 0,3$$

$$\pi_4 = \sum_{j=4}^{4} p_j = 0,1$$

Eş. 2.41'de gösterilen simetrik dönüşüm ise Dubois ve Prade'in Eş. 2.28'deki tutarlık prensibini sağlayan en spesifik dönüşümdür.

$$\pi_i = \sum_{j=i,\ldots,n} \min(p_j, p_i) \tag{2.41}$$

Örnek 2.5'de verilen olasıklara ait Dubois ve Prade'in simetrik dönüşümleri Eş. 2.41 kullanılarak elde edilmiştir.

$$\pi_1 = \sum_{j=1,\ldots,n} \min(p_j, p_1) = 1$$

$$\pi_2 = \sum_{j=1,\ldots,n} \min(p_j, p_2) = 0,9$$

$$\pi_3 = \sum_{j=1,\ldots,n} \min(p_j, p_3) = 0,7$$

$$\pi_4 = \sum_{j=1,\ldots,n} \min(p_j, p_4) = 0,4$$

Moral ise olasılıktan olabilirliğe giderken olasılık dağılımında bulunan mevcut tüm olabilirlik dağılımları arasından entropiyi minimize eden olabilirlik dağılımını seçen dönüşümü önermiştir [11]. Eş. 2.42'de p'ler azalan sıradadır ($p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n$).

$$\pi_i = \sum_{j \geq i} p_j \tag{2.42}$$

Örnek 2.5'de verilen olasılıklara ait Moral'ın dönüşümü Eş. 2.42 kullanılarak elde edilmiştir.

$$\pi_1 = \sum_{j \geq 1}^{4} p_j = 1$$

$$\pi_2 = \sum_{j \geq 2}^{4} p_j = 0,9$$

$$\pi_3 = \sum_{j \geq 3}^{4} p_j = 0,7$$

$$\pi_4 = \sum_{j \geq 4}^{4} p_j = 0,4$$

Civanlar ve Trussell'in önerdiği dönüşümün Zadeh'in tutarlılık prensibine uygunluğu Eş. 2.43'deki c eşik değerine bağlıdır [70].

$$C_{CT}(\pi, p) = \sum_i \pi_i p_i \geq c \tag{2.43}$$

Eş. 2.44'de verilen dönüşümde λ değeri Eş. 2.45 ile bulunur.

$$\pi_i = \begin{cases} \lambda p_i, & \text{eğer } \lambda p_i < 1 \\ 1, & \text{eğer } \lambda p_i \geq 1 \end{cases} \tag{2.44}$$

$$\lambda \sum_{\lambda p_i < 1} p_i^2 + \sum_{\lambda p_i \geq 1} p_i - c = 0 \tag{2.45}$$

Örnek 2.5'de verilen olasılıklara ait Civanlar ve Trussell 'in dönüşümü $\lambda = 3$ için Eş. 2.44 kullanılarak elde edilmiştir.

$$\pi_1 = \min(\lambda p_1, 1) = 1$$

$$\pi_2 = \min(\lambda p_2, 1) = 0,9$$

$$\pi_3 = \min(\lambda p_3, 1) = 0,6$$

$$\pi_4 = \min(\lambda p_4, 1) = 0,3$$

Dubois ve arkadaşları, bu metodun sonucunun c eşik değerine bağlı olmasını yöntemin dezavantajı olarak görmüş ve olasılık olabilirlik tutarlılığını ihlal edebileceğini iddia etmişlerdir [36].

Mouchaweh ve arkadaşları, olasılıktan olabilirliğe değişken dönüşüm adını verdikleri Eş. 2.46'daki dönüşümü önermişlerdir [44].

$$\pi_i = \left(\frac{p_i}{p_1} \right)^{k(1-p_i)} \tag{2.46}$$

Burada k Dubois'in Eş. 2.28'deki tutarlılığını sağlamayı garanti eden bir sabittir. Bu sabitin tutarlılığı sağlaması için Eş. 2.47'de verilen aralıkta olmalıdır. Eğer k değeri Eş. 2.47'deki üst sınırına eşit olursa, $k_{\max}$, bu yönteme göre elde edilen olabilirlik, π_n , p_n olasılığına eşit olur. Eğer k değeri maksimum değerinin üzerine çıkarılırsa olabilirlik değeri olasılık değerinden küçük olur ve tutarlılık prensibi ihlal edilir [44].

$$0 \le k \le \frac{\log p_n}{(1-p_n)\log \frac{p_n}{p_1}} \tag{2.47}$$

Örnek 2.5'de verilen olasıklara ait değişken dönüşüm yapılırken Eş. 2.47'den elde edilen k aralığı $0 \le k \le 1{,}85$ olurken dönüşüm, k=1 için Eş. 2.46 kullanılarak elde edilmiştir.

$$\pi_1 = \left(\frac{p_1}{p_1}\right)^{1(1-p_1)} = 1$$

$$\pi_2 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(1-p_2)} = 0{,}82$$

$$\pi_3 = \left(\frac{p_3}{p_1}\right)^{(1-p_3)} = 0{,}57$$

$$\pi_4 = \left(\frac{p_4}{p_1}\right)^{(1-p_4)} = 0{,}29$$

Mouchaweh ve arkadaşlarının önerdiği bu dönüşümde olasılık dağılımı doğrusal olmayan bir şekilde dönüştürülür. Yani bu dönüşümle yüksek olasılıklara küçük olasılıklardan daha fazla bilgi eklenir. Bu durum yüksek olasılık değerlerinin düşük olasılıklara göre daha küçük üs kuvvetine, $k(1-p_i)$, sahip olmasından kaynaklanır [44]. Eş. 2.46'da önerilen dönüşüm ile Klir'ın Eş. 2.38'de önerdiği log-aralıklı skala dönüşümü arasındaki fark orantısal skalanın üs kuvvetlerinden kaynaklı bir farktır. Klir'ın dönüşümündeki üs, α, belirsizliği korumak için [0,1] aralığındayken bu dönüşümdeki üs, $k(1-p_i)$, dönüşümü daha spesifik yapmak adına değişkendir.

2.4.2. Olasılığa dönüşüm yöntemleri

Klir skala dönüşümlerini olasılıktan olabilirliğe olduğu gibi olabilirlikten olasılığa da tanımlamıştır [71]. *Oran Skala* dönüşümü α'nın pozitif sabit olduğu $p_i = \pi_i / \alpha$ eşitliğinden yararlanarak yapılır. Olasılıksal normalizasyon ($\sum_{i=1}^{n} p = 1$)'dan yararlanarak $1 = (\pi_1 + \pi_2 + ... + \pi_n) / \alpha$ elde edilir. Sonuç olarak Eş. 2.48'deki dönüşüm elde edilir.

$$p_i = \frac{\pi_i}{\pi_1 + \pi_2 + ... + \pi_n} \tag{2.48}$$

Örnek 2.6.

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ evrensel kümesindeki elemanların olabilirlik değerleri verilmiştir.

$\pi(x_1) = 1$

$\pi(x_2) = 0,9$

$\pi(x_3) = 0,7$

$\pi(x_4) = 0,4$

Bu olabilirliklere ait oran skala dönüşümleri Eş. 2.48 kullanılarak elde edilmiştir.

$$p_1 = \frac{\pi_1}{\pi_1 + \pi_2 + ... + \pi_n} = 0,33$$

$$p_2 = \frac{\pi_2}{\pi_1 + \pi_2 + ... + \pi_n} = 0,3$$

$$p_3 = \frac{\pi_3}{\pi_1 + \pi_2 + ... + \pi_n} = 0,23$$

$$p_4 = \frac{\pi_4}{\pi_1 + \pi_2 + ... + \pi_n} = 0{,}13$$

Fark skala dönüşümünde β'nin pozitif sabit olduğu $\pi_i - \beta = p_i$ eşitliği kullanılır. Olasılıksal normalizasyon bu eşitlikte kullanıldığında Eş. 2.49'daki dönüşüm elde edilir.

$$p_i = \pi_i - \frac{\pi_2 + \pi_3 + ... + \pi_n}{n} \tag{2.49}$$

Örnek 2.6'da verilen olabilirliklere ait fark skala dönüşümleri Eş. 2.49 kullanılarak elde edilmiştir.

$$p_1 = \pi_1 - \frac{\pi_2 + \pi_3 + \pi_4}{4} = 0{,}5$$

$$p_2 = \pi_2 - \frac{\pi_2 + \pi_3 + \pi_4}{4} = 0{,}4$$

$$p_3 = \pi_3 - \frac{\pi_2 + \pi_3 + \pi_4}{4} = 0{,}2$$

$$p_4 = \pi_4 - \frac{\pi_2 + \pi_3 + \pi_4}{4} = 0{,}1$$

Aralık skala dönüşümünde α (α>0) ve β'nın pozitif sabit olduğu $\frac{\pi_i - \beta}{\alpha} = p_i$ eşitliği kullanılır. β değeri olasılıksal normalizasyon ile elde edildiğinde Eş. 2.50'deki dönüşüm elde edilir.

$$p_i = \frac{\pi_i - \alpha_\pi}{\alpha} + \frac{1}{n} \tag{2.50}$$

Burada $\alpha_\pi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \pi_i$ olabilirlik dağılımının ortalama değeridir. Eş. 2.32'den faydalanarak α değeri bulunabilir.

Log-aralıklı skala dönüşümleri α ve β'nın pozitif sabit olduğu $\frac{\pi_i}{\beta} = p_i^{\alpha}$ eşitliğini kullanır. β değeri olasılıksal normalizasyon kullanılarak belirlendiğinde Eş. 2.51'deki dönüşüm elde edilir.

$$p_i = \frac{\pi_i^{1/\alpha}}{s} \tag{2.51}$$

Burada $s = \sum_{k=1}^{n} \pi_k^{1/\alpha}$ 'dır. α değeri Eş. 2.32 kullanılarak hesaplanır. Bu eşitliğe göre Eş. 2.52'in çözülmesi gerekir.

$$SO(\pi) = -\sum_{i=1}^{n} \pi_i^{1/\alpha} \log_2 \frac{\pi_i^{1/\alpha}}{s} \tag{2.52}$$

Bu eşitliğin çözümünden elde edilen α değeri Eş. 2.51'de yerine konduğunda arzu edilen olasılık dağılımı elde edilir.

Dubois ve Prade'in önerdiği dönüşüm, olabilirlik dağılımının iç içe rassal küme olarak görüldüğü, mümkün olduğu kadar çok belirsizlik içeren fakat olabilirlik dağılımının özelliklerini de koruyan olasılık dağılımını bulmayı amaçlayan dönüşümdür [37]. Eş. 2.53'deki dönüşümde π_j 'ler azalan sırada sıralanmıştır.

$$p_i = \sum_{j=i,\ldots,n} \frac{\pi_j - \pi_{j+1}}{j} \tag{2.53}$$

Örnek 2.6'da verilen olabilirliklere ait Dubois ve Prade'in dönüşümleri Eş. 2.53 kullanılarak elde edilmiştir.

$$p_1 = \sum_{j=1,\ldots,4} \frac{\pi_j - \pi_{j+1}}{j} = \frac{1-0,9}{1} + \frac{0,9-0,7}{2} + \frac{0,7-0,4}{3} + \frac{0,4-0}{4} = 0,4$$

$$p_2 = \sum_{j=2,3,4} \frac{\pi_j - \pi_{j+1}}{j} = \frac{0,9-0,7}{2} + \frac{0,7-0,4}{3} + \frac{0,4-0}{4} = 0,3$$

$$p_3 = \sum_{j=3,4} \frac{\pi_j - \pi_{j+1}}{j} = \frac{0,7-0,4}{3} + \frac{0,4-0}{4} = 0,2$$

$$p_4 = \sum_{j=4} \frac{\pi_j - \pi_{j+1}}{j} = \frac{0,4-0}{4} = 0,1$$

Eş. 2.54'de verilen dönüşüm Eş. 2.39'un tersi dönüşümdür. Burada $\pi_i > \pi_{i+1}$ olması $p_i > p_{i+1}$ olacağı anlamına gelmez.

$$p_i = \pi_i - \pi_{i+1} \tag{2.54}$$

Örnek 2.6'da verilen olabilirliklere ait Dubois ve Prade'in simetrik dönüşümleri Eş. 2.54 kullanılarak elde edilmiştir.

$$p_1 = \pi_1 - \pi_2 = 0,1$$

$$p_2 = \pi_2 - \pi_3 = 0,2$$

$$p_3 = \pi_3 - \pi_4 = 0,3$$

$$p_4 = \pi_4 - \pi_5 = 0,4$$

Eş. 2.55'de olabilirlik dağılımında bulunan olasılık dağılımları arasından entropiyi maksimize eden olasılık dağılımını seçen dönüşüm önerilmiştir [11]. Burada π'ler artan sırada sıralanmıştır.

$$p_1 = \min_i \frac{\pi_i}{i}$$

$$p_k = \min_{i=k,k+1,\ldots,n} \frac{\pi_1 - \sum_{j=1}^{k-1} p_j}{i-k+1} \tag{2.55}$$

Örnek 2.6'da verilen olabilirliklere ait Moral'ın dönüşümleri Eş. 2.55 kullanılarak elde edilmiştir.

$$p_1 = \min_i \frac{\pi_1}{1}, \frac{\pi_2}{2}, \frac{\pi_3}{3}, \frac{\pi_4}{4} = 0,1$$

$$p_2 = \min_{i=k,k+1,\ldots,n} \frac{\pi_1 - \sum_{j=1} p_j}{i-2+1} = \min \frac{0,9}{1}, \frac{0,9}{2}, \frac{0,9}{3} = 0,3$$

$$p_3 = \min_{i=k,k+1,\ldots,n} \frac{\pi_1 - \sum_{j=1,2} p_j}{i-3+1} = \min \frac{1-0,4}{1}, \frac{0,6}{2} = 0,3$$

$$p_4 = \min_{i=4} \frac{\pi_1 - \sum_{j=1,2,3} p_j}{i-4+1} = \frac{1-0,7}{1} = 0,3$$

Smets tarafından önerilen dönüştürülebilir inanç modelinin karar aşamasında kullanılan kısmı aynı zamanda bir dönüşüm yöntemidir [9, 72]. İnançlar beklenen değer maksimizasyonu ile karar vermede kullanılır [73]. İnanç ölçüleri olasılık ölçüsüne dönüştürülür. Bu olasılık ölçüsü bilginin sağlandığı kaynağın inancına bağlıdır fakat onun inancının gösterimi olarak da anlaşılmamalıdır. Sadece inanç fonksiyonundan türetilen bir olasılık fonksiyonudur. Oranlı dönüşüm, *BetP,* olarak tanımlanan dönüşüm Eş. 2.56'daki gibi hesaplanır.

$$BetP(A) = \sum_{B \subseteq X, A \in W} \frac{1}{|B|} \frac{m(B)}{(1-m(\varnothing))}, \forall A \in X \tag{2.56}$$

Burada $|B|$, X 'in B'deki elemanlarının sayısıdır. Tekli olmayan $A \subseteq X$ için oranlı dönüşüm Eş. 2.57 ile hesaplanır.

$$BetP(A) = \sum_{\omega \in A} BetP(\omega) \tag{2.57}$$

Örnek 2.7.

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ evrensel kümesindeki elemanların odak elemanlarının kütle atama değerleri verilmiştir.

$$m(x_1) = 0,1$$

$$m(x_1, x_2) = 0,25$$

$$m(x_3, x_4) = 0,2$$

$$m(x_2, x_3, x_4) = 0,3$$

$$m(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,15$$

Bu kütle atama değerlerine ait oranlı dönüşüm Eş. 2.56 ve Eş. 2.57 kullanılarak elde edilmiştir.

$$p(x_1) = 0,1 + \frac{0,25}{2} + \frac{0,15}{4} = 0,26$$

$$p(x_2) = \frac{0,25}{2} + \frac{0,3}{3} + \frac{0,15}{4} = 0,26$$

$$p(x_3) = \frac{0,2}{2} + \frac{0,3}{3} + \frac{0,15}{4} = 0,24$$

$$p(x_4) = \frac{0,2}{2} + \frac{0,3}{3} + \frac{0,15}{4} = 0,24$$

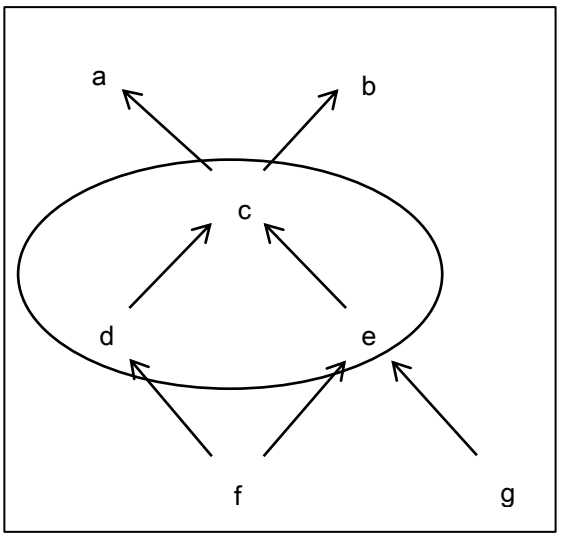
3. BULANIK KÜME TİPLERİ

Bu bölümde bulanık küme türleri hakkında temel bilgilere ve tanımlara yer verilmiştir.

3.1. Kafes Bulanık Kümeler

Bir A kümesi üzerinde tanımlanan bağıntı, A kümesinin tüm elemanları için yazılabilecek (x,x) ikililerini içeriyorsa yansıyan, (x,y) ikilisini içeriyorken (y,x) ikilisini de içeriyorsa simetrik, (x,y) ikilisini içeriyorken (y,x) ikilisini içermiyorsa ters simetrik, (x,y) ikilisini ve (y,z) ikilisini içeriyorken (x,z) ikilisini de içeriyorsa geçişli özelliklerini taşır. Yansıma, ters simetrik ve geçişli özelliklerini taşıyan bağıntıya sahip kümelere kısmi sıralı kümeler denir.

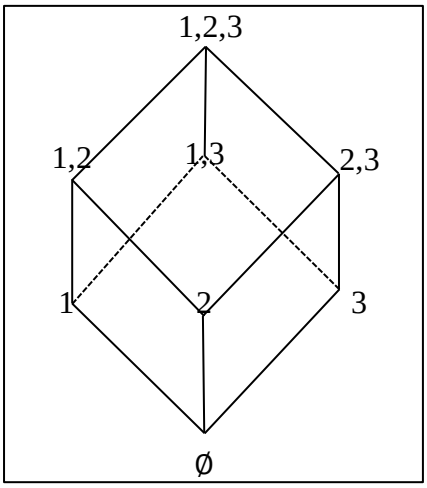
Kısmi sıralı bir P kümesinin kısmi sıralı A alt kümesinin bir üst sınırı A kümesinin diğer bütün üst sınırlarından önde geliyorsa buna A kümesinin en küçük üst sınırı denir. Eğer A kümesinin bir alt sınırı, A'nın diğer bütün alt sınırlarını ilk izleyen ise buna A'nın en büyük alt sınırı denir. Şekil 3.1'de gösterilen $P=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ kısmi sıralı kümesinde $A=\{c,d,e\}$ alt kısmi sıralı kümedir. $\{c\}$ elemanı A kümesinin en küçük üst sınırı, $\{f\}$ elemanı ise A kümesinin en büyük alt sınırıdır [6].



Şekil 3.1. Kısmi sıralı küme

Kısmi sıralı bir kümede bağıntıdaki her (x,y) ikilisi için en küçük üst sınır ve en büyük alt sınır varsa kısmi sıralı küme kafes olarak adlandırılır.

Alt küme bağıntısına sahip $X = \{1,2,3\}$ kısmi sıralı kümesinde her bir elemanın en küçük üst sınırı ve en büyük alt sınırı olduğundan Şekil 3.2 bir kafes yapısıdır.



Şekil 3.2. Kafes yapı

Tanım 3.1

X evrensel kümesindeki bir kafes bulanık A kümesinin üyelik fonksiyonu $\forall x \in X$ $\mu_A(x): X \to L$ şeklinde tanımlanır. Burada L en az kısmi sıralı semboller kümesidir [6]. X kesikli evrensel kümesindeki $\mu_A(x): X \to L$ üyelik fonksiyonlu bir A kafes bulanık kümesi (KBK)'nin gösterimi Eş. 3.1'deki gibidir.

$$A = \left\{ \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \ldots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} \right\} \tag{3.1}$$

Örnek 3.1.

$X = \{Yunus, Hıdır, Ayşe, Azad, Can, \text{Re}mzi\}$ ve değerleme sembol kümesi $L = \{---, —, –, 0, +, ++, +++\}$'de bir A KBK X'in elemanlarının Karadeniz isimlerine benzerliğini gösterir.

$$A = \left\{ \begin{array}{l} (Yunus, \ ++), \\ (Hıdır, \ +++), \\ (Ayşe, \ 0), \\ (Azad, \ ---), \\ (Can, \ -), \\ (\text{Re}mzi, \ +++) \end{array} \right\}$$

3.2. Tip-1 Bulanık Küme

Klasik kümelerde elemanların evrensel kümenin A gibi bir alt kümesine ait olup olmadıkları kesin olarak belirlidir. Elemanların A kümesine üyelikleri 0-1 üyelik fonksiyonu ile gösterilir. X evrensel kümesinde bir A bulanık kümesi ise, üyeliğin evet (üyelik derecesi 1) veya hayır (üyelik derecesi 0) şeklinde ifade edildiği, ikili üyelik fonksiyonu yerine üyeliğin [0,1] aralığında değer alabildiği dereceli üyelik fonksiyonu ile ifade edilir. KBK'de L en az kısmi sıralı semboller kümesi [0,1] ile ifade edildiği zaman bulanık kümeler elde edilir. Bulanık kümeler, belirsizliği daha iyi ifade edebilmek için Zadeh tarafından önerilen tip-n bulanık kümelere genelleştirilmiştir. Tip-n bulanık kümelerin özel bir hali olan tip-1 bulanık küme (T1BK) kısaca bulanık kümeler olarak adlandırılır [74].

Tanım 3.2.

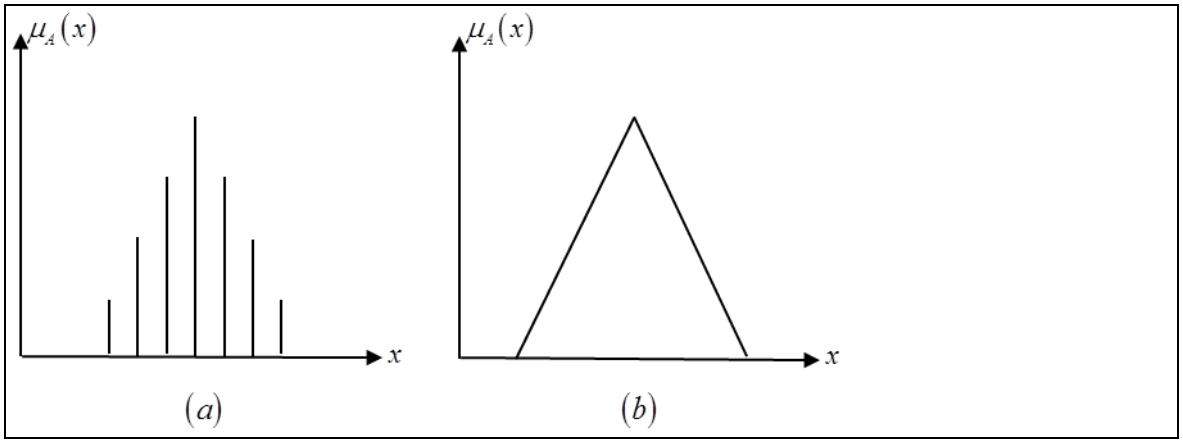
X evrensel kümesinde bir bulanık A kümesi $\forall x \in X \ \mu_A(x) : X \to [0,1]$ üyelik fonksiyonu ile tanımlanır. Evrensel küme kesikli ise A T1BK gösterimi Eş. 3.2'deki gibidir.

$$A = \left\{ \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \ldots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} \right\} \tag{3.2}$$

Eğer evrensel küme sürekli ve sonsuz ise A T1BK gösterimi Eş. 3.3'deki gibidir.

$$A = \left\{ \int_X \frac{\mu_A(x)}{x} \right\} \tag{3.3}$$

Eş. 3.2'de gösterilen "+" işareti cebirsel toplamı değil elemanların birleşimini ifade eder. Eş. 3.3'de yer alan integral işareti de sürekli değer alan elemanların birleşimini gösterir. Şekil 3.3'de bir bulanık kümeye ait elemanların üyelik fonksiyonlarının kesikli ve sürekli formda gösterimi verilmiştir.



Şekil 3.3. Farklı tipte bulanık kümeler: (a) Kesikli bulanık küme (b) Sürekli bulanık küme

Örnek 3.2.

$X = \{Yunus, Hıdır, Ayşe, Azad, Can, \text{Re}mzi\}$ evrensel kümesinde bir A bulanık kümesi *X*'in elemanlarının Karadeniz isimlerine benzerliğini gösterir.

$$A = \left\{ \frac{0,8}{Yunus} + \frac{1}{Hıdır} + \frac{0,4}{Ayşe} + \frac{0}{Azad} + \frac{0,1}{Can} + \frac{1}{\text{Re}mzi} \right\}$$

Bulanık kümelerdeki önemli kavramlardan iki tanesi alfa (α) kesmesi ve güçlü alfa (α^+) kesmesidir.

Tanım 3.3.

X evrensel kümesinde bir A bulanık kümesi ve $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere alfa kesmesi ve güçlü alfa kesmesi sırasıyla Eş. 3.4 ve Eş. 3.5'deki gibidir.

$$A_\alpha = \left\{ x \in X \,|\, \mu_A(x) \geq \alpha \right\} \tag{3.4}$$

$$A_{\alpha^+} = \left\{ x \in X \,|\, \mu_A(x) > \alpha \right\} \tag{3.5}$$

α kesmesiyle (güçlü kesmesiyle (α^+)) A bulanık kümesinin elemanlarının üyelik dereceleri α'ya eşit ya da büyük (α'dan büyük) olan A_α (A_{α^+}) kesin kümesine dönüşmektedir [75].

3.3. Aralıklı Bulanık Küme

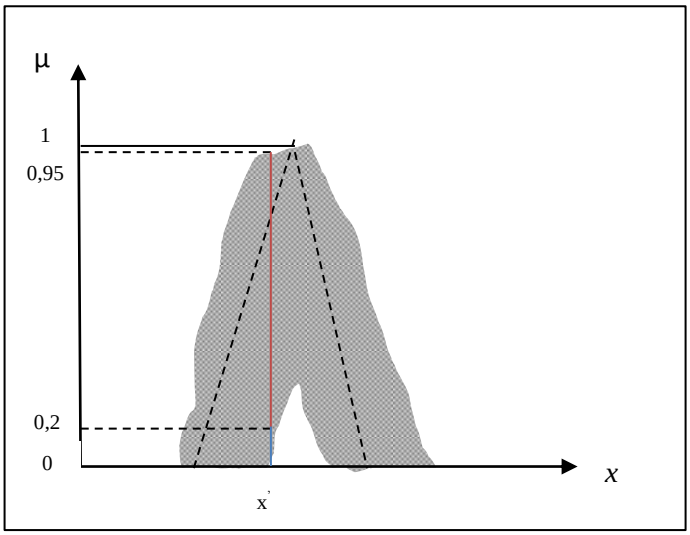
Bulanık kümelerin üyelik fonksiyonlarının kesin bir değer yerine belirli bir aralıkta verildiği kümelerdir.

Tanım 3.4.

X evrensel kümesindeki $\mu_A(x) : X \to I[0,1]$ üyelik fonksiyonlu bir A aralıklı bulanık kümesi (ABK)'nin gösterimi Eş. 3.6'daki gibidir.

$$A = \left\{ \frac{[\mu_A^L(x_1), \mu_A^U(x_1)]}{x_1} + \frac{[\mu_A^L(x_2), \mu_A^U(x_2)]}{x_2} + \ldots + \frac{[\mu_A^L(x_n), \mu_A^U(x_n)]}{x_n} \right\} \tag{3.6}$$

Burada $I[0,1]$, $[0,1]$'in tüm kapalı alt aralıklarının kümesini $\mu_A(x)=[\mu_A^L(x),\mu_A^U(x)]$ üyelik fonksiyonunu ifade eder [76]. Şekil 3.4'de gösterilen ABK'de x' gibi bir değerin üyelik derecesinin alt sınırının 0,2 üst sınırının 0,95 olduğu görülmektedir.



Şekil 3.4. Aralıklı bulanık küme

Örnek 3.3.

$X=\{Yunus, Hıdır, Ayşe, Azad, Can, \text{Re}mzi\}$ evrensel kümesinde bir A ABK X'in elemanlarının Karadeniz isimlerine benzerliğini gösterir.

$$A=\left\{\frac{[0,8;1]}{Yunus}+\frac{[1;1]}{Hıdır}+\frac{[0,2;0,4]}{Ayşe}+\frac{[0;0]}{Azad}+\frac{[0;0,1]}{Can}+\frac{[0,9;1]}{\text{Re}mzi}\right\}$$

Tanım 3.5.

Aralıklı bulanık kümelerde elemanların sıralanması için üyelik derecelerinin sıralanması gerekir. Aralıklı sayıların sıralanması reel sayıların sıralanması kadar kolay değildir. A_1 ve A_2 iki aralıklı bulanık küme iken $A_1 \le A_2$ olması için ancak ve ancak $\mu_{A_1}^L(x_i) \le \mu_{A_2}^L(x_i)$ ve $\mu_{A_1}^U(x_i) \le \mu_{A_2}^U(x_i)$ olması gerekir.

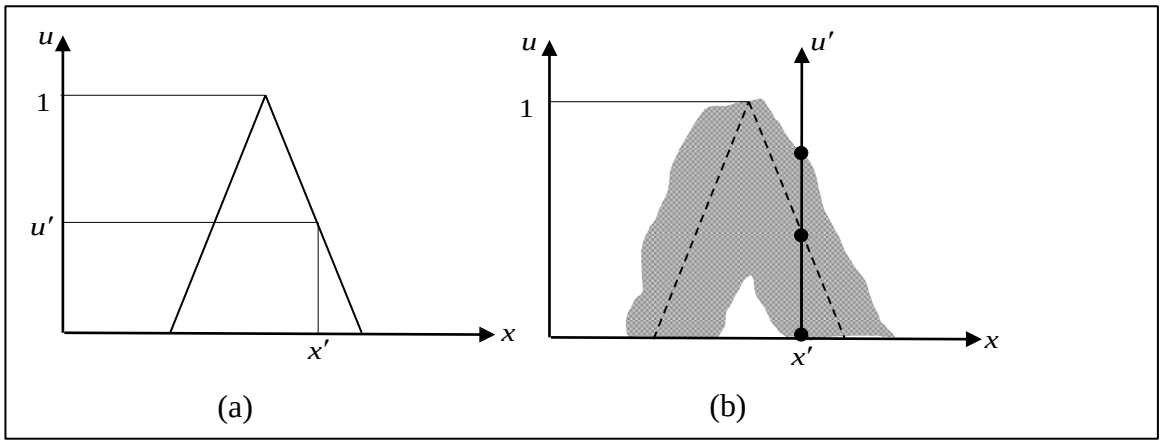
$x=[x_1,x_2]$ ve $y=[y_1,y_2]$ aralıklı iki sayı iken $L=(\leq_L)$ aşağıdaki şartları sağlarsa tam kafestir [77, 78].

$$L=\left\{[x_1,x_2]\middle|(x_1,x_2)\in[0,1]^2, x_1\leq x_2\right\}$$

$$[x_1,x_2]\leq_L[y_1,y_2]\Leftrightarrow x_1\leq y_1, x_2\leq y_2 \quad \forall[x_1,x_2],[y_1,y_2]\in L$$

3.4. Tip-2 Bulanık Küme

T1BK'lerde bir elemanın bir kümeye ait olma derecesini belirten üyelik fonksiyonu değeri [0,1] aralığındaki kesin bir değere eşittir. Şekil 3.5a'da $x=x'$ noktasında bir u' değeri bulunmaktadır. Şekil 3.5a'da gösterilen üyelik fonksiyonlarının değerleri sağa sola kaydırılarak Şekil 3.5b'de gösterilen bulanıklaştırılmış tip-1 BK elde edilmektedir. Şekil 3.5b'de $x=x'$ noktasında u' dikey ekseniyle gri alanın kesişmesiyle birden fazla *u* değeri elde edilir. Bu değerlerin eşit olarak ağırlıklandırılmaları gerekmemektedir. Bu nedenle tüm bu değerlere bir dağılım atanabilir. Tanım kümesinde verilen tüm elemanlar için bu işlem yapıldıktan sonra 3 boyutlu olan tip-2 üyelik fonksiyonu elde edilmektedir [79, 80].



Şekil 3.5. (a) Üçgensel Tip-1 üyelik fonksiyonu (b) Bulanıklaştırılmış Üçgensel Tip-1 üyelik fonksiyonu

Tanım 3.6.

X evrensel kümesindeki bir A tip 2 bulanık küme (T2BK), $\mu_A(x,u)$ tip-2 üyelik derecesine sahiptir. $\forall x\in X$ ve $u\in J_x\subseteq[0,1]$ iken A T2BK'nin gösterimi Eş. 3.7'deki gibidir.

$$A=\left\{\left\langle (x,u),\mu_A(x,u)\right\rangle \middle| \forall x\in X,\forall u\in J_x\subseteq[0,1]\right\} \tag{3.7}$$

Buradaki üyelik fonksiyonu $0\le\mu_A(x,u)\le 1$ eşitsizliğini sağlar. Bu şart klasik bulanık kümelerde verilen $0\le\mu_A(x)\le 1$ kısıtlamasıyla aynıdır. Belirsizlik ortadan kalktığı zaman T2BK bulanık küme (tip-1)'ye dönüşmektedir [79].

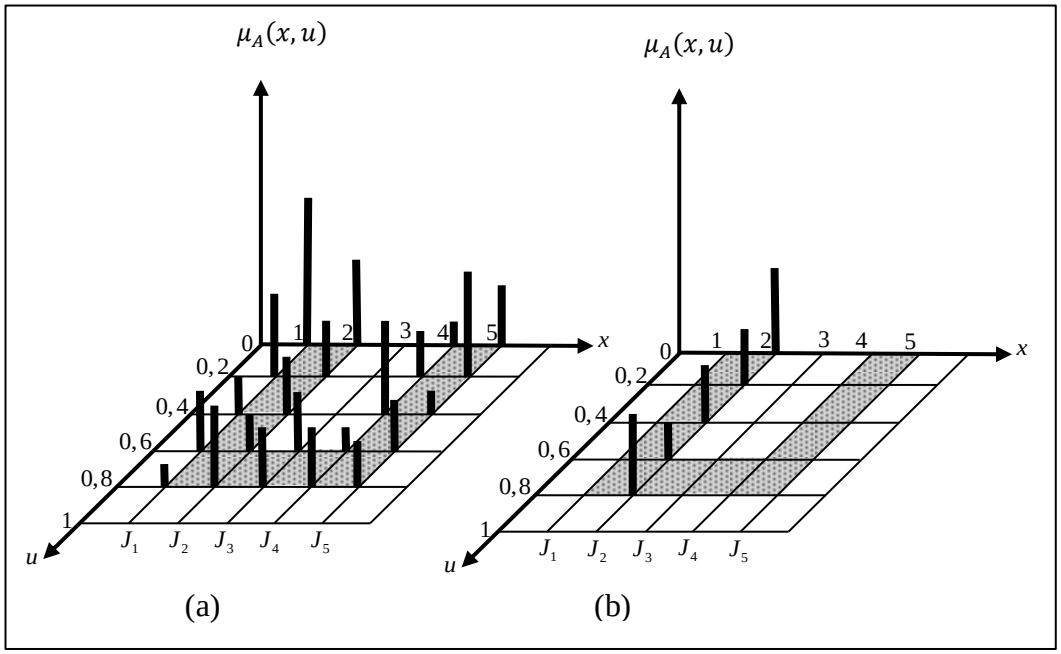
$x\in X$ ve $\forall u\in J_x\subseteq[0,1]$ olmak üzere x'in her bir değeri için $(x=x')$ ikincil üyelik fonksiyonu değeri $\mu_A(x,u)$ ekseninin dikey kesitine eşittir.

$$\mu_A(x=x',u)=\mu_A(x')=\int_{u\in J_{x'}} f_{x'}(u)/u \quad J_{x'}\subseteq[0,1] \tag{3.8}$$

Eş. 3.8 yardımıyla T2BK A Eş. 3.9'daki gibi gösterilebilir [79, 80].

$$A=\left\{\left\langle x,\mu_{\tilde{A}}(x)\right\rangle \middle| \forall x\in X\right\} \tag{3.9}$$

Şekil 3.6a'da *x* ve *u* kesikli değer alan değişkenler olmak üzere tip-2 üyelik fonksiyonu $\mu_A(x,u)$ dikey kesit gösterim şekli verilmiştir. $X=\{1,2,3,4,5\}$ ve $U=\{0;0,2;0,4;0,6;0,8\}$'dir. Şekil 3.6b'de $x=2$'de tip-2 üyelik fonksiyonu gösterilmektedir. $x=2$'de ikincil üyelik fonksiyonu $\mu_A(2)=0,5/0+0,35/0,2+0,35/0,4+0,2/0,6+0,5/0,8$'dir. Birincil üyelikler ise $J_1,J_2,J_4,J_5=\{0;0,2;0,4;0,6;0,8\}$ ve $J_3=\{0,6;0,8\}$'dir.



Şekil 3.6. (a) 3 boyutlu tip-2 üyelik fonksiyonu (b) $x=2$ noktasında tip-2 üyelik fonksiyonunun dikey kesit gösterimi

Örnek 3.4.

$X=\{Yunus, Hıdır, Ayşe, Azad, Can, \text{Re}mzi\}$ ve $u=\{0;0,2;0,4;0,6;0,8\}$ iken A T2BK evrensel kümedeki Ayşe elemanının Karadeniz isimlerine benzerliğinin *u* kümesindeki üyelik derecelerine sahip olmasının derecesini gösterir.

$$\mu_A(Ayşe)=\left\{\frac{0,5}{0}+\frac{0,7}{0,2}+\frac{1}{0,4}+\frac{0,1}{0,6}+\frac{0}{0,8}\right\}$$

3.5. Aralıklı Tip-2 Bulanık Küme

T2BK'da ikincil üyelik fonksiyonu birden çok değer alabilmektedir ve bu değerlere bir dağılım atanabilir. Düzgün dağılım atandığı takdirde ikincil üyelik fonksiyonlarının değeri bire eşit olup tip-2 bulanık kümeler aralıklı tip-2 bulanık kümeler (AT2BK) olarak

adlandırılır. Literatürde aralıklı tip-2 bulanık kümeler ile aralıklı bulanık kümelerin birbirine denk olduğu gösterilmiştir [81-83].

Tanım 3.7.

X evrensel kümesindeki bir A AT2BK $\mu_A(x,u)=1\ \forall x,u$ tip-2 üyelik derecesine sahip olup A AT2BK gösterimi Eş. 3.10'daki gibidir.

$$A=\left\{\left((u,1)\right)\middle|u\in J_x\subseteq[0,1]\right\};\forall x\in X \tag{3.10}$$

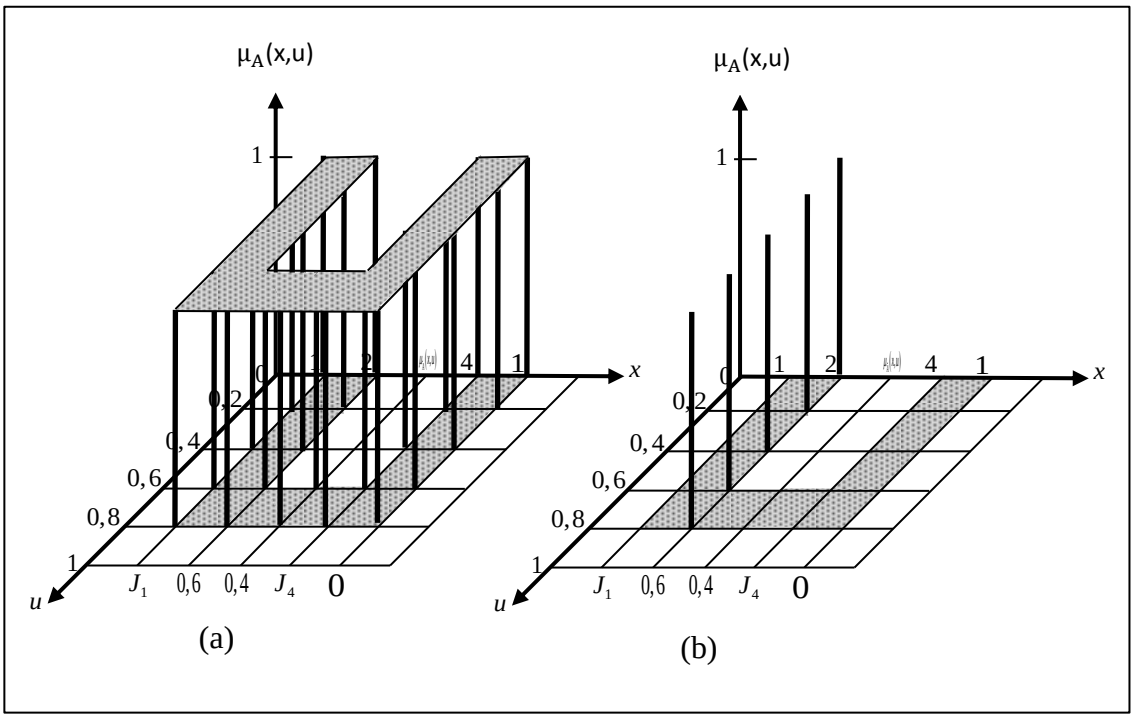
$x\in X$ ve $\forall u\in J_x\subseteq[0,1]$ olmak üzere x'in her bir değeri için $(x=x')$ ikincil üyelik fonksiyonu değeri $\mu_A(x,u)$ ekseninin dikey kesitine eşittir [84].

$$\mu_{A^I}\left(x=x',u\right)=\mu_{A^I}\left(x'\right)=\int_{u\in J_{x'}}1/u\quad J_{x'}\subseteq[0,1] \tag{3.11}$$

Eş. 3.11 yardımıyla AT2BK A Eş. 3.12'deki gibi gösterilebilir [84].

$$\tilde{A}^I=\int_{x\in X}\mu_{\tilde{A}^I}\left(x\right)/x=\int_{x\in X}\left[\int_{u\in J_x}1/u\right]/x\quad J_x\subseteq[0,1] \tag{3.12}$$

x ve *u* kesikli değer alan değişkenler olmak üzere aralıklı tip-2 üyelik fonksiyonu $\mu_{A^I}(x,u)$ dikey kesit gösterimi Şekil 3.7a'da verilmiştir. $X=\{1,2,3,4,5\}$ ve $U=\{0;0,2;0,4;0,6;0,8\}$'dir. Şekil 3.7b'de $x=2$'de aralıklı tip-2 üyelik fonksiyonunun dikey kesiti gösterilmektedir.



Şekil 3.7. (a) 3 boyutlu aralıklı tip-2 üyelik fonksiyonu (b) x=2 noktasında aralıklı tip-2 üyelik fonksiyonunun dikey kesit gösterimi

Örnek 3.5.

$X = \{Yunus, Hıdır, Ayşe, Azad, Can, \text{Re}mzi\}$ ve $u = \{0;0,2;0,4;0,6;0,8\}$ iken A AT2BK evrensel kümedeki Ayşe elemanının Karadeniz isimlerine benzerliğinin *u* kümesindeki üyelik derecelerine sahip olmasının derecesini gösterir.

$$\mu_A(Ayşe) = \left\{ \frac{1}{0} + \frac{1}{0,2} + \frac{1}{0,4} + \frac{1}{0,6} + \frac{1}{0,8} \right\}$$

3.6. Küme Değerli Bulanık Küme

X evrensel kümesinde bir A küme değerli bulanık küme (KDBK) üyelik derecelerinin [0,1]'in alt kümeleri olarak tanımlandığı kümedir.

Tanım 3.8.

X evrensel kümesindeki $\mu_A(x): X \to 2^{[0,1]} / \{\varnothing\}$ üyelik fonksiyonlu bir A KDBK gösterimi Eş. 3.13'deki gibidir. Burada $2^{[0,1]}$ [0,1]'in güç kümesini ifade eder [85].

$$A = \left\{ \frac{\{\mu_A(x_1)\}}{x_1} + \frac{\{\mu_A(x_2)\}}{x_2} + ... + \frac{\{\mu_A(x_n)\}}{x_n} \right\} \tag{3.13}$$

Örnek 3.6.

$X = \{Yunus, Hıdır, Ayşe, Azad, Can, \text{Re}mzi\}$ evrensel kümesinde bir A KDBK X'in elemanlarının Karadeniz isimlerine benzerliğinin üyelik dereceleri kümesini gösterir.

$$A = \left\{ \frac{\{0,7;(0,8;1)\}}{Yunus} + \frac{\{0,3;(0,5;0,8);0,9\}}{Hıdır} + \frac{\{0,2;0,4\}}{Ayşe} + \frac{\{(0,1;0,6)\}}{Azad} + \frac{\{0,5;0,7\}}{Can} + \frac{\{0,9;1\}}{\text{Re}mzi} \right\}$$

3.7. Tereddütlü Bulanık Küme

Tanım 3.9.

$M = \{\mu_1, ..., \mu_n\}$ n tane üyelik fonksiyonundan oluşan bir küme olmak üzere, *M* ile alakalı tereddütlü bulanık küme (TBK) gösterimi Eş. 3.14'deki gibidir [86].

$$A = \left\{ \frac{\cup_{\mu \in M} \{\mu(x_1)\}}{x_1} + \frac{\cup_{\mu \in M} \{\mu(x_2)\}}{x_2} + ... + \frac{\cup_{\mu \in M} \{\mu(x_n)\}}{x_n} \right\} \tag{3.14}$$

Örnek 3.7.

$X = \{Yunus, Hıdır, Ayşe, Azad, Can, \text{Re}mzi\}$ evrensel kümesinde bir A TBK X'in elemanlarının Karadeniz isimlerine benzerliğinin üyelik dereceleri kümesini gösterir.

$$M = \{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_N\}$$
$$= \{0,2; 0,4; 0,5; 0,7; 0,9; 1\}$$

$$A = \left\{ \frac{\{0,7; 0,9\}}{Yunus} + \frac{\{0,2; 0,5; 0,9\}}{Hıdır} + \frac{\{0,2; 0,4\}}{Ayşe} + \frac{\{0,2; 0,7\}}{Azad} + \frac{\{0,5; 0,7\}}{Can} + \frac{\{0,9; 1\}}{\text{Re}mzi} \right\}$$

3.8. Sezgisel Bulanık Küme

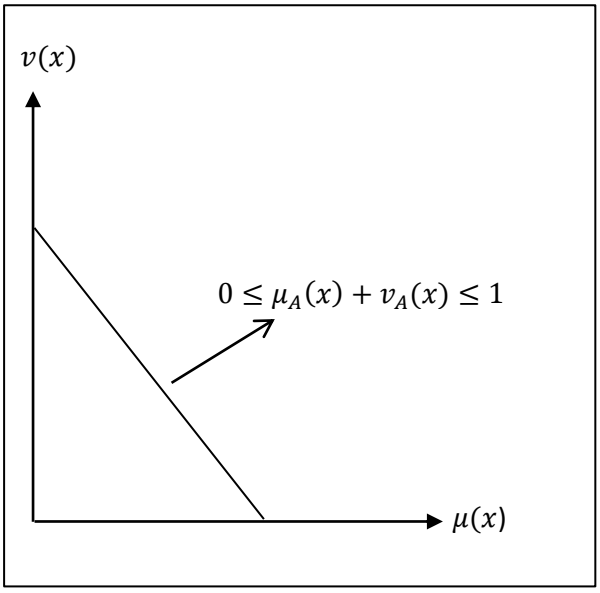
X evrensel kümesinde X'in her bir elemanı için üyelik derecesinin yanı sıra üye olmama derecesini de belirten kümelerdir.

Tanım 3.10.

X evrensel kümesindeki $A: X \to [0,1] = \{(x, y) \in [0,1]^2 \mid x + y \leq 1\}$ fonksiyonlu bir A sezgisel bulanık küme (SBK)'nin gösterimi Eş. 3.15'deki gibidir [3].

$$A = \{\langle x, \mu_A(x), \upsilon_A(x)\rangle \mid x \in X\} \tag{3.15}$$

Burada $\mu_A(x): X \to [0,1]$ üye olma derecesini, $\upsilon_A(x): X \to [0,1]$ üye olmama derecesini gösterirken $0 \leq \mu_A(x) + \upsilon_A(x) \leq 1$eşitsizliğini sağlar. Şekil 3.8'de grafik gösterimi verilen SBK'de $\upsilon_A(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall x \in X$ ise SBK T1BK'yi ifade eder.



Şekil 3.8. Sezgisel bulanık küme

Örnek 3.8.

$X = \{Yunus, Hıdır, Ayşe, Azad, Can, \text{Re}\,mzi\}$ evrensel kümesinde bir A SBK X'in elemanlarının Karadeniz isimlerine benzerliğinin üyelik derecelerini ve üye olmama derecelerini gösterir.

$$A = \left\{ \frac{\langle 0,4;0,5 \rangle}{Yunus} + \frac{\langle 0,3;0,7 \rangle}{Hıdır} + \frac{\langle 0,4;0,2 \rangle}{Ayşe} + \frac{\langle 0,5;0,5 \rangle}{Azad} + \frac{\langle 0,4;0,1 \rangle}{Can} + \frac{\langle 0,8;0 \rangle}{\text{Re}\,mzi} \right\}$$

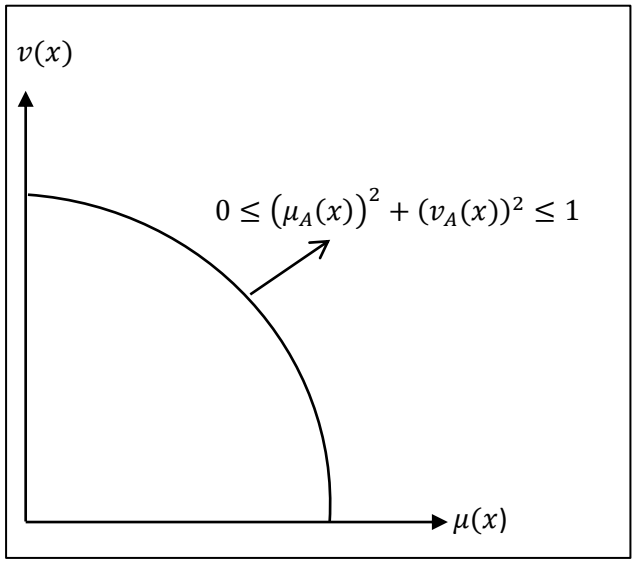
3.9. Pisagor Bulanık Küme

Tanım 3.11.

X evrensel kümesinde $A: X \to [0,1] = \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ fonksiyonlu bir A Pisagor bulanık küme (PBK)'nin gösterimi Eş. 3.16'daki gibidir [87].

$$A = \left\{ \langle x, \mu_A(x), \upsilon_A(x) \rangle \middle| x \in X \right\} \tag{3.16}$$

Burada $\mu_A(x): X \to [0,1]$ üye olma derecesini, $\upsilon_A(x): X \to [0,1]$ üye olmama derecesini gösterirken $0 \le (\mu_A(x))^2 + (\upsilon_A(x))^2 \le 1$ eşitsizliğini sağlarlar. Şekil 3.9'da grafik gösterimi verilen PBK'nin SBK'ye göre daha geniş çözüm alanına sahip olduğu görülmektedir.



Şekil 3.9. Pisagor bulanık küme

Örnek 3.9.

$X = \{Yunus, Hıdır, Ayşe, Azad, Can, \text{Re}mzi\}$ evrensel kümesinde bir A PBK X'in elemanlarının Karadeniz isimlerine benzerliğinin üyelik derecelerini ve üye olmama derecelerini gösterir.

$$A = \left\{ \frac{\langle 0,4;0,8 \rangle}{Yunus} + \frac{\langle 0,7;0,7 \rangle}{Hıdır} + \frac{\langle 0,4;0,2 \rangle}{Ayşe} + \frac{\langle 0,5;0,7 \rangle}{Azad} + \frac{\langle 0,4;0,1 \rangle}{Can} + \frac{\langle 0,8;0 \rangle}{\text{Re}mzi} \right\}$$

3.10. Görüntü Bulanık Küme

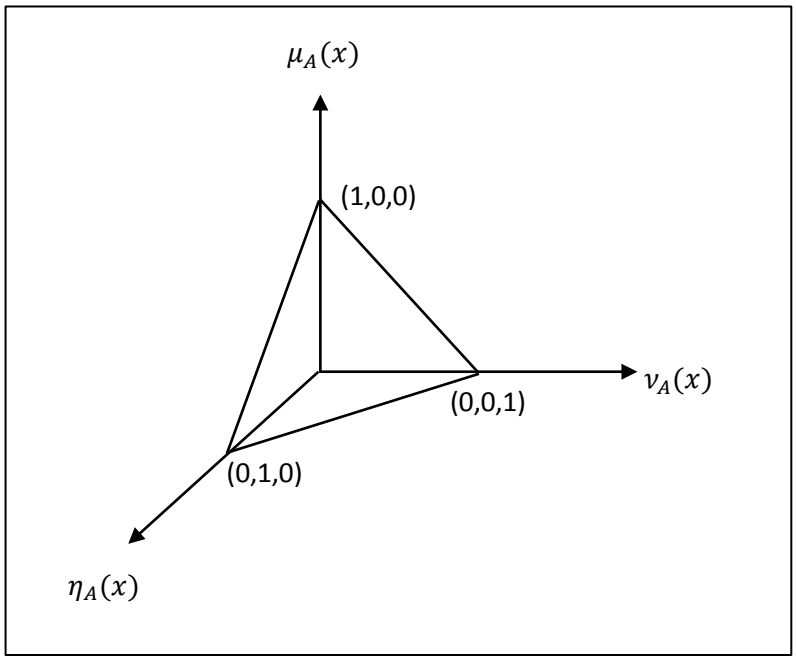
X evrensel kümesinde X'in her bir elemanı için üyelik derecesi, üye olmama derecesi ve nötr üyelik derecesini belirten kümelerdir.

Tanım 3.12.

X evrensel kümesinde $A: X \to [0,1] = \{(x, y, z) \in [0,1]^3 \mid x + y + z \leq 1\}$ fonksiyonlu bir A görüntü bulanık küme (GBK)'nin gösterimi Eş. 3.17'deki gibidir [4].

$$A = \left\{ \left\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x), \eta_A(x) \right\rangle \middle| x \in X \right\} \tag{3.17}$$

Burada $\mu_A(x): X \to [0,1]$ üye olma derecesini, $\upsilon_A(x): X \to [0,1]$ üye olmama derecesini $\eta_A(x): X \to [0,1]$ nötr üyelik derecesini gösterir. Şekil 3.10'da grafik gösterimi verilen GBK $0 \leq \mu_A(x) + \upsilon_A(x) + \eta_A(x) \leq 1$ eşitsizliğini sağlarlar.



Şekil 3.10. Görüntü bulanık küme

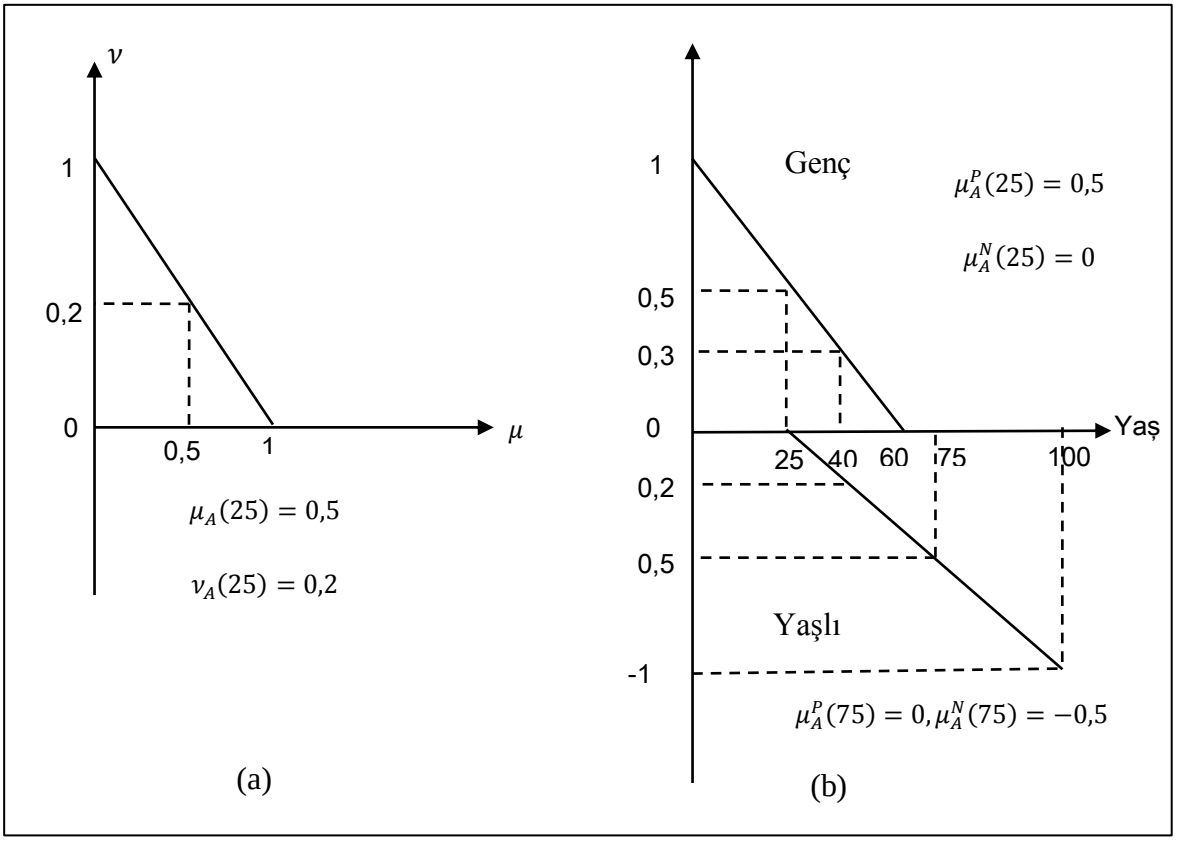
Örnek 3.10.

$X = \{Yunus, Hıdır, Ayşe, Azad, Can, \text{Re}mzi\}$ evrensel kümesinde bir A GBK X'in elemanlarının Karadeniz isimlerine benzerliğinin pozitif üyelik derecelerini, negatif üyelik derecelerini ve tarafsız üyelik derecelerini gösterir.

$$A=\left\{\frac{\langle 0,4;0,1;0,2\rangle}{Yunus}+\frac{\langle 0,7;0;0,1\rangle}{Hıdır}+\frac{\langle 0,4;0,2;0,1\rangle}{Ayşe}+\frac{\langle 0,5;0,4;0,1\rangle}{Azad}+\frac{\langle 0,4;0,1;0,3\rangle}{Can}+\frac{\langle 0,8;0;0,2\rangle}{\text{Re}\,mzi}\right\}$$

3.11. İki Kutuplu Bulanık Küme

X evrensel kümesinde X'in her bir elemanı için pozitif üyelik derecesini ve negatif (iki kutuplu bulanık kümenin karşıt özelliğini sağlama) üyelik derecesini belirten kümeler iki kutuplu bulanık kümelerdir. Örneğin Şekil 3.11a'da gösterilen SBK'lerde 25 değerinin genç bulanık kümesine üyelik derecesi 0,5 üye olmama derecesi 0,2 şeklinde ifade edilirken, Şekil 3.11b'de gösterilen BBK'lerde 25 değerinin genç bulanık kümesine üye olma derecesi 0,5 yaşlı bulanık kümesine üye olma derecesi 0 şeklinde ifade edilir. Burada yaşlı bulanık kümesi genç bulanık kümenin karşıt özelliğini sağlayan kümedir.



Şekil 3.11 (a) 25 değerinin SBK'de gösterimi (b) Gençiki kutuplu bulanık kümesi

Tanım 3.13.

X evrensel kümesinde $A: X \to [0,1] = \{(x, y) \in [0,1]^2 \mid -1 \le x + y \le 1\}$ fonksiyonlu bir A İKBK'nin gösterimi Eş. 3.18'deki gibidir.

$$A = \left\{ \left\langle x, (\mu_A^P(x), \mu_A^N(x) \right\rangle \middle| x \in X \right\} \tag{3.18}$$

Burada $\mu_A^P(x): \mathrm{X} \to [0,1]$ iki kutuplu bulanık küme özelliğinin sağlanma derecesini, $\mu_A^N(x): X \to [-1,0]$ iki kutuplu bulanık kümenin karşıt özelliğinin sağlanma derecesini gösterirken $-1 \le \mu_A^P(x) + \mu_A^N(x) \le 1$ eşitsizliğini sağlarlar [88].

Örnek 3.11.

$X = \{Yunus, Hıdır, Ayşe, Azad, Can, \mathrm{Re}\, mzi\}$ evrensel kümesinde bir A BBK X'in elemanlarının Karadeniz isimlerine benzerliğinin ve Akdeniz isimlerine (karşıt küme) benzerliğinin üyelik derecelerini gösterir.

$$A_\mu = \left\{ \frac{\langle 0,4; 0,3 \rangle}{Yunus}, \frac{\langle 0,5; 0,6 \rangle}{Hıdır}, \frac{\langle 1; 0,2 \rangle}{Ayşe}, \frac{\langle 1; 1 \rangle}{Azad}, \frac{\langle 0,7; 0,5 \rangle}{Can}, \frac{\langle 0,7; 0,5 \rangle}{\mathrm{Re}\, mzi} \right\}$$

3.12. Karmaşık Bulanık Küme

X evrensel kümesinde X'in her bir elemanı için üyelik derecelerinin karmaşık sayı olduğu kümelerdir.

Tanım 3.14.

X evrensel kümesinde $\mu_A(\mathrm{x}): X \to D$, $D = \left\{ r \times e^{i\theta} \middle| r, \in [0,1], \theta \in [0, 2\pi] \; ve \; i = \sqrt{-1} \right\}$, üyelik fonksiyonlu bir A karmaşık bulanık küme (KABK) Eş. 3.19'daki gibidir [89].

$$A = \left\{ \left\langle x, (\mu_A(x)) \right\rangle \middle| x \in X \right\} \tag{3.19}$$

Örnek 3.12.

$X = \{Yunus, Hıdır, Ayşe, Azad, Can, \mathrm{Re}\, mzi\}$ evrensel kümesinde bir A karmaşık bulanık kümesi X'in elemanlarının Karadeniz isimlerine benzerliğini gösterir.

$$A = \left\{ \frac{0.8e^{i\pi}}{Yunus} + \frac{1e^{i\frac{\pi}{2}}}{Hıdır} + \frac{0.4e^{i\frac{3\pi}{2}}}{Ayşe} + \frac{0.1e^{i\frac{5\pi}{2}}}{Azad} + \frac{0.1e^{i2\pi}}{Can} + \frac{1e^{i\pi}}{\mathrm{Re}\, mzi} \right\}$$

3.13. Nötrosofik Küme

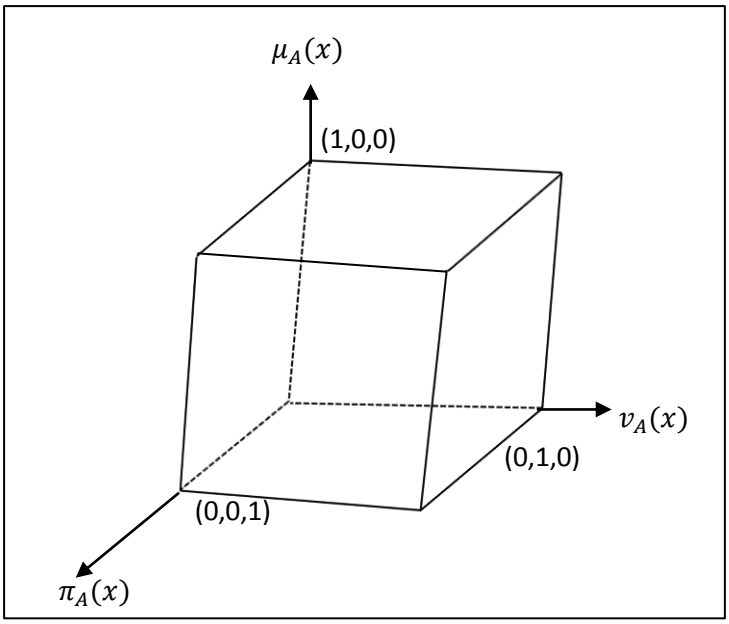
X evrensel kümesinde X'in her bir elemanı için gerçek üyelik derecesi, sahte üyelik derecesi ve belirsiz üyelik derecesini belirten kümelerdir.

Tanım 3.14.

X evrensel kümesinde $A: X \to [0,1] = \{(x, y, z) \in [0,1]^3 \mid 0 \le x + y + z \le 3\}$ fonksiyonlu bir nötrosofik küme (NK) Eş. 3.20'deki gibidir [90].

$$A = \left\{ \left\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x), \pi_A(x) \right\rangle \middle| x \in X \right\} \tag{3.20}$$

Burada $\mu_A(x): X \to [0,1]$ üyelik derecesini, $\upsilon_A(x): X \to [0,1]$ üye olmama derecesini ve $\pi_A(x): X \to [0,1]$ belirsiz üyelik derecesini gösterirken $0 \le \mu_A(x) + \nu_A(x) + \pi_A(x) \le 3$ eşitsizliğini sağlarlar. NK'lerde üyelik derecesi, üye olmama derecesi ve belirsiz üyelik derecelerinin toplamı 1'e eşit olmak zorunda değildir. Bu haliyle Şekil 3.12'de gösterilen NK, SBK'nin bir genelleştirmesidir.



Şekil 3.12 Nötrosofik küme

Örnek 3.13.

$X = \{Yunus, Hıdır, Ayşe, Azad, Can, \text{Re}\,mzi\}$ evrensel kümesinde bir A nötrosofik kümesi X'in elemanlarının Karadeniz isimlerine benzerliğinin üyelik, üye olmama ve belirsiz üyelik derecelerini gösterir.

$$A_\mu = \left\{ \frac{\prec 0,4;0,3;0,5 \succ}{Yunus}, \frac{\prec 0,5;0,6;0,9 \succ}{Hıdır}, \frac{\prec 1;0,2;0,8 \succ}{Ayşe}, \frac{\prec 1;1;0,1 \succ}{Azad} \right.$$
$$\left. \frac{\prec 0,7;0,5;0,7 \succ}{Can}, \frac{\prec 0,7;0,5;1 \succ}{\text{Re}\,mzi} \right\}$$

3.14. Kaba Küme

Kaba küme (KK), orijinal kümenin sırasıyla alt ve üst yaklaşımını temsil eden iki küme aracılığıyla kesin bir kümenin yaklaşımıdır [7]. Yaklaşım kümeleri genelde kesin kümelerdir fakat bulanık da olabilir. Kaba küme ve bulanık küme arasındaki fark, kaba kümenin, orijinal kesin kümeyi alt ve üst yaklaşıma indirgeyerek yaklaşık hale getirmeyi mümkün kılmasıdır. Bulanık küme ise sınırları keskin olmayan kümedir.

Tanım 3.15.

Bir $S = \langle U, R, V, f \rangle$ bilgi sistemi olsun. Burada U nesneler kümesi, R özellikler kümesi, $V = \bigcup_{a \in R} V_a$, V_a R özellikler kümesindeki a özelliğinin değerleri kümesi ve $f : R \to V$ bir bilgi fonksiyonudur. Herhangi bir $X \subseteq U$ hedef alt kümesi ve $B \subseteq R$ özellik alt kümesi için yalnız ve yalnızca $\underline{apr}(X) \neq \overline{apr}(X)$ ise X B özellik alt kümesi açısından kaba kümedir [91]. Eş. 3.21 ve Eş. 3.22 sırasıyla alt yaklaşım, $\underline{apr}(X)$, ve üst yaklaşım, $\overline{apr}(X)$ kümelerini verir.

$$\underline{apr}(X) = \left\{ x \in U \middle| [x] \subseteq X \right\} \tag{3.21}$$

$$\overline{apr}(X) = \left\{ x \in U \middle| [x] \cap X \neq \varnothing \right\} \tag{3.22}$$

U kümesinin nesneleri R özellikler kümesindeki herhangi bir a özelliği açısından aynı değere sahipse bu nesneler arasında ayırt edilemezlik ilişkisi vardır. Ayırt edilemez nesnelerin oluşturduğu kümeye denklik sınıfı denir. Eş. 3.21 ve Eş. 3.22'de [x] x'in denklik sınıfını ifade eder. Tüm denklik sınıflarının ailesi U'nun bölüm kümesi olarak da bilinir ve $U / R = \left\{ [x] \middle| x \in U \right\}$ ile ifade edilir.

Örnek 3.14.

Çizelge 3.1'de kişilerin baş ağrısı ve sıcaklık özellikleri açısından sahip oldukları değerler ve grip olup olmadıkları bilgisi yer almaktadır.

Çizelge 3.1. Kaba küme bilgi sistemi değerleri

U	Baş ağrısı	Sıcaklık	Grip
u1	Evet	Normal	Hayır
u2	Evet	Yüksek	Evet
u3	Evet	Çok yüksek	Evet
u4	Hayır	Normal	Hayır
u5	Hayır	Yüksek	Hayır
u6	Hayır	Çok yüksek	Evet
u7	Hayır	Yüksek	Evet
u8	Hayır	Çok yüksek	Hayır

Baş ağrısı ve sıcaklık özellikleri açısından kişilerin denklik sınıfları belirlenmiştir.

$$R = \{başağrısı, sıcaklık\}$$

$$U / R = \{\{u1\},\{u2\},\{u3\},\{u4\},\{u5,u7\},\{u6,u8\}\}$$

Buna göre u5 ve u7 nesneleri ve u6 ve u8 nesneleri ayırt edilemezlik ilişkisine sahiptir.

$$X1 = \{u \mid Grip(u) = Evet\}$$
$$= \{u2, u3, u6, u7\}$$

$$\underline{RX1} = \{u2, u3\}$$

$$\overline{RX1} = \{u2, u3, u6, u7, u8, u5\}$$

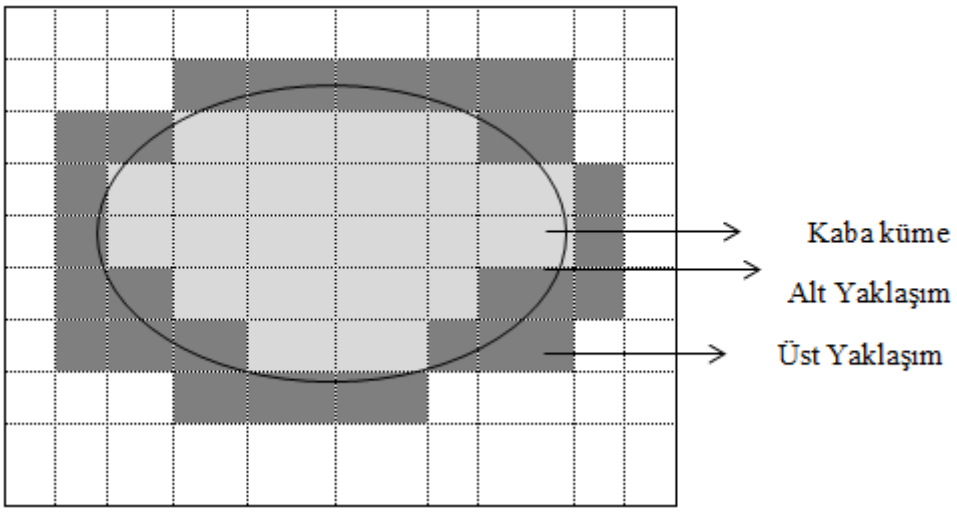
Grip kaba kümesinin alt yaklaşımı grip kümesi tarafından kapsanan denklik sınıfı elemanlarından oluşurken grip kaba kümesinin üst yaklaşımı grip kümesi ile kesişimi boş olmayan denklik sınıfı elemanlarından oluşur.

$$X2 = \{u \mid Grip(u) = Hayır\}$$
$$= \{u1, u4, u5, u8\}$$

$$\underline{RX2} = \{u1, u4\}$$

$$\overline{RX2} = \{u1, u4, u5, u8, u7, u6\}$$

Grip olmama kaba kümesinin alt yaklaşımı grip olmama kümesi tarafından kapsanan denklik sınıfı elemanlarından oluşurken grip olmama kaba kümesinin üst yaklaşımı grip olmama kümesi ile kesişimi boş olmayan denklik sınıfı elemanlarından oluşur. Şekil 3.13'de kaba küme alt ve üst yaklaşımı gösterilmiştir.



Şekil 3.13. Kaba küme

Kaba Bulanık Küme

Bir bilgi sistemindeki çıktı sınıfları iyi tanımlanmamış sınırlara sahipken bilgi modüllerinin tamamı kesin kavramlar olduğu zaman girdi kümelerinin ve bulanık çıktı sınıflarının ayırt edilemez ilişkisinden dolayı kabalık ve bulanıklığın eşzamanlı olarak bulunduğu görülür. Dubois böyle bir durumu ifade etmek için kaba bulanık küme (KBK) kavramını ortaya koymuştur. Kesin ve yaklaşık bir uzayda bulanık bir kümeden yaklaşık olarak çıkarılan

kaba bir kümenin bir uzantısıdır. Kaba bulanık kümede çıktı sınıfı bulanıktır. KBK *FX*'in üst yaklaşım ve alt yaklaşımının tanımı Tanım 3.16'da verilmiştir [92].

Tanım 3.16.

$FS = \langle U,\ R,\ V,\ f \rangle$ bilgi gösterim sistemini, $U/R = \{[x] | x \in U\}$ U'da denklik ilişkisini tanımlarken, FX U'da bulanık bir kümedir. Herhangi bir $FX \subseteq U$ hedef bulanık alt kümesi ve $B \subseteq R$ özellik alt kümesi için Eş. 3.23 ve Eş. 3.24 bilgi sistemi *FS*'in *FX* bulanık küme hakkındaki alt yaklaşım, $\underline{apr}(FX)$, ve üst yaklaşım, $\overline{apr}(FX)$ kümelerini verir.

$$\underline{apr}(FX) = eba\{x \in [x] | \mu_{FX}(x) \subseteq FX\} \tag{3.23}$$

$$\overline{apr}(FX) = ekü\{x \in [x] | \mu_{FX}(x) \subseteq FX\} \tag{3.24}$$

Burada $\mu_{FX}(x)$, x'in *FX*'e ait olmasının üyelik derecesini gösterirken bulanık kümenin alt ve üst yaklaşımları hala bulanık kümelerdir. $\underline{apr}(FX)$, nesnenin kesinlikle *FX* kümesine ait olmasının üyelik derecesi, $\overline{apr}(FX)$ ise nesnenin muhtemelen *FX* kümesine ait olmasının üyelik derecesi olarak yorumlanır. Kesin olaylarda, yani $\mu_{FX}(x) = 1$ ya da $\mu_{FX}(x) = 0$ olduğunda Eş. 3.23 ve Eş. 3.24 standart kaba kümenin alt ve üst yaklaşımı ile örtüşür.

Örnek 3.15.

$U = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8\}$, 8 öğrenciden oluşan bir gruptur. Grup 3 denklik sınıfına bölünmüştür. $U/R = \{N, M\}, U/\mathrm{R} = \{\{n_1, n_6\}, \{n_2, n_7, n_8\}, \{n_3, n_4, n_5\}\}$. Bulanık küme *FX*, bulanık kavram olan boy özelliğini ifade etmektedir. Boy bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu $\mu_{FX}(x) = \left\{\frac{n_1}{0,6}, \frac{n_2}{0,4}, \frac{n_3}{0,4}, \frac{n_4}{0,7}, \frac{n_5}{0,6}, \frac{n_6}{0,8}, \frac{n_7}{1}, \frac{n_8}{0,9}\right\}$'dur. *FX*, KBK'sinin alt ve üst yaklaşımları aşağıdaki gibidir.

$\underline{apr}(n_1) = eba\{\mu_{n_1}, \mu_{n_6}\} = \{0,6; 0,8\} = 0,6$

$$\overline{apr}(n_1) = ekü\left\{\mu_{n_1}, \mu_{n_6}\right\} = \{0,6; 0,8\} = 0,8$$

$$\underline{apr}(FX) = \left\{\frac{n_1}{0,6}, \frac{n_2}{0,4}, \frac{n_3}{0,4}, \frac{n_4}{0,4}, \frac{n_5}{0,4}, \frac{n_6}{0,6}, \frac{n_7}{0,4}, \frac{n_8}{0,4}\right\}$$

$$\overline{apr}(FX) = \left\{\frac{n_1}{0,8}, \frac{n_2}{1}, \frac{n_3}{0,7}, \frac{n_4}{0,7}, \frac{n_5}{0,7}, \frac{n_6}{0,8}, \frac{n_7}{1}, \frac{n_8}{1}\right\}$$

Bulanık Kaba Küme

Denklik ilişkisi kesin olmadığı zaman bir KBK bulanık kaba küme (BKK)'ye genişletilebilir. Dubois ve Prade'in temel düşüncelerine göre BKK'nın tanımı Tanım 3.17'de verilmiştir [92].

Tanım 3.17.

$FS = \langle U, \mathrm{A} \rangle$ bulanık yaklaşımlı uzayında U boş olmayan evrensel kümeyi, A ise U'da bir yaklaşımlı ilişkiyi ifade eder. $x \in U$, $y \in U$, $B \subseteq R$, $FX \subseteq U$, girdi sınıfı $F_1, F_2, ..., F_n$ bulanık denklik ilişkisinden kaynaklanan bir bulanık küme ve n küme sayısını gösterirken her F_i bulanık denklik sınıfıdır. U'da BKK FX'in alt ve üst yaklaşımları Eş. 3.25 ve Eş. 3.26 ile gösterilmiştir.

$$\underline{A}(FX) = eba\left\{\max\left\{1 - \mu_{F_i}(x), \mu_{FX}(x)\right\}\right\} \tag{3.25}$$

$$\overline{A}(FX) = ekü\left\{\min\left\{\mu_{F_i}(x), \mu_{FX}(x)\right\}\right\} \tag{3.26}$$

Denklik ilişkisi kesin olduğunda BKK, KBK'ya dönüşecektir. Örnek 3.15'de $U/R = \{N, M\}, U/\mathrm{R} = \left\{\frac{\{n_1, n_6\}}{0,8}, \frac{\{n_2, n_7, n_8\}}{1}, \frac{\{n_3, n_4, n_5\}}{0,7}\right\}$ bulanık denklik sınıfını göstersin. FX BKK'sinin alt ve üst yaklaşımları aşağıdaki gibidir.

$$\underline{apr}(n_1) = eba\left\{\max\left\{(1-0,8),0,8\right\},\max\left\{(1-0,8),0,6\right\}\right\} = \left\{0,8;0,6\right\} = 0,6$$

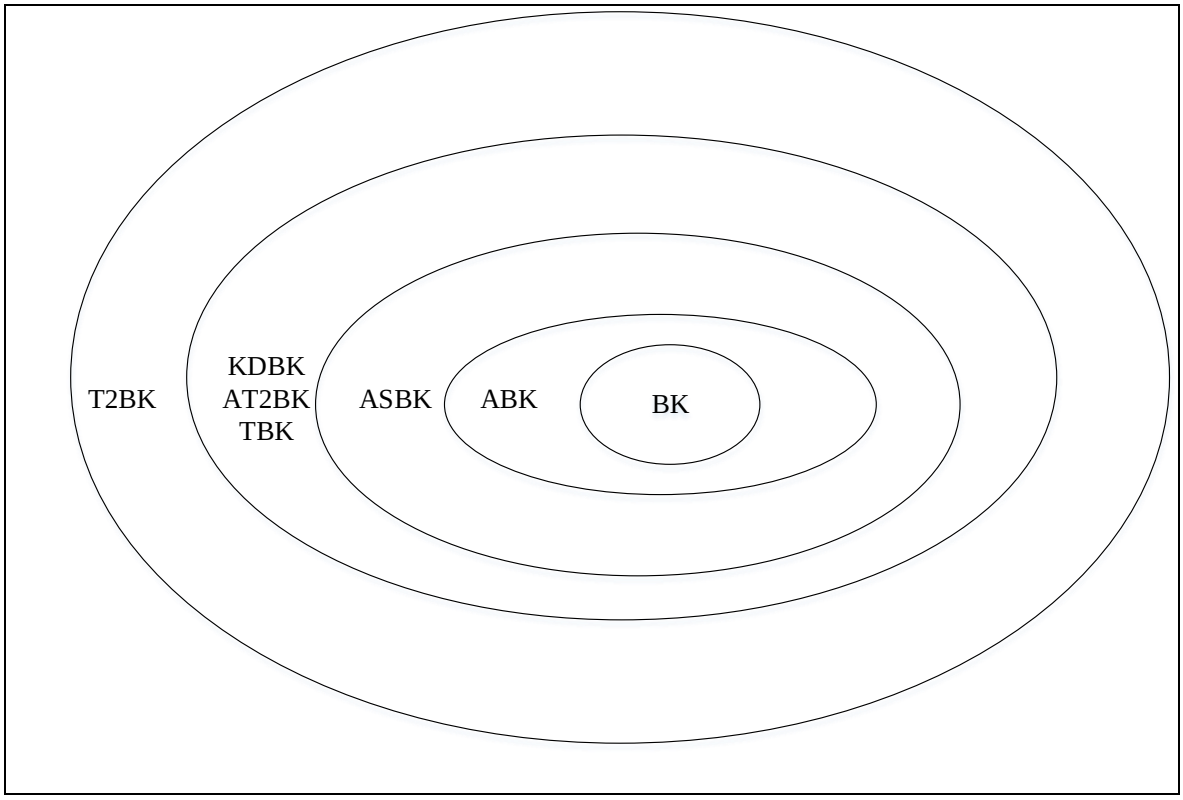
$$\overline{apr}(n_1) = ekü\left\{\min\left\{0,6;0,8\right\},\min\left\{0,8;0,8\right\}\right\} = \left\{0,6;0,8\right\} = 0,8$$

$$\underline{apr}(FX) = \left\{\frac{n_1}{0,6},\frac{n_2}{0,4},\frac{n_3}{0,4},\frac{n_4}{0,4},\frac{n_5}{0,4},\frac{n_6}{0,6},\frac{n_7}{0,4},\frac{n_8}{0,4}\right\}$$

$$\overline{apr}(FX) = \left\{\frac{n_1}{0,8},\frac{n_2}{1},\frac{n_3}{0,7},\frac{n_4}{0,7},\frac{n_5}{0,7},\frac{n_6}{0,8},\frac{n_7}{1},\frac{n_8}{1}\right\}$$

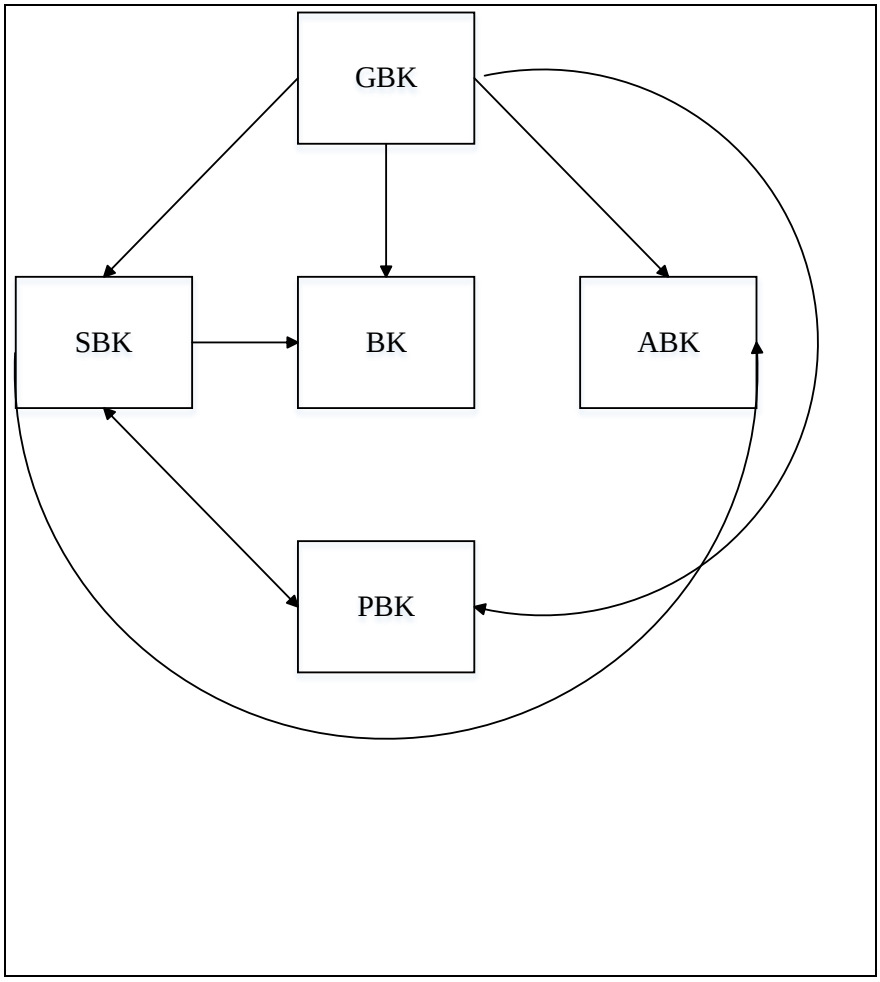
3.15. Bulanık Kümeler Arasındaki Bağlantılar

Literatürde tanımlanmış olan farklı bulanık küme tipleri arasında bir takım bağlantı ve denklikler elde etmek mümkündür. ABK, üyelik derecesinin alt sınırı μ_A^L , üyelik derecesinin üst sınırı μ_A^U 'ya eşit olduğu zaman ABK T1BK'ye denk olur. SBK'de eğer $\mu_A + \nu_A = 1$ ise T1BK'ye denktir. KDBK'de üyelik dereceleri [0,1]'in tek elemanlı alt kümelerinden oluştuğunda, TBK'de ise evrensel küme elemanlarının üyelik dereceleri kümeleri tek elemanlı olduğunda T1BK'ye denk olurlar. T2BK'de ikincil üyelik fonksiyonuna düzgün dağılım atandığı takdirde T2BK, AT2BK olarak ifade edilir. İkincil üyelik fonksiyonlarının bire eşit olması ile T2BK, ABK'ye denk olur. Birincil üyelik fonksiyonlarının tek bir değer olması durumunda ise T1BK'ye denk olur. Şekil 3.14'de bulanık küme tipleri arasındaki bağlantı verilmiştir.



Şekil 3.14. Bulanık küme tipleri arasındaki bağlantı

Ayrıca SBK'lerde $\mu_A(x)+\nu_A(x)\leq 1$ eşitsizliğini sağlayan $\forall\mu_A(x)\in[0,1]$ ve $\forall\nu_A(x)\in[0,1]$ için $\mu_A(x)+\nu_A(x)\geq\mu_A(x)^2+\nu_A(x)^2$ eşitsizliği sağlandığından SBK aynı zamanda PBK'ye denktir. SBK düzenli aralık olarak yazıldığında ABK'nin denk gösterimidir. GBK'lerde ise nötr üyelik derecesi ($\eta_A(x)$) sıfır olduğu durumda SBK'ye, üye olma ve üye olmama derecesinin toplamının bir olduğu durumda BK'ye denktir. SBK'nin PBK'ye denk olduğu durumdan ve aynı zamanda GBK'nin SBK'ye denk olma durumundan yararlanılarak PBK ve GBK arasında da bir bağlantı kurmak mümkündür. Şekil 3.15'de farklı kümeler arası bu bağlantılar gösterilmiştir.



Şekil 3.15. Farklı Kümeler Arasındaki İlişki

4. VERİ BİRLEŞTİRMESİ

VB, ilk olarak Veri Birleştirme Sözlüğü (Data Fusion Lexion)'nde JDL (Joint Directors of Laboratories)' in veri birleştirme alt grubu tarafından ortaya konulan tanımla yer almıştır [93]. Bu tanıma göre; durum ve kimlik tespitlerinin değerlendirmesini yapmak, olası durum ve tehditleri zamanında doğru değerlendirmek ve önemini belirlemek amacıyla tek veya çoklu kaynaklardan gelen bilgi ve veriler arasındaki ilişkilerin ve bu verilerin birleştirilmelerinin değerlendirilerek bir sonuca ulaşılması sürecidir. Bu süreç, daha iyi sonuçlara ulaşabilmek için tahmin ve değerlendirmelerin sürekli geliştirilmesi, sürecin gözden geçirilmesi ya da ek kaynaklara ihtiyaç olup olmadığının belirlemesi işlemlerini de yapar.

Literatürde VB yaklaşımı; genel olarak tek bir kaynaktan elde edilemeyecek kadar karmaşık durumlar için farklı kaynaklardaki verilerin bir araya getirilerek amaca uygun bilginin elde edilmesi [93]; fiziksel olaylar, hareketler veya durumlar hakkında sonuç çıkarmak için mevcut teknolojiler doğrultusunda farklı kaynaklardaki bilgilerin birleştirilmesi [94]; parametrelerin tam olarak belirlenmesinde kaynaklardan gelen çoklu ölçüm değerlerinin birleştirilerek parametrelerin tek bir ölçüm modelinin oluşturulması [95]; farklı kaynaklardaki bilgilerin birleştirilerek her durumda sistemi temsil edecek tek bir düzenin oluşturulması [96] gibi farklı tanımlar ile yer alır.

Özetle VB, aynı veya farklı tür kaynaklardan elde edilen veri ve bilgilerin değerlendirilip birleştirilmesi ile daha kaliteli ve daha alakalı sonuçlar çıkarılarak tek kaynak kullanımından daha etkili, daha güvenilir, daha doğru ve verimli sonuçlar elde edilmesi işlemidir [97]. Birleştirme sürecinin girdisi olan veri, ölçüm, sinyal, görüntü gibi sensör çıktısı ve ayrıca veri bankalarından, uzmanlardan, önceden öğrenilmiş özelliklerden, önceden tanımlanmış dinamik, istatistiksel, tanımlayıcı ya da davranışsal modellerden elde edilmiş bilgi olabilir. Sonuç olarak veri, doğası ve kullanımları açısından ayrıca her şeyden önce yetersizlik noktalarının farklılığı bakımından oldukça çeşitlilik gösterir. Veri birleştirmesinde amaç, ilgili mevcut bilgiden mümkün olan en yüksek yararı alarak, veri çeşitliliğinden mümkün olduğunca tam faydalanmaktır.

Farklı kaynakların birleştirilmesi gerekliliği, tek bir kaynaktan elde edilen bilginin içinde bulunulan çevreyi, durumu analiz etmede ve karar vermede yetersiz kalmasından

doğmuştur. Tek bir kaynaktan elde edilen bilgiler belirsizdir ve bu belirsizliği azaltmak için ihtiyaç duyulan bilgiyi elde edecek başka bir kaynak yoktur [98]. Tek kaynaklı sistemler bulundukları çevre hakkında yalnızca kısmi bilgi sağlayabilirler [99]. Bu bilgi olayları yorumlamak için yeterli değildir. Nedeni bulunamayan bir hastalığı sadece tek bir alanda uzman kişinin görüşlerine dayanarak teşhis etmek ne kadar yanlış ise bir durum ya da olay karşısında kesin bir kanıya varmada, stratejik bir karar vermede tüm olasılıkları kapsama yetisi olmayan tek bir kaynağa bağlı kalmak da o kadar yanlıştır. Kaynağın sağladığı yanlış bilgi yanlış sonuçlara ve yanlış kararların verilmesine neden olur.

Veri birleştirme teknikleri kullanılarak, birden fazla kaynaktan alınan sonuçların bir araya getirilmesi ile elde edilen sonuçlar, bağımsız tek bir kaynağın elde edebileceği bilgilerden daha sağlıklı, zengin ve duyarlıdır [100]. Çok kaynaklı veri birleştirmesinde sistemden talep edilen bilgi farklı kaynaklar arasında görev dağılımı ile ortaya konacağından tek kaynaklı sistemlere göre bilgiyi elde etme süresi daha kısadır ve ayrıca eşit bilgiyi elde etme adına çok kaynaklı sistem tek kaynaklı sistemden daha az maliyetlidir [100-103]. Ortamdaki aynı özellik (hedef, durum, ölçü, vs.) için farklı güvenilirlikteki kaynaklardan sağlanan (ya da aynı kaynaktan farklı zamanlarda sağlanan) bilginin birleştirilmesi genel belirsizliği azaltabilir, doğruluğu ve kaynak güvenilirliğini artırma yönünde hizmet verir [103]. Bazen tek bir kaynaktan elde edilen veriler ile ilgilenilen özelliği algılamak imkânsızdır. Bu durumlarda tek başına yeterli olmayan, birbirini tamamlayıcı bilgi sağlayan kaynaklardan elde edilen bilgilerin birleştirilmesi özelliği algılamak hususunda önemli katkı sağlar [98, 104]. Örneğin birer taneleri sıcak olan ikişer tane kare ve yuvarlak nesnenin bulunduğu bir ortamda nesnelerin şekilleri ile ilgili bilgi sağlayan iki sensör ihtiyaç dışı bilgi sağlarken nesnelerin sıcaklıkları hakkında bilgi sağlamadığından nesneleri ayırmak mümkün olmaz. Böyle bir durumda nesnelerin sıcaklığı ile ilgili bilgi verecek üçüncü bir kaynağa ihtiyaç vardır. Aynı amaca hizmet eden iki sensörün verilerinin birleştirilmesi nesnelerin şekline dair belirsizliği azaltıp daha güvenilir bilgi sağlarken, bu bilginin tamamlayıcı bilgi ile birleştirilmesi nesneleri ayırma yeteneğinde artış sağlar [102].

Çoklu kaynak birleştirmede veri birleştirmesi bilginin detay seviyesine bağlı olarak farklı seviyelerde yapılır. En bilindik sınıflama veri seviyesi, özellik seviyesi ve karar seviyesi olarak bilinen Dasarathy'nin hiyerarşik üçlüsü olsa da literatürde bu tanıma çok yakın farklı seviye sınıfları ile karşılaşılmaktadır [103, 105-108]. Ham sensör verisinin

birleştirildiği seviye veri seviyesi veya düşük seviye veri birleştirme olarak bilinir [93]. Aynı özellik hakkında bilgi sağlayan birden fazla kaynak verisinin ya da aynı kaynağın farklı zamanlardaki verisinin birleştirilmesi düşük seviyeli bir birleştirmedir. Düşük seviyeli birleştirmedeki ham sensör verisi bir dizi birleştirme adımından sonra karar seviyesine dönüştürülebilir [102]. Ağırlıklı ortalamadan integrallere kadar geniş yelpazesi olan birleştirme operatörleri, Kalman filtresi ve genişlemeleri gibi tahmin metotları bu seviyede veri birleştirmesi için kullanılır [101, 105, 109].

Özellik seviyesinde veri birleştirmesinde sensör verisinden nesneleri tanıyıp ayırt etmek için tanımlayıcı özellik çıkarımı yapılır. Çoklu kaynaklardan çıkarılan özellikler sonraki aşamada bir girdi olarak birleştirilerek nihai sonuca ulaşılır [105, 109]. Örneğin ten rengi, vücut hareketleri gibi çoklu özellikler daha büyük bir özellik vektöründe birleştirilir. Birleştirilen bu vektör yüz bulma işlevi için girdi niteliğindedir. Özellik seviyesi literatürde orta seviye veri birleştirmesi olarak anılır [110]. Kümeleme analizi gibi sınıflandırma teknikleri bu seviyede birleştirme için kullanılır [109, 111].

Karar seviyesinde veri birleştirmesi, diğer adıyla yüksek seviyede bilgi birleştirmesi, farklı uzmanlardan gelen kararları birleştirir. Elde edilen nihai sonuç bir karardır [105]. Her veri kaynağı, bireysel olarak görüşünü bildirdikten sonra kaynak bilgileri birleştirilir [109]. Bu seviyede veri birleştirmesi yaparken Bayesyan metodu, D-S teorisi veya Çıkarım mekanizmaları kullanılır [103]. Bu seviyedeki kaynaklar birbirinden çok farklı olabilir, belirsizlik içerebilir dahası farklı belirsizlik türleri üretiyor olabilir. Bu çalışmada ele alınan, yetersizlik noktalarının farklılığı bakımından çeşitlilik gösteren verilerin birleştirilmesi, oldukça karmaşık bir birleştirme problemidir.

4.1. Birleştirme Operatörleri

Birleştirme işleminde farklı kaynaklardan elde edilen çeşitli bilgilerin eş zamanlı kullanılarak bir sonuca ya da karara ulaşılması amaçlanmaktadır. Farklı kaynaklara dağılmış olan bilginin toplanarak özetlenmesinin bir yoludur. Literatürde iyi bir birleştirme için kurallar ve özel birleştirme teknikleri ile farklı belirsizlik teorileri kullanılmış ve önerilmiştir [112]. Fakat bütün bu yaklaşımlar bazı sayısal birleştirme operatörlerine dayanmaktadır.

Birleştirme operatörleri, bir durum hakkında bilgi ve/veya veri üreten kaynakların birleştirilmesi ile durum hakkında genel bir görüşe sahip olunmasına katkı sağlayan, karar vermeye yardımcı fonksiyonlardır. Karar vericilerin tutumunu yansıtan farklı birleştirme operatörleri vardır. Kötümser tutum sergileyen bir karar verici t-norm operatörlerini, iyimser bir tutum sergileyen bir karar verici t-konorm operatörlerini, nötr tutum sergileyen bir karar verici ise ortalama operatörlerini kullanarak tutumunu karara yansıtır. OWA operatörü t-norm veya t-konorm operatörleri arasında köprü kurulmasını sağlayan, aynı zamanda ortalamacı davranan bir operatördür. En yaygın kullanılan operatör olan ağırlıklı ortalama operatörü kaynaklar arası etkileşimin olmadığını kabul eder ve kaynakların önem veya güvenilirliğini temsil eden ağırlıklar kullanır. Kaynaklar arası etkileşimin söz konusu olduğu durumlarda ise bulanık integraller kullanılır. Birleştirme operatörlerinin özellikleri ve türleri bu bölümde anlatılmıştır.

Birleştirme operatörleri, bir dizi sayıyı benzersiz bir temsilci (veya anlamlı) sayıya indirgeyen matematiksel fonksiyonlardır. Nesnelerin kendisi ile değil özelliklerinin ölçüm değeri olan gerçek sayılar ile ilgilenir [113]. Bir birleştirme operatörü, *n* boyutlu $(x_1, x_2, ..., x_n)$ gerçek sayılarını *y* gerçek sayısına atayan Eş. 4.1 gösterildiği gibi basit bir fonksiyondur.

$$y = Birleş(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{4.1}$$

$Birleş : \bigcup_{n \in N} [0,1]^n \to [0,1]$ fonksiyonu ile gösterilen bir birleştirme operatörü aşağıdaki şartları sağlayan bir fonksiyondur.

(1) $Birleş(x) = x$

(2) $Birleş(0, ..., 0) = 0,\ Birleş(1, ..., 1) = 1$

(3) $Birleş(x_1, ..., x_n) \le Birleş(y_1, ..., y_n)$

eğer $(x_1, ..., x_n) \le (y_1, ..., y_n)$

Bir birleştirme operatörü birleştirme sonucu birleştirilen değerlerin minimumu ile maksimumu arasında bir değer üretiyorsa, $\min(x) \le f(x) \le \max(x)$, ortalamacı birleştirme operatörü; birleştirilen değerlerin minimumuna eşit veya daha küçük değerler üretiyorsa, $f(x) \le \min(x) = \min(x_1, x_2, ..., x_n)$, ve'leyici birleştirme operatörü; birleştirilen değerlerin maksimumuna eşit veya daha büyük değerler üretiyorsa, $f(x) \ge \max(x) = \max(x_1, x_2, ..., x_n)$, veya'layıcı birleştirme operatörü; hiçbir gruba girmeyip duruma göre ortalamacı, ve'leyici ya da veya'layıcı gibi davranan operatörlere karma birleştirme operatörü denir.

Birleştirme operatörlerinin temel özelliklerinden biri olan *eş kuvvetlilik* Eş. 4.2'deki gibi gösterilir [114]. Eş kuvvetlilik özelliğini sağlayan bir birleştirme operatöründe birleştirilen değerlerinin aynı olması birleştirme sonucunun da aynı değere eşit olması anlamına gelir.

$$\oplus(x, ..., x) = x \tag{4.2}$$

Birleştirme operatörlerinin *monotonluk* özelliği $\forall x_i \le y_i$ için Eş. 4.3'deki gibi gösterilir.

$$\oplus(x_1, x_2, ..., x_n) \le \oplus y_1, y_2, ..., y_n) \tag{4.3}$$

Birleştirme operatörlerinin *birleşme* özelliği Eş. 4.4'deki gibidir. Birleşme özelliği sayesinde iki değişkenli bir birleştirme operatörü ile *n* tane değişken birleştirilebilir.

$$\begin{aligned} \oplus(x_1, x_2, x_3) &= \oplus(\oplus(x_1, x_2), x_3) \\ &= \oplus(x_1, \oplus(x_2, x_3)) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Birleştirme operatörlerinin *değişme* özelliği Eş. 4.5'deki gibi gösterilir. Değişme özelliği gösteren bir birleştirme operatöründe birleştirilen değişkenlerin sırası birleştirme sonucunu etkilemez.

$$\oplus(x_1, ..., x_n) = \oplus(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}) \tag{4.5}$$

Birleştirme operatörlerinin *bisimetri* özelliği Eş. 4.6'daki gibi gösterilir. Bisimetri özelliği gösteren bir birleştirme operatörü ile satır veya sütun bazında yapılan birleştirmeler birleştirme sonucunu değiştirmez.

$$\oplus(\oplus(x_{11}, x_{12}), \oplus(x_{21}, x_{22})) = \oplus(\oplus(x_{11}, x_{21}), \oplus(x_{12}, x_{22})) \tag{4.6}$$

Birleştirme operatörlerinin *yutan eleman* özelliği Eş. 4.7'deki gibi gösterilir. Yutan eleman özelliği gösteren bir birleştirme operatöründe birleştirme sonucu diğer elemanlara bakılmaksızın yutan elemanın kendisidir.

$$\oplus(x_1, ..., a, ..., x_n) = a \tag{4.7}$$

Birleştirme operatörlerinin *etkisiz eleman* özelliği Eş. 4.8'deki gibi gösterilir. Bir birleştirme operatörünün etkisiz elemanı birleştirme sonucunu değiştirmeyen elemanıdır.

$$\oplus(x_1, ..., e, ..., x_n) = \oplus(x_1, ..., x_{n-1}) \tag{4.8}$$

Birleştirme operatörlerinin *değişmezlik* özelliği Eş. 4.9'daki gibi gösterilir. Değişmezlik özelliği gösteren bir birleştirme operatöründe değişkenlerinin fonksiyonlarının alınıp birleştirilmesi ile elde edilen sonuç birleştirilip fonksiyonunun alınması ile elde edilen sonuca eşittir.

$$\oplus(f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)) = f(\oplus(x_1, x_2, ..., x_n)) \tag{4.9}$$

4.1.1. Basit birleştirme operatörleri

Aritmetik ortalama birleştirme operatörü Eş. 4.10'daki gibi gösterilir.

$$\begin{aligned} M(x_1, x_2, ..., x_n) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n} x_i\right) \end{aligned} \tag{4.10}$$

Örnek 4.1.

$X = \{22, 24, 23, 19\}$ kümesi A basketbolcusunun maçlarda atmış olduğu basket sayılarını göstermektedir. Buna göre A basketbolcusunun ortalama basket sayısı Eş. 4.10 ile bulunur.

$$M(22,24,23,19) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} 22+24+23+19$$
$$=22$$

Ağırlıklı aritmetik ortalama Eş. 4.11'deki gibi gösterilir. Burada $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ dir.

$$M_{w_i \ldots w_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} (w_i . x_i) \tag{4.11}$$

Örnek 4.1'de, $W = \{0,4; 0,1; 0,3; 0,2\}$ kümesi maçların önemini göstermektedir. Buna göre A basketbolcusunun ağırlıklı ortalama basket sayısı Eş. 4.11 ile bulunur.

$$M(22,24,23,19) = \sum_{i=1}^{4} (22*0,4) + (24*0,1) + (23*0,3) + (19*0,2)$$
$$=21,9$$

Medyan birleştirme operatörü Eş. 4.12'deki gibi gösterilir. Burada elemanlar artan ya da azalan sırada sıralanmıştır.

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & \text{eğer } n \text{ tek ise} \\ \left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1} \right) / 2 & d.d. \end{cases} \tag{4.12}$$

Örnek 4.1'de A basketbolcusunun maçlarda atmış olduğu basketlerin medyanı Eş. 4.12 ile hesaplanır.

$$M(19,22,23,24) = \frac{22}{2} + \frac{23}{2}$$
$$= 22,5$$

Geometrik ortalama birleştirme operatörü Eş. 4.13'deki gibi gösterilir.

$$M_{geometrik}(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{\frac{1}{n}} \tag{4.13}$$

Örnek 4.1'de, A basketbolcusunun maçlarda atmış olduğu basketlerin geometrik ortalaması Eş. 4.13 ile hesaplanır.

$$M_{geometrik}(22,24,23,19) = \left(\prod_{i=1}^{4} 22*24*23*19 \right)^{\frac{1}{4}}$$
$$= 21,9$$

Ağırlıklı geometrik ortalama operatörü Eş. 4.14'deki gibi gösterilir. Burada $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$'dir.

$$GM(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{w_i} \tag{4.14}$$

Örnek 4.1'de, $W = \{0,4; 0,1; 0,3; 0,2\}$ kümesi maçların önemini göstermektedir. Buna göre A basketbolcusunun ağırlıklı geometrik ortalama basket sayısı Eş. 4.14 ile hesaplanır.

$$GM(22,24,23,19) = \prod_{i=1}^{4} 22^{0,4} * 24^{0,1} * 23^{0,3} * 19^{0,2}$$
$$= 21,8$$

Harmonik ortalama operatörü Eş. 4.15'deki gibi gösterilir.

$$M_{harmonik}(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}} \tag{4.15}$$

Örnek 4.1'de, A basketbolcusunun maçlarda atmış olduğu basketlerin harmonik ortalaması Eş. 4.15 ile hesaplanır.

$$M_{harmonic}(22, 24, 23, 19) = \frac{4}{\frac{1}{24} + \frac{1}{22} + \frac{1}{19} + \frac{1}{23}}$$
$$= 21,8$$

Ağırlıklı harmonik ortalama operatörü Eş. 4.16'daki gibi gösterilir. Burada $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$'dir.

$$HM(x_1, ..., x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{x_i} \right)^{-1} \tag{4.16}$$

Örnek 4.1'de, $W = \{0,4; 0,1; 0,3; 0,2\}$ kümesi maçların önemini göstermektedir. Buna göre A basketbolcusunun ağırlıklı harmonik ortalama basket sayısı Eş. 4.16 ile hesaplanır.

$$HM(22, 24, 23, 19) = \left(\sum_{i=1}^{4} \frac{0,4}{22} + \frac{0,1}{24} + \frac{0,3}{23} + \frac{0,2}{19} \right)^{-1}$$
$$= 21,7$$

4.1.2. OWA operatörü

OWA operatörleri [115], sıralı değerlerin ağırlıklı aritmetik ortalamasını hesaplar. Azalan sırada dizilmiş puanların bulunduğu pozisyonlara ağırlık atayarak birleştirme yaptığından ağırlıklar, belirli bir bileşene değil belirli bir pozisyona aittir. OWA operatörleri, ve'leyici ve veya'layıcı davranışı bir arada sergileyen, birden fazla kriterin memnun edilmesinde birleştirilmiş puan elde etmek amacıyla ortalama sağlayan araçlardır [112].

Tanım 4.1.

$W=(w_1,w_2,...,w_n)$, $\forall i\in\{1,2,...,n\}$ için $w_i\in[0,1]$ ve $\sum_{i=1}^{n}w_i=1$ olmak üzere Eş. 4.17'de gösterilen operatör OWA operatörüdür.

$$OWA(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{j=1}^{n}w_j x_{\sigma(j)} \tag{4.17}$$

Burada $x_{\sigma(i)}$, $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in[0,1]^n$ vektörünün i. en büyük elemanıdır.

Eş. 4.18'de gösterilen OWA operatörünün veyalık derecesi onun ne kadar maksimum (veya), ne kadar minimum (ve) operatörü gibi davrandığının ölçümüdür.

$$veyalık(W)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(n-i)w_i \tag{4.18}$$

Maksimum operatörünü ifade eden $W^*=[1,0,\ldots,0]$ ağırlıkları için veyalık derecesi 1, minimum operatörünü ifade eden $W^*=[0,0,\ldots,1]$ ağırlıkları için veyalık derecesi 0, aritmetik ortalamayı ifade eden $W=\left[\frac{1}{n},\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}\right]$ ağırlıkları için veyalık derecesi 0,5'tir.

Örnek 4.1'de, $W=\{0,4;0,1;0,3;0,2\}$ kümesi A basketbolcusunun basket performansının önem ağırlıklarını göstermektedir. Buna göre A basketbolcusunun OWA operatörü ile ortalama basket sayısı Eş. 4.17 ile hesaplanır.

$$OWA(24,23,22,19)=\sum_{j=1}^{n}24*0,4+23*0,1+22*0,3+19*0,2$$
$$=22,3$$

4.1.3. t-norm ve t-konorm operatörleri

Tanım 4.2.

$T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ fonksiyonu ile ifade edilen bir t-norm aşağıdaki özellikleri sağlar.

(1) $T(x,y)=T(y,x)$

(2) $T(x,y)\le T(u,v)$, eğer $x\le u$ ve $y\le v$

(3) $T(x,T(y,z))=T(T(x,y),z)$

(4) $T(x,1)=x$

(5) $T(x,y)\le min(x,y)$

Tanım 4.3.

$S:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ fonksiyonu ile ifade edilen bir t-konorm aşağıdaki özellikleri sağlar.

(1) $S(x,y)=S(y,x)$

(2) $S(x,y)\le S(u,v)$, eğer $x\le u$ ve $y\le v$

(3) $S(x,S(y,z))=S(S(x,y),z)$

(4) $S(x,0)=x$

(5) $S(x,y)\ge max(x,y)$

Çizelge 4.1'de verilen genel t-norm ve t-konormlardan minimum operatörü en büyük t-normdur. Ayrıca eş kuvvetlilik özelliğini sağlayan tek t-normdur. Drastic t-norm operatörü ise en küçük t-norm operatörüdür. Maksimum operatörü en küçük t-konorm operatörü iken eş kuvvetlilik özelliğini sağlayan tek t-konorm operatörüdür. En büyük t-konorm operatörü ise Drastic t-konorm operatörüdür. Bazı t-norm ve t-konorm operatörleri ise belirli parametrelere bağlıdır. Bu operatörlere örnekler Çizelge 4.2'de gösterilmiştir.

Çizelge 4.1. Genel t-norm ve t-konormlar

	t-norm	t-konorm
Min-Max	$min(x,y)$	$max(x,y)$
Olasılıksal	xy	$x+y-xy$
Lukasiewicz	$max(x+y-1,0)$	$min(x+y,1)$
Drastic	$\begin{pmatrix} x \text{ eğer } y=1 \\ y \text{ eğer } x=1 \\ 0 \quad d.d. \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \text{ eğer } y=0 \\ y \text{ eğer } x=0 \\ 1 \quad d.d. \end{pmatrix}$

Çizelge 4.2 Parametreye bağlı t-norm ve t-konormlar

	t-norm	t-konorm
Hamacher, $\gamma \geq 0$	$(xy)/(\gamma+(1-\gamma)(x+y-xy))$	$(x+y-xy-(1-\gamma)xy)/(1-(1-\gamma)xy)$
Yager , $p>0$	$max(1-[(1-x)^p+(1-y)^p]^{(1/p)},0)$	$min([x^p+y^p]^{(1/p)},1)$
Weber-Sugeno, $\lambda_T,\lambda_S>-1$	$max((x+y-1+\lambda_T xy)/(1+\lambda_T),0)$	$max(x+y+\lambda_S xy,1)$
Schweize&Sklar, $q>0$	$1-[(1-x)^q+(1-y)^q-(1-x)^q(1-y)^q]^{(1/q)}$	$[x^q+y^q-x^qy^q]^{(1/q)}$
Frank, $s>0, s\neq 1$	$log_s[1+((s^x-1)(s^y-1))/(s-1)]$	$1-log_s[1+((s^{(1-x)}-1)(s^{(1-y)}-1))/(s-1)]$

Örnek 4.2.

$X=\{0,4;0,6;0,2\}$ kümesi bir soğuk oda deposunun sıcaklık sapmalarını göstermektedir. Bu kümenin t-norm ve t-konormların birleşme özelliğinden yararlanılarak $T(0,4,T(0,6;0,2)$ ve $S(0,4,S(0,6;0,2)$, yapılan birleştirmeleri sonucunda 0,2 ile en büyük t-norm minimum olurken Lukasiewicz ve Drastic operatörleri en küçük sonucu vermiştir.

	t-norm	t-conorm
Min-Max	0,2	0,6
Olasılıksal	0,048	0,81
Lukasiewicz	0	1
Drastic	0	1

Türkşen (1992), tüm t-norm ve t-konorm aileleri için dengeleyici operatörleri Eş. 4.19 ve Eş. 4.20'de gösterildiği gibi ortaya koymuştur [116].

$$\mu_{A\theta B} = (1-\gamma)T(a,b) + \gamma S(a,b) \tag{4.19}$$

$$\mu_{A\theta B} = [T(a,b)]^{1-\gamma}\left[S(a,b)\right]^{\gamma} \tag{4.20}$$

Örnek 4.2'de minimum ve maksimum operatörleri için elde edilen sonuçlar $\gamma = 0,7$ için Eş. 4.19 ve Eş. 4.20'de kullanıldığında sırasıyla 0,48 ve 0,43 sonuçları elde edilir. Bu sonuçlar minimum ve maksimum değerlerin arasında olduğundan operatörlerin dengeleyici özelliği görülür.

4.1.4. Bulanık integraller

Tanım 4.4.

X'te bir (monoton) bulanık ölçü $2^X \setminus \varnothing$'de tanımlanan bir monoton küme fonksiyonudur. Monoton olmayan bulanık ölçü ise $2^X \setminus \varnothing$'de tanımlanan bir küme fonksiyonudur. Bulanık ölçüler monoton olmayan bulanık ölçülerin özel bir durumudur. X bir çalışma alanında çalışıp aynı ürünü üreten tüm işçilerin kümesi olsun. Bu çalışma alanında en etkili şekilde çalışan her bir A grubu için, $\mu(A)$, bu grubun bir saatte ürettiği toplam ürün sayısını göstersin. $\mu : 2^X / \varnothing \to R_+$ fonksiyonu monotondur ve bir bulanık ölçüdür.

Ç, X evrensel kümesinde X'in altkümelerinin boş olmayan bir ailesi olsun. (X,ζ)'de bulanık ölçü $\mu : \zeta \to [0,1]$ aşağıdaki şartları sağlar.

(1) $\mu(\varnothing) = 0$ *ve* $\mu(X) = 1$ (Sınır)

(2) $\forall A, B \in \zeta$ eğer $A \subseteq B$ ise $\mu(A) \leq \mu(B)$ (Monotonluk)

(3) ζ'*da* $A_1 \subset A_2 \subset ...,$ artan sırada eğer, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \zeta$ ise $\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$

(Aşağıdan Süreklilik)

(4) ζ'*da* $A_1 \supset A_2 \supset ...,$ azalan sırada eğer, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \zeta$ ise $\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$

(Yukarıdan Süreklilik)

Bulanık ölçülerin toplamsallık özelliği göstermesi gerekli değildir. *A* ve *B* *X*'in ayrı alt kümeleri, $A \cup B$ grupların birleşmesi sonucu verimliliklerini göstersin. *A* ve *B* grupları ayrı ayrı çalıştıkları zaman $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ 'dir. Fakat gruplar genellikle birbirleri ile etkileşim halinde olduklarından bu eşitlik her zaman sağlanmaz. *A* ve *B* grubu üyelerinin etkili bir işbirliği yapmaları halinde $\mu(A \cup B) > \mu(A) + \mu(B)$ eşitsizliğini, uyuşmazlık içinde çalışmaları ise $\mu(A \cup B) < \mu(A) + \mu(B)$ eşitsizliğini verir. Tanım 4.4'de değinilen her grubun etkili bir şekilde çalışıyor olduğu varsayımı monotonluk özelliğini getirirken bulanık ölçülerin her zaman monoton olması da gerekmez. *A* ve *B* grubunun arası kötü ise birlikte çalışırken ortaya koydukları performans ayrı çalışırken ortaya koydukları performansın altına düşebilir. Yani $\mu(A \cup B) < \mu(A)$ ya da $g(A \cup B) < g(B)$ olabilir. Bu durumda monoton olmayan bulanık ölçülerden bahsedilebilir [117].

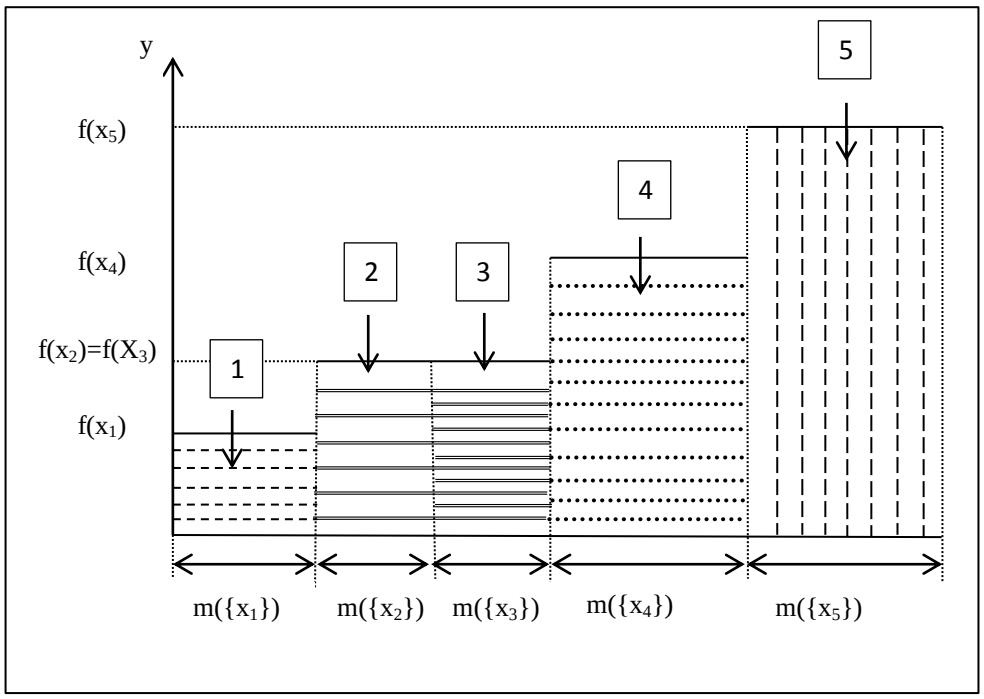
Tanım 4.5.

m, 2^X'te toplamsal bir ölçü ve f, *X*'te bir fonksiyondur. f fonksiyonunun m toplamsal ölçüsü hakkındaki integrali $\int f(x)dm(x)$, Eş. 4.21'deki gibidir.

$$\int f(x)dm(x) = \sum_{x \in X} f(x)m(\{x\}) \tag{4.21}$$

Şekil 4.1'de gösterilen f fonksiyonunun integrali numaralandırılmış (1-5) alanların toplamıdır.

$$\int f(x)dm(x)$$
$$= f(x_1)m(\{x_1\}) + f(x_2)m(\{x_2\}) + f(x_3)m(\{x_3\}) + f(x_4)m(\{x_4\}) + f(x_5)m(\{x_5\})$$



Şekil 4.1. f fonksiyonunun integrali

m, X'te toplamsal bir ölçü, $a_1, a_2, ..., a_n$ gerçek sayılar, f X'te bir fonksiyon ve $A, A_1, A_2, ..., A_n$ X'in alt kümeleri olsun.

$$\int \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i} dm = \sum_{i=1}^{n} a_i m(A_i) \tag{4.22}$$

Eş. 4.22'den Eş. 4.23 ve X'deki her fonksiyon için Eş. 4.24 elde edilir.

$$\int 1_A dm = m(A) \tag{4.23}$$

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i} \tag{4.24}$$

Örneğin;

$$f = \sum_{x \in X} f(x) 1_{\{x\}} \tag{4.25}$$

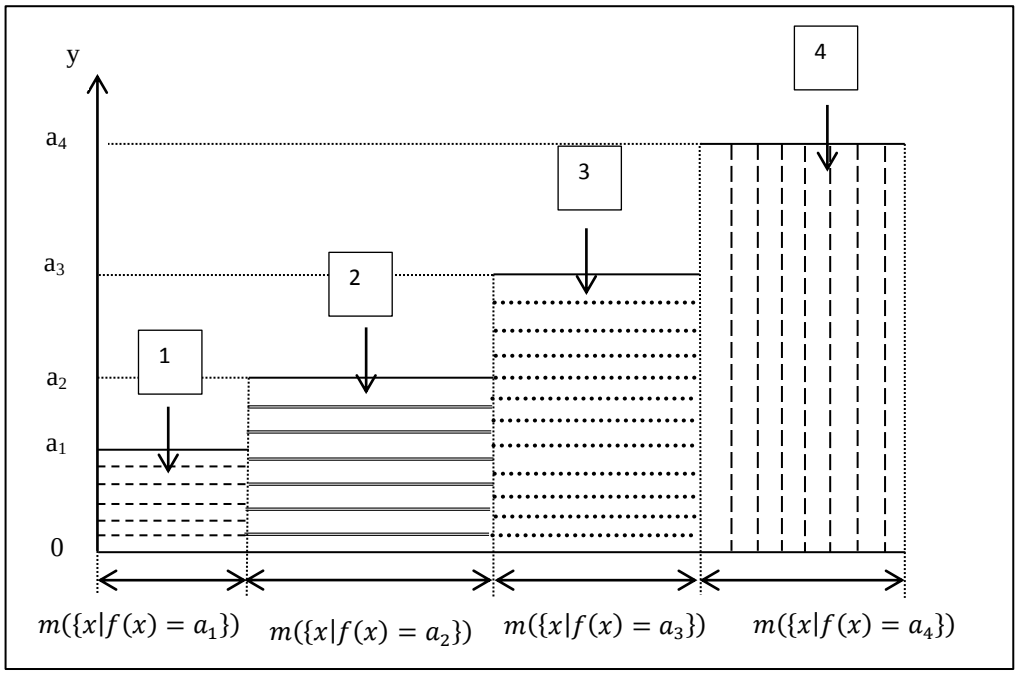
$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{\{x | f(x) = a_i\}} \tag{4.26}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) 1_{\{x | f(x) \geq a_i\}} \tag{4.27}$$

Burada aralıklar $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ ilişkisine sahiptir ve $a_0 = 0$'dır.

Eş. 4.25'de gösterilen fonksiyonun integrali Eş. 4.21'de verilen ve Şekil 4.1'de gösterilen integraldir. Eş. 4.26'da gösterilen fonksiyonun integrali Eş. 4.28'de verilmiş ve Şekil 4.2'de gösterilmiştir.

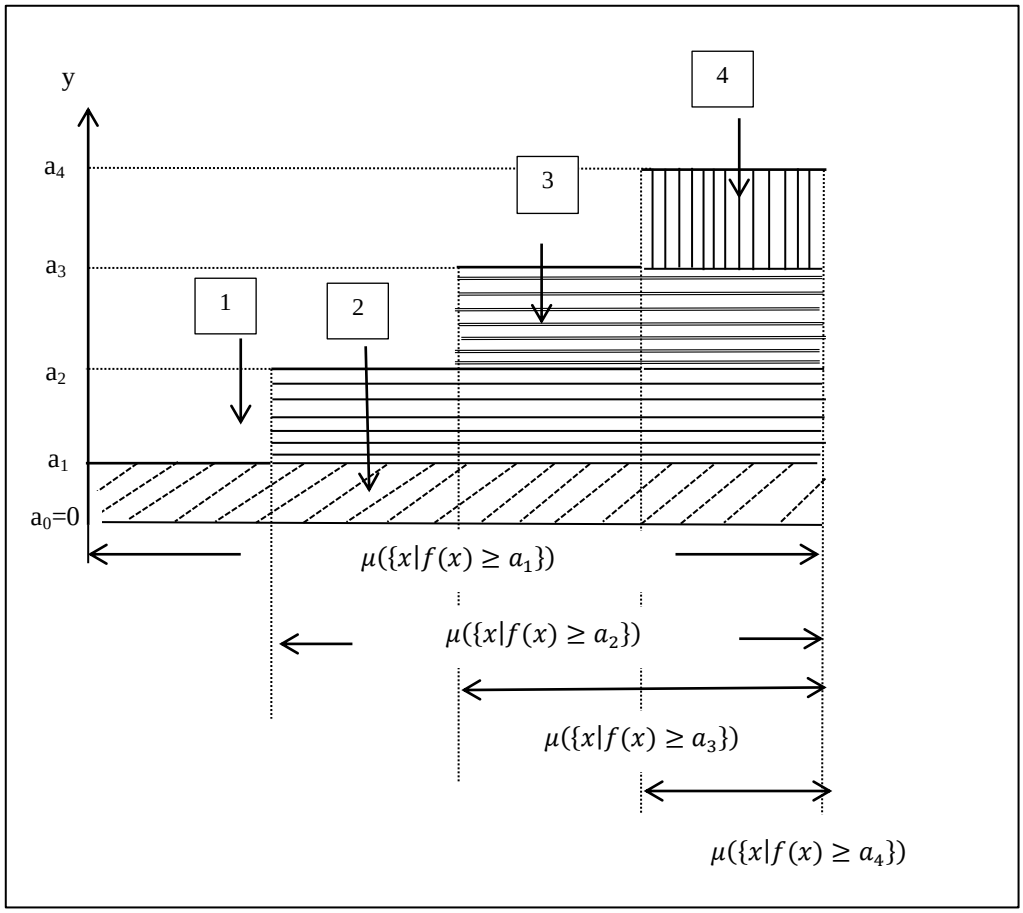
$$\int f(x) dm(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i m(\{x \,|\, f(x) = a_i\}) \tag{4.28}$$



Şekil 4.2. *f* fonksiyonunun integrali

Eş. 4.27'de gösterilen fonksiyonun integrali Eş. 4.29'da verilmiş ve Şekil 4.3'de gösterilmiştir.

$$\int f(x)dm(x) = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})m(\{x \mid f(x) \geq a_i\}) \tag{4.29}$$



Şekil 4.3. f fonksiyonunun integrali

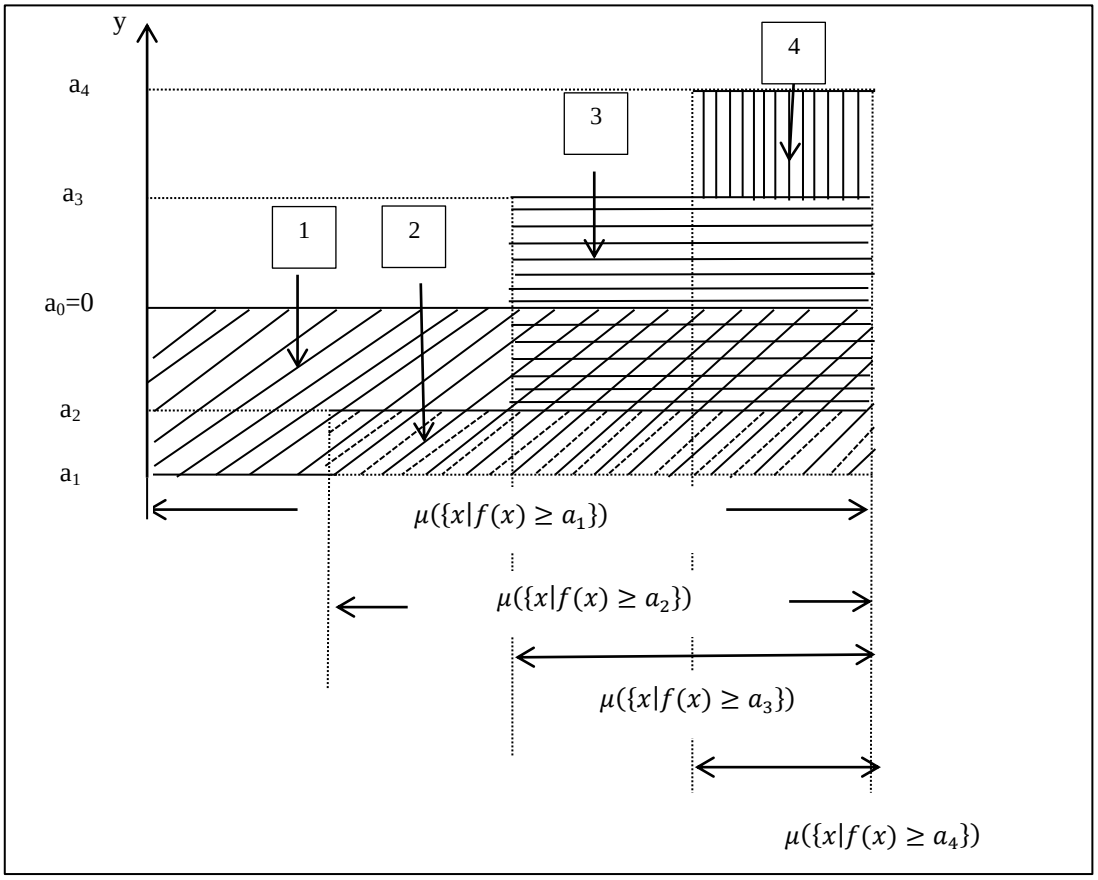
Tanım 4.6.

μ, X 'te tanımlanmış monoton olmayan bulanık ölçü ve f, X'te $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ aralığına sahip bir fonksiyondur. Burada aralıklar $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ ilişkisine sahiptir. f fonksiyonunun μ bulanık ölçüsü hakkındaki Choquet integrali $(C)\int f(x)\, d\mu(x)$ Eş. 4.30'daki gibidir [118].

$$(C)\int f \, d\mu = \sum (a_i - a_{i-1}).\mu\left(\{x \mid f(x) \ge a_i\}\right) \tag{4.30}$$

Burada $a_0 = 0$'dır.

Şekil 4.1 Eş. 4.30'daki Choquet integralinin $a_1 > 0$ olduğu durumunu, Şekil 4.4 ise $a_1 < 0$ olduğu durumunu gösterir.



Şekil 4.4. *f* fonksiyonunun integrali

Örnek 4.3.

$X = \{x_1, x_2, x_3\}$ bir iş yerinde çalışan işçilerin kümesi olsun. Bu küme üzerinde tanımlanan bulanık ölçü μ, bu işçilerin tek başlarına ve birlikte çalışmaları durumundaki etkinlik derecelerini göstersin. x_1, x_2 ve x_3'ün tek başlarına ürettikleri ürün miktarları sırasıyla 8, 10 ve 5'tir. Bu değerlerin işçilerin birlikte çalışmaları durumundaki etkinlikleri göz önüne alındığındaki Choquet integrali Eş. 4.23 ile hesaplanır.

$$\mu(\varnothing) = 0$$

$$\mu(x_1) = 0,5$$

$\mu(x_2) = 0,2$

$\mu(x_1, x_2) = 0,6$

$\mu(x_3) = 0,4$

$\mu(x_1, x_3) = 0,7$

$\mu(x_1, x_2, x_3) = 1$

$x_1^* = x_3$

$x_2^* = x_1$

$x_3^* = x_2$

$$(C)\int f\ d\mu = (f(x_1^*) - 0).\mu(x_1^*, x_2^*, x_3^*) + (f(x_2^*) - f(x_1^*)).\mu(x_2^*, x_3^*)$$
$$+(f(x_3^*) - f(x_2^*)).\mu(x_3^*)$$
$$= f(x_3).\mu(X) + (f(x_1) - f(x_3)).\mu(x_1, x_2) + (f(x_2) - f(x_1)).\mu(x_2)$$
$$= 5 \times 1 + (8-5) \times 0,6 + (10-8) \times 0,2$$
$$= 7,2$$

Tanım 4.7.

μ, X'te tanımlanmış normalleştirilmiş bir bulanık ölçü ve f, X'te tanımlanmış $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ aralığına sahip bir fonksiyondur. Burada aralıklar $0 \le a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \le 1$ ilişkisine sahiptir. f fonksiyonunun μ bulanık ölçüsü hakkındaki *Sugeno integrali* $\int f(x) \circ \mu(x)$ Eş. 4.31'deki gibi tanımlanır [118].

$$\int f \circ \mu = \bigvee_{i=1}^{n} \left[a_i \wedge \mu\left(\{x | f(x) \ge a_i\} \right) \right] \tag{4.31}$$

Burada $\wedge$ ve $\vee$ sırasıyla ve'leyici ve veya'layıcı operatörleri ifade eder. Örnek 'de ve'leyici ve veya'layıcı operatör olarak sırasıyla minimum ve maksimum kullanılmıştır.

Örnek 4.3'de, x_1, x_2 ve x_3'ün bir saatte tek başlarına ürettikleri ürün miktarları sırasıyla 0,8, 1 ve 0,5'tir. Bu değerlerin işçilerin birlikte çalışmaları durumundaki etkinlikleri göz önüne alındığındaki Sugeno integrali Eş. 4.31 ile hesaplanır.

$$x_1^* = x_3$$

$$x_2^* = x_1$$

$$x_3^* = x_2$$

$$\begin{aligned}
&\int f \circ \mu = \vee\left(\left[f(x_1^*) \wedge \mu(x_1^*, x_2^*, x_3^*)\right], \left[f(x_2^*) \wedge \mu(x_2^*, x_3^*)\right], \left[f(x_3^*) \wedge \mu(x_3^*)\right]\right) \\
&= \vee\left(\left[f(x_3) \wedge \mu(x_3, x_1, x_2)\right], \left[f(x_1) \wedge \mu(x_1, x_2)\right], \left[f(x_2) \wedge \mu(x_2)\right]\right) \\
&= \vee\left(\left[0,5 \wedge 1\right], \left[0,8 \wedge 0,6\right], \left[1 \wedge 0,2\right]\right) \\
&= \vee\left(0,5; 0,6; 0,2\right) \\
&= 0,6
\end{aligned}$$

Tanım 4.8.

μ, X'te tanımlanmış monoton olmayan bir bulanık ölçü ve f, X'te tanımlanmış $\{a_1, a_2, ..., a_m, b_1, b_2, ..., b_n\}$ aralığına sahip bir fonksiyondur. Burada aralıklar $b_n \le b_{n-1} \le ... \le b_1 \le 0 \le a_1 \le ... \le a_m$ ilişkisine sahiptir. f fonksiyonunun μ bulanık ölçüsü hakkındaki *Šîpoš integrali* $(\tilde{S})\int f(x)\, d\mu(x)$ Eş. 4.32'deki gibidir [117].

$$\begin{aligned}
(\tilde{S}) = \int f \; d\mu = &\sum_{i=1}^{m} (a_i - a_{i-1}).\mu\left(\left\{x \middle| f(x) \ge a_i\right\}\right) \\
&+ \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i-1}).\mu\left(\left\{x \middle| f(x) \le b_i\right\}\right)
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Burada $a_0 = b_0 = 0$.

Örnek 4.4.

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ bir iş yerinde çalışan işçilerin kümesi olsun. Bu küme üzerinde tanımlanan bulanık ölçü μ, bu işçilerin tek başlarına ve birlikte çalışmaları durumundaki etkinlik derecelerini göstersin. x_1, x_2, x_3 ve x_4'ün bir önceki günden kalma stok miktarları sırasıyla -4, 8, -6 ve 5'tir. Bu değerlerin işçilerin birlikte çalışmaları durumundaki etkinlikleri göz önüne alındığındaki *Šîpoš* integrali Eş. 4.32 ile hesaplanır.

$\mu(\varnothing) = 0$

$\mu(x_1) = 0,5$

$\mu(x_2) = 0,2$

$\mu(x_2, x_4) = 0,6$

$\mu(x_3) = 0,4$

$\mu(x_1, x_3) = 0,7$

$\mu(x_1, x_2, x_3) = 1$

$a_1 = x_4$

$a_2 = x_2$

$b_1 = x_1$

$b_2 = x_3$

$$
\begin{aligned}
(\tilde{S})\int f\ d\mu &= (a_1 - 0).\mu(a_1, a_2) + (a_2 - a_1).\mu(a_2) \\
&\quad + (\mathrm{b}_1 - 0).\mu(b_1, b_2) + (b_2 - b_1).\mu(b_2) \\
&= f(x_4).\mu(x_2, x_4) + (f(x_2) - f(x_4)).\mu(x_2) \\
&\quad + f(x_1).\mu(x_1, x_3) + (f(x_3) - f(x_1)).\mu(x_3) \\
&= 5 \times 0,6 + (8-5) \times 0,2 + (-4) \times 0,7 + (-6-(-4)) \times 0,4 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Tanım 4.9.

n elemanlı bir evrensel kümede tanımlı bir bulanık ölçü ve integraller $2^n - 1$ parametreye sahiptir. Böylece içinde bulunulan durumu tanımlamada çok büyük bir esneklik sağlanırken aynı zamanda oldukça karmaşık bir problem ortaya konulur. Bu problemi çözmenin yollarından bir tanesi ölçülerin toplamsallığından yararlanmaktır.

$\lambda \in (-1, \infty)$ olmak üzere 2^X'te tanımlanan g_λ fonksiyonu *X*'in *A* ve *B* ayrık alt kümeleri için Eş. 4.33 gibi bir λ*-bulanık* ölçüdür ve *n-1* tane parametre ile integrallerin parametre çokluğundan kaynaklı karmaşıklığını çözmeye yardım eder [117].

$$g_\lambda(A \cup B) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B) + \lambda g_\lambda(A) g_\lambda(B) \tag{4.33}$$

$\lambda = 0$ olduğunda λ*-bulanık ölçü* olasılık ölçüsü gibi bir toplamsal ölçüdür.

$X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ kümesinde $g^i : g(\{x_i\})$ küme elemanlarının bulanık ölçülerini vermek üzere λ ölçüsünün değeri Eş. 4.34 ile bulunur.

$$
\begin{aligned}
g(X) &= \sum_{j=1}^{n} g^j + \lambda \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} g^j g^k + \lambda^2 \sum\sum\sum \ + ... \lambda^{n-1} g^1 g^2 ... g^n \\
1 &= \left[\prod_{x_i \in X} (1 - \lambda g^i) - 1 \right] / \lambda \\
\lambda + 1 &= \prod_{x_i \in X} (1 - \lambda g^i)
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

Örnek 4.5.

$X = \{x_1, x_2, x_3\}$ bir iş yerinde çalışan işçilerin kümesi olsun. Bu küme üzerinde tanımlanan bulanık ölçü g, bu işçilerin tek başlarına ve birlikte çalışmaları durumundaki etkinlik derecelerini göstersin. İşçilerin tek başlarına gösterdikleri performans değerleri biliniyorken birlikte gösterecekleri performans değerleri Eş. 4.33 ve Eş. 4.34 kullanılarak bulunur.

$g^1 = 0,34$

$g^2 = 0,32$

$g^3 = 0,33$

$\lambda + 1 = (1 - 0,34\lambda).(1 - 0,32\lambda).(1 - 0,33\lambda)$
$\lambda = 0,0305$

$g(x_1, x_2) = g(x_1) + g(x_2) + 0,0305 g(x_1) g(x_2)$
$= 0,34 + 0,32 + 0,0305 \times 0,34 \times 0,32$
$= 0,6633$

X evrensel kümesindeki elemanların yoğunluk adı verilen bulanık ölçülerinin belirlenmesinde uzman görüşlerinden faydalanılabileceği gibi gözlenen verilerden faydalanılan matematiksel ve genetik algoritmalar gibi optimizasyon teknikleri de vardır. X evrensel kümesindeki her bir eleman için gözlenen verinin eğitim seti üzerindeki performans ölçütlerine göre elemanların bireysel bulanık ölçüleri hesaplanır. Bireysel performans ölçütlerinin evrensel kümedeki diğer elemanların toplam performans ölçütüne bölünmesi ile (normalizasyon) bireysel elemanların bulanık ölçüleri hesaplanır [119-123].

$$g^i = \frac{p_i}{\sum_j p_j} \tag{4.35}$$

Burada g^i i. elemanın bireysel bulanık ölçüsünü, p_i ise eğitim kümesi üzerindeki performans ölçütünü gösterir. Evrensel kümedeki elemanlara ait bireysel bulanık ölçüler

bulunduktan sonra evrensel kümenin alt kümelerine ait bulanık ölçüler Eş. 4.33 ile bulunabileceği gibi herhangi bir birleştirme operatörü yardımı ile de bulunabilir [122].

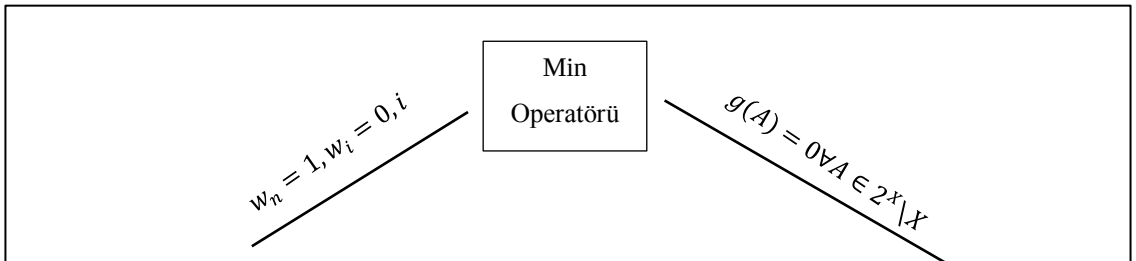
Örnek 4.5'de işçilerin performans ölçütleri günlük üretmiş oldukları hatasız parça oranı olsun. Buna göre x_1'in ürettiği hatasız parça oranı 51/77; x_2'nin ürettiği hatasız parça oranı 45/50; x_3'ün ürettiği hatasız parça oranı 80/100'dür. Bu işçilerin tek başlarına çalışmaları durumundaki etkinlikleri Eş. 4.35 ile hesaplanır.

$$g^1 = \frac{51/77}{51/77 + 45/50 + 80/100} = 0,28$$

$$g^2 = 0,38$$

$$g^3 = 0,34$$

En yaygın kullanılan operatör olan ortalama operatöründen etkileşimleri dikkate olan bulanık integrallere kadar gerek karar vericinin tutumuna gerekse ele alınan problemin yapısına bağlı olarak seçilebilecek birçok operatör vardır. Bu operatörlerin birbirinden ayrıldığı noktalar olduğu gibi bazı durumlarda da birbirlerini kapsarlar. OWA ağırlıklarının ilk sırasındaki bir, ardından gelenler sıfır olduğunda maksimum operatörüne, sonuncusu bir diğerleri sıfır olduğunda minimum operatörüne, hepsi birbirine eşit olduğunda aritmetik ortalama operatörüne, ortadaki değeri bir diğerleri sıfır olduğunda ise medyan operatörüne denk olur. Minimum operatörü en büyük birleştirme sonucu üreten t-norm operatörüdür. Maksimum operatörü ise en küçük birleştirme sonucunu veren t-konorm operatörüdür. Choquet bulanık integralinde g bulanık ölçüsü olasılık ölçüsü olursa ve tüm g bulanık ölçüler birbirine eşit olursa ortalama operatörüne, g bulanık ölçülerin evrensel küme dışında tamamı sıfır ise minimum operatörüne, g bulanık ölçülerinin tamamı bire eşitse maksimum operatörüne denk olur. Böylece Şekil 4.5'de gösterildiği gibi ağırlıklı ortalama, maksimum ve minimum operatörleri Choquet integrali ve OWA operatörü arasında köprü görevi görürler. Sugeno bulanık integralinde ise tüm g bulanık ölçüleri bir ise maksimum operatörüne denk gelir.



Şekil 4.5. Birleştirme operatörleri arasındaki ilişki

4.2. Birleştirme Kuralları

Bir evrensel kümedeki elemanlara ait fikir, bilgi, karar birleştirmenin yanı sıra bu evrensel kümenin tüm alt kümelerine ait birleştirme yapma olanağını sağlarlar. Kanıt teorisine bağlı birleştirme yapılırken kütle atamaları birleştirilir. Birleştirme kuralları birleştirilen kaynağın güvenilirliğine göre farklı yapıdadırlar.

$m(A \cap B)$: Ve'leyici birleştirme kurallarında bilgi sağlanan kaynakların güvenilir olduğu kabul edilir. Eş. 4.36 genel ve'leyici birleştirme kuralıdır.

$$m_{12}(A) = \sum_{\substack{B \cap C = A \\ B \cap C \neq \varnothing}} m_1(B) m_2(C) \tag{4.36}$$

$m(A \cup B)$: Veya'layıcı birleştirme kurallarında bilgi sağlanan kaynaklardan en az birisi güvenilirdir ve bu güvenilir kaynağın hangisi olduğu bilinmemektedir. Eş. 4.37 genel veya'layıcı birleştirme kuralıdır.

$$m_{12}(A) = \sum_{B \cup C = A} m_1(A) m_2(B) \tag{4.37}$$

$m(A \underline{\cup} B)$: Özel veya'layıcı birleştirme kuralında bilgi sağlanan kaynaklardan sadece bir tanesi güvenilirdir ve bu güvenilir kaynağın hangisi olduğu bilinmemektedir. Eş. 4.38 özel veya'layıcı birleştirme kuralıdır. Burada $B \underline{\cup} C = (B \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap C)$ 'dir.

$$m_{12}(A) = \sum_{B \underline{\cup} C = A} m_1(\mathrm{B}) m_2(C) \tag{4.38}$$

4.2.1. D-S birleştirme kuralı

Farklı kaynaklardan alınan sonuçların D-S birleştirme kuralı kullanılarak birleştirilmesi için kaynakların bağımsız ve güvenilir olduğu varsayılır [124]. D-S birleştirme kuralında inanç fonksiyonları kütle atama fonksiyonlarından faydalanılarak birleştirilir.

Tanım 4.10.

$m : 2^X \rightarrow [0,1]$ X'de tanımlı bir fonksiyon, $m(\varnothing) = 0$ ve $\sum_{A \subseteq X} m(A) = 1$ olmak üzere Eş. 4.39 ve Eş. 4.40 D-S birleştirme kuralını gösterir.

$$m_{12}(A) = \frac{\sum_{B \cap C = A} m_1(B) \cdot m_2(C)}{1 - K} \text{ , } A \neq \varnothing \text{ ve } m_{12}(\varnothing) = 0 \tag{4.39}$$

$$K = \sum_{B \cap C = \varnothing} m_1(B).m_2(C) \tag{4.40}$$

Burada K, m_1 ve m_2 kaynakları arasındaki çelişkiyi yansıtır ve paydadaki 1-K normalizasyon faktörüdür [125]. Normalizasyon boş kümeye hiç inanç atanmayacağını ve toplam inancın 1'e eşit olacağını garanti eder. K=1 olduğunda m fonksiyonu hesaplanamaz, bu durum iki kaynağın birbiriyle tamamıyla çeliştiğini gösterir. K=0 olduğu zaman iki inanç fonksiyonu arasında hiçbir çelişki meydana gelmediği anlaşılır.

Kanıtlar arasında yüksek çelişki olduğunda D-S birleştirme kuralı mantık dışı sonuçlar üretmektedir [55]. Zadeh, D-S'deki normalizasyon işleminin uzman görüşlerini bastırdığını ve D-S kuralının mantık dışı sonuçlar ürettiğini bir örnek ile göstermiştir [126]. D-S

birleştirme kuralının çelişen kanıtların olduğu durumlarda neden olduğu mantık dışı sonuçlar bu yaklaşımı geliştirme ihtiyacını beraberinde getirmiştir ve yeni önermeler ortaya çıkmıştır [10, 127-129].

Örnek 4.6.

Rafael tarafından yapıldığı düşünülen eski bir tablo bulunmuştur. Fakat bulunan tablonun durumuyla ilgili aşağıda belirtilen kuşkular söz konusudur.

1. Tablo Rafael tarafından yapılmıştır.
2. Tablo Rafael'in öğrencilerinden biri tarafından yapılmıştır.
3. Tablo sahtedir.

Bu 3 durum R (Rafael), D (Öğrenci), C (Sahte) ile gösterilsin. Odak elemanlar ve bu elemanların değerleri Çizelge 4.3'de verilmiştir.

Çizelge 4.3 Odak elemanlar ve değerleri

Odak Elemanlar	m_1	Bel_1	Pl_1	m_2	Bel_2	Pl_2	$m_{1,2}$	$Bel_{1,2}$	$Pl_{1,2}$
R	0,05	0,05	0,90	0,15	0,15	0,90	0,21	0,21	0,84
D	0	0	0,80	0	0	0,60	0,01	0,01	0,50
C	0,05	0,05	0,80	0,05	0,05	0,80	0,09	0,09	0,66
$R \cup D$	0,15	0,2	0,95	0,05	0,2	0,95	0,12	0,34	0,91
$R \cup C$	0,1	0,2	1	0,2	0,4	1	0,2	0,5	0,99
$D \cup C$	0,05	0,1	0,95	0,05	0,1	0,85	0,06	0,16	0,79
$R \cup D \cup C$	0,6	1	1	0,5	1	1	0,31	1	1

$$K = m_1(R)m_2(D) + m_1(R)m_2(C) + m_1(R)m_2(D \cup C)$$
$$+m_1(D)m_2(R) + m_1(D)m_2(C) + m_1(D)m_2(R \cup C) + m_1(C)m_2(R)$$
$$+m_1(C)m_2(D) + m_1(C)m_2(R \cup D) + m_1(R \cup D)m_2(C)$$
$$+m_1(R \cup C)m_2(D) + m_1(D \cup C)m_2(R) = 0,03$$

$$m_{1,2}(R) = m_1(R)m_2(R) + m_1(R)m_2(R \cup D) + m_1(R)m_2(R \cup C)$$
$$+m_1(R)m_2(R \cup D \cup C) + m_1(R \cup D)m_2(R) + m_1(R \cup D)m_2(R \cup C)$$
$$+m_1(R \cup C)m_2(R) + m_1(R \cup C)m_2(R \cup D) + m_1(R \cup D \cup C)m_2(R) / 0,97$$
$$= 0,21$$

Bu örnekte kanıtlar arasındaki çelişki 0,03 çıkmıştır. Kanıtlar arasında yüksek çelişki olduğunda D-S birleştirme kuralı mantık dışı sonuçlar ürettir [55].

4.2.2. Yager'ın birleştirme kuralı

Yager, D-S birleştirme kuralının mantık dışı sonuçlardan kaçınmak için 'Yager'ın Modifiye Dempster-Shafer Kuralı' olarak anılan Dempster'ın kuralına alternatif kuralını tanımlamıştır [1, 51, 56, 130]. Kaynakların tamamının güvenilir olmadığı durumlarda kullanılır. Yager'ın birleştirme kuralının en önemli özelliği çoktan birleştirilmiş bir duruma yeni bilgi geldiği zaman birleştirmenin güncellenmesidir. Olasılık kütle ataması, m, yerine taban olasılık kütle atamasını, q, kullanmıştır. Aralarındaki en büyük fark normalizasyon faktörü ve evrensel kümeye atanan kütledir. Birleştirilmiş taban olasılık kütle atamaları Eş. 4.41 ve Eş. 4.42 ile bulunur.

$$q(A) = \sum_{B \cap C = A} m_1(B)m_2(C) \tag{4.41}$$

$$q(\varnothing) = \sum_{B \cap C \neq \varnothing} m_1(B)m_2(C) \tag{4.42}$$

Yager'ın birleştirme kuralı kanıtı değiştirmez ve boş kümenin taban kütle atamaları Eş. 4.43 ile evrensel kümeye bağlanır.

$$m^Y(X) = q(\varnothing) + q(X) \tag{4.43}$$

Yager'ın taban kütle atamaları ve D-S kuralındaki kütle atamaları arasındaki ilişki Eş. 4.44 ve Eş. 4.45'deki gibidir.

$$m(X) = \frac{q(X)}{1 - q(\varnothing)} \tag{4.44}$$

$$m(A) = \frac{q(A)}{1 - q(\varnothing)} \tag{4.45}$$

Çelişki 0 (sıfır) olduğu zaman D-S ve Yager kuralları aynı sonuca ulaşır. Sadece çelişen veri olduğu zaman ise D-S kuralı kullanılmaz. Yager'ın kuralı ise anlamsız, boş inanç yapısı oluşturur. Anlamsız inanç yapısı, evrensel kümeye 1, taban olasılıklara ise 0 değerinin atandığı, sistemde sadece bilgisizliğin olduğu yapıdır [130].

4.2.3. Inagaki'nin birleştirilmiş birleştirme kuralı

Inagaki, tüm durumlarda kullanılabilecek bir birleştirme kuralı için Yager'ın kuralı ve D-S kuralını birleştirip tek bir kural olarak ortaya koyduğu kural Eş. 4.46'da verilmiştir [130].

$$m(C) = q(C) + f(C)q(\varnothing) \tag{4.46}$$

Burada $C \neq \varnothing$'dır ve f, $q(\varnothing)$ için skala fonksiyonu olarak yorumlanabilir.

$$\sum_{C \subset X, C \neq \varnothing} f(C) = 1 \tag{4.47}$$

Eş. 4.47'de $f(C) \geq 0$'dır.

k ile gösterilen çelişki Eş. 4.48'de verilmiştir.

$$k = \frac{f(C)}{q(C)}, \quad C \neq X, \varnothing \tag{4.48}$$

Inagaki, birleştirme kuralları sınıfını X ve $\varnothing$'den farklı, boş olmayan C, D kümeleri için $\frac{m(C)}{m(D)} = \frac{q(C)}{q(D)}$, ile sınırlandırmıştır. Inagaki'nin birleştirilmiş birleştirme kuralı Eş. 4.49 – Eş. 4.51'de verilmiştir.

$$m_k^U(C) = [1 + kq(\varnothing)]q(C) \tag{4.49}$$

$$m_k^U(X) = [1 + kq(\varnothing)]q(X) + [1 + kq(\varnothing) - k]q(\varnothing) \tag{4.50}$$

$$0 \le k \le \frac{1}{1 - q(\varnothing) - q(X)} \tag{4.51}$$

*k p*arametresi normalizasyon için kullanılır. *k*'nın belirlenmesi için literatürde farklı yöntemler önerilmiştir. *k* sıfır olduğu zaman kural Yager'ın kuralına $k = \frac{1}{1 - q(\varnothing)}$ zaman D-S kuralına dönüşür. *k* üst sınır olduğu zaman Eş. 4.52 ve Eş. 4.53'de verilen *'ekstra kural'* elde edilir.

$$m_{k_{ext}}^U(C) = \frac{1 - q(X)}{1 - q(X) - q(\varnothing)} q(C), \quad \mathrm{C} \neq \mathrm{X} \tag{4.52}$$

$$m_{k_{ext}}^U(X) = q(X) \tag{4.53}$$

İnakagi'nin ekstra kuralında çelişki ($q(\varnothing)$) ve bilgisizlik (q(X)) birleşim sonucunda etkilidir.

4.2.4. Dubois ve Prade'in birleştirme kuralı

Eş. 4.54'de verilen birleştirme kuralı Dubois ve Prade tarafından veya'layıcı birleştirme kuralı olarak önerilmiştir. Kaynaklardan birinin güvenilir olduğu fakat hangisinin olduğu bilinmediği durumlarda kullanılır. Bu kuralda boş kümenin kütle ataması sıfırdır.

$$m_{\cup}(A) = \sum_{B \cup C = A} m_1(B) m_2(C) \tag{4.54}$$

İki kaynak çelişki içinde değilse kaynakların güvenilir olduğu, fakat çelişki varsa kaynaklardan birinin güvenilir olduğu kabul edilir. Kaynaklardan birincisi bir değeri X kümesinde, ikincisi aynı değeri Y kümesinde belirtirse doğruluk $X \cap Y$'de aranır ve $X \cap Y \neq \varnothing$'dir. Eğer $X \cap Y = \varnothing$ ise doğruluk $X \cup Y$'de aranır. Bu prensibe göre Dubois ve Prade kaynaklardan en az birinin güvenilir olduğu durumlar için Eş. 4.55'deki melez

birleştirme kuralını önermişlerdir [131, 132]. Melez birleştirme kuralında da boş kümenin kütle ataması sıfırdır.

$$m_{\cup}(A) = \sum_{\substack{B\cap C=A \\ B\cap C\neq\varnothing}} m_1(B)m_2(C) + \sum_{\substack{B\cup C=A \\ B\cap C=\varnothing}} m_1(B)m_2(C) \tag{4.55}$$

Birleşim çelişki yaratmaz ve kaynaklar tarafından iddia edilen bilginin hiçbirini reddetmez. Normalizasyon prosedürüne ihtiyaç yoktur. Dezavantajı ise arzu edilenden daha fazla tam olmama üretmesidir.

4.2.5. Smets'in birleştirme kuralı

Smets'in birleştirme kuralı D-S kuralının normalleştirilmemiş halidir. Birleştirilen kaynakların bağımsız olduğunu kabul eder. D-S teorinin çelişkili kanıt olduğunda ortaya koyduğu mantık dışı sonuçlara karşı Smets tarafından geliştirilmiştir [9, 133, 134]. Burada çelişki boş kümeye taşınır. D-S teorisindeki $m(\varnothing) = 0$'*ın* aksine $m(\varnothing) \geq 0$'dır. İki kütle atamasının birleştirilmesi ve *n* tane kütle atamasının birleştirilmesi Eş. 4.56 - Eş. 4.58'deki gibidir.

$$m(\varnothing) = \sum_{B\cap C=\varnothing} m_1(B)m_2(C) \tag{4.56}$$

$$m_{12}(A) = \sum_{B,C\subseteq X:\mathrm{B}\cap\mathrm{C}=\mathrm{A}} m_1(B)m_2(C) \quad \forall A \in X \tag{4.57}$$

$$m_1 \cap m_2 ..., \mathrm{m}_n(A) = \sum_{B_1\cap ...\cap B_n=A} m_1(B_1)...., m_n(B_n) \tag{4.58}$$

4.2.6. Lefevre'in birleştirme kuralı

Lefevre ve arkadaşlarının önerdiği birleştirme kuralında çelişen kütlenin ilgili kümelere dağıtılması amaçlanmıştır [130]. Bu kural iki adımdan oluşur. İlk olarak çelişki Eş. 4.59 ile hesaplanır.

$$k_{12} \triangleq \sum_{B \cap C = \varnothing} m_1(B) m_2(C) \tag{4.59}$$

Daha sonraki adım, çelişen kütlenin $w_m(A) \in [0,1]$ $\sum_{A \subseteq X} w_m(A) = 1$ eşitsizliğine uygun verilen katsayılara göre Eş. 4.60 ve Eş. 4.61'deki gibi yeniden yerleştirilmesidir.

$$m_{12}(A) = [\sum_{B \cap C = A} m_1(B) m_2(C)] + w_m(A) k_{12} \tag{4.60}$$

$$m(\varnothing) = w_m(\varnothing) k_{12} \tag{4.61}$$

w_m katsayılar kümesinin her özel seçimi özel bir birleştirme kuralı olarak karşımıza çıkar. Bu açıdan bakılırsa sayısız birleştirme kuralı elde edilebileceğinden önemli bir genelleştirmedir. D-S birleştirme kuralı $w_m(\varnothing) = 0$ ve $w_m(A) = \frac{1}{1 - k_{12}} \sum_{B \cap C = A} m_1(\mathrm{B})\, \mathrm{m}_2(C)$ seçilerek; Yager'ın kuralı $w_m(X) = 1$ ve $w_m(\mathrm{A} \neq X) = 0$ seçilerek; Smets'in kuralı $w_m(\varnothing) = 1$ ve $w_m(\mathrm{A} \neq \varnothing) = 0$ seçilerek elde edilebilir.

4.2.7. Ağırlıklı ortalama kuralı

Ağırlıklı ortalama kuralı, Lefevre'nin ortaya koyduğu formülasyonun özel bir şeklidir. Çelişen kütle, alt kümelerde orantısal olarak verilen alt kümelerin ortalama kütlesine dönüştürülür [130].

$$m_{12}(\mathrm{A}) = \sum_{B \cap C = A} m_1(B) m_2(C) + k(m_1(A) m_2(A)) / 2 \tag{4.62}$$

$$m(\varnothing) = k(m_1(\varnothing) + m_2(\varnothing)) / 2 \tag{4.63}$$

Eş. 4.62 ve Eş. 4.63'de k çelişkiyi gösterir.

4.2.8. Zhang'ın merkez birleştirme kuralı

Zhang D-S kuralının odak elemanların kesiştiği noktayı düşünmediğini iddia ederek D-S kuralına alternatif bir kural önermiştir [130]. Eş. 4.64 A ve B kümelerinin kesişimi ölçüsünü göstermektedir.

$$r(A,B)=\frac{|A\cap B|}{|A||B|}=\frac{|C|}{|A||B|} \tag{4.64}$$

Eş. 4.65'de verilen birleştirme kuralında *k* yeniden normalleştirme faktörüdür ve $\frac{|C|}{|A||B|}$ bire eşit olduğunda bu kural D-S kuralına döner.

$$m(C)=k\sum_{A\cap B=C}\left[\frac{|C|}{|A||B|}m_1(A)m_2(B)\right] \tag{4.65}$$

4.2.9. Azaltma ve birleştirme kuralı

Odak elemanların kütle atamalarından yola çıkarak birleştirme yapılabildiği gibi inanç değerlerini birleştirmek de mümkündür. İlk olarak Shafer tarafından önerilen bu kurala göre çelişen kanıtla karşılaşıldığı zaman kaynaklarda azaltma yapılmalı daha sonra azaltma fonksiyonu kullanarak herhangi bir kural ile birleştirme yapılmalıdır [130]. Kaynaklardan en az birinin güvenilir olduğu durumlar için geliştirilmiştir. $1-\alpha_i$, A inanç fonksiyonunun güvenilirlik derecesi olmak üzere $0\le\alpha_i\le 1$'dir ve i indeksi inanç ölçüsü ile ilişkili azaltma fonksiyonunu belirtir. Azaltılmış inanç fonksiyonu Eş. 4.66'da verilmiştir.

$$Bel^{\alpha_i}(A)=(1-\alpha_i)Bel(A) \tag{4.66}$$

Shafer, daha sonra A kümesi ile ilgili inanç fonksiyonlarının tamamını, $Bel_1^{\alpha_i}(A),...,Bel_n^{\alpha_i}(A)$, Eş. 4.67 kullanarak ortalamıştır.

$$\overline{Bel}(A)=\frac{1}{n}(Bel_1^{\alpha}(A)+...+Bel_n^{\alpha}(A)) \tag{4.67}$$

Bilgi kaynağına tam olarak güveniliyorsa α_j 1'e eşit olur ve bu kaynaktan sağlanan bilgi çelişki üretmez. Azaltma ve birleştirme kuralı, birleştirme metodu olarak ortalama fonksiyonunu kullanır. Bu tüm inanç fonksiyonları yüksek oranda çelişiyorsa ve azaltma oranı çok küçük değil ise kullanılır. Aynı zamanda güçlü bir şekilde çelişen tek inanç fonksiyonu ve diğer inanç fonksiyonlarının birbiri ile çok fazla çelişmediği, azaltma oranının çok büyük veya çok küçük olmadığı durumlarda güçlü bir şekilde çelişen tek inanç fonksiyonu etkisini ortadan kaldırmak amacıyla kullanılır.

4.2.10. Karma ya da ortalama kuralı

Karma, olasılık dağılımındaki ortalamanın genelleştirilmiş halidir. Kaynaklardan en az birinin güvenilir olduğu durumlarda kullanılan karma birleştirme kuralı Eş. 4.68 ile ifade edilir [130, 135].

$$m_{1\ldots n}(A) = \sum_{i=1}^{n} w_i m_i(\mathrm{A}) \tag{4.68}$$

Burada w_i kaynakların güvenilirliğine göre verilen ağırlıklardır. Bu kural Shafer'ın azaltma ve birleştirme kuralına çok benzerdir. Her ikisi de ortalama işlemidir fakat birleştirilen yapılar farklıdır. Karma kuralda kütle atamaları, azaltma ve birleştirme kuralında ise inanç yapıları birleştirilir.

4.2.11. Dezert-Smarandache (DSm) birleştirme kuralı

DSm birleştirme kuralı, X evrensel kümesinin ayrık küme elemanlarından oluşması, herhangi bir elemanın tümleyeninin de X'in güç kümesinde olması ve D-S birleştirme kuralının normalizasyon kısıtının ortaya çıkardığı zayıflıkların üstesinden gelmek için ortaya atılmıştır [136]. Bu üç temel kısıtın kaldırılabileceği yeni bir yaklaşım olarak ortaya konmuştur. İnanç fonksiyonları ile ifade edilen her türlü bağımsız kaynak bilgisinin birleştirilmesinde kullanılabilirken belirsiz, yüksek çelişki içeren ve kesin olmayan kanıt kaynaklarının birleştirilmesine odaklanmaktadır.

Olasılıksal yoruma bağlı olmamasına rağmen Bayesian ve D-S teorinin bir genişlemesi olarak ifade edilebilir. $X = \{x_1, x_2\}$, iki hipotezden oluşan basit bir evrensel küme iken

olasılık teorisinde, hipotezlerin ayrık olma varsayımı altında, $m(x_1)+m(x_2)=1$; D-S teorisinde, hipotezlerin ayrık olma varsayımı altında $m(x_1)+m(x_2)+m(x_1\cup x_2)=1$; DSm teorisinde, hipotezlerin ayrık olması varsayımı olmamakla beraber $m(x_1)+m(x_2)+m(x_1\cup x_2)+m(x_1\cap x_2)=1$'dir. Buna göre Örnek 4.6 dikkate alındığında D-S teoride "Tablo Rafael ya da öğrencilerinden biri tarafından yapılmıştır" hipotezi yer alabilirken DSm teoride "Tablo Rafael ve öğrencilerinden biri tarafından yapılmıştır" hipotezi de yer alabilmektedir.

DSm teorisi D-S teorisi gibi güç kümesinde değil hiper-güç kümesinde tanımlıdır. Hiper-güç kümesi, D^X, X'*i*n elemanlarının kesişim ($\cap$) ve birleşim ($\cup$) operatörleri ile kurulabilecek tüm bileşenlerinin kümesidir. Hiper-güç kümesinin elemanları aşağıdaki iki şartı sağlar [137].

1) $\varnothing, x_1, x_2, ..., x_n \in D^X$

2) Eğer $A, B \in D^X$ ise $A\cap B \in D^X$ ve $A\cup B \in D^X$ 'dir.

$X=\{x_1, x_2\}$ kümesinde, $D^X=\{\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_4\}$ ve $\left|D^X\right|=5$, $\alpha_0 \triangleq \varnothing$, $\alpha_1 \triangleq x_1\cap x_2$, $\alpha_2 \triangleq x_1$, $\alpha_3 \triangleq x_2$ ve $\alpha_4 \triangleq x_1\cup x_2$ 'dir.

Tanım 4.11.

$m: D^X \rightarrow [0,1]$ X'de tanımlı bir fonksiyon, $m(\varnothing)=0$ ve $\sum_{A\in D^X} m(A)=1$ olmak üzere DSm birleştirme kuralı Eş. 4.69'daki gibidir [132, 137].

$$m_{12}(A)=\sum_{\substack{B,C\in D^X \\ B\cap C=A}} m_1(B)m_2(C) \tag{4.69}$$

DSm birleştirme kuralı hesaplama ve hafıza boyutu açısından oldukça külfetlidir. Çünkü uğraştığı hiper-güç kümesi çok fazla elemana sahiptir.

4.2.12. Dezert-Smarandache (DSm) çelişkinin orantısal dağıtımı birleştirme kuralı

Kısmi çelişkilerin kısmi belirsizliklere doğrudan transfer edilmesi yerine, çelişki içeren boş olmayan kümelere çelişen kütlelerin kaynaklardan sağlanan kütle atamaları ile orantısal olarak transfer edilmesi fikrine dayanır [136]. Birleştirici kuralın izleri üzerinden gittiğinden ve çelişen kütleyi sadece çelişki içeren kümelere onların kütle atamaları ile orantılı olarak yeniden dağıttığından dolayı D-S kuralına göre çelişkinin yeniden dağıtımı daha iyidir.

$m(\varnothing) = 0$ ve $\forall A \in G^X \setminus \{\varnothing\}$ olmak üzere birleştirme kuralı Eş. 4.70'de gösterilmiştir.

$$m(A) = m_{12}(A) + \sum_{\substack{Y \in G^X \setminus \{A\} \\ A \cap Y = \varnothing}} \left[\frac{m_1(A)^2 m_2(Y)}{m_1(A) + m_2(Y)} + \frac{m_2(A)^2 m_1(Y)}{m_2(A) + m_1(Y)} \right] \tag{4.70}$$

Burada G^X genel notasyondur. Eğer Shafer'ın modeli kullanılıyorsa 2^X, DSm modeli kullanılıyorsa D^X'tir.

4.2.13. Birleştirme kurallarının değerlendirilmesi

D-S birleştirme kuralı normalizasyon işlemi ile çelişen kütleyi dikkate almadan birleşmiş kütle atamalarını hesaplar. Çelişkinin çok yüksek olduğu durumlarda ise mantık dışı sonuçlar elde edilmesine neden olur. D-S birleştirme kuralından sonra bu kurala bağlı önerilen birleştirme kuralları çelişen kütlenin nereye atanacağı üzerine durmuş ve farklı yaklaşımlar sunmuşlardır. D-S kuralı ve sonrasında önerilen kurallar, kanıtlar arasında yüksek çelişkinin olduğu Örnek 4.7 ile karşılaştırılmıştır [126].

Örnek 4.7.

İki doktorun baş ağrısı şikâyetiyle gelen hasta hakkındaki teşhisleri verilmiştir. Buna göre baş ağrısının nedeni menenjit (M), beyin tümörü (BT) ya da beyin sarsıntısı (BS) olabilir. Birinci doktor baş ağrısının 0,99 olasılıkla menenjit, 0,01 olasılıkla beyin tümöründen kaynaklandığına inanmaktadır. İkinci doktor ise 0,99 olasılıkla beyin sarsıntısı, 0,01 olasılıkla beyin tümöründen kaynaklandığına inanmaktadır.

Çizelge 4.4. iki doktorun baş ağrısının nedeni hakkındaki teşhislerinin kütle atamalarının birleşimlerini gösterir. Buna göre D-S kuralında doktorların fikirlerinin kesişim noktası dikkate alındığından BT teşhisinin kütle ataması 1'dir.

Çizelge 4.4. İki doktorun kütle atamalarının birleşimleri

m_1 / m_2	m	$m_1(M)$	$m_1(BT)$	$m_1(BS)$
m		0,99	0,01	0
$m_2(M)$	0	$m_1(\mathrm{M})m_2(\mathrm{M})=0$	$m_1(\mathrm{BT})m_2(\mathrm{M})=0$	$m_1(\mathrm{BS})m_2(\mathrm{M})=0$
$m_2(BT)$	0,01	$m_1(\mathrm{M})m_2(\mathrm{BT})=0,0099$	$m_1(\mathrm{BT})m_2(\mathrm{BT})=0,0001$	$m_1(\mathrm{BS})m_2(\mathrm{BT})=0$
$m_2(BS)$	0,99	$m_1(\mathrm{M})m_2(\mathrm{BS})=0,9801$	$m_1(\mathrm{BT})m_2(\mathrm{BS})=0,0099$	$m_1(\mathrm{BS})m_2(\mathrm{BS})=0$

$$m_{1,2}(BT)=\frac{0,01\times 0,01}{1-0,99[0,01+0,99]+0,01[0+0,99]+0[0+0,01]}$$
$$=\frac{0,0001}{1-0,999}=1$$
$$k=0,99$$

Eş. 4.40 kullanılarak bulunan k çelişki değeri 0,9999'dur. Yüksek çelişkinin olduğu bu durumda baş ağrısının nedeni doktorların 0,01 olasılıkla inandığı beyin tümörü seçeneği $m(BT)=1$ değerine sahip oldu. Diğer tüm mümkün hastalıklar göz ardı edildi. Normalizasyon işlemi doktorların görüşlerini bastırdı.

Yager kuralı ile çözüldüğünde D-S kuralı ile aynı matris elde edilir. Fakat çelişkinin adlandırılması ve yerleştirilmesinde önemli istisnalar vardır [56, 130]. Yager kuralı ile uzmanların 0,01 inanç değeri ile hem fikir oldukları BT durumu için birleştirilmiş sonuç 0,0001 bulunurken durum hakkındaki bilgisizliğin değeri 0,9999'dur.

Zadeh'in örneğine Inagaki'nin birleştirilmiş birleştirme kuralı uygulandığında D-S kuralı ile elde edilen aynı matris elde edilir. Yager'ın taban olasılık fonksiyonuna benzer fonksiyon kullanılır. $m_{12}(BT)$ değeri k değerine bağlı olarak değişir. $k=0$ olduğunda birleştirilmiş birleştirme kuralı Yager'ın kuralına ($m_{12}(BT)=0,0001$)

$k = \frac{1}{1-q(\varnothing)} = \frac{1}{1-0,9999} = 1$ olduğunda D-S kuralına karşılık gelecektir ($m_{12}(BT) = 1$) [56]. k değerinin [0,1] aralığındaki değerleri kuralın ne kadar D-S kuralı ne kadar da Yager'ın kuralı gibi davrandığını gösterir. Inakagi'nin ekstra kuralı, D-S kuralı ile aynı sonuçları verir. Hesaplamalar D-S kuralının ötesine geçebilecekken kütlelerin toplamının 1'e eşit olması şartı 1'den daha büyük bir birleştirme olmasına izin vermez.

Örnek 4.7 Dubois ve Prade'in kuralı ile çözüldüğünde Çizelge 4.5'deki sonuçlar elde edilir. Bu sonuçlara göre kural arzu edilmeyecek kadar tam olmama içerir. Uzmanların ileri sürdüğü hiçbir bilgi göz ardı edilmemiştir ve ihtimaller dâhilindedir.

Çizelge 4.5. Dubois ve Prade'in kuralından sağlanan birleşimler

Birleşim	$m_{\cup}$	Dilsel Yorumu
$M \cup M$	0	Menenjit
$M \cup BT$	0,0099	Menenjit ya da beyin tümörü
$M \cup BS$	0,9801	Menenjit ya da beyin sarsıntısı
$BT \cup BT$	0,0001	Beyin tümörü
$BT \cup BS$	0,0099	Beyin tümörü ya da beyin sarsıntısı
$BS \cup BS$	0	Beyin sarsıntısı
$M \cup BT \cup BS$	1	Menenjit, beyin tümörü ya da beyin sarsıntısı

Zadeh'in örneği Smets'in kuralı ile çözüldüğünde uzmanların 0,1 inanç değeri ile hem fikir oldukları BT durumunun birleştirilmiş değeri 0,0001 olurken boş kümenin inanç değeri 0,9999 olarak hesaplanır. Bu kurala göre baş ağrısının nedeni 4. bir hastalık olabilir [72].
Örnek 4.7 Lefevre'in kuralı ile çözüldüğünde BT durumu için birleştirilmiş sonuç 0,001, boş küme için 0,999 olarak hesaplanır. $w = \{0,5; 0,3; 0,2\}$ ağırlık vektörü boş kümenin kütle atamasını dağıtmak için kullanıldığında M durumu için 0,499; BT durumu için 0,3; BS durumu için ise 0,21 birleştirilmiş kütle ataması bulunur. Çelişkinin evrensel kümenin hangi elemanına ne kadar atanacağı ağırlık vektörü ile belirlendiğinden duruma ve şartlara uygun ağırlık vektörünün seçilmesi mümkündür.

Zhang'ın kuralında Çizelge 4.4.'deki çarpım matrisine ek olarak Eş. (4.64) ile kümelerin kardinalitesine bağlı kesişim ölçüsü hesaplanır. Verilen örnekte her bir kümenin

kardinalitesi 1'dir. Sıfır olmayan kesişim her iki doktorun da 0,1 değer verdiği BT kümesinden elde edilir. Bu durumda Zhang'ın kuralı D-S kuralı ile aynı sonucu verir.

Örnek 4.7 karma kural ile çözüldüğünde $m_1(BT)(1/2)$ ve $m_2(BT)(1/2)$ 'nin toplamından $m_{12}(BT)=0,01$ bulunur. M durumu için $m_{12}(M)=0,445$, ve BS durumu için $m_{12}(BS)=0,445$ sonucu elde edilir.

Zadeh'in örneğinde bilgi kaynağı olan iki uzmanın da tamamıyla güvenilir olduğu durumda azaltma ve birleştirme kuralı ile çözüm yapıldığında M durumu için 0,499, BT durumu için 0,01, BS durumu için ise 0,499 birleştirilmiş kütle atama değerleri hesaplanır. Zadeh'in örneği Dezert-Smarandache'in çelişkinin orantısal dağıtımı birleştirme kuralı ile çözüldüğünde $m_{12}(M)=m_{12}(BS)=0,486$ ve $m_{12}(BT)=0,028$ sonuçları elde edilir. DSm kuralının çözüm kümesi, D^X, D-S kuralının çözüm kümesi, 2^X 'i içerdiğinden D-S kuralı ile çözülebilen her problem DSm kuralı ile de çözülebilir. Fakat tersi her zaman mümkün değildir.

Literatürde birleştirme kuralları kaynakların güvenilir olup olmadığına göre, normalizasyon işleminin yapılıp yapılmamasına göre, çelişen kütlenin nereye atanacağına göre farklılık gösterirken kütle atamalarının yanı sıra inanç değerleri ile de birleştirmeler yapılmıştır. Normalizasyon işlemi çelişen kütlenin birleştirme hesabına katılmamasını amaçladığından normalizasyon yapan birleştirme kurallarında çelişki göz ardı edilir. Bu durum çok fazla çelişen kaynakların olduğu durumlarda mantıksız sonuçlar elde edilmesine neden olur. Çelişkinin yüksek olduğu durumlarda normalizasyon süreci olmayan birleştirme kuralları tercih edilmelidir. Birleştirilen kaynakların güvenilir olup olmamaları çözümün nerede aranacağını belirler. Kaynakların tamamı güvenilir ise çözüm bu kaynakların kesişim noktasındadır ve durum hakkında her kaynağın bilgisi dikkate alınır. Kaynaklardan en az birinin güvenilir olduğu ama o kaynağın hangisi olduğu bilinmediği durumda çözüm bu kaynakların birleşim noktasındadır. Durum hakkında sadece bir kaynağın bilgisinin olması birleştirme için yeterlidir. Çelişen kütlenin boş kümeye atandığı birleştirme kuralları bu kütlenin evrensel kümenin dışında bir durumu ifade ettiğini kabul eder. Buna göre Örnek 4.7 göz önüne alındığında baş ağrısının nedeni 4. bir hastalık olabilir. Çelişkiyi evrensel kümeye atayan birleştirme kuralları bu kütlenin evrensel küme hakkındaki bilgisizliği ifade ettiğini kabul ederken çelişkiyi evrensel

kümenin odak elemanlarına belirli kurallara göre dağıtan birleştirme kuralları da vardır. Ele alınan problem yapısına çelişkiyi ne şekilde ifade etmek uygunsa ona göre birleştirme kuralı seçilmelidir. Problemde evrensel küme dışında bir seçenek ihtimalini de dikkate alınmak isteniyor, gözden kaçırılan bir ihtimalin olabileceği düşünülüyorsa çelişki boş kümeye atanabilir. Evrensel küme dışında bir ihtimalin olmadığı varsayılıyorsa ve çelişkinin bilgisizlik olarak öngörülmesi kabul ediliyorsa çelişki evrensel kümeye atanabilir. Evrensel küme dışında bir ihtimalin olmadığı varsayılıyor ve hiçbir şekilde bilgisizlik durumu ile karşılaşılmak istenmiyorsa çelişkinin odak elemanlara dağıtıldığı birleştirme kuralları kullanılmalıdır. Evrensel kümenin güç kümesinde tanımlı birleştirme kuralları elemanların sadece birleşimleri ile ilgilenir. Örnek 4.7 dikkate alındığında baş ağrısının nedeni olarak M ya da BT ($M \cup BT$) alt küme elemanına kütle ataması değeri atanabilir. Hiper-güç kümesinde tanımlı birleştirme kuralları ise elemanların sadece birleşimi değil kesişimlerini de dikkate alır. Buna göre baş ağrısının nedeni olarak M ve BT ($M \cap BT$) elemanına kütle ataması değeri atanabilir. Durum hakkındaki bilgiler arasında elemanların kesişimine ait bilgiler de varsa güç kümesinde tanımlı birleştirme kuralları kullanılmaz. Problemin çözüm kümesine uygun birleştirme kuralı seçilmelidir.

Çizelge 4.6.'da bazı birleştirme kuralları bir takım özelliklere göre karşılaştırılmıştır [130].

Çizelge 4.6. Birleştirme kurallarının cebirsel özellikleri

Kurallar\Özellikler	Eşkuvvetlilik	Değişme	Birleşme	Monotonluk
D-S kuralı	-	+	+	K'ya bağlı
Yager'ın kuralı	-	+	-	+
Inakagi'nin kuralı	-	+	k'ya bağlı	k'ya bağlı
Ağırlıklı ortalama kuralı	+	+	+	+
Zhang'ın kuralı	-	+	-	k'ya bağlı
Karma kural	+	+	-	+
Smets'in kuralı	-	+	+	+

Dubois ve Prade birleştirme işlemlerinin sadece cebirsel özellikler açısından değerlendirilemeyeceğini, birleştirme işlemlerine çok fazla cebirsel özelliğin yüklenmesinin pratik problemlerin çözümünü kısıtlayacağını savunmaktadırlar [12].

D-S birleştirme kuralı tipi kuralların çoğu cebirsel özelliği taşıdığı görülmektedir. Birleştirme kurallarının arzu edilen özelliklerinin neler olduğunu anlamak da kural seçim kriteri olarak kullanılabilir. Buna göre durum hangi özelliklerin olmasını gerektiriyorsa ona uygun birleştirme kuralı seçilebilir. Birleştirme kuralı seçiminde dikkate alınabilecek diğer bir kriter ise durumun gereksinimlerinin ayırıcı, birleştirici veya değiş-tokuş havuzundan hangisinde aranacağına karar verilmesidir. Bunlar sırasıyla Dubois ve Prade'in ayırıcı birleştirmesine, D-S birleştirme kuralına ve Yager'ın kuralına, Zhang'ın kuralına, azaltma ve birleştirme kurallarına karşılık gelir. Bu gereklilik tek başına belirlenemezse ise Inakagi'nin kuralının farklı birçok k değeri için çözümü uygulanabilir. Örnek 4.7 ve Çizelge 4.6 ile de gösterildiği gibi D-S ve D-S tipi kuralların çoğu karşılaştırılabilir. D-S ve D-S tipi kuralların çoğunun ilk adımı kütle atamalarının çarpımıdır. Kurallar arasındaki farklar ortak kütlenin nasıl birleştirileceği ve çelişkinin nereye atanacağı konusunda ortaya çıkmaktadır.

5. GÖRÜNTÜ BULANIK KÜMELERDE BONFERRONI ORTALAMASINA BAĞLI ÖNERİLEN ÜÇ TANE BİRLEŞTİRME OPERATÖRÜ

Zadeh'in BK teorisinin bir genelleştirmesi olarak Atanassov tarafından ortaya atılan SBK, bir elemanın bir kümeye olan üyelik derecesinin yanı sıra kümeye üye olmama derecesi ile de ilgilenir. GBK ise SBK'nin bir genellemesi olarak bir kümenin her elemanına pozitif üyelik derecesi, yansız üyelik derecesi ve negatif üyelik derecesi atar [138]. GBK evet, hayır, çekimser ve reddetme gibi cevap seçeneklerinin olduğu durumları ifade etmek adına esnek çözümler sağlar. Örneğin oy kullanma eyleminde karşılaşabileceğimiz durumlar, ilgili aday için oy kullanma, ilgili adayın karşıtı olarak oy kullanma, çekimser kalma ve oylamayı reddetmedir. Literatürde SBK'ler için olduğu kadar GBK'ler için de çok sayıda birleştirme operatörü önerilmiştir [18, 30, 139-145].

Bu birleştirme operatörleri önerilirken ele alınan iki temel yapı işlemsel kuralların tanımlanması ve birleştirme fonksiyonunun seçilmesidir [16, 28, 31, 146-155]. SBK'ler ve buna bağlı olarak GBK'ler BK'ler gibi sadece pozitif üyelik derecesi ile ilgilenmediğinden bu sayılar ile cebirsel işlemler yapmak BK'lerdeki kadar kolay değildir. Örneğin $\langle 0,4;0,3\rangle$ sezgisel bulanık sayısının iki katı alınmak istendiğinde klasik cebirsel işlem ile üyelik derecesi ve üye olmama derecesinin iki katının alınması $\langle 0,8;0,6\rangle$ sonucunu verir. Bu sonuç ise SBK için geçerli bir sayı değildir. SBK ve GBK'lerde matematiksel işlemler yapmak için bir takım kuralların tanımlanması gerekir. İşlemsel kurallar görüntü bulanık sayılarda kesişim ve birleşime, kesişim ve birleşim ise Çizelge 5.1'de verilen t-norm ve t-konorm ailelerine dayanmaktadır. Bu matematiksel işlemler, birleştirme fonksiyonu görevi gören, kimi birleştirilen elemanlar arası ilişkileri de dikkate alan (Heronian, Bonferroni) Çizelge 5.2'de bazıları verilen ortalama operatörleri içerisinde kullanılarak görüntü bulanık sayılar için birleştirme operatörleri oluşturulmaktadır. Bu açıdan bakıldığında her bir ortalama operatörü her bir t-norm ve t-konorm ailesi ile ayrı ayrı bir operatör; her bir t-norm ve t-konorm ailesi de her bir ortalama operatörü ile ayrı ayrı bir operatör oluşturabilir ve bu sayede çok fazla operatör elde etmek mümkündür [15, 17-23, 26, 27, 29, 30, 141, 142, 144, 152, 156-170].

Çizelge 5.1. Genel ve parametreye bağlı bazı t-norm ve t-konorm aileleri

	t-norm	t-konorm
Cebirsel	xy	$x+y-xy$
Hamacher ($\gamma \geq 0$)	$\frac{x.y}{\gamma+(1-\gamma).(x+y-x.y)}$	$\frac{x+y-x.y-(1-\gamma).x.y}{1-(1-\gamma).x.y}$
Einstein	$\frac{x.y}{1+(1-x).(1-y)}$	$\frac{x+y}{1+x.y}$
Frank	$\log_\lambda\left(1+\frac{(\lambda^x-1)(\lambda^y-1)}{\lambda-1}\right)$	$1-\log_\lambda\left(1+\frac{(\lambda^{1-x}-1)(\lambda^{1-y}-1)}{\lambda-1}\right)$
Dombi ($\gamma > 0$)	$\frac{1}{1+\left(\left(\frac{1-x}{x}\right)^\gamma+\left(\frac{1-y}{y}\right)^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}}}$	$1-\frac{1}{\left(\left(\frac{x}{1-x}\right)^\gamma+\left(\frac{y}{1-y}\right)^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}}}$
Schweizer-Sklar	$(x^{-p}+y^{-p}-1)^{-1/p}$	$1-((1-x)^{-p}+(1-y)^{-p}-1)^{-1/p}$

Çizelge 5.2. Ortalama operatörleri

Ağırlıklı Ortalama	$M_{w_1,\ldots,w_n}(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n} w_i.x_i$
Geometrik Ortalama	$M_{geo}(x_1,\ldots,x_n)=\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$
Heronian Ortalama	$H^{p,q}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^p x_j^q\right)^{\frac{1}{p+q}}$
Bonferroni Ortalama	$B^{p,q}(x_1,\ldots,x_n)=\left(\frac{1}{n}\frac{1}{n-1}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} x_i^p x_j^q\right)^{\frac{1}{p+q}}$
Hamy Ortalama	$HM^{(k)}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\ldots,\mathrm{x}_n)=\frac{\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n}\left(\prod_{j=1}^{k} x_{i_j}\right)^{\frac{1}{k}}}{C_n^k}$

Tanım 5.1.

$\tilde{a}_1=\langle \mu_{a_1},\eta_{a_1},\nu_{a_1}\rangle$ ve $\tilde{a}_2=\langle \mu_{a_2},\eta_{a_2},\nu_{a_2}\rangle$ iki görüntü bulanık sayı iken cebirsel t-norm ve t-konorma bağlı cebirsel işlem kuralları aşağıdaki gibidir. Burada $\oplus$ iki görüntü bulanık sayının toplamını, $\otimes$ iki görüntü bulanık sayının çarpımını ifade ederken λ skalar bir sayıdır.

$$\tilde{a}_1 \oplus \tilde{a}_2 = \left\langle \mu_{a_1} + \mu_{a_2} - \mu_{a_1}\mu_{a_2}, \eta_{a_1}\eta_{a_2}, \nu_{a_1}\nu_{a_2} \right\rangle$$

$$\tilde{a}_1 \otimes \tilde{a}_2 = \left(\mu_{a_1}\mu_{a_2}, \eta_{a_1} + \eta_{a_2} - \eta_{a_1}\eta_{a_2}, \nu_{a_1} + \nu_{a_2} - \nu_{a_1}\nu_{a_2} \right)$$

$$\lambda\tilde{a}_1 = \left(1-(1-\mu_{\tilde{a}_1})^{\lambda}, \eta_{\tilde{a}_1}^{\lambda}, \nu_{\tilde{a}_1}^{\lambda}\right)$$

$$\tilde{a}_1^{\lambda} = [\mu_{\tilde{a}_1}^{\lambda}, 1-(1-\eta_{\tilde{a}_1})^{\lambda}, 1-(1-\nu_{\tilde{a}_1})^{\lambda}]$$

Tanım 5.2.

$\tilde{a}_1 = \left\langle \mu_{a_1}, \eta_{a_1,}\nu_{a_1} \right\rangle$ ve $\tilde{a}_2 = \left\langle \mu_{a_2}, \eta_{a_2,}\nu_{a_2} \right\rangle$ iki görüntü bulanık sayı iken Hamacher t-norm ve t-konorma bağlı Hamacher işlem kuralları aşağıdaki gibidir. Burada $\oplus$ iki görüntü bulanık sayının toplamını, $\otimes$ iki görüntü bulanık sayının çarpımını ifade ederken λ skalar bir sayıdır.

$$\tilde{a}_1 \oplus \tilde{a}_2 = \left(\frac{\mu_{a_1} + \mu_{a_2} - \mu_{a_1}\mu_{a_2} - (1-\gamma)\mu_{a_1}\mu_{a_2}}{1-(1-\gamma)\mu_{a_1}\mu_{a_2}}, \frac{\eta_{a_1}\eta_{a_2}}{\gamma + (1-\gamma)(\eta_{a_1} + \eta_{a_2} - \eta_{a_1}\eta_{a_2})}, \frac{\nu_{a_1}\nu_{a_2}}{\gamma + (1-\gamma)(\nu_{a_1} + \nu_{a_2} - \nu_{a_1}\nu_{a_2})} \right)$$

$$\tilde{a}_1 \otimes \tilde{a}_2 = \left(\frac{\mu_{a_1}\mu_{a_2}}{\gamma + (1-\gamma)(\mu_{a1} + \mu_{a_2} - \mu_{a_1}\mu_{a_2})}, \frac{\eta_{a_1} + \eta_{a_2} - \eta_{a_1}\eta_{a_2} - (1-\gamma)\eta_{a_1}\eta_{a_2}}{1-(1-\gamma)\eta_{a_1}\eta_{a_2}}, \frac{\nu_{a_1} + \nu_{a_2} - \nu_{a_1}\nu_{a_2} - (1-\gamma)\nu_{a_1}\nu_{a_2}}{1-(1-\gamma)\nu_{a_1}\nu_{a_2}} \right)$$

$$\lambda\tilde{a} = \left(\frac{(1+(\gamma-1)\mu_{\tilde{a}})^{\lambda} - (1-\mu_{\tilde{a}})^{\lambda}}{(1+(\gamma-1)\mu_{\tilde{a}})^{\lambda} + (\gamma-1)(1-\mu_{\tilde{a}})^{\lambda}}, \frac{\gamma\eta_a^{\lambda}}{(1+(\gamma-1)(1-\eta_a))^{\lambda} + (\gamma-1)\eta_a^{\lambda}}, \frac{\gamma\nu_a^{\lambda}}{(1+(\gamma-1)(1-\nu_a))^{\lambda} + (\gamma-1)\nu_a^{\lambda}} \right)$$

$$\tilde{a}^{\lambda} = \left(\frac{\gamma\mu_a^{\lambda}}{(1+(\gamma-1)(1-\mu_a))^{\lambda} + (\gamma-1)\mu_a^{\lambda}}, \frac{(1+(\gamma-1)\eta_a)^{\lambda} - (1-\eta_a)^{\lambda}}{(1+(\gamma-1)\eta_a)^{\lambda} + (\gamma-1)(1-\eta_a)^{\lambda}}, \frac{(1+(\gamma-1)\nu_a)^{\lambda} - (1-\nu_a)^{\lambda}}{(1+(\gamma-1)\nu_a)^{\lambda} + (\gamma-1)(1-\nu_a)^{\lambda}} \right)$$

Tanım 5.3.

$\tilde{a}_1 = \left\langle \mu_{a_1}, \eta_{a_1,}\nu_{a_1} \right\rangle$ ve $\tilde{a}_2 = \left\langle \mu_{a_2}, \eta_{a_2,}\nu_{a_2} \right\rangle$ iki görüntü bulanık sayı iken Einstein t-norm ve t-konorma bağlı Einstein işlem kuralları aşağıdaki gibidir. Burada $\oplus$ iki görüntü bulanık

sayının toplamını, $\otimes$ iki görüntü bulanık sayının çarpımını ifade ederken λ skalar bir sayıdır.

$$\tilde{a}_1 \oplus \tilde{a}_2 = \left(\frac{\mu_{\tilde{a}_1} + \mu_{\tilde{a}_2}}{1+\mu_{\tilde{a}_1}\mu_{\tilde{a}_2}}, \frac{\eta_{\tilde{a}_1}\eta_{\tilde{a}_2}}{1+(1-\eta_{\tilde{a}_1})(1-\eta_{\tilde{a}_2})}, \frac{\nu_{\tilde{a}_1}\nu_{\tilde{a}_2}}{1+(1-\nu_{\tilde{a}_1})(1-\nu_{\tilde{a}_2})} \right)$$

$$\tilde{a}_1 \otimes \tilde{a}_2 = \left(\frac{\mu_{\tilde{a}_1}\mu_{\tilde{a}_2}}{1+(1-\mu_{\tilde{a}_1})(1-\mu_{\tilde{a}_2})}, \frac{\eta_{\tilde{a}_1} + \eta_{\tilde{a}_2}}{1+\eta_{\tilde{a}_1}\eta_{\tilde{a}_2}}, \frac{\nu_{\tilde{a}_1} + \nu_{\tilde{a}_2}}{1+\nu_{\tilde{a}_1}\nu_{\tilde{a}_2}} \right)$$

$$\lambda\tilde{a} = \left(\frac{(1+\mu_a)^\lambda - (1-\mu_a)^\lambda}{(1+\mu_a)^\lambda + (1-\mu_a)^\lambda}, \frac{2\eta_a^\lambda}{(2-\eta_a)^\lambda + \eta_a^\lambda}, \frac{2\nu_a^\lambda}{(2-\nu_a)^\lambda + \nu_a^\lambda} \right), \lambda > 0$$

$$\tilde{a}^\lambda = \left(\frac{2\mu_a^\lambda}{(2-\mu_a)^\lambda + \mu_a^\lambda}, \frac{(1+\eta_a)^\lambda - (1-\eta_a)^\lambda}{(1+\eta_a)^\lambda + (1-\eta_a)^\lambda}, \frac{(1+\nu_a)^\lambda - (1-\nu_a)^\lambda}{(1+\nu_a)^\lambda + (1-\nu_a)^\lambda} \right), \lambda > 0$$

Tanım 5.4.

$\tilde{a}_1 = \langle \mu_{a_1}, \eta_{a_1}, \nu_{a_1} \rangle$ ve $\tilde{a}_2 = \langle \mu_{a_2}, \eta_{a_2}, \nu_{a_2} \rangle$ iki görüntü bulanık sayı iken Frank t-norm ve t-konorma bağlı Frank işlem kuralları aşağıdaki gibidir. Burada $\oplus$ iki görüntü bulanık sayının toplamını, $\otimes$ iki görüntü bulanık sayının çarpımını ifade ederken λ skalar bir sayıdır.

$$\tilde{a}_1 \oplus \tilde{a}_2 = \left(1-\log_\gamma \left(1+\frac{\prod_{j=1}^{2}(\gamma^{1-\mu_{\tilde{a}_j}}-1)}{\gamma-1} \right), \log_\gamma \left(1+\frac{\prod_{j=1}^{2}(\gamma^{1-\eta_{\tilde{a}_j}}-1)}{\gamma-1} \right), \log_\gamma \left(1+\frac{\prod_{j=1}^{2}(\gamma^{1-\nu_{\tilde{a}_j}}-1)}{\gamma-1} \right) \right)$$

$$\tilde{a}_1 \otimes \tilde{a}_2 = \left(\log_\gamma \left(1+\frac{\prod_{j=1}^{2}(\gamma^{\mu_{a_j}}-1)}{\gamma-1} \right), 1-\log_\gamma \left(1+\frac{\prod_{j=1}^{2}(\gamma^{1-\eta_{a_j}}-1)}{\gamma-1} \right), 1-\log_\gamma \left(1+\frac{\prod_{j=1}^{2}(\gamma^{1-\nu_{a_j}}-1)}{\gamma-1} \right) \right)$$

$$\lambda\tilde{a}_1 = \left(1-\log_\gamma\left(1+\frac{(\gamma^{1-\mu_{a_j}}-1)^\lambda}{(\gamma-1)^{\lambda-1}}\right), \log_\gamma\left(1+\frac{(\gamma^{\eta_{a_j}}-1)^\lambda}{(\gamma-1)^{\lambda-1}}\right), \log_\gamma\left(1+\frac{(\gamma^{\nu_{a_j}}-1)^\lambda}{(\gamma-1)^{\lambda-1}}\right)\right)$$

$$\tilde{a}_1^\lambda = \left(\log_\gamma\left(1+\frac{(\gamma^{\mu_{a_j}}-1)^\lambda}{(\gamma-1)^{\lambda-1}}\right), 1-\log_\gamma\left(1+\frac{(\gamma^{1-\eta_{a_j}}-1)^\lambda}{(\gamma-1)^{\lambda-1}}\right), 1-\log_\gamma\left(1+\frac{(\gamma^{1-\nu_{a_j}}-1)^\lambda}{(\gamma-1)^{\lambda-1}}\right)\right)$$

Tanım 5.6.

$\tilde{a}_1 = \langle \mu_{a_1}, \eta_{a_1}, \nu_{a_1} \rangle$ ve $\tilde{a}_2 = \langle \mu_{a_2}, \eta_{a_2}, \nu_{a_2} \rangle$ iki görüntü bulanık sayı iken Dombi t-norm ve t-konorma bağlı Dombi işlem kuralları aşağıdaki gibidir. Burada $\oplus$ iki görüntü bulanık sayının toplamını, $\otimes$ iki görüntü bulanık sayının çarpımını ifade ederken λ skalar bir sayıdır.

$$\tilde{a}_1 \oplus \tilde{a}_2 = \left(1-\frac{1}{1+\left(\left(\frac{\mu_{a_1}}{1-\mu_{a_1}}\right)^\gamma+\left(\frac{\mu_{a_2}}{1-\mu_{a_2}}\right)^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}}}, \frac{1}{1+\left(\left(\frac{1-\eta_{a_1}}{\eta_{a_1}}\right)^\gamma+\left(\frac{1-\eta_{a_2}}{\eta_{a_2}}\right)^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}}}, \frac{1}{1+\left(\left(\frac{1-\nu_{a_1}}{\nu_{a_1}}\right)^\gamma+\left(\frac{1-\nu_{a_2}}{\nu_{a_2}}\right)^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}}}\right)$$

$$\tilde{a}_1 \otimes \tilde{a}_2 = \left(\frac{1}{1+\left(\left(\frac{1-\mu_{a_1}}{\mu_{a_1}}\right)^\gamma+\left(\frac{1-\mu_{a_2}}{\mu_{a_2}}\right)^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}}}, 1-\frac{1}{1+\left(\left(\frac{\eta_{a_1}}{1-\eta_{a_1}}\right)^\gamma+\left(\frac{\eta_{a_2}}{1-\eta_{a_2}}\right)^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}}}, 1-\frac{1}{1+\left(\left(\frac{\nu_{a_1}}{1-\nu_{a_1}}\right)^\gamma+\left(\frac{\nu_{a_2}}{1-\nu_{a_2}}\right)^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}}}\right)$$

$$\lambda\tilde{a} = \left(1-\frac{1}{1+\left(\lambda\left(\frac{\mu_a}{1-\mu_a}\right)^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}}}, \frac{1}{1+\left(\lambda\left(\frac{1-\eta_a}{\eta_a}\right)^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}}}, \frac{1}{1+\left(\lambda\left(\frac{1-\nu_a}{\nu_a}\right)^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}}}\right)$$

$$\tilde{a}^{\lambda}=\left(1-\frac{1}{1+\left(\lambda\left(\frac{1-\mu_a}{\mu_a}\right)^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}},\frac{1}{1+\left(\lambda\left(\frac{\eta_a}{1-\eta_a}\right)^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}},\frac{1}{1+\left(\lambda\left(\frac{\nu_a}{1-\nu_a}\right)^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}}\right)$$

Tanım 5.7.

$\tilde{a}_1=\langle\mu_{a_1},\eta_{a_1,}\nu_{a_1}\rangle$ ve $\tilde{a}_2=\langle\mu_{a_2},\eta_{a_2,}\nu_{a_2}\rangle$ iki görüntü bulanık sayı iken Schweizer-Sklar t-norm ve t-konorma bağlı Schweizer-Sklar işlem kuralları aşağıdaki gibidir. Burada $\oplus$ iki görüntü bulanık sayının toplamını, $\otimes$ iki görüntü bulanık sayının çarpımını ifade ederken λ skaler bir sayıdır.

$$\tilde{a}_1\oplus\tilde{a}_2=\left\langle\left(1-((1-\mu_{a_1})^{\gamma}+(1-\mu_{a_2})^{\gamma}-1)^{1/\gamma}\right),\left((\eta_{a_1}^{\gamma}+\eta_{a_2}^{\gamma}-1\right)^{1/\gamma},\left((\nu_{a_1}^{\gamma}+\nu_{a_2}^{\gamma}-1\right)^{1/\gamma}\right\rangle$$

$$\tilde{a}_1\otimes\tilde{a}_2=\left\langle\left((\mu_{a_1}^{\gamma}+\mu_{a_2}^{\gamma}-1\right)^{1/\gamma},\left(1-((1-\eta_{a_1})^{\gamma}+(1-\eta_{a_2})^{\gamma}-1)^{1/\gamma}\right),\left(1-((1-\nu_{a_1})^{\gamma}+(1-\nu_{a_2})^{\gamma}-1)^{1/\gamma}\right)\right\rangle$$

$$\lambda\tilde{a}=\left\langle\left(1-(\lambda(1-\mu_{\tilde{a}})^{\gamma}-(\lambda-1))^{1/\gamma}\right),\left(\lambda\eta_{\tilde{a}}^{\gamma}-(\lambda-1)\right)^{1/\gamma},\left(\lambda\nu_{\tilde{a}}^{\gamma}-(\lambda-1)\right)^{1/\gamma}\right\rangle$$

$$\tilde{a}^{\lambda}=\left\langle\left(\lambda\mu_{\tilde{a}}^{\gamma}-(\lambda-1)\right)^{1/\gamma},\left(1-(\lambda(1-\eta_{\tilde{a}})^{\gamma}-(\lambda-1))^{1/\gamma}\right),\left(1-(\lambda(1-\nu_{\tilde{a}})^{\gamma}-(\lambda-1))^{1/\gamma}\right)\right\rangle$$

Literatürde cebirsel işlem kurallarından parametreye bağlı işlemsel kurallara kadar tüm kurallar farklı ortalama operatörleri içerisinde kullanılarak GBK'ler için çok sayıda operatör önerilmiştir. Wei, görüntü bulanık ağırlıklı ortalama (GBAO), görüntü bulanık ağırlıklı geometrik ortalama (GBAGO), görüntü bulanık melez ortalama (GBMO), görüntü bulanık melez geometrik ortalama (GBMGO), görüntü bulanık sıralı ağırlıklı ortalama (BGSAO) ve görüntü bulanık sıralı ağırlıklı geometrik ortalama (GBSAGO) operatörlerini önermiştir [149]. Karar verme problemlerinde kriterler arasındaki olası ilişkiler bu ilişkileri modellemek için kullanılabilecek birleştirme operatörünün seçimini de etkiler. Bonferroni tarafından ortaya konan Bonferroni ortalaması girdi değişkenlerinin etkileşimini yansıtan operatörlerden bir tanesidir. Sadece her bir kriterin önemini dikkate almaması, aynı

zamanda bireysel kriterlerin karşılıklı ilişkisini de yansıtması nedeniyle Bonferroni ortalaması birleştirme operatörü literatüründe geniş yer bulmuştur. Xu ve Yager Bonferroni ortalamasını sezgisel bulanık çevrede ele almış ve sezgisel bulanık Bonferroni ortalama (SBBO) ve ağırlıklı sezgisel bulanık Bonferroni ortalama (ASBBO) operatörlerini geliştirmişlerdir [19]. Genelleştirilmiş ağırlıklı Bonferroni ortalama (GABO) ve genelleştirilmiş sezgisel bulanık ağırlıklı Bonferroni ortalama (GSBABO) operatörleri grup fikrine odaklanan operatörler iken genelleştirilmiş ağırlıklı Bonferroni geometrik ortalama (GABGO) ve genelleştirilmiş sezgisel bulanık ağırlıklı Bonferroni geometrik ortalama (GSBABGO) operatörleri bireysel fikirlere dikkat çeker [161]. Bonferroni ortalamasının ve genelleştirilmiş Bonferroni ortalamasının dezavantajlarından kaçınmak için normalleştirilmiş ağırlıklı Bonferroni ortalama (NABO) operatörü geliştirilmiştir [171]. Literatürdeki mevcut çalışmalara dayanarak karar verme problemlerinde görüntü bulanık sayıların kullanımını çeşitlendirmek adına kriterler arası etkileşimi dikkate alan Bonferroni ortalaması ve cebirsel işlem kuralları kullanılarak Görüntü Bulanık Bonferroni Ortalama Operatörü (GBBOO), Görüntü Bulanık Normalleştirilmiş Ağırlıklı Bonferroni Ortalama Operatörü (GBNABOO) ve Görüntü Bulanık Sıralı Ağırlıklı Bonferroni Ortalama Operatörü (GBSABOO) geliştirilmiş, bu operatörler kullanılarak yapılan birleştirme sonucunda elde edilen sayının da görüntü bulanık sayı olduğu ispat edilmiştir. Geliştirilen operatörler birleştirme operatörleri için önem arz eden eş kuvvetlilik, monotonluk, değişme ve sınırlılık özelliklerini sağlamaktadır. Önerilen operatörler literatürdeki mevcut operatörler ([16, 149, 153]) ile karşılaştırılarak uygulanabilirliği desteklenmiştir.

Tanım 5.8.

Skor fonksiyonu görüntü bulanık sayıların karşılaştırılmasına olanak sağlar. $a=(\mu_a,\eta_a,\nu_a)$ bir görüntü bulanık sayı iken bu sayının skor fonksiyonu, *S*, Eş. 5.1 ile hesaplanır.

$$S(a)=\mu_a-\nu_a,\ S(a)\in[-1,1] \tag{5.1}$$

Tanım 5.9.

$a=(\mu_a,\eta_a,v_a)$ bir görüntü bulanık sayı iken bu sayının doğruluk fonksiyonu, *H*, Eş. 5.2 ile hesaplanır.

$$H(\alpha)=\mu_\alpha+\eta_\alpha+v_\alpha \ , \ H(\alpha)\in[0,1] \tag{5.2}$$

Tanım 5.10.

α ve β iki görüntü bulanık sayısının karşılaştırılması aşağıdaki gibidir.

1) Eğer $S(\alpha)<S(\beta)$ ise $\alpha\prec\beta$
2) Eğer $S(\alpha)>S(\beta)$ ise $\alpha\succ\beta$
3) Eğer $S(\alpha)=S(\beta)$ ise
   a) Eğer $H(\alpha)<H(\beta)$ ise $\alpha\prec\beta$
   b) Eğer $H(\alpha)>H(\beta)$ ise $\alpha\succ\beta$
   c) Eğer $H(\alpha)=H(\beta)$ ise $\alpha\sim\beta$

Tanım 5.11.

$\alpha_i(i=1,2,...,n)$ negatif olmayan gerçek sayılar topluluğu olsun. Eş. 5.3'de verilen birleştirme fonksiyonu $B^{p,q}$, Bonferroni Ortalaması olarak bilinir [172]. Burada *p* ve *q* negatif olmayan fonksiyon parametreleridir.

$$B^{p,q}(a_1,a_2,...,a_n)=\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}a_i^p a_j^q\right)^{\frac{1}{p+q}} \tag{5.3}$$

5.1. Önerilen Görüntü Bulanık Bonferroni Ortalama Operatörü (GBBOO)

Tanım 5.12.

$a_i = (\mu_{a_i}, \eta_{a_i}, \nu_{a_i})$ $(i = 1, 2, ..., n)$ görüntü bulanık sayılar topluluğu iken herhangi bir $p, q \geq 0$ parametreleri için Eş. 5.4 *GBBOO* olarak adlandırılır.

$$GBBOO^{p,q}(a_1, a_2, ..., a_n) = \left(\frac{1}{n(n-1)} \left(\bigoplus_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \left(a_i^p \otimes a_j^q \right) \right) \right)^{\frac{1}{p+q}} \tag{5.4}$$

Tanım 5.1'de verilen cebirsel işlem kurallarına bağlı kalarak aşağıdaki sonuçlar türetilebilir.

Teorem 5.1.

$a_i = (\mu_{a_i}, \eta_{a_i}, \nu_{a_i})$ $(i = 1, 2, ..., n)$ görüntü bulanık sayılar topluluğu ve $p, q \geq 0$ olsun. *GBBOO* kullanılarak elde edilen sonuç da bir görüntü bulanık sayıdır ve Eş. 5.5 ile gösterilir.

$$GBBOO^{p,q}(a_1, a_2, ..., a_n) = \left(\left(1 - \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} (1 - \mu_{a_i}^p \mu_{a_j}^q)^{\frac{1}{n(n-1)}} \right)^{\frac{1}{p+q}}, \right.$$

$$1 - \left(1 - \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} (1 - (1 - \eta_{a_i})^p (1 - \eta_{a_j})^q)^{\frac{1}{n(n-1)}} \right)^{\frac{1}{p+q}}, \tag{5.5}$$

$$\left. 1 - \left(1 - \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} (1 - (1 - \nu_{a_i})^p (1 - \nu_{a_j})^q)^{\frac{1}{n(n-1)}} \right)^{\frac{1}{p+q}} \right)$$

İspat

Tanım 5.1'de tanımlanan iki görüntü bulanık sayısının çarpımı ve görüntü bulanık sayının üssünü alma işlemlerinden Eş. 5.6 – Eş. 5.8 elde edilir.

$$\begin{aligned}\alpha_i^p &= (\mu_{\alpha_i}^p, 1-(1-\eta_{\alpha_i})^p, 1-(1-\nu_{\alpha_i})^p),\\ \alpha_j^q &= (\mu_{\alpha_j}^q, 1-(1-\eta_{\alpha_j})^q, 1-(1-\nu_{\alpha_j})^q),\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\alpha_i^p \otimes \alpha_j^q = \left(\mu_{\alpha_i}^p \mu_{\alpha_j}^q, 1-(1-\eta_{\alpha_i})^p(1-\eta_{\alpha_j})^q, 1-(1-\nu_{\alpha_i})^p(1-\nu_{\alpha_j})^q\right) \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}\left(\bigoplus_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(\alpha_i^p \otimes \alpha_j^p\right)\right) = \Bigg(&1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-\mu_{\alpha_i}^p\mu_{\alpha_j}^q),\\ &\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-\eta_{\alpha_i})^p(1-\eta_{\alpha_j})^q)\\ &\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-\nu_{\alpha_i})^p(1-\nu_{\alpha_j})^q)\Bigg)\end{aligned} \tag{5.8}$$

n topluluğu üzerinde matematiksel sonuç çıkarımı yapılarak Eş. 5.8 kanıtlanır.

1) $n=2$ için

$$\begin{aligned}\bigoplus_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{2}(\alpha_i^p \otimes \alpha_j^q) &= (\alpha_1^p \otimes \alpha_2^q) \oplus (\alpha_2^p \otimes \alpha_1^q)\\ &= (1-(1-\mu_{\alpha_1}^p\mu_{\alpha_2}^q)(1-\mu_{\alpha_2}^p\mu_{\alpha_1}^q),\\ &\quad (1-(1-\eta_{\alpha_1})^p(1-\eta_{\alpha_2})^q)\times(1-(1-\eta_{\alpha_2})^p(1-\eta_{\alpha_1})^q),\\ &\quad (1-(1-\nu_{\alpha_1})^p(1-\nu_{\alpha_2})^q)\times(1-(1-\nu_{\alpha_2})^p(1-\nu_{\alpha_1})^q).\end{aligned} \tag{5.9}$$

2) Eğer Eş. 5.8 $n=k$ için tutarsa Eş. 5.10'daki gibi gösterilir.

$$\bigoplus_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k}(\alpha_i^p \otimes \alpha_j^q) = \left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k}(1-\mu_{\alpha_i}^p \mu_{\alpha_j}^q)\ , \right.$$
$$\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k}(1-(1-\eta_{\alpha_i})^p(1-\eta_{\alpha_j})^q),$$
$$\left. \prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k}(1-(1-\nu_{\alpha_i})^p(1-\nu_{\alpha_j})^q) \right) \tag{5.10}$$

Daha sonra *n=k+1* için Tanım 5.1'deki iki görüntü bulanık sayısının çarpımı ve görüntü bulanık sayının skalarla çarpımı işlemlerinden Eş. 5.11 elde edilir.

$$\bigoplus_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k+1}(\alpha_i^p \otimes \alpha_j^q) = \left(\bigoplus_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k}(\alpha_i^p \otimes \alpha_j^q) \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{k}(\alpha_i^p \otimes \alpha_{k+1}^q) \right)$$
$$\oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{k}(\alpha_{k+1}^p \otimes \alpha_j^q) \right). \tag{5.11}$$

$$\bigoplus_{i=1}^{k}(\alpha_i^p \otimes \alpha_{k+1}^q) = \left(1-\prod_{i=1}^{k}(1-\mu_{\alpha_i}^p \mu_{\alpha_{k+1}}^q)\ , \right.$$
$$\prod_{i=1}^{k}(1-(1-\eta_{\alpha_i})^p(1-\eta_{\alpha_{k+1}})^q), \tag{5.12}$$
$$\left. \prod_{i=1}^{k}(1-(1-\nu_{\alpha_i})^p(1-\nu_{\alpha_{k+1}})^q) \right)$$

k'da matematiksel sonuç çıkarımı yapılarak Eş. 5.12 aşağıdaki gibi ispatlanır.

1) *k=2* için Eş. 5.7'den yararlanılarak Eş. 5.13 ve böylece Eş. 5.14 elde edilir.

$$\alpha_i^p \otimes \alpha_{2+1}^q = \left(\mu_{\alpha_i}^p \mu_{2+1}^q, 1-(1-\eta_{\alpha_i})^p(1-\eta_{\alpha_{2+1}})^q, 1-(1-\nu_{\alpha_i})^p(1-\nu_{\alpha_{2+1}})^q \right), \quad i=1,2 \tag{5.13}$$

$$\bigoplus_{i=1}^{2}(\alpha_i^p \otimes \alpha_{2+1}^q) = (\alpha_1^p \otimes \alpha_{2+1}^q) \oplus (\alpha_2^p \otimes \alpha_{2+1}^q)$$
$$= \left(1 - \prod_{i=1}^{2}(1-\mu_{\alpha_i}^p \mu_{\alpha_3}^q), \right.$$
$$\prod_{i=1}^{2}(1-(1-\eta_{\alpha_i})^p (1-\eta_{\alpha_3})^q),$$
$$\left. \prod_{i=1}^{2}(1-(1-\nu_{\alpha_i})^p (1-\nu_{\alpha_3})^q), \right) \tag{5.14}$$

2) Eş. 5.12 $k=z$ için tutarsa Eş. 5.15 elde edilir.

$$\bigoplus_{i=1}^{z}(\alpha_i^p \otimes \alpha_{z+1}^q) = \left(1 - \prod_{i=1}^{z}(1-\mu_{\alpha_i}^p \mu_{\alpha_{z+1}}^q) \right.,$$
$$\prod_{i=1}^{z}(1-(1-\eta_{\alpha_i})^p (1-\eta_{\alpha_{z+1}})^q),$$
$$\left. \prod_{i=1}^{z}(1-(1-\nu_{\alpha_i})^p (1-\nu_{\alpha_{z+1}})^q) \right) \tag{5.15}$$

Daha sonra $k=z+1$ için Eş. 5.7 ve Tanım 5.1'deki iki görüntü bulanık sayısının çarpımı ve görüntü bulanık sayının skalarla çarpımı işlemlerinden Eş. 5.16 elde edilir.

$$\bigoplus_{i=1}^{z+1}(\alpha_i^p \otimes \alpha_{z+2}^q) = \bigoplus_{i=1}^{z}(\alpha_i^p \otimes \alpha_{z+2}^q) \oplus (\alpha_{z+1}^p \otimes \alpha_{z+2}^q)$$
$$= \left(1 - \prod_{i=1}^{z+1}(1-\mu_{\alpha_i}^p \mu_{\alpha_{z+2}}^q), \right.$$
$$\prod_{i=1}^{z+1}(1-(1-\eta_{\alpha_i})^p (1-\eta_{\alpha_{z+2}})^q),$$
$$\left. \prod_{i=1}^{z+1}(1-(1-\nu_{\alpha_i})^p (1-\nu_{\alpha_{z+2}})^q), \right) \tag{5.16}$$

Eğer Eş. 5.12 $k=z+1$ için tutarsa tüm k'ler için tutar. Aynı şekilde Eş. 5.17 de ispatlanabilir.

$$\bigoplus_{j=1}^{k}(\alpha_{k+1}^{p}\otimes\alpha_{j}^{q})=\Bigg(1-\prod_{j=1}^{k}(1-\mu_{\alpha_{k+1}}^{p}\mu_{\alpha_{j}}^{q})\ ,\ \prod_{j=1}^{k}(1-(1-\eta_{\alpha_{k+1}})^{p}(1-\eta_{\alpha_{j}})^{q}),\ \prod_{j=1}^{k}(1-(1-\nu_{\alpha_{k+1}})^{p}(1-\nu_{\alpha_{j}})^{q})\Bigg) \tag{5.17}$$

Böylece Eş. 5.10, Eş. 5.12 ve Eş. 5.17'den yararlanarak Eş. 5.11, Eş. 5.18'e dönüştürülür.

$$\begin{aligned}\bigoplus_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k+1}(\alpha_{i}^{p}\otimes\alpha_{j}^{q})&=\Bigg(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k}(1-\mu_{\alpha_{i}}^{p}\mu_{\alpha_{j}}^{q})\ ,\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k}(1-(1-\eta_{\alpha_{i}})^{p}(1-\eta_{\alpha_{j}})^{q}),\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k}(1-(1-\nu_{\alpha_{i}})^{p}(1-\nu_{\alpha_{j}})^{q})\Bigg)\\ &\oplus\Bigg(1-\prod_{i=1}^{k}(1-\mu_{\alpha_{i}}^{p}\mu_{\alpha_{k+1}}^{q}),\prod_{i=1}^{k}(1-(1-\eta_{\alpha_{i}})^{p}(1-\eta_{\alpha_{k+1}})^{q}),\prod_{i=1}^{k}(1-(1-\nu_{\alpha_{i}})^{p}(1-\nu_{\alpha_{k+1}})^{q})\Bigg)\\ &\oplus\Bigg(1-\prod_{j=1}^{k}(1-\mu_{\alpha_{k+1}}^{p}\mu_{\alpha_{j}}^{q}),\prod_{j=1}^{k}(1-(1-\eta_{\alpha_{k+1}})^{p}(1-\eta_{\alpha_{j}})^{q}),\prod_{j=1}^{k}(1-(1-\nu_{\alpha_{k+1}})^{p}(1-\nu_{\alpha_{j}})^{q})\Bigg)\\ &=\Bigg(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k+1}(1-\mu_{\alpha_{i}}^{p}\mu_{\alpha_{j}}^{q}),\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k+1}(1-(1-\eta_{\alpha_{i}})^{p}(1-\eta_{\alpha_{j}})^{q}),\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k+1}(1-(1-\nu_{\alpha_{i}})^{p}(1-\nu_{\alpha_{j}})^{q})\Bigg)\end{aligned} \tag{5.18}$$

Eş. 5.8 $n=k+1$ için tutar. Böylece Eş. 5.8 tüm n'ler için tutar.

Daha sonra, Eş. 5.8 ve Tanım 5.1'de verilen görüntü bulanık sayının skalar ile çarpımı işleminden yararlanılarak Eş. 5.19 elde edilir.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n(n-1)}\Bigg(\bigoplus_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(\alpha_{i}^{p}\otimes\alpha_{j}^{q})\Bigg)\\ &=\Bigg(1-\Bigg(\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-\mu_{\alpha_{i}}^{p}\mu_{\alpha_{j}}^{q})\Bigg)^{\frac{1}{n(n-1)}},\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-\eta_{\alpha_{i}})^{p}(1-\eta_{\alpha_{j}})^{q})^{\frac{1}{n(n-1)}},\\ &\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-\nu_{\alpha_{i}})^{p}(1-\nu_{\alpha_{j}})^{q})^{\frac{1}{n(n-1)}}\Bigg)\end{aligned} \tag{5.19}$$

Eş. 5.19 ve tanım 5.1'de tanımlanan görüntü bulanık sayının üssünü alma işleminden yararlanılarak Eş. 5.20 elde edilir.

$$GBBOO^{p,q}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$$

$$=\left(\frac{1}{n(n-1)}\left(\bigoplus_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(\alpha_i^p\otimes\alpha_j^q)\right)\right)^{\frac{1}{p+q}}$$

$$=\left(\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-\mu_{\alpha_i}^p\mu_{\alpha_j}^q)^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}},1-\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-\eta_{\alpha_i})^p(1-\eta_{\alpha_j})^q)^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}},\right. \quad (5.20)$$

$$\left.1-\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-\nu_{\alpha_i})^p(1-\nu_{\alpha_j})^q)^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right)$$

Böylece Eş. 5.5'in tuttuğu gösterilmiş olur. Ayrıca Eş. 5.21 – Eş. 5.23'de verilen görüntü bulanık sayının üyelik derecelerinin (pozitif, nötr, negatif) ayrı ayrı ve üyelik dereceleri toplamının [0,1] aralığında olması şartlarından Eş. 5.24 elde edilir.

$$0\leq\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-\mu_{\alpha_i}^p\mu_{\alpha_j}^q)^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}\leq 1 \quad (5.21)$$

$$0\leq 1-\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-\eta_{\alpha_i})^p(1-\eta_{\alpha_j})^q)^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}\leq 1 \quad (5.22)$$

$$0\leq 1-\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-\nu_{\alpha_i})^p(1-\nu_{\alpha_j})^q)^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}\leq 1 \quad (5.23)$$

$$\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-\mu_{\alpha_i}^{p}\mu_{\alpha_j}^{q})^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}+1-\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-\eta_{\alpha_i})^{p}(1-\eta_{\alpha_j})^{q})^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}$$

$$+1-\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-\nu_{\alpha_i})^{p}(1-\nu_{\alpha_j})^{q})^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}$$

$$\leq 1-\left(1-\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-\eta_{\alpha_i})^{p}(1-\eta_{\alpha_j})^{q})^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right)-\left(1-\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-\nu_{\alpha_i})^{p}(1-\nu_{\alpha_j})^{q})^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right) \quad (5.24)$$

$$+\left(1-\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-n_{\alpha_i})^{p}(1-n_{\alpha_j})^{q})^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right)+\left(1-\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-\nu_{\alpha_i})^{p}(1-\nu_{\alpha_j})^{q})^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right)$$

$$=1$$

Böylece Teorem 1'in ispatı tamamlanmış olur. *GBBOO*'nün sağladığı arzu edilen bir takım özellikleri aşağıda verilmiştir.

Teorem 5.2. (Eşkuvvetlilik)

$\alpha_i (i=1,2,...,n)$ görüntü bulanık sayıları tüm *i*'ler için $\alpha_i=\alpha$ olacak şekilde eşitse Eş. 5.25 birleştirme sonucunun α sayısına eşit olduğunu gösterir.

$$
\begin{aligned}
&GBBOO^{p,q}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\\
&=GBBOO^{p,q}(\alpha,\alpha,...,\alpha)\\
&=\left(\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-\mu_\alpha^p\mu_\alpha^q)^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}},1-\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-\eta_\alpha)^p(1-\eta_\alpha)^q)^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}},\right.\\
&\left.1-\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-\nu_\alpha)^p(1-\nu_\alpha)^q)^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right)\\
&=\left((1-(1-\mu_\alpha^{p+q}))^{\frac{1}{p+q}},1-(1-(1-(1-\eta_\alpha)^{p+q}))^{\frac{1}{p+q}},1-(1-(1-(1-\nu_\alpha)^{p+q}))^{\frac{1}{p+q}}\right)\\
&=\left((\mu_\alpha^{p+q})^{\frac{1}{p+q}},1-((1-\eta_\alpha)^{p+q})^{\frac{1}{p+q}},1-((1-\nu_\alpha)^{p+q})^{\frac{1}{p+q}}\right)=(\mu_\alpha,\eta_\alpha,\nu_\alpha)=\alpha
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

Teorem 5.3. (Monotonluk)

$\alpha_i(i=1,2,...,n)$ ve $\beta_i(i=1,2,...,n)$ görüntü bulanık sayılardan oluşan iki küme iken eğer $\mu_{\alpha_i}\le\mu_{\beta_i}$, $\eta_{\alpha_i}\le\eta_{\beta_i}$ ve $\nu_{\alpha_i}\ge\nu_{\beta_i}$ ise Eş. 5.26 sağlanır.

$$PFB^{p,q}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\le PFB^{p,q}(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n) \tag{5.26}$$

Tüm *i*'ler için $\mu_{\alpha_i}\le\mu_{\beta_i}$ olduğundan tüm *i,j*'ler için Eş. 5.27 - Eş. 5.30 sağlanır.

$$\mu_{\alpha_i}^p\mu_{\alpha_j}^q\le\mu_{\beta_i}^p\mu_{\beta_j}^q \tag{5.27}$$

$$\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-\mu_{\alpha_i}^p\mu_{\alpha_j}^q)^{\frac{1}{n(n-1)}}\ge\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-\mu_{\beta_i}^p\mu_{\beta_j}^q)^{\frac{1}{n(n-1)}} \tag{5.28}$$

$$1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-\mu_{\alpha_i}^p\mu_{\alpha_j}^q)^{\frac{1}{n(n-1)}}\le 1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-\mu_{\beta_i}^p\mu_{\beta_j}^q)^{\frac{1}{n(n-1)}} \tag{5.29}$$

$$\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-\mu_{\alpha_i}^{p}\mu_{\alpha_j}^{q})^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}} \leq \left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-\mu_{\beta_i}^{p}\mu_{\beta_j}^{q})^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}} \tag{5.30}$$

Tüm *i*'ler için $v_{\alpha_i} \geq v_{\beta_i}$ olduğundan tüm *i,j*'ler için Eş. 5.31 - Eş. 5.34 sağlanır.

$$(1-v_{\alpha_i})^{p}(1-v_{\alpha_j})^{q} \leq (1-v_{\beta_i})^{p}(1-v_{\beta_j})^{q} \tag{5.31}$$

$$\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-v_{\alpha_i})^{p}(1-v_{\alpha_j})^{q})^{\frac{1}{n(n-1)}} \geq \prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-v_{\beta_i})^{p}(1-v_{\beta_j})^{q})^{\frac{1}{n(n-1)}} \tag{5.32}$$

$$\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-v_{\alpha_i})^{p}(1-v_{\alpha_j})^{q})^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}} \leq \left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-v_{\beta_i})^{p}(1-v_{\beta_j})^{q})^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}} \tag{5.33}$$

$$1-\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-v_{\alpha_i})^{p}(1-v_{\alpha_j})^{q})^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}} \geq 1-\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-v_{\beta_i})^{p}(1-v_{\beta_j})^{q})^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}} \tag{5.34}$$

$\alpha = GBBOO^{p,q}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ ve $\beta = GBBOO^{p,q}(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)$ birleştirme sonuçlarının skor fonksiyonları sırasıyla s_α ve s_β iken Eş. 5.35 $s_\alpha \leq s_\beta$ durumunu gösterir.

$$\begin{aligned}&\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-\mu_{\alpha_i}^{p}\mu_{\alpha_j}^{q})^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}} - \left(1-\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-v_{\alpha_i})^{p}(1-v_{\alpha_j})^{q})^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right)\\ &\leq \left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-\mu_{\beta_i}^{p}\mu_{\beta_j}^{q})^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}} - \left(1-\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-v_{\beta_i})^{p}(1-v_{\beta_j})^{q})^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right)\end{aligned} \tag{5.35}$$

Skor fonksiyonlarının alabileceği diğer durumlar aşağıda verilmiştir.

Durum 1.

Eğer $s_\alpha < s_\beta$ ise Eş. 5.1'den Eş. 5.36 elde edilir.

$$GBBOO^{p,q}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) < GBBOO^{p,q}(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \tag{5.36}$$

Durum 2.

Eğer $s_\alpha = s_\beta$ ise Eş. 5.37 elde edilir.

$$\begin{aligned} &\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-\mu_{\alpha_i}^{p}\mu_{\alpha_j}^{q})^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}} - \left(1-\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-\nu_{\alpha_i})^{p}(1-\nu_{\alpha_j})^{q})^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right) \\ &=\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-\mu_{\beta_i}^{p}\mu_{\beta_j}^{q})^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}} - \left(1-\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-\nu_{\beta_i})^{p}(1-\nu_{\beta_j})^{q})^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right) \end{aligned} \tag{5.37}$$

Tüm i'ler için $\mu_{\alpha_i} \le \mu_{\beta_i}$, $\eta_{\alpha_i} \le \eta_{\beta_i}$ ve $\nu_{\alpha_i} \ge \nu_{\beta_i}$ olduğundan Eş. 5.38 ve Eş. 5.39 sağlanmalıdır.

$$\begin{aligned} &\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-\mu_{\alpha_i}^{p}\mu_{\alpha_j}^{q})^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}} = \left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-\mu_{\beta_i}^{p}\mu_{\beta_j}^{q})^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}} \\ &\left(1-\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-\nu_{\alpha_i})^{p}(1-\nu_{\alpha_j})^{q})^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right) = \left(1-\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-\nu_{\beta_i})^{p}(1-\nu_{\beta_j})^{q})^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right) \end{aligned} \tag{5.38}$$

$$(1-\eta_{\alpha_i})^{p}(1-\eta_{\alpha_j})^{q} \ge (1-\eta_{\beta_i})^{p}(1-\eta_{\beta_j})^{q} \tag{5.39}$$

Eş. 5.39'dan yararlanılarak Eş. 5.40 - Eş. 5.42 ve böylece Eş. 5.43 elde edilir.

$$\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-\eta_{\alpha_i})^p(1-\eta_{\alpha_j})^q)^{\frac{1}{n(n-1)}} \leq \prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-\eta_{\beta_i})^p(1-\eta_{\beta_j})^q)^{\frac{1}{n(n-1)}} \tag{5.40}$$

$$\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-\eta_{\alpha_i})^p(1-\eta_{\alpha_j})^q)^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}} \geq \left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-\eta_{\beta_i})^p(1-\eta_{\beta_j})^q)^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}} \tag{5.41}$$

$$1-\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-\eta_{\alpha_i})^p(1-\eta_{\alpha_j})^q)^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}} \leq 1-\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-\eta_{\beta_i})^p(1-\eta_{\beta_j})^q)^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}} \tag{5.42}$$

$$\begin{aligned} h_\alpha &= \left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-\mu_{\alpha_i}^p\mu_{\alpha_j}^q)^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}} + \left(1-\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-\eta_{\alpha_i})^p(1-\eta_{\alpha_j})^q)^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right) \\ &+ \left(1-\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-\nu_{\alpha_i})^p(1-\nu_{\alpha_j})^q)^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right) \\ &\leq \left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-\mu_{\beta_i}^p\mu_{\beta_j}^q)^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}} + \left(1-\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-\eta_{\beta_i})^p(1-\eta_{\beta_j})^q)^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right) \\ &+ \left(1-\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-\nu_{\beta_i})^p(1-\nu_{\beta_j})^q)^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right) = h_\beta \end{aligned} \tag{5.43}$$

Böylece Eş. 5.1 ve Eş. 5.2'den yararlanılarak Eş. 5.26 ispatlanmış olur.

Teorem 5.4. (Yer Değiştirilebilirlik)

$\alpha_i = (\mu_{\alpha_i}, \eta_{\alpha_i}, \nu_{\alpha_i})(i = 1,2,...,n)$ görüntü bulanık sayılar topluluğu ve $(\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, ..., \dot{\alpha}_n)$ sıralaması $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ dizisinin herhangi bir permütasyonu iken Eş. 5.44 topluluk içindeki sayıların yer değiştirmesinin sonucu değiştirmeyeceğini gösterir.

$$GBBOO^{p,q}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=GBBOO^{p,q}(\dot{\alpha}_1,\dot{\alpha}_2,...,\dot{\alpha}_n) \tag{5.44}$$

$$\begin{aligned} GBBOO^{p,q}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n) &= \left(\frac{1}{n(n-1)}\left(\bigoplus_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(\alpha_i^p\otimes\alpha_j^q)\right)\right)^{\frac{1}{p+q}} \\ &= \left(\frac{1}{n(n-1)}\left(\bigoplus_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(\dot{\alpha}_i^p\otimes\dot{\alpha}_j^q)\right)\right)^{\frac{1}{p+q}} \\ &= GBBOO^{p,q}(\dot{\alpha}_1,\dot{\alpha}_2,...,\dot{\alpha}_n) \end{aligned} \tag{5.45}$$

Teorem 5.5. (Sınırlılık)

$\alpha_i=(\mu_{\alpha_i},\eta_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i})(i=1,2,...,n)$ görüntü bulanık sayıları için alt ve üst sınırlar Eş. 5.46'da gösterilmiştir. Eş. 5.47 birleştirme sonucu elde edilen görüntü bulanık sayının bu sınırlar içerisinde olduğunu ifade eder.

$$\begin{aligned} \alpha^- &= \left(\min_i\left\{\mu_{\alpha_i}\right\},\max_i\left\{\eta_{\alpha_i}\right\},\max_i\left\{\nu_{\alpha_i}\right\}\right) \\ \alpha^+ &= \left(\max_i\left\{\mu_{\alpha_i}\right\},\min_i\left\{\eta_{\alpha_i}\right\},\min_i\left\{\nu_{\alpha_i}\right\}\right) \end{aligned} \tag{5.46}$$

$$\alpha^-\le GBBOO^{p,q}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\le\alpha^+ \tag{5.47}$$

Tüm i'ler için $min_i\{\mu_{\alpha i}\}\le\mu_{\alpha i}\le max_i\{\mu_{\alpha i}\}$, $min_i\{\eta_{\alpha i}\}\le\eta_{\alpha i}\le max_i\{\eta_{\alpha i}\}$ ve $min_i\{\nu_{\alpha i}\}\le\nu_{\alpha i}\le max_i\{\nu_{\alpha i}\}$ olduğundan Eş. 5.48 - Eş. 5.61, Eş. 5.47'yi garanti eder.

$$\left(\min_i\left\{\mu_{\alpha_i}\right\}\right)^{p+q}\le\mu_{\alpha_i}^p\mu_{\alpha_j}^q\le\left(\max_i\left\{\mu_{\alpha_i}\right\}\right)^{p+q} \tag{5.48}$$

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-\mu_{\alpha_i}^p\mu_{\alpha_j}^q)^{\frac{1}{n(n-1)}} &\le \prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(\min_i\left\{\mu_{\alpha_i}\right\})^{p+q})^{\frac{1}{n(n-1)}} \\ &= 1-(\min_i\left\{\mu_{\alpha_i}\right\})^{p+q} \end{aligned} \tag{5.49}$$

$$\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-\mu_{\alpha_i}^{p}\mu_{\alpha_j}^{q})^{\frac{1}{n(n-1)}} \geq \prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(\max_i\{\mu_{\alpha_i}\})^{p+q})^{\frac{1}{n(n-1)}} \\ =1-(\max_i\{\mu_{\alpha_i}\})^{p+q} \tag{5.50}$$

$$\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-\mu_{\alpha_i}^{p}\mu_{\alpha_j}^{q})^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}} \leq \left(1-(1-(\max_i\{\mu_{\alpha_i}\})^{p+q})\right)^{\frac{1}{p+q}} = \max_i\{\mu_{\alpha_i}\} \tag{5.51}$$

$$\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-\mu_{\alpha_i}^{p}\mu_{\alpha_j}^{q})^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}} \geq \left(1-(1-(\min_i\{\mu_{\alpha_i}\})^{p+q})\right)^{\frac{1}{p+q}} = \min_i\{\mu_{\alpha_i}\} \tag{5.52}$$

$$\left(1-\max_i\{\eta_{\alpha_i}\}\right)^{p+q} \leq (1-\eta_{\alpha_i})^{p}(1-\eta_{\alpha_j})^{q} \leq \left(1-\min_i\{\eta_{\alpha_i}\}\right)^{p+q} \tag{5.53}$$

$$\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(1-(1-\eta_{\alpha_i})^{p}(1-\eta_{\alpha_j})^{q}\right)^{\frac{1}{n(n-1)}} \\ \geq \prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(1-(1-\min_i\{\eta_{\alpha_j}\})^{p+q}\right)^{\frac{1}{n(n-1)}} = 1-\left(1-\min_i\{\eta_{\alpha_j}\}\right)^{p+q} \tag{5.54}$$

$$\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(1-(1-\eta_{\alpha_i})^{p}(1-\eta_{\alpha_j})^{q}\right)^{\frac{1}{n(n-1)}} \\ \leq \prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(1-(1-\max_i\{\eta_{\alpha_i}\})^{p+q}\right)^{\frac{1}{n(n-1)}} = 1-\left(1-\max_i\{\eta_{\alpha_i}\}\right)^{p+q} \tag{5.55}$$

$$1-\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(1-(1-\eta_{\alpha_i})^{p}(1-\eta_{\alpha_j})^{q}\right)^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}} \geq 1-(1-(1-\min_i\left\{\eta_{\alpha_i}\right\})^{p+q}))^{\frac{1}{p+q}}=\min_i\left\{\eta_{\alpha_i}\right\} \tag{5.56}$$

$$1-\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(1-(1-\eta_{\alpha_i})^{p}(1-\eta_{\alpha_j})^{q}\right)^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}} \leq 1-(1-(1-\max_i\left\{\eta_{\alpha_i}\right\})^{p+q}))^{\frac{1}{p+q}}=\max_i\left\{\eta_{\alpha_i}\right\} \tag{5.57}$$

$$\left(1-\max_i\left\{v_{\alpha_i}\right\}\right)^{p+q}\leq(1-v_{\alpha_i})^{p}(1-v_{\alpha_j})^{q}\leq\left(1-\min_i\left\{v_{\alpha_i}\right\}\right)^{p+q} \tag{5.58}$$

$$\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(1-(1-v_{\alpha_i})^{p}(1-v_{\alpha_j})^{q}\right)^{\frac{1}{n(n-1)}} \geq \prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(1-(1-\min_i\left\{v_{\alpha_j}\right\})^{p+q}\right)^{\frac{1}{n(n-1)}}=1-\left(1-\min_i\left\{v_{\alpha_j}\right\}\right)^{p+q} \tag{5.59}$$

$$\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(1-(1-v_{\alpha_i})^{p}(1-v_{\alpha_j})^{q}\right)^{\frac{1}{n(n-1)}} \leq \prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(1-(1-\max_i\left\{v_{\alpha_i}\right\})^{p+q}\right)^{\frac{1}{n(n-1)}}=1-\left(1-\max_i\left\{v_{\alpha_i}\right\}\right)^{p+q} \tag{5.60}$$

$$1-\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(1-(1-v_{\alpha_i})^{p}(1-v_{\alpha_j})^{q}\right)^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}} \geq 1-(1-(1-\min_i\left\{v_{\alpha_i}\right\})^{p+q}))^{\frac{1}{p+q}}=\min_i\left\{v_{\alpha_i}\right\} \tag{5.61}$$

$$1-\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(1-(1-v_{\alpha_i})^p(1-v_{\alpha_j})^q\right)^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}$$
$$\leq 1-(1-(1-(1-\max_i\{v_{\alpha_i}\})^{p+q}))^{\frac{1}{p+q}}=\max_i\{v_{\alpha_i}\} \tag{5.62}$$

<u>p ve q Parametrelerine Göre GBBOO'nun Bazı Özel Durumları</u>

Durum 1.

Eğer q→0 ise Eş. 5.4'dan yararlanarak Eş. 5.63'de verilen genelleştirilmiş görüntü bulanık Bonferroni ortalama (GGBBO) operatörü elde edilir.

$$\lim_{q\to 0} GGBBO^{p,q}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$$
$$=\lim_{q\to 0}\left(\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-\mu_{\alpha_i}^p\mu_{\alpha_j}^q)^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}},\right.$$
$$1-\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-\eta_{\alpha_i})^p(1-\eta_{\alpha_j})^q)^{\frac{1}{n(n-1)}}\right),$$
$$\left.1-\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-v_{\alpha_i})^p(1-v_{\alpha_j})^q)^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)\right)$$
$$=\left(\left(1-\prod_{i=1}^{n}(1-\mu_{\alpha_i}^p)^{\frac{n-1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p}},\ 1-\left(1-\prod_{i=1}^{n}(1-(1-\eta_{\alpha_i})^p)^{\frac{n-1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p}},\right.$$
$$\left.1-\left(1-\prod_{i=1}^{n}(1-(1-v_{\alpha_i})^p)^{\frac{n-1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$
$$=\left(\left(1-\prod_{i=1}^{n}(1-\mu_{\alpha_i}^p)^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{p}},1-\left(1-\prod_{i=1}^{n}(1-(1-\eta_{\alpha_i})^p)^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{p}},\right.$$
$$\left.1-\left(1-\prod_{i=1}^{n}(1-(1-v_{\alpha_i})^p)^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{p}}\right) \tag{5.63}$$
$$=\left(\frac{1}{n}\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\alpha_i^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}=GGBBO^{p,0}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$$

Durum 2.

Eğer $p=2$ ve $q\to 0$ ise Eş. 5.4, Eş. 5.64'de verilen görüntü bulanık kareler ortalama (*GBKO*) operatörüne dönüşür.

$$GBKO^{2,0}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=\left(\frac{1}{n}\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}}\alpha_i^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\left(\left(1-\prod_{i=1}^{n}(1-\mu_{\alpha_i}^2)^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}},1-\left(1-\prod_{i=1}^{n}(1-(1-\eta_{\alpha_i})^2)^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}},\right. \tag{5.64}$$
$$\left.1-\left(1-\prod_{i=1}^{n}(1-(1-\nu_{\alpha_i})^2)^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Durum 3.

Eğer p=1 ve $q\to 0$ ise Eş. 5.4, Eş. 5.65'de gösterilen görüntü bulanık ortalama (*GBO*) operatörüne dönüşür.

$$GBO^{1,0}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=$$
$$=\left(\left(1-\prod_{i=1}^{n}(1-\mu_{\alpha_i})^{\frac{1}{n}}\right),1-\left(1-\prod_{i=1}^{n}(1-(1-\eta_{\alpha_i}))^{\frac{1}{n}}\right),\right.$$
$$\left.1-\left(1-\prod_{i=1}^{n}(1-(1-\nu_{\alpha_i}))^{\frac{1}{n}}\right)\right) \tag{5.65}$$
$$=\left(\left(1-\left(\prod_{i=1}^{n}(1-\mu_{\alpha_i})\right)^{\frac{1}{n}}\right),\left(\prod_{i=1}^{n}\eta_{\alpha_i}\right)^{\frac{1}{n}},\left(\prod_{i=1}^{n}\nu_{\alpha_i}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$$
$$=\frac{1}{n}\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}}\alpha_i\right)$$

Durum 4.

Eğer p=q=1 ise Eş. 5.4'de gösterilen GBBOO Eş. 5.66'da verilen görüntü bulanık ilişki kareler ortalama (GBIKO) operatörüne dönüşür.

$$GBIKO^{1,1}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n) =$$

$$= \left(\frac{1}{n(n-1)}\left(\bigoplus_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(\alpha_i \otimes \alpha_j\right)\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-\mu_{a_i}\mu_{a_j})^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{2}}\right., \tag{5.66}$$

$$\left.1-\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-\eta_{a_i})\ (1-\eta_{a_j})\ )^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{2}}, 1-\left(1-\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(1-(1-\nu_{a_i})\ (1-\nu_{a_j})\ )^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

5.2. Önerilen Görüntü Bulanık Normalleştirilmiş Ağırlıklı Bonferroni Ortalama Operatörü

Karar verme problemlerinde ilgili kriterler genellikle aynı derecede önemli değillerdir. Farklı önem derecelerine sahip kriterlere farklı önem ağırlıkları atanmalıdır. Dolayısıyla birleştirme operatörlerinin kriterlerin önem ağırlıklarını da dikkate alacak şekilde geliştirilmesi kullanım alanını genişletecektir.

Tanım 5.13.

$\alpha_i = (\mu_{\alpha_i}, \eta_{\alpha_i}, \nu_{\alpha_i})(i = 1,2,...,n)$ görüntü bulanık sayıları ve $w = (w_1, w_2, ..., w_n)^T$ bu sayıların ağırlık vektörü olsun. Burada w_i ağırlığı a_i görüntü bulanık sayısının önem derecesini gösterir ve $w_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ şartlarını sağlar. p, $q \geq 0$ için Eş. 5.67 görüntü bulanık normalleştirilmiş ağırlıklı Bonferroni ortalama (GBNABO) operatörünü gösterir.

$$GBNABO^{p,q}(a_1,a_2,...,a_n)$$

$$= \left(\bigoplus_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{w_i w_j}{1-w_i}(\alpha_i^p \otimes \alpha_j^q)\right)^{\frac{1}{p+q}} \tag{5.67}$$

Teorem 5.6.

$\alpha_i = (\mu_{\alpha_i}, \eta_{\alpha_i}, \nu_{\alpha_i})(i = 1,2,...,n)$ görüntü bulanık sayılar topluluğu, $w = (w_1, w_2, ..., w_n)^T$ bu sayıların $w_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ şartlarını sağlayan ağırlık vektörü iken GBNABO operatörü kullanılarak elde edilen birleştirilmiş değer de bir görüntü bulanık sayıdır.

$$GBNABO^{p,q}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$
$$= \left(\left(1 - \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} (1 - \mu_i^p \mu_j^q)^{\frac{w_i w_j}{1-w_i}} \right)^{\frac{1}{p+q}}, \right.$$
$$1 - \left(1 - \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} (1 - (1-\eta_i)^p (1-\eta_j)^q)^{\frac{w_i w_j}{1-w_i}} \right)^{\frac{1}{p+q}}, \qquad (5.68)$$
$$\left. 1 - \left(1 - \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} (1 - (1-\nu_i)^p (1-\nu_j)^q)^{\frac{w_i w_j}{1-w_i}} \right)^{\frac{1}{p+q}} \right)$$

Teorem 5.6'nın ispatı Teorem 5.1'in ispatı ile aynıdır.

GBNABO operatörü de GBBOO gibi bir takım arzu edilen özellikleri sağlamaktadır. Bu özellikleri sağladığının ispatı GBBOO'nun özelliklerinin ispatı ile aynıdır.

Teorem 5.7. (Eşkuvvetlilik)

$\alpha_i (i = 1,2,...,n)$ görüntü bulanık sayıları tüm *i*'ler için $\alpha_i = \alpha$ olacak şekilde eşitse Eş. 5.69 birleştirme sonucunun α sayısına eşit olduğunu gösterir.

$$
\begin{aligned}
&GBNABO^{p,q}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\\
&=GBNABO^{p,q}(\alpha,\alpha,...,\alpha)\\
&=\left(\bigoplus_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{w_i w_j}{1-w_i}(\alpha^p\otimes\alpha^q)\right)^{\frac{1}{p+q}}=\left((\alpha^p\otimes\alpha^q)\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{w_i w_j}{1-w_i}\right)^{\frac{1}{p+q}}\\
&=\left(\left(\mu_\alpha^{p+q},1-(1-\eta_\alpha)^{p+q},1-(1-\nu_\alpha)^{p+q}\right)\sum_{i}^{n}w_i\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{w_j}{1-w_i}\right)^{\frac{1}{p+q}}\\
&=\left((\mu_\alpha^{p+q})^{\frac{1}{p+q}},1-(1-(1-(1-\eta_\alpha)^{p+q}))^{\frac{1}{p+q}},1-(1-(1-(1-\nu_\alpha)^{p+q}))^{\frac{1}{p+q}}\right)\\
&=(\mu_\alpha,\eta_\alpha,\nu_\alpha)=\alpha
\end{aligned}
\tag{5.69}
$$

Teorem 5.8. (Monotonluk)

$\alpha_i(i=1,2,...,n)$ ve $\beta_i(i=1,2,...,n)$ görüntü bulanık sayılardan oluşan iki küme iken eğer $\mu_{\alpha_i}\le\mu_{\beta_i}$, $\eta_{\alpha_i}\le\eta_{\beta_i}$ ve $\nu_{\alpha_i}\ge\nu_{\beta_i}$ ise Eş. 5.70 sağlanır.

$$GBNABO^{p,q}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\le GBNABO^{p,q}(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n) \tag{5.70}$$

Teorem 5.9. (Yer Değiştirilebilirlik)

$\alpha_i=(\mu_{\alpha_i},\eta_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i})(i=1,2,...,n)$ görüntü bulanık sayılar topluluğu ve $(\dot{\alpha}_1,\dot{\alpha}_2,...,\dot{\alpha}_n)$ sıralaması $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ dizisinin herhangi bir permütasyonu iken Eş. 5.71 topluluk içindeki sayıların yer değiştirmesinin sonucu değiştirmeyeceğini gösterir.

$$GBNABO^{p,q}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=GBNABO^{p,q}(\dot{\alpha}_1,\dot{\alpha}_2,...,\dot{\alpha}_n) \tag{5.71}$$

Teorem 5.10. (Sınırlılık)

$\alpha_i=(\mu_{\alpha_i},\eta_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i})(i=1,2,...,n)$ görüntü bulanık sayıları için alt ve üst sınırlar Eş. 5.72'de gösterilmiştir. Eş. 5.73 birleştirme sonucu elde edilen görüntü bulanık sayının bu sınırlar içerisinde olduğunu ifade eder.

$$\alpha^{-}=\left(\min_i\left\{\mu_{\alpha_i}\right\},\max_i\left\{\eta_{\alpha_i}\right\},\max_i\left\{\nu_{\alpha_i}\right\}\right)$$
$$\alpha^{+}=\left(\max_i\left\{\mu_{\alpha_i}\right\},\min_i\left\{\eta_{\alpha_i}\right\},\min_i\left\{\nu_{\alpha_i}\right\}\right) \quad (5.72)$$

$$\alpha^{-}\le GBNABO^{p,q}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\le\alpha^{+} \quad (5.73)$$

5.3. Önerilen Görüntü Bulanık Sıralı Ağırlıklı Bonferroni Ortalama Operatörü

Tanım 5.14.

$\alpha_i=(\mu_{\alpha_i},\eta_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i})(i=1,2,...,n)$ görüntü bulanık sayıları ve $w=(w_1,w_2,...,w_n)^T$ bu sayıların pozisyonlarının ağırlık vektörü olsun. Burada w_i ağırlığı a_i görüntü bulanık sayısının pozisyonundan kaynaklı önem derecesini gösterir ve $w_i\ge 0$, $\sum_{i=1}^{n} w_i=1$ şartlarını sağlar. *p*, *q* $\ge$ 0 için Eş. 5.74 görüntü bulanık sıralı ağırlıklı Bonferroni ortalama (GBSABO) operatörünü gösterir. Burada tüm *i*'ler için $\alpha_{\sigma(i-1)}\ge\alpha_{\sigma(i)}$ ve $(\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(n))$ $(1,2,...,n)$ sayılarının bir permütasyonudur.

$$GBSABO^{p,q}(a_{\sigma(1)},a_{\sigma(2)},...,a_{\sigma(n)})=\left(\bigoplus_{\substack{i,j=1\\ i\ne j}}^{n}\frac{w_iw_j}{1-w_i}(\alpha_{\sigma(i)}^{p}\otimes\alpha_{\sigma(j)}^{q})\right)^{\frac{1}{p+q}} \quad (5.74)$$

Teorem 5. 11.

$\alpha_i=(\mu_{\alpha_i},\eta_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i})(i=1,2,...,n)$ görüntü bulanık sayılar topluluğu, $w=(w_1,w_2,...,w_n)^T$ bu sayıların $w_i\ge 0$, $\sum_{i=1}^{n} w_i=1$ şartlarını sağlayan ağırlık vektörü iken GBSABO operatörü kullanılarak elde edilen birleştirilmiş değer de bir görüntü bulanık sayıdır.

$$GBSABO^{p,q}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$$

$$= \left(\left(1 - \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} (1 - \mu_{\sigma(i)}^{p} \mu_{\sigma(j)}^{q})^{\frac{w_i w_j}{1-w_i}} \right)^{\frac{1}{p+q}}, \right.$$

$$1 - \left(1 - \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} (1 - (1 - \eta_{\sigma(i)})^{p} (1 - \eta_{\sigma(j)})^{q})^{\frac{w_i w_j}{1-w_i}} \right)^{\frac{1}{p+q}}, \tag{5.75}$$

$$\left. 1 - \left(1 - \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} (1 - (1 - \nu_{\sigma(i)})^{p} (1 - \nu_{\sigma(i)})^{q})^{\frac{w_i w_j}{1-w_i}} \right)^{\frac{1}{p+q}} \right)$$

GBBOO ve GBNABO operatörlerinin sağladığı özellikler GBSABO operatörü tarafından da sağlanmaktadır. Bu özelliklerin sağlandığının ispatı da diğer operatörlerin ispatları ile aynıdır.

Teorem 5.12. (Eşkuvvetlilik)

$\alpha_i (i = 1,2,...,n)$ görüntü bulanık sayıları tüm *i*'ler için $\alpha_i = \alpha$ olacak şekilde eşitse Eş. 5.76 birleştirme sonucunun α sayısına eşit olduğunu gösterir.

$$GBSABO^{p,q}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n) = \alpha \tag{5.76}$$

Teorem 5.13. (Monotonluk)

$\alpha_i (i = 1,2,...,n)$ ve $\beta_i (i = 1,2,...,n)$ görüntü bulanık sayılardan oluşan iki küme iken eğer $\mu_{\alpha_i} \leq \mu_{\beta_i}$, $\eta_{\alpha_i} \leq \eta_{\beta_i}$ ve $\nu_{\alpha_i} \geq \nu_{\beta_i}$ ise Eş. 5.77 sağlanır.

$$GBSABO^{p,q}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n) \leq GBSABO^{p,q}(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n) \tag{5.77}$$

Teorem 5.14. (Yer Değiştirilebilirlik)

$\alpha_i = (\mu_{\alpha_i}, \eta_{\alpha_i}, \nu_{\alpha_i})(i = 1,2,...,n)$ görüntü bulanık sayılar topluluğu ve $(\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, ..., \dot{\alpha}_n)$ sıralaması $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ dizisinin herhangi bir permütasyonu iken Eş. 5.78 topluluk içindeki sayıların yer değiştirmesinin sonucu değiştirmeyeceğini gösterir.

$$GBSABO^{p,q}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = GBSABO^{p,q}(\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, ..., \dot{\alpha}_n) \tag{5.78}$$

Teorem 5. 15. (Sınırlılık)

$\alpha_i = (\mu_{\alpha_i}, \eta_{\alpha_i}, \nu_{\alpha_i})(i = 1,2,...,n)$ görüntü bulanık sayıları için alt ve üst sınırlar Eş. 5.79'da gösterilmiştir. Eş. 5.80 birleştirme sonucu elde edilen görüntü bulanık sayının bu sınırlar içerisinde olduğunu ifade eder.

$$\begin{aligned} \alpha^- &= \left(\min_i \left\{ \mu_{\alpha_i} \right\}, \max_i \left\{ \eta_{\alpha_i} \right\}, \max_i \left\{ \nu_{\alpha_i} \right\} \right) \\ \alpha^+ &= \left(\max_i \left\{ \mu_{\alpha_i} \right\}, \min_i \left\{ \eta_{\alpha_i} \right\}, \min_i \left\{ \nu_{\alpha_i} \right\} \right) \end{aligned} \tag{5.79}$$

$$\alpha^- \le GBSABO^{p,q}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \le \alpha^+ \tag{5.80}$$

5.4. Görüntü Bulanık Bilgiler İçin Önerilen Bir Karar Verme Modeli

$Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ m tane alternatiften oluşan alternatifler kümesi, $C = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$ n tane kriterden oluşan kriterler kümesi iken y_i alternatifinin c_j kriteri bazında değerlendirilme ölçüsü $\beta_{ij} = (\mu_{ij}, \eta_{ij}, \nu_{ij})$ görüntü bulanık sayısı olsun. Burada μ_{ij}, y_i alternatifinin c_j kriterini sağlama pozitif üyelik derecesini; η_{ij}, y_i alternatifinin c_j kriterini sağlamama nötr üyelik derecesini; ν_{ij} ise y_i alternatifinin c_j kriterini karşılamama negatif üyelik derecesini ifade eder.

Adım 1.

Tüm $\beta_{ij} = (\mu_{ij}, \eta_{ij}, v_{ij})$ (i=1,2,…,m) (j=1,2,…,n) görüntü bulanık değerleri görüntü bulanık karar matrisi, $B = (b_{ij})_{m\times n} = (\mu_{ij}, \eta_{ij}, v_{ij})_{m\times n}$'de toplanır. Burada b_{ij} matristeki i. satır j. sütundaki görüntü bulanık sayıyı ifade eder.

Eğer tüm kriterler aynı türde ise görüntü bulanık karar matrisinin normalleştirilmeye ihtiyacı yoktur. Fakat karar verme problemleri genelde hem fayda hem de zarar kriterlerini aynı anda içerir ve buna göre karar verilmesi beklenir. Fayda kriterlerinde alternatifin en büyük değeri alması beklenirken zarar kriterlerinde en küçük değeri alması beklenir. Bu zıt durum modele yansıtılırken zarar kriterlerinin performans değerleri fayda kriteri performans değerine dönüştürülür. Böylece görüntü bulanık karar matrisi yenilenerek Eş. 5.81'de verilen $A = (\alpha_{ij})_{m\times n} = (\mu_{ij}, \eta_{ij}, v_{ij})_{m\times n}$ normalleştirilmiş matris elde edilir. Burada $\bar{b}_{ij} = \left\{ \left\langle x, v_{b_{ij}}(x), \eta_{b_{ij}}(x), \mu_{b_{ij}}(x) \right\rangle \middle| x \in X \right\}$'dir.

$$\alpha_{ij} = (\mu_{ij}, \eta_{ij}, v_{ij}) = \begin{cases} b_{ij}, & \text{fayda kriteri } c_j \text{ için} \\ \bar{b}_{ij}, & \text{zarar kriteri } c_j \text{ için} \end{cases}, \quad i = 1,2,...,m \; j = 1,2,...,n \tag{5.81}$$

Adım 2.

Tüm $\alpha_{ij}\left(j = 1,2,\ldots,n\right)$ performans değerleri *GBNABO* (genellikle p=q=*1*) operatörü kullanılarak birleştirilir ve her bir y_i alternatifinin Eş. 5.82'deki genel performans değeri bulunur.

$$\alpha_i = (\mu_i, \eta_i, v_i) = GBNABO^{p,q}(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, ..., \alpha_{in}) \tag{5.82}$$

Adım 3.

Alternatiflerin genel performanslarını karşılaştırmak için Eş 5.1'de verilen skor ve gerekirse Eş. 5.2'de verilen doğruluk fonksiyonları hesaplanır.

Adım 4.

Alternatifler $S(\alpha_i)$ $(H(\alpha_i))$ α_i $(i=1,2,...,m)$ fonksiyonuna göre azalan sırada sıralanır ve problemin yapısına göre gerekli seçim yapılır.

5.5. Sayısal Örnek

Bir önceki bölümde önerilen modelin karar verme problemlerinde kullanımını göstermeye yönelik bir sayısal örnek verilmiştir. Bir işletme kurumsal kaynak planlama (KKP) sistemini uygulamayı planlamaktadır. Öncelikle bilişim kurulu başkanı ve ilgili departmanlardan iki kıdemli temsilciden oluşan proje takımı oluşturulmuştur. KKP sistemi sağlayıcılar ve sistem hakkında mümkün olan bilgiyi toplayan proje takımı 5 potansiyel KKP sistemini, $Y_i(i=1,2,...,5)$, aday olarak seçmiştir. Bu adayları değerlendirmek için ise 4 kriter seçilmiştir: (1) Fonksiyon ve teknoloji C_1, (2) Stratejik uygunluk C_2, (3) Sistem sağlayıcıların yeteneği C_3, (4) Sistem saylayıcıların itibarı C_4. Aday KKP sistemleri ağırlık vektörü $w=(0.2,\ 0.1,\ 0.3,\ 0.4)$ olan kriterler bazında karar vericiler tarafından görüntü bulanık sayılar kullanılarak değerlendirilmiştir. Değerlendirme sonuçları Çizelge 5.3'te gösterilmiştir [173].

Çizelge 5.3. Görüntü bulanık karar matrisi

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
C_1	(0,53;0,33;0,09)	(0,73;0,12;0,08)	(0,91;0,03;0,02)	(0,85;0,09;0,05)	(0,90;0,05;0,02)
C_2	(0,89;0,08;0,03)	(0,13;0,64;0,21)	(0,07;0,09;0,05)	(0,74;0,16;0,10)	(0,68;0,08;0,21)
C_3	(0,42;0,35;0,18)	(0,03;0,82;0,13)	(0,04;0,85;0,10)	(0,02;0,89;0,05)	(0,05;0,87;0,06)
C_4	(0,08;0,89;0,02)	(0,73;0,15;0,08)	(0,68;0,26;0,06)	(0,08;0,84;0,06)	(0,13;0,75;0,09)

Adım 1. Ele alınan problem hiç zarar kriteri içermediğinden Çizelge 5.4'de verilen dönüştürülmüş görüntü bulanık karar matrisi $A=(\alpha_{ij})_{5\times4}$, Çizelgee 5.3'de verilen görüntü bulanık karar matrisi $B=(b_{ij})_{5\times4}$ ile aynıdır.

Çizelge 5.4. Dönüştürülmüş görüntü bulanık karar matrisi

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
C_1	(0,53;0,33;0,09)	(0,73;0,12;0,08)	(0,91;0,03;0,02)	(0,85;0,09;0,05)	(0,90;0,05;0,02)
C_2	(0,89;0,08;0,03)	(0,13;0,64;0,21)	(0,07;0,09;0,05)	(0,74;0,16;0,10)	(0,68;0,08;0,21)
C_3	(0,42;0,35;0,18)	(0,03;0,82;0,13)	(0,04;0,85;0,10)	(0,02;0,89;0,05)	(0,05;0,87;0,06)
C_4	(0,08;0,89;0,02)	(0,73;0,15;0,08)	(0,68;0,26;0,06)	(0,08;0,84;0,06)	(0,13;0,75;0,09)

Adım 2. Çizelge 5.4'e göre her bir alternatif için *GBNABO* operatörü kullanılarak Çizelge 5.5'de verilen birleştirilmiş değerler elde edilir.

Çizelge 5.5. Aday KKP sistemlerinin birleştirilmiş sonuçları

	GBNABO
A_1	(0,358;0,422;0,078)
A_2	(0,431;0,376;0,108)
A_3	(0,464;0,328;0,060)
A_4	(0,268;0,625;0,059)
A_5	(0,305;0,498;0,073)

$$GBNABO_{A_1}^{1,1}(C_1, C_2, C_3, C_4)$$

$$= \left(\left(1 - \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{4} (1 - \mu_i^1 \mu_j^1)^{\frac{w_i w_j}{1-w_i}} \right)^{\frac{1}{2}}, \right.$$

$$1 - \left(1 - \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{4} (1 - (1-\eta_i)^1 (1-\eta_j)^1)^{\frac{w_i w_j}{1-w_i}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left. 1 - \left(1 - \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{4} (1 - (1-\nu_i)^1 (1-\nu_j)^1)^{\frac{w_i w_j}{1-w_i}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$=((1-((1-\mu_1^1\mu_2^1)^{\frac{w_1w_2}{1-w_1}}(1-\mu_1^1\mu_3^1)^{\frac{w_1w_3}{1-w_1}}(1-\mu_1^1\mu_4^1)^{\frac{w_1w_4}{1-w_1}}(1-\mu_2^1\mu_1^1)^{\frac{w_2w_1}{1-w_2}}(1-\mu_2^1\mu_3^1)^{\frac{w_2w_3}{1-w_2}}$$
$$(1-\mu_2^1\mu_4^1)^{\frac{w_2w_4}{1-w_2}}(1-\mu_3^1\mu_1^1)^{\frac{w_3w_1}{1-w_3}}(1-\mu_3^1\mu_2^1)^{\frac{w_3w_2}{1-w_3}}(1-\mu_3^1\mu_4^1)^{\frac{w_3w_4}{1-w_3}}(1-\mu_4^1\mu_1^1)^{\frac{w_4w_1}{1-w_4}}(1-\mu_4^1\mu_2^1)^{\frac{w_4w_2}{1-w_4}}(1-\mu_4^1\mu_3^1)^{\frac{w_4w_3}{1-w_4}}))^{\frac{1}{2}},$$
$$1-(1-((1-(1-\eta_1)^1(1-\eta_2)^1)^{\frac{w_1w_2}{1-w_1}}(1-(1-\eta_1)^1(1-\eta_3)^1)^{\frac{w_1w_3}{1-w_1}}(1-\eta_1)^1(1-\eta_4)^1)^{\frac{w_1w_4}{1-w_4}}(1-(1-\eta_2)^1(1-\eta_1)^1)^{\frac{w_2w_1}{1-w_2}}$$
$$(1-\eta_2)^1(1-\eta_3)^1)^{\frac{w_2w_3}{1-w_2}}(1-(1-\eta_2)^1(1-\eta_4)^1)^{\frac{w_2w_4}{1-w_2}}(1-\eta_3)^1(1-\eta_1)^1)^{\frac{w_3w_1}{1-w_3}}(1-(1-\eta_3)^1(1-\eta_2)^1)^{\frac{w_3w_2}{1-w_3}}$$
$$(1-\eta_3)^1(1-\eta_4)^1)^{\frac{w_3w_4}{1-w_3}}(1-(1-\eta_4)^1(1-\eta_1)^1)^{\frac{w_4w_1}{1-w_4}}(1-\eta_4)^1(1-\eta_2)^1)^{\frac{w_4w_2}{1-w_4}}(1-(1-\eta_4)^1(1-\eta_3)^1)^{\frac{w_4w_3}{1-w_4}}))^{\frac{1}{2}},$$
$$1-(1-((1-(1-\nu_1)^1(1-\nu_2)^1)^{\frac{w_1w_2}{1-w_1}}(1-(1-\nu_1)^1(1-\nu_3)^1)^{\frac{w_1w_3}{1-w_1}}(1-\nu_1)^1(1-\nu_4)^1)^{\frac{w_1w_4}{1-w_4}}(1-(1-\nu_2)^1(1-\nu_1)^1)^{\frac{w_2w_1}{1-w_2}}$$
$$(1-\nu_2)^1(1-\nu_3)^1)^{\frac{w_2w_3}{1-w_2}}(1-(1-\nu_2)^1(1-\nu_4)^1)^{\frac{w_2w_4}{1-w_2}}(1-\nu_3)^1(1-\nu_1)^1)^{\frac{w_3w_1}{1-w_3}}(1-(1-\nu_3)^1(1-\nu_2)^1)^{\frac{w_3w_2}{1-w_3}}$$
$$(1-\nu_3)^1(1-\nu_4)^1)^{\frac{w_3w_4}{1-w_3}}(1-(1-\nu_4)^1(1-\nu_1)^1)^{\frac{w_4w_1}{1-w_4}}(1-\nu_4)^1(1-\nu_2)^1)^{\frac{w_4w_2}{1-w_4}}(1-(1-\nu_4)^1(1-\nu_3)^1)^{\frac{w_4w_3}{1-w_4}}))^{\frac{1}{2}}$$
$$=(0,358;0,422;0,078)$$

Adım 3. Çizelge 5.5'de verilen birleştirilmiş sonuçlara göre her bir alternatif için hesaplanan skor fonksiyonları Çizelge 5.6'da verilmiştir.

Çizelge 5.6. Aday KKP sistemlerinin skor fonksiyonları

	GBNABO
A_1	0.280
A_2	0.323
A_3	0.404
A_4	0.209
A_5	0.232

$$S(A_{1,}) = \mu_{A_1} - \nu_{A_1}$$
$$= 0,358 - 0,078$$
$$= 0,28$$

Adım 4. Çizelge 5.6'daki skor fonksiyonları Tanım 5.10'dan yararlanılarak sıralanır. Aday KKP sistemlerinin sıralaması Çizelge 5.7'de verilmiştir.

Çizelge 5.7. Aday KKP sistemlerinin sıralaması

	Sıralama
GBNABO	$A_3>A_2> A_1>A_5> A_4$

Çizelge 5.7'ye göre alternatif KKP sistemlerinden üçüncü alternatif en yüksek değere sahip olmuştur. Önerilen model literatürdeki bazı görüntü bulanık karar verme operatörleri ile karşılaştırılmıştır. Bu operatörler görüntü bulanık ağırlıklı ortalama (GBAO) operatörü, görüntü bulanık ağırlıklı geometrik ortalama (GBAGO) operatörü, görüntü bulanık Hamacher ağırlıklı ortalama (GBHAO) operatörü, görüntü bulanık Hamacher ağırlıklı geometrik ortalama (GBHAGO) operatörü, görüntü bulanık Dombi ağırlıklı ortalama (GBDAO) operatörüdür. Bu operatörler kullanılarak yapılan birleştirme sonuçlarına göre alternatiflerin sıralanması Çizelge 5.8'de gösterilmiştir. Önerilen operatör ve mevcut operatörlerin sıralama sonuçları neredeyse aynıdır. Önerilen ve mevcut operatörlerde en iyi alternatif üçüncü KKP sistemidir. Bu sonuçlar önerilen modelin uygulanabilirliğini göstermektedir.

Çizelge 5.8. Farklı modellerin sıralama sonuçları

Operatör	Sıralama
GBAO[149]	$A_3>A_2> A_1>A_5> A_4$
GBAGO[149]	$A_3>A_1> A_2>A_5> A_4$
GBHAO[153]	$A_3>A_2> A_1>A_5> A_4$
GBHAGO[153]	$A_3>A_1> A_2>A_5> A_4$
GBDAO[16]	$A_3>A_1> A_5> A_2 >A_4$
GBNABO(önerilen)	$A_3>A_2> A_1>A_5> A_4$

p ve *q* model parametrelerinin sonuçlar üzerindeki etkisini göstermek için problem GBNABO operatörünün farklı parametre değerleri altında çözülmüştür. Alternatiflerin sıralanmaları Çizelge 5.9'da verilmiştir. Buna göre farklı parametre değerleri altında alternatif sıralamaları farklı olsa da en iyi alternatif farklı parametre kombinasyonları için de üçüncü KKP sistemidir.

Çizelge 5.9. Farklı parametre değerlerine göre alternatiflerin sıralanması

	Sıralama
$p=1, q=0$	A_3>A_2> A_5>A_1> A_4
$p=2, q=0$	A_3>A_5> A_4>A_1> A_2
$p=1, q=1$	A_3>A_2> A_1>A_5> A_4
$p=2, q=1$	A_3>A_1> A_2>A_5> A_4
$p=10, q=1$	A_3>A_5> A_1> A_4 >A_2

5.6. Değerlendirme

Karar verme problemlerinde karar vericilerin alternatifleri değerlendirme yollarından bir tanesi de görüntü bulanık sayılardır. Görüntü bulanık sayılar karar vericilere alternatifleri pozitif üyelik derecesi, nötr üyelik derecesi ve negatif üyelik derecesi ile değerlendirme fırsatı sunar. Böylelikle alternatifler çok yönlü olarak ele alınabilirler. Alternatiflerin değerlendirilmesinde dikkate alınan kriterler arasındaki ilişkiyi dikkate almak ise daha doğru kararlar alınmasına yardımcı olacaktır. Bu açıdan bakıldığında kriterler arası ilişkilerin dikkate alındığı ve alternatiflerin görüntü bulanık sayılarla değerlendirildiği bir yaklaşım karar verme problemlerinin çözümünü çeşitlendirecektir. Birleştirilen sayılar arasındaki ilişkiyi dikkate alan Bonferroni ortalama operatörü görüntü bulanık sayılar ile kullanılarak *GBBO*, *GBNABO* ve *GBSABO* operatörleri geliştirilmiş bu operatörlerin arzu edilen bir takım özellikleri incelenmiştir. *GBNABO* operatörü kullanılarak bir karar verme modeli önerilmiştir. Önerilen modeli teyit etmek için KKP sistem seçimi problemi ele alınmıştır. Önerilen modelin sonuçları literatürde kabul görmüş bazı modeller ile karşılaştırılarak önerilen modelin uygulanabilirliği gösterilmiştir.

6. ÖNERİLEN ARALIKLI OLABİLİRLİK ÖLÇÜSÜ VE DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ

İkinci bölümde olabilirlik teorisi, Zadeh'in bakış açısından doğal dil ifadeleri ile derecelendirilmiş semantiği buluşturmak için var olsa da başka yorumları da destekleyebilir. Olabilirlik teorisi fiziksel dünyanın özelliklerine işaret eden objektif bir kavram olarak ele alınabileceği gibi bir uzmanın bilgi durumuna işaret eden bilgisel bir kavram olarak da ele alınabilir [174]. Yani olabilirlik kelimesi ile kurulabilecek farklı anlamlara gelen kavramlar tanımlamak mümkündür. Bunlardan iki tanesi de hem nesnel hem de öznel açıdan öngörülebilen "yapılabilirlik" ve "mümkünlük" kavramlarıdır [61, 175]. Yapılabilirlik kavramı başarmanın kolaylığı ya da bir problemin çözümünde bazı kısıtların sağlanması ifadeleri ile açıklanabilirken teknik olarak, ekonomik olarak, teorik olarak, fiziki olarak gibi belirteçlerle nitelendirilebilir. Diğer bir kavram olan mümkünlük ise olayların meydana gelme eğilimini ifade eder. "Arabanın teknik olarak 300 km hıza ulaşması mümkündür" yapılabilirliği gösterirken "Ayşe'nin 200 km hıza ulaşması mümkündür" olayın meydana gelme eğilimini gösterir. Ayşe'nin ulaşabileceği en yüksek hız ise 300 km'dir.

Dubois ve Prade'in olabilirlik yorumu "mümkün" kelimesinin iki farklı yorumuna dayanır [35]. Bu yorumlar "ne yapılabilir" ve "ne olabilir" ifadelerinin farklı anlamlarını ortaya koyar. Bu yoruma göre Zadeh'in bilinen yumurta yeme örneğinde "Hans için kahvaltıda 4 yumurta yemek mümkündür" ile "Hans'ın kahvaltıda 4 yumurta yemesi mümkündür" ifadeleri farklı anlamlara gelmektedir [34]. İlki Hans'ın yeteneği ile ilgili olup fiziksel olabilirliği ifade ederken ikincisi ne olabileceği ile ilgili olup bilgisel olabilirliği ifade eder. Bir durumun meydana gelebilmesi için yapılabilir olması gerektiğinden ilk ifadedeki fiziksel olabilirlik derecesi ikincideki bilgisel olabilirlik derecesinden her zaman büyük veya eşittir. Yapılabilir olan her durumun meydana gelmesi gibi bir zorunluluk ise yoktur. Bu çıkarımlar çerçevesinde fiziksel olabilirliğin üst sınır olarak kabul edildiği bilgisel olabilirliğin ise alt sınır olarak kabul edildiği aralıklı değerli olabilirlik kavramından bahsetmek mümkündür.

Karmaşık karar sistemlerinde belirsizlik yönetimi önemli bir konudur. Belirsizliği modelleme ve yönetmede iki temel teoriden biri olan olasılık teorisi rassallığı göstermede, bir diğeri olan olabilirlik teorisi kısmi bilgiyi ve tam olmamayı göstermede etkililerdir.

Farklı tür belirsizliklere işaret eden bu iki temel teori arasındaki dönüşümler heterojen bilgi kaynaklarının bulunduğu ortamlarda mevcut bilgiden en fazla sonucun çıkarılmasına olanak sağlar. Literatürde kesikli ve sürekli durumlar için, kesin ve aralıklı olasılıklar için farklı dönüşüm yöntemleri varken aralıklı olabilirlikleri dikkate alan bir dönüşüm yöntemi bulunmamaktadır [36-38, 43, 44, 70, 176-178]. Mevcut yaklaşımlar olabilirlik kavramını sadece ne olabileceğini gösteren bilgisel olabilirlik açısından ele almaktadırlar. Hâlbuki meydana gelebilecek her durumun yapılabilir olması gerektiğinden bilgisel olabilirlik ve fiziksel olabilirlik arasında bilgisel olabilirliğin fiziksel olabilirlikten küçük veya eşit olması gerektiği gibi güçlü bir bağlantı vardır. Bu güçlü bağlantı aralıklı olabilirlik ölçüsünün kurulmasını sağlar.

Zadeh'in yumurta yeme örneğinde olabilirlik derecesi başarmanın kolaylığını yani Hans'ın kahvaltıda kaç yumurta yiyebilme yeteneğine sahip olduğunu gösterir. Çizelge 6.1'e göre Hans'ın kahvaltıda 3 yumurta yemesinin olabilirliği 1 iken olasılığı 0,1'dir. Yani yüksek fiziksel olabilirlik derecesinin yüksek olasılığı göstermediği gibi düşük olasılık derecesi de düşük fiziksel olabilirlik derecesini göstermez. Ayrıca aynı fiziksel olabilirlik derecesi de aynı olasılık derecesine karşılık gelmek zorunda değildir. Fakat bir olayın yapılabilirliği yoksa yani fiziksel olarak mümkün değilse o olayın olasılığı da yoktur.

Çizelge 6.1. Hans'ın kahvaltıda yediği yumurtaya ilişkin olabilirlik ve olasılık dağılımı

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$Pos_u(\{x\})$	1	1	1	1	0,8	0,6	0,4	0,2
$P_u(\{x\})$	0,1	0,8	0,1	0	0	0	0	0

İkinci bölümde Eş. 2.27 ile gösterilen Zadeh'in tutarlılık ilkesine göre evrensel kümede meydana gelmesi mümkün tüm durumların fiziksel olabilirlik derecesi bire eşit ise olasılık olabilirlik tutarlılığı maksimumdur ve bire eşittir. Çizelge 6.1'de görüldüğü gibi Hans için kahvaltıda 4 yumurta yemenin olabilirliği birdir fakat bu durum hiç yaşanmamıştır. Bu ideal teorik durumla günlük yaşamda her zaman karşılaşmak mümkün değildir. Olasılığa sahip her olay aynı derecede yapılabilirliğe sahip olmayabilir. Hans'ın yumurta yeme yeteneği belirli derecede belirsizlik içerebilir. Dubois ve Prade'in de değindiği gibi Zadeh'in tutarlılık prensibindeki olabilirlik ölçüsü fiziksel olabilirlik olup bilgisel olabilirlikten farklı olmasına rağmen literatürde olasılık ve bilgisel olabilirlik arasındaki dönüşüm yöntemlerinde temel olarak kullanılmıştır [11, 44, 178-180]. Bu durumda

maksimum tutarlılık bilgisel olabilirlikte tamamıyla bilgisizlik durumunu ifade eden tüm olabilirlik derecelerinin bire eşit olduğu durumda sağlanmaktadır. Bu bölümde önerilen dönüşüm yönteminde bir olay karşısında olabilirliğin desteğinin olasılık kadar güçlü olmadığı ve dolayısıyla olabilirliğin olasılıktan daha zayıf bir kavram olduğu fikrine dayanan Eş. (2.28)'de gösterilen Dubois ve Prade'in tutarlılık ilkesi dikkate alınmıştır.

6.1. Temel Tanımlar

Tanım 6.1.

X evrensel kümesinde $\tilde{\Pi}^I : X \to I([0,1])$ fonksiyonlu bir aralıklı değerli olabilirlik dağılımı Eş. 6.1'deki gibidir.

$$\tilde{\Pi}^I = \left\{ \left\langle x, \Pi_L(x), \Pi_U(x) \right\rangle \middle| \forall x \in X, \Pi_L(x) \in [0,1], \Pi_U(x) \in [0,1] \right\} \tag{6.1}$$

$x \in A,\ A \subseteq X$ için Eş. 6.2 ve Eş. 6.3 sırasıyla olabilirlik ve gereklilik ölçülerini gösterir. Burada Π_L bilgisel olabilirlik derecesini, Π_U fiziksel olabilirlik derecesini ifade eder.

$$\tilde{\Pi}^I(A) = [\max_{x \in A}(\Pi_L(x)), \max_{x \in A}(\Pi_U(x))] \tag{6.2}$$

$$\tilde{N}^I(A) = [\min_{x \in A}(1 - \Pi_U(\bar{x})), \min_{x \in A}(1 - \Pi_L(\bar{x}))] \tag{6.3}$$

Burada Π_L ve Π_U sırasıyla bilgisel ve fiziksel olabilirliği ifade eder. Bilgisel olabilirlik her zaman fiziksel olabilirlikten küçük veya eşit olduğundan bu olabilirlik dereceleri ile her zaman geçerli aralıklar elde edilir. Aralıklı olabilirliğin alt ve üst sınırları birbirine eşit olursa, $\Pi_L = \Pi_U$, klasik olabilirlik ölçüsüne dönüşür. Ayrıca aralıklı değerli olabilirlik ölçüsünün üçüncü bölümde Tanım 3.4'de tanımlanan ABK'nin ve Tanım 3.7'de tanımlanan AT2BK'nin denk gösterimi olduğu görülmektedir.

Tanım 6.2.

$\tilde{\Pi}_1^I$ ve $\tilde{\Pi}_2^I$ iki aralıklı değerli olabilirlik dağılımı iken kesişim ve birleşim işlemleri Eş. 6.4 ve Eş. 6.5'deki gibidir.

$$\tilde{\Pi}_1^I \cup \tilde{\Pi}_2^I = [\tilde{\Pi}_L^I(1) \vee \tilde{\Pi}_L^I(2), \tilde{\Pi}_U^I(1) \vee \tilde{\Pi}_U^I(2)] \tag{6.4}$$

$$\tilde{\Pi}_1^I \cap \tilde{\Pi}_2^I = [\tilde{\Pi}_L^I(1) \wedge \tilde{\Pi}_L^I(2), \tilde{\Pi}_U^I(1) \wedge \tilde{\Pi}_U^I(2)] \tag{6.5}$$

Birleşim ve kesişim işlemleri için genellikle sırasıyla maksimum ve minimum operatörleri kullanılır.

Tanım 6.3.

Aralıklı değerli olabilir ölçüsünde matematiksel işlemler yapabilmek için aralıklı değerli olabilirlik ölçüsünün alt ve üst sınırlarında işlemler yapmak gerekir.

$\Pi^I(x_1) = [\Pi_L(x_1), \Pi_U(x_1)]$ ve $\Pi^I(x_2) = [\Pi_L(x_2), \Pi_U(x_2)]$ iki aralıklı değerli olabilirlik ölçüsü iken aralık aritmetiği kullanılarak elde edilen aralıklı işlemler aşağıdaki gibidir.

1) $\Pi^I(x_1) \oplus \Pi^I(x_2) = \left[\Pi_L(x_1) + \Pi_L(x_2), \Pi_U(x_1) + \Pi_U(x_2)\right]$

2) $\Pi^I(x_1) \odot \Pi^I(x_2) = \left[\Pi_L(x_1) - \Pi_U(x_2), \Pi_U(x_1) - \Pi_L(x_2)\right]$

3) $\Pi^I(x_1) \otimes \Pi^I(x_2) = \left[\Pi_L(x_1)\Pi_L(x_2), \Pi_U(x_1)\Pi_U(x_2)\right]$

4) $\Pi^I(x_1) \div \Pi^I(x_2) = \left[\frac{\Pi_L(x_1)}{\Pi_U(x_2)}, \frac{\Pi_U(x_1)}{\Pi_L(x_2)}\right] \quad \Pi_U(x_2) > 0, \Pi_L(x_2) > 0$

Burada $\oplus, \odot, \otimes, \div$ sembolleri sırasıyla toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerini ifade eder.

Tanım 6.4.

$\tilde{\Pi}_1^I$ ve $\tilde{\Pi}_2^I$ iki aralıklı değerli olabilirlik dağılımı iken $\tilde{\Pi}_1^I \le \tilde{\Pi}_2^I$ olması için ancak ve ancak $\pi_{\Pi_1^I}^L(x_i) \le \pi_{\Pi_2^I}^L(x_i)$ ve $\pi_{\Pi_1^I}^U(x_i) \le \pi_{\Pi_2^I}^U(x_i)$ olması gerekir.

$\pi_1 = [\pi_L^1, \pi_U^1]$ ve $\pi_2 = [\pi_L^2, \pi_U^2]$ iki aralıklı değerli olabilirlik ölçüsü iken $L = (\le_L)$ aşağıdaki şartları sağlarsa tam kafestir [77].

$$L = \left\{ [\pi_L, \pi_U] \middle| (\pi_L, \pi_U) \in [0,1]^2, \pi_L \le \pi_U \right\}$$

$$\left[\pi_L^1, \pi_U^1\right] \le_L \left[\pi_L^2, \pi_U^2\right] \Leftrightarrow \pi_L^1 \le \pi_L^2, \pi_U^1 \le \pi_U^2 \ \forall \left[\pi_L^1, \pi_U^1\right], \left[\pi_L^2, \pi_U^2\right] \in L$$

6.2. Aralıklı Olabilirlik Ölçüsünün Alfa Kesmesi

Alfa kesmesi ile bulanık kümelerden kesin kümeler elde edilir. Literatürde aralıklı değerli bulanık kümeler için çeşitli aralıklı alfa kesmesi ayrıştırma yöntemleri incelenmiştir [181-183]. Burada Boran ve arkadaşlarının aralıklı tip-2 bulanık kümeler için önerdiği alfa kesmesi ayrıştırma yöntemi ile aynı çizgi izlenmiştir [184]. Alfa kesmesi ayrıştırma yöntemi ile elemanların aralıklı olabilirlik derecelerine göre sıralanması sağlanmış bu sıralama dönüşüm yönteminde kullanılmıştır.

Tanım 6.5.

X evrensel kümesinde $\tilde{\Pi}^I(x_i)$ aralıklı değerli olabilirlik ölçüsü iken $\alpha_i \in [0,1]$ ve $\alpha_j \in [0,1]$ olmak üzere aralıklı alfa kesmesi Eş. 6.6'da tanımlanmıştır.

$$\tilde{\Pi}_{[\alpha_i, \alpha_j]}^I(x_i) = \left\{ x_i \in X \middle| \Pi_L(x_i) \ge \alpha_i \wedge \Pi_U(x_i) \ge \alpha_j \right\} \tag{6.6}$$

$\Pi_L(\alpha_1), \Pi_L(\alpha_2), ..., \Pi_L(\alpha_n)$ ve $\Pi_U(\alpha_1), \Pi_U(\alpha_2), ..., \Pi_U(\alpha_n)$ sırasıyla $\tilde{\Pi}^I(x_i)$'nin alt kesin kümeleri ve üst kesin kümeleri olsun. $\alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_n$ sıralaması olduğu zaman

$\Pi_L(\alpha_n) \supseteq \Pi_L(\alpha_{n-1}) \supseteq,...,\supseteq \Pi_L(\alpha_1)$, $\Pi_U(\alpha_n) \supseteq \Pi_U(\alpha_{n-1}) \supseteq,...,\supseteq \Pi_U(\alpha_1)$ ve $\Pi_U(\alpha_i) \supseteq \Pi_L(\alpha_i)\ \forall$i'dir. Aralıklı alfa kesmesinden elde edilen kesin kümeler Eş. 6.7'de tanımlanmıştır.

$$\tilde{\Pi}^I_{[\alpha_i,\alpha_j]}(x_i) = \Pi_L(\alpha_i) \cap \Pi_U(\alpha_j) \tag{6.7}$$

Aralıklı alfa kesmeleri tanımlandıktan sonra aralıklı alfa kesmelerin kesin kümelerinin birleşiminden aralıklı değerli olabilirlik ölçüsü üretilebilir.

Teorem 6.1.

$\tilde{\Pi}^I(x_i)$, aralıklı değerli olabilirlik ölçüsü tüm aralıklı alfa kesmeleri ve onların kesin kümelerinin birleşimi ile Eş. 6.8'deki gibi gösterilebilir.

$$\tilde{\Pi}^I(x_i) = \bigcup_{[\alpha_i,\alpha_j]\in[0,1]^2} [\alpha_i,\alpha_j]\tilde{\Pi}^I_{[\alpha_i,\alpha_j]}(x_i) \tag{6.8}$$

İspat

Aralıklı değerli olabilirlik ölçüsünün alt sınırı $\Pi_L(x_i)$ ile üst sınırı ise $\Pi_U(x_i)$ ile ifade edilsin. α_i değeri $[0,\Pi_L(x_i)]$ ya da $[\Pi_L(x_i),1]$ aralığında olacaktır. Benzer şekilde α_j değeri de $[0,\Pi_U(x_i)]$ ya da $[\Pi_U(x_i),1]$ aralığında bir değer olacaktır.

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\Pi}^{I}(x_i) \\
&= \bigcup_{[\alpha_i,\alpha_j]\in[0,1]^2} [\alpha_i,\alpha_j]\tilde{\Pi}^{I}_{[\alpha_i,\alpha_j]}(x_i) \\
&= \sup_{[\alpha_i,\alpha_j]\in[0,1]} \left\{[\alpha_i,\alpha_j]\tilde{\Pi}^{I}_{[\alpha_i,\alpha_j]}(x_i)\right\} \\
&= \left\{ \max\left[\sup_{\alpha_i\in[0,\Pi_L(x_i)]} \left\{\alpha_i \tilde{\Pi}_{L_{\alpha_i}}(x_i)\right\}, \sup_{\alpha_i\in[\Pi_L(x_i),1]} \left\{\alpha_i \tilde{\Pi}_{L_{\alpha_i}}(x_i)\right\} \right], \right. \\
&\quad \left. \max\left[\sup_{\alpha_j\in[0,\Pi_U(x_i)]} \left\{\alpha_j \tilde{\Pi}_{U_{\alpha_j}}(x_i)\right\}, \sup_{\alpha_j\in[\Pi_U(x_i),1]} \left\{\alpha_i \tilde{\Pi}_{U_{\alpha_j}}(x_i)\right\} \right] \right\} \\
&= \left\{ \max\left[\sup_{\alpha_i\in[0,\Pi_L(x_i)]} \left\{\alpha_i \wedge 1\right\}, \sup_{\alpha_i\in[\Pi_L(x_i),1]} \left\{\alpha_i \wedge 0\right\} \right], \right. \\
&\quad \left. \max\left[\sup_{\alpha_j\in[0,\Pi_U(x_i)]} \left\{\alpha_j \wedge 1\right\}, \sup_{\alpha_j\in[\Pi_U(x_i),1]} \left\{\alpha_j \wedge 0\right\} \right] \right\} \\
&= \left[\max\left[\Pi_L(x_i), 0\right], \max\left[\Pi_U(x_i), 0\right] \right] \\
&= \left[\Pi_L(x_i), \Pi_U(x_i)\right].
\end{aligned}
$$

Ayrıca aralıklı değerli olabilirlik ölçüsü, aralıklı değerli olabilirlik ölçüsünün farklı aralıklı alfa kesmelerinden oluşan seviye kümelerinin birleşimi ile gösterilebilir.

Tanım 6.6.

Aralıklı değerli olabilirlik dağılımın alt ve üst sınırlarının oluşturduğu seviyelerinin birleşimi $\Phi = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\}$ kümesinde verilsin. Burada $0 = \alpha_{m+1} < \alpha_m < ... < \alpha_2 < \alpha_1 = 1$ ve Ω, $\tilde{\Pi}^{I}(x_i)$'in güç kümesi olmak üzere Ω'nın bazı elemanları Eş. 6.9 ile bulunur.

$$\omega_l = \tilde{\Pi}_L(\alpha_i) \cap \tilde{\Pi}_U(\alpha_j),\ j \geq i, l = 1, 2, ..., k, ..., n \tag{6.9}$$

Burada güç kümesinin elemanları birden fazla aralıklı alfa kesmesi ile tanımlanabilir. Bu durumda Eş. 6.10'dan yararlanılır.

$$\alpha_l^I = \left\{ \left(\sup \alpha_i, \sup \alpha_j\right) \middle| \omega_l = \tilde{\Pi}_L(\alpha_i) \cap \tilde{\Pi}_U(\alpha_j)\ j \geq i \right\} \tag{6.10}$$

Tüm farklı aralıklı alfa kesmelerinden oluşan aralıklı seviye kümesi Eş. 6.11'de verilmiştir.

$$\Upsilon\left(\tilde{\Pi}^I(x_i)\right)=\bigcup_{\omega_l\in\Omega}\left\{\alpha_l^I\left|\tilde{\Pi}^I_{\alpha_l^I}(x_i)=\omega_l\right.\right\} \tag{6.11}$$

Teorem 6.2.

$\tilde{\Pi}^I(x_i)$ aralıklı değerli olabilirlik ölçüsü tüm farklı aralıklı alfa kesmelerinin birleşimi ile Eş. 6.12'deki gibi gösterilebilir.

$$\tilde{\Pi}^I(x_i)=\bigcup_{\alpha_l^I\in\Upsilon\left(\tilde{\Pi}^I(x_i)\right)}\alpha_l^I\tilde{\Pi}^I_{\alpha_l^I}(x_i) \tag{6.12}$$

İspat

Teorem 6.2'nin ispatı Teorem 6.1'in ispatı ile aynıdır.

Örnek 6.1.

$\tilde{\Pi}^I(x_i)$ aralıklı değerli olabilirlik dağılımı olmak üzere alt ve üst sınırları Çizelge 6.2'de verilmiştir.

Çizelge 6.2. Olabilirliklerin alt ve üst sınırları

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
$\tilde{\Pi}_U(x_i)$	1	1	1	1	0,8	0,6	0,4	0,2
$\tilde{\Pi}_L(x_i)$	1	1	0,8	0,7	0,7	0,5	0,3	0

Tüm alt ve üst sınırlardan oluşan küme $\Phi=\{1;0,8;0,7;0,6;0,5;0,4;0,3;0,2;0\}$ kümesidir. Alt ve üst kesin kümeler Çizelge 6.3'de verilmiştir.

Çizelge 6.3. Alt ve üst kesin kümeler

α	$\tilde{\Pi}_L(\alpha_i)$	$\tilde{\Pi}_U(\alpha_j)$
1	{X1,X2}	{X1,X2,X3,X4}
0,8	{X1,X2,X3}	{X1,X2,X3,X4,X5}
0,7	{X1,X2,X3,X4,X5}	{X1,X2,X3,X4,X5}
0,6	{X1,X2,X3,X4,X5}	{X1,X2,X3,X4,X5,X6}
0,5	{X1,X2,X3,X4,X5,X6}	{X1,X2,X3,X4,X5,X6}
0,4	{X1,X2,X3,X4,X5,X6}	{X1,X2,X3,X4,X5,X6,X7}
0,3	{X1,X2,X3,X4,X5,X6,X7}	{X1,X2,X3,X4,X5,X6,X7}
0,2	{X1,X2,X3,X4,X5,X6,X7}	{X1,X2,X3,X4,X5,X6,X7,X8}
0	{X1,X2,X3,X4,X5,X6,X7,X8}	{X1,X2,X3,X4,X5,X6,X7,X8}

0,8 alfa kesmesi ile {X1,X2,X3} alt kesin kümesi, {X1,X2,X3,X4,X5} üst kesin kümesi elde edilir. 0,7 alfa kesmesi ile {X1,X2,X3,X4,X5} alt kesin kümesi, {X1,X2,X3,X4,X5} üst kesin kümesi elde edilir. Aşağıdaki kesin kümeler ve aralıklı alfa kesmeleri Eş. 6.7 ile hesaplanmıştır.

$$\tilde{\Pi}^I_{[0,3;0,4]} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7\} \cap \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7\} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7\}$$

$$\tilde{\Pi}^I_{[0,2;0,4]} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7\} \cap \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7\} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7\}$$

$$\tilde{\Pi}^I_{[0,2;0,3]} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7\} \cap \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7\} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7\}$$

$$\tilde{\Pi}^I_{[0,3;0,3]} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7\} \cap \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7\} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7\}$$

$$\tilde{\Pi}^I_{[0,2;0,2]} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7\} \cap \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8\} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7\}$$

$$\tilde{\Pi}^I_{[0;0,3]} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8\} \cap \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7\} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7\}$$

$$\tilde{\Pi}^I_{[0;0,4]} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8\} \cap \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7\} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7\}$$

Yukarıdaki sonuçlarda görüldüğü üzere aynı {X1,X2,X3,X4,X5,X6,X7} kesin kümesi farklı alfa kesmelerinden elde edilmiştir. Bu durumda Eş. 6.10'dan faydalanılır.

$$\alpha_7^I = \{\sup(0;0,2;0,3), \sup(0,2;0,3;0,4)\} = (0,3;0,4)$$

Tüm alt ve üst kesin küme kombinasyonları için Eş. 6.10 ve Eş. 6.11'den yararlanılarak aralıklı seviye kümesi kurulur.

$$\Upsilon\left(\tilde{\Pi}^I(x_i)\right) = \{(1,1),(0,8;1),(0,7;1),(0,7;0,8),(0,5;0,6),(0,3;0,4),(0;0,2)\}$$

$\tilde{\Pi}^I(x_i)$'in güç kümesinin elemanları aşağıda verilmiştir.

$$\omega_1 = \tilde{\Pi}^I_{[1,1]} = \{X_1, X_2\},$$
$$\omega_2 = \tilde{\Pi}^I_{[0,8;1]} = \{X_1, X_2, X_3\},$$
$$\omega_3 = \tilde{\Pi}^I_{[0,7;1]} = \{X_1, X_2, X_3, X_4\},$$
$$\omega_4 = \tilde{\Pi}^I_{[0,7;0,8]} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\},$$
$$\omega_5 = \tilde{\Pi}^I_{[0,5;0,6]} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\},$$
$$\omega_6 = \tilde{\Pi}^I_{[0,3;0,4]} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7\},$$
$$\omega_7 = \tilde{\Pi}^I_{[0;0,2]} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8\}.$$

6.3. Aralıklı Olabilirlik Ölçüsünden Aralıklı Olasılık Ölçüsüne Önerilen Dönüşüm Yöntemi

Olabilirlik ve olasılık dağılımları arasındaki dönüşümler üzerine yapılmış birçok çalışma bulunmaktadır [36-38, 41, 44, 70, 176, 178, 180]. Bu çalışmalarda bir olayın meydana gelmesinin fiziksel olabilirliği kesinlikle vardır. Yani yapılabilirliği 1'dir. Bu çalışmada ise fiziksel olabilirlik bazı belirsizlik dereceleri (dilsel etiketler, 1'den küçük yapılabilirlik değerleri) ile ifade edilmiştir. Böylece üst sınırı fiziksel olabilirlik değerinden alt sınırı ise bilgisel olabilirlik değerinden oluşan olabilirlik aralıkları elde edilir. Bu aralıklı olabilirlikler için bir dönüşüm yöntemi önerilmiştir.

Tanım 6.7.

$m^I(\omega_l)=[a_l,b_l]$ $l=1,2,...,n$ aralıkları eğer $\forall m(\omega_l)\in[a_l,b_l]$, $m(\omega_1)\in[a_1,b_1],...,m(\omega_n)\in[a_n,b_n]$ için Eş. 6.13'deki şartı sağlıyorsa aralıklı kütle atamalarıdır.

$$\sum_{l=1}^{n} m(\omega_l)=1 \tag{6.13}$$

Özellik 1 [185].

Aralıklı kütle atamaları $\forall l=1,2,...,n$ için aşağıdaki şartları sağlar.

a) $a_l \le m(\omega_l) \le b_l$, burada $0 \le a_l \le b_l \le 1$ (Sınır)

b) $\sum_{l=1}^{n} a_l \le 1$ ve $\sum_{l=1}^{n} b_l \ge 1$ (Geçerlilik)

Eğer $\sum_{l=1}^{n} a_l > 1$ ya da $\sum_{l=1}^{n} b_l < 1$ ise aralıklı kütle atamaları geçerli değildir.

Özellik 2 [186].

Aralıklı kütle atamaları $\forall l=1,2,...,n$ için Eş. 6.14 ve Eş. 6.15'i sağlıyorsa normaldir.

$$\sum_{i=1}^{n} b_i-(b_l-a_l)\ge 1 \tag{6.14}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i+(b_l-a_l)\le 1 \tag{6.15}$$

Aralıklı kütle atamaları Eş. 6.14 ve Eş. 6.15'i sağlamıyorsa normal değildir. Özellik 1'in a maddesinden ve Eş. 6.13'den Eş. 6.16 elde edilir.

$$1-\sum_{k\neq l} b_k \leq m(\omega_l) = 1-\sum_{k\neq l} m(\omega_k) \leq 1-\sum_{k\neq l} a_k,\ l=1,...,n \tag{6.16}$$

Eğer $a_l < 1-\sum_{k\neq l} b_k$ ve/veya $b_l > 1-\sum_{k\neq l} a_k$ ise $m^I(\omega_l)$ aralıklı kütle ataması ulaşmak için çok geniştir ve normal değildir. Aralıklı kütle atamalarını yenilemek ve normal kütle atamalarını elde etmek için Eş. 6.17 kullanılır.

$$\max\left[a_l, 1-\sum_{k\neq l} b_k\right] \leq m(\omega_l) \leq \min\left[b_l, 1-\sum_{k\neq l} a_k\right], \quad l=1,...,n. \tag{6.17}$$

Tanım 6.8.

$\tilde{\Pi}^I(x_i)$, L^I ([187]'da verilen aralıklı kafesin tanımı)'da en az bir olabilirlik aralığı [1,1] olan (olabilirlik normalizasyonu) aralıklı değerli olabilirlik ölçüsü ve α_l^I farklı aralıklı alfa kesmeleri olsun. $\tilde{\Pi}^I(x_i)$ 'nin içiçe geçmiş alt kümelerinin aralıklı kütle atamaları Eş. 6.18 ile bulunur. Burada $\alpha_{n+1}^L = 0$ ve $\alpha_{n+1}^U = 0$ 'dır.

$$m^I(\omega_l) = \left[\sum_{j=l}^{n} \max\left\{0, \frac{\alpha_j^L - \alpha_{j+1}^U}{j}\right\}, \min\left\{\sum_{j=l}^{n} \frac{\alpha_j^U - \alpha_{j+1}^L}{j}, 1\right\}\right] \tag{6.18}$$

Teorem 6.3.

Eş. 6.18 ile elde edilen aralıklı kütle atamaları Özellik 1'deki şartları sağladığından geçerli aralıklı kütle atamalarıdır.

İspat

Aralıklı değerli olabilirlik dağılımı aralıklı kafes (L^I)'te tanımlandığından her $l \in \{1,2,...,n\}$ için $\pi_1^L = 1 \geq \pi_2^L \geq ... \geq \pi_l^L \geq \pi_{l+1}^L \geq ... \geq \pi_n^L \geq \pi_{n+1}^L = 0$, $\pi_1^U = 1 \geq \pi_2^U \geq ... \geq \pi_l^U \geq \pi_{l+1}^U \geq ... \geq \pi_n^U \geq \pi_{n+1}^U = 0$ ve $\pi_l^U \geq \pi_l^L$ 'dir.

a) $a_l = \sum_{j=l}^{n} \max\left\{0, \frac{\alpha_j^L - \alpha_{j+1}^U}{j}\right\}$ her zaman 0'dan büyük ya da 0'a eşittir.

$b_l = \min\left\{\sum_{j=l}^{n} \frac{\alpha_j^U - \alpha_{j+1}^L}{j}, 1\right\}$ $\alpha_l^U \geq \alpha_{l+1}^L$ eşitsizliğinden dolayı her zaman 0'dan büyük ya da 0'a eşittir. $\sum_{j=l}^{n} \frac{\alpha_j^U - \alpha_{j+1}^L}{j} \geq 0$ eşitsizliği $\sum_{j=l}^{n} \frac{\alpha_j^U - \alpha_{j+1}^L}{j} \geq \sum_{j=l}^{n} \max\left\{0, \frac{\alpha_j^L - \alpha_{j+1}^U}{j}\right\}$ eşitsizliğini gerektirir. $l = n-1$ olduğu varsayıldığında $\frac{\pi_{n-1}^U - \pi_n^L}{n-1} + \frac{\pi_n^U - \pi_{n+1}^L}{n} \geq \frac{\pi_{n-1}^L - \pi_n^U}{n-1} + \frac{\pi_n^L - \pi_{n+1}^U}{n}$ olmalıdır. $\frac{n\pi_{n-1}^U - n\pi_n^L + (n-1)\pi_n^U}{n(n-1)} \geq \frac{n\pi_{n-1}^L - n\pi_n^U + (n-1)\pi_n^L}{n(n-1)}$ eşitsizliği aynı zamanda $n\pi_{n-1}^U + n\pi_n^U + (n-1)\pi_n^U \geq n\pi_{n-1}^L + n\pi_n^L + (n-1)\pi_n^L$ ile ifade edilir ve $\pi_n^U \geq \pi_n^L$ ve $\pi_{n-1}^U \geq \pi_{n-1}^L$ olduğundan her zaman tutar. Bu da $0 \leq a_l \leq m(\mathrm{x}_l) \leq b_l \leq 1$ eşitsizliğinin her zaman tuttuğunu kanıtlar.

b) $\sum_{l=1}^{n} a_l$ aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}&\left(\max\left\{0, \frac{\pi_1^L - \pi_2^U}{1}\right\} + \max\left\{0, \frac{\pi_2^L - \pi_3^U}{2}\right\} + \ldots + \max\left\{0, \frac{\pi_n^L - \pi_{n+1}^U}{n}\right\}\right) + \\ &+\left(\max\left\{0, \frac{\pi_2^L - \pi_3^U}{2}\right\} + \ldots + \max\left\{0, \frac{\pi_n^L - \pi_{n+1}^U}{n}\right\}\right) + \ldots + \left(\max\left\{0, \frac{\pi_n^L - \pi_{n+1}^U}{n}\right\}\right)\end{aligned} \tag{6.19}$$

Eş. 6.19 her zaman sıfırdan büyük ya da eşittir. $l = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$ için her $\frac{\pi_l^L - \pi_{l+1}^U}{l}$ değeri sıfırdan büyükse Eş. 6.19, Eş. 6.20'deki gibi yazılabilir.

$$\frac{\pi_1^L - \pi_2^U}{1} + 2\frac{\pi_2^L - \pi_3^U}{2} + \ldots + n\frac{\pi_n^L - \pi_{n+1}^U}{n} \tag{6.20}$$

Eş. 6.20, Eş. 6.21 ile ifade edilebilir.

$$\pi_1^L - \left\{\left(\pi_2^U - \pi_2^L\right) + \ldots + \left(\pi_n^U - \pi_n^L\right) + \pi_{n+1}^U\right\} = \pi_1^L - \sum_{l=2}^{n} (\pi_l^U - \pi_l^L) \tag{6.21}$$

$\pi_l^U \geq \pi_l^L$ olduğundan $\sum_{l=2}^{n}(\pi_l^U - \pi_l^L)$ her zaman sıfırdan büyük ya da sıfıra eşittir. Bu durumda $\pi_1^L - \sum_{l=2}^{n}(\pi_l^U - \pi_l^L) \leq \pi_1^L$ her zaman sağlanır. $\pi_1^L = 1$ olduğundan $\sum_{i=1}^{n} a_i \leq 1$ her zaman sağlanır.

$\sum_{l=1}^{n} b_l$ Eş. 6.22'deki gibi yazılabilir.

$$\min\left\{\left(\frac{\pi_1^U - \pi_2^L}{1} + \frac{\pi_2^U - \pi_3^L}{2} + \ldots + \frac{\pi_n^U - \pi_{n+1}^L}{n}\right), 1\right\} + \min\left\{\left(\frac{\pi_2^U - \pi_3^L}{2} + \ldots + \frac{\pi_n^U - \pi_{n+1}^L}{n}\right), 1\right\} + \\ + \ldots + \min\left\{\left(\frac{\pi_n^U - \pi_{n+1}^L}{n}\right), 1\right\} \tag{6.22}$$

Her b_l, $l = 1, 2, \ldots, n$ üst sınırları birden küçük ise Eş. 6.22, Eş. 6.23'deki gibi yazılabilir.

$$\frac{\pi_1^U - \pi_2^L}{1} + 2\frac{\pi_2^U - \pi_3^L}{2} + \ldots + n\frac{\pi_n^U - \pi_{n+1}^L}{n} \tag{6.23}$$

Eş. 6.23, Eş. 6.24 ile ifade edilebilir.

$$\pi_1^U + \left\{\left(\pi_2^U - \pi_2^L\right) + \ldots + \left(\pi_n^U - \pi_n^L\right) - \pi_{n+1}^L\right\} = \pi_1^U + \sum_{l=2}^{n}(\pi_l^U - \pi_l^L) \tag{6.24}$$

$\pi_l^U \geq \pi_l^L$ olduğundan $\sum_{l=2}^{n}(\pi_l^U - \pi_l^L)$ her zaman sıfırdan büyük ya da sıfıra eşittir. Bu durumda $\pi_1^U + \sum_{l=2}^{n}(\pi_l^U - \pi_l^L) \geq \pi_1^U$ sağlanır. $\pi_1^U = 1$ olduğundan $\sum_{i=1}^{n} b_i \geq 1$ her zaman sağlanır.

Örnek 6.1'de elde edilen aralıklı seviye kümeleri ve bu kümelere dâhil olan aralıklı olabilirlik dağılımının güç kümesinin alt kümeleri için Eş. 6.18 kullanılarak aralıklı kütle atamaları elde edilir.

$$m^I(\omega_1)=\left[\sum_{j=1}^{7}\max\left\{0,\frac{\alpha_j^L-\alpha_{j+1}^U}{j}\right\},\min\left\{\sum_{j=1}^{7}\frac{\alpha_j^U-\alpha_{j+1}^L}{j},1\right\}\right]$$

$$=\left[\left(\max\left\{0,\frac{1-1}{1}\right\}+\max\left\{0,\frac{0,8-1}{2}\right\}+\max\left\{0,\frac{0,7-0,8}{3}\right\}+\max\left\{0,\frac{0,7-0,6}{4}\right\}+\right.\right.$$

$$\left.+\max\left\{0,\frac{0,5-0,4}{5}\right\}+\max\left\{0,\frac{0,3-0,2}{6}\right\}+\max\left\{0,\frac{0-0}{7}\right\}\right),$$

$$\left.\min\left\{\left(\frac{1-0,8}{1}+\frac{1-0,7}{2}+\frac{1-0,7}{3}+\frac{0,8-0,5}{4}+\frac{0,6-0,3}{5}+\frac{0,4-0}{6}+\frac{0,2-0}{7}\right),1\right\}\right]$$

$$=[0,062;0,681]$$

$$m^I(\omega_2)=[0,062;0,481]$$

$$m^I(\omega_3)=[0,062;0,331]$$

$$m^I(\omega_4)=[0,062;0,231]$$

$$m^I(\omega_5)=[0,037;0,156]$$

$$m^I(\omega_6)=[0,017;0,096]$$

$$m^I(\omega_7)=[0;0,029]$$

Elde edilen sonuçlar Özellik 1'in şartlarını sağladığından aralıklı kütle atamaları geçerlidir. Bu sonuçlar Eş. 6.14 ve Eş. 6.15'i de sağladığından aralıklı kütle atamaları normaldir. Fakat unutulmamalıdır ki Eş. 6.18 normal kütle atamalarını garanti etmez. Normal olmayan kütle atamalarını normalleştirmek için Eş. 6.17 kullanılır. Aralıklı kütle atamaları ikinci bölümde Eş. 2.56 ile verilen oranlı dönüşümün Eş. 6.25'deki aralıklı versiyonu ile aralıklı olasılık değerlerine dönüştürülür.

$$BetP^I(\mathrm{x}_i) = \sum_{G_l : x_i \subseteq G_l \in A_X} \frac{m^I(\omega_l)}{|\omega_l|(1-m^I(\varnothing))} = \left[\sum_{G_l : x_i \subseteq G_l \in A_X} \frac{m_L(\omega_l)}{|\omega_l|(1-m_L(\varnothing))}, \sum_{G_l : x_i \subseteq G_l \in A_X} \frac{m_U(\omega_l)}{|\omega_l|(1-m_U(\varnothing))} \right] \quad (6.25)$$

Örnek 1 için elde edilen aralıklı kütle atamaları Eş. 6.25 kullanılarak dönüştürüldüğünde aşağıdaki aralıklı olasılık değerleri elde edilir.

$$p^I(X_1) = \left[\left(\frac{0,062}{2} + \frac{0,062}{3} + \frac{0,062}{4} + \frac{0,062}{5} + \frac{0,037}{6} + \frac{0,017}{7} + \frac{0}{8} \right), \left(\frac{0,68}{2} + \frac{0,48}{3} + \frac{0,33}{4} + \frac{0,23}{5} + \frac{0,156}{6} + \frac{0,096}{7} + \frac{0,029}{8} \right) \right] = [0,089; 0,673]$$

$$p^I(X_2) = [0,089; 0,673]$$

$$p^I(X_3) = [0,058; 0,333]$$

$$p^I(X_4) = [0,037; 0,173]$$

$$p^I(X_5) = [0,021; 0,09]$$

$$p^I(X_6) = [0,009; 0,044]$$

$$p^I(X_7) = [0,003; 0,018]$$

$$p^I(X_8) = [0,00000000001; 0,004]$$

6.4. Kesin Olasılık Değerlerinin Bulunması

Karar verme problemlerinde karar alabilmek için aralıklı değerlerden ziyade kesin değerlere ihtiyaç duyulur. Olasılık aralıklarından kesin olasılık değerlerini elde etmek için doğrusal olmayan model aşağıdaki gibi kurulur.

Tüm $p^I(x_i)$ için Eş. 6.26'daki amaç fonksiyonu Eş. 6.27 ve Eş. 6.28'deki kısıtlar altında çözülerek olasılık değerleri bulunur.

$$\min \; - \sum_{i=1,2,...,n} p(x_i) \ln p(x_i) \tag{6.26}$$

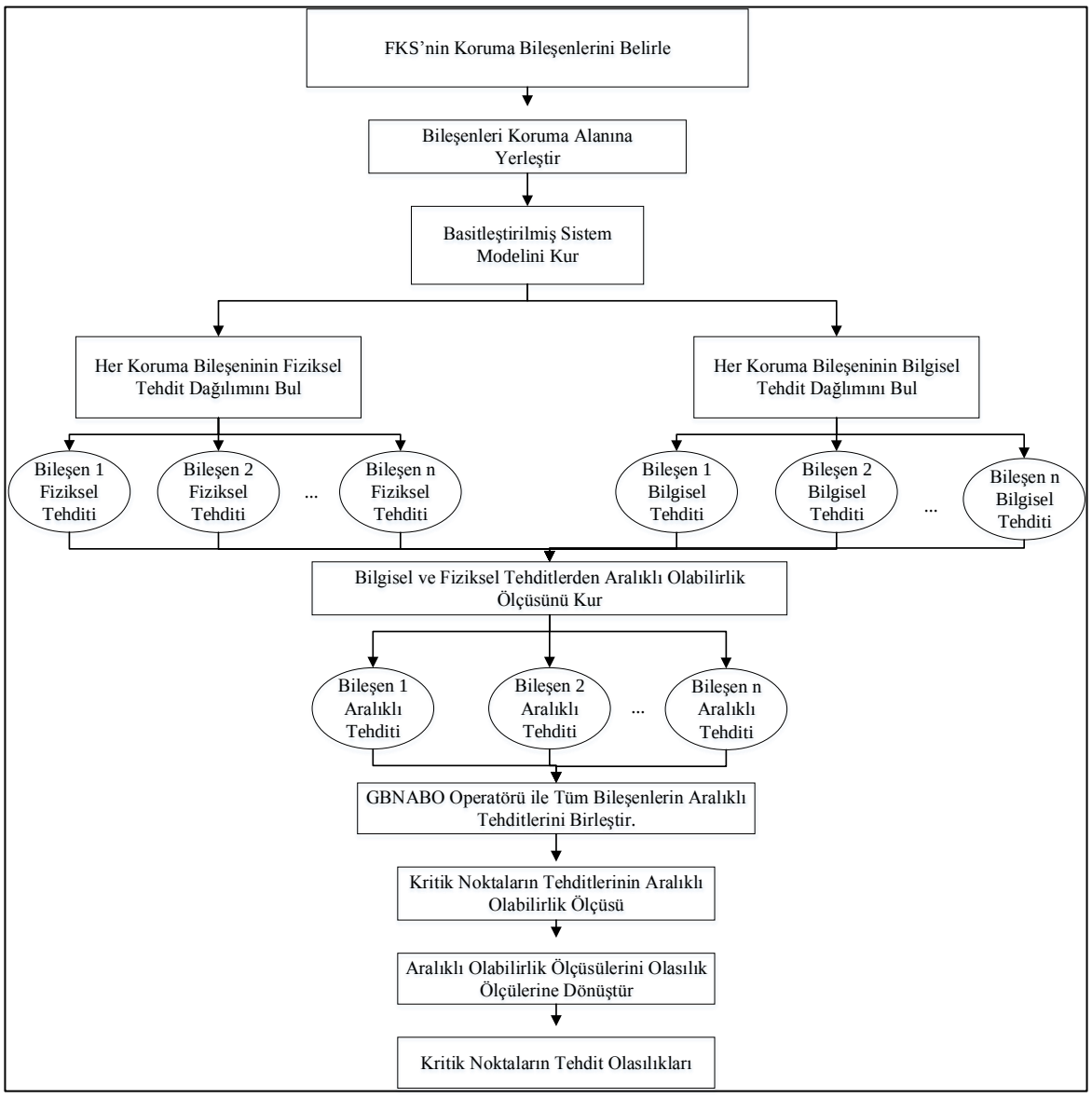
$$a_i \le p(x_i) \le b_i \;\; \forall i = 1,2,...,n \tag{6.27}$$

$$\sum_{i=1,2,...,n} p(x_i) = 1 \tag{6.28}$$

Eş. 6.26 - Eş. 6.28'deki model Örnek 1 için GAMS programı kullanılarak çözüldüğünde $p(X_1) = 0,673$, $p(X_2) = 0,199$, $p(X_3) = 0,058$, $p(X_4) = 0,037$, $p(X_5) = 0,021$, $p(X_6) = 0,009$, $p(X_7) = 0,003$ ve $p(X_8) = 0,00000000001$ olasılık değerleri bulunur.

7. SAYISAL ÖRNEK

Bu bölümde, Bölüm 5.2'de önerilen *GBNABO* operatörü ve Bölüm 6.3'de önerilen aralıklı olabilirlikten olasılığa dönüşüm yöntemi kullanılarak bir fiziksel koruma sistemi (FKS)'ndeki belirlenen kritik noktaların tehdit olasılıkları hesaplanmıştır. Önerilen yaklaşım şeması Şekil 7.1'de verilmiştir.



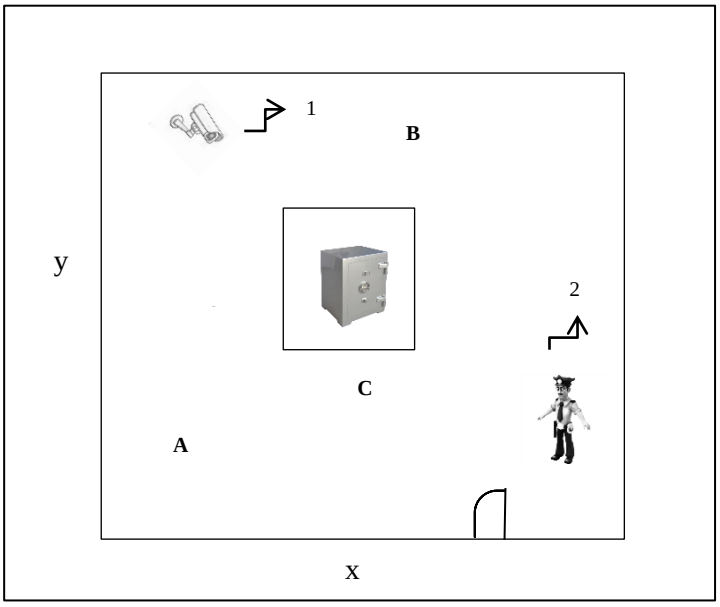
Şekil 7.1. FKS kritik noktaladaki tehditlerin belirlenmesi modeli

Bir FKS, varlık ya da tesislerin insan, prosedür ve gerekli ekipmanlar yardımıyla hırsızlık, sabotaj veya kötü niyetli saldırılara karşı korunmasını sağlamayı amaçlar [188]. Etkili bir FKS için hedefi korumaya yardımcı kaynakların hedefi korumaya yönelik beklentileri karşılayacak şekilde tasarlanıp kullanılması gerekir. Tesisin kritik noktalarındaki tehdit olasılıklarının bilinmesi o noktalarda gerekli ilave önlem alınıp alınmayacağı ya da koruma bileşenlerinin yerlerinin değiştirilip değiştirilmeyeceği kararının verilmesine yardımcı olacaktır.

FKS tasarlanırken ilk olarak koruma alanında kullanılacak FKS bileşenleri belirlenir. Bu çalışmada kamera ve güvenlik görevlisi FKS koruma bileşenleri olarak seçilmiştir. Tesis içerisindeki fiziksel koruma bileşenleri birbirleri ile etkileşim içerisindedirler ve sistemdeki herhangi bir noktadaki tehdit, o noktanın bu bileşenlere olan uzaklığının bir ölçüsü olarak tanımlanabilir. Örneğin sistemdeki bir nokta için kamera bileşeninin raporladığı tehdit o nokta kameraya ne kadar uzaksa o kadar fazla olacaktır. FKS tasarlanırken yararlanılan farklı tür belirsizlik kaynakları vardır [189, 190]. Bu çalışmada FKS koruma bileşenlerinin uzaklık ölçüsüne bağlı raporladıkları tehditler fiziksel olabilirlik olarak kabul edilmiştir.

Koruma alanlarına yapılan izinsiz giriş ya da saldırıların çoğu rassal değildir. Bu tür davetsiz girişler genellikle kasıtlı olarak yapılır ve böyle bir girişi tahmin etmedeki belirsizlik rassalıktan ziyade bilgiye dayalıdır. Sistemdeki kritik noktalardaki tehditlerin ne olabileceği ile ilgili uzman görüşünden yararlanılmıştır. Uzman görüşünden elde edilen tehditler bilgisel olabilirliği ifade eder ve böylece uzaklık ölçüsüne bağlı elde edilen tehditler ve uzman görüşüne bağlı elde edilen tehditler ile aralıklı olabilirlik ölçüsü kurulabilir.

Şekil 7.2'de gösterilen sistem modelinde tesisin büyüklüğü 100x100 birimdir. Kamera koruma bileşeni (40,60) noktasına, güvenlik görevlisi koruma bileşeni ise (90,20) noktasına konumlandırılmıştır. Buna göre kritik A (20,30), B (80,100) ve C (50,70) noktalarındaki tehdit olasılıkları hesaplanacaktır.



Şekil 7.2. Sistem modeli

A, B ve C kritik noktaları için her bir koruma bileşenine göre tehditler Eş. 7.1 ile hesaplanır.

$$T_j^i = \frac{d_i^j}{d_{\max}^j},\ i = 1,2,...,n,\ \ j = 1,2,...,m \tag{7.1}$$

Burada d_i^j i. kritik noktanın j. koruma bileşenine olan uzaklığı, $d_{\max}^j$ ise j. koruma bileşenine en uzak mesafede olan kritik noktanın uzaklığıdır. d_i^j büyüdükçe koruma bileşeninin saldırıyı algılama olasılığı düşer dolayısıyla j. koruma bileşenine göre i. kritik noktadaki tehditi gösteren T_j^i değeri büyür.

d_i^j mesafelerinin hesaplanmasında Öklid uzaklığı ölçüsünden yararlanılmıştır. $X(X_1, X_2)$ ve $Y(Y_1, Y_2)$ noktaları arasındaki uzaklık Eş. 7.2 ile hesaplanır.

$$d(X,Y) = \sqrt{\left(X_1 - Y_1\right)^2 + \left(X_2 - Y_2\right)^2} \tag{7.2}$$

Şekil 7.1'de gösterilen sistem modelinde sırasıyla kamera ve güvenlik görevlisi olmak üzere $j = 1,2$ tane koruma bileşeni ve sırasıyla A, B, C noktaları olmak üzere $i = 1,2,3$

tane kritik nokta vardır. Buna göre $X(40,60)$ noktasındaki kamera koruma bileşeni ile kritik noktalar arasındaki mesafe ve bu mesafeye bağlı tehditler aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$d_1^1 = \sqrt{(40-20)^2 + (60-30)^2} = 36 \tag{7.3}$$

$$d_2^1 = \sqrt{(40-80)^2 + (60-100)^2} = 56,5 \tag{7.4}$$

$$d_3^1 = \sqrt{(40-50)^2 + (60-70)^2} = 14,1 \tag{7.5}$$

Yukarıda hesaplanan kamera bileşenine kritik noktaların uzaklık ölçüleri kullanılarak tehditler hesaplanır.

$$T_1^1 = \frac{d_1^1}{d_{\max}^1} = 0,637 \tag{7.6}$$

$$T_1^2 = \frac{d_2^1}{d_{\max}^1} = 1 \tag{7.7}$$

$$T_1^3 = \frac{d_3^1}{d_{\max}^1} = 0,249 \tag{7.8}$$

$X(90,20)$ noktasındaki güvenlik görevlisi koruma bileşeni ile kritik noktalar arasındaki mesafe ve bu mesafeye bağlı tehditler aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$d_1^2 = \sqrt{(90-20)^2 + (20-30)^2} = 70,7 \tag{7.9}$$

$$d_2^2 = \sqrt{(90-80)^2 + (20-100)^2} = 80,6 \tag{7.10}$$

$$d_3^1 = \sqrt{(90-50)^2 + (20-70)^2} = 64 \tag{7.11}$$

Yukarıda hesaplanan güvenlik görevlisi koruma bileşenine kritik noktaların uzaklık ölçüleri kullanılarak tehditler hesaplanır.

$$T_2^1 = \frac{d_1^2}{d_{\max}^2} = 0,88 \tag{7.12}$$

$$T_2^2 = \frac{d_2^2}{d_{\max}^2} = 1 \tag{7.13}$$

$$T_2^3 = \frac{d_3^2}{d_{\max}^2} = 0,79 \tag{7.14}$$

Her bir koruma bileşeni için mesafe bağlı hesaplanan bu tehdit değerleri fiziksel olabilirlik değerlerini verir. Belirlenen kritik noktalara saldırının yapılabilirliği A kritik noktasına kamera bileşeni açısından 0,637'dir. Bilgisel olabilirliği gösteren gerçekte ne olabileceği ise mesafeye bağlı bu tehdit değerinden yani fiziksel olabilirlikten büyük olamaz. Fiziksel olabilirlik değerleri göz önünde bulundurularak uzman görüşü ile elde edilen bilgisel olabilirlikler ve bu değerlere bağlı kurulan aralıklı olabilirlik değerleri aşağıda verilmiştir.

$$T_1^A = [0,5; 0,637] \tag{7.15}$$

$$T_1^B = [1,1] \tag{7.16}$$

$$T_1^C = [0,1; 0,249] \tag{7.17}$$

$$T_2^A = [0,72; 0,88] \tag{7.18}$$

$$T_2^B = [1,1] \tag{7.19}$$

$$T_2^C = [0,7; 0,79] \tag{7.20}$$

Elde edilen aralıklı olabilirlik değerlerinin Bölüm 3.3'deki ABK tanımıyla örtüşmesinden ve Bölüm 3.15'de ifade edilen ABK ve SBK ilişkisinden yararlanarak aralıklı olabilirlik değerleri sezgisel bulanık sayı olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$T_1^A = \langle 0,5; 0,36 \rangle \tag{7.21}$$

$$T_1^B = \langle 1,0 \rangle \tag{7.22}$$

$$T_1^C = \langle 0,1; 0,75 \rangle \tag{7.23}$$

$$T_2^A = \langle 0,72; 0,12 \rangle \tag{7.24}$$

$$T_2^B = \langle 1,0 \rangle \tag{7.25}$$

$$T_2^C = \langle 0,7; 0,21 \rangle \tag{7.26}$$

Elde edilen bu sezgisel bulanık sayıların Bölüm 3.15'de ifade edildiği gibi sıfır nötr üyelik derecesine sahip GBK tanımıyla örtüşmesinden yararlanılarak sezgisel bulanık sayılar görüntü bulanık sayı olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$T_1^A = \langle 0,5; 0; 0,36 \rangle \tag{7.27}$$

$$T_1^B = \langle 1,0,0 \rangle \tag{7.28}$$

$$T_1^C = \langle 0,1; 0; 0,75 \rangle \tag{7.29}$$

$$T_2^A = \langle 0,72; 0; 0,12 \rangle \tag{7.30}$$

$$T_2^B = \langle 1,0,0 \rangle \tag{7.31}$$

$$T_2^C = \langle 0,7;0;0,21 \rangle \tag{7.32}$$

Her bir koruma bileşeni ve kritik nokta için elde edilen görüntü bulanık sayılar genel sistem tehditinin hesaplanması için Bölüm 5.2'de önerilen koruma bileşenleri arasındaki etkileşimi de dikkate alabilecek ve aynı zamanda koruma bileşenlerinin ağırlıklandırılmasına olanak sağlayacak *GBNABO* operatörü ile birleştirilir. Burada operator parametreleri $p = q = 1$ ve $w_1 = 0,6$, $w_2 = 0,4$'dür.

$$GBNABO^{1,1}(T_1^A, T_2^A) =$$

$$= \left(\left(1 - \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{2} (1 - \mu_i^1 \mu_j^1)^{\frac{w_i w_j}{1-w_i}} \right)^{\frac{1}{2}}, \right.$$

$$1 - \left(1 - \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{2} (1 - (1-\eta_i)^1 (1-\eta_j)^1)^{\frac{w_i w_j}{1-w_i}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left. 1 - \left(1 - \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{2} (1 - (1-\nu_i)^1 (1-\nu_j)^1)^{\frac{w_i w_j}{1-w_i}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$= ((1 - ((1-\mu_1^1\mu_2^1)^{\frac{w_1 w_2}{1-w_1}} (1-\mu_2^1\mu_1^1)^{\frac{w_2 w_1}{1-w_2}}))^{\frac{1}{2}},$$

$$1 - (1 - ((1-(1-\eta_1)^1(1-\eta_2)^1)^{\frac{w_1 w_2}{1-w_1}} (1-(1-\eta_2)^1(1-\eta_1)^1)^{\frac{w_2 w_1}{1-w_2}}))^{\frac{1}{2}},$$

$$1 - (1 - ((1-(1-\nu_1)^1(1-\nu_2)^1)^{\frac{w_1 w_2}{1-w_1}} (1-(1-\nu_2)^1(1-\nu_1)^1)^{\frac{w_2 w_1}{1-w_2}}))^{\frac{1}{2}}$$

$$= ((1 - ((1-0,5\times 0,72)^{\frac{0,6\times 0,4}{1-0,6}} (1-0,72\times 0,5)^{\frac{0,4\times 0,6}{1-0,4}}))^{\frac{1}{2}},$$

$$1 - (1 - ((1-(1-0)^1(1-0)^1)^{\frac{0,6\times 0,4}{1-0,6}} (1-(1-0)^1(1-0)^1)^{\frac{0,4\times 0,6}{1-0,4}}))^{\frac{1}{2}}$$

$$1 - (1 - ((1-(1-0,36)^1(1-0,12)^1)^{\frac{0,6\times 0,4}{1-0,6}} (1-(1-0,12)^1(1-0,36)^1)^{\frac{0,4\times 0,6}{1-0,4}}))^{\frac{1}{2}}$$

$$= \langle 0,6;0;0,34 \rangle \tag{7.33}$$

$$GBNABO^{1,1}(T_1^B, T_2^B) =$$

$$= \left(\left(1 - \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{2} (1 - \mu_i^1 \mu_j^1)^{\frac{w_i w_j}{1-w_i}} \right)^{\frac{1}{2}}, \right.$$

$$1 - \left(1 - \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{2} (1 - (1-\eta_i)^1 (1-\eta_j)^1)^{\frac{w_i w_j}{1-w_i}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left. 1 - \left(1 - \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{2} (1 - (1-\nu_i)^1 (1-\nu_j)^1)^{\frac{w_i w_j}{1-w_i}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$= ((1 - ((1-\mu_1^1 \mu_2^1)^{\frac{w_1 w_2}{1-w_1}} (1-\mu_2^1 \mu_1^1)^{\frac{w_2 w_1}{1-w_2}}))^{\frac{1}{2}},$$

$$1 - (1 - ((1-(1-\eta_1)^1 (1-\eta_2)^1)^{\frac{w_1 w_2}{1-w_1}} (1-(1-\eta_2)^1 (1-\eta_1)^1)^{\frac{w_2 w_1}{1-w_2}}))^{\frac{1}{2}},$$

$$1 - (1 - ((1-(1-\nu_1)^1 (1-\nu_2)^1)^{\frac{w_1 w_2}{1-w_1}} (1-(1-\nu_2)^1 (1-\nu_1)^1)^{\frac{w_2 w_1}{1-w_2}}))^{\frac{1}{2}}$$

$$= ((1 - ((1-1\times 1)^{\frac{0,6\times 0,4}{1-0,6}} (1-1\times 1)^{\frac{0,4\times 0,6}{1-0,4}}))^{\frac{1}{2}},$$

$$1 - (1 - ((1-(1-0)^1 (1-0)^1)^{\frac{0,6\times 0,4}{1-0,6}} (1-(1-0)^1 (1-0)^1)^{\frac{0,4\times 0,6}{1-0,4}}))^{\frac{1}{2}}$$

$$1 - (1 - ((1-(1-0)^1 (1-0)^1)^{\frac{0,6\times 0,4}{1-0,6}} (1-(1-0)^1 (1-0)^1)^{\frac{0,4\times 0,6}{1-0,4}}))^{\frac{1}{2}}$$

$$= \langle 1, 0, 0 \rangle \tag{7.34}$$

$$GBNABO^{1,1}(T_1^C, T_2^C) =$$

$$= \left(\left(1 - \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{2} (1 - \mu_i^1 \mu_j^1)^{\frac{w_i w_j}{1-w_i}} \right)^{\frac{1}{2}}, \right.$$

$$1 - \left(1 - \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{2} (1 - (1-\eta_i)^1 (1-\eta_j)^1)^{\frac{w_i w_j}{1-w_i}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left. 1 - \left(1 - \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{2} (1 - (1-\nu_i)^1 (1-\nu_j)^1)^{\frac{w_i w_j}{1-w_i}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$=((1-((1-\mu_1^1\mu_2^1)^{\frac{w_1w_2}{1-w_1}}(1-\mu_2^1\mu_1^1)^{\frac{w_2w_1}{1-w_2}}))^{\frac{1}{2}},$$

$$1-(1-((1-(1-\eta_1)^1(1-\eta_2)^1)^{\frac{w_1w_2}{1-w_1}}(1-(1-\eta_2)^1(1-\eta_1)^1)^{\frac{w_2w_1}{1-w_2}}))^{\frac{1}{2}},$$

$$1-(1-((1-(1-v_1)^1(1-v_2)^1)^{\frac{w_1w_2}{1-w_1}}(1-(1-v_2)^1(1-v_1)^1)^{\frac{w_2w_1}{1-w_2}}))^{\frac{1}{2}}$$

$$=((1-((1-0,1\times0,7)^{\frac{0,6\times0,4}{1-0,6}}(1-0,7\times0,1)^{\frac{0,4\times0,6}{1-0,4}}))^{\frac{1}{2}},$$

$$1-(1-((1-(1-0)^1(1-0)^1)^{\frac{0,6\times0,4}{1-0,6}}(1-(1-0)^1(1-0)^1)^{\frac{0,4\times0,6}{1-0,4}}))^{\frac{1}{2}}$$

$$1-(1-((1-(1-0,75)^1(1-0,21)^1)^{\frac{0,6\times0,4}{1-0,6}}(1-(1-0,21)^1(1-0,75)^1)^{\frac{0,4\times0,6}{1-0,4}}))^{\frac{1}{2}}$$

$$=\langle 0,27;0;0,56\rangle \tag{7.35}$$

A, B ve C kritik noktalarındaki tehditler görüntü bulanık sayı temelinde hesaplanmıştır. Karar verme problemlerinde karar vermenin kolay yapılabilmesi için aralıklı sayılardan ziyade kesin değerlere ihtiyaç vardır. Bölüm 6.3'de önerilen dönüşüm yöntemi ile aralıklı olabilirlikler olasılık değerlerine dönüştürülür.

$$T_A=[0,6;0,66] \tag{7.36}$$

$$T_B=[1,1] \tag{7.37}$$

$$T_C=[0,27;0,44] \tag{7.38}$$

Çizelge 7.1. Olabilirliklerin alt ve üst sınırları

	A	B	C
$\tilde{\Pi}_U(x_i)$	0,66	1	0,44
$\tilde{\Pi}_L(x_i)$	0,6	1	0,27

Tüm alt ve üst sınırlardan oluşan küme $\Phi=\{1;0,66;0,6;0,44;0,27\}$ kümesidir. Alt ve üst kesin kümeler Çizelge 7.2'de verilmiştir.

Çizelge 7.2. Alt ve üst kesin kümeler

α	$\tilde{\Pi}_L(\alpha_i)$	$\tilde{\Pi}_U(\alpha_j)$
1	{B}	{B}
0,66	{B}	{A, B}
0,6	{A, B}	{A, B}
0,44	{A, B}	{A, B, C}
0,27	{A, B, C}	{A, B, C}

Aşağıdaki kesin kümeler ve aralıklı alfa kesmeleri Eş. 6.7 ile hesaplanmıştır.

$$\tilde{\Pi}^I_{[1,1]} = \{B\} \cap \{B\} = \{B\}$$

$$\tilde{\Pi}^I_{[0,66;1]} = \{B\} \cap \{B\} = \{B\}$$

$$\tilde{\Pi}^I_{[0,6;1]} = \{A,B\} \cap \{B\} = \{B\}$$

$$\tilde{\Pi}^I_{[0,44;1]} = \{A,B\} \cap \{B\} = \{B\}$$

$$\tilde{\Pi}^I_{[0,27;1]} = \{A,B,C\} \cap \{B\} = \{B\}$$

$$\tilde{\Pi}^I_{[0,66;0,66]} = \{B\} \cap \{A,B\} = \{B\}$$

$$\tilde{\Pi}^I_{[0,6;0,66]} = \{A,B\} \cap \{A,B\} = \{A,B\}$$

$$\tilde{\Pi}^I_{[0,44;0,66]} = \{A,B\} \cap \{A,B\} = \{A,B\}$$

$$\tilde{\Pi}^I_{[0,27;0,66]} = \{A,B,C\} \cap \{A,B\} = \{A,B\}$$

$$\tilde{\Pi}^I_{[0,6;0,6]} = \{A,B\} \cap \{A,B\} = \{A,B\}$$

$$\tilde{\Pi}^{I}_{[0,44;0,6]} = \{A,B\} \cap \{A,B\} = \{A,B\}$$

$$\tilde{\Pi}^{I}_{[0,27;0,6]} = \{A,B,C\} \cap \{A,B\} = \{A,B\}$$

$$\tilde{\Pi}^{I}_{[0,44;0,44]} = \{A,B\} \cap \{A,B,C\} = \{A,B\}$$

$$\tilde{\Pi}^{I}_{[0,27;0,44]} = \{A,B,C\} \cap \{A,B,C\} = \{A,B,C\}$$

$$\tilde{\Pi}^{I}_{[0,27;0,27]} = \{A,B,C\} \cap \{A,B,C\} = \{A,B,C\}$$

Yukarıdaki sonuçlarda görüldüğü üzere aynı kesin kümeler farklı alfa kesmelerinden elde edilmiştir. Bu durumda Eş. 6.10'dan faydalanılır.

$$\alpha^{I}_{1} = \{\text{ekü}(1;0,66;0,6;0,44;0,27), \sup(1;0,66)\} = (1,1) \tag{7.39}$$

$$\alpha^{I}_{2} = \{\text{ekü}(0,6;0,44;0,27), \sup(0,66;0,6;0,44)\} = (0,6;0,66) \tag{7.40}$$

$$\alpha^{I}_{3} = \{\text{ekü}(0,27), \sup(0,27;0,44)\} = (0,27;0,44) \tag{7.41}$$

Olabilirlik dağılımının güç kümesinin elemanları aşağıda verilmiştir.

$$\omega_1 = \tilde{\Pi}^{I}_{[1,1]} = \{B\}$$

$$\omega_2 = \tilde{\Pi}^{I}_{[0,6;0,66]} = \{A,B\}$$

$$\omega_3 = \tilde{\Pi}^{I}_{[0,27;0,44]} = \{A,B,C\}$$

$$m^I(\omega_1)=\left[\sum_{j=1}^{3}\max\left\{0,\frac{\alpha_j^L-\alpha_{j+1}^U}{j}\right\},\min\left\{\sum_{j=1}^{3}\frac{\alpha_j^U-\alpha_{j+1}^L}{j},1\right\}\right]$$
$$=\left[\left(\max\left\{0,\frac{1-0,66}{1}\right\}+\max\left\{0,\frac{0,6-0,44}{2}\right\}+\max\left\{0,\frac{0,27-0}{3}\right\}\right),\right.$$
$$\left.\min\left\{\left(\frac{1-0,6}{1}+\frac{0,66-0,27}{2}+\frac{0,44-0}{3}\right),1\right\}\right] \quad (7.42)$$
$$=[0,51;0,74]$$

$$m^I(\omega_2)=\left[\sum_{j=1}^{3}\max\left\{0,\frac{\alpha_j^L-\alpha_{j+1}^U}{j}\right\},\min\left\{\sum_{j=1}^{3}\frac{\alpha_j^U-\alpha_{j+1}^L}{j},1\right\}\right]$$
$$=\left[\left(\max\left\{0,\frac{0,6-0,44}{2}\right\}+\max\left\{0,\frac{0,27-0}{3}\right\}\right),\min\left\{\left(\frac{0,66-0,27}{2}+\frac{0,44-0}{3}\right),1\right\}\right] \quad (7.43)$$
$$=[0,17;0,34]$$

$$m^I(\omega_3)=\left[\sum_{j=1}^{3}\max\left\{0,\frac{\alpha_j^L-\alpha_{j+1}^U}{j}\right\},\min\left\{\sum_{j=1}^{3}\frac{\alpha_j^U-\alpha_{j+1}^L}{j},1\right\}\right]$$
$$=\left[\left(\max\left\{0,\frac{0,27-0}{3}\right\}\right),\min\left\{\left(\frac{0,44-0}{3}\right),1\right\}\right] \quad (7.44)$$
$$=[0,09;0,15]$$

Elde edilen sonuçlar Bölüm 6'daki Özellik 1'in ve Özellik 2'nin şartlarını sağladığından aralıklı kütle atamaları geçerli ve normaldir. Aralıklı kütle atamaları Bölüm 6.3'de verilen aralıklı oranlı dönüşüm ile aralıklı olasılık değerlerine dönüştürülür.

$$p^I(B)=\left[\left(0,51+\frac{0,17}{2}+\frac{0,09}{3}\right),\left(0,74+\frac{0,34}{2}+\frac{0,15}{3}\right)\right] \quad (7.45)$$
$$=[0,625;0,96]$$

$$p^I(A)=\left[\left(\frac{0,17}{2}+\frac{0,09}{3}\right),\left(\frac{0,34}{2}+\frac{0,15}{3}\right)\right] \quad (7.46)$$
$$=[0,115;0,22]$$

$$p^I(C) = \left[\left(\frac{0,09}{3}\right), \left(\frac{0,15}{3}\right)\right] \\ = [0,03; 0,05] \tag{7.47}$$

Karar verme problemlerinde karar alabilmek için aralıklı değerlerden ziyade kesin değerlere ihtiyaç duyulur. Olasılık aralıklarından kesin olasılık değerlerini elde etmek için Bölüm 6.4'de önerilen doğrusal olmayan model kullanılır.

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

VB'de önemli noktalardan bir tanesi yetersizlik noktalarının farklılığı bakımından çeşitlilik gösteren verilerin birleştirilmesidir. Bir durum hakkında bilgi ortaya koyan kaynakların (uzmanların) ürettikleri bilgiler birbirinden çok farklı olabilir. Bir kaynak A diyorken diğer kaynak B sonucuna varabilir. Yani kaynak bilgileri çelişebilir ve bu kaynakların güvenilirlikleri farklı olabilir. Birleştirilen kaynaklardan bir tanesi uzman bilgisi olduğunda ise öznel belirsizlik söz konusudur. Bilgi içeriğinin kapsamına göre farklı birçok belirsizlik yaklaşımı ile karşılaşmak mümkündür. Bu yaklaşımların her biri ile bilgi ortaya koyan bir uzmanın (kaynağın) görüşü ifade edilebilir. Farklı bulanık küme tipleri arasındaki bağlantılar kullanılarak farklı bulanık küme türleri birbirlerinin denk gösterimi olarak ifade edilebilir. Böylece farklı tür bilgi kaynakları aynı birleştirme operatörü altında birleştirilebilirler. Bu tez çalışmasında ilk olarak görüntü bulanık kümeler için birleştirilen elemanlar arasındaki etkileşimi de dikkate alan Bonferroni ortalamasına bağlı bazı birleştirme operatörleri önerilmiştir.

Literatürde olabilirlik ve olasılık bilgileri arasındaki dönüşüm yöntemlerine sıklıkla yer verilmiştir. Bu yöntemlerin temel olarak dayandırıldığı prensiplerden bir tanesi Zadeh'in tutarlılık prensibidir. Bu prensibe göre olasılık ve olabilirlik dağılımlarının maksimum tutarlılığı olabilirlik dağılımındaki tüm elemanların olabilirliğinin 1 olması ile sağlanır. Çünkü Zadeh bu prensipte olabilirliği 'ne yapılabilir' anlamına gelen fiziksel olabilirlik olarak yorumlamıştır. Oysaki bu tutarlılık prensibi literatürde yer alan dönüşüm yöntemlerinde 'ne olabileceği' anlamına gelen bilgisel olabilirlik hakkında dönüşüm yaparken temel alınmıştır. Bu durumda maksimum tutarlılığa ulaşabilmek için bilgisel olabilirlik değerlerinin hepsinin 1 olması yani olabilirlik dağılımının tamamıyla belirsiz olması gerekir. Tamamıyla belirsiz bir bilginin olasılık değerleri ile birleştirilmesi mevcut belirsizliği azaltmayıp artmasına ve mantık dışı sonuçlar elde edilmesine neden olacaktır. Bu tez çalışmasında ikinci olarak fiziksel olabilirlik ve bilgisel olabilirlik değerlerinin sırasıyla üst ve alt sınırı verdiği aralıklı olabilirlik ölçüsü tanımlanmış ve aralıklı olabilirlik ölçüsünden olasılık ölçüsüne dönüşüm yöntemi önerilmiştir. İlk olarak aralıklı olabilirliklerin aralıklı α kesmelerinin birleşimi ile gösterilebileceği ispatlanmıştır. α kesmesiyle belirlenen alt ve üst kesin kümelerden seviye kümeleri belirlenmiştir. Daha sonra bu seviye kümelerinin aralıklı olabilirlik değerlerinden aralıklı kütle atama değeri öneren yeni bir yöntem geliştirilmiştir. Kütle atama değerleri belirlenen iç içe geçmiş

seviye kümesi elemanlarından oranlı dönüşüm yardımıyla tekil elemanların aralıklı olasılık değerleri bulunmuştur. Aralıklı olasılık değerleri ile işlem yapmak ve dolayısıyla karar vermek zor olacağından aralıklı olasılıklar kesin olasılıklara belirsizliği minimize edecek amaç fonksiyonuna sahip doğrusal olmayan bir model ile dönüştürülmüştür. Ortaya koyulan yeni belirsizlik yaklaşımı olan aralıklı olabilirlik kavramının uygulanabilirliğini göstermek için gerçek hayat problemine uygulanmıştır.

Birleştirme operatörleri adına gelecek çalışmalarda görüntü bulanık kümeler için geliştirilen Bonferroni ortalamasına bağlı birleştirme operatörleri farklı bulanık kümelere tipleri için genişletilebilir. Birleştirilen elemanlar arasındaki ikili ilişkiler dışında çoklu ilişkiler de dikkate alınarak birleştirmeler yapılabilir.

Önerilen yeni belirsizlik yaklaşımı olan aralıklı olabilirlik ölçüsü yeni birleştirme operatörleri geliştirilmesine açık bir alandır. Literatürdeki birleştirme operatörleri aralıklı olabilirlikler için genişletilerek uygulanabilirlikleri tartışılabilir.

Dönüşüm yöntemleri adına gelecek çalışmalarda yeni belirsizlik yaklaşımı olan aralıklı olabilirlik açık bir alandır. Bu yeni belirsizlik türünün diğer belirsizlik türleri ile olan ilişkisini inceleyen çalışmalar yapılabilir. Aralıklı olabilirlikler için yeni dönüşüm yöntemleri önerilebilir veya mevcut dönüşüm yöntemleri aralıklı olabilirlik değerleri için genişletilebilir.

KAYNAKLAR

1. He, Y. (2013). *Uncertainty quantification and data fusion based on dempster-shafer theory*, Florida State University, 5-68.

2. Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control,* 8 (3), 338-353.

3. Atanassov, K. T. (1986). Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy sets and Systems,* 20 (1), 87-96.

4. Cuong, B. C. (2015). Picture fuzzy sets. *Journal of Computer Science and Cybernetics,* 30, 409-420.

5. Gau, W. and Buehrer, D. J. (1993). Vague sets. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics,* 23 (2), 610-614.

6. Goguen, J. A. (1967). L-fuzzy sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 18 (1), 145-174.

7. Pawlak, D. (1982). Rough sets. *International Journal of Computer & Information Sciences,* 11 (5), 341-356.

8. Dempster, A. P. (1967). Upper and lower probability inferences based on a sample from a finite univariate population. *Biometrika,* 54 (3), 515-28.

9. Smets, P. (1998). The transferable belief model for quantified belief representation. In (Eds.), *Quantified representation of uncertainty and imprecision.* Springer, 267-301.

10. Smets, P. (2000). *Data fusion in the transferable belief model*. Belief functions, Paris, France, 21-33.

11. Moral, S. (1986). Construction of a probability distribution from a fuzzy information. In Jones, A., et al. (Eds.), *Fuzzy sets theory and applications.* Dordrecht. Springer Netherlands, 51-60.

12. Dubois, D. and Prade, H. (1992). On the combination of evidence in various mathematical frameworks. In Flamm, J. and Luisi, T. (Eds.), *Reliability data collection and analysis.* Dordrecht. Springer Netherlands, 213-241.

13. Fixsen, D. and Mahler, R. P. S. (1997). The modified dempster-shafer approach to classification. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 27, 96-104.

14. Florea, M. C., Jousselme, A. L. and Bossé, É. (2007). Fusion of imperfect information in the unified framework of random sets theory: Application to target identification.*Application to target identification*, Canada, 5-142.

15. He, Y., He, Z., Jin, C. and Chen, H. (2015). Intuitionistic fuzzy power geometric bonferroni means and their application to multiple attribute group decision making. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems,* 23 (02), 285-315.

16. Jana, C., Senapati, T., Pal, M. and Yager, R. R. (2019). Picture fuzzy dombi aggregation operators: Application to madm process. *Applied Soft Computing,* 74, 99-109.

17. Liu, P., Liu, J. and Chen, S.-M. (2018). Some intuitionistic fuzzy dombi bonferroni mean operators and their application to multi-attribute group decision making. *Journal of the Operational Research Society,* 69 (1), 1-24.

18. Xu, Z. and Yager, R. R. (2006). Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets. *International journal of general systems,* 35 (4), 417-433.

19. Xu, Z. and Yager, R. R. (2011). Intuitionistic fuzzy bonferroni means. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics),* 41 (2), 568-578.

20. Zhou, J., Baležentis, T. and Streimikiene, D. (2019). Normalized weighted bonferroni harmonic mean-based intuitionistic fuzzy operators and their application to the sustainable selection of search and rescue robots. *Symmetry,* 11 (2), 218.

21. Zhang, Z. (2017). Interval-valued intuitionistic fuzzy frank aggregation operators and their applications to multiple attribute group decision making. *Neural Computing and Applications,* 28 (6), 1471-1501.

22. Zhang, L. (2018). *Intuitionistic fuzzy averaging schweizer-sklar operators based on interval-valued intuitionistic fuzzy numbers and its applications*. Proceedings of the 30th Chinese Control and Decision Conference, CCDC 2018, Chinese, 2194-2197.

23. Wang, W. and Liu, X. (2012). Intuitionistic fuzzy information aggregation using einstein operations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems,* 20 (5), 923-938.

24. Wang, C., Zhou, X., Tu, H. and Tao, S. (2017). Some geometric aggregation operators based on picture fuzzy sets and their application in multiple attribute decision making. *Italian Journal of Pure and Appied Mathematics,* 37, 477-492.

25. Tian, C., Peng, J. J., Zhang, S., Zhang, W. Y. and Wang, J. Q. (2019). Weighted picture fuzzy aggregation operators and their applications to multi-criteria decision-making problems. *Computers and Industrial Engineering,* 137, 1-12.

26. Tan, C., Yi, W. and Chen, X. (2015). Generalized intuitionistic fuzzy geometric aggregation operators and their application to multi-criteria decision making. *Journal of the Operational Research Society,* 66 (11), 1919-1938.

27. Tang, X., Fu, C., Xu, D.-L. and Yang, S. (2017). Analysis of fuzzy hamacher aggregation functions for uncertain multiple attribute decision making. *Information Sciences,* 387, 19-33.

28. Thong, P. H. and Fujita, H. (2016, 24-29 July). *Interpolative picture fuzzy rules: A novel forecast method for weather nowcasting.* Paper presented at the 2016 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE), Vancouver, BC, Canada,1-19.

29. Liu, P. (2014). Some hamacher aggregation operators based on the interval-valued intuitionistic fuzzy numbers and their application to group decision making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems,* 22 (1), 83-97.

30. Jiang, W., Wei, B., Liu, X., Li, X. and Zheng, H. (2018). Intuitionistic fuzzy power aggregation operator based on entropy and its application in decision making. *International Journal of Intelligent Systems,* 33 (1), 49-67.

31. Garg, H. (2017). Some picture fuzzy aggregation operators and their applications to multicriteria decision-making. *Arabian Journal for Science and Engineering,* 42 (12), 5275-5290.

32. Garg, H. and Arora, R. (2018). Bonferroni mean aggregation operators under intuitionistic fuzzy soft set environment and their applications to decision-making. *Journal of the Operational Research Society,* 69 (11), 1711-1724.

33. Ateş, F. and Akay, D. (2020). Some picture fuzzy bonferroni mean operators with their application to multicriteria decision making. *International Journal of Intelligent Systems,* 35, 1-25.

34. Zadeh, L. A. (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy sets and systems,* 1 (1), 3-28.

35. Dubois, D. (2006). Possibility theory and statistical reasoning. *Computational Statistics & Data Analysis,* 51 (1), 47-69.

36. Dubois, D., Prade, H. and Sandri, S. (1993). On possibility/probability transformations. In Lowen, R. and Roubens, M. (Eds.), *Fuzzy logic*. Dordrecht. Springer, 103-112.

37. Dubois, D. and Prade, H. (1982). On several representations of an uncertain body of evidence. *Fuzzy Information and Decision Processes,* 167-181.

38. Dubois, D., Foulloy, L., Mauris, G. and Prade, H. (2004). Probability-possibility transformations, triangular fuzzy sets, and probabilistic inequalities. *Reliable Computing,* 10 (4), 273-297.

39. Flage, R., Baraldi, P., Zio, E. and Aven, T. (2013). Probability and possibility-based representations of uncertainty in fault tree analysis. *Risk Analysis,* 33 (1), 121-33.

40. Gupta, C. (1993). A note on the transformation of possibilistic information into probabilistic information for investment decisions. *Fuzzy Sets and Systems,* 56 (2), 175-182.

41. Lasserre, V., Mauris, G. and Foulloy, L. (1997). *A simple probability-possibility transformation for measurement error representation: A truncated triangular transformation*. Proc. of IFSA, 476-481.

42. Masson, M. H. and Denœux, T. (2006). Inferring a possibility distribution from empirical data. *Fuzzy Sets and Systems,* 157 (3), 319-340.

43. Pota, M., Esposito, M. and De Pietro, G. (2013). Transforming probability distributions into membership functions of fuzzy classes: A hypothesis test approach. *Fuzzy Sets and Systems,* 233, 52-73.

44. Mouchaweh, M. S., Bouguelid, M. S., Billaudel, P. and Riera, B. (2006). *Variable probability-possibility transformation*. 25th European Annual Conference on Human Decision-Making and Manual Control (EAM'06), September, 27-29.

45. Parsons, S. (2001). *Qualitative methods for reasoning under uncertainty*. London: The MIT Press, 112-143.

46. Smets, P. (1997). Imperfect information: Imprecision and uncertainty. In (Eds.), *Uncertainty management in information systems.* Springer, 225-254.

47. Motro, A. and Smets, P. (1997). *Uncertainty management in information systems: From needs to solutions*. New York: Springer Science+Business Media, 210-233.

48. Smithson, M. (1988). *Ignorance and uncertainty: Emerging paradigms*. New York: Springer Verlang, 89-176.

49. Khaleghi, B., Khamis, A., Karray, F. O. and Razavi, S. N. (2013). Multisensor data fusion: A review of the state-of-the-art. *Information Fusion,* 14 (1), 28-44.

50. Bammer, G. and Smithson, M. (2008). *Uncertainty and risk: Multidisciplinary perspectives*. London: Earthscan, 35-98.

51. Wickramarathne, T. L. (2012). *An analytical framework for soft and hard data fusion: A dempster-shafer belief theoretic approach*, University of Miami, 1-236.

52. Dempster, A. P. (2008). The dempster–shafer calculus for statisticians. *International Journal of Approximate Reasoning,* 48 (2), 365-377.

53. Dempster, A. P. (1967). Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. In Yager, R. R. and Liu, L. (Eds.), *Classic works of the dempster-shafer theory of belief functions.* Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg, 57-72.

54. Shafer, G. (1976). *A mathematical theory of evidence*. US: Princeton University Press, 23-58.

55. Frikha, A. and Moalla, H. (2015). Analytic hierarchy process for multi-sensor data fusion based on belief function theory. *European Journal of Operational Research,* 241 (1), 133-147.

56. Seims, S. J. (2009). A study of dempster-shafer's theory of evidence in comparison to classical probability combination. *Master's Theses and Project Reports,* 89.

57. Yager, R. R. (2015). Combining various types of belief structures. *Information Sciences,* 303, 83-100.

58. Yager, R. R. and Alajlan, N. (2015). Dempster-shafer belief structures for decision making under uncertainty. *Knowledge-Based Systems,* 80, 58-66.

59. Klir, G. J. and Yuan, B. (1995). *Fuzzy sets and fuzzy logic theory and applications*. Prentice Hall P T R, 34-65.

60. Dubois, D. and Prade, H. (2012). *Possibility theory: An approach to computerized processing of uncertainty*. Springer Science & Business Media, 12-32.

61. Dubois, D., Nguyen, H. T. and Prade, H. (2000). Possibility theory, probability and fuzzy sets misunderstandings, bridges and gaps. In (Eds.), *Fundamentals of fuzzy sets.* Springer, 343-438.

62. Zadeh, L. A. (1975). Calculus of fuzzy restrictions. In (Eds.), *Fuzzy sets and their applications to cognitive and decision processes.* Academic Press, 1-39.

63. Klir, G. J. (1999). On fuzzy-set interpretation of possibility theory. *Fuzzy Sets and Systems,* 108 (3), 263-273.

64. Smets, P. (1990). *Constructing the pignistic probability function in a context of uncertainty.* Paper presented at the Proceedings of the Fifth Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence, Cambridge, MA, USA, 7-25.

65. Smets, P. (2002). Decision making in a context where uncertainty is represented by belief functions. In (Eds.), *Belief functions in business decisions.* Springer, 17-61.

66. Oussalah, M. (2000). On the probability/possibility transformations:A comparative analysis. *International Journal of General Systems,* 29 (5), 671-718.

67. Chanas, S. and Nowakowski, M. (1988). Single value simulation of fuzzy variable. *Fuzzy Sets and Systems,* 25 (1), 43-57.

68. Klir, G. J. (1990). A principle of uncertainty and information invariance. *International Journal of General Systems,* 17 (2-3), 249-275.

69. Dubois, D. and Prade, H. (1986). Fuzzy sets and statistical data. *European Journal of Operational Research,* 25 (3), 345-356.

70. Civanlar, M. R. and Trussell, H. J. (1986). Constructing membership functions using statistical data. *Fuzzy Sets and Systems,* 18 (1), 1-13.

71. Klir, G. J. (2006). *Uncertainty and information: Foundations of generalized information theory*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc, 23-79.

72. Smets, P. (1990). The combination of evidence in the transferable belief model. *Ieee Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence,* 12 (5), 447-458.

73. Lefèvre, E. and Elouedi, Z. (2013). How to preserve the conflict as an alarm in the combination of belief functions? *Decision Support Systems,* 56, 326-333.

74. Zadeh, L. A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—i. *Information sciences,* 8 (3), 199-249.

75. Ross, T. J. (2004). *Fuzzy logic with engineering applications*. Wiley Online Library, 22-38.

76. Gorzałczany, M. B. (1987). A method of inference in approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 21 (1), 1-17.

77. Deschrijver, G. (2007). Arithmetic operators in interval-valued fuzzy set theory. *Information Sciences*, 177 (14), 2906-2924.

78. Deschrijver, G. (2009). Generalized arithmetic operators and their relationship to t-norms in interval-valued fuzzy set theory. *Fuzzy Sets and Systems*, 160, 3080-3102.

79. Mendel, J. M. and John, R. I. B. (2002). Type-2 fuzzy sets made simple. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 10 (2), 117-127.

80. Mendel, J. M. (2007). Type-2 fuzzy sets and systems: An overview. *Computational Intelligence Magazine*, 2 (1), 20–29.

81. Dubois, D. and Prade, H. (2005). *Interval-valued fuzzy sets, possibility theory and imprecise probability*. EUSFLAT Conf., 314-319.

82. Gehrke, M., Walker, C. and Walker, E. (1996). Some comments on interval valued fuzzy sets! *Structure*, 1, 2.

83. Walker, C. L. and Walker, E. A. (2005). The algebra of fuzzy truth values. *Fuzzy Sets and Systems*, 149 (2), 309-347.

84. Mendel, J. M., John, R. I. and Liu, F. (2006). Interval type-2 fuzzy logic systems made simple. *Transactions on Fuzzy Systems.*, 14 (6), 808–821.

85. Wen-Xiu, Z., Teng, L. I., Ji-Feng, M. A. and Ai-Jie, L. I. (1990). Set-valued measure and fuzzy set-valued measure. *Fuzzy Sets and Systems*, 36 (1), 181-188.

86. Torra, V. (2010). Hesitant fuzzy sets. *International Journal of Intelligent Systems*, 529-539.

87. Yager, R. R. (2013). *Pythagorean fuzzy subsets*. 2013 joint IFSA world congress and NAFIPS annual meeting (IFSA/NAFIPS), 57-61.

88. Mandal, P. and Ranadive, A. (2019). Hesitant bipolar-valued fuzzy sets and bipolar-valued hesitant fuzzy sets and their applications in multi-attribute group decision making. *Granular Computing*, 4 (3), 559-583.

89. Ma, X., Zhan, J., Khan, M., Zeeshan, M., Anis, S. and Awan, A. S. (2019). Complex fuzzy sets with applications in signals. *Computational and Applied Mathematics*, 38 (4), 1-34.

90. Said, B., Bakali, A., Talea, M., Smarandache, F., Uluçay, V., Şahin, M., Dey, A., Dhar, M., Tan, R.-P., Bahnasse, A. and Pramanik, S. (2018). Neutrosophic sets: An overview. In (Eds.), 389-419.

91. Zhang, Q., Xie, Q. and Wang, G. (2016). A survey on rough set theory and its applications. *CAAI Transactions on Intelligence Technology*, 1 (4), 323-333.

92. Jian, L., Liu, S. and Lin, Y. (2010). *Hybrid rough sets and applications in uncertain decision-making*. CRC Press, 7-17.

93. Mandic, D. P., Obradovic, D., Kuh, A., Adali, T., Trutschel, U., Golz, M., De Wilde, P., Barria, J., Constantinides, A. and Chambers, J. (2005). *Data fusion for modern engineering applications: An overview.* International Conference on Artificial Neural Networks, Warsaw, Poland, 715-721.

94. Hall, D. L. and McMullen, S. A. H. (2004). *Mathematical techniques in multisensor data fusion (artech house information warfare library)*. Artech House, Inc, 23-32.

95. McKendall, R. and Mintz, M. (1992). Data fusion techniques using robust statistics. In Abidi, M. A. and Gonzalez, R. C. (Eds.), *Data fusion in robotics & machine intelligence.* USA. Academic Press, 211-241.

96. Luo, R. C. and Kay, M. G. (1995). *Multisensor integration and fusion for intelligent machines and systems*. Intellect Books, 23-45.

97. Castanedo, F. (2013). A review of data fusion techniques. *The Scientific World Journal,* 2013, 19.

98. Appriou, A. (2014). *Uncertainty theories and multisensor data fusion*. Wiley-ISTE, 13-17.

99. Durrant-Whyte, H. F. (1988). Sensor models and multisensor integration. *The International Journal of Robotics Research,* 7 (6), 97-113.

100. Luo, R. C. and Kay, M. **G.** (1992). Data fusion and sensor integration: State-of-the-art 1992s. In Abidi, M. A. and Gonzalez, R. C. (Eds.), *Data fusion in robotics & machine intelligence.* USA. Academic Press, 7-108.

101. Luo, R. C., Yih, C. C. and Su, K. L. (2002). Multisensor fusion and integration: Approaches, applications, and future research directions. *IEEE Sensors Journal,* 2 (2), 107-119.

102. Luo, R. C. (1989). Multi sensor integration and fusion in intelligent systems. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics,* 19 (5), 901-931.

103. Luo, R. C. and Kay, M. G. (1990). *A tutorial on multisensor integration and fusion*. IECON Proceedings (Industrial Electronics Conference), 707-722.

104. Zhang, Y. (2004). *Active and dynamic information fusion with bayesian networks*, University of Nevada, Reno, 179.

105. Atrey, P., Hossain, M. A., El Saddik, A. and Kankanhalli, M. S. (2010). Multimodal fusion for multimedia analysis: A survey. *Multimedia systems,* 16 (6), 345-379.

106. Poh, N., Bourlai, T. and Kittler, J. (2010). Multimodal information fusion. *Multimodal signal processing theory and applications for human computer interaction,* 153.

107. Thomopoulos, S. C. A. (1990). Sensor integration and data fusion. *Journal of Robotic Systems*, 7 (3), 337-372.

108. Dasarathy, B. V. (1997). *Decision fusion strategies for target detection with a three-sensor suite*. AeroSense '97, 12.

109. Hall, D. and Llinas, J. (1997). An introduction to multisensor data fusion. *PROCEEDINGS OF THE IEEE*, 85 (1), 6-23.

110. Valet, L., Mauris, G. and Bolon, P. (2001). A statistical overview of recent literature in information fusion. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, 16 (3), 1-14.

111. Hall, D. and McMullen, S. A. H. (2004). *Mathematical techniques in multisensor data fusion (artech house information warfare library)*. Artech House, Inc, 23-32.

112. Detyniecki, M. (2001). *Mathematical aggregation operators and their application to video querying*, University of California, Berkeley, 1-257.

113. Bouchon-Meunier, B. (2013). *Aggregation and fusion of imperfect information*. Physica, 43-58.

114. Calvo, T., Kolesárová, A., Komorníková, M. and Mesiar, R. (2002). Aggregation operators: Properties, classes and construction methods. In (Eds.), *Aggregation operators*. Springer, 3-104.

115. Yager, R. R. (1988). An ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decisionmaking. *IEEE Transactions Systems, Man and Cybernetics*, 18 (1), 183-190.

116. Turksen, I. B. (1992). Interval-valued fuzzy sets and 'compensatory and'. *Fuzzy Sets and Systems*, 51 (3), 295-307.

117. Sugeno, M. (1993). Fuzzy measures and fuzzy integrals. In Dubois, D., et al. (Eds.), *Readings in fuzzy sets for intelligent systems*. Morgan Kaufmann, 251-257.

118. Wang, Z., Yang, R. and Leung, K.-S. (2010). *Nonlinear integrals and their applications in data mining*. World Scientific, 145-198.

119. Feng, H.-M., Li, X.-F. and Chen, J.-F. (2010). *A comparative study of four fuzzy integrals for classifier fusion*. 2010 International Conference on Machine Learning and Cybernetics, 332-338.

120. Cho, S.-B. (1995). Fuzzy aggregation of modular neural networks with ordered weighted averaging operators. *International journal of approximate reasoning*, 13 (4), 359-375.

121. Zhai, J. and Zhao, W. (2016). Ensemble of multiresolution probabilistic neural network classifiers with fuzzy integral for face recognition. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 31 (1), 405-414.

122. Wang, X.-Z., Wang, R., Feng, H.-M. and Wang, H.-C. (2013). A new approach to classifier fusion based on upper integral. *IEEE transactions on cybernetics*, 44 (5), 620-635.

123. Mirhosseini, A. R., Yan, H., Lam, K.-M. and Pham, T. (1998). Human face image recognition: An evidence aggregation approach. *Computer Vision and Image Understanding*, 71 (2), 213-230.

124. Daniel, M. (2006). Generalization of the classic combination rules to dsm hyper-power sets. *Information & Security*, 20, 50-64.

125. Beynon, M., Cosker, D. and Marshall, D. (2001). An expert system for multi-criteria decision making using dempster shafer theory. *Expert Systems with Applications*, 20 (4), 357-367.

126. Zadeh, L. A. (1984). Review of the book a mathematical theory of evidence by glenn shafer. *AI Magazine*, 3, 81-83.

127. Smets, P. (1991). Probability of provability and belief functions. *Logique et Analyse*, 177-195.

128. Smets, P. (1993). *Probability of deductibility and belief functions*. Berlin, Heidelberg, 332-340.

129. Haenni, R. (1996). *Propositional argumentation systems and symbolic evidence theory*, University of Fribourg, Switzerland, 1-136.

130. Sentz, K. and Ferson, S. (2002). Combination of evidence in the dempster shafer theory.*SANDIA REPORT*, New Mexico, 1-96.

131. Lefevre, E., Colot, O. and Vannoorenberghe, P. (2002). Belief function combination and conflict management. *Information Fusion*, 3 (2), 149-162.

132. Smets, P. (2007). Analyzing the combination of conflicting belief functions. *Inf. Fusion*, 8 (4), 387-412.

133. Smets, P. (1992). The nature of the unnormalized beliefs encountered in the transferable belief model.USA, 292-297.

134. İnternet: Smets, P. (2000). Belief functions and the transferable belief model. Web: http://www.sipta.org. Erişim tarihi: 03.01.2021.

135. Yager, R. R. (2011). On the fusion of imprecise uncertainty measures using belief structures. *Information Sciences*, 181 (15), 3199-3209.

136. Smarandache, F. and Dezert, J. (2009). Advances and applications of dsmt for information fusion - collected works - volume 3. 760.

137. Smarandache, F. and Dezert, J. (2015). *Advances and applications of dsmt for information fusion, vol. Iv: Collected works*. Infinite Study, 78-112.

138. Cuong, B. C. and Kreinovich, V. (2013). *Picture fuzzy sets- a new concept for computational intelligence problems.* Paper presented at the Third World Congress on Information and Communication Technologies (WICT 2013), 1-17.

139. Wei, G. (2010). Some induced geometric aggregation operators with intuitionistic fuzzy information and their application to group decision making. *Applied soft computing,* 10 (2), 423-431.

140. Wu, J.-Z. and Zhang, Q. (2011). Multicriteria decision making method based on intuitionistic fuzzy weighted entropy. *Expert Systems with Applications,* 38 (1), 916-922.

141. Xian, S., Dong, Y. and Yin, Y. (2017). Interval-valued intuitionistic fuzzy combined weighted averaging operator for group decision making. *Journal of the Operational Research Society,* 68 (8), 895-905.

142. Xian, S., Sun, W., Xu, S. and Gao, Y. (2016). Fuzzy linguistic induced owa minkowski distance operator and its application in group decision making. *Pattern Analysis and Applications,* 19 (2), 325-335.

143. Xu, Z. (2007). Intuitionistic fuzzy aggregation operators. *IEEE Transactions on fuzzy systems,* 15 (6), 1179-1187.

144. Ze-Shui, X. (2007). Methods for aggregating interval-valued intuitionistic fuzzy information and their application to decision making [j]. *Control and Decision,* 2, 019.

145. Atanassov, K. and Gargov, G. (1989). Interval valued intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy sets and systems,* 31 (3), 343-349.

146. Son, L. H. (2015). Dpfcm: A novel distributed picture fuzzy clustering method on picture fuzzy sets. *Expert Systems with Applications,* 42 (1), 51-66.

147. Son, L. H. (2016). Generalized picture distance measure and applications to picture fuzzy clustering. *Applied Soft Computing,* 46 (C), 284-295.

148. Son, L. H. (2017). Measuring analogousness in picture fuzzy sets: From picture distance measures to picture association measures. *Fuzzy Optimization and Decision Making,* 16 (3), 359-378.

149. Wei, G. (2017). Picture fuzzy aggregation operators and their application to multiple attribute decision making. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems,* 33 (2), 713-724.

150. Phuong, P. T. M. and Thong, P. H. (2018). Theoretical analysis of picture fuzzy clustering: Convergence and property. *Journal of Computer Science and Cybernetics,* 34 (1), 17-32.

151. Wang, L., Zhang, H.-y., Wang, J.-q. and Li, L. (2018). Picture fuzzy normalized projection-based vikor method for the risk evaluation of construction project. *Applied Soft Computing,* 64, 216-226.

152. Wei, G. (2018). Some similarity measures for picture fuzzy sets and their applications. *Iranian Journal of Fuzzy Systems,* 15 (1), 77-89.

153. Wei, G. (2018). Picture fuzzy hamacher aggregation operators and their application to multiple attribute decision making. *Fundamenta Informaticae,* 157 (3), 271-320.

154. Zhang, H., Zhang, R., Huang, H. and Wang, J. (2018). Some picture fuzzy dombi heronian mean operators with their application to multi-attribute decision-making. *Symmetry,* 10, 593.

155. He, J., Wang, X., Zhang, R. and Li, L. (2019). Some q-rung picture fuzzy dombi hamy mean operators with their application to project assessment. *Mathematics,* 7 (5), 468.

156. Xu, Z.-S. and Chen, J. (2007). Approach to group decision making based on interval-valued intuitionistic judgment matrices. *Systems Engineering-Theory & Practice,* 27 (4), 126-133.

157. Wang, H. and Wei, G. (2009). *Application difwg operator to select supplier with intuitionistic fuzzy information*. 2009 International Conference on Industrial Mechatronics and Automation, 394-397.

158. Wei, G. (2009). Some geometric aggregation functions and their application to dynamic multiple attribute decision making in the intuitionistic fuzzy setting. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems,* 17(1), 179-196.

159. Tan, C. and Chen, X. (2011). Induced intuitionistic fuzzy choquet integral operator for multicriteria decision making. *International Journal of Intelligent Systems,* 26 (7), 659-686.

160. Wang, W. and Liu, X. (2011). Intuitionistic fuzzy geometric aggregation operators based on einstein operations. *International Journal of Intelligent Systems,* 26 (11), 1049-1075.

161. Xia, M., Xu, Z. and Zhu, B. (2012). Generalized intuitionistic fuzzy bonferroni means. *International Journal of Intelligent Systems,* 27 (1), 23-47.

162. Yu, D. and Wu, Y. (2012). Interval-valued intuitionistic fuzzy heronian mean operators and their application in multi-criteria decision making. *African Journal of Business Management,* 6 (11), 4158-4168.

163. Wu, J., Chen, F., Nie, C. and Zhang, Q. (2013). Intuitionistic fuzzy-valued choquet integral and its application in multicriteria decision making. *Information Sciences,* 222, 509-527.

164. Yu, D. (2013). Intuitionistic fuzzy geometric heronian mean aggregation operators. *Applied Soft Computing,* 13 (2), 1235-1246.

165. Zhang, X., Liu, P. and Wang, Y. (2015). Multiple attribute group decision making methods based on intuitionistic fuzzy frank power aggregation operators. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems,* 29 (5), 2235-2246.

166. Zhou, H., Wang, J.-q., Zhang, H.-y. and Chen, X.-h. (2015). Linguistic hesitant fuzzy multi-criteria decision-making method based on evidential reasoning. *International Journal of Systems Science,* 47 (2), 314-327.

167. Garg, H. (2016). Generalized intuitionistic fuzzy interactive geometric interaction operators using einstein t-norm and t-conorm and their application to decision making. *Computers & Industrial Engineering,* 101, 53-69.

168. Liu, P. and Li, D. (2017). Some muirhead mean operators for intuitionistic fuzzy numbers and their applications to group decision making. *PloS one,* 12 (1), e0168767.

169. Liu, P. and Li, H. (2017). Interval-valued intuitionistic fuzzy power bonferroni aggregation operators and their application to group decision making. *Cognitive Computation,* 9 (4), 494-512.

170. Liu, P. and Wang, P. (2018). Some interval-valued intuitionistic fuzzy schweizer–sklar power aggregation operators and their application to supplier selection. *International Journal of Systems Science,* 49 (6), 1188-1211.

171. Zhou, W. and He, J.-m. (2012). Intuitionistic fuzzy normalized weighted bonferroni mean and its application in multicriteria decision making. *Journal of Applied Mathematics,* 2012,1-17.

172. Bonferroni, C. (1950). Sulle medie multiple di potenze. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana,* 5 (3-4), 267-270.

173. Liao, X., Li, Y. and Lu, B. (2007). A model for selecting an erp system based on linguistic information processing. *Information Systems,* 32 (7), 1005-1017.

174. Hacking, I. (1975). All kinds of possibility. *Philosophical Review,* 84 (3), 321-337.

175. Dubois, D. and Prade, H. (1998). Possibility theory: Qualitative and quantitative aspects. In (Eds.), *Quantified representation of uncertainty and imprecision*. Springer, 169-226.

176. Yamada, K. (2001). *Probability-possibility transformation based on evidence theory*. Proceedings Joint 9th IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference (Cat. No. 01TH8569), 70-75.

177. Yager, R. R. (2012). Conditional approach to possibility-probability fusion. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems,* 20 (1), 46-56.

178. Oussalah, M. (2000). On the probability/possibility transformations: A comparative analysis. *International Journal of General Systems,* 29 (5), 671-718.

179. Petry, F., Elmore, P. and Yager, R. (2015). Combining uncertain information of differing modalities. *Information Sciences,* 322, 237-256.

180. Benferhat, S., Levray, A. and Tabia, K. (2015). *On the analysis of probability-possibility transformations: Changing operations and graphical models*. Cham, 279-289.

181. Zeng, W. and Shi, Y. (2005). Note on interval-valued fuzzy set. In (Eds.), Springer Berlin Heidelberg, 20-25.

182. Zeng, W., Shi, Y. and Li, H. (2006). Representation theorem of interval-valued fuzzy set. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 14 (03), 259-269.

183. Zeng, W., Zhao, Y., Li, H. and Yu, X. (2007). *Extension principle of lattice-valued fuzzy set*. Fourth International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery (FSKD 2007), 140-144.

184. Boran, F. E., Akay, D. and Yager, R. R. (2014). A probabilistic framework for interval type-2 fuzzy linguistic summarization. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 22 (6), 1640-1653.

185. Guo, P. and Tanaka, H. (2010). Decision making with interval probabilities. *European Journal of Operational Research*, 203 (2), 444-454.

186. Wang, Y.-M. and Elhag, T. M. S. (2006). On the normalization of interval and fuzzy weights. *Fuzzy Sets and Systems*, 157 (18), 2456-2471.

187. Deschrijver, G. and Kerre, E. E. (2003). On the relationship between some extensions of fuzzy set theory. *Fuzzy Sets and Systems*, 133 (2), 227-235.

188. Xu, P., Deng, Y., Su, X., Chen, X. and Mahadevan, S. (2014). An evidential approach to physical protection system design. *Safety Science*, 65, 125-137.

189. Bajpai, S., Sachdeva, A. and Gupta, J. P. (2010). Security risk assessment: Applying the concepts of fuzzy logic. *Journal of Hazardous Materials*, 173 (1-3), 258-264.

190. Berle, Ø., Asbjørnslett, B. E. and Rice, J. B. (2011). Formal vulnerability assessment of a maritime transportation system. *Reliability Engineering & System Safety*, 96 (6), 696-705.



GAZİ GELECEKTİR..