
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

YENİ TİP APPELL POLİNOMLARI YARDIMIYLA SZÁSZ OPERATÖRLERİNİN GENELLEŞMESİ

Zehra TAT

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ 2024

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Zehra TAT

10/07/2024

YENİ TİP APPELL POLİNOMLARI YARDIMIYLA SZÁSZ OPERATÖRLERİNİN GENELLEŞMESİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Zehra TAT

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2024

ÖZET

Bu tez 5 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır. İkinci bölümde yaklaşımlar teorisindeki bazı temel tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, yeni tip Appell polinomları yardımı ile oluşan Szász operatörlerini kullanarak bir operatör oluşturulmuştur. Oluşturulan bu operatörün tanımı ve yaklaşım özellikleri verilmiştir. Dördüncü bölümde ise Gould-Hopper ve Miller-Lee polinomlarını içeren Szász operatörlerinin Appell tipli genellemeleri verilmiş ve süreklilik modülü kullanarak belirlenen f fonksiyonu için hata tahminleri verilmiştir. Beşinci bölüm ise sonuç bölümüne ayrılmıştır.

Bilim Kodu	:	20406
Anahtar Kelimeler	:	Appell polinomları, süreklilik modülü, Korovkin teoremi, Szász operatörleri , yaklaşım özellikleri
Sayfa Adedi	:	47
Danışman	:	Prof. Dr. Gürhan İÇÖZ

GENERALIZATION OF SZÁSZ OPERATORS BY NEW TYPE APPELL POLYNOMIALS

(M. Sc. Thesis)

Zehra TAT

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2024

ABSTRACT

This thesis consists of 5 chapters. The first section is reserved for the introduction. In the second chapter, some basic definitions and theorems in the theory of approximations are given. In the third part, an operator was created using Szász operators formed with the help of new type Appell polynomials. The definition and approximation properties of this operator are given. In the fourth chapter, examples of Appell type generalization of Szász operators including Gould-Hopper and Miller-Lee polynomials are given and error estimates are given for the function f determined using the continuity module. The fifth chapter is devoted to the conclusion.

Science Code	:	20406
Keywords	:	Appell polynomials, modulus of continuity, Korovkin theorem, Szász operators, convergence properties
Number of pages	:	47
Supervisor	:	Prof. Dr. Gürhan İÇÖZ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimimin ve tez çalışmamın her aşamasında bilgi birikimi ve yönlendirmeleri ile bana yardımcı olan saygı değer danışmanım Prof. Dr. Gürhan İÇÖZ'e tezimle ilgili önemli tavsiyeleri ile tezime katkıda bulunan tez jüri üyeleri Prof. Dr. Mediha AKÇAY ÖRKCÜ ve Prof. Dr. Serhan VARMA 'ya , eğitim hayatım ve tüm yaşantım boyunca karşılaştığım her türlü zorlukta maddi ve manevi desteğini esirgemeyen ve bana bu süreçte anlayış gösteren çok sevgili aileme teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca yüksek lisans eğitimim boyunca "2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı" ile maddi açıdan beni destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumuna (TUBİTAK) teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

ÇİZELGELERİN LİSTESİ ix

SİMGELER VE KISALTMALAR x

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL KAVRAMLAR 3

2.1. Lineer Pozitif Operatörler İle İlgili Temel Kavramlar 3

2.2. Korovkin Teoremi 7

2.3. Süreklilik Modülü ve Özellikleri 11

2.4. Tanımlar ve Eşitsizlikler 14

2.4.1. İkinci dereceden süreklilik modülü 15

2.4.2. Lineer pozitif operatörlerin önemi 15

2.4.3. Süreklilik modülünün özellikleri 17

3. YENİ TİP APPELL POLİNOMLARI YARDIMI İLE OLUŞTURULAN SZÁSZ OPERATÖRÜ 21

3.1. Operatörün Tarihçesi 21

3.2. Operatörün Oluşturulması 23

3.3. Jn Operatörlerinin Bazı Yaklaşım Sonuçları 25

3.4. J_n Operatörünün Yakınsaklık Özellikleri 30

4. GOULD-HOPPER ve MILLER-LEE POLİNOMLARINI İÇEREN SZÁSZ OPERATÖRLERİNİN APPELL TİPLİ GENELLEŞMESİ .. 35

4.1. Gould-Hopper Polinomlarını İçeren Szász Operatörlerinin Appell Tipli Genelleşmesi 35

4.1.1. Operatörün tanımı 35

Sayfa

4.1.2. Süreklilik modülü kullanarak f fonksiyonunun hata tahmini 36

4.2. Miller-Lee Polinomlarını İçeren Szász Operatörlerinin Appell Tipli Genelleşmesi 37

4.2.1. Operatörün tanımı 37

4.2.2. Süreklilik modülü kullanarak f fonksiyonunun hata tahmini 38

4.2.3. Süreklilik modülü kullanarak f fonksiyonunun hata tahmini elde ediliş algoritması 39

5. SONUÇ VE ÖNERİLER 41

KAYNAKLAR 43

ÖZGEÇMİŞ 47

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

Çizelge 4.1. Gould-Hopper polinomları J_n^*'yi içeren operatörler dizisini kullanarak f fonksiyonunun yaklaşımının hata tahmini 37

Çizelge 4.2. Miller-Lee polinomları J_n^{**}'yi içeren operatörler dizisini kullanarak f fonksiyonunun yaklaşımının hata tahmini 39

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\mathbf{Z_n(f;x)}$	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir operatör dizisi
$\omega(\mathbf{f},\delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\omega_{\mathbf{2}}(\mathbf{f},\delta)$	f fonksiyonunun ikinci süreklilik modülü
$Lip_M(\gamma)$	Lipschitz sınıfından olan fonksiyon uzayı
$\mathbf{C[a,b]}$	[a,b] aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı
$\mathbf{C^2[0,a]}$	g, g', $g'' \in C$[a,b] olan fonksiyon uzayı
$\mathbf{C^2[0,a]_{(a>0)}}$	τ, τ' $\tau'' \in C$[0,a] olan fonksiyon uzayı
$\mathbf{P_-(x)}$	max{-P(x),0}
$\mathbf{P_+(x)}$	max{P(x),0}
$\varphi_{\mathbf{h}}$	φ için ikinci dereceden Steklov fonksiyonu
$(\mathbf{L_n})_{\mathbf{n\geq 0}}$	operatör dizisi
$\|\varphi\|$	φ' nin normu
$\mathbf{a_n \rightrightarrows a}$	(a_n) fonksiyon dizisinin a fonksiyonuna düzgün yakınsaması
$\mathbf{S_n(f;x)}$	Szasz operatörleri
$\mathbf{J_n^*(f;x)}$	Gould Hopper polinomlarını içeren genelleştirilmiş Szász operatörlerinin Appell tipli genelleşmesi
$\mathbf{J_n^{**}(f;x)}$	Miller-Lee polinomlarını içeren genelleştirilmiş Szász operatörlerinin Appell tipli genelleşmesi

Kısaltmalar	**Açıklamalar**
o.ü.	olmak üzere

1. GİRİŞ

Matematiksel analizde önemli bir yer edinmiş yaklaşımlar teorisi, bir çok disiplinle yakından ilgilidir. Bunlardan bazıları, fonksiyonel analiz, olasılık teorisi, Fourier analizi, fizik, mühendislik olarak sıralanabilir. Bunun yanı sıra dalgacık analizi, veri gösterimi gibi farklı alanlarda da yer edinmiştir. Bir çok matematikçi bu konudaki gelişmelerin ve diğer araştırma konularının yanı sıra güncel çalışmalar da yapmaktadır.

Yaklaşımlar teorisinin amacı, bir fonksiyonun, özellikleri iyi bilinen başka fonksiyonlara yaklaştırılarak elde edilmesini kolaylaştırmaktır.

Matematik alanında önemli bir yere sahip olan K. Weierstrass (1815-1897) kendi adını içeren Weierstrass yaklaşım teorisini ispatlaması ile birlikte bu alanda büyük bir ilerleme kaydedilmiştir. Teorem;

"$h \in C[a,b]$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her x $\in [a,b]$ için öyle bir $L_n(x)$ cebirsel polinomu vardır ki $|f(x) - L_n(x)| < \varepsilon$."
şeklinde ifade edilmiştir.

Weirestrass teoreminin ispatı oldukça karmaşık ve uzundur. Bunun için bir çok yazar, daha etkili bir ispat için çalışmıştır. 1912 yılında Bernstein $\zeta \in \mathbb{N}, x \in [0,1]$ için

$$B_\zeta(h;x) = \sum_{\eta=0}^{\zeta} \binom{\zeta}{\eta} x^\eta (1-x)^{\zeta-\eta} h\left(\frac{\eta}{\zeta}\right)$$

olacak şekilde polinomların bir dizisini oluşturarak bu teoremin ispatını anlaşılır ve güzel bir şekilde yapmıştır.

Bu ispattan yola çıkılarak H. Bohman (1952) ve P. P. Korovkin (1953) isimleri ile ifade edilen Bohman-Korovkin teoremi ile lineer pozitif operatörlerin yaklaşım özellikleri incelenmiş ve lineer pozitif operatörler adına önemli adımlar atılmıştır.

Lineer pozitif operatörlerde yaklaşım için Szász operatörlerinin genellemeleride önemli bir yere sahiptir. Geçmişte bir çok kez yapılmış bu genellemeler araştırmacılara gelecekteki çalışmaları için ışık tutmuştur. Bu yüksek lisans tezinde de Szász operatörlerinin genellemelerinin yaklaşımı üzerinde durulacaktır.

Bu tez 5 kısımdan oluşmaktadır.

Birinci bölüm tez içeriğini ifade etmek için hazırlanmıştır.

İkinci bölümde, tezde karşımıza çıkacak olan tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, ilk olarak yeni tip Appell polinomları yardımı ile oluşan Szász operatörleri kullanılarak yeni bir operatör oluşturulmuştur. Daha sonra oluşturulan bu operatörün tanımı verilmiş ve Korovkin teoreminin özelliklerinden faydalanılarak bazı eşitlikler elde edilmiştir. Ardından tanımlanan bu operatör dizisi için yakınsama ispatlanmış ve yaklaşım teorisinin özellikleri kullanılarak bazı yaklaşım sonuçları verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Gould-Hopper ve Miller-Lee polinomlarını içeren Szász operatörlerinin Appell tipli genellemesine örnekler verilmiş ve süreklilik modülü yardımı ile belirlenen f fonksiyonu için hata tahminlerinde bulunulmuştur.

Beşinci bölüm ve son bölüm ise sonuç için ayrılmışıtr.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, sonraki bölümlerde ihtiyaç duyulan tanımlar ve teoremlere yer verilecektir.

2.1. Lineer Pozitif Operatörler İle İlgili Temel Kavramlar

2.1.1. Tanım (Lineer Uzay)

ϑ, boştan farklı bir küme ve P, reel veya karmaşık sayılar kümesi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa Υ ye P üzerinde lineer uzay veya vektör uzayı denir [1].

(i) $(\vartheta,+)$ değişmeli gruptur.

(a) $\forall f,g \in \vartheta$ için $f+g \in \vartheta$ dir.

(b) $\forall f,g,h \in \vartheta$ için $f+(g+h)=(f+g)+h \in \vartheta$ dir.

(c) $\forall f \in \vartheta$ için $f+\theta=\theta+f=f$ olacak şekilde $\theta \in \vartheta$ vardır.

(d) $\forall f \in \vartheta$ için $f+(-f)=(-f)+f=\theta$ olacak şekilde $-f \in \vartheta$ vardır.

(e) $\forall f,g \in \vartheta$ için $f+g=g+f \in \vartheta$ dir.

(ii) $f,g \in \vartheta$ ve $\tau,\zeta \in L$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

(a) $\tau f \in \vartheta$ dir.

(b) $\tau(f+g)=\tau f+\tau g$ dir.

(c) $(\tau+\zeta)f=\tau f+\zeta f$ dir.

(d) $1.f=f.1=f$ dir. Burada $1, L$'nin birim elemanıdır.

2.1.2. Tanım ($C(0,\infty)$ Uzayı)

$(0,\infty)$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli olan fonksiyonlar uzayı $C(0,\infty)$ ile gösterilmektedir [2].

2.1.3. Tanım ($C_B(0,\infty)$ Uzayı)

$(0,\infty)$ aralığı üzerinde tanımlı tüm sınırlı ve sürekli olan fonksiyonlar uzayı $C_B(0,\infty)$ ile gösterilmektedir .

2.1.4. Tanım ($C_B^2(0,\infty)$ Uzayı)

$(0,\infty)$ aralığı üzerinde iki kez türevli ve sürekli olan fonksiyonlar uzayı $C_B^2(0,\infty)$ ile gösterilmektedir ve ifadesi

$$C_B^2(0,\infty) = \left\{ \varphi \in C_B(0,\infty) : \varphi^{'}, \varphi^{''} \in C_B(0,\infty) \right\} \tag{2.1}$$

dir.

2.1.5. Tanım (Norm)

D, bir lineer uzay olsun. $\| \| : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun f'deki değeri $\|f\|$ ile gösterilsin. Bu fonksiyon aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\| \|$ fonksiyonuna D üzerinde norm denir.

i) $\|f\| \geq 0$

ii) $\|f\| = 0 \Longleftrightarrow f = 0$

iii) $\|kf\| = |k| \, \|f\| \quad (k \in \mathbb{R})$

iv) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

Bir lineer uzay üzerinde norm tanımlanmış ise bu uzay normlu uzay olarak adlandırılır [1].

2.1.6. Tanım ($\|\varphi\|_{C_B(0,\infty)}$ Normu)

$C_B(0,\infty)$ uzayı için φ fonksiyonunun normu $\|\varphi\|_{C_B(0,\infty)}$ ile gösterilmektedir. Ve tanımı

$$\|\varphi\|_{C_B(0,\infty)} = \sup_{j \in (0,\infty)} |\varphi(j)| . \tag{2.2}$$

şeklindedir.

2.1.7. Tanım ($\|\varphi\|_{C_B^2(0,\infty)}$ Normu)

$C_B^2(0,\infty)$ uzayı için φ fonksiyonunun normu $\|\varphi\|_{C_B^2(0,\infty)}$ ile gösterilir [8]. Tanımı

$$\|\varphi\|_{C_B^2(0,\infty)} = \|\varphi\|_{C_B(0,\infty)} + ||\varphi^{'}||_{C_B(0,\infty)} + ||\varphi^{''}||_{C_B(0,\infty)}, \tag{2.3}$$

ifade edilir.

2.1.8. Tanım (Düzgün Yakınsaklık)

(χ_n), $J \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlaırn bir dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ verildiğinde, her $n_0 \leq n$ ve her bir $j \in J$ için $|\chi_n(j) - \chi(j)| < \varepsilon$ eşitsizliğinin sağladığı en az bir n_0 sayısı varsa, (χ_n) fonksiyon dizisinin χ fonksiyonuna J üzerinde düzgün yakınsaktır denir [2].

2.1.9. Tanım (Süreklilik)

$S \subset \mathbb{R}$ ve $g : S \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $s \in S$ olsun. g fonksiyonu s noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $|y - s| < \delta$ ise $|g(y) - g(s)| < \varepsilon$ dur [1].

2.1.10. Tanım (Düzgün Süreklilik)

$S \subset \mathbb{R}$ ve $g : S \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. g fonksiyonu S üzerinde düzgün sürekli olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $|y - x| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her $y, x \in A$ için $|g(y) - g(x)| < \varepsilon$ dur.

2.1.11. Tanım (Operatör)

B ve C reel değerli fonksiyon uzayları olsun. $D : B \to C$ şeklinde tanımlanan dönüşümlere operatör denir. [4]

2.1.12. Tanım (Lineer Operatör)

B ve C aynı P cismi üzerinde iki lineer uzay ve $D : B \to C$ şeklinde tanımlı D operatörü olsun. Her $k,l \in B$ ve her $\mu,\nu \in P$ için $D(\mu k+\nu l) = \mu D(k)+\nu D(l)$ eşitliğini sağlıyorsa, ϑ operatörüne B den C'ye bir lineer operatör denir [2].

2.1.13. Tanım (Pozitif Operatör)

B ve C vektör uzayları ve $D : B \to C$ lineer operatör olsun. D operatörünün z noktasındaki değeri $D_n(l;z)$ olarak gösterilir. B uzayından alınan her $l \geq 0$ fonksiyonu için $D_n(l;z) \geq 0$ ise D operatörüne pozitif operatör denir [4].

2.1.14. Tanım (Lineer Pozitif Operatör)

Lineer operatörler kümesi içinde bir alt sınıf olan pozitif operatörler vardır. $B^+ = \{k \in B, k(z) \geq 0\}$ ve $C^+ = \{l \in C, l(z) \geq 0\}$ olsun. Eğer B uzayında tanımlanmış D lineer operatörü B^+ kümesindeki herhangi bir k fonksiyonunu pozitif fonksiyona dönüştürüyor ise D operatörüne lineer pozitif operatör denir [1].

2.1.15. Lemma

$D : B \to C$ lineer pozitif operatör olsun. $m,n \in B$ olmak üzere $m(k) \leq n(k)$ iken $\vartheta(m(k);z) \leq D(n(k);z)$ dir ve buna D lineer operatörünün monotonluk özelliği denir. Ayrıca D'nin monotonluk özelliğinden $|D(m;z)| \leq D(|m|;z)$ eşitsizliği sağlanır [1].

2.1.16. Tanım (Lineer Pozitif Operatörlerde Sınırlılık)

$(B,\|.\|_1)$ ve $(C,\|.\|_2)$ normlu uzaylar, $U(D)\subset B$ olmak üzere $D:U(D)\to C$ lineer bir operatör olsun. $\forall z\in U(D)$ için $\|D_z\|_2\leq c\|z\|_1$ olacak şekilde bir $c>0$ sayısı mevcutsa D operatörüne sınırlı lineer operatör denir [2].

2.1.17. Tanım (Lineer Pozitif Operatörlerde Süreklilik)

B ve C normlu uzaylar $U(D)\subset B$ olmak üzere $D:U(D)\to C$ lineer bir operatör olsun. Bu durumda D sürekli olması için gerek ve yeter şart sınırlı olmasıdır [2].

2.2. Korovkin Teoremi

$C[a,b]$ uzayı üzerinde tanımlanan bir $(D_n)_{n\geq 1}$ pozitif lineer operatör dizisinin bir fonksiyona yaklaşım süreci, " yani, $[a,b]$ aralığı üzerinde her $r\in C[a,b]$ için $(D_n)(r)\rightrightarrows r$ yakınsamasının $[a,b]$ üzerinde düzgün "olup olmadığını gösteren teoremdir.

2.2.1. Teorem

$r\in C[a,b]$ ve reel eksenin tamamında sınırlı $|r(z)|<N_r$ olsun. Eğer $\vartheta_n(r(t);z)$ pozitif ve lineer bir operatör dizisi $[a,b]$ aralığındaki her z için

(i) $\vartheta_n(1;z)\rightrightarrows 1$

(ii) $\vartheta_n(t;z)\rightrightarrows z$

(iii) $\vartheta_n(t^2;z)\rightrightarrows z^2$

koşullarını sağlıyorsa, $[a,b]$ de $\vartheta_n(r;z)$, r fonksiyonuna düzgün yakınsar [5].

İspat

$r \in C[a,b]$ olsun. Süreklilik tanımından dolayı

$$|t-z| < \delta \Longrightarrow |r(t)-r(z)| < \varepsilon$$

olur. $|t-z| < \delta$ olduğundan ve üçgen eşitsizliğinden dolayı

$$|r(t)-r(z)| \leq |r(t)| + |r(z)| \leq 2N_r$$

gerçeklenir. Diğer yandan

$$|t-z| \geq \delta \Longrightarrow \frac{|t-z|}{\delta} \geq 1$$

olacağından $\frac{(t-z)^2}{\delta^2} \geq \frac{|t-z|}{\delta} \geq 1$ gerçeklenir.

$$|r(t)-r(z)| \leq 2N_r \leq 2N_r \frac{(t-z)^2}{\delta^2}$$

yazılabilir. O halde

$$|t-z| < \delta \Rightarrow |r(t)-r(z)| < \varepsilon$$

ve

$$|t-z| \geq \delta \Rightarrow |r(t)-r(z)| \leq 2N_r \frac{(t-z)^2}{\delta^2}$$

dir. Böylece her $t,z \in [a,b]$ için

$$|r(t)-r(z)| \leq \varepsilon + 2N_r \frac{(t-z)^2}{\delta^2}$$

dir. $|t-z| > \delta$ ise $2N_r \frac{(t-z)^2}{\delta^2} > 0$ olduğundan yukarıdaki eşitsizlik yine sağlanır. Eğer (i), (ii)

ve (iii) koşullarını sağlayan (ϑ_n) operatör dizisinin

$$\lim_{n\to\infty} \|\vartheta_n(r(t);z) - r(z)\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliğini de sağladığı gösterilirse ispat tamamlanır.

Lineerlikten

$$\begin{aligned}|\vartheta_n(r(t);z) - r(z)| &= |\vartheta_n(r(t);z) + \vartheta_n(r(z);z) - \vartheta_n(r(z);z) - r(z)| \\ &= |\vartheta_n((r(t) - r(z));z) + r(z)(\vartheta_n(1;z) - 1)|\end{aligned}$$

dir. Üçgen eşitsizliği uygulandığında

$$|\vartheta_n(r(t);z) - t(z)| \leq |\vartheta_n((r(t) - r(z));z)| + |r(z)||\vartheta_n(1;z) - 1|$$

olur. Diğer yandan lineer pozitif operatörlerin monoton artanlığından yani
$r(t) - r(z) \leq |r(t) - r(z)|$ özelliğinden dolayı

$$|\vartheta_n((r(t) - r(z));z)| \leq |\vartheta_n(|r(t) - r(z)|;z)|$$

bulunur. Operatörün pozitif olmasından ve $|r(t) - r(z)| \geq 0$ eşitsizliğinden dolayı

$$|\vartheta_n(|r(t) - r(z)|;z)| = \vartheta_n(|r(t) - r(z)|;z)$$

dir. O zaman

$$|\vartheta_n(r(t);z) - r(z)| \leq \vartheta_n(|r(t) - r(z)|;z) + |r(z)||\vartheta_n(1;z) - 1|$$

olduğu ifade edilebilir ve

$$|\vartheta_n(r(t);z) - r(z)| \leq \vartheta_n(|r(t) - r(z)|;z) + N_r|\vartheta_n(1;z) - 1|$$

yazılabilir. (ϑ_n) operatörünün monoton artanlığından

$$|\vartheta_n(r(t);z)-r(z)| \leq \vartheta_n\left(\varepsilon+2N_r\frac{(t-z)^2}{\delta^2};z\right)+N_r|\vartheta_n(1;z)-1|$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\vartheta_n\left(\varepsilon+\frac{2N_r}{\delta^2}(t-z)^2;z\right) &= \vartheta_n(\varepsilon;z)+\vartheta_n\left(\frac{2N_r}{\delta^2}(t-z)^2;z\right)\\ &= \varepsilon\vartheta_n(1;z)+\frac{2N_r}{\delta^2}\vartheta_n\left(t^2-2zt+z^2;z\right)\\ &= \varepsilon(\vartheta_n(1;z)-1)+\varepsilon+\frac{2N_r}{\delta^2}\left[(\vartheta_n\left(t^2;z\right)-z^2)\ +z^2-2z\vartheta_n(t;z)\right.\\ &\qquad \left.+z^2\vartheta_n(1;z)\right]\\ &= \varepsilon(\vartheta_n(1;z)-1)+\varepsilon+\frac{2N_r}{\delta^2}\left[(\vartheta_n\left(t^2;z\right)-z^2)\ -2z(\vartheta_n(t;z)-z)\right.\\ &\qquad \left.+z^2(\vartheta_n(1;z)-1)\right]\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}|\vartheta_n(r(t);z)-r(z)| &\leq \varepsilon(\vartheta_n(1;z))+\varepsilon+N_r|(\vartheta_n(1;z)-1)|\\ &\quad+\frac{2N_r}{\delta^2}\left[(\vartheta_n\left(t^2;z\right)-z^2)\ -2z(\vartheta_n(t;z)-z)+z^2(\vartheta_n(1;z)-1)\right]\end{aligned}$$

bulunur. (i), (ii) ve (iii) koşullarının kullanılmasıyla $|\vartheta_n(r(t);z)-r(z)| \leq \varepsilon$ olur. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty}|\vartheta_n(r(t);z)-r(z)|=0$$

olur ve istenilen bulunur.

Verilen operatörün sadece 1, t ve t^2 ifadelerinin 1, z ve z^2 ye düzgün yakınsaması, sonlu aralıkta sürekli olan bütün fonksiyonların bu operatör yardımıyla yakınsamasını söylememiz için yeterlidir.

Korovkin teoreminde $r_i(t)=t^i, i=0,1,2$ fonksiyonları Korovkin test fonksiyonları olarak ifade edilir.

2.3. Süreklilik Modülü ve Özellikleri

Yaklaşım teorisinde yakınsama hızı, bir operatörün bir fonksiyona yakınsaması kadar önemli olan başka bir husustur. Yakınsama hızını belirlemenin önemli bir yolu süreklilik modülüdür.

2.3.1. Tanım (Süreklilik Modülü)

r, $[a,b]$ aralığında tanımlı, sürekli ve reel değerli bir fonksiyon olsun. $k,l \in [a,b]$ olmak üzere $|k-l| \leq \delta$ şartını sağlayan keyfi bir $\delta > 0$ için $|r(k)-r(l)|$ değerlerinin en küçük üst sınırına r fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında süreklilik modülü denir.

$$\varpi(r;\delta) = \sup_{|k-l|\leq\delta} |r(k)-r(l)|$$

şeklinde tanımlanır. $\varpi(r;\delta)$, değişkenler farkının en fazla δ olması durumunda iki fonksiyon değerinin en fazla ne kadar fark edeceğini ifade eder. ϖ, δ'nın bir fonksiyonudur ve $\delta > 0$ için $\varpi(r;\delta)$ negatif olmayan bir fonksiyondur. Süreklilik modülü fonksiyonu için aşağıdaki özellikler sağlanır [4].

2.3.2. Lemma

ϖ fonksiyonu monoton artandır. Yani, $0 < \delta_1 \leq \delta_2$ için $\varpi(r;\delta_1) \leq \varpi(r;\delta_2)$ dir [4].

İspat

$0 < \delta_1 \leq \delta_2$ olsun. O halde $|k-l| \leq \delta_2$ koşulunu sağlayan (k,l) sayı çiftlerinin kümesi $|k-l| \leq \delta_1$ koşulunu sağlayan (k,l) sayı çiftlerinin kümesinden daha kapsamlıdır. Kümelerdeki supremum kavramı düşünüldüğünde süreklilik modülünün tanımından dolayı $\varpi(r;\delta_1) \leq \varpi(r;\delta_2)$ yazılabilmektedir.

2.3.3. Lemma

$m \in \mathbb{N}$ için $\varpi(r;m\delta) \leq m\varpi(r;\delta)$ dir [4].

İspat

$\varpi(r;m\delta) = \sup_{\substack{|k-l|\leq t\delta \\ k,l\in[a,b]}} |r(k)-r(l)|$ eşitliğinde $k = l+mp$ alındığında, $m \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\varpi(r;m\delta) = \sup_{\substack{|r|\leq\delta \\ k,l\in[a,b]}} |r(l+mp)-r(l)|$$

$$= \sup_{\substack{|r|\leq\delta \\ k,l\in[a,b]}} |r(l+mp)-r(l+(m-1)p)+r(l+(m-2)p)-\ldots+r(l+p)-r(l)|$$

$$= \sup_{\substack{|r|\leq\delta \\ k,l\in[a,b]}} \left| \sum_{k=1}^{m} r(l+kp)-r(l+(k-l)p) \right|$$

olur. O halde

$$\varpi(r;m\delta) \leq \sum_{k=1}^{m} \sup_{\substack{|r|\leq\delta \\ k,l\in[a,b]}} |r(l+kp)-r(v+(k-l)p)|$$

bulunur. Yukarıdaki toplamın içindeki ifade süreklilik modülü olması ile toplananların sayısı m tane olmasından

$$\varpi(r;m\delta) \leq m\varpi(r;\delta)$$

eşitsizliği bulunur.

2.3.4. Lemma

r fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman

$$\lim_{\delta\to 0} \varpi(r;\delta) = 0$$

olur [4].

İspat

r fonksiyonu sürekli olduğundan süreklilik tanımından dolayı her $\varepsilon > 0$ için bir $\mu > 0$ vardır öyle ki $|k-l| < \mu$ olduğunda $|r(k)-r(l)| < \varepsilon$ dır. Süreklilik modülünde $\delta < \mu$ alındığında $\varpi(r;\delta) < \varepsilon$ dır. Yani

$$\lim_{\delta \to 0} \varpi(r;\delta) = 0$$

olur.

2.3.5. Lemma

$\rho > 0$ reel sayısı için

$$\varpi(r;\rho\delta) \leq (1+\rho)\varpi(r;\delta)$$

olur .

İspat

k, ρ nın tam kısmı olsun. O halde $k \leq \rho < k+1$ olur. ϖ süreklilik modülünün monotonluk özelliğinden dolayı ve Lemma 2.3.3 den

$$\varpi(r;\rho\delta) \leq \varpi(r;(k+l)\delta)$$

$$\varpi(r;(k+1)\delta) \leq (k+1)\varpi(r;\delta) \leq (\rho+1)\varpi(r;\delta)$$

olur. O halde

$$\varpi(r;\rho\delta) < (\rho+1)\varpi(r;\delta)$$

olur. Böylece ispat bitmiş olur.

2.3.6. Lemma

r fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlı ise, her $k,l \in [a,b]$ için

$$|r(k)-r(l)| \leq \left(1+\frac{|k-l|}{\delta}\right)\varpi(r;\delta)$$

dır .

İspat

Süreklilik modülünün tanımı ve Lemma 2.3.5 den

$$|r(k)-r(l)| \leq \varpi\left(r;\frac{|k-l|}{\delta}\delta\right)$$

$$\leq \left(1+\frac{|k-l|}{\delta}\right)\varpi(r;\delta)$$

elde edilir.

2.4. Tanımlar ve Eşitsizlikler

2.4.1. Teorem (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)

$k=(k_n)$ ve $l=(l_n)$ için

$\sum_{n=1}^{\infty}|k_n l_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|k_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|l_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ eşitsizliğine Cauchy-Schwarz eşitsizliği denir [2].

2.4.2. Teorem (Hölder Eşitsizliği)

$p,q>0$ reel sayıları ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. $k=(y_i)=(y_1,y_2,\ldots), l=(z_j)=(z_1,z_2,\ldots)$ şeklinde diziler olsun. O halde

$\sum_{j=1}^{\infty}|y_j z_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}y_j^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}z_j^q\right)^{\frac{1}{q}}$ eşitsizliğine Hölder Eşitsizliği denir.

[6] de ϖ_2 ve H_2^* arasındaki ilişki

$$H_2^*(\upsilon,\delta) \leq N\left\{\varpi_2(\upsilon;\delta)+\min(1,\delta)\|\upsilon\|_{C_B(0,\infty)}\right\} \tag{2.4}$$

ifade edilmiştir. Buna bağlı olarak ikinci dereceden süreklilik modülü tanımı aşağıda verilecektir.

2.4.1. İkinci dereceden süreklilik modülü

[7]de tanımlanan ikinci dereceden süreklilik modülü

$$\varpi_2(\psi,\delta) = \sup_{0<\upsilon<\delta}\sup_{x\in(0,\infty)}|\psi(x+2\gamma)-2\psi(x+\rho)+\psi(\upsilon)| \tag{2.5}$$

şeklinde gösterilir

2.4.2. Lineer pozitif operatörlerin önemi

Matematik alanında önemli bir yere sahip olan K. Weierstrass (1815-1897) ile ifade edilen Weierstrass yaklaşım teorisini ifade etmiştir ve bu sayede yaklaşım teorisi alanında büyük bir ilerleme kaydedilmiştir.

1912 yılında Bernstein $\zeta \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$ için

$$B_\zeta(h;x) = \sum_{\eta=0}^{\zeta}\binom{\zeta}{\eta}x^\eta(1-x)^{\zeta-\eta}h\left(\frac{\eta}{\zeta}\right)$$

olacak şekilde polinomların bir dizisini oluşturarak bu teoremin ispatını $[0,1]$ aralığında anlaşılır ve güzel bir şekilde yapmıştır.

2.4.3. Lemma

Bernstein operatörleri için

$$B_\zeta(1;x) = 1$$
$$B_\zeta(h;x) = x$$
$$B_\zeta(h^2;x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{\zeta}$$

tanımları verilebilir.

İspat .

Binom açılımı

$$(a+b)^\zeta = \sum_{\eta=0}^{\zeta} \binom{\zeta}{\eta} a^\eta b^{\zeta-\eta}$$

şeklinde ifade edilir.

Bu açılımda $a = x$ ve $b = 1-x$ alınırsa $B_\zeta(1;x) = 1$ olarak bulunur.

$B_\zeta(h;x)$ için

$$\begin{aligned} B_\zeta(h;x) &= \sum_{\eta=0}^{\zeta} \left(\frac{\eta}{\zeta}\right) \binom{\zeta}{\eta} x^\eta (1-x)^{\zeta-\eta} \\ &= \sum_{\eta=1}^{\zeta} \left(\frac{\eta}{\zeta}\right) \frac{\zeta!}{(\zeta-\eta)!\eta!} x^\eta (1-x)^{\zeta-\eta} \\ &= \sum_{\eta=1}^{\zeta} \frac{(\zeta-1)!}{(\zeta-\eta)!(\eta-1)!} x^\eta (1-x)^{\zeta-\eta} \\ &= x \sum_{\eta=0}^{\zeta-1} \frac{(\zeta-1)!}{(\zeta-\eta-1)!(\eta)!} x^\eta (1-x)^{\zeta-\eta-1} \\ &= x \sum_{\eta=0}^{\zeta-1} \binom{\zeta-1}{\eta} x^\eta (1-x)^{\zeta-\eta-1} \end{aligned}$$

bulunur. Binom açılımından $B_\zeta(h;x) = x$ olur.

$B_\zeta(h^2;x)$ için

$$B_\zeta(h^2;x) = \sum_{\eta=0}^{\zeta} \left(\frac{\eta}{\zeta}\right)^2 \binom{\zeta}{\eta} x^\eta (1-x)^{\zeta-\eta}$$
$$= \sum_{\eta=1}^{\zeta} \left(\frac{\eta}{\zeta}\right) \frac{(\zeta-1)!}{(\zeta-\eta)!(\eta-1)!} x^\eta (1-x)^{\zeta-\eta}$$

olur. $\frac{\eta}{\zeta} = \frac{\eta-1+1}{\zeta} = \frac{\eta-1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta}$ olduğundan son eşitlikte

$$B_\zeta(h^2;x) = \sum_{\eta=1}^{\zeta} \left(\frac{\eta-1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta}\right) \frac{(\zeta-1)!}{(\zeta-\eta)!(\eta-1)!} x^\eta (1-x)^{\zeta-\eta}$$

yazılır. Binom açılımı kullanılıp gerekli işlemler ve sadeleştirmeler yapıldığında

$$B_\zeta(h^2;x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{\zeta}$$

elde edilir ve ispat bitmiş olur.

2.4.3. Süreklilik modülünün özellikleri

2.4.4. Lemma

Süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır.

1. $\omega(h;\delta) \geq 0$
2. $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(h;\delta_1) \leq \omega(h;\delta_2)$
3. $z \in \mathbb{N}$ $\omega(h;z\delta) \leq z\omega(h;\delta)$
4. $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(h;\lambda\delta) \leq (1+\lambda)\omega(h;\delta)$
5. $\lim_{\delta\to 0} \omega(h;\delta) = 0$
6. $|h(v)-h(y)| \leq \omega(h;|v-y|)$
7. $|h(v)-h(y)| \leq \frac{1+|v-y|}{\delta}\omega(h;\delta)$

İspat

1. Süreklilik modülü, mutlak değerin supremumudur. Dolayısıyla $\omega(h;\delta) \geq 0$ olduğu açıktır.
2. $\delta_1 \leq \delta_2$ için $|v-y| \leq \delta_1$ kümesi $|v-y| \leq \delta_2$ tarafından kapsanmaktadır. Bu sebeple supremum özelliğinden $\omega(h;\delta_1) \leq \omega(h;\delta_2)$ sağlanır.
3. Süreklilik modülünün tanımından

   $\omega(h;z\delta) = \sup_{\substack{y,v\in[a,b] \\ |v-y|\leq z\delta}} |h(v)-h(y)|$ dir.

   $|v-y| \leq z\delta \Rightarrow y - z\delta \leq v \leq y + z\delta$

   ve $v = y + zl$ alınırsa

   $$\begin{aligned} y - z\delta \leq y + zl \leq y + z\delta \\ \Rightarrow -z\delta \leq zl \leq z\delta \\ \Rightarrow -\delta \leq l \leq \delta \\ \Rightarrow |l| \leq \delta \end{aligned}$$

   olur.

   $\omega(h;z\delta) = \sup_{\substack{y,v\in[a,b] \\ |l|\leq\delta}} |h(y+zl)-h(y)|$

   biçiminde bulunur. Diğer taraftan

   $$\sup_{\substack{y,v\in[a,b] \\ |l|\leq\delta}} |h(y+zl)-h(y)| = \sup_{\substack{y,v\in[a,b] \\ |l|\leq\delta}} \left| \sum_{k=0}^{z-1} [h(y+(v+1)l) - h(y+vl)] \right|$$

   olup, sağ tarafa üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\sup_{\substack{y,v\in[a,b]\\|l|\leq\delta}} |h(y+zl)-h(y)| \leq \sup_{\substack{y,v\in[a,b]\\|l|\leq\delta}} \left|\sum_{k=0}^{z-1}[h(y+(v+1)l)-h(y+vl)]\right|$$

$$\leq \omega(h;\delta)+...+\omega(h;\delta)$$

$$\leq z\omega(h;\delta)$$

bulunur.

4. $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $[|\lambda|]$ tam değer fonksiyonu olmak üzere $[|\lambda|] \leq \lambda \leq [|\lambda|]+1$ eşitsizliği doğrudur. Bu eşitsizlikten ve 2. özellikten dolayı $\omega(h;z\delta)$ 'nın azalmayan fonksiyon olmasından kaynaklı $\omega(h;\lambda\delta) \leq \omega(h;([|\lambda|]+1)\delta)$ eşitsizliği yazılır. $[|\lambda|]$ pozitif bir sayı olmasından üstteki eşitsizliğe 3. özellik uygulanırsa

   $\omega(h;([|\lambda|]+1)\delta \leq ([|\lambda|]+1)\omega(h;\delta)$

   eşitsizliği bulunur. Ayrıca $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $[|\lambda|]+1 \leq \lambda+1$ yazılabildiği bilindiğinden

   $\omega(h;([|\lambda|]+1)\delta \leq (\lambda+1)\omega(h;\delta)$

   dır. O halde $\omega(g;\gamma\delta) \leq (1+\gamma)\omega(g;\delta)$ bulunur ki ispat tamamlanmış olur.

5. $|v-y| \leq \delta$ eşitsiliğinde $\delta \geq 0$ ise $v \to y$ olur. h fonksiyonunun sürekliliğinden ve süreklilik tanımından $v \to y$ olmasından kaynaklı $|h(v)-h(y)| \to 0$ olmasından dolayı ispat aşikardır.
6. $\omega(h;\lambda\delta)$ da $\delta = |v-y|$ denirse

   $$\omega(h;|v-y|) = \sup_{y,v\in[a,b]} |h(v)-h(y)|$$

   olur böylece $|h(v)-h(y)|$ 'lerin supremumu $\omega(h;|v-y|)$ olduğundan $|h(v)-h(y)|$, $\omega(h;|v-y|)$ 'dan küçük olur.

7. 6. özellik kullanılırsa

$$|h(v)-h(y)| \leq \omega(h;|v-y|) = \frac{1+|v-y|}{\delta}\omega(h;\delta)$$

olur. O halde, bu eşitsizlikte 4. özellikten de yararlanılırsa

$$|h(v)-h(y)| \leq \frac{1+|v-y|}{\delta}\omega(h;\delta)$$

dır ve böylece ispat tamamlanmış olur.

3. YENİ TİP APPELL POLİNOMLARI YARDIMI İLE OLUŞTURULAN SZÁSZ OPERATÖRÜ

Bu bölümde elde edilen bulgular Mathematical Foundations of Computing dergisinde yayınlanan makalemizin orijinal olan kısımların terorem ve sonuçlarını içermektedir. [8]

3.1. Operatörün Tarihçesi

Bernstein operatörlerinin sonlu aralıktan sonsuz aralığa kadar genişletilerek elde edilen Szász [9] operatörleri birçok çalışmada olduğu gibi yaklaşımlar teorisinde de önemli bir yere sahiptir. Bilhassa üretici fonksiyonlar üzerinde tanımlanan polinomların kullanımında daha sık karşımıza çıkmaktadır.

Literatürde bulunan mevcut araştırma konularının yanı sıra devam eden araştırmalarda yürütülmektedir. Son dönemlerde birçok araştırmacı, Appell polinomları yardımıyla operatörlerin genellemelerini çalışmıştır ([3], [10], [11], [12]).

Jakimovski ve Leviatan [13] Appell polinomları için Szász operatörlerinin genellemelerini vermişlerdir.
Burada $a_0 \neq 0$ olmak üzere

$$g(y) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m y^n$$

$|z| < R$ $(R > 1)$ ve $g(1) \neq 0$ için analitik ve aşağıdaki eşitlik ile birlikte

$$g(u)e^{ux} = \sum_{m=0}^{\infty} l_m(x)u^m,$$

olup $l_m(x)$, $l_m(x) \geq 0$, her $x \in [0,\infty)$ olacak şekilde Appell polinomları için üretici fonksiyonlardır.

Jakimovski ve Leviatan [13], $P_n(f;x)$ lineer pozitif operatörünü $n \in \mathbb{N}$ için

$$P_n(f;x) = \frac{e^{-nx}}{g(1)} \sum_{k=0}^{\infty} p_m(nx) f\left(\frac{m}{n}\right),$$

tanımlamıştır.

Ayrıca, $P_n(f;x)$ in yaklaşım özelliklerini de elde etmişlerdir.

Daha sonra, Ismail [14] Sheffer polinomlarını kullanarak hem Jakimovski ve Leviatan hemde Szász operatörü için farklı bir genelleme vermiştir. Burada C ve D, $|z| < R$ $(R > 1)$ diskindeki gibi analitik fonksiyonlardır

$$C(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m \ (c_0 \neq 0),$$
$$D(z) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m z^m \ (d_1 \neq 0).$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Sheffer polinomları $p_m(x)$,

$$C(t)e^{xH(t)} = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(x) t^m, \ |t| < R,$$

olmak üzere

i) $x \in [0,\infty)$ için , $p_k(x) \geq 0$,

ii) $C(1) \neq 0$ ve $H'(1) = 1$

koşullarını sağlayan fonksiyon üretme özelliğine sahiptir.

3.1.1. Sonuç

Ismail [14] bazı araştırmalar yapmış ve bu incelemelerinde lineer pozitif operatörlere

değinmiştir. Ayrıca $n \in \mathbb{N}$ için

$$L_n(f;x) := \frac{e^{-nxH(1)}}{C(1)} \sum_{m=0}^{\infty} p_m(nx) f\left(\frac{m}{n}\right),$$

operatörlerinin yakınsama özelliklerini incelemiştir.

Yapılan farklı çalışmalarda da Szász operatörleri için bu tür genellemeler ile karşılaşılabilir [15–23].

Bu modifikasyonların ve genellemelerin asıl amacı, istenen fonksiyonun ait olduğu sınıfı genişletmek için Szász operatörlerini $A^{(2)}$ sınıfı Appell polinomları aracılığıyla aktarmaktır. Szász operatörleri üzerinde devam eden araştırmaların bir diğer amacı ise yaklaşım hızını artırıp yaklaşım sürecinde gerçekleşecek mutlak hatayı azaltmaktır.

3.2. Operatörün Oluşturulması

Burada Kazmin'in [24] tanımladığı $A^{(2)}$ sınıfı Appell polinomları aracılığıyla Szász operatörleri için yeni tip Appell polinomları yardımı ile bir genelleme sunulacaktır. $A^{(2)}$ sınıfı Appell polinomları $p_m(x)$

$$C(t)e^{xt} + D(t)e^{-xt} = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(x)t^m$$

şeklinde tanımlanır. Burada $C(t)$ ve $D(t)$;

$$C(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{m!} t^m,$$
$$D(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_m}{m!} t^m$$

$|z| < R$ $(R > 1)$ diskinde $a_0^2 - b_0^2 \neq 0$ ile tanımlanan kuvvet serileridir.

Hermite, Bernoulli ve Euler polinomları bu tür polinomlara örnektir.

Yeni tanımlanacak olan J_n operatörü, $p_m(x)$ yeni tip Appell polinomları

$$C(t)e^{xT(t)} + D(t)e^{-xV(t)} = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(x)t^m \tag{3.1}$$

yardımıyla

i) tüm $m = 0,1,\cdots$ için $p_m(x) > 0$ ve $C(1) > 0,\ D(1) > 0$

ii) $x \in [0,\infty)$ için , $p_m(x) \geq 0$

iii) $C(1) \neq 0$ ve $T'(1) = 1,\ V'(1) = 1$

koşulları altında

$$J_n(f;x) := \frac{1}{C(1)e^{nxT(1)} + D(1)e^{-nxV(1)}} \sum_{m=0}^{\infty} p_m(nx) f\left(\frac{m}{n}\right) \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Bu koşullar bize (3.2) ile verilen J_n operatörler dizisinin pozitifliğini garanti eder.

3.2.1. Sonuç

$C(t) = 1$ and $D(t) = 0$ alınırsa, hem Sheffer polinomları hem de Szász operatörleri tekrar elde edilir.

Ortogonal polinomların özel türlerini içeren sayısal örnekler (3.2) ile verilen J_n operatör dizisi kullanılarak oluşturulabilir.
Tüm $k = 0,1,\cdots$ için $C(1) > 0, D(1) \geq 0$ ve $p_m(x) > 0$ koşulları altında (3.1) ile verilen eşitlikte $C(t)$ veya $D(t)$ farklı seçimleri ile farklı operatör dizileri elde edilir.

Bu operatörler bir çok yerde kullanılabilir. Bunlar bilgisayar simülasyon uygulaması, konuşma analizi, veri bilimi olarak sıralanabilir. Bu tezde ilk olarak tanımlanan (3.2) operatörünün yakınsaklık özellikleri verilmiştir. Daha sonra, birinci ve ikinci dereceden süreklilik modülü ile Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar ile [25]'daki benzer hesaplamalar kullanarak bazı tahminlerde bulunulmuştur.

3.3. Jn Operatörlerinin Bazı Yaklaşım Sonuçları

Aşağıdaki lemmalar önemli bulgulara neden olmaktadır. İlk olarak bazı eşitlikler elde edilecektir. ς , $[0,\infty)$ üzerinde sürekli bir fonksiyon ve J_n operatörü (3.2) ile verilsin. O halde aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

3.3.1. Lemma

Negatif olmayan her x reel sayısı için

$$J_n(1;x) = 1$$

eşitliği elde edilir.

İspat

(3.1) eşitliğinde x yerine nx ve $t = 1$ alınırsa

$$C(1)e^{nxT(1)} + D(1)e^{-nxV(1)} = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(nx)$$

elde edilir. Bulunan bu eşitlik (3.2) de yerine yazılırsa

$$J_n(1;x) = \frac{1}{C(1)e^{nxT(1)} + D(1)e^{-nxV(1)}} \left(C(1)e^{nxT(1)} + D(1)e^{-nxV(1)} \right) = 1$$

eşitliği kolaylıkla elde edilmiş olur.

3.3.2. Lemma

Negatif olmayan her x reel sayısı için

$$J_n(\varsigma;x) = \left[\frac{C(1)e^{nxT(1)} - D(1)e^{-nxV(1)}}{C(1)e^{nxT(1)} + D(1)e^{-nxV(1)}} \right] x + \frac{C'(1)e^{nxT(1)} + D'(1)e^{-nxV(1)}}{n\left[C(1)e^{nxT(1)} + D(1)e^{-nxV(1)} \right]}$$

eşitliği elde edilir.

İspat

(3.1) ile verilen denklemin birinci türevi t'ye göre alınırsa

$$\sum_{m=0}^{\infty} m p_m(x) t^{m-1} = C'(t)e^{xT(t)} + C(t)xT'(t)e^{xT(t)} + D'(t)e^{-xT(t)} - D(t)xV'(t)e^{-xV(t)}$$
$$= x\left[C(t)D'(t)e^{xT(t)} - D(t)e^{-xV(t)}\right] + C'(t)e^{xT(t)} + D'(t)e^{-xV(t)}.$$

elde edilir. Daha sonra denklemde t = 1 ve x yerine nx yazılırsa

$$\sum_{m=0}^{\infty} m p_m(nx) = nx\left[C(1)e^{nxT(1)} - D(1)e^{-nxV(1)}\right] + C'(1)e^{nxT(1)} + D'(1)e^{-nxV(1)} \tag{3.3}$$

bulunur.

Bulunan (3.3) eşitliğini denklemde yerine yazarsak;

$$J_n(\varsigma;x) = \frac{1}{C(1)e^{nxT(1)} + D(1)e^{-nxV(1)}} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} m p_m(nx)$$
$$= \left[\frac{C(1)e^{nxT(1)} - D(1)e^{-nxV(1)}}{C(1)e^{nxT(1)} + D(1)e^{-nxV(1)}}\right] x + \frac{C'(1)e^{nxT(1)} + D'(1)e^{-nxV(1)}}{n\left[C(1)e^{nxT(1)} + D(1)e^{-nxV(1)}\right]}$$

istenen eşitlik bulunmuş olur.

3.3.3. Lemma

Negatif olmayan her x reel sayısı için

$$J_n(\varsigma^2;x) = x^2 + \frac{x}{n}\left\{\frac{\left[2C'(1) + C(1)\right]e^{nxT(1)} - \left[2D'(1) + D(1)\right]e^{-nxV(1)}}{C(1)e^{nxT(1)} + D(1)e^{-nxV(1)}}\right\}$$
$$+ \frac{\left[C''(1) + C'(1)\right]e^{nxT(1)} + \left[D''(1) + D'(1)\right]e^{-nxV(1)}}{n^2\left[C(1)e^{nxT(1)} + D(1)e^{-nxV(1)}\right]}$$

eşitliği elde edilir.

İspat

(3.1) ile verilen denklemin ikinci türevi t'ye göre alınırsa

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m^2-m)p_m(x)t^{m-2} = \left[C''(t)+xC'(t)\right]e^{xT(t)}+\left[C'(t)+xC(t)\right]xe^{xT(t)} + \left[D''(t)-xD'(t)\right]e^{-xV(t)}+\left[D'(t)+xD(t)\right](-x)\,e^{-xV(t)}$$

elde edilir.

t = 1 ve x yerine nx alınır ve (3.3)ile verilen denklem dikkate alınırsa

$$\sum_{m=0}^{\infty}m^2p_m(nx) = n^2x^2[C(1)e^{nxT(1)}+D(1)e^{-nxV(1)}]+nx\{[2C'(1)+C(1)]e^{nxT(1)} - [2D'(1)+D(1)]e^{-nxV(1)}\}+[C'(1)+C(1)]e^{nxT(1)} + [D'(1)+D(1)]e^{-nxV(1)}$$

elde edilir. Yukarıda verilen eşitlik yerine yazılırsa;

$$J_n(\varsigma^2;x) = \frac{1}{n^2[C(1)e^{nxT(1)}+D(1)e^{-nxV(1)}]}\sum_{k=0}^{\infty}m^2p_m(nx) = x^2+\frac{x}{n}\left\{\frac{[2C'(1)+C(1)]\,e^{nxT(1)}-[2D'(1)+D(1)]\,e^{-nxV(1)}}{C(1)e^{nxT(1)}+D(1)e^{-nxV(1)}}\right\} + \frac{[C''(1)+C'(1)]\,e^{nxT(1)}+[D''(1)+D'(1)]\,e^{-nxV(1)}}{n^2\left[C(1)e^{nxT(1)}+D(1)e^{-nxV(1)}\right]}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

3.3.4. Tanım

$\{R_n\}_{n\geq 1}$ bir operatör dizisi olsun. $y\in\mathbb{N}$ olmak üzere, $\{R_n\}_{n\geq 1}$ operatör dizisinin y-inci merkezi momenti

$$\chi_y := \chi_{n,y}(x) = R_n((t-x)^y;x)$$

ile tanımlanır.

ς, $[0,\infty)$ üzerinde sürekli bir fonksiyondur ve J_n , (3.2) ile verilmektedir.

3.3.5. Lemma

Negatif olmayan her x reel sayısı için

$$J_n(\varsigma - x;x) = -\frac{2D(1)e^{-nxV(1)}}{C(1)e^{nxT(1)} + D(1)e^{-nxV(1)}}x + \frac{C'(1)e^{nxT(1)} + D'(1)e^{-nxV(1)}}{n\left[C(1)e^{nxT(1)} + D(1)e^{-nxV(1)}\right]}$$

eşitliği J_n operatörünün birinci merkezi momentidir.

İspat

Lemma3.3.1, Lemma3.3.2 sayesinde

$$\begin{aligned} J_n(\varsigma - x;x) &= J_n(\varsigma;x) - xJ_n(1;x) \\ &= -\frac{2D(1)e^{-nxV(1)}}{C(1)e^{nxT(1)} + D(1)e^{-nxV(1)}}x + \frac{C'(1)e^{nxT(1)} + D'(1)e^{-nxV(1)}}{n\left[C(1)e^{nxT(1)} + D(1)e^{-nxV(1)}\right]} \end{aligned}$$

kolayca elde edilir.

3.3.6. Lemma

Negatif olmayan her x reel sayısı için

$$\begin{aligned} J_n((\varsigma - x)^2;x) = x^2 &\left[\frac{4D(1)e^{-nxV(1)}}{C(1)e^{nxT(1)} + D(1)e^{-nxV(1)}}\right] \\ &+ \frac{x}{n}\left[\frac{C(1)e^{nxT(1)} - [4D'(1) + D(1)]e^{-nxV(1)}}{C(1)e^{nxT(1)} + D(1)e^{-nxV(1)}}\right] \\ &+ \frac{[C''(1) + C(1)]e^{nxT(1)} + [D''(1) + D'(1)]e^{-nxV(1)}}{n^2\left[C(1)e^{nxT(1)} + D(1)e^{-nxV(1)}\right]}. \end{aligned}$$

eşitliği J_n operatörünün ikinci merkezi momentidir.

İspat

Lemma3.3.1, Lemma3.3.2, Lemma3.3.3 sayesinde

$$\begin{aligned} J_n((\varsigma-x)^2;x) &= J_n(\varsigma^2;x)-2xJ_n(\varsigma;x)+x^2J_n(1;x) \\ &= x^2\left[\frac{4D(1)e^{-nxV(1)}}{C(1)e^{nxT(1)}+D(1)e^{-nxV(1)}}\right] \\ &+\frac{x}{n}\left[\frac{C(1)e^{nxT(1)}-[4D'(1)+D(1)]e^{-nxV(1)}}{C(1)e^{nxT(1)}+D(1)e^{-nxV(1)}}\right] \\ &+\frac{[C''(1)+C(1)]e^{nxT(1)}+[D''(1)+D'(1)]e^{-nxV(1)}}{n^2\left[C(1)e^{nxT(1)}+D(1)e^{-nxV(1)}\right]}. \end{aligned}$$

kolayca elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

3.3.7. Teorem

f fonksiyonunun

$$E=\left\{f:\frac{f(x)}{1+x^2},\ x\to\infty \text{ olduğunda yakınsaktır }\right\}.$$

sınıfına ait olduğunu ve $[0,\infty)$ aralığında sürekli olduğunu varsayalım,

Bundan sonra, (3.2)'de verilen operatör dizisi kompakt alt kümelerine düzgün bir şekilde yakınsar. Yani sırasıyla Lemma3.3.1, Lemma3.3.2, Lemma3.3.3 kullanılarak

$$\lim_{n\to\infty} J_n(\varsigma^i;x)=x^i,(i=0,1,2).$$

İspat

$[0,\infty)$ aralığının kompakt alt kümelerinde bu yakınsaklıklara düzgün bir şekilde olur. Dolayısıyla ispatı Korovkin teoremi [26] yardımıyla elde edilir.

Tezin bundan sonraki bölümlerinde yaklaşık sonuçlarla ilerlenecektir.

3.4. J_n Operatörünün Yakınsaklık Özellikleri

Bu bölümde, operatörün yaklaşım hızı hesabı süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar ile elde edilecektir.

3.4.1. Teorem

f, $[0,\infty)$ 'da düzgün süreklidir ve J_n operatörü (3.2)'de tanımlanmıştır. O halde

$$|J_n(f;x)-f(x)| \leq 2\omega\left(f;\sqrt{J_n((\varsigma-x)^2;x)}\right),$$

eşitsizliği gerçeklenir ve f fonksiyonu için ω süreklilik modülü [27]

$$\omega(f;\delta)=\sup_{\substack{x,y\in[0,\infty)\\ |x-y|\leq\delta}}|f(x)-f(y)|$$

şeklinde tanımlanır.

İspat

Üçgen eşitsizliği ve süreklilik modülünün bilinen özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
|J_n(f;x)-f(x)| &= \left|\frac{1}{C(1)e^{nxT(1)}+D(1)e^{-nxV(1)}}\sum_{m=0}^{\infty}p_m(nx)\left[f\left(\frac{m}{n}\right)-f(x)\right]\right| \\
&\leq \frac{1}{C(1)e^{nxT(1)}+D(1)e^{-nxV(1)}}\sum_{m=0}^{\infty}p_m(nx)\left|f\left(\frac{m}{n}\right)-f(x)\right| \\
&\leq \frac{1}{C(1)e^{nxT(1)}+D(1)e^{-nxV(1)}}\sum_{m=0}^{\infty}p_m(nx)\left[1+\frac{1}{\delta}\left|\frac{m}{n}-x\right|\right]\omega(f;\delta) \\
&= \left\{1+\frac{1}{\delta}\frac{1}{C(1)e^{nxT(1)}+D(1)e^{-nxV(1)}}\right. \\
&\left.\times\sum_{m=0}^{\infty}p_m(nx)\left|\frac{m}{n}-x\right|\right\}\omega(f;\delta) \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

yazılabilir.

Cauchy-Schwarz eşitsizliği ele alınırsa

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty} p_m(nx)\left|\frac{m}{n}-x\right| &= \sum_{m=0}^{\infty}\sqrt{p_m(nx)}\sqrt{p_m(nx)}\left|\frac{m}{n}-x\right| \\ &\leq \left[\sum_{m=0}^{\infty} p_m(nx)\right]^{1/2}\left[\sum_{m=0}^{\infty} p_m(nx)\left(\frac{m}{n}-x\right)^2\right]^{1/2} \\ &= \left[C(1)e^{nxT(1)}+D(1)e^{-nxV(1)}\right]\left[J_n\left((\varsigma-x)^2;x\right)\right]^{1/2}\end{aligned}$$

bulnur.

(3.4)'teki son eşitsizlik yerine koyulursa

$$|J_n(f;x)-f(x)| \leq \left\{1+\frac{1}{\delta}\left[J_n\left((\varsigma-x)^2;x\right)\right]^{1/2}\right\}\omega(f;x)$$

olur.

δ nın aşağıdaki eşitlikteki seçimi ile

$$\delta = \left[J_n\left((\varsigma-x)^2;x\right)\right]^{1/2}$$

istenen sonuç elde edilmiş olur.

Şimdi, $0<\gamma<1$ ve $\varsigma_1,\varsigma_2 \in [0,\infty)$ için Lipschitz sınıfndan fonkiyonlar

$$Lip_M^{(\gamma)} = \left\{\varphi : |\varphi(\varsigma_1)-\varphi(\varsigma_2)| \leq M|\varsigma_1-\varsigma_2|^{\gamma}\right\}$$

şeklinde tanımlıdır.

3.4.2. Teorem

Farz edelim ki $\varphi \in Lip_M^{(\gamma)}$ olsun. O halde

$$|J_n(\varphi;x)-\varphi(x)| \leq M\left[J_n\left((\varsigma-x)^2;x\right)\right]^{\frac{\gamma}{2}}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat

$\varphi \in Lip_M^{(\gamma)}$ için

$$\begin{aligned}|Z_n(\varphi;x)-\varphi(x)| &= |Z_n(\varphi(\xi)-\varphi(x);x)| \\ &\leq Z_n(|\varphi(\xi)-\varphi(x)|;x) \\ &\leq M\cdot Z_n\left(|\xi-x|^{\gamma};x\right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

bulunur. Elde edilen son eşitsizliğe (3.5) Hölder eşitsizliğini uygulanırsa,

$$\begin{aligned}J_n\left(|\varsigma-x|^{\gamma};x\right) &= \frac{1}{C(1)e^{nxT(1)}+D(1)e^{-nxV(1)}}\sum_{m=0}^{\infty}p_m(nx)\left|\frac{m}{n}-x\right|^{\gamma} \\ &= \frac{1}{C(1)e^{nxT(1)}+D(1)e^{-nxV(1)}}\sum_{m=0}^{\infty}\left[p_m(nx)\right]^{\frac{2-\gamma}{2}}\left[p_m(nx)\right]^{\frac{\gamma}{2}}\left|\frac{m}{n}-x\right|^{\gamma} \\ &\leq \left\{\frac{1}{C(1)e^{nxT(1)}+D(1)e^{-nxV(1)}}\sum_{m=0}^{\infty}p_m(nx)\right\}^{\frac{2-\gamma}{2}} \\ &\times\left\{\frac{1}{C(1)e^{nxT(1)}+D(1)e^{-nxV(1)}}\sum_{m=0}^{\infty}p_m(nx)\left(\frac{m}{n}-x\right)^2\right\}^{\frac{\gamma}{2}} \\ &= \left[J_n(1;x)\right]^{\frac{2-\gamma}{2}}\left[J_n\left((\varsigma-x)^2;x\right)\right]^{\frac{\gamma}{2}}.\end{aligned}$$

olur ki böylece istenen sonuç elde edilir.

Öncelikle aşağıdaki teorem için kullanılan ikinci dereceden Steklov fonksiyonu ve Rasa'nın sonucunu hatırlatalım .

$z\in C^2[0,a]_{(a>0)}$ ve $(L_n)_{n\geq 0}$, $L_n(e_i;x)=e_i(x), e_i(\varsigma)=\varsigma^i, i\in\{0,1,2\}$ özelliğine sahip bir lineer pozitif operatörler dizisi olsun. Ayrıca Rasa'nın sonucu [28] ile verilmektedir.

$$|L_n(z;x)-z(x)| \leq \left\|z'\right\|\sqrt{L_n\left((\varsigma-x)^2;x\right)}+\frac{1}{2}\left\|z''\right\|L_n\left((\varsigma-x)^2;x\right).$$

$f \in C[a,b]$ için ikinci dereceden Steklov fonksiyonu [29] $x \in [a,b]$ için

$$f_k(x) := \frac{1}{k}\int_{-k}^{k}\left(1-\frac{|t|}{k}\right) f(k;x+t)\,dt$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $f : [a-h, b+h] \to \mathbb{R}, k > 0$

$$f(k;x) = \begin{cases} P_-(x)\ ;\ a-k \le x \le a \\ f(x)\ ;\ a \le x \le b \\ P_+(x)\ ;\ b < x \le b+k \end{cases}$$

ve $P_-(x)$ ile $P_+(x)$ belirlenen özel aralıkta f'e lineer en iyi yaklaşımlardır.

3.4.3. Teorem

φ, $[0,\infty)$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$|J_n(\varphi;x) - \varphi(x)| \le \frac{3}{2}\left(1+\frac{a}{2}+\frac{k^2}{2}\right)\omega_2(\varphi,k) + \frac{2k^2}{a}\|\varphi\|$$

eşitsizliği sağlanır.

Burada ω_2, Devore ve Lorentz [27] tarafından tanımlanan φ fonksiyonunun ikinci dereceden süreklilik modülüdür

$$\omega_2(\varphi;\delta) = \sup_{0<t\le\delta} \|\varphi(.+2t) - 2\varphi(.+t) + \varphi(.)\|$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

İspat

Bazı hesaplamalar ile

$$\begin{aligned} |J_n(\varphi;x) - \varphi(x)| &\le J_n(|\varphi-\varphi_k|;x) + |J_n(\varphi_k;x) - \varphi_k(x)| + |\varphi_k(x) - \varphi(x)| \\ &\le 2\|\varphi-\varphi_k\| + |J_n(\varphi_k;x) - \varphi_k(x)| \end{aligned} \tag{3.6}$$

eşitsizliği kolayca elde edilir.

φ_k ,φ için ikinci dereceden Steklov fonksiyonudur.

$\varphi_h \in C^2[0,a]$ ve Rasa'nın sonucu olan Landau eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
|J_n(\varphi_k;x)-\varphi_k(x)| &\le |L_n(z;x)-z(x)| \\
&\le \left\|\varphi_k'\right\| \sqrt{J_n\left((\varsigma-x)^2;x\right)} + \frac{1}{2}\left\|\varphi_k''\right\| J_n\left((\varsigma-x)^2;x\right) \\
&\le \left(\frac{2}{a}\left\|\varphi_k\right\| + \frac{a}{2}\left\|\varphi_k''\right\|\right) \sqrt{J_n\left((\varsigma-x)^2;x\right)} \\
&+ \frac{1}{2}\left\|\varphi_k''\right\| J_n\left((\varsigma-x)^2;x\right) \\
&\le \left(\frac{2}{a}\|\varphi\| + \frac{3a}{4k^2}\omega_2(\varphi;k)\right) \sqrt{J_n\left((\varsigma-x)^2;x\right)} \\
&+ \frac{3a}{4h^2}\omega_2(\varphi;h) J_n\left((\varsigma-x)^2;x\right) \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Zhuk [29], $\omega_2(\varphi;k)$ ile ikinci dereceden Steklov fonksiyonu arasındaki eşitsizliği

$$\|\varphi-\varphi_k\| \le \frac{3}{4}\omega_2(\varphi;k).$$

şeklinde vermiştir.

(3.7) ve son eşitsizlik (3.6) eşitsiliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
|J_n(\varphi;x)-\varphi(x)| &\le \frac{3}{2}\omega_2(\varphi;k) + \left(\frac{2}{a}\|\varphi\| + \frac{3a}{4k^2}\omega_2(\varphi;k)\right) \sqrt{J_n\left((\varsigma-x)^2;x\right)} \\
&+ \frac{3}{4k^2}\omega_2(\varphi;k) J_n\left((\varsigma-x)^2;x\right)
\end{aligned}$$

olur. $k = \sqrt[4]{J_n\left((\varsigma-x)^2;x\right)}$ şekilde seçilirse ispat tamamlanmış olur.

4. GOULD-HOPPER ve MILLER-LEE POLİNOMLARINI İÇEREN SZÁSZ OPERATÖRLERİNİN APPELL TİPLİ GENELLEŞMESİ

4.1. Gould-Hopper Polinomlarını İçeren Szász Operatörlerinin Appell Tipli Genelleşmesi

4.1.1. Operatörün tanımı

3. Bölümde $J_n(f;x)$ operatörü

$$J_n(f;x) := \frac{1}{C(1)e^{nxT(1)} + D(1)e^{-nxV(1)}} \sum_{m=0}^{\infty} p_m(nx) f\left(\frac{m}{n}\right)$$

şeklinde tanımlamıştı. J_n operatörü için yeni tip Appell polinomları $p_m(x)$

$$C(t)e^{xT(t)} + D(t)e^{-xV(t)} = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(x)t^m$$

şeklinde tanımlanmıştı

Bu bölümün ilk kısmında ise Gould Hopper polinomlarını içeren Szász operatörlerinin Appell tipli genellemesini verilecektir ve süreklilik modülü kullanarak belirlenen f fonksiyonu için hata tahmininde bulunulacaktır .

Gould-Hopper polinomları

$$e^{ht^{d+1}} \exp(xt) = \sum_{m=0}^{\infty} g_m^{d+1}(x,h)\frac{t^m}{m!} \tag{4.1}$$

şeklinde verilen üretici fonksiyonlara sahiptir [30] ve açık gösterimi

$$g_m^{d+1}(x,h) = \sum_{s=0}^{\left[\frac{m}{d+1}\right]} \frac{m!}{s!(m-(d+1)s)!} h^s x^{m-(d+1)s}$$

şeklindedir.

Gould-Hopper polinomları Hermite tipi [31] d-ortogonal polinom kümeleridir. d-ortogonallik kavramı Van Iseghem [32] ve Maroni [33] tarafından keşfedilmiştir. Gould-Hopper polinomları $A^{(2)}$ sınıfının Appell polinomlarıdır.

(4.1) ile verilen eşitlikte $t = 1$ ve x yerine nx alınırsa

$$e^h \exp(nx) = \sum_{m=0}^{\infty} g_m^{d+1}(nx,h)\frac{1}{m!}$$

elde edilir.

Gould-Hopper polinomları $C(t) = e^{ht^{d+1}}$,$D(t) = 0$,$T(t) = t$ seçilerek $A^{(2)}$ sınıfı Appell polinomları halini alırlar.

$h \geq 0$, tüm $k = 0,1,\cdots$ için $A(1) > 0, B(1) \geq 0$ ve $p_k(x) > 0$ sınırlamaları nedeniyle (4.1) eşitliğindeki üretici fonksiyonunu kullanarak, J_n^* Gould-Hopper polinomlarını içeren Szász operatörler dizisinin Appell tipli açık ifadesi

$$J_n^*(f;x) = e^{-nx-h} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{g_m^{d+1}(nx,h)}{m!} f(\frac{m}{n})$$

şeklinde bulunur.

Burada $x \in [0,\infty)$ dur.

Ayrıca günümüzde birçok araştırmacı, Gould-Hopper polinomlarına yer vermiştir [34], [35].

4.1.2. Süreklilik modülü kullanarak f fonksiyonunun hata tahmini

Gould-Hopper polinomlarının J_n^* operatörler dizisi kullanılarak f fonksiyonuna yaklaşımının hatası Tablo 1'de verilmektedir. h parametresine ve $d = 3$ özel durumuna bağlı tahminlerin her biri, tabloda listelenmiştir:
Burada f fonksiyonu

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

olarak verilmektedir.

Çizelge 4.1. Gould-Hopper polinomlarının J_n^* operatörler dizisini kullanarak f fonksiyonuna yaklaşımının hata tahmini

n	h=0.00001 için tahmin	h=1 için tahmin	h=1.8 için tahmin
10	0.6423250428	1.1805569940	1.4096205150
10^2	0.2100772120	0.2409468484	0.2812002468
10^3	0.0668966700	0.0679554484	0.0695336528
10^4	0.0211952592	0.0212291148	0.0212804728
10^5	0.0067064284	0.0067075012	0.0067091310
10^6	0.0021211432	0.0021211772	0.0021212294
10^7	0.0006708028	0.0006708042	0.0006708056

4.2. Miller-Lee Polinomlarını İçeren Szász Operatörlerinin Appell Tipli Genelleşmesi

4.2.1. Operatörün tanımı

3. Bölümde $J_n(f;x)$ operatörü

$$J_n(f;x) := \frac{1}{C(1)e^{nxT(1)} + D(1)e^{-nxV(1)}} \sum_{m=0}^{\infty} p_m(nx) f\left(\frac{m}{n}\right)$$

şeklinde tanımlanmıştır J_n operatörü için yeni tip Appell polinomları $p_m(x)$

$$C(t)e^{xT(t)} + D(t)e^{-xV(t)} = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(x)t^m$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Bu bölümün ikinci kısmında ise Miller-Lee polinomlarını içeren Szász operatörlerinin Appell tipli genellemesi verilecektir ve süreklilik modülü kullanarak belirlenen f fonksiyonu için hata tahmininde bulunulacaktır .

Miller-Lee polinomları

$$\frac{1}{(1-t)^{m+1}} \exp(xt) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k^m(x)t^k \tag{4.2}$$

şeklinde verilen üretici fonksiyonlara sahiptir ve açık gösterimi

$$G_k^m(x) = \sum_{r=0}^{k} \frac{(m+1)_r}{r!(k-r)!} x^{k-r}$$

gibidir.

Burada $(\alpha)_k$ Pochammer sembolü

$(\alpha)_0 = 1$,$(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)...(\alpha+k-1) \qquad k = 1,2,...$
olarak verilir.

(4.2) ile verilen eşitlikte $t = \frac{1}{2}$ ve x yerine $2nx$ alınırsa ;

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{m+1}} \exp(nx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G_k^m(2nx)}{2^k} 1^k$$

elde edilir. Bu durumda

$$\exp(nx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G_k^m(2nx)}{2^{m+k+1}}$$

olur. Miller-Lee polinomları $C(t) = \frac{1}{(1-t)^{m+1}}, \quad D(t) = 0, \quad T(t) = t$ seçilirse $A^{(2)}$ sınıfı Appell polinomları halini alırlar.
$m > -1$, tüm $k = 0,1,\cdots$ için $A(1) > 0, \quad B(1) \geq 0$ ve $G_k^m(x) > 0$ sınırlamaları nedeniyle (4.2) üretici fonksiyonunu kullanılarak, J_n^{**} Miller-Lee polinomlarını içeren Szász operatörler dizisinin Appell tipli açık ifadesi

$$J_n^{**}(f;x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G_k^m(2nx)}{2^{m+k+1}} f(\frac{k}{n})$$

bulunur.

4.2.2. Süreklilik modülü kullanarak f fonksiyonunun hata tahmini

Miller-Lee polinomlarının J_n^{**} içeren operatörler dizisini kullanılarak $f(x)$ fonksiyonunun yaklaşımının hatası Tablo 2'de verilmektedir. m parametresine ve $d = 3$ özel durumuna bağlı tahminlerin her biri, tabloda listelenmiştir.
Burada f fonksiyonu

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

olarak verilmektedir.

Çizelge 4.2. Miller-Lee polinomlarının J_n^{**} içeren operatörler dizisini kullanılarak f fonksiyonuna yaklaşımının hata tahmini

n	m=-0.01 için tahmin	m=1 için tahmin	m=2.1 için tahmin
10	0.7242273912	0.8396862662	0.9798716350
10^2	0.2131282788	0.2182214998	0.2258785894
10^3	0.0669953140	0.0671629400	0.0674218672
10^4	0.0211983934	0.0212037278	0.0212119932
10^5	0.0067065276	0.0067066968	0.0067069578
10^6	0.0021211464	0.0021211524	0.0021211606
10^7	0.0006708028	0.0006708032	0.0006708034

4.2.3. Süreklilik modülü kullanarak f fonksiyonunun hata tahmini elde ediliş algoritması

Burada, tablo 1 için süreklilik modülü kullanılarak $f$fonksiyonunun hata tahmininin elde edilme algoritması verilmiştir. Tablo 2 içinde benzer bir hata söz konusudur.

```
restart;

f:=x->(x^2)*(1/sqrt(x^2+1));
n:=1:
h1:=0.00001: h2:=1: h3:=1.8:
for i from 1 to 7 do
n:=10*n;
delta1:=evalf(sqrt((1/n)+(h1^2-2*h1)/(n^2))):
delta2:=evalf(sqrt((1/n)+(h2^2-2*h2)/(n^2))):
delta3:=evalf(sqrt((1/n)+(h3^2-2*h3)/(n^2))):
omega1(f,delta1):=evalf(maximize(expand(f(x+h)-f(x)),x=0..1-delta1,h=0..delta1)):
omega2(f,delta2):=evalf(maximize(expand(f(x+h)-f(x)),x=0..1-delta2,h=0..delta2)):
omega3(f,delta3):=evalf(maximize(expand(f(x+h)-f(x)),x=0..1-delta3,h=0..delta3)):
error1:=evalf(2*omega1(f,delta1));
error2:=evalf(2*omega2(f,delta2));
error3:=evalf(2*omega3(f,delta3));
```

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında yeni tip Appell polinomları yardımıyla Szász operatörlerinin yeni bir genellemesi verilmiştir. Burada $C(z)$ ve $D(z)$ farklı seçilerek farklı operatör dizileri elde edilebilir. Gould-Hopper polinomları veya Miller-Lee yardımıyla (3.2) ile verilen operatör dizisinin genellemesi olan farklı bir operatör dizisi aranabilir veya bir Lebesgue integrallenebilir fonksiyon yaklaşımı için, (3.2) ile verilen operatör dizisinin bir genellemesi oluşturulabilir.

Bu tezden elde edilen bulgular, diğer bilimsel çalışmalara ışık tutması yönüyle literatüre önemli bir katkı sağlayacaktır.

KAYNAKLAR

1. Kurtoğlu, H. (2016). *Modifiye Gamma Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri,* Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Kırıkkale.

2. Betüş, Ö. (2021). *Gamma Operatörlerinin Yeni Modifikasyonlarının İncelenmesi,* Yüksek Lisans Tezi, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Düzce.

3. Coroianu, L., Costarelli, D., Gal, S.G. and Vinti, G. (2021). Approximation by max-product sampling Kantorovich operators with generalized kernels. *Analysıs Applications*, 19, 219-244.

4. Yurtsever, G. (2019). *Doğurucu Fonksiyonların Bir Sınıfını İçeren Lineer Pozitif Operatörlerin Yaklaşım Özellikleri,* Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara

5. Akçay, M. (2016). *Pozitif Lineer Operatörler İle Korovkin-Tipli Yaklaşım,* Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

6. Gadjiev, A. (1976). Theorems of the type of P. P. Korovkin's theorems. *Matematicheskie Zametki*, 20(5), 781-786.

7. İçöz, G. and Çekim, B. (2016). Stancu-type generalization of Dunkl analogue of Szász-Kantorovich operators. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39(7), 1803-1810.

8. İçöz, G., Tat, Z. (2023). A generalization of Szász operators with the help of new kind Appell polynomials. *Mathematical Foundations of Computing*, Doi:10.3934/mfc.2023038.

9. Szász, O. (1950). Generalization of S. N. Bernstein's polynomials to the infinite interval. *Journal of Research of the National Bureau Standards*, 45, 239-245.

10. Agrawal, P. N. and Singh, S. (2023). Generalized Ismail-Durrmeyer type operators involving Sheffer polynomials. *Mathematical Foundations of Computing*, 6, 1-17.

11. Mao, T., Shi, Z. and Zhou, D. (2023). Approximating functions with multifeatures by deep convolutional neural networks. *Analysis and Applications*, 21, 93-125.

12. Nasiruzzaman, M. (2023). Convergence on sequences of Szász-Jakimovski-Leviatan type operators and related results. *Mathematical Foundations of Computing*, 6, 218-230.

13. Jakimovski, A. and Leviatan, D. (1969). Generalized Szász operators for the approximation in the infinite interval. *Mathematica*, 11, 97-103.

14. İsmail, M. E. H. (1974). On a generalization of Szász operators. *Mathematica*, 39, 259-267.

15. Aktaş, R. Çekim, B. and Taşdelen, F. (2019). A Dunkl analogue of operators including two-variable Hermite polynomials. *Bulletin Malaysian Mathematical Sciences Society*, 42, 2795-2805.

16. Aktaş, R. Çekim, B. and Taşdelen, F. (2022). A Dunkl-Gamma type operator in terms of generalization of two-variable Hermite polynomials. *Indian Journal Pure Applied Mathematics*, 53, 727-735.

17. Cai, Q. B., Çekim, B. and İçöz, G. (2021). Gamma generalization operators involving analytic functions. *Mathematics,* 9, 1547.

18. Gupta, P., Acu, A. M. and Agrawal, P. N. (2021). Jakimovski-Leviatan operators of Kantorovich type involving multiple Appell polynomials. *Georgian Math. J.,* 28, 73-82.

19. İçöz, G., Varma, S. and Sucu, S. (2016). Approximation by operators including generalized Appell polynomials. *Filomat,* 30, 429-440.

20. Mursaleen, M., Rahman, S. and Ansari, K. J. (2019). Approximation by Jakimovski-Leviatan-Stancu-Durrmeyer type operators. *Filomat*, 33, 1517-1530.

21. Srivastava, H. M., İçöz, G. and Çekim, B. (2019). Approximation properties of an extended family of the Szász-Mirakjan Beta type operators. *Axioms*, 8, 111.

22. Sucu, S., İçöz, G. and Varma S. (2012). On some extensions of Szász operators including Boas-Buck type polynomials. *Abstract and Applied Analysis*, 15, 680340.

23. Varma, S., Sucu, S. and İçöz, G. (2012). Generalization of Szász operators involving Brenke type polynomials. *Computers and Mathematics with Applications*, 64, 121-127.

24. Kazmin, Y. A. (1969). On appell polynomials. *Mat. Zametki*, 5, 556-562.

25. Varma, S. and Sucu, S. (2022). A generalization of Szász operators by using the Appell polynomials of class A^2. *Symmetry*, 14, 1410.

26. Altomare, F. and Campiti, M. (1994). Korovkin-Type Approximation Theory and Its Applications. *In Appendix A by Michael Pannenberg and Appendix B by Ferdinand Beckhoff, de Gruyter Studies in Mathematics, Walter de Gruyter and Co.: Berlin, Germany.*

27. Devore, R. A. and Lorentz, G. G. (1993). *Constructive Approximation.* Springer: Berlin/Heidelberg, Germany.

28. Gavrea, I. and Rasa, I. (1993). Remarks on some quantitative Korovkin-type results. *Revue Analyse Numérıque Théorie Approximation*, 22, 173-176.

29. Zhuk, V. (1989). Functions of the Lip1 class and S. N. Bernstein's polynomials (Russian). *Vestnik, Leningrad University, Mathematics*, 1, 25-30.

30. Gould, H. W. and Hopper, A. T. (1962). Operational formulas connected with two generalizations of Hermite polynomials. *Duke Math. J.,* 29, 51-63.

31. Douak, K. (1996). The relation of the *d*-orthogonal polynomials to the Appell polynomials. *Journal Computational and Applied Mathematics,* 70, 279-295.

32. Iseghem, J. V. (1987). Vector orthogonal relations, Vector QD-algorithm. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 19, 141-150.

33. Maroni, P. (1989). L'orthogonalitè et les recurrences de polynômes d'ordre superieur à deux. *Anneles de la Facultè des Sciences de Toulouse Math.*, 10, 105-139.

34. Kajla, A., Mohiuddine, S. A., Alotaibi, A., Goyal, M. and Singh, K.K. (2020). Approximation by-Baskakov- Durrmeyer-type hybrid operators. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A, Science*, 44, 1111-1118.

35. Singh, K. K. and Agrawal, P. N. (2023). On Szász-Durmeyer type modification using Gould-Hopper polynomials. *Mathematical Foundations of Computing*, 6, 123-135.



Gazili olmak ayrıcalıktır