
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

GOURAVA TAMAMLAYICI İNDEKSLERİ

Zeynep Betül PENDİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ 2024

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Zeynep Betül PENDİK

30/07/2024

GOURAVA TAMAMLAYICI İNDEKSLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Zeynep Betül PENDİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2024

ÖZET

Bu çalışmada öncelikle birinci ve ikinci Gourava tamamlayıcı indeksleri ile F-tamamlayıcı indeksi, Zagreb ve Hyper-Zagreb tamamlayıcı indeksleri arasındaki bazı ilişkiler elde edilmiştir. Daha sonra birleşim, toplam, kartezyen çarpım ve bileşke gibi bazı graf işlemlerinin birinci ve ikinci Gourava tamamlayıcı indeksleri için sınırları bulunmuştur. Ayrıca, birinci ve ikinci Alfa ve Gama Gourava tamamlayıcı indeksleri tanımlanmıştır. Bu indeksler ile Y-tamamlayıcı, F-tamamlayıcı indeksleri, Zagreb ve Hyper-Zagreb tamamlayıcı indeksleri arasındaki ilişkiler elde edilmiş olup bazı graf işlemlerinin bu indeksler için sınırları bulunmuştur.

BilimKodu	:	20401
AnahtarKelimeler	:	Graf, topolojik indeks, tamamlayıcı topolojik indeks
SayfaAdedi	:	67
Danışman	:	Dr. Öğr. Üyesi Gül ÖZKAN KIZILIRMAK

GOURAVA COINDICES

(M. Sc. Thesis)

Zeynep Betül PENDİK

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2024

ABSTRACT

In this study, firstly some relations between the first and second Gourava coindices,F-coindex, Zagreb and Hyper-Zagreb complement coindices were obtained. Later, the bounds of some graph operations such as union, sum, Cartesian product and composition were found for the first and second Gourava coindices.Additionally, the first and second Alpha and Gamma Gourava coindices were defined. The relationships between these indices and the Y-coindex, F- coindex, Zagreb and Hyper-Zagreb coindices were obtained, and the bounds of some graph operations were found for these indices.

ScienceCode : 20401
Key Words : Graph, topological ındex, topological coindex
Page Number : 67
Supervisor : Dr. Öğr. Üyesi Gül ÖZKAN KIZILIRMAK

TEŞEKKÜR

Tezimin yazım süreci boyunca gerek mesleki tecrübelerini gerekse manevi desteğini asla esirgemeyen, her sıkıntımızda yanımızda olan, bir eğitimciden daha fazlası olarak bizleri karşılayan, samimiyeti ve sıcaklığıyla bizlere yoldaş olan öğrencisi olduğum için kendimi şanslı hissettiğim saygıdeğer danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Gül ÖZKAN KIZILIRMAK hocama,

Bilgi ve tecrübelerini bizden esirgemeyen samimiyeti, nezaketi ve kibarlığıyla gönüllerimize taht kuran saygıdeğer hocam Prof. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE'ye,

Hayatım boyunca her zaman yanımda olan, benden desteğini asla esirgemeyen maddi ve manevi en büyük destekçim olan canım babam Hakkı PENDİK, canım annem Tekmile PENDİK ve canım kardeşlerim Muhammed Mustafa PENDİK ve Hümeyra PENDİK'e

Sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

ŞEKİLLERİN LİSTESİ xii

SİMGELER VE KISALTMALAR xiii

1. GİRİŞ 1

2.TEMEL GRAF KAVRAMLARI 3

2.1. Graf Kavramı 3

2.1.1. Tanım 3

2.2. Komşuluk 4

2.2.1. Tanım 4

2.3. Nokta Derecesi 5

2.3.1. Tanım 5

3. GRAF ÇEŞİTLERİ 7

3.1. Basit Graf 7

3.1.1. Tanım 7

3.2. Tam Graf 7

3.2.1. Tanım 7

3.3. Bağlantılı Graf 8

3.3.1. Tanım 8

4. GRAF İŞLEMLERİ 11

4.1. İki Grafın Birleşimi 11

4.1.1. Tanım 11

Sayfa

4.2. İki Grafın Toplamı 11
4.2.1. Tanım 11
4.3. İki Grafın Bileşkesi 11
4.3.1. Tanım 11
4.4. İki Grafın Kartezyen Çarpımı 12
4.4.1. Tanım 12
5. İNDEKSLER 13
5.1. Zagreb İndeksi 13
5.1.1. Tanım 13
5.2. Unutulmuş (Forgotten) Topolojik İndeks 14
5.2.1. Tanım 14
5.3. Y-İndeksi 15
5.3.1. Tanım 15
5.4. Gourava İndeksleri 16
5.4.1. Tanım 16
5.4.2. Tanım 16
5.4.3. Tanım 16
6. BİRİNCİ VE İKİNCİ GOURAVA TAMAMLAYICI İNDEKSLERİNİN İNCELENMESİ 19
6.1. Birinci Gourava Tamamlayıcı İndeks ile Bazı Tamamlayıcı İndeksler Arasındaki İlişkiler 20
6.1.1. Teorem 20
6.1.2. Teorem 21
6.1.3. Teorem 22
6.1.4. Teorem 23
6.2. Bazı Graf İşlemleri ile Birinci Gourava Tamamlayıcı İndeksi İçin Sınırlar 24
6.2.1. Teorem 24

Sayfa

6.2.2. Teorem 25

6.2.3. Teorem 26

6.2.4.Teorem 26

6.3. İkinci Gourava Tamamlayıcı İndeks ile Bazı Tamamlayıcı İndeksler Arasındaki İlişkiler 27

6.3.1. Teorem 27

6.3.2. Teorem 28

6.3.3. Teorem 29

6.3.4. Teorem 30

6.4. Bazı Graf İşlemlerinin İkinci Gourava Tamamlayıcı İndeksi İçin Sınırlar 31

6.4.1. Teorem 31

6.4.2. Teorem 32

6.4.3. Teorem 33

6.4.4. Teorem 33

7. BİRİNCİ VE İKİNCİ ALFA GOURAVA TAMAMLAYICI İNDEKSLERİNİN İNCELENMESİ 35

7.1. Birinci Alfa Gourava Tamamlayıcı İndeks ile Bazı Tamamlayıcı İndeksler Arasındaki İlişkiler 35

7.1.1. Teorem 35

7.1.2. Teorem 36

7.1.3. Teorem 37

7.1.4. Teorem 38

7.2. Bazı Graf İşlemleri ile Birinci Alfa Gourava Tamamlayıcı İndeksi İçin Sınırlar 39

7.2.1. Teorem 39

7.2.2. Teorem 40

7.2.3. Teorem 40

7.2.4. Teorem 41

Sayfa

7.3. İkinci Alfa Gourava Tamamlayıcı İndeks ile Bazı Tamamlayıcı İndeksler Arasındaki İlişkiler 42

7.3.1. Teorem 42

7.3.2. Teorem 42

7.3.3. Teorem 43

7.3.4. Teorem 44

7.4. Bazı Graf İşlemlerinin İkinci Alfa Gourava Tamamlayıcı İndeksi İçin Sınırlar 45

7.4.1. Teorem 45

7.4.2. Teorem 46

7.4.3. Teorem 47

7.4.4. Teorem 48

8. BİRİNCİ VE İKİNCİ GAMA GOURAVA TAMAMLAYICI İNDEKSLERİN İNCELENMESİ 49

8.1. Birinci Gama Gourava Tamamlayıcı İndeks ile Bazı Tamamlayıcı İndeksler Arasındaki İlişkiler 49

8.1.1. Teorem 49

8.1.2. Teorem 50

8.1.3. Teorem 51

8.1.4. Teorem 51

8.2. Bazı Graf İşlemleri ile Birinci Gama Gourava Tamamlayıcı İndeksi İçin Sınırlar 52

8.2.1. Teorem 52

8.2.2. Teorem 53

8.2.3. Teorem 54

8.2.4. Teorem 55

8.3. İkinci Gama Gourava Tamamlayıcı İndeks ile Bazı Tamamlayıcı İndeksler Arasındaki İlişkiler 56

8.3.1. Teorem 56

Sayfa

8.3.2. Teorem 56

8.3.3. Teorem 57

8.3.4. Teorem 58

8.4. Bazı Graf İşlemlerinin İkinci Gama Gourava Tamamlayıcı İndeksi İçin Sınırlar 59

8.4.1. Teorem 59

8.4.2. Teorem 60

8.4.3. Teorem 61

8.4.4. Teorem 62

9. SONUÇ VE ÖNERİLER 63

KAYNAKLAR 65

ÖZGEÇMİŞ 67

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

Şekil 2.1. Beş noktalı bir graf 3

Şekil 2.2. Beş noktali grafin farkli bir gösterimi 4

Şekil 2.3. Dört noktalı bir graf 4

Şekil 3.1. Basit graf örnekleri 7

Şekil 3.2.. Tam graf örnekleri 8

Şekil 3.3. Bağlantılı graf 8

Şekil 3.4. Bağlantılı olmayan graf 9

Şekil 5.1. Dört noktali basit bir graf 14

Şekil 5.2. Dört noktali bir graf 15

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\overline{\boldsymbol{AGO_1}}(\boldsymbol{G})$	G grafının birinci Alfa Gourava tamamlayıcı indeksi
$\overline{\boldsymbol{AGO_2}}(\boldsymbol{G})$	G grafının ikinci Alfa Gourava tamamlayıcı indeksi
$\overline{\boldsymbol{GGO_1}}(\boldsymbol{G})$	G grafının birinci Gama Gourava tamamlayıcı indeksi
$\overline{\boldsymbol{GGO_2}}(\boldsymbol{G})$	G grafının ikinci Gama Gourava tamamlayıcı indeksi
$\overline{\boldsymbol{GO_1}}(\boldsymbol{G_1[G_2]})$	G_1 ve G_2 graflarının bileşkesinin birinci Gourava tamamlayıcı indeksi
$\overline{\boldsymbol{GO_1}}(\boldsymbol{G_1 + G_2})$	G_1 ve G_2 graflarının toplamının birinci Gourava tamamlayıcı indeksi
$\overline{\boldsymbol{GO_1}}(\boldsymbol{G_1 \cup G_2})$	G_1 ve G_2 graflarının birleşiminin birinci Gourava tamamlayıcı indeksi
$\overline{\boldsymbol{GO_1}}(\boldsymbol{G_1 \square G_2})$	G_1 ve G_2 graflarının kartezyen çarpımının birinci Gourava tamamlayıcı indeksi
$\overline{\boldsymbol{GO_1}}(\boldsymbol{G})$	G grafının birinci Gourava tamamlayıcı indeksi
$\overline{\boldsymbol{GO_2}}(\boldsymbol{G})$	G grafının ikinci Gourava tamamlayıcı indeksi
$\overline{\boldsymbol{HM_1}}(\boldsymbol{G})$	G grafının birinci Hyper-Zagreb tamamlayıcı indeksi
$\overline{\boldsymbol{HM_2}}(\boldsymbol{G})$	G grafının ikinci Hyper-Zagreb tamamlayıcı indeksi
$\overline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{1}}(\boldsymbol{G})$	G grafının birinci Zagreb tamamlayıcı indeksi
$\overline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{G})$	G grafının ikinci Zagreb tamamlayıcı indeksi
$\overline{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{G})$	G grafının unutulmuş topolojik tamamlayıcı indeksi
$\overline{\boldsymbol{G}}$	G grafının tamamlayıcısı
$\boldsymbol{G_1[G_2]}$	G_1 ve G_2 gibi iki grafın bileşkesi
$\boldsymbol{G_1 + G_2}$	G_1 ve G_2 graflarının toplamı
$\boldsymbol{G_1 \cup G_2}$	G_1 ve G_2 graflarının birleşimi
$\boldsymbol{G_1 \square G_2}$	G_1 ve G_2 graflarının kartezyen çarpımı
$\boldsymbol{HM_1}(\boldsymbol{G})$	G grafının birinci Hyper-Zagreb indeksi
$\boldsymbol{HM_2}(\boldsymbol{G})$	G grafının ikinci Hyper-Zagreb indeksi
$\boldsymbol{K_n}$	n kenarlı tam graf
$\boldsymbol{M_1}(\boldsymbol{G})$	G grafının birinci Zagreb indeksi

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{M_2(G)}$	G grafının ikinci Zagreb indeksi
$\boldsymbol{N_i}$	i'nin komşuluklar kümesi
$\boldsymbol{\overline{Y}(G)}$	G grafının Y-tamamlayıcı indeksi
$\boldsymbol{d_G(u)}$	G grafının u noktasının derecesi
$\boldsymbol{e_i \sim e_j}$	e_i ve e_j komşu kenarlar
$\boldsymbol{e_{ij}}$	E nin i ve j noktalarına karşılık gelen elemanları
$\boldsymbol{\bar{m}}$	$\bar{G}$ tamamlayıcı grafının eleman sayısı
$\boldsymbol{E(G)}$	G basit grafının kenarlar kümesi
$\boldsymbol{E(\bar{G})}$	$\bar{G}$ tamamlayıcı grafının kenarlar kümesi
$\boldsymbol{E(G_1 \cup G_2)}$	Birleşim grafının kenar kümesi
$\boldsymbol{F(G)}$	G grafının unutulmuş topolojik indeksi
$\boldsymbol{G}$	Basit graf
$\boldsymbol{G = (V, E)}$	V kenarlı E noktalı bir G grafı
$\boldsymbol{V(\bar{G})}$	$\bar{G}$ tamamlayıcı grafının noktalar kümesi
$\boldsymbol{V(G)}$	G basit grafının noktalar kümesi
$\boldsymbol{V(G_1 \cup G_2)}$	Birleşim grafının nokta kümesi
$\boldsymbol{Y(G)}$	G grafının Y -indeksi
$\boldsymbol{m}$	G grafının eleman(nokta) sayısı
$\boldsymbol{n}$	G grafının kenar sayısı
$\boldsymbol{\Delta(G)}$	G basit grafının maksimum derecesi
$\boldsymbol{\delta(G)}$	G basit grafının minimum derecesi

1. GİRİŞ

Graf Teorinin çıkış noktası, İsviçreli matematikçi ve fizikçi Leonhard Euler'in 1735 yılında Königsberg köprüsü problemi üzerindeki çalışmasıdır.

Königsberg kasabasında bulunan Pregel nehri şehri dört bölgeye ayırmış ve nehir üzerinde bulunan yedi adet köprü ile bu bölgeler birbirine bağlanmıştı. Kasaba sakinlerinin geleneksel Pazar yürüyüşleri sırasında kendileri için bir oyun yaratmaya karar vermesi Graf Teori'nin ortaya çıkmasına zemin hazırlamış oldu. Hedefleri yedi köprüden de tek bir kez geçerek şehirde dolaşabilecekleri bir yol tasarlamaktı. Kasaba sakinlerinden hiç kimse bu köprüleri birer kez geçmelerine izin verecek bir yol bulamamış ancak bunun imkânsız olduğunu da kanıtlayamamışlardı. Dönemin belediye başkanı Carl Leonhard Gottilieb Ehler, kasaba halkının sorununu Euler'e iletmiş ve çözüm talep etmişti.

Bu sorunun Gottfried Wilhelm Leibniz'in konum geometrisi olarak adlandırdığı konu ile ilgili olduğunu düşünen Euler, Rusya, St. Petersburg, Fen Bilimleri Akademisi'ne "Konum geometrisi ile ilgili bir sorunun çözümü" konulu bir konferans vermiş ve yedi köprü arasında sürekli bir yürüyüş olmadığını ispat etmiştir. Daha sonra Euler problemin çözümünü "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis" başlığı altında Commentarii Academii Scientiarum Imperialis Petropolitanae' ye göndermiştir. Böylece Euler Königsberg'in yedi köprüsü problemi ile ilgili yazdığı makale ile graf teorinin temelini atmıştır.

2.TEMEL GRAF KAVRAMLARI

2.1. Graf Kavramı

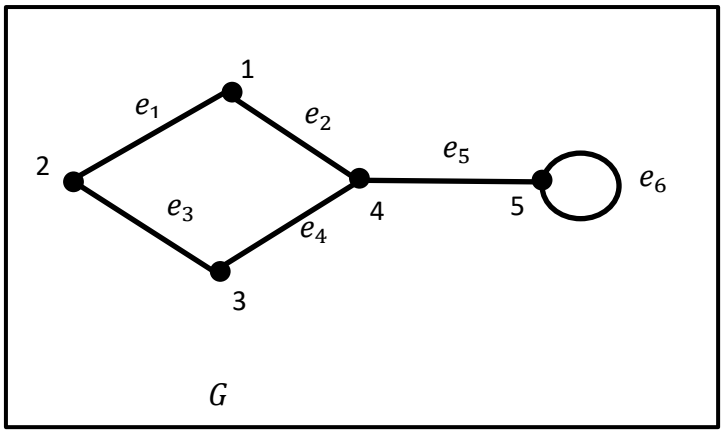
2.1.1. Tanım

Graf, elemanları nokta olarak adlandırılan sonlu, boş olmayan $V = (1,2,\dots,n)$ noktalar kümesi ve elemanları kenar olarak adlandırılan sonlu E kenarlar kümesinden oluşan (V,E) ikili yapısına denir ve $G = (V,E)$ ya da kısaca G ile gösterilir.

Burada $E = \{\{i,j\} : i,j \in V\}$ şeklinde tanımlıdır. Ayrıca her $i,j \in V$ için E nin i ve j noktalarına karşılık gelen elemanları e_{ij} veya ij şeklinde gösterilir [1].

Bir graf her zaman içerdiği noktalar ve bu noktaları birbirine bağlayan kenarlar yardımı ile çizilebilir. Bu çizim tek değildir [1].

Örnek;

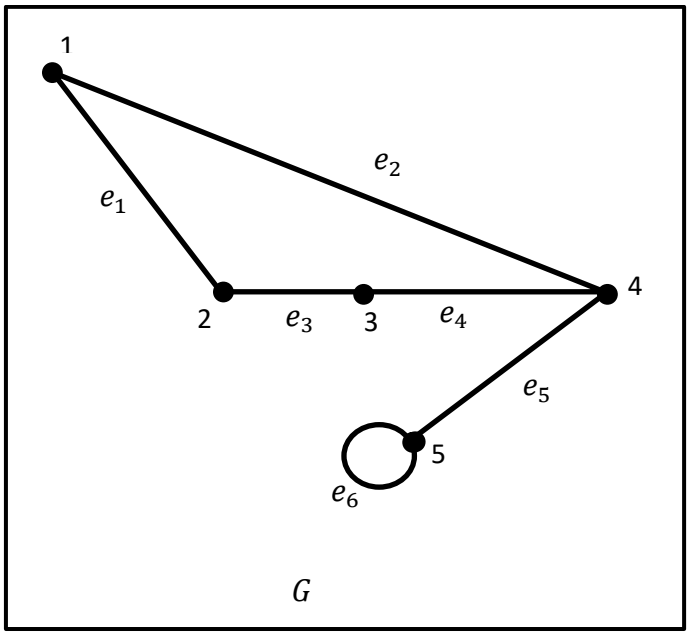


Şekil 2.1. Beş noktalı bir graf

Şekil 2.1 ile verilen G grafının noktalar kümesi ve kenarlar kümesi sırasıyla

$V = \{1,2,3,4,5\}$ ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

olup G grafına ait bir başka çizim,



Şekil 2.2. Beş noktali grafin farkli bir gösterimi

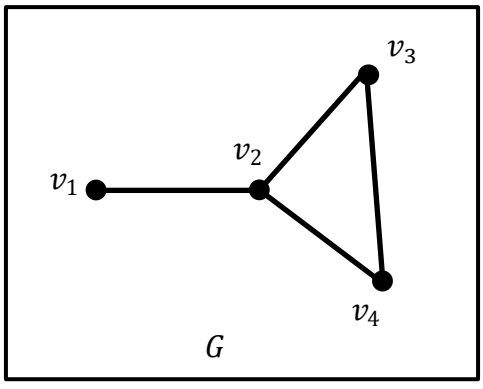
şeklindedir.

2.2. Komşuluk

2.2.1. Tanım

$G = (V, E)$ bir graf olmak üzere, G nin herhangi i ve j noktaları arasında en az bir kenar bulunuyorsa i ve j noktalarına komşudur denir ve $i \sim j$ ile gösterilir. Bir i noktasına komşu olan noktaların kümesine i'nin komşuluklar kümesi denir ve N_i ile gösterilir [1].

Örnek*;*



Şekil 2.3. Dört noktalı bir graf

Şekil 2.3 ile verilen G grafı için,

$v_1 \sim v_2$ olup v_1 noktasının komşuluklar kümesi $N_{v_1} = \{v_2\}$,

$v_2 \sim v_1$, $v_2 \sim v_3$, $v_2 \sim v_4$ olup v_2 noktasının komşuluklar kümesi $N_{v_2} = \{v_1, v_3, v_4\}$,

$v_3 \sim v_2$, $v_3 \sim v_4$ olup v_3 noktasının komşuluklar kümesi $N_{v_3} = \{v_2, v_4\}$,

$v_4 \sim v_2$, $v_4 \sim v_3$ olup v_4 noktasının komşuluklar kümesi $N_{v_4} = \{v_2, v_3\}$ dir.

Ayrıca bir grafın herhangi e_i ve e_j kenarlarının ortak bir noktası bulunuyorsa bu iki kenara komşu kenarlar denir ve $e_i \sim e_j$ ile gösterilir [1].

Şekil 2.3 ile verilen G grafı için $e_1 \sim e_2$, $e_2 \sim e_1$, $e_2 \sim e_3$, $e_2 \sim e_4$, $e_3 \sim e_2$, $e_3 \sim e_4$, $e_4 \sim e_2$ve $e_4 \sim e_3$ dir.

2.3. Nokta Derecesi

2.3.1. Tanım

$G = (V, E)$ grafının herhangi bir i noktasına bağlı kenar sayısına i'nin derecesi denir ve $d_G(i)$ ya da kısaca d_i ile gösterilir.

Bir G grafının, minimum ve maksimum dereceleri sırasıyla

- $\delta(G) = \min\{d_i : i \in V\}$
- $\Delta(G) = \max\{d_i : i \in V\}$

şeklinde tanımlıdır. Bu tanıma göre

$\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$

bağıntısı da mevcuttur [1].

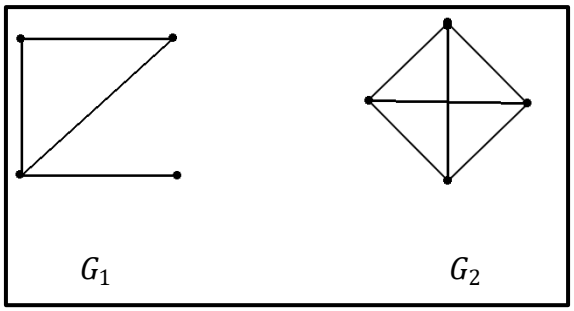
3. GRAF ÇEŞİTLERİ

3.1. Basit Graf

3.1.1. Tanım

Herhangi iki noktası arasında en fazla bir kenar bulunan ve ilmek içermeyen grafa basit graf denir [1].

Örnek;



Şekil 3.1. Basit graf örnekleri

Şekil 3.1'de verilen G_1 ve G_2 grafı katlı kenar ve ilmek içermediğinden basit graflardır.

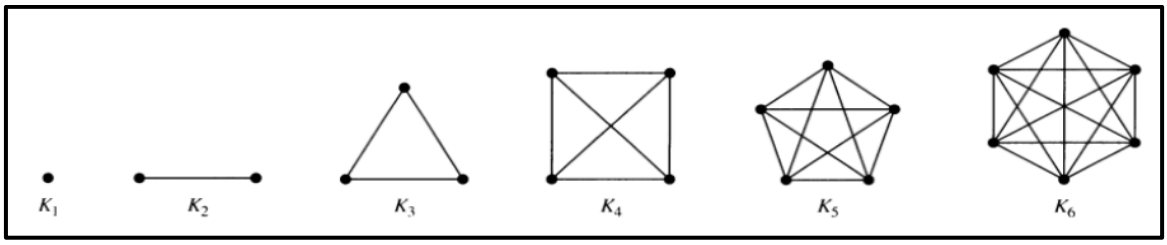
3.2. Tam Graf

3.2.1. Tanım

Basit bir grafın herhangi iki noktası arasında bir kenar bulunuyorsa yani her bir nokta çifti bağlantılı ise bu grafa tam graf denir ve n noktalı bir tam graf K_n ile gösterilir [1].

Örnek;

$n = 1,2,..,6$ için K_n tam grafları aşağıda verilmiştir. (K_1 grafı tek bir noktadan oluşur.)



Şekil 3.2.. Tam graf örnekleri

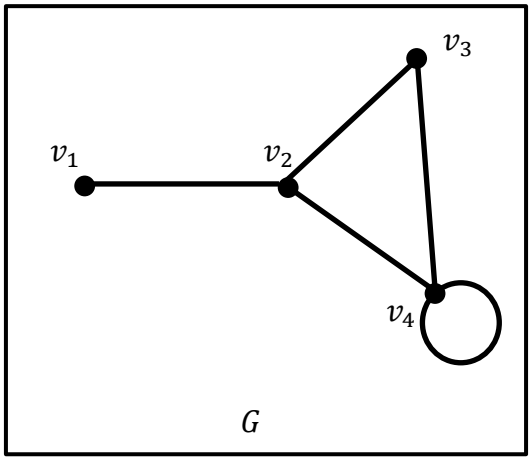
Not: K_n grafında n tane nokta ve $C\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ tane kenar vardır.

3.3. Bağlantılı Graf

3.3.1. Tanım

Herhangi iki noktası arasında bir yol bulunan grafa bağlantılı graf denir [1].

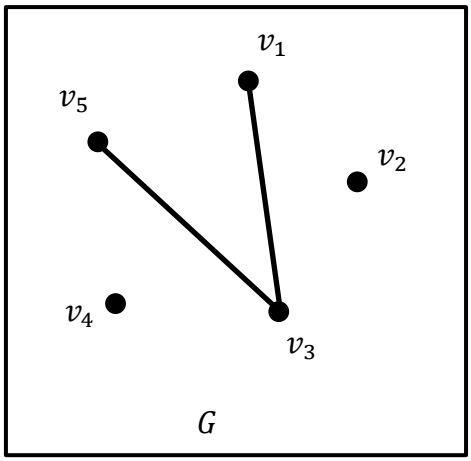
Örnek;



Şekil 3.3. Bağlantılı graf

Şekil 3.3 ile verilen G grafının herhangi iki noktası arasında bir yol bulunduğundan G bağlantılı bir graftır.

Örnek;



Şekil 3.4. Bağlantılı olmayan graf

Şekil 3.4 ile verilen G grafı için v_2 ve v_4 noktası birer izole nokta olup bu noktalar ile diğer noktalar arasında bir yol bulunmadığından G bağlantılı bir graf değildir.

4. GRAF İŞLEMLERİ

4.1. İki Grafın Birleşimi

4.1.1. Tanım

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ iki graf olmak üzere bu iki grafın birleşimi

$G_1 \cup G_2 = (V(G_1 \cup G_2), E(G_1 \cup G_2))$

ile gösterilir ve

- $V(G_1 \cup G_2) = V_1 \cup V_2$
- $E(G_1 \cup G_2) = E_1 \cup E_2$

şeklinde tanımlıdır [2].

4.2. İki Grafın Toplamı

4.2.1. Tanım

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ noktalar kümesi ayrık iki graf olmak üzere bu iki grafın toplamı $V_1 \cap V_2$ noktalarından ve G_1'in her bir noktasını G_2'nin her bir noktasına bağlayan kenarlardan oluşan bir graf olup $G_1 + G_2 = (V_1 + V_2, E_1 + E_2)$ şeklinde gösterilir [2].

4.3. İki Grafın Bileşkesi

4.3.1. Tanım

Ayrık noktalar ve kenarlar kümeleri olan G_1 ve G_2 gibi iki grafın $G_1[G_2]$ bileşkesi, noktalar kümesi $V(G_1) \times V(G_2)$ olan bir graf olup $u_1v_1 \epsilon E(G_1)$ veya $u_1 = v_1$ ve $u_2v_2 \in E(G_2)$ olması durumunda $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ ye komşudur. Ayrıca $n_i = |V(G_i)|$ ve $m_i = |E(G_i)|$ $(i = 1,2)$ olmak üzere $G_1[G_2]$'nin kenar sayısı $n_1m_2 + m_1{n_2}^2$ ve $G_1[G_2]$'nin (u_1, u_2) elemanının derecesi $n_2 d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2)$ dir [2].

4.4. İki Grafın Kartezyen Çarpımı

4.4.1. Tanım

G_1 ve G_2 graflarının kartezyen çarpımı $G_1 \square G_2$, noktalar kümesi $V(G_1) \times V(G_2)$ olan bir graftır. Burada $u_1 = v_1$ ve $u_2v_2 \in E(G_2)$ veya $u_2 = v_2$ ve $u_1v_1 \epsilon E(G_1)$ olması durumunda $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ ye komşudur. Ayrıca $n_i = |V(G_i)|$ ve $m_i = |E(G_i)|$ $(i = 1,2)$ olmak üzere $G_1 \square G_2$'nin kenar sayısı $n_1m_2 + m_1n_2$ ve $G_1 \square G_2$'nin (u_1, u_2) elemanının derecesi $d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2)$ dir [2].

5. İNDEKSLER

5.1. Zagreb İndeksi

5.1.1. Tanım

G basit, bağlantılı bir graf olsun. $d_G(v),\ v$ noktasının derecesi olmak üzere birinci ve ikinci Zagreb indeksleri aşağıdaki şekilde tanımlanır [3].

$$M_1 = M_1(G) = \sum_{uv \in E(G)} d_G(u) + d_G(v) \tag{5.1}$$

$$M_2 = M_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} d_G(u)\, d_G(v) \tag{5.2}$$

Birinci ve ikinci Hyper-Zagreb indeksleri ise

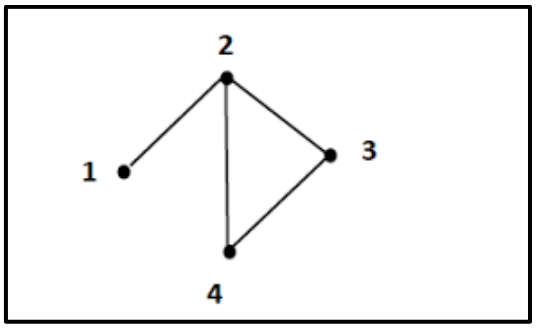
$$HM_1(G) = \sum_{uv \in E(G)} [d_G(u) + d_G(v)]^2 \tag{5.3}$$

ve

$$HM_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} [d_G(u)\, d_G(v)]^2 \tag{5.4}$$

şeklindedir [4,5].

Örnek;



Şekil 5.1. Dört noktali basit bir graf

grafını göz önüne alalım.Burada

$$M_1 = M_1(G) = [d_G(1) + d_G(2)] + [d_G(2) + d_G(3)] + [d_G(2) + d_G(4)] + [d_G(3) + d_G(4)]$$
$$= [1 + 3] + [3 + 2] + [3 + 2] + [2 + 2]$$
$$= 18$$

ve

$$M_2 = M_2(G) = d_G(1)d_G(2) + d_G(2)d_G(3) + d_G(2)d_G(4) + d_G(3)d_G(4)$$
$$= 1.3 + 3.2 + 3.2 + 2.2$$
$$= 19$$

dir.

5.2. Unutulmuş (Forgotten) Topolojik İndeks

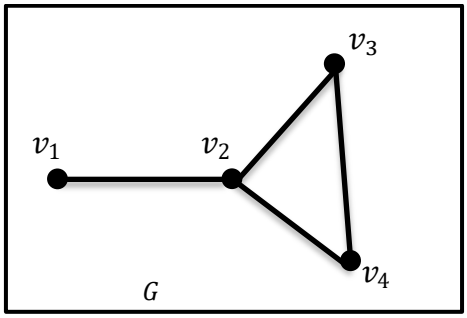
5.2.1. Tanım

Bir G grafının unutulmuş topolojik indeksi

$$F(G) = \sum_{uv \in E(G)} d_G(u)^2 + d_G(v)^2 \qquad (5.5)$$

şeklinde tanımlıdır [6].

Örnek;



Şekil 5.2. Dört noktali bir graf

G grafını göz önüne alalım.Burada

$$\begin{aligned} F(G) = {} & (d_G(v_1)^2 + d_G(v_2)^2) + (d_G(v_2)^2 + d_G(v_3)^2) + (d_G(v_2)^2 + d_G(v_4)^2) \\ & +(d_G(v_3)^2 + d_G(v_4)^2) \\ = {} & (1^2 + 3^2) + (3^2 + 2^2) + (3^2 + 2^2) + (2^2 + 2^2) \\ = {} & 44 \end{aligned}$$

dür.

5.3. Y-İndeksi

5.3.1. Tanım

Bir G grafının Y-indeksi

$$\mathrm{Y}(G) = \sum_{uv \in E(G)} d_G(u)^3 + d_G(v)^3 \qquad (5.6)$$

olarak tanımlanmıştır [7].

5.4. Gourava İndeksleri

5.4.1. Tanım

Bir G grafının birinci Gourava indeksi

$$GO_1(G) = \sum_{uv \in E(G)} d_G(u) + d_G(v) + d_G(u)\ d_G(v) \tag{5.7}$$

ve ikinci Gourava indeksi

$$GO_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} [d_G(u) + d_G(v)]\, d_G(u)\ d_G(v) \tag{5.8}$$

olarak tanımlanmıştır [8].

5.4.2. Tanım

Bir G grafının birinci alfa Gourava indeksi

$$AGO_1(G) = \sum_{uv \in E(G)} d_G(u)^2 + d_G(v)^2 + d_G(u)\ d_G(v) \tag{5.9}$$

ve ikinci alfa Gourava indeksi

$$AGO_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} [\, d_G(u)^2 + d_G(v)^2\,]\ d_G(u)\ d_G(v) \tag{5.10}$$

olarak tanımlanmıştır [9].

5.4.3. Tanım

Bir G grafının birinci gama Gourava indeksi

$$GGO_1(G) = \sum_{uv \in E(G)} d_G(u)^3 + d_G(v)^3 + d_G(u)\, d_G(v)$$

ve ikinci gama Gourava indeksi

$$GGO_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} [d_G(u)^3 + d_G(v)^3]\, d_G(u)\, d_G(v)$$

olarak tanımlanmıştır [9].

Bazı grafların bileşkelerinde nokta ağırlıklı Wiener polinomları hesaplanırken komşu olmayan nokta çiftlerinin katkı sağladığı görülmüş ve tamamlayıcı indeks kavramı ortaya çıkmıştır [10]. Bu çalışmada ilk olarak birinci ve ikinci Zagreb tamamlayıcı indeksleri şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\bar{M}_1(G) = \sum_{uv \notin E(G)} d_G(u) + d_G(v) \tag{5.11}$$

$$\bar{M}_2(G) = \sum_{uv \notin E(G)} d_G(u)\, d_G(v) \tag{5.12}$$

Birinci ve ikinci Hyper-Zagreb tamamlayıcı indeksleri ise

$$\overline{HM}_1(G) = \sum_{uv \notin E(G)} [d_G(u) + d_G(v)]^2 \tag{5.13}$$

$$\overline{HM}_2(G) = \sum_{uv \notin E(G)} [d_G(u)\, d_G(v)]^2 \tag{5.14}$$

olarak tanımlanmıştır [11].

Benzer şekilde $\bar{F}(G)$ tamamlayıcı indeksi [12].

$$\bar{F}(G) = \sum_{uv \notin E(G)} d_G(u)^2 + d_G(v)^2 \tag{5.15}$$

ve $\bar{Y}(G)$ tamamlayıcı indeksi ise

$$\bar{Y}(G) = \sum_{uv \notin E(G)} d_G(u)^3 + d_G(v)^3 \tag{5.16}$$

olarak tanımlanmıştır [13].

6. BİRİNCİ VE İKİNCİ GOURAVA TAMAMLAYICI İNDEKSLERİNİN İNCELENMESİ

Bu bölümde, birinci ve ikinci Gourava tamamlayıcı indeksleri ile F-tamamlayıcı indeksi, Zagreb ve Hyper-Zagreb tamamlayıcı indeksleri arasındaki bazı ilişkiler elde edilmiştir. Daha sonra birleşim, toplam, kartezyen çarpım ve bileşke graf işlemlerinin birinci ve ikinci Gourava tamamlayıcı indeksleri için sınırları bulunmuştur.

Burada $G($ n noktalı, m kenarlı) ve çalışılan diğer graflar basit bağlantılı graf olarak kabul edilecektir.

Bir G grafının tamamlayıcısı $\bar{G}$ ile gösterilir ve noktalar kümesi G 'nin noktalar kümesi $V(G)$ ile aynı ve kenarlar kümesi $E(\bar{G})$ olan basit bir graftır. $\bar{G}$ grafının kenar sayısı $\bar{m}$ dir.

Elde edilen sonuçlar için gerekli olan eşitsizlikler şunlardır:

1. Lemma (P´olya-Szegö Eşitsizliği)

$a_1, a_2, \dots a_s$ ve $b_1, b_2, \dots b_s$ pozitif reel sayılar olsun. $k = 1,2, \dots s$ için

$0 < a \leq a_k \leq A < \infty$ ve $0 < b \leq b_k \leq B < \infty$ olacak şekilde a, b, A, B reel sayıları varsa o zaman

$$\frac{\sum_{k=1}^{S} a_k^2 \ \sum_{k=1}^{S} b_k^2}{[\sum_{k=1}^{S} a_k \, b_k]^2} \leq \frac{(a\, b + A\, B)^2}{4\, a\, b\, A\, B} \tag{6.1}$$

dir.

2. Lemma (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)

$a_1, a_2, \dots a_s$ ve $b_1, b_2, \dots b_s$ pozitif reel sayılar olsun. $k = 1,2, \dots s$ için

$0 < a \leq a_k \leq A < \infty$ ve $0 < b \leq b_k \leq B < \infty$ olacak şekilde a, b, A, B reel sayıları varsa o zaman

$$\left(\sum_{k=1}^{S} a_k \; b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{S} a_k^2 \sum_{k=1}^{S} b_k^2 \tag{6.2}$$

dır.

3. Lemma

$a_1, a_2, \ldots a_s$ ve $b_1, b_2, \ldots b_s$ pozitif reel sayılar olsun. $k = 1,2, \ldots s$ için

$0 < a \leq a_k \leq A < \infty$ ve $0 < b \leq b_k \leq B < \infty$ olacak şekilde a, b, A, B reel sayıları varsa o zaman

$$\left|\frac{1}{S}\sum_{k=1}^{S} a_k\, b_k - \left(\frac{1}{S}\sum_{k=1}^{S} a_k\right)\left(\frac{1}{S}\sum_{k=1}^{S} b_k\right)\right| \leq \frac{1}{4s}\left(1 - \frac{1+(-1)^{s+1}}{2s^2}\right)(A-a)(B-b) \tag{6.3}$$

dır.

6.1. Birinci Gourava Tamamlayıcı İndeks ile Bazı Tamamlayıcı İndeksler Arasındaki İlişkiler

G grafının birinci Gourava tamamlayıcı indeksi

$$\overline{GO}_1(G) = \sum_{uv \notin E(G)} d_G(u) + d_G(v) + d_G(u)\, d_G(v) \tag{6.4}$$

şeklinde tanımlanmıştır [8].

6.1.1. Teorem

G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman G grafının birinci Gourava tamamlayıcı indeksi için alt ve üst sınırlar

$$\overline{m}(2\delta + \delta^2) \leq \overline{GO_1}(G) \leq \overline{m}(2\Delta + \Delta^2) \tag{6.5}$$

dir.

İspat;

Birinci Gourava tamamlayıcı indeksinde dereceleri en küçük derece olarak alındığında ifade küçülmüş olur ve alt sınırı elde edilir. Benzer şekilde en büyük dereceleri alarak da üst sınır elde edilir. □

6.1.2. Teorem

G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman G grafının birinci Gourava tamamlayıcı indeksi için bir alt sınır

$$\frac{\sqrt{\overline{m}\left(\overline{HM}_1(G)+2\overline{M}_1(G)\overline{M}_2(G)+\overline{HM}_2(G)\right)8(2\delta+\delta^2)(2\Delta+\Delta^2)}}{(2\delta+\delta^2+4\Delta+2\Delta^2)} \leq \overline{GO}_1(G) \qquad (6.6)$$

şeklindedir.

İspat;

Lemma 1'de $a_k = d_G(u)+d_G(v)+d_G(u)d_G(v)$, $b_k = 1$ alınır ve

$a = 2\delta+\delta^2,\ b = 1, A = 2\Delta+\Delta^2,\ B = 2$ seçilirse $0 < a \leq a_k \leq A < \infty$ ve

$0 < b \leq b_k \leq B < \infty$ sağlanır. Lemma 1, G'nin komşu olmayan kenarlarının toplamı üzerinden uygulanırsa,

$$\frac{\overline{m}\sum_{uv\notin E(G)}(d_G(u)+d_G(v)+d_G(u)\,d_G(v)\,)^2}{[\overline{GO}_1(G)]^2} \leq \frac{\left((2\delta+\delta^2)1+(2\Delta+\Delta^2)2\right)^2}{8(\,2\delta+\delta^2)(2\Delta+\Delta^2)}$$

elde edilir. Zagreb ve Hyper-Zagreb tamamlayıcı indekslerinin tanımları kullanılarak,

$$\left[\overline{m}\sum_{uv\notin E(G)}\left[\left(d_G(u)+d_G(v)\right)^2+2(d_G(u)+d_G(v))d_G(u)\,d_G(v)+d_G(u)^2d_G(v)^2\,\right]\right]$$

$$=\overline{m}\left(\overline{HM}_1(G)+2\overline{M}_1(G)\overline{M}_2(G)+\overline{HM}_2(G)\right)$$

bulunur. Böylece

$$\frac{\sqrt{\overline{m}\left(\overline{HM}_1(G)+2\overline{M}_1(G)\overline{M}_2(G)+\overline{HM}_2(G)\right)8(2\delta+\delta^2)(2\Delta+\Delta^2)}}{(2\delta+\delta^2+4\Delta+2\Delta^2)} \leq \overline{GO}_1(G)$$

elde edilir. □

6.1.3. Teorem

G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman,

$$\overline{GO}_1(G) \leq \sqrt{\overline{m}\left(\overline{HM}_1(G)+2\overline{M}_1(G)\overline{M}_2(G)+\overline{HM}_2(G)\right)}$$

dir.

İspat;

Lemma 2'de $a_k = d_G(u)+d_G(v)+d_G(u)d_G(v)$, $b_k = 1$ alınır ve

$a = 2\delta+\delta^2,\ b = 1, A = 2\Delta+\Delta^2,\ B = 2$ seçilirse $0 < a \leq a_k \leq A < \infty$ ve

$0 < b \leq b_k \leq B < \infty$ sağlanır. Lemma 2, G'nin komşu olmayan kenarlarının toplamı üzerinden uygulanırsa,

$$\left[\sum_{uv\notin E(G)} d_G(u)+d_G(v)+d_G(u)\,d_G(v)\right]^2 \leq \overline{m}\sum_{uv\notin E(G)}[d_G(u)+d_G(v)+\ d_G(u)\,d_G(v)]^2$$

bulunur. Buradan

$$[\overline{GO}_1(G)]^2 \leq \left[\sum_{uv\notin E(G)}[d_G(u)+d_G(v)]^2+2(d_G(u)+d_G(v))\,d_G(u)\,d_G(v)+d_G(u)^2d_G(v)^2\right]$$

olup

$$\overline{GO}_1(G) \leq \sqrt{\bar{m}\left(\overline{HM}_1(G) + 2\bar{M}_1(G)\bar{M}_2(G) + \overline{HM}_2(G)\right)}$$

elde edilir. □

6.1.4. Teorem

G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman,

$$|\overline{GO}_1(G) - \bar{M}_1(G) - \bar{M}_2(G)| \leq \left[\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1+(-1)^{\bar{m}+1}}{2\bar{m}^2}\right)(2\Delta + \Delta^2 - 2\delta - \delta^2)\right] \qquad (6.7)$$

dir.

İspat;

Lemma 3'de $a_k = d_G(u) + d_G(v) + d_G(u).d_G(v)$, $b_k = 1$ alınır ve

$a = 2\delta + \delta^2$, $b = 1$, $A = 2\Delta + \Delta^2$, $B = 2$ seçilirse $0 < a \leq a_k \leq A < \infty$ ve

$0 < b \leq b_k \leq B < \infty$ sağlanır. Lemma 3, G'nin komşu olmayan kenarlarının toplamı üzerinden uygulanırsa,

$$\left|\frac{1}{\bar{m}}\sum_{uv\notin E(G)} d_G(u) + d_G(v) + d_G(u)\ d_G(v) - \left[\frac{1}{\bar{m}}\sum_{uv\notin E(G)} d_G(u) + d_G(v) + d_G(u)\, d_G(v)\right]\left[\frac{1}{\bar{m}}\bar{m}\right]\right|$$

$$\leq \left[\frac{1}{4\bar{m}}\left(1 - \frac{1+(-1)^{\bar{m}+1}}{2\bar{m}^2}\right)(2\Delta + \Delta^2 - 2\delta - \delta^2)\right]$$

olup

$$\frac{1}{\bar{m}}\left|\overline{GO}_1(G) - \left(\bar{M}_1(G) + \bar{M}_2(G)\right)\right| \leq \frac{1}{4\bar{m}}\left[\left(1 - \frac{1+(-1)^{\bar{m}+1}}{2\bar{m}^2}\right)(2\Delta + \Delta^2 - 2\delta - \delta^2)\right]$$

elde edilir.Buradan

$$|\overline{GO}_1(G) - \bar{M}_1(G) - \bar{M}_2(G)| \leq \left[\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1+(-1)^{\bar{m}+1}}{2\bar{m}^2}\right)(2\Delta + \Delta^2 - 2\delta - \delta^2)\right]$$

bulunur. □

6.2. Bazı Graf İşlemleri ile Birinci Gourava Tamamlayıcı İndeksi İçin Sınırlar

Bu bölümde G_i $(i = 1,2)$ grafının en küçük derecesi δ_i, en büyük derecesi Δ_i olarak alınacaktır.

6.2.1. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı iki graf olsun. O zaman,

$$\overline{GO}_1(G_1) + \overline{GO}_1(G_2) + n_1n_2(\delta_1 + \delta_2 + \delta_1\delta_2) \leq \overline{GO}_1(G_1 \cup G_2) \leq \overline{GO}_1(G_1) + \overline{GO}_1(G_2)$$

$$+n_1n_2(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_1\Delta_2) \qquad (6.8)$$

dir.

İspat;

İki grafın birleşim işlemi ve birinci Gourava tamamlayıcı indeksinin tanımından

$$\begin{aligned}\overline{GO}_1(G_1 \cup G_2) = &\sum_{uv \notin E(G_1)} d_{G_1}(u) + d_{G_1}(v) + d_{G_1}(u)\, d_{G_1}(v) \\ &+ \sum_{uv \notin E(G_2)} d_{G_2}(u) + d_{G_2}(v) + d_{G_2}(u)\, d_{G_2}(v) \\ &+ \sum_{u \in v(G_1)} \left(\sum_{v \in u(G_2)} d_{G_1}(u) + d_{G_2}(v) + d_{G_1}(u)\ d_{G_2}(v) \right)\end{aligned}$$

dir. En büyük ve en küçük dereceler kullanılarak

$$\overline{GO}_1(G_1) + \overline{GO}_1(G_2) + n_1n_2(\delta_1 + \delta_2 + \delta_1\delta_2) \leq \overline{GO}_1(G_1 \cup G_2) \leq \overline{GO}_1(G_1) + \overline{GO}_1(G_2)$$

$+n_1n_2(\Delta_1+\Delta_2+\Delta_1\Delta_2)$

elde edilir. □

6.2.2. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı, m_1 ve m_2 kenarlı iki graf olsun. O zaman,

$$\overline{m_1}(2(\delta_1+n_2)+(\delta_1+n_2)^2)+\overline{m_2}(2(\delta_2+n_1)+(\delta_2+n_1)^2)\leq \overline{GO}_1(G_1+G_2)$$

$$\leq \overline{m_1}(2(\Delta_1+n_2)+(\Delta_1+n_2)^2)+\overline{m_2}(2(\Delta_2+n_1)+(\Delta_2+n_1)^2) \qquad (6.9)$$

dir. Burada $i=1,2$ için $\bar{G}_i$ grafının kenar sayısı $\overline{m_i}$ dir.

İspat;

İki grafın toplamı ve birinci Gourava tamamlayıcı indeksinin tanımından

$$\overline{GO}_1(G_1+G_2)=\sum_{uv\notin E(G_1)} d_{G_1}(u)+d_{G_1}(v)+d_{G_1}(u)\,d_{G_1}(v)$$
$$+\sum_{uv\notin E(G_2)} d_{G_2}(u)+d_{G_2}(v)+d_{G_2}(u)\,d_{G_2}(v)$$

olup $u\in \mathrm{V}(G_1)$için $d_G(u)=d_{G_1}(u)+n_2$ ve $v\in \mathrm{V}(G_2)$ için $d_G(v)=d_{G_2}(v)+n_1$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\overline{GO}_1(G_1+G_2)=\sum_{uv\notin E(G_1)} \left(d_{G_1}(u)+n_2\right)+(d_{G_1}(v)+n_2)+(d_{G_1}(u)+n_2)\left(d_{G_1}(v)+n_2\right)$$
$$+\sum_{uv\notin E(G_2)} (d_{G_2}(u)+n_1)+(d_{G_2}(v)+n_1)+(\,d_{G_2}(u)+n_1)\big(\,d_{G_2}(v)+n_1\big)$$

elde edilir. En büyük ve en küçük derece kullanılarak

$$\overline{m_1}(2(\delta_1+n_2)+(\delta_1+n_2)^2)+\overline{m_2}(2(\delta_2+n_1)+(\delta_2+n_1)^2)\leq \overline{GO}_1(G_1+G_2)$$

$$\leq \overline{m_1}(2(\Delta_1+n_2)+(\Delta_1+n_2)^2)+\overline{m_2}(2(\Delta_2+n_1)+(\Delta_2+n_1)^2)$$

bulunur.

6.2.3. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı, m_1 ve m_2 kenarlı iki graf olsun. O zaman,

$$2\,\alpha(\delta_1+\delta_2+\delta_1\delta_2) \le \overline{GO}_1(G_1 \square G_2) \le 2\,\alpha\,(\Delta_1+\Delta_2+\Delta_1\Delta_2) \qquad (6.10)$$

dir. Burada $G_1 \square G_2$ grafının kenar sayısı $\alpha = n_1m_2 + m_1n_2$ dir.

İspat;

İki grafın kartezyen çarpımı ve birinci Gourava tamamlayıcı indeksinin tanımından,

$$\overline{GO}_1(G_1 \square G_2) = \sum_{uv\notin E(G_1\square G_2)} [d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2) + d_{G_1}(u_1)\,d_{G_2}(u_2)] + \sum_{uv\notin E(G_1\square G_2)} [d_{G_1}(v_1) + d_{G_2}(v_2) + d_{G_1}(v_1)\,d_{G_2}(v_2)]$$

dir. En büyük ve en küçük derece kullanılarak,

$$2\,\alpha(\delta_1+\delta_2+\delta_1\delta_2) \le \overline{GO}_1(G_1 \square G_2) \le 2\,\alpha(\Delta_1+\Delta_2+\Delta_1\Delta_2)$$

elde edilir. □

6.2.4.Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı, m_1 ve m_2 kenarlı iki graf olsun. O zaman,

$$2\,\beta\,(n_2\delta_1+\delta_2+n_2\delta_1\delta_2) \le \overline{GO}_1(G_1[G_2]) \le 2\,\beta(n_2\Delta_1+\Delta_2+n_2\Delta_1\Delta_2) \qquad (6.11)$$

dir. Burada $G_1[G_2]$ grafının kenar sayısı $\beta = n_1m_2 + m_1{n_2}^2$ dir.

İspat;

İki grafın bileşkesi ve birinci Gourava tamamlayıcı indeksinin tanımından,

$$\overline{GO}_1(G_1[G_2]) = \sum_{uv \notin E(G_1[G_2])} \left[n_2\, d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2)\right] + \left[n_2\, d_{G_1}(u_1)\, d_{G_2}(u_2)\right]$$
$$+ \sum_{uv \notin E(G_1[G_2])} \left[n_2\, d_{G_1}(v_1) + d_{G_2}(v_2)\right] + \left[n_2\, d_{G_1}(v_1)\, d_{G_2}(v_2)\right]$$

dir. Burada en küçük derece ve en büyük derece göz önüne alındığında

$$2\,\beta\,(n_2\delta_1 + \delta_2 + n_2\delta_1\delta_2) \leq \overline{GO}_1(G_1[G_2]) \leq 2\,\beta(n_2\Delta_1 + \Delta_2 + n_2\Delta_1\Delta_2)$$

elde edilir. □

6.3. İkinci Gourava Tamamlayıcı İndeks ile Bazı Tamamlayıcı İndeksler Arasındaki İlişkiler

G grafının ikinci Gourava tamamlayıcı indeksi

$$\overline{GO_2}(G) = \sum_{uv \notin E(G)} [d_G(u) + d_G(v)]d_G(u)\, d_G(v) \tag{6.12}$$

şeklinde tanımlanmıştır [8].

6.3.1. Teorem

G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman G grafının ikinci Gourava tamamlayıcı indeksi için alt ve üst sınırlar

$$\overline{m}(2\delta^3) \leq \overline{GO_2}(G) \leq \overline{m}(2\Delta^3) \tag{6.13}$$

dir. Burada $\bar{G}$ grafının kenar sayısı $\overline{m}$ dir.

İspat;

İkinci Gourava tamamlayıcı indeksinde dereceleri en küçük derece alarak alt sınır, en büyük derece alarak da üst sınır elde edilir. □

6.3.2. Teorem

G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman G grafının ikinci Gourava tamamlayıcı indeksi için bir alt sınır**;**

$$\frac{\sqrt{4\delta^3\Delta^3\overline{HM}_1(G)\,\overline{HM}_2(G)}}{(\delta^3+\Delta^3)} \leq \overline{GO_2}(G) \qquad (6.14)$$

şeklindedir.

İspat;

Lemma 1'de $a_k = d_G(u) + d_G(v),\ b_k = d_G(u)\,d_G(v)$ alınır ve $a = 2\delta$, $b = \delta^2$ ve $A = 2\Delta$, $B = \Delta^2$ seçilirse $0 < a \leq a_k \leq A < \infty$ ve $0 < b \leq b_k \leq B < \infty$ sağlanır. Lemma 1, G'nin komşu olmayan kenarlarının toplamı üzerinden uygulanırsa,

$$\frac{\sum_{uv\notin E(G)}((d_G(u)+d_G(v))^2\sum_{uv\notin E(G)}(d_G(u)\ d_G(v)\,)^2}{[\overline{GO}_2(G)]^2} \leq \frac{\left((2\delta\ \delta^2)+(2\Delta\ \Delta^2)\right)^2}{4(\,2\delta\ \delta^2)(2\Delta\ \Delta^2)}$$

elde edilir. Hyper-Zagreb tamamlayıcı indekslerinin tanımları kullanılarak,

$$\left[\sum_{uv\notin E(G)}(d_G(u)+d_G(v))^2\right]\left[\sum_{uv\notin E(G)}(d_G(u)\ d_G(v))^2\right] = \overline{HM}_1(G)\,\overline{HM}_2(G)$$

bulunur. Böylece

$$\frac{\sqrt{4\delta^3\Delta^3\overline{HM}_1(G)\,\overline{HM}_2(G)}}{(\delta^3+\Delta^3)} \leq \overline{GO_2}(G)$$

elde edilir. □

6.3.3. Teorem

$G,\ n$ noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman,

$$\overline{GO}_2(G) \leq \sqrt{\overline{HM}_1(G)\,\overline{HM}_2(G)} \tag{6.15}$$

dır.

İspat;

Lemma 2'de $a_k = d_G(u) + d_G(v),\ b_k = d_G(u)\,d_G(v)$ alınır ve $a = 2\delta,\ b = \delta^2$ ve $A = 2\Delta,\ B = \Delta^2$ seçilirse $0 < a \leq a_k \leq A < \infty$ ve $0 < b \leq b_k \leq B < \infty$ sağlanır. Lemma 2, G'nin komşu olmayan kenarlarının toplamı üzerinden uygulanırsa,

$$\left[\sum_{uv\notin E(G)} (d_G(u) + d_G(v))\,d_G(u)\ d_G(v)\right]^2 \leq \sum_{uv\notin E(G)} [d_G(u) + d_G(v)]^2 \sum_{uv\notin E(G)} [d_G(u)\ d_G(v)]^2$$

olup

$$[\overline{GO}_2(G)]^2 \leq \sum_{uv\notin E(G)} [d_G(u) + d_G(v)]^2 \sum_{uv\notin E(G)} [d_G(u)\,d_G(v)]^2$$

bulunur. Buradan

$$\overline{GO}_2(G) \leq \sqrt{\overline{HM}_1(G)\,\overline{HM}_2(G)}$$

elde edilir. □

6.3.4. Teorem

$G,\ n$ noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman,

$$|\overline{m}\ \overline{GO}_2(G) - \overline{M}_1(G)\ \overline{M}_2(G)| \leq \left[\frac{\overline{m}}{2}\left(1 - \frac{1+(-1)^{\overline{m}+1}}{2\overline{m}^2}\right)(\Delta-\delta)(\Delta^2-\delta^2)\right] \qquad (6.16)$$

dır.

İspat;

Lemma 3'de $a_k = d_G(u) + d_G(v),\ b_k = d_G(u)d_G(v)$ alınır ve $a = 2\delta$, $b = \delta^2$, $A = 2\Delta$, $B = \Delta^2$ seçilirse $0 < a \leq a_k \leq A < \infty$ ve $0 < b \leq b_k \leq B < \infty$ sağlanır. Lemma 3, G'nin komşu olmayan kenarlarının toplamı üzerinden uygulanırsa,

$$\left|\frac{1}{\overline{m}}\sum_{uv\notin E(G)}[d_G(u)+d_G(v)]\,d_G(u)\,d_G(v) - \left[\frac{1}{\overline{m}}\sum_{uv\notin E(G)} d_G(u) + d_G(v)\right]\left[\frac{1}{\overline{m}}\sum_{uv\notin E(G)} d_G(u)\ d_G(v)\right]\right|$$

$$\leq \left[\frac{1}{4\overline{m}}\left(1 - \frac{1+(-1)^{\overline{m}+1}}{2\overline{m}^2}\right)(2\Delta-2\delta)(\Delta^2-\delta^2)\right]$$

olur. İkinci Gourava tamamlayıcı indeks ve Zagreb tamamlayıcı indekslerinin tanımından

$$|\overline{m}\ \overline{GO}_2(G) - \overline{M}_1(G)\ \overline{M}_2(G)| \leq \frac{\overline{m}}{4}\left[\left(1 - \frac{1+(-1)^{\overline{m}+1}}{2\overline{m}^2}\right)(2\Delta-2\delta)(\Delta^2-\delta^2)\right]$$

elde edilerek

$$|\overline{m}\ \overline{GO}_2(G) - \overline{M}_1(G)\ \overline{M}_2(G)| \leq \left[\frac{\overline{m}}{2}\left(1 - \frac{1+(-1)^{\overline{m}+1}}{2\overline{m}^2}\right)(\Delta-\delta)(\Delta^2-\delta^2)\right]$$

bulunur. □

6.4. Bazı Graf İşlemlerinin İkinci Gourava Tamamlayıcı İndeksi İçin Sınırlar

Bu bölümde G_i $(i = 1,2)$ grafının en küçük derecesi δ_i, en büyük derecesi Δ_i olarak alınacaktır.

6.4.1. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı iki graf olsun. O zaman,

$$\overline{GO}_2(G_1) + \overline{GO}_2(G_2) + n_1 n_2(\delta_1 + \delta_2)(\delta_1\delta_2) \leq \overline{GO}_2(G_1 \cup G_2) \quad \leq \overline{GO}_2(G_1) + \overline{GO}_2(G_2) + n_1 n_2(\Delta_1 + \Delta_2)(\Delta_1\Delta_2) \tag{6.17}$$

dir.

İspat;

İki grafın birleşim işlemi ve ikinci Gourava tamamlayıcı indeksinin tanımından

$$\begin{aligned}\overline{GO}_2(G_1 \cup G_2) = &\sum_{uv \notin E(G_1)} \left[d_{G_1}(u) + d_{G_1}(v)\right] d_{G_1}(u)\, d_{G_1}(v) \\ &+ \sum_{uv \notin E(G_2)} \left[d_{G_2}(u) + d_{G_2}(v)\right] d_{G_2}(u)\, d_{G_2}(v) \\ &+ \sum_{u \in v(G_1)} \left(\sum_{v \in u(G_2)} \left[d_{G_1}(u) + d_{G_2}(v)\right] d_{G_1}(u)\, d_{G_2}(v) \right)\end{aligned}$$

dir. En büyük ve en küçük dereceler kullanılarak

$$\overline{GO}_2(G_1) + \overline{GO}_2(G_2) + n_1 n_2(\delta_1 + \delta_2)(\delta_1\delta_2) \leq \overline{GO}_2(G_1 \cup G_2) \quad \leq \overline{GO}_2(G_1) + \overline{GO}_2(G_2) + n_1 n_2(\Delta_1 + \Delta_2)(\Delta_1\Delta_2)$$

elde edilir. □

6.4.2. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı, m_1 ve m_2 kenarlı iki graf olsun. O zaman,

$$\overline{m_1}(2(\delta_1 + n_2)^3) + \overline{m_2}(2(\delta_2 + n_1)^3) \leq \overline{GO}_2(G_1 + G_2) \leq \overline{m_1}(2(\Delta_1 + n_2)^3) + \overline{m_2}(2(\Delta_2 + n_1)^3) \quad (6.18)$$

dir. Burada $i = 1,2$ için $\bar{G}_i$ grafının kenar sayısı $\overline{m_i}$ dir.

İspat;

İki grafın toplamı ve ikinci Gourava tamamlayıcı indeksinin tanımından

$$\overline{GO}_2(G_1 + G_2) = \sum_{uv \notin E(G_1)} [d_{G_1}(u) + d_{G_1}(v)]\, d_{G_1}(u)\, d_{G_1}(v) + \sum_{uv \notin E(G_2)} [d_{G_2}(u) + d_{G_2}(v)]\, d_{G_2}(u)\, d_{G_2}(v)$$

olup $u \in \mathrm{V}(G_1)$ için $d_G(u) = d_{G_1}(u) + n_2$ ve $v \in \mathrm{V}(G_2)$ için $d_G(v) = d_{G_2}(v) + n_1$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\overline{GO}_2(G_1 + G_2) = \sum_{uv \notin E(G_1)} [d_{G_1}(u) + n_2 + d_{G_1}(v) + n_2]\, (d_{G_1}(u) + n_2) + \sum_{uv \notin E(G_2)} [d_{G_2}(u) + n_1 + d_{G_2}(v) + n_1]\, (d_{G_2}(u) + n_1)$$

elde edilir. En küçük ve en büyük derece kullanılarak

$$\overline{m_1}(2(\delta_1 + n_2)^3) + \overline{m_2}(2(\delta_2 + n_1)^3) \leq \overline{GO}_2(G_1 + G_2) \leq \overline{m_1}(2(\Delta_1 + n_2)^3) + \overline{m_2}(2(\Delta_2 + n_1)^3)$$

bulunur. □

6.4.3. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı, m_1 ve m_2 kenarlı iki graf olsun. O zaman,

$$2\ \alpha(\delta_1+\delta_2)(\delta_1\delta_2) \le \overline{GO}_2(G_1 \square G_2) \le 2\ \alpha(\Delta_1+\Delta_2)(\Delta_1\Delta_2) \qquad (6.19)$$

dir. Burada $G_1 \square G_2$ grafının kenar sayısı $\alpha = n_1m_2 + m_1n_2$ dir.

İspat;

İki grafın kartezyen çarpımı ve ikinci Gourava tamamlayıcı indeksinin tanımından,

$$\overline{GO}_2(G_1 \square G_2) = \sum_{uv\notin E(G_1\square G_2)} \left[d_{G_1}(u_1)+d_{G_2}(u_2)\right] d_{G_1}(u_1)\, d_{G_2}(u_2) + \sum_{uv\notin E(G_1\square G_2)} \left[d_{G_1}(v_1)+d_{G_2}(v_2)\right] d_{G_1}(v_1)\, d_{G_2}(v_2)$$

dir. En küçük ve en büyük derece kullanılarak

$$2\,\alpha(\delta_1+\delta_2)(\delta_1\delta_2) \le \overline{GO}_2(G_1 \square G_2) \le 2\,\alpha(\Delta_1+\Delta_2)(\Delta_1\Delta_2)$$

elde edilir. □

6.4.4. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı, m_1 ve m_2 kenarlı iki graf olsun. O zaman,

$$2\,\beta(n_2\delta_1+\delta_2)(n_2\delta_1\delta_2) \le \overline{GO}_2(G_1[G_2]) \le 2\,\beta(n_2\Delta_1+\Delta_2)(n_2\Delta_1\Delta_2) \qquad (6.20)$$

dir. Burada $G_1[G_2]$ grafının kenar sayısı $\beta = n_1m_2 + m_1{n_2}^2$ dir.

İspat;

İki grafın bileşkesi ve ikinci Gourava tamamlayıcı indeksinin tanımından,

$$\overline{GO}_2(G_1[G_2]) = \sum_{uv \notin E(G_1[G_2])} [n_2\, d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2)]\ [n_2\, d_{G_1}(u_1)\, d_{G_2}(u_2)]$$
$$+ \sum_{uv \notin E(G_1[G_2])} \left[n_2\, d_{G_1}(v_1) + d_{G_2}(v_2)\right][\, n_2\, d_{G_1}(v_1)\, d_{G_2}(v_2)]$$

dir.

Burada en küçük derece ve en büyük derece göz önüne alındığında

$$2\,\beta(n_2\delta_1 + \delta_2)(n_2\delta_1\delta_2)\ \leq \overline{GO}_2(G_1[G_2]) \leq 2\,\beta(n_2\Delta_1 + \Delta_2)(n_2\Delta_1\Delta_2)$$

elde edilir. □

7. BİRİNCİ VE İKİNCİ ALFA GOURAVA TAMAMLAYICI İNDEKSLERİNİN İNCELENMESİ

Bu bölümde, birinci ve ikinci Alfa Gourava tamamlayıcı indeksleri tanımlanarak bu indeksler ile Y-tamamlayıcı, F-tamamlayıcı indeksleri, Zagreb ve Hyper-Zagreb tamamlayıcı indeksleri arasındaki ilişkiler elde edilmiş olup bazı graf işlemlerinin bu indeksler için sınırları bulunmuştur.

Ayrıca burada G(n noktalı, m kenarlı) ve çalışılan diğer graflar basit bağlantılı graf olarak kabul edilecektir.

7.1. Birinci Alfa Gourava Tamamlayıcı İndeks ile Bazı Tamamlayıcı İndeksler Arasındaki İlişkiler

G grafının birinci Alfa Gourava tamamlayıcı indeksi

$$\overline{AGO}_1(G) = \sum_{uv \notin E(G)} d_G(u)^2 + d_G(v)^2 + d_G(u)\, d_G(v) \tag{7.1}$$

olarak tanımlanır.

7.1.1. Teorem

G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman G grafının birinci Alfa Gourava tamamlayıcı indeksi için alt ve üst sınırlar

$$\bar{m}(3\delta^2) \leq \overline{AGO_1}(G) \leq \bar{m}(3\Delta^2) \tag{7.2}$$

dir. Burada $\bar{G}$ grafının kenar sayısı $\bar{m}$ dir.

İspat;

Birinci Alfa Gourava tamamlayıcı indeksinde dereceleri en küçük derece olarak alındığında ifade küçülmüş olur ve alt sınırı elde edilir. Benzer şekilde en büyük dereceleri alarak da üst sınır elde edilir. □

7.1.2. Teorem

G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman G grafının birinci Alfa Gourava tamamlayıcı indeksi için bir alt sınır;

$$\frac{\sqrt{\overline{m}\left(\overline{m}\ 32\ \Delta^2\delta^4\bar{F}(G)+\ 8\ \delta^2\Delta^2\overline{HM}_2(G)\right)}}{\delta^2+2\Delta^2} \leq \overline{AGO}_1(G) \qquad (7.3)$$

şeklindedir.

İspat;

Lemma 1'de $a_k = d_G(u)^2 + d_G(v)^2 + d_G(u)\ d_G(v), b_k = 1$ alınır ve $a = 3\delta^2, b = 1, A = 3\Delta^2,\ B = 2$ seçilirse $0 < a \leq a_k \leq A < \infty$ ve $0 < b \leq b_k \leq B < \infty$ sağlanır. Lemma 1, G'nin komşu olmayan kenarlarının toplamı üzerinden uygulanırsa,

$$\frac{\overline{m}\sum_{uv\notin E(G)}(d_G(u)^2 + d_G(v)^2 + d_G(u)\ \ d_G(v)\ )^2}{[\overline{AGO}_1(G)]^2} \leq \frac{(3\delta^2\ 1 + 3\Delta^2\ 2)^2}{4\ 3\delta^2\ 3\Delta^2\ 2}$$

elde edilir. Bazı tamamlayıcı indekslerin tanımları kullanılarak,

$$\left[\sum_{uv\notin E(G)}[(d_G(u)^2 + d_G(v)^2)^2 + 2(d_G(u)^2 + d_G(v)^2)\ d_G(u)\ \ d_G(v) + d_G(u)^2\ d_G(v)^2\ ]\right]\overline{m}$$

$$\geq \overline{m}\left(\overline{m}\ 4\delta^2\bar{F}(G) + \overline{HM}_2(G)\right)$$

bulunur. Böylece

$$\frac{\sqrt{\overline{m}\left(\overline{m}\ 32\ \Delta^2\delta^4\bar{F}(G)+\ 8\ \delta^2\Delta^2\overline{HM}_2(G)\right)}}{\delta^2+2\Delta^2} \leq \overline{AGO}_1(G)$$

elde edilir. □

7.1.3. Teorem

G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman,

$$\overline{AGO}_1(G) \leq \sqrt{\bar{m}\left(4\bar{m}\Delta^2\bar{F}(G) + \overline{HM}_2(G)\right)} \tag{7.4}$$

dir.

İspat;

Lemma 2'de $a_k = d_G(u)^2 + d_G(v)^2 + d_G(u)\, d_G(v)$, $b_k = 1$ alınır ve $a = 3\delta^2$, $b = 1$, $A = 3\Delta^2$, $B = 2$ seçilirse $0 < a \leq a_k \leq A < \infty$ ve $0 < b \leq b_k \leq B < \infty$ sağlanır. Lemma 2, G'nin komşu olmayan kenarlarının toplamı üzerinden uygulanırsa,

$$\left[\sum_{uv\notin E(G)} [d_G(u)^2 + d_G(v)^2] + d_G(u)\ d_G(v)\right]^2 \leq \bar{m} \sum_{uv\notin E(G)} [d_G(u)^2 + d_G(v)^2 + \ d_G(u)\ d_G(v)]^2$$

elde edilir. Buradan

$$[\overline{AGO}_1(G)]^2 \leq \left[\sum_{uv\notin E(G)} (d_G(u)^2 + d_G(v)^2)^2 + 2(d_G(u)^2 + d_G(v)^2)\, d_G(u)\, d_G(v) + d_G(u)^2\, d_G(v)^2\right]\bar{m}$$

olup, Hyper-Zagreb tamamlayıcı indeksi ve F-tamamlayıcı indeksi tanımından

$$\overline{AGO}_1(G) \leq \sqrt{\bar{m}\left(4\bar{m}\Delta^2\bar{F}(G) + \overline{HM}_2(G)\right)}$$

elde edilir. □

7.1.4. Teorem

G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman,

$$|\overline{AGO}_1(G) - \bar{F}(G) - \bar{M}_2(G)| \leq \left[\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1+(-1)^{\bar{m}+1}}{2\bar{m}^2}\right)(3\Delta^2 - 3\delta^2)\right] \quad (7.5)$$

dir.

İspat;

Lemma 3'de $a_k = d_G(u)^2 + d_G(v)^2 + d_G(u)\, d_G(v)$, $b_k = 1$ alınır ve $a = 3\delta^2$, $b = 1$, $A = 3\Delta^2$, $B = 2$ seçilirse $0 < a \leq a_k \leq A < \infty$ ve $0 < b \leq b_k \leq B < \infty$ sağlanır. Lemma 3, G'nin komşu olmayan kenarlarının toplamı üzerinden uygulanırsa,

$$\left|\frac{1}{\bar{m}} \sum_{uv \notin E(G)} d_G(u)^2 + d_G(v)^2 + d_G(u)\, d_G(v) - \left[\frac{1}{\bar{m}} \sum_{uv \notin E(G)} d_G(u)^2 + d_G(v)^2 + d_G(u)\, d_G(v)\right]\left[\frac{1}{\bar{m}}\bar{m}\right]\right|$$

$$\leq \left[\frac{1}{4\bar{m}}\left(1 - \frac{1+(-1)^{\bar{m}+1}}{2\bar{m}^2}\right)(3\Delta^2 - 3\delta^2)\right]$$

olup

$$\frac{1}{\bar{m}}|\overline{AGO}_1(G) - (\bar{F}(G) + \bar{M}_2(G))| \leq \frac{1}{4\,\bar{m}}\left[\left(1 - \frac{1+(-1)^{\bar{m}+1}}{2\bar{m}^2}\right)(3\Delta^2 - 3\delta^2)\right]$$

elde edilir. Buradan

$$|\overline{AGO}_1(G) - \bar{F}(G) - \bar{M}_2(G)| \leq \left[\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1+(-1)^{\bar{m}+1}}{2\bar{m}^2}\right)(3\Delta^2 - 3\delta^2)\right]$$

bulunur. □

7.2. Bazı Graf İşlemleri ile Birinci Alfa Gourava Tamamlayıcı İndeksi İçin Sınırlar

Bu bölümde G_i $(i = 1,2)$ grafının en küçük derecesi δ_i, en büyük derecesi Δ_i olarak alınacaktır.

7.2.1. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı iki graf olsun. O zaman,

$$\overline{AGO}_1(G_1) + \overline{AGO}_1(G_2) + n_1n_2({\delta_1}^2 + {\delta_2}^2 + \delta_1\delta_2) \leq \overline{AGO}_1(G_1 \cup G_2) \leq \overline{AGO}_1(G_1) + \overline{AGO}_1(G_2) + n_1n_2({\Delta_1}^2 + {\Delta_2}^2 + \Delta_1\Delta_2) \quad (7.6)$$

dir.

İspat;

İki grafın birleşim işlemi ve birinci Alfa Gourava tamamlayıcı indeksinin tanımından

$$\begin{aligned}\overline{AGO}_1(G_1 \cup G_2) = &\sum_{uv \notin E(G_1)} d_{G_1}(u)^2 + d_{G_1}(v)^2 + d_{G_1}(u)\, d_{G_1}(v) \\ &+ \sum_{uv \notin E(G_2)} d_{G_2}(u)^2 + d_{G_2}(v)^2 + d_{G_2}(u)\, d_{G_2}(v) \\ &+ \sum_{u \in v(G_1)} \left(\sum_{v \in u(G_2)} d_{G_1}(u)^2 + d_{G_2}(v)^2 + d_{G_1}(u)\, d_{G_2}(v) \right)\end{aligned}$$

dir. En büyük ve en küçük dereceler kullanılarak

$$\overline{AGO}_1(G_1) + \overline{AGO}_1(G_2) + n_1n_2({\delta_1}^2 + {\delta_2}^2 + \delta_1\delta_2) \leq \overline{AGO}_1(G_1 \cup G_2) \leq \overline{AGO}_1(G_1) + \overline{AGO}_1(G_2) + n_1n_2({\Delta_1}^2 + {\Delta_2}^2 + \Delta_1\Delta_2)$$

elde edilir. □

7.2.2. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı, m_1 ve m_2 kenarlı iki graf olsun. O zaman,

$$\overline{m_1}(3(\delta_1+n_2)^2)+\overline{m_2}(3(\delta_2+n_1)^2)\le \overline{AGO}_1(G_1+G_2)\le \overline{m_1}(3(\Delta_1+n_2)^2)+\overline{m_2}(3(\Delta_2+n_1)^2) \quad (7.7)$$

dir. Burada $i=1,2$ için $\bar{G}_i$ grafının kenar sayısı $\overline{m_i}$ dir.

İspat;

İki grafın toplamı ve birinci Alfa Gourava tamamlayıcı indeksinin tanımından

$$\overline{AGO}_1(G_1+G_2)=\sum_{uv\notin E(G_1)} d_{G_1}(u)^2+d_{G_1}(v)^2+d_{G_1}(u)\,d_{G_1}(v)$$
$$+\sum_{uv\notin E(G_2)} d_{G_2}(u)^2+d_{G_2}(v)^2+d_{G_2}(u)\,d_{G_2}(v)$$

olup $u\in \mathrm{V}(G_1)$için $d_G(u)=d_{G_1}(u)+n_2$ ve $v\in \mathrm{V}(G_2)$ için $d_G(v)=d_{G_2}(v)+n_1$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\overline{AGO}_1(G_1+G_2)=\sum_{uv\notin E(G_1)} \left(d_{G_1}(u)+n_2\right)^2+(d_{G_1}(v)+n_2)^2+(d_{G_1}(u)+n_2)\left(d_{G_1}(v)+n_2\right)$$
$$+\sum_{uv\notin E(G_2)} (d_{G_2}(u)+n_1)^2+(d_{G_2}(v)+n_1)^2+(\,d_{G_2}(u)+n_1)\,(\,d_{G_2}(v)+n_1)$$

elde edilir. En küçük ve en büyük derece kullanılarak

$$\overline{m_1}(3(\delta_1+n_2)^2)+\overline{m_2}(3(\delta_2+n_1)^2)\le \overline{AGO}_1(G_1+G_2)\le \overline{m_1}(3(\Delta_1+n_2)^2)+\overline{m_2}(3(\Delta_2+n_1)^2)$$

bulunur. □

7.2.3. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı, m_1 ve m_2 kenarlı iki graf olsun. O zaman,

$$2\,\alpha\,({\delta_1}^2+{\delta_2}^2+\delta_1\delta_2)\le \overline{AGO}_1(G_1\,\square\,G_2)\le 2\,\alpha({\Delta_1}^2+{\Delta_2}^2+\Delta_1\Delta_2) \quad (7.8)$$

dir. Burada $G_1 \square G_2$ grafının kenar sayısı $\alpha = n_1 m_2 + m_1 n_2$ dir.

İspat;

İki grafın kartezyen çarpımı ve birinci Alfa Gourava tamamlayıcı indeksinin tanımından

$$\overline{AGO}_1(G_1 \square G_2) = \sum_{uv \notin E(G_1 \square G_2)} [d_{G_1}(u_1)^2 + d_{G_2}(u_2)^2 + d_{G_1}(u_1)\, d_{G_2}(u_2)]$$

$$+ \sum_{uv \notin E(G_1 \square G_2)} [d_{G_1}(v_1)^2 + d_{G_2}(v_2)^2 + d_{G_1}(v_1)\, d_{G_2}(v_2)]$$

dir. En küçük ve en büyük derece kullanılarak

$$2\,\alpha\,({\delta_1}^2 + {\delta_2}^2 + \delta_1\delta_2) \leq \overline{AGO}_1(G_1 \square G_2) \leq 2\,\alpha({\Delta_1}^2 + {\Delta_2}^2 + \Delta_1\Delta_2)$$

elde edilir. □

7.2.4. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı, m_1 ve m_2 kenarlı iki graf olsun. O zaman,

$$2\beta\,({n_2}^2\,{\delta_1}^2 + {\delta_2}^2 + n_2\delta_1\delta_2) \leq \overline{AGO}_1(G_1[G_2]) \leq 2\,\beta({n_2}^2\,{\Delta_1}^2 + {\Delta_2}^2 + n_2\Delta_1\Delta_2) \qquad (7.9)$$

dir. Burada $G_1[G_2]$ grafının kenar sayısı $\beta = n_1 m_2 + m_1 {n_2}^2$ dir.

İspat;

İki grafın bileşkesi ve birinci Alfa Gourava tamamlayıcı indeksinin tanımından

$$\overline{AGO}_1(G_1[G_2]) = \sum_{uv \notin E(G_1[G_2])} [{n_2}^2\, d_{G_1}(u_1)^2 + d_{G_2}(u_2)^2] + \; [n_2\, d_{G_1}(u_1)\, d_{G_2}(u_2)]$$

$$+ \sum_{uv \notin E(G_1[G_2])} [{n_2}^2\, d_{G_1}(v_1)^2 + d_{G_2}(v_2)^2] + [n_2\, d_{G_1}(v_1)\;\, d_{G_2}(v_2)]$$

dir. Burada en küçük derece ve en büyük derece göz önüne alındığında

$$2\,\beta\,({n_2}^2\,{\delta_1}^2+{\delta_2}^2+n_2\delta_1\delta_2)\leq\ \overline{AGO}_1(G_1[G_2])\leq 2\,\beta(\,{n_2}^2\,{\Delta_1}^2+{\Delta_2}^2+n_2\Delta_1\Delta_2)$$

olduğu görülmektedir. □

7.3. İkinci Alfa Gourava Tamamlayıcı İndeks ile Bazı Tamamlayıcı İndeksler Arasındaki İlişkiler

G grafının ikinci Alfa Gourava tamamlayıcı indeksi

$$\overline{AGO_2}(G)=\sum_{uv\notin E(G)}(d_G(u)^2+d_G(v)^2)d_G(u)d_G(v) \tag{7.10}$$

şeklinde tanımlanır.

7.3.1. Teorem

G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman G grafının ikinci Alfa Gourava tamamlayıcı indeksi için alt ve üst sınırlar

$$\overline{m}(2\delta^4)\leq\overline{AGO_2}(G)\leq\overline{m}(2\Delta^4) \tag{7.11}$$

dir. Burada $\bar{G}$ grafının kenar sayısı $\overline{m}$ dir.

İspat;

İkinci Alfa Gourava tamamlayıcı indeksinde dereceleri en küçük alarak alt sınır ve dereceleri en büyük alarak da üst sınır elde edilir. □

7.3.2. Teorem

G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman G grafının ikinci Alfa Gourava tamamlayıcı indeksi için bir alt sınır

$$\frac{\sqrt{\overline{m}\ 8\ \ \delta^6\Delta^4\overline{F}(G)\ \overline{HM}_2(G)}}{(\delta^4+\Delta^4)}\leq\overline{AGO_2}(G) \tag{7.12}$$

şeklindedir.

İspat;

Lemma 1'de $a_k = d_G(u)^2 + d_G(v)^2$ ve $b_k = d_G(u)\, d_G(v)$ alınır ve $a = 2\delta^2,\ b = \delta^2$ ve $A = 2\Delta^2$, $B = \Delta^2$ seçilirse $0 < a \leq a_k \leq A < \infty$ ve $0 < b \leq b_k \leq B < \infty$ sağlanır. Lemma 1, G'nin komşu olmayan kenarlarının toplamı üzerinden uygulanırsa,

$$\frac{\sum_{uv\notin E(G)}((d_G(u)^2 + d_G(v)^2)^2 \sum_{uv\notin E(G)}(d_G(u)\, d_G(v)\,)^2}{[\overline{AGO}_2(G)]^2} \leq \frac{\left((2\delta^2\delta^2) + (2\Delta^2\Delta^2)\right)^2}{4(\,2\delta^2\delta^2)(2\Delta^2\Delta^2)}$$

elde edilir. Bazı tamamlayıcı indekslerin tanımları kullanılarak,

$$\left[\sum_{uv\notin E(G)}((d_G(u)^2 + d_G(v)^2)^2\right]\left[\sum_{uv\notin E(G)}(d_G(u)\, d_G(v))^2\right]$$

$$\geq \bar{m}\left(2\delta^2\bar{F}(G)\,\overline{HM}_2(G)\right)$$

bulunur. Böylece

$$\frac{\sqrt{\bar{m}\ 8\ \ \delta^6\Delta^4\bar{F}(G)\,\overline{HM}_2(G)}}{(\delta^4 + \Delta^4)} \leq \overline{AGO_2}(G)$$

elde edilir. □

7.3.3. Teorem

G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman,

$$\overline{AGO}_2(G) \leq \sqrt{\bar{m}\bar{F}(G)\overline{HM}_2(G)2\Delta^2} \qquad (7.13)$$

dır.

İspat;

Lemma 2'de $a_k = d_G(u)^2 + d_G(v)^2$ ve $b_k = d_G(u)\, d_G(v)$ alınır ve $a = 2\delta^2$, $b = \delta^2$ ve $A = 2\Delta^2$, $B = \Delta^2$ seçilirse $0 < a \leq a_k \leq A < \infty$ ve $0 < b \leq b_k \leq B < \infty$ sağlanır. Lemma 2, G'nin komşu olmayan kenarlarının toplamı üzerinden uygulanırsa,

$$\left[\sum_{uv \notin E(G)} (d_G(u)^2 + d_G(v)^2)\, d_G(u)\ d_G(v)\right]^2 \leq \sum_{uv \notin E(G)} [d_G(u)^2 + d_G(v)^2]^2 \sum_{uv \notin E(G)} [d_G(u)\ d_G(v)]^2$$

olup. Buradan

$$\overline{AGO}_2(G) \leq \sqrt{\bar{m}\bar{F}(G)\overline{HM}_2(G)2\Delta^2}$$

elde edilir. □

7.3.4. Teorem

G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman,

$$|\bar{m}\ \overline{AGO}_2(G) - \bar{F}(G)\ \bar{M}_2(G)| \leq \left[\frac{\bar{m}}{2}\left(1 - \frac{1 + (-1)^{\bar{m}+1}}{2\bar{m}^2}\right)(\Delta^2 - \delta^2)^2\right] \qquad (7.14)$$

dir.

İspat;

Lemma 3'de $a_k = d_G(u)^2 + d_G(v)^2$ ve $b_k = d_G(u)\, d_G(v)$ alınır ve $a = 2\delta^2$, $b = \delta^2$ ve $A = 2\Delta^2$, $B = \Delta^2$ seçilirse $0 < a \leq a_k \leq A < \infty$ ve $0 < b \leq b_k \leq B < \infty$ sağlanır.

Lemma 3, G'nin komşu olmayan kenarlarının toplamı üzerinden uygulanırsa,

$$\left|\frac{1}{\overline{m}}\sum_{uv\notin E(G)}[d_G(u)^2+d_G(v)^2]\,d_G(u)\;d_G(v)-\left[\frac{1}{\overline{m}}\sum_{uv\notin E(G)}d_G(u)^2+\;d_G(v)^2\right]\left[\frac{1}{\overline{m}}\sum_{uv\notin E(G)}d_G(u)\,d_G(v)\right]\right|$$

$$\leq\left[\frac{1}{4\overline{m}}\left(1-\frac{1+(-1)^{\overline{m}+1}}{2\overline{m}^2}\right)2(\Delta^2-\delta^2)^2\right]$$

olur. İkinci Alfa Gourava tamamlayıcı indeksi ve bazı tamamlayıcı indeksler tanımından

$$|\overline{m}\,\overline{AGO}_2(G)-\bar{F}(G)\,\bar{M}_2(G)|\leq\frac{\overline{m}}{4}\left[\left(1-\frac{1+(-1)^{\overline{m}+1}}{2\overline{m}^2}\right)2(\Delta^2-\delta^2)^2\right]$$

elde edilerek

$$|\overline{m}\,\overline{AGO}_2(G)-\bar{F}(G)\,\bar{M}_2(G)|\leq\left[\frac{\overline{m}}{2}\left(1-\frac{1+(-1)^{\overline{m}+1}}{2\overline{m}^2}\right)(\Delta^2-\delta^2)^2\right]$$

bulunur. □

7.4. Bazı Graf İşlemlerinin İkinci Alfa Gourava Tamamlayıcı İndeksi İçin Sınırlar

Bu bölümde $G_i\ (i=1,2)$ grafının en küçük derecesi δ_i, en büyük derecesi Δ_i olarak alınacaktır.

7.4.1. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı iki graf olsun. O zaman,

$$\overline{AGO}_2(G_1)+\overline{AGO}_2(G_2)+n_1n_2({\delta_1}^2+{\delta_2}^2)(\delta_1\delta_2)\leq\overline{AGO}_2(G_1\cup G_2)\leq\overline{AGO}_2(G_1)+\overline{AGO}_2(G_2)+n_1n_2({\Delta_1}^2+{\Delta_2}^2)(\Delta_1\Delta_2)\qquad(7.15)$$

dir.

İspat;

İki grafın birleşim işlemi ve ikinci Alfa Gourava tamamlayıcı indeksinin tanımından,

$$\overline{GO}_2(G_1 \cup G_2) = \sum_{uv \notin E(G_1)} (d_{G_1}(u)^2 + d_{G_1}(v)^2)\, d_{G_1}(u)\, d_{G_1}(v) + \sum_{uv \notin E(G_2)} (d_{G_2}(u)^2 + d_{G_2}(v)^2)\, d_{G_2}(u)\, d_{G_2}(v) + \sum_{u \in v(G_1)} \left(\sum_{v \in u(G_2)} (d_{G_1}(u)^2 + d_{G_2}(v)^2)\, d_{G_1}(u)\, d_{G_2}(v) \right)$$

dir. En küçük ve en büyük dereceler kullanılarak

$$\overline{AGO}_2(G_1) + \overline{AGO}_2(G_2) + n_1 n_2({\delta_1}^2 + {\delta_2}^2)(\delta_1 \delta_2) \leq \overline{AGO}_2(G_1 \cup G_2) \leq \overline{AGO}_2(G_1) + \overline{AGO}_2(G_2) + n_1 n_2({\Delta_1}^2 + {\Delta_2}^2)(\Delta_1 \Delta_2)$$

elde edilir. □

7.4.2. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı, m_1 ve m_2 kenarlı iki graf olsun. O zaman,

$$\overline{m_1}(2(\delta_1 + n_2)^4) + \overline{m_2}(2(\delta_2 + n_1)^4) \leq \overline{AGO}_2(G_1 + G_2) \leq \overline{m_1}(2(\Delta_1 + n_2)^4) + \overline{m_2}(2(\Delta_2 + n_1)^4) \quad (7.16)$$

dir. Burada $\bar{G}_i$ grafının kenar sayısı $\overline{m_i}$ dir.

İspat;

İki grafın toplamı ve ikinci Alfa Gourava tamamlayıcı indeksinin tanımından,

$$\overline{AGO}_2(G_1 + G_2) = \sum_{uv \notin E(G_1)} [d_{G_1}(u)^2 + d_{G_1}(v)^2]\, d_{G_1}(u)\, d_{G_1}(v) + \sum_{uv \notin E(G_2)} [d_{G_2}(u)^2 + d_{G_2}(v)^2]\, d_{G_2}(u)\, d_{G_2}(v)$$

olup $u \in V(G_1)$ için $d_G(u) = d_{G_1}(u) + n_2$ ve $v \in V(G_2)$ için $d_G(v) = d_{G_2}(v) + n_1$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\overline{AGO}_2(G_1 + G_2) = \sum_{uv \notin E(G_1)} \left[\left(d_{G_1}(u) + n_2\right)^2 + (d_{G_1}(v) + n_2)^2\right] (d_{G_1}(u) + n_2)\ \left(d_{G_1}(v) + n_2\right)$$
$$+ \sum_{uv \notin E(G_2)} [(d_{G_2}(u) + n_1)^2 + (d_{G_2}(v) + n_1)^2](d_{G_2}(u) + n_1)\ (d_{G_2}(v) + n_1)$$

elde edilir. En küçük ve en büyük derece kullanılarak

$$\overline{m_1}(2(\delta_1 + n_2)^4) + \overline{m_2}(2(\delta_2 + n_1)^4) \leq \overline{AGO}_2(G_1 + G_2) \leq \overline{m_1}(2(\Delta_1 + n_2)^4) + \overline{m_2}(2(\Delta_2 + n_1)^4)$$

bulunur. □

7.4.3. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı, m_1 ve m_2 kenarlı iki graf olsun. O zaman,

$$2\,\alpha({\delta_1}^3\delta_2 + \delta_2{}^3\delta_1) \leq \overline{AGO}_2(G_1 \square G_2) \leq 2\,\alpha\left({\Delta_1}^3\Delta_2 + \Delta_1{\Delta_2}^3\right) \qquad (7.17)$$

dir. Burada $G_1 \square G_2$ grafının kenar sayısı $\alpha = n_1m_2 + m_1n_2$ dir.

İspat;

İki grafın kartezyen çarpımı ve ikinci Alfa Gourava tamamlayıcı indeksinin tanımından,

$$\overline{AGO}_2(G_1 \square G_2) = \sum_{uv \notin E(G_1 \square G_2)} \left[d_{G_1}(u_1)^2 + d_{G_2}(u_2)^2\right] d_{G_1}(u_1)\ d_{G_2}(u_2)$$

$$+ \sum_{uv \notin E(G_1 \square G_2)} \left[d_{G_1}(v_1)^2 + d_{G_2}(v_2)^2\right] d_{G_1}(v_1)\ d_{G_2}(v_2)$$

dir. En küçük ve en büyük derece kullanılarak

$$2\,\alpha\,({\delta_1}^3\delta_2 + \delta_2{}^3\delta_1) \leq \overline{AGO}_2(G_1 \square G_2) \leq 2\,\alpha\left({\Delta_1}^3\Delta_2 + \Delta_1{\Delta_2}^3\right)$$

elde edilir. □

7.4.4. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı, m_1 ve m_2 kenarlı iki graf olsun. O zaman,

$$2\,\beta({n_2}^2\,{\delta_1}^2 + {\delta_2}^2)(n_2\delta_1\delta_2) \leq \overline{AGO}_2(G_1[G_2]) \leq 2\,\beta\,({n_2}^2{\Delta_1}^2 + {\Delta_2}^2)\,(n_2\Delta_1\Delta_2) \quad (7.18)$$

dir. Burada $G_1[G_2]$ grafının kenar sayısı $\beta = n_1m_2 + m_1{n_2}^2$ dir.

İspat;

İki grafın bileşkesi ve ikinci Alfa Gourava tamamlayıcı indeksinin tanımından,

$$\overline{AGO}_2(G_1[G_2]) = \sum_{uv \notin E(G_1[G_2])} \left[{n_2}^2 d_{G_1}(u_1)^2 + d_{G_2}(u_2)^2\right]\; n_2\, d_{G_1}(u_1)\, d_{G_2}(u_2)$$

$$+ \sum_{uv \notin E(G_1[G_2])} \left[{n_2}^2\, d_{G_1}(v_1)^2 + d_{G_2}(v_2)^2\right] n_2\, d_{G_1}(v_1)\, d_{G_2}(v_2)$$

dir. Burada en küçük derece ve en büyük derece göz önüne alındığında

$$2\,\beta({n_2}^2\,{\delta_1}^2 + {\delta_2}^2)(n_2\delta_1\delta_2) \leq \overline{AGO}_2(G_1[G_2]) \leq 2\,\beta\,({n_2}^2{\Delta_1}^2 + {\Delta_2}^2)\,(n_2\Delta_1\Delta_2)$$

elde edilir. □

8. BİRİNCİ VE İKİNCİ GAMA GOURAVA TAMAMLAYICI İNDEKSLERİN İNCELENMESİ

Bu bölümde, birinci ve ikinci Gama Gourava tamamlayıcı indeksleri tanımlanarak bu indeksler ile Y-tamamlayıcı, F-tamamlayıcı indeksleri, Zagreb ve Hyper-Zagreb tamamlayıcı indeksleri arasındaki ilişkiler elde edilmiş olup bazı graf işlemlerinin bu indeksler için sınırları bulunmuştur.

Ayrıca burada G(n noktalı, m kenarlı) ve çalışılan diğer graflar basit bağlantılı graf olarak kabul edilecektir.

8.1. Birinci Gama Gourava Tamamlayıcı İndeks ile Bazı Tamamlayıcı İndeksler Arasındaki İlişkiler

G grafının birinci Gama Gourava tamamlayıcı indeksi

$$\overline{GGO}_1(G) = \sum_{uv \notin E(G)} d_G(u)^3 + d_G(v)^3 + d_G(u)\, d_G(v) \tag{8.1}$$

şeklinde tanımlanır.

8.1.1. Teorem

G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman G grafının birinci Gama Gourava tamamlayıcı indeksi için alt ve üst sınırlar

$$\bar{m}(2\delta^3 + \delta^2) \leq \overline{GGO_1}(G) \leq \bar{m}(2\Delta^3 + \Delta^2) \tag{8.2}$$

dir. Burada $\bar{G}$ grafının kenar sayısı $\bar{m}$ dir.

İspat;

Birinci Gama Gourava tamamlayıcı indeksinde dereceleri en küçük derece olarak alındığında ifade küçülmüş olur ve alt sınırı elde edilir. Benzer şekilde en büyük dereceleri alarak da üst sınır elde edilir. □

8.1.2. Teorem

G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman G grafının birinci Gama Gourava tamamlayıcı indeksi için bir alt sınır;

$$\frac{\sqrt{\overline{m}(\overline{m}2\delta^3\bar{Y}(G) + 2\bar{Y}(G)\bar{M}_2(G) + \overline{HM}_2(G))8(2\delta^3+\delta^2)(2\Delta^3+\Delta^2)}}{(2\delta^3+\delta^2+2\Delta^2+4\Delta^3)} \leq \overline{GGO}_1(G) \quad (8.3)$$

şeklindedir.

İspat;

Lemma 1'de $a_k = d_G(u)^3 + d_G(v)^3 + d_G(u)\, d_G(v)$, $b_k = 1$ alınır ve $a = 2\delta^3 + \delta^2$, $b = 1$, $A = 2\Delta^3 + \Delta^2$, $B = 2$ seçilirse $0 < a \leq a_k \leq A < \infty$ ve $0 < b \leq b_k \leq B < \infty$ sağlanır. Lemma 1, G'nin komşu olmayan kenarlarının toplamı üzerinden uygulanırsa,

$$\frac{\overline{m}\ \sum_{uv\notin E(G)}(d_G(u)^3 + d_G(v)^3 + d_G(u)\, d_G(v)\,)^2}{[\overline{GGO}_1(G)]^2} \leq \frac{(2\delta^3+\delta^2+2\Delta^2+4\Delta^3)^2}{8(2\delta^3+\delta^2)(2\Delta^3+\Delta^2)}$$

elde edilir. Hyper-Zagreb tamamlayıcı indeks, Zagreb tamamlayıcı indeks ve Y-tamamlayıcı indeksi tanımları kullanılarak,

$$\left[\sum_{uv\notin E(G)} [(d_G(u)^3 + d_G(v)^3)^2 + 2(d_G(u)^3 + d_G(v)^3)d_G(u)\, d_G(v) + d_G(u)^2 d_G(v)^2\,]\right]\overline{m}$$

$$\geq\ \overline{m}(\overline{m}2\delta^3\bar{Y}(G) + 2\bar{Y}(G)\bar{M}_2(G) + \overline{HM}_2(G))$$

bulunur. Böylece

$$\frac{\sqrt{\overline{m}(\overline{m}2\delta^3\bar{Y}(G) + 2\bar{Y}(G)\bar{M}_2(G) + \overline{HM}_2(G))8(2\delta^3+\delta^2)(2\Delta^3+\Delta^2)}}{(2\delta^3+\delta^2+2\Delta^2+4\Delta^3)} \leq \overline{GGO}_1(G)$$

elde edilir. □

8.1.3. Teorem

G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman,

$$\overline{GGO}_1(G) \leq \sqrt{\bar{m}\left(\bar{m}2\Delta^3\bar{Y}(G) + 2\bar{Y}(G)\bar{M}_2(G) + \overline{HM}_2(G)\right)} \tag{8.4}$$

dir.

İspat;

Lemma 2'de $a_k = d_G(u)^3 + d_G(v)^3 + d_G(u)\, d_G(v)$, $b_k = 1$ alınır ve $a = 2\delta^3 + \delta^2$, $b = 1$, $A = 2\Delta^3 + \Delta^2$, $B = 2$ seçilirse $0 < a \leq a_k \leq A < \infty$ ve $0 < b \leq b_k \leq B < \infty$ sağlanır. Lemma 2, G'nin komşu olmayan kenarlarının toplamı üzerinden uygulanırsa,

$$\left[\sum_{uv\notin E(G)} [d_G(u)^3 + d_G(v)^3] + d_G(u)\, d_G(v)\right]^2 \leq \sum_{uv\notin E(G)} [d_G(u)^3 + d_G(v)^3 + \, d_G(u)\, \, d_G(v)]^2 \, \bar{m}$$

elde edilir. Buradan

$$[\overline{GGO}_1(G)]^2 \leq \left[\sum_{uv\notin E(G)} [d_G(u)^3 + d_G(v)^3]^2 + 2[\, d_G(u)^3 + d_G(v)^3]\, d_G(u)\, d_G(v) + d_G(u)^2 d_G(v)^2\right]\bar{m}$$

olup,

$$\overline{GGO}_1(G) \leq \sqrt{\bar{m}\left(\bar{m}2\Delta^3\bar{Y}(G) + 2\bar{Y}(G)\bar{M}_2(G) + \overline{HM}_2(G)\right)}$$

elde edilir. □

8.1.4. Teorem

G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman,

$$|\overline{GGO}_1(G) - \bar{Y}(G) - \bar{M}_2(G)| \leq \left[\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1 + (-1)^{\bar{m}+1}}{2\bar{m}^2}\right)(2\Delta^3 + \Delta^2 - 2\delta^3 - \delta^2)\right] \tag{8.5}$$

dir.

İspat;

Lemma 3'de $a_k = d_G(u)^3 + d_G(v)^3 + d_G(u)\, d_G(v)$, $b_k = 1$ alınır ve $a = 2\delta^3 + \delta^2$, $b = 1$, $A = 2\Delta^3 + \Delta^2$, $B = 2$ seçilirse $0 < a \leq a_k \leq A < \infty$ ve $0 < b \leq b_k \leq B < \infty$ sağlanır. Lemma 3, G'nin komşu olmayan kenarlarının toplamı üzerinden uygulanırsa,

$$\left|\frac{1}{\bar{m}} \sum_{uv \notin E(G)} d_G(u)^3 + d_G(v)^3 + d_G(u)\, d_G(v) - \left[\frac{1}{\bar{m}} \sum_{uv \notin E(G)} d_G(u)^3 + d_G(v)^3 + d_G(u)\, d_G(v)\right]\left[\frac{1}{\bar{m}}\ \bar{m}\right]\right|$$

$$\leq \left[\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1+(-1)^{\bar{m}+1}}{2\bar{m}^2}\right)(2\Delta^3 + \Delta^2 - 2\delta^3 - \delta^2)\right]$$

olup

$$\frac{1}{\bar{m}} |\overline{GGO}_1(G) - (\bar{Y}(G) + \bar{M}_2(G))| \leq \frac{1}{4\bar{m}}\left[\left(1 - \frac{1+(-1)^{\bar{m}+1}}{2\bar{m}^2}\right)(2\Delta^3 + \Delta^2 - 2\delta^3 - \delta^2)\right]$$

elde edilir. Buradan

$$|\overline{GGO}_1(G) - \bar{Y}(G) - \bar{M}_2(G)| \leq \left[\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1+(-1)^{\bar{m}+1}}{2\bar{m}^2}\right)(2\Delta^3 + \Delta^2 - 2\delta^3 - \delta^2)\right]$$

bulunur. □

8.2. Bazı Graf İşlemleri ile Birinci Gama Gourava Tamamlayıcı İndeksi İçin Sınırlar

Bu bölümde G_i $(i = 1,2)$ grafının en küçük derecesi δ_i, en büyük derecesi Δ_i olarak alınacaktır.

8.2.1. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı iki graf olsun. O zaman,

$$\overline{GGO}_1(G_1) + \overline{GGO}_1(G_2) + n_1 n_2({\delta_1}^3 + {\delta_2}^3 + \delta_1\delta_2) \leq \overline{GGO}_1(G_1 \cup G_2) \leq \overline{GGO}_1(G_1) + \overline{GGO}_1(G_2) + n_1 n_2({\Delta_1}^3 + {\Delta_2}^3 + \Delta_1\Delta_2) \quad (8.6)$$

dir.

İspat;

İki grafın birleşim işlemi ve birinci Gama Gourava tamamlayıcı indeksinin tanımından

$$\overline{GGO}_1(G_1 \cup G_2) = \sum_{uv \notin E(G_1)} d_{G_1}(u)^3 + d_{G_1}(v)^3 + d_{G_1}(u)\, d_{G_1}(v) + \sum_{uv \notin E(G_2)} d_{G_2}(u)^3 + d_{G_2}(v)^3 + d_{G_2}(u)\, d_{G_2}(v) + \sum_{u \in v(G_1)} \left(\sum_{v \in u(G_2)} d_{G_1}(u)^3 + d_{G_2}(v)^3 + d_{G_1}(u)\, d_{G_2}(v) \right)$$

dir. En küçük ve en büyük dereceler kullanılarak

$$\overline{GGO}_1(G_1) + \overline{GGO}_1(G_2) + n_1 n_2({\delta_1}^3 + {\delta_2}^3 + \delta_1\delta_2) \leq \overline{GGO}_1(G_1 \cup G_2) \leq \overline{GGO}_1(G_1) + \overline{GGO}_1(G_2) + n_1 n_2({\Delta_1}^3 + {\Delta_2}^3 + \Delta_1\Delta_2)$$

elde edilir. □

8.2.2. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı, m_1 ve m_2 kenarlı iki graf olsun. O zaman,

$$\overline{m_1}(2(\delta_1 + n_2)^3 + (\delta_1 + n_2)^2) + \overline{m_2}(2(\delta_2 + n_1)^3 + (\delta_2 + n_1)^2) \leq \overline{GGO}_1(G_1 + G_2)$$

$$\leq \overline{m_1}(2(\Delta_1 + n_2)^3 + (\Delta_1 + n_2)^2) + \overline{m_2}(2(\Delta_2 + n_1)^3 + (\Delta_2 + n_1)^2) \quad (8.7)$$

dir. Burada $i = 1{,}2$ için $\bar{G}_i$ grafının kenar sayısı $\overline{m_i}$ dir.

İspat;

İki grafın toplamı ve birinci Gama Gourava tamamlayıcı indeksinin tanımından

$$\overline{GGO}_1(G_1 + G_2) = \sum_{uv \notin E(G_1)} d_{G_1}(u)^3 + d_{G_1}(v)^3 + d_{G_1}(u)\ d_{G_1}(v) + \sum_{uv \notin E(G_2)} d_{G_2}(u)^3 + d_{G_2}(v)^3 + d_{G_2}(u)\ d_{G_2}(v)$$

olup $u \in \mathrm{V}(G_1)$ için $d_G(u) = d_{G_1}(u) + n_2$ ve $v \in \mathrm{V}(G_2)$ için $d_G(v) = d_{G_2}(v) + n_1$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\overline{GGO}_1(G_1 + G_2) = \sum_{uv \notin E(G_1)} \left(d_{G_1}(u) + n_2\right)^3 + (d_{G_1}(v) + n_2)^3 + (d_{G_1}(u) + n_2)\left(d_{G_1}(v) + n_2\right) + \sum_{uv \notin E(G_2)} (d_{G_2}(u) + n_1)^3 + (d_{G_2}(v) + n_1)^3 + (\,d_{G_2}(u) + n_1)\,(\,d_{G_2}(v) + n_1)$$

elde edilir. En küçük ve en büyük derece kullanılarak

$$\overline{m_1}(2(\delta_1 + n_2)^3 + (\delta_1 + n_2)^2) + \overline{m_2}(2(\delta_2 + n_1)^3 + (\delta_2 + n_1)^2) \leq \overline{GGO}_1(G_1 + G_2)$$

$$\leq \overline{m_1}(2(\Delta_1 + n_2)^3 + (\Delta_1 + n_2)^2) + \overline{m_2}(2(\Delta_2 + n_1)^3 + (\Delta_2 + n_1)^2)$$

bulunur. □

8.2.3. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı, m_1 ve m_2 kenarlı iki graf olsun. O zaman,

$$2\,\alpha\,({\delta_1}^3 + {\delta_2}^3 + \delta_1\delta_2) \leq \overline{GGO}_1(G_1 \,\square\, G_2) \leq 2\,\alpha\left({\Delta_1}^3 + {\Delta_2}^3 + \Delta_1\Delta_2\right) \qquad (8.8)$$

dir. Burada $G_1 \,\square\, G_2$ grafının kenar sayısı $\alpha = n_1m_2 + m_1n_2$ dir.

İspat;

İki grafın kartezyen çarpımı ve birinci Gama Gourava tamamlayıcı indeksi tanımından,

$$\overline{GGO}_1(G_1 \,\square\, G_2) = \sum_{uv \notin E(G_1 \square G_2)} [d_{G_1}(u_1)^3 + d_{G_2}(u_2)^3 + d_{G_1}(u_1)\ d_{G_2}(u_2)] + \sum_{uv \notin E(G_1 \square G_2)} \left[d_{G_1}(v_1)^3 + d_{G_2}(v_2)^3 + d_{G_1}(v_1)\ d_{G_2}(v_2)\right]$$

dir. En küçük ve en büyük derece kullanılarak

$$2\,\alpha\,({\delta_1}^3 + {\delta_2}^3 + \delta_1\delta_2) \leq \overline{GGO}_1(G_1 \square G_2) \leq 2\,\alpha\left({\Delta_1}^3 + {\Delta_2}^3 + \Delta_1\Delta_2\right)$$

elde edilir. □

8.2.4. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı, m_1 ve m_2 kenarlı iki graf olsun. O zaman,

$$2\,\beta\,({n_2}^3\,{\delta_1}^3 + {\delta_2}^3 + n_2\delta_1\delta_2) \leq \overline{GGO}_1(G_1[G_2]) \leq 2\,\beta\left({n_2}^3\,{\Delta_1}^3 + {\Delta_2}^3 + n_2\Delta_1\Delta_2\right) \quad (8.9)$$

dir. Burada $G_1[G_2]$ grafının kenar sayısı $\beta = n_1m_2 + m_1{n_2}^2$ dir.

İspat;

İki grafın bileşkesi ve birinci Gama Gourava tamamlayıcı indeksi tanımından

$$\overline{GGO}_1(G_1[G_2]) = \sum_{uv \notin E(G_1[G_2])} [{n_2}^3 {d_{G_1}(u_1)}^3 + {d_{G_2}(u_2)}^3] + \; [n_2\, d_{G_1}(u_1)\, d_{G_2}(u_2)]$$
$$+ \sum_{uv \notin E(G_1[G_2])} \left[{n_2}^3\, {d_{G_1}(v_1)}^3 + {d_{G_2}(v_2)}^3\right] + \left[n_2\, d_{G_1}(v_1)\, d_{G_2}(v_2)\right]$$

dir. Burada en küçük derece ve en büyük derece göz önüne alındığında

$$2\,\beta\,({n_2}^3\,{\delta_1}^3 + {\delta_2}^3 + n_2\delta_1\delta_2) \leq \overline{GGO}_1(G_1[G_2]) \leq 2\,\beta\left({n_2}^3\,{\Delta_1}^3 + {\Delta_2}^3 + n_2\Delta_1\Delta_2\right)$$

elde edilir. □

8.3. İkinci Gama Gourava Tamamlayıcı İndeks ile Bazı Tamamlayıcı İndeksler Arasındaki İlişkiler

G grafının ikinci gama Gourava tamamlayıcı İndeksi

$$\overline{GGO_2}(G) = \sum_{uv \notin E(G)} (d_G(u)^3 + d_G(v)^3) d_G(u) d_G(v) \tag{8.10}$$

şeklinde tanımlanır.

8.3.1. Teorem

G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman G grafının ikinci Gama Gourava tamamlayıcı indeksi için alt ve üst sınırlar

$$\overline{m}(2\delta^5) \leq \overline{GGO_2}(G) \leq \overline{m}(2\Delta^5) \tag{8.11}$$

dir. Burada $\bar{G}$ grafının kenar sayısı $\overline{m}$ dir.

İspat;

İkinci Gama Gourava tamamlayıcı indeksi için verilen tanımda dereceleri en küçük alarak alt sınır ve dereceleri en büyük alarak ise üst sınır elde edilir. □

8.3.2. Teorem

G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman G grafının ikinci Gama Gourava tamamlayıcı indeksi için bir alt sınır

$$\frac{\sqrt{\overline{m}\ 8\ \delta^8 \Delta^5\ \overline{Y}(G)\ \overline{HM}_2(G)}}{(\delta^5 + \Delta^5)} \leq \overline{GGO_2}(G) \tag{8.12}$$

şeklindedir.

İspat;

Lemma 1'de $a_k = d_G(u)^3 + d_G(v)^3,\ b_k = d_G(u)\, d_G(v)$ alınır ve $a = 2\delta^3,\quad b = \delta^2$ ve $A = 2\Delta^3, B = \Delta^2$ seçilirse $0 < a \leq a_k \leq A < \infty$ ve $0 < b \leq b_k \leq B < \infty$ sağlanır. Lemma 1, G'nin komşu olmayan kenarlarının toplamı üzerinden uygulanırsa,

$$\frac{\sum_{uv\notin E(G)}((d_G(u)^3 + d_G(v)^3)^2 \sum_{uv\notin E(G)}(d_G(u)\, d_G(v)\,)^2}{[\overline{GGO}_2(G)]^2} \leq \frac{\left((2\delta^3\delta^2) + (2\Delta^3\Delta^2)\right)^2}{4(\,2\delta^3\delta^2)(2\Delta^3\Delta^2)}$$

elde edilir. Hyper-Zagreb tamamlayıcı ve Y-tamamlayıcı indekslerinin tanımları kullanılarak,

$$\left[\sum_{uv\notin E(G)} (d_G(u)^3 + d_G(v)^3)^2\right]\left[\sum_{uv\notin E(G)} (d_G(u)\, d_G(v))^2\right] \geq \bar{m}\left(2\delta^3\, \bar{Y}(G)\, \overline{HM}_2(G)\right)$$

bulunur. Böylece

$$\frac{\sqrt{\bar{m}\ 8\ \delta^8\Delta^5\ \bar{Y}(G)\ \overline{HM}_2(G)}}{(\delta^5 + \Delta^5)} \leq \overline{GGO_2}(G)$$

elde edilir. □

8.3.3. Teorem

G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman,

$$\overline{GGO}_2(G) \leq \sqrt{\bar{m}\ \bar{Y}(G)\ \overline{HM}_2(G)\ 2\Delta^3} \qquad (8.13)$$

dır.

İspat;

Lemma 2'de $a_k = d_G(u)^3 + d_G(v)^3$, $b_k = d_G(u)\, d_G(v)$ alınır ve $a = 2\delta^3$, $b = \delta^2$ ve $A = 2\Delta^3, B = \Delta^2$ seçilirse $0 < a \leq a_k \leq A < \infty$ ve $0 < b \leq b_k \leq B < \infty$ sağlanır. Lemma 2, G'nin komşu olmayan kenarlarının toplamı üzerinden uygulanırsa,

$$\left[\sum_{uv \notin E(G)} (d_G(u)^3 + d_G(v)^3)\, d_G(u)\, d_G(v)\right]^2 \leq \sum_{uv \notin E(G)} [d_G(u)^3 + d_G(v)^3]^2 \sum_{uv \notin E(G)} [d_G(u)\, d_G(v)]^2$$

olup

$$[\overline{GGO}_2(G)]^2 \leq \sum_{uv \notin E(G)} (d_G(u)^3 + d_G(v)^3)(d_G(u)^3 + d_G(v)^3) \sum_{uv \notin E(G)} [d_G(u)\, d_G(v)]\, [d_G(u)\, d_G(v)]$$

bulunur. Buradan

$$\overline{GGO}_2(G) \leq \sqrt{\overline{m}\, \bar{Y}(G)\, \overline{HM}_2(G)\, 2\Delta^3}$$

elde edilir. □

8.3.4. Teorem

G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman,

$$|\overline{m}\, \overline{GGO}_2(G) - \bar{Y}(G)\, \bar{M}_2(G)| \leq \left[\frac{\overline{m}}{2}\left(1 - \frac{1 + (-1)^{\overline{m}+1}}{2\overline{m}^2}\right)(\Delta^3 - \delta^3)(\Delta^2 - \delta^2)\right] \qquad (8.14)$$

dır.

İspat;

Lemma 3'de $a_k = d_G(u)^3 + d_G(v)^3$, $b_k = d_G(u)\, d_G(v)$ alınır ve $a = 2\delta^3, b = \delta^2$ ve $A = 2\Delta^3$, $B = \Delta^2$ seçilirse $0 < a \leq a_k \leq A < \infty$ ve $0 < b \leq b_k \leq B < \infty$ sağlanır. Lemma 3, G'nin komşu olmayan kenarlarının toplamı üzerinden uygulanırsa,

$$\left|\frac{1}{\bar{m}} \sum_{uv \notin E(G)} [d_G(u)^3 + d_G(v)^3]\, d_G(u)\, d_G(v) - \left[\frac{1}{\bar{m}} \sum_{uv \notin E(G)} d_G(u)^3 + d_G(v)^3\right]\left[\frac{1}{\bar{m}} \sum_{uv \notin E(G)} d_G(u)\, d_G(v)\right]\right|$$

$$\leq \left[\frac{1}{4\bar{m}}\left(1 - \frac{1 + (-1)^{\bar{m}+1}}{2\bar{m}^2}\right) 2(\Delta^3 - \delta^3)(\Delta^2 - \delta^2)\right]$$

olur. İkinci Gama Gourava tamamlayıcı indeksi ve bazı tamamlayıcı indeksler tanımından

$$|\bar{m}\, \overline{GGO}_2(G) - \bar{Y}(G)\, \bar{M}_2(G)| \leq \left[\frac{\bar{m}}{2}\left(1 - \frac{1 + (-1)^{\bar{m}+1}}{2\bar{m}^2}\right)(\Delta^3 - \delta^3)(\Delta^2 - \delta^2)\right]$$

bulunur. □

8.4. Bazı Graf İşlemlerinin İkinci Gama Gourava Tamamlayıcı İndeksi İçin Sınırlar

Bu bölümde G_i $(i = 1,2)$ grafının en küçük derecesi δ_i, en büyük derecesi Δ_i olarak alınacaktır.

8.4.1. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı iki graf olsun. O zaman,

$$\overline{GGO}_2(G_1) + \overline{GGO}_2(G_2) + n_1 n_2({\delta_1}^3 + {\delta_2}^3)(\delta_1\delta_2) \leq \overline{GGO}_2(G_1 \cup G_2) \leq \overline{GGO}_2(G_1) + \overline{GGO}_2(G_2) + n_1 n_2({\Delta_1}^3 + {\Delta_2}^3)(\Delta_1\Delta_2) \quad (8.15)$$

dir.

İspat;

İki grafın birleşim işlemi ve ikinci Gama Gourava tamamlayıcı indeksi tanımından

$$\overline{GGO}_2(G_1 \cup G_2) = \sum_{uv \notin E(G_1)} (d_{G_1}(u)^3 + d_{G_1}(v)^3)\, d_{G_1}(u)\ d_{G_1}(v) + \sum_{uv \notin E(G_2)} (d_{G_2}(u)^3 + d_{G_2}(v)^3)\, d_{G_2}(u)\ d_{G_2}(v) + \sum_{u \in v(G_1)} \left(\sum_{v \in u(G_2)} (d_{G_1}(u)^3 + d_{G_2}(v)^3)\, d_{G_1}(u)\, d_{G_2}(v) \right)$$

dir. En küçük ve en büyük dereceler kullanılarak

$$\overline{GGO}_2(G_1) + \overline{GGO}_2(G_2) + n_1 n_2({\delta_1}^3 + {\delta_2}^3)(\delta_1 \delta_2) \leq \overline{GGO}_2(G_1 \cup G_2) \leq \overline{GGO}_2(G_1) + \overline{GGO}_2(G_2) + n_1 n_2({\Delta_1}^3 + {\Delta_2}^3)(\Delta_1 \Delta_2)$$

elde edilir. □

8.4.2. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı, m_1 ve m_2 kenarlı iki graf olsun. O zaman,

$$\overline{m_1}(2(\delta_1 + n_2)^5) + \overline{m_2}(2(\delta_2 + n_1)^5) \leq \overline{GGO}_2(G_1 + G_2) \leq \overline{m_1}(2(\Delta_1 + n_2)^5) + \overline{m_2}(2(\Delta_2 + n_1)^5) \quad (8.16)$$

dir. Burada $\bar{G}_i$ grafının kenar sayısı $\overline{m_i}$ dir.

İspat;

İki grafın toplamı ve ikinci Gama Gourava tamamlayıcı indeksi tanımından

$$\overline{GGO}_2(G_1 + G_2) = \sum_{uv \notin E(G_1)} [d_{G_1}(u)^3 + d_{G_1}(v)^3]\ d_{G_1}(u)\ d_{G_1}(v) + \sum_{uv \notin E(G_2)} [d_{G_2}(u)^3 + d_{G_2}(v)^3]\ d_{G_2}(u)\ d_{G_2}(v)$$

olup $u \in V(G_1)$ için $d_G(u) = d_{G_1}(u) + n_2$ ve $v \in V(G_2)$ için $d_G(v) = d_{G_2}(v) + n_1$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\overline{GGO}_2(G_1 + G_2) = \sum_{uv \notin E(G_1)} [\left(d_{G_1}(u) + n_2\right)^3 + (d_{G_1}(v) + n_2)^3]\,(d_{G_1}(u) + n_2)\ \left(d_{G_1}(v) + n_2\right)$$
$$+ \sum_{uv \notin E(G_2)} [(d_{G_2}(u) + n_1)^3 + (d_{G_2}(v) + n_1)^3](\,d_{G_2}(u) + n_1)\ (\,d_{G_2}(v) + n_1)$$

elde edilir. En küçük ve en büyük dereceler kullanılarak

$$\overline{m_1}(2(\delta_1 + n_2)^5) + \overline{m_2}(2(\delta_2 + n_1)^5) \le \overline{GGO}_2(G_1 + G_2) \le \overline{m_1}(2(\Delta_1 + n_2)^5) + \overline{m_2}(2(\Delta_2 + n_1)^5)$$

elde edilir. □

8.4.3. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı, m_1 ve m_2 kenarlı iki graf olsun. O zaman,

$$2\,\alpha\,({\delta_1}^4\delta_2 + \delta_1{\delta_2}^4) \le \overline{GGO}_2(G_1 \,\square\, G_2) \le 2\,\alpha({\Delta_1}^4\Delta_2 + \Delta_1{\Delta_2}^4) \qquad (8.17)$$

dir. Burada $G_1 \,\square\, G_2$ grafının kenar sayısı $\alpha = n_1m_2 + m_1n_2$ dir.

İspat;

İki grafın kartezyen çarpımı ve ikinci Gama Gourava tamamlayıcı indeksi tanımından,

$$\overline{GGO}_2(G_1 \,\square\, G_2) = \sum_{uv \notin E(G_1 \square G_2)} \left(d_{G_1}(u_1)^3 + d_{G_2}(u_2)^3\right) d_{G_1}(u_1)\, d_{G_2}(u_2)$$
$$+ \sum_{uv \notin E(G_1 \square G_2)} \left(d_{G_1}(v_1)^3 + d_{G_2}(v_2)^3\right) d_{G_1}(v_1)\, d_{G_2}(v_2)$$

dir. En küçük ve en büyük derece kullanılarak,

$$2\,\alpha\,({\delta_1}^4\delta_2 + \delta_1{\delta_2}^4) \le \overline{GGO}_2(G_1 \,\square\, G_2) \le 2\,\alpha({\Delta_1}^4\Delta_2 + \Delta_1{\Delta_2}^4)$$

elde edilir. □

8.4.4. Teorem

G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı, m_1 ve m_2 kenarlı iki graf olsun. O zaman,

$$2\,\beta({n_2}^3{\delta_1}^3+{\delta_2}^3)(n_2\delta_1\delta_2)\le \overline{GGO}_2(G_1[G_2])\le 2\,\beta({n_2}^3{\Delta_1}^3+{\Delta_2}^3)(n_2\Delta_1\Delta_2) \qquad (8.18)$$

dir. Burada $G_1[G_2]$ grafının kenar sayısı $\beta = n_1m_2 + m_1{n_2}^2$ dir.

İspat;

İki grafın bileşkesi ve ikinci Gama Gourava tamamlayıcı indeksi tanımından,

$$\overline{GGO}_2(G_1[G_2]) = \sum_{uv\notin E(G_1[G_2])} \left[{n_2}^3 d_{G_1}(u_1)^3 + d_{G_2}(u_2)^3\right] n_2\, d_{G_1}(u_1)\, d_{G_2}(u_2)$$
$$+ \sum_{uv\notin E(G_1[G_2])} \left[{n_2}^3\, d_{G_1}(v_1)^3 + d_{G_2}(v_2)^3\right] n_2\, d_{G_1}(v_1)\, d_{G_2}(v_2)$$

dir. Burada en küçük derece ve en büyük derece göz önüne alındığında

$$2\,\beta({n_2}^3{\delta_1}^3+{\delta_2}^3)(n_2\delta_1\delta_2)\le \overline{GGO}_2(G_1[G_2])\le 2\,\beta({n_2}^3{\Delta_1}^3+{\Delta_2}^3)(n_2\Delta_1\Delta_2)$$

elde edilir. □

9. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada birinci ve ikinci Gourava tamamlayıcı indeksleri ile Zagreb ve Hyper-Zagreb tamamlayıcı indeksleri ve F-tamamlayıcı indeksi arasındaki ilişkiler elde edildi. Daha sonra birleşim, toplam, kartezyen çarpım ve bileşke gibi bazı graf işlemleriyle birinci ve ikinci Gourava tamamlayıcı indeksleri için sınırlar bulundu.

Ayrıca

$$\overline{AGO_1}(G) = \sum_{uv \notin E(G)} (d_G(u)^2 + d_G(v)^2) + d_G(u)d_G(v)$$

$$\overline{AGO_2}(G) = \sum_{uv \notin E(G)} (d_G(u)^2 + d_G(v)^2)d_G(u)d_G(v)$$

$$\overline{GGO_1}(G) = \sum_{uv \notin E(G)} (d_G(u)^3 + d_G(v)^3) + d_G(u)d_G(v)$$

$$\overline{GGO_2}(G) = \sum_{uv \notin E(G)} (d_G(u)^3 + d_G(v)^3)d_G(u)d_G(v)$$

şeklinde tanımladığımız birinci ve ikinci Alfa Gourava ve Gama Gourava tamamlayıcı indeksleri ile Zagreb ve Hyper-Zagreb tamamlayıcı İndeksleri, Y-tamamlayıcı ve F-tamamlayıcı indeksi arasındaki ilişkiler bazı bilinen eşitsizlikler yardımı elde edildi. Daha sonra birleşim, toplam, kartezyen çarpım ve bileşke graf işlemleriyle bu indeksler için sınırlar bulundu.

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar literatüre matematiksel katkı sağladığı gibi kimya alanında da bazı maddelerin fiziksel ve kimyasal özelliklerinin olabildiğince yakın olarak tahmini için QSAR ve QSPR çalışmalarındaki kullanımından dolayı oldukça önemlidir. Bu çalışma sonrasında bazı kimyasal maddelerin tezde çalışılan indeksler için değerleri elde edilerek fizikokimyasal özellikleri ile aralarındaki korelasyon incelenebilir.

KAYNAKLAR

1. Büyükköse, Ş., Kaya Gök, G., Özkan Kızılırmak, G. and Eren, S. (2021). *Graf teori*. Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık, 1-10.

2. Alameri, A., (2016). New binary operations on graphs, *Journal of Science & Technology*, 21(1), 97-116.

3. Khalifeh, M.H., Yousefi-Azari, H., Ashrafi, A.R. (2009). The first and second Zagreb indices of some graph operations. *Discrete Applied Mathematics*,157(4), 804–811.

4. Shirdel, G.H., Rezapour, H. and Sayadi, A.M. (2013). The hyper-Zagreb index of graph operations. *Iranian Journal of Mathematical Chemistry*, 4(2), 213–220.

5. Alameri, A., Shubatah, M. and Alsharafi, M. (2020). Zagreb indices, hyper Zagreb indices and redefined Zagreb indices of conical graphs. *Advances in Mathematics: Scientific Journal*, 9(6), 3643-3652.

6. Furtula, B., Gutman, I. (2015). A forgotten topological index. *Journal of Mathematical Chemistry*, 53(4), 1184–1190.

7. Alameri, A., Al-Nagarra, N., Alromaımaha, M. and Alsharafi, M. (2020). Y-index of some graph operations. *International Journal of Applied Engineering Research*, 15(2),173-179.

8. Kulli ,V. R. (2017). The gourava indices and coindices of graphs. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 14(1), 33-38.

9. Kulli ,V. R. (2024). On alpha and gamma gourava indices. *International Journal of Mathematics and Computer Research*, 12(4), 4139-4144.

10. Doslic, T., (2008). Vertex-weighted wiener polynomials for composite graphs, *ARS Mathematica Contemporanea*, 1(1), 66-81.

11. Pattabiraman, K., Vijayaragavan, M. (2017). Hyper Zagreb indices and its coindices of graphs, *Bulletin of the International Mathematical Virtual Institute*. 7 (1), 31-41.

12. De, N., Nayeem, S., Pal, A., 2016). The F-coindex of some graph operations, *SpringerPlus*, 5(221), 1-13.

13. Alameri, A., Al-Rumaima, M., Almazah, M., (2020). Y-coindex of graph operations and its applications of molecular descriptors. *Journal of Molecular Structure*, 1221(1),1-8.



Gazili olmak ayrıcalıktır