PELL, PELL-LUCAS, JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL-LUCAS POLİNOMLARI ÜZERİNE

Ayşen Tuğba BİRİNCİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2008
ANKARA

Ayşen Tuğba BİRİNCİ tarafından hazırlanan PELL, PELL-LUCAS, JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL-LUCAS POLİNOMLARI ÜZERİNE adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Dursun TAŞÇI
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Derya KESKİN TÜTÜNCÜ
Matematik Anabilim Dalı, Hacettepe Üniversitesi

Prof. Dr. Dursun TAŞÇI
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Naim TUĞLU
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Tarih: 24/06/2008

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nermin ERTAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Ayşen Tuğba BİRİNCİ

PELL, PELL-LUCAS, JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL-LUCAS POLİNOMLARI ÜZERİNE
(Yüksek Lisans Tezi)

Ayşen Tuğba BİRİNCİ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Haziran 2008

ÖZET

Bu çalışmada Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas polinomlarının karekteristik özellikleri incelenerek; bu polinomların, bilinen rekürans bağıntıları yardımıyla Binet formülleri verildi. Ayrıca seriler yardımıyla üreteç fonksiyonları bulunarak, bu polinomları içeren bazı özdeşlikler elde edildi. Pell ve Pell-Lucas polinomlarının üreteç matrisleri verilerek, bu polinomları içeren bazı özdeşlikler üreteç matrisleri yardımıyla ispatlandı. Pell ve Pell-Lucas polinomlarını üreten Pascal benzeri gösterimle diziler oluşturulup, bu polinomlardaki x' in derecesinin tek veya çift olmasına göre kombinatoryal özellikleri incelendi. Son olarak determinantları Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas polinomlarını veren $n\times n$ matrisleri verildi.

Bilim Kodu : **204.1.025**
Anahtar Kelimeler : **Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas polinomları, Binet formülü, üreteç fonksiyonu**
Sayfa Adedi : **65**
Tez Yöneticisi : **Prof. Dr. Dursun TAŞÇI**

ON THE PELL, PELL-LUCAS, JACOBSTHAL AND JACOBSTHAL-LUCAS POLYNOMİALS

(M.Sc. Thesis)

Ayşen Tuğba BİRİNCİ

GAZI UNIVERSITY
INSTUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
June 2008

ABSTRACT

In this study, by describing properties characteristic of Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas polynomials, Binet formulas of these polynomials are examined with the help of recurrence relations. Additionally, by finding the generating functions through the reference of serials, some identities which contain these polynomials are obtained. By means of the generating matrices of Pell and Pell-Lucas polynomials some identities which have polynomials are demonstrated. By constituting Pascal-like display that generate Pell and Pell-Lucas polynomials, the combinatorial properties of these polynomials are scrutinized according to the odd an even of degree of x. Finally, the $n \times n$ matrices whose determinants obtain Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas polynomials are derived.

Science Code : 204.1.025
Key Words : Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas polynomials, Binet formula, generating function
Page Number: 65
Adviser : Prof. Dr. Dursun TAŞÇI

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren saygıdeğer Hocam Prof. Dr. Dursun TAŞÇI' ya, yine tecrübelerinden faydalandığım, bu süreçte her türlü yardımını esirgemeyen ve bana destek olan sevgili hocam Araş. Gör. Mustafa AŞÇI' ya,

Hayat boyu her türlü sıkıntımda yanımda olan ve bu süreçte bana anlayış gösteren sevgili aile fertlerime en içten saygı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
F_n	n. Fibonacci sayısı
L_n	n. Lucas sayısı
P_n	n. Pell sayısı
Q_n	n. Pell-Lucas sayısı
J_n	n. Jacobsthal sayısı
j_n	n. Jacobsthal-Lucas sayısı
$F_n(x)$	n. Fibonacci polinomu
$L_n(x)$	n. Lucas polinomu
$P_n(x)$	n. Pell polinomu
$Q_n(x)$	n. Pell-Lucas polinomu
$J_n(x)$	n. Jacobsthal polinomu
$j_n(x)$	n. Jacobsthal-Lucas polinomu
$P(x, y)$	Pell polinomlarının üreteç fonksiyonu
$Q(x, y)$	Pell-Lucas polinomlarının üreteç fonksiyonu
$J(x, y)$	Jacobsthal polinomlarının üreteç fonksiyonu
$j(x, y)$	Jacobsthal-Lucas polinomlarının üreteç fonksiyonu
$\det(A)$	A matrisinin determinantı

1. GİRİŞ

Bu bölümde Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarına ait bazı ön bilgiler verilerek Fibonacci ve Lucas polinomlarından bahsedilecektir. Daha sonra Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas polinomlarının bilinen indirgeme bağıntıları gözönüne alınarak bu polinomların Binet formülleri incelenecektir.

1.1. Tanım

Fibonacci sayıları, her $n \geq 0$ doğal sayısı ve $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ için

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

1.2. Tanım

Lucas sayıları, her $n \geq 0$ doğal sayısı ve $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ için

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

1.3. Tanım

Pell sayıları, her $n \geq 0$ doğal sayısı ve $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ için

$$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

1.4. Tanım

Pell-Lucas sayıları, her $n \geq 0$ doğal sayısı ve $Q_0 = 2$, $Q_1 = 2$ için

$$Q_{n+2} = 2Q_{n+1} + Q_n$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

1.5. Tanım

Jacobsthal sayıları, her $n \geq 0$ doğal sayısı ve $J_0 = 0$, $J_1 = 1$ için

$$J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

1.6. Tanım

Jacobsthal-Lucas sayıları, her $n \geq 0$ doğal sayısı ve $j_0 = 2$, $j_1 = 1$ için

$$j_{n+2} = j_{n+1} + 2j_n$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

1.7. Tanım

Fibonacci polinomları, her $n > 2$ doğal sayısı ve $F_1(x) = 1$, $F_2(x) = x$ için

$$F_{n+2}(x) = xF_{n+1}(x) + F_n(x)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

1.8. Tanım

Lucas polinomları, her $n > 2$ doğal sayısı ve $L_1(x) = x$, $L_2(x) = x^2 + 2$ için

$$L_{n+2}(x) = xL_{n+1}(x) + L_n(x)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

1.9. Tanım

$P_n(x)$; n. Pell polinomunu göstermek üzere $P_0(x)=0$ ve $P_1(x)=1$ başlangıç şartları için ve her $n \geq 2$ için Pell polinomları

$$P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) + P_n(x) \tag{1.1}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

1.10. Tanım

$Q_n(x)$; n. Pell-Lucas polinomunu göstermek üzere $Q_0(x)=2$ ve $Q_1(x)=2x$ başlangıç şartları için ve her $n \geq 2$ için Pell-Lucas polinomları

$$Q_{n+2}(x) = 2xQ_{n+1}(x) + Q_n(x) \tag{1.2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

Bu polinomlar $n \geq 0$ için tanımlanabildiği gibi $n < 0$ için de aşağıdaki gibi tanımlanabilir [7].

$$P_{-n}(x) = (-1)^{n+1} P_n(x) \tag{1.3}$$

$$Q_{-n}(x) = (-1)^n Q_n(x) \tag{1.4}$$

Bu polinomlardan bazıları sırası ile aşağıdaki gibi verilebilir :

$$P_2(x) = 2x$$
$$P_3(x) = 4x^2 + 1$$
$$P_4(x) = 8x^3 + 4x$$
$$P_5(x) = 16x^4 + 12x^2 + 1$$
$$P_6(x) = 32x^5 + 32x^3 + 6x$$

$\vdots$

ve

$$Q_2(x) = 4x^2 + 2$$
$$Q_3(x) = 8x^3 + 6x$$
$$Q_4(x) = 16x^4 + 16x^2 + 2$$
$$Q_5(x) = 32x^5 + 40x^3 + 10x$$
$$Q_6(x) = 64x^6 + 96x^4 + 36x^2 + 2$$
$\vdots$

P_n, n. Pell sayısını; Q_n, n. Pell-Lucas sayısını; F_n, n. Fibonacci sayısını ve L_n, n. Lucas sayısını göstermek üzere,

$$P_n(1) = P_n,\ Q_n(1) = Q_n,\ P_n\left(\frac{1}{2}\right) = F_n \text{ ve } Q_n\left(\frac{1}{2}\right) = L_n$$

dir.

Ayrıca $F_n(x)$, n. Fibonacci polinomunu; $L_n(x)$, n. Lucas polinomunu göstermek üzere,

$$P_n\left(\frac{1}{2}x\right) = F_n(x) \text{ ve } Q_n\left(\frac{1}{2}x\right) = L_n(x)$$

dir.

Şimdi $P_n(x)$ ve $Q_n(x)$ polinomları için Binet formülleri verilecektir.

$$P_n(x)=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} \tag{1.5}$$

ve

$$Q_n(x)=\alpha^n+\beta^n \tag{1.6}$$

dir. Burada α ve β, $\lambda^2-2x\lambda-1=0$ denkleminin kökleri olup

$$\alpha=x+\sqrt{x^2+1} \tag{1.7}$$

ve

$$\beta=x-\sqrt{x^2+1} \tag{1.8}$$

dir. Buradan

$$\alpha+\beta=2x\,,\ \alpha-\beta=2\sqrt{x^2+1}\,,\ \alpha\beta=-1 \tag{1.9}$$

olduğu açık olarak görülür.

Binet formülleri verildikten sonra şimdi Eş. 1.3 ve Eş. 1.4' de $P_n(x)$ ve $Q_n(x)$ polinomlarının $n<0$ için verilen eşitlikleri elde edilecektir.

$$P_{-n}(x)=\frac{\alpha^{-n}-\beta^{-n}}{\alpha-\beta}$$

dir. Eş. 1.9' da $\alpha\beta=-1$ olduğundan

$$P_{-n}(x)=\frac{(-\beta)^n-(-\alpha)^n}{\alpha-\beta}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}(\alpha^n - \beta^n)}{\alpha - \beta}$$

$$= (-1)^{n+1} P_n(x)$$

bulunur.

Eş. 1.4' de benzer şekilde ispatlanır.

Pell ve Pell-Lucas polinomlarına benzer olarak Jacobsthal türü olarak adlandırılan polinomlar da literatürde tanımlanmış ve halen incelenmektedir.

1.11. Tanım

$J_1(x)=1$ ve $J_2(x)=1$ başlangıç şartları ve her $n>2$ için Jacobsthal polinomları

$$J_n(x) = J_{n-1}(x) + 2xJ_{n-2}(x) \tag{1.10}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

1.12. Tanım

$j_1(x)=1$ ve $j_2(x)=4x+1$ başlangıç şartları ve her $n>2$ için Jacobsthal-Lucas polinomları

$$j_n(x) = j_{n-1}(x) + 2xj_{n-2}(x) \tag{1.11}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

Bu polinomlardan bazıları sırası ile aşağıdaki gibi verilebilir :

$J_3(x) = 1 + 2x$

$J_4(x) = 1 + 4x$

$J_5(x) = 4x^2 + 6x + 1$

$J_6(x) = 12x^2 + 8x + 1$

$\vdots$

ve

$j_3(x) = 6x + 1$

$j_4(x) = 8x^2 + 8x + 1$

$j_5(x) = 20x^2 + 10x + 1$

$j_6(x) = 16x^3 + 36x^2 + 12x + 1$

$\vdots$

Şimdi $J_n(x)$ ve $j_n(x)$ polinomları için Binet formülleri verilecektir.

$$J_n(x) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{1+8x}} \tag{1.12}$$

ve

$$j_n(x) = \alpha^n + \beta^n \tag{1.13}$$

dir. Burada α ve β, $\lambda^2 - \lambda - 2x = 0$ denkleminin kökleri olup

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{1+8x}}{2} \tag{1.14}$$

ve

$$\beta = \frac{1-\sqrt{1+8x}}{2} \tag{1.15}$$

dir. Buradan

$$\alpha + \beta = 1,\ \alpha - \beta = \sqrt{1+8x},\ \alpha\beta = -2x \tag{1.16}$$

olduğu açık olarak görülür.

2. PELL, PELL-LUCAS, JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL LUCAS POLİNOMLARININ ÜRETEÇ FONKSİYONLARI

Bu bölümde Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas polinomlarının üreteç fonksiyonları elde edilecektir. Üreteç fonksiyonları sabit katsayılı homojen lineer indirgeme bağıntılarının çözümünde önemli rol oynar. 1718 yılında Fransız matematikçi Abraham De Moivre (1667-1754) Fibonacci indirgeme bağıntısını çözmek için üreteç fonksiyonlarını bulmuştur [1, 8, 10].

2.1. Tanım

(a_n), $n \geq 0$ olmak üzere bir reel sayı dizisi olsun.

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

ifadesine $\{a_n\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu denir.

2.1. Teorem

$P_n(x)$; n. Pell polinomu olmak üzere $P_n(x)$ için üreteç fonksiyonu

$$P(x, y) = \frac{1}{1 - 2xy - y^2}$$

dir.

İspat

$P_n(x)$ için üreteç fonksiyonu

$$P(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1}(x) y^n$$

olsun.

$$P(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}P_{n+1}(x)y^{n}=P_1(x)+\sum_{n=1}^{\infty}P_{n+1}(x)y^{n}$$

eşitliğinde Eş. 1.1 gözönüne alınırsa

$$P(x,y)=1+\frac{1}{2x}\left[\frac{1}{y}\sum_{n=1}^{\infty}P_{n+2}(x)y^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}P_{n+1}(x)y^{n+1}\right]$$

$$=1+\frac{1}{2x}\left[\frac{1}{y}\sum_{n=2}^{\infty}P_{n+1}(x)y^{n}-y\sum_{n=0}^{\infty}P_{n+1}(x)y^{n}\right]$$

$$=1+\frac{1}{2x}\left[\frac{1}{y}\left(\sum_{n=0}^{\infty}P_{n+1}(x)y^{n}-1-2xy\right)-y\sum_{n=0}^{\infty}P_{n+1}(x)y^{n}\right]$$

$$=1+\frac{1}{2x}\left[\frac{1}{y}\left(P(x,y)-1-2xy\right)-yP(x,y)\right]$$

eşitliği elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa $P_n(x)$ için üreteç fonksiyonu;

$$P(x,y)=\frac{1}{1-2xy-y^2}$$ olarak bulunur.

2.2. Teorem

$Q_n(x)$; *n.* Pell-Lucas polinomu olmak üzere $Q_n(x)$ için üreteç fonksiyonu

$$Q(x,y)=\frac{2x+2y}{1-2xy-y^2}$$

dir.

İspat

$Q_n(x)$ için üreteç fonksiyonu

$$Q(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty} Q_{n+1}(x)y^n$$

olsun.

$$Q(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty} Q_{n+1}(x)y^n = Q_1(x)+\sum_{n=1}^{\infty} Q_{n+1}(x)y^n$$

eşitliğinde Eş. 1.2 gözönüne alınırsa

$$Q(x,y)=2x+\frac{1}{2x}\left[\frac{1}{y}\sum_{n=1}^{\infty} Q_{n+2}(x)y^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty} Q_{n+1}(x)y^{n+1}\right]$$

$$=2x+\frac{1}{2x}\left[\frac{1}{y}\sum_{n=2}^{\infty} Q_{n+1}(x)y^{n}-y\sum_{n=0}^{\infty} Q_{n+1}(x)y^{n}\right]$$

$$=\ 2x+\frac{1}{2x}\left[\frac{1}{y}\left(\sum_{n=0}^{\infty} Q_{n+1}y^{n}-2x-\left(4x^2+2\right)y\right)\right]-y\sum_{n=0}^{\infty} Q_{n+1}y^{n}$$

$$=\ 2x+\frac{1}{2x}\left[\frac{1}{y}\left(Q(x,y)-2x-\left(4x^2+2\right)y\right)\right]-yQ(x,y)$$

eşitliği elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa $Q_n(x)$ için üreteç fonksiyonu;

$Q(x,y)=\dfrac{2x+2y}{1-2xy-y^2}$ olarak bulunur.

2.3. Teorem

$J_n(x)$; $n.$ Jacobsthal polinomu olmak üzere $J_n(x)$ için üreteç fonksiyonu

$$J(x,y)=\frac{1}{1-y-2xy^2}$$

dir.

İspat

$J_n(x)$ için üreteç fonksiyonu

$$J(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}J_{n+1}(x)y^n$$

olsun.

$$J(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}J_{n+1}(x)y^n=J_1(x)+\sum_{n=1}^{\infty}J_{n+1}(x)y^n$$

eşitliğinde Eş. 1.10 gözönüne alınırsa

$$J(x,y)=1+\sum_{n=1}^{\infty}J_n(x)y^n+2x\sum_{n=1}^{\infty}J_{n-1}(x)y^n$$

$$=1+y\sum_{n=0}^{\infty}J_{n+1}(x)y^n+2x\left(J_0(x)y+\sum_{n=2}^{\infty}J_{n-1}(x)y^n\right)$$

$$=1+y\sum_{n=0}^{\infty}J_{n+1}(x)y^n+2xy^2\left(\sum_{n=2}^{\infty}J_{n-1}(x)y^{n-2}\right)$$

$$=1+y\sum_{n=0}^{\infty}J_{n+1}(x)y^n+2xy^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}J_{n+1}(x)y^n\right)$$

$$= 1 + yJ(x, y) + 2xy^2 J(x, y)$$

eşitliği elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa $J_n(x)$ için üreteç fonksiyonu;

$J(x, y) = \dfrac{1}{1 - y - 2xy^2}$ olarak bulunur.

2.4. Teorem

$j_n(x)$; n. Jacobsthal-Lucas polinomu olmak üzere $j_n(x)$ için üreteç fonksiyonu

$$j(x, y) = \frac{1 + 4xy}{1 - y - 2xy^2}$$

dir.

İspat

$j_n(x)$ için üreteç fonksiyonu

$$j(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} j_{n+1}(x) y^n$$

olsun.

$$j(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} j_{n+1}(x) y^n = j_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} j_{n+1}(x) y^n$$

eşitliğinde Eş. 1.11 gözönüne alınırsa

$$j(x, y) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} j_n(x) y^n + 2x \sum_{n=1}^{\infty} j_{n-1}(x) y^n$$

$$=1+y\sum_{n=0}^{\infty} j_{n+1}(x)y^n+2x\left(j_0(x)y+\sum_{n=2}^{\infty} j_{n-1}(x)y^n\right)$$

$$=1+y\sum_{n=0}^{\infty} j_{n+1}(x)y^n+2x\left(2y+\sum_{n=2}^{\infty} J_{n-1}(x)y^n\right)$$

$$=1+y\sum_{n=0}^{\infty} J_{n+1}(x)y^n+4xy+2xy^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} J_{n+1}(x)y^n\right)$$

$$=1+yj(x,y)+4xy+2xy^2 j(x,y)$$

eşitliği elde edilir. Gerekli düzenlemeleri yaparsak $j_n(x)$ için üreteç fonksiyonu;

$j(x,y)=\dfrac{1+4xy}{1-y-2xy^2}$ olarak bulunur.

3. PELL VE PELL-LUCAS POLİNOMLARININ BAZI ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde $P_n(x)$ ve $Q_n(x)$ polinomları ile ilgili bazı özellikler ve bu polinomlar arasındaki ilişkiyi veren bazı bağıntılar incelenecektir.

3.1. Teorem

$P_n(x)$ ve $Q_n(x)$ sırası ile Pell ve Pell-Lucas polinomlarını göstermek üzere aşağıdaki bağıntılar geçerlidir.

a) $P_{n+1}(x)+P_{n-1}(x)=2xP_n(x)+2P_{n-1}(x)=Q_n(x)$ (3.1)

b) $Q_{n+1}(x)+Q_{n-1}(x)=4(x^2+1)P_n(x)$ (3.2)

c) $P_n(x)\,Q_n(x)=P_{2n}(x)$ (3.3)

d) $Q_{2n}(x)=\frac{1}{2}\left\{Q_n^{\,2}(x)+4(x^2+1)P_n^{\,2}(x)\right\}$ (3.4)

e) $\left.\begin{array}{l} P_{n+1}(x)P_{n-1}(x)-P_n^{\,2}(x)=(-1)^n \\ Q_{n+1}(x)Q_{n-1}(x)-Q_n^{\,2}(x)=(-1)^{n-1}4(x^2+1) \end{array}\right\}$ *Simson Formülleri* (3.5) (3.6)

f) $P_{n+1}^{\,2}(x)-P_{n-1}^{\,2}(x)=2xP_{2n}(x)$ (3.7)

g) $4(x^2+1)P_n^{\,2}(x)-Q^{\,2}(x)=4(-1)^{n-1}$ (3.8)

İspat

a) İlk olarak Eş. 3.1 'in doğru olduğunu gösterelim.

Eş. 1.5 ve Eş. 1.6 'da tanımlanan Binet formülleri gözönüne alınarak

$$P_{n+1}(x)+P_{n-1}(x)=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{\alpha^{n}\left(\alpha+\alpha^{-1}\right)-\beta^{n}\left(\beta+\beta^{-1}\right)}{\alpha-\beta}$$

elde edilir. Burada Eş. 1.7 ve Eş. 1.8 gözönüne alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$P_{n+1}(x)+P_{n-1}(x)=\frac{\alpha^{n-1}\left(2x^2+2x\sqrt{x^2+1}+2\right)-\beta^{n-1}\left(2x^2-2x\sqrt{x^2+1}+2\right)}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{\alpha^{n-1}\left[2x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+2\right]-\beta^{n-1}\left[2x\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)+2\right]}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{2\alpha^{n-1}\left[x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+1\right]-2\beta^{n-1}\left[x\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)+1\right]}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{2\alpha^{n-1}(x\alpha+1)-2\beta^{n-1}(x\beta+1)}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{2x\left(\alpha^{n}-\beta^{n}\right)+2\left(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}\right)}{\alpha-\beta}$$

$$=2xP_n(x)+2P_{n-1}(x)$$

$$=Q_n(x)$$

bulunur.

c) Eş. 3.3' ün doğru olduğunu göstermek için yine Binet formülü kullanılacaktır.

$$P_n(x)\,Q_n(x)=\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)\left(\alpha^n+\beta^n\right)$$

$$=\frac{\alpha^{2n}-\alpha^n\beta^n+\alpha^n\beta^n-\beta^{2n}}{\alpha-\beta}$$

$$=P_{2n}(x)$$

e) Şimdi de Eş. 3.5 ’in doğru olduğunu gösterelim.

$$P_{n+1}(x)\,P_{n-1}(x)-P_n^{\,2}(x)=\left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\right)-\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\alpha^{2n}-\alpha^{n+1}\beta^{n-1}-\alpha^{n-1}\beta^{n+1}+\beta^{2n}}{(\alpha-\beta)^2}\right)-\left(\frac{\alpha^{2n}-2\alpha^n\,\beta^n+\beta^{2n}}{(\alpha-\beta)^2}\right)$$

$$=\frac{2\alpha^n\beta^n-\alpha^{n+1}\beta^{n-1}-\alpha^{n-1}\beta^{n+1}}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$=\frac{2\alpha^n\beta^n-\dfrac{\alpha^n\beta^n\alpha^2-\alpha^n\beta^n\beta^2}{\alpha\beta}}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$=\frac{2(\alpha\beta)^n-(\alpha\beta)^{n-1}\left(\alpha^2-\beta^2\right)}{(\alpha-\beta)^2}$$

elde edilir. Burada Eş. 1.9’ deki $\alpha\beta=-1$ kullanılırsa

$$P_{n+1}(x)\,P_{n-1}(x)-P_n^{\,2}(x)=\frac{(\alpha\beta)^{n-1}\left(2\alpha\beta-\alpha^2+\beta^2\right)}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$= -(-1)^{n-1}$$

$$= (-1)^{n}$$

elde edilir.

f) Eş. 3.7' nin ispatı Eş. 1.1, Eş. 3.1 ve Eş. 3.3' ü kullanılarak yapılacaktır.

$$P_{n+1}{}^{2}(x) - P_{n-1}{}^{2}(x) = \left(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)\right)\left(P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x)\right)$$

$$= \left(2xP_{n}(x) + P_{n-1}(x) - P_{n-1}(x)\right) Q_{n}(x)$$

$$= 2xP_{n}(x)Q_{n}(x)$$

$$= 2xP_{2n}(x)$$

Eş. 3.2, Eş. 3.4, Eş. 3.6 ve Eş. 3.8' in doğrulukları da benzer şekilde gösterilebilir. Ayrıca Eş, 3.3 polinomların bölünebilme özelliklerini ortaya koymak açısından önemlidir.

Pell ve Pell-Lucas polinomları için elde edilen eşitliklerin birçoğu Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas polinomları için de elde edilebilir. Şimdi elde edilen bu eşitliklerden bazılarını aşağıdaki gibi verebiliriz.

3.2. Teorem

$J_{n}(x)$; n. Jacobsthal polinomu ve $j_{n}(x)$; n. Jacobsthal-Lucas polinomu olmak üzere

$i)$ $j_{n+1}(x) + j_{n-1}(x) = j_{n}(x) + 2xj_{n-1}(x)$

$ii)$ $J_{n+1}(x)J_{n-1}(x) - J^{2}{}_{n}(x) = (-1)^{n}(2x)^{n-1}$

$iii)$ $j_{n+1}(x)j_{n-1}(x) - j^{2}{}_{n}(x) = (-1)^{n-1}(2x)^{n-1}(1+8x)$

dir.

İspat

$i)$ Eş. 1.13, Eş. 1.14 ve Eş. 1.15' i gözönüne alarak

$$
\begin{aligned}
j_{n+1}(x)+j_{n-1}(x) &= \left(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}\right)+\left(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}\right) \\
&= \alpha^{n-1}\left(\alpha^{2}+1\right)+\beta^{n-1}\left(\beta^{2}+1\right) \\
&= \alpha^{n-1}(\alpha+2x)+\beta^{n-1}(\beta+2x) \\
&= \left(\alpha^{n}+\beta^{n}\right)+2x\left(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}\right) \\
&= j_{n}(x)+2xj_{n-1}(x)
\end{aligned}
$$

yazarız.

$ii)$ Eş. 1.12, Eş. 1.14 ve Eş. 1.15'i göz önüne alarak

$$
\begin{aligned}
J_{n+1}(x)\, J_{n-1}(x)-J_{n}{}^{2}(x) &= \left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\right)-\left(\frac{\alpha^{n}-\beta^{n}}{\alpha-\beta}\right)^{2} \\
&= \left(\frac{\alpha^{2n}-\alpha^{n+1}\beta^{n-1}-\alpha^{n-1}\beta^{n+1}+\beta^{2n}}{(\alpha-\beta)^{2}}\right)-\left(\frac{\alpha^{2n}-2\alpha^{n}\ \beta^{n}+\beta^{2n}}{(\alpha-\beta)^{2}}\right)
\end{aligned}
$$

$$=\frac{2\alpha^n\beta^n-\alpha^{n+1}\beta^{n+1}-\alpha^{n-1}\beta^{n+1}}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$=\frac{2\alpha^n\beta^n-\dfrac{\alpha^n\beta^n\alpha^2-\alpha^n\beta^n\beta^2}{\alpha\beta}}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$=\frac{2(\alpha\beta)^n-(\alpha\beta)^{n-1}(\alpha^2-\beta^2)}{(\alpha-\beta)^2}$$

elde edilir. Burada Eş. 1.16' deki $\alpha\beta=-2x$ olduğu göz önüne alınırsa

$$J_{n+1}(x)\,J_{n-1}(x)-J_n^{\,2}(x)=\frac{(\alpha\beta)^{n-1}(2\alpha\beta-\alpha^2+\beta^2)}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$=-(-2x)^{n-1}$$

$$=(-1)^n(2x)^{n-1}$$

olarak bulunur.

$iii)$ İspat (ii)' ye benzer şekilde Eş 1.16 kullanılarak yapılacaktır.

$$j_{n+1}(x)j_{n-1}(x)-j^2{}_n(x)=(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})-(\alpha^n+\beta^n)^2$$

$$=(\alpha\beta)^n(\alpha\beta^{-1}+\beta\alpha^{-1}-2)$$

$$=(-1)^{n-1}(2x)^{n-1}(1+8x)$$

Ayrıca $P_n(x)$ ve $Q_n(x)$ polinomları için bilinen yollarla elde edilen, ispatları tümevarım yöntemiyle yapılabilen toplam formülleri aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\sum_{r=1}^{n} P_{2r}(x) = \frac{\left(P_{2n+1}(x) - 1\right)}{2x} \tag{3.9}$$

$$\sum_{r=1}^{n} P_{2r-1}(x) = \frac{P_{2n}(x)}{2x} \tag{3.10}$$

Eş. 3.9 ve Eş. 3.10 gözönüne alınırsa

$$\sum_{r=1}^{n} P_{r}(x) = \frac{P_{n+1}(x) + P_{n}(x) - 1}{2x} \tag{3.11}$$

eşitliği elde edilir.

$$\sum_{r=1}^{n} Q_{2r}(x) = \frac{\left(Q_{2n+1}(x) - 2x\right)}{2x} \tag{3.12}$$

$$\sum_{r=1}^{n} Q_{2r-1}(x) = \frac{\left(Q_{2n}(x) - 2\right)}{2x} \tag{3.13}$$

Eş. 3.12 ve Eş. 3.13 gözönüne alınırsa

$$\sum_{r=1}^{n} Q_{r}(x) = \frac{\left(Q_{n+1}(x) + Q_{n}(x) - 2 - 2x\right)}{2x} \tag{3.14}$$

eşitliği elde edilir.

Eş. 3.9' un ispatı

n üzerinden tümevarımla yapalım. $n=1$ olsun. Bu durumda $P_2(x) = 2x$ olduğundan eşitlik doğrudur. Kabul edelim ki $k \geq 3$ olmak üzere $n = k-1$ için eşitlik doğru olsun. Bu durumda

$$\sum_{r=1}^{k-1} P_{2r}(x) = \frac{(P_{2k-1}(x)-1)}{2x}$$

bulunur.

$$\sum_{r=1}^{k} P_{2r}(x) = \sum_{r=1}^{k-1} P_{2r}(x) + P_{2k}(x)$$

$$= \frac{(P_{2k-1}(x)-1)}{2x} + P_{2k}(x)$$

eşitliğinde Eş. 1.1 gözönüne alınırsa

$$\sum_{r=1}^{k} P_{2r}(x) = \frac{(P_{2k+1}(x)-1)}{2x}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten ispat kolayca görülür.

Diğer eşitliklerin ispatı da benzer şekilde yapılır.

Şimdi $P_n(x)$ ve $Q_n(x)$ polinomları için kombinatoryal özdeşlikleri içeren toplam formülleri incelenecektir.

3.3. Teorem

$P_n(x)$; $n.$ Pell polinomu ve $Q_n(x)$; $n.$ Pell-Lucas polinomu olmak üzere

$$i)\ P_n(x) = \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-m-1}{m} (2x)^{n-2m-1} \tag{3.15}$$

$$ii)\ Q_n(x) = \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{n}{n-m} \binom{n-m}{m} (2x)^{n-2m} \qquad , \quad n \neq 0 \tag{3.16}$$

dir. Burada $\lfloor n \rfloor$; n' yi geçmeyen en büyük tamsayıyı göstermektedir [7].

İspat

$i)$ Eş. 3.15' in ispatını n üzerinden tümevarımla yapalım. $n=1$ ve $n=2$ olması durumunda açık olarak $P_1(x)=1$ ve $P_2(x)=2x$ olduğundan Eş. 3.15 doğrudur. Kabul edelim ki $k \geq 3$ olmak üzere $n=k$ için eşitlik doğru olsun. Eş. 1.1' den

$$P_{k+1}(x)=2xP_k(x)+P_{k-1}(x)$$

olduğunu biliyoruz.

$$P_{k+1}(x)=2xP_k(x)+P_{k-1}(x)$$

$$=\sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor}\binom{k-m-1}{m}(2x)^{k-2m}+\sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{k-2}{2} \right\rfloor}\binom{k-m-2}{m}(2x)^{k-2m-2}$$

dir. $k=2t$ olsun. Bu durumda

$$P_{k+1}(x)=\sum_{m=0}^{t-1}\binom{2t-m-1}{m}(2x)^{2t-2m}+\sum_{m=0}^{t-1}\binom{2t-m-2}{m}(2x)^{2t-2m-2}$$

$$=\binom{2t-1}{0}(2x)^{2t}+\binom{2t-2}{1}(2x)^{2t-2}+\binom{2t-3}{2}(2x)^{2t-4}+\ldots+\binom{t}{t-1}(2x)^2$$

$$+\binom{2t-2}{0}(2x)^{2t-2}+\binom{2t-3}{1}(2x)^{2t-4}+\ldots+\binom{t}{t-2}(2x)^2+\binom{t-1}{t-1}$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

şeklindeki Pascal formülü kullanılarak

$$P_{k+1}(x) = 2xP_k(x) + P_{k-1}(x) = \sum_{m=0}^{t} \binom{2t-m}{m} (2x)^{2t-2m}$$

$$= \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} \binom{k-m}{m} (2x)^{k-2m}$$

sonucuna varılır. Bu son eşitlikten ispat kolayca görülür. k ' nın tek değerleri için de ispat benzer şekilde yapılır.

$ii)$ Eş. 3.16' nın ispatını n üzerinden tümevarımla yapalım. $n = 1$ ve $n = 2$ olması durumunda açık olarak $Q_1(x) = 2x$ ve $Q_2(x) = 4x^2 + 2$ olduğundan Eş. 3.16 doğrudur. Kabul edelim ki $k \geq 3$ olmak üzere $n = k$ için eşitlik doğru olsun. Eş. 1.2' den

$$Q_{k+1}(x) = 2xQ_k(x) + Q_{k-1}(x)$$

olduğunu biliyoruz.

$$Q_{k+1}(x) = 2xQ_k(x) + Q_{k-1}(x)$$

$$= \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} \frac{k}{k-m} \binom{k-m}{m} (2x)^{k-2m+1} + \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} \frac{k-1}{k-m-1} \binom{k-m-1}{m} (2x)^{k-2m-1}$$

dir. $k = 2t - 1$ olsun. Bu durumda

$$Q_{k+1}(x)=\sum_{m=0}^{t-1}\frac{2t-1}{2t-m-1}\binom{2t-m-1}{m}(2x)^{2t-2m}+\sum_{m=0}^{t-1}\frac{2t-2}{2t-m-2}\binom{2t-m-2}{m}(2x)^{2t-2m-2}$$

$$=\frac{2t-1}{2t-1}\binom{2t-1}{0}(2x)^{2t}+\frac{2t-1}{2t-2}\binom{2t-2}{1}(2x)^{2t-2}+\frac{2t-1}{2t-3}\binom{2t-3}{2}(2x)^{2t-4}$$

$$+\ldots+\frac{2t-1}{t}\binom{t}{t-1}(2x)^{2}+\frac{2t-2}{2t-2}\binom{2t-2}{0}(2x)^{2t-2}+\frac{2t-2}{2t-3}\binom{2t-3}{1}(2x)^{2t-4}$$

$$+\frac{2t-2}{2t-4}\binom{2t-4}{2}(2x)^{2t-6}+\ldots+\frac{2t-2}{t}\binom{t}{t-2}(2x)^{2}+\frac{2t-2}{t-1}\binom{t-1}{t-1}$$

eşitliği elde edilir. Buradan Pascal formülü kullanılarak

$$Q_{k+1}(x)=2xQ_k(x)+Q_{k-1}(x)=\sum_{m=0}^{t}\frac{2t}{2t-2m}\binom{2t-m}{m}(2x)^{2t-2m}$$

$$=\sum_{m=0}^{\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor}\frac{k+1}{k-m+1}\binom{k-m+1}{m}(2x)^{k-2m+1}$$

sonucuna varılır. Bu son eşitlikten ispat kolayca görülür. k ’ nın çift değerleri için de ispat benzer şekilde yapılır.

$P_n(x)$ ve $Q_n(x)$ polinomlarını içeren temel bağıntılar buna benzer kombinatoryal özdeşlikler ile bulunabilir. Binet formüllerini de kullanarak benzer sonuçlara kolayca ulaşılabilir.

4. MATRİSLER KULLANILARAK PELL VE PELL-LUCAS POLİNOMLARI İLE İLGİLİ EŞİTLİKLERİN ELDE EDİLMESİ

Bu bölümde

$$P = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

üreteç matrisi yardımıyla Pell ve Pell-Lucas polinomlarını içeren eşitliklerin elde edilişleri ve matrislerin bu polinomların bazı basit özelliklerinde nasıl kullanıldıkları incelenecektir. Eş. 4.1 ile verilen P matrisi gözönüne alınarak

$$P^n = \begin{bmatrix} P_{n+1}(x) & P_n(x) \\ P_n(x) & P_{n-1}(x) \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

olduğu tümevarım yöntemiyle elde edilebilir. Gerçekten $n=1$ için doğru olduğu açıktır. Kabul edelim ki $k \geq 2$ olmak üzere $n=k$ için de doğru olsun. $n=k+1$ için doğruluğunu gösterelim. Matrislerin çarpım özelliğinden

$$P^{k+1} = P^k \cdot P$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$P^{k+1} = P^k \cdot P = \begin{bmatrix} P_{k+1}(x) & P_k(x) \\ P_k(x) & P_{k-1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2xP_{k+1}(x) + P_k(x) & P_{k+1}(x) \\ 2xP_k(x) + P_{k-1}(x) & P_k(x) \end{bmatrix}$$

olup Eş. 1.1 gözönüne alınırsa

$$P^{k+1} = \begin{bmatrix} P_{k+2}(x) & P_{k+1}(x) \\ P_{k+1}(x) & P_k(x) \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece istenilen gösterilmiş olur. Ayrıca Eş. 4.2' deki P^n matrisi gözönüne alınarak

$$\begin{bmatrix} P_{n+1}(x) \\ P_n(x) \end{bmatrix} = P^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

ve

$$P_n(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} P^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

yazılabilir.

P matrisinin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - 2x\lambda - 1 = 0 \tag{4.5}$$

ve karakteristik kökleri

$$\alpha = x + \sqrt{x^2 + 1}$$
$$\beta = x - \sqrt{x^2 + 1}$$

dir. Polinomların bölme algoritmasından

$$\lambda^n = (\lambda^2 - 2x\lambda - 1) f(\lambda) + m\lambda + k \tag{4.6}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $f(\lambda)$, λ'ya bağlı $(n-2)$. dereceden bir fonksiyon ve m,k x' e bağlı fonksiyonlardır.

Eş. 4.6' da $\lambda=\alpha$ yazılırsa

$$\alpha^n = m\alpha + k \tag{4.7}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\lambda=\beta$ yazılırsa

$$\beta^n = m\beta + k \tag{4.8}$$

bulunur. Eş. 4.7 ve Eş. 4.8 taraf tarafa çıkarılırsa

$$m=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta},\; k=\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta} \tag{4.9}$$

bulunur.

Eş. 4.7' den dolayı

$$P^n = mP + kI \tag{4.10}$$

yazılabilir.

Eş. 4.10, Pell polinomlarının Binet formülleri yardımıyla çözülecek olursa Eş. $mP = P^n - kI$ ' de Eş. 4.1 ve Eş. 4.2' yi yerine yazalım. I , 2×2 birim matris olmak üzere

$$m\begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{n+1}(x) & P_n(x) \\ P_n(x) & P_{n-1}(x) \end{bmatrix} - \frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada Binet formülleri yerine yazılırsa

$$m\begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} - \dfrac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta} & P_n(x) \\ P_n(x) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha^{n-1}(\alpha^2-1)-\beta^{n-1}(\beta^2-1)}{\alpha-\beta} & P_n(x) \\ P_n(x) & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Eş. 1.7 ve Eş. 1.8 yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} 2xm & m \\ m & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xP_n(x) & P_n(x) \\ P_n(x) & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir ve $m = P_n(x)$ olarak bulunur. Böylece Eş. 4.9' dan $P_n(x)$ için Eş. 1.5' de verilen Binet formülü tekrar elde edilmiş olur.

Benzer şekilde Eş. 3.1 kullanılarak

$$\begin{bmatrix} Q_{n+1}(x) \\ Q_n(x) \end{bmatrix} = P^n \begin{bmatrix} 2x \\ 2 \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

ve

$$Q_n(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} P^{n-1} \begin{bmatrix} 2x \\ 2 \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

eşitlikleri elde edilir.

Elde edilen bu matris denklemleri yardımıyla $P_n(x)$ ve $Q_n(x)$ polinomlarını içeren bazı eşitlikleri aşağıdaki teoremle ifade edelim.

4.1. Teorem

$P_n(x)$ ve $Q_n(x)$ sırası ile Pell ve Pell-Lucas polinomlarını göstermek üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

a) $P_{m+n}(x) = P_{m-1}(x)P_n(x) + P_m(x)P_{n+1}(x)$ (4.13)

b) $Q_{m+n}(x) = P_{m-1}(x)Q_n(x) + P_m(x)Q_{n+1}(x)$ (4.14)

İspat

a) $P_{m-1}(x)P_n(x) + P_m(x)P_{n+1}(x) = \begin{bmatrix} P_m(x) & P_{m-1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{n+1}(x) \\ P_n(x) \end{bmatrix}$

olup Eş. 4.3 gözönüne alınırsa

$$P_{m-1}(x)P_n(x) + P_m(x)P_{n+1}(x) = \begin{bmatrix} P_m(x) & P_{m-1}(x) \end{bmatrix} P^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada Eş. 4.3 ve $P^m P^n = P^{m+n}$ eşitliği kullanılarak

$$P_{m-1}(x)P_n(x) + P_m(x)P_{n+1}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} P^{m-1} P^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} P^{m+n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Burada Eş. 4.4’ den

$$P_{m-1}(x)P_n(x)+P_m(x)P_{n+1}(x)=P_{m+n}(x)$$

olduğu görülür.

b) Benzer şekilde Eş. 4.14' ün doğru olduğu gösterilebilir.

Ayrıca Eş. 4.2, Eş. 4.11, Eş. 4.13 ve Eş. 4.14 yardımıyla

$$\begin{bmatrix} P_{n+r}(x) \\ P_n(x) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_r(x) & P_{r-1}(x) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}P^n\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

ve

$$\begin{bmatrix} Q_{n+r}(x) \\ Q_n(x) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_r(x) & P_{r-1}(x) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}P^n\begin{bmatrix} 2x \\ 2 \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

olarak bulunur.

Eş. 4.13' de m ve n' nin yerleri değiştirilirse

$$P_{m+n}(x)=P_{n-1}(x)P_m(x)+P_n(x)P_{m+1}(x)$$

bulunur ve bu eşitlik ile Eş. 4.13 taraf tarafa toplanıp Eş. 3.1 gözönüne alınırsa

$$P_{m+n}(x)=\frac{1}{2}\{P_m(x)Q_n(x)+P_n(x)Q_m(x)\} \tag{4.17}$$

elde edilir.

Benzer şekilde Eş. 4.14' de m yerine $m+1$ ve n yerine $n-1$ yazılıp Eş. 3.1 ve Eş. 3.2 gözönüne alınırsa

$$Q_{m+n}(x)=\frac{1}{2}\left\{Q_n(x)Q_m(x)+4\left(x^2+1\right)P_n(x)P_m(x)\right\} \tag{4.18}$$

eşitliği elde edilir.

Ayrıca Eş. 4.17 ve Eş. 4.18' de $m=n$ alınırsa Eş. 3.3 ve Eş. 3.4' ü elde edebiliriz.

4.2. Teorem

$P_n(x)$ ve $Q_n(x)$ sırası ile Pell ve Pell-Lucas polinomlarını göstermek üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

a) $P_{n+1}{}^2(x)+P_n{}^2(x)=P_{2n+1}(x)$ (4.19)

b) $Q_{n+1}{}^2(x)+Q_n{}^2(x)=4\left(x^2+1\right)P_{2n+1}(x)$ (4.20)

İspat

a) $P_{n+1}{}^2(x)+P_n{}^2(x)=\begin{bmatrix}P_{n+1}(x) & P_n(x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{n+1}(x)\\ P_n(x)\end{bmatrix}$

olup Eş. 4.2 ve Eş. 4.3 kullanılarak

$$P_{n+1}{}^2(x)+P_n{}^2(x)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}P^nP^n\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

yazılır. Burada Eş. 4.4 ve $P^mP^n=P^{m+n}$ eşitliği kullanılarak

$$P_{n+1}{}^2(x)+P_n{}^2(x)=P_{2n+1}(x)$$

bulunur. Hemen hatırlatalım ki bu eşitlik, Eş. 4.13' de $m=n+1$ alınarak da elde edilir.

b) $Q_{n+1}^{\;2}(x)+Q_n^{\;2}(x)=\begin{bmatrix}Q_{n+1}(x) & Q_n(x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_{n+1}(x)\\ Q_n(x)\end{bmatrix}$

olup Eş. 4.11 kullanılarak

$$Q_{n+1}^{\;2}(x)+Q_n^{\;2}(x)=\begin{bmatrix}2x & 2\end{bmatrix}P^nP^n\begin{bmatrix}2x\\ 2\end{bmatrix}$$

yazılır. Burada Eş. 4.4 ve $P^mP^n=P^{m+n}$ eşitliği kullanılarak

$$Q_{n+1}^{\;2}(x)+Q_n^{\;2}(x)=4\left(x^2+1\right)P_{2n+1}(x)$$

elde edilir.

Bu bölümde elde edilen bütün eşitlikler Eş. 1.5 ve Eş. 1.6' da verilen Binet formülleri yardımıyla da elde edilebilir.

Son olarak matris teknikleri kullanılarak da elde edilebilen aşağıdaki eşitlikler verilecektir. Bu eşitliklerin doğrulukları gösterilirken bazı durumlarda Binet formüllerini bazı durumlarda ise matris yöntemini kullanmak daha kullanışlı olacaktır.

4.3. Teorem

$P_n(x)$ ve $Q_n(x)$ sırası ile Pell ve Pell-Lucas polinomlarını göstermek üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

a) $$P_{n+r}(x)+P_{n-r}(x)=\begin{cases}P_n(x)Q_r(x), & r\ \text{çift ise}\\ Q_n(x)P_r(x), & r\ \text{tek ise}\end{cases} \tag{4.21}$$

b) $Q_{n+r}(x)+Q_{n-r}(x)=\begin{cases} Q_n(x)Q_r(x), & r \text{ çift ise} \\ 4(x^2+1)P_n(x)P_r(x), & r \text{ tek ise} \end{cases}$ (4.22)

c) $P_{n+r}(x)-P_{n-r}(x)=\begin{cases} Q_n(x)P_r(x), & r \text{ çift ise} \\ P_n(x)Q_r(x), & r \text{ tek ise} \end{cases}$ (4.23)

d) $Q_{n+r}(x)-Q_{n-r}(x)=\begin{cases} 4(x^2+1)P_n(x)P_r(x), & r \text{ çift ise} \\ Q_n(x)Q_r(x), & r \text{ tek ise} \end{cases}$ (4.24)

İspat

a) $P_n(x)$ polinomu için Eş. 1.5' de verilen Binet formülü kullanılarak

$$P_{n+r}(x)+P_{n-r}(x)=\frac{\alpha^{n+r}-\beta^{n+r}}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha^{n-r}-\beta^{n-r}}{\alpha-\beta}$$

yazılabilir. Eş. 1.9' da $\alpha\beta=-1$ olduğundan $(\alpha\beta)^r=(-1)^r$ bulunur. Eğer r çift sayı ise o zaman

$$\alpha^{-r}=\beta^r \text{ ve } \beta^{-r}=\alpha^r$$

dir. Böylece

$$P_{n+r}(x)+P_{n-r}(x)=\frac{\alpha^n\left(\alpha^r+\alpha^{-r}\right)-\beta^n\left(\beta^r+\beta^{-r}\right)}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{\alpha^n\left(\alpha^r+\beta^r\right)-\beta^n\left(\alpha^r+\beta^r\right)}{\alpha-\beta}$$

$$= \left(\alpha^r + \beta^r\right)\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)$$

yazılır. Burada Eş. 1.5 ve Eş. 1.6' da verilen Binet formüllerinden

$$P_{n+r}(x) + P_{n-r}(x) = Q_r(x)P_n(x)$$

olarak bulunur. Eğer r tek sayı ise, bu durumda da

$$\alpha^{-r} = -\beta^r \text{ ve } \beta^{-r} = -\alpha^r$$

dir. Böylece

$$P_{n+r}(x) + P_{n-r}(x) = \frac{\alpha^n\left(\alpha^r + \alpha^{-r}\right) - \beta^n\left(\beta^r + \beta^{-r}\right)}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{\alpha^n\left(\alpha^r - \beta^r\right) - \beta^n\left(\beta^r - \alpha^r\right)}{\alpha - \beta}$$

$$= \left(\alpha^n + \beta^n\right)\left(\frac{\alpha^r - \beta^r}{\alpha - \beta}\right)$$

yazılır. Son olarak Eş. 1.5 ve Eş. 1.6' nın gözönüne alınması ile

$$P_{n+r}(x) + P_{n-r}(x) = Q_n(x)P_r(x)$$

eşitliğinin sağlandığı kolayca görülür.

b) $Q_n(x)$ polinomu için Eş. 1.6' da verilen Binet formülü kullanılarak

$$Q_{n+r}(x)+Q_{n-r}(x)=\alpha^{n+r}+\beta^{n+r}+\alpha^{n-r}+\beta^{n-r}$$

$$=\alpha^{n}\left(\alpha^{r}+\alpha^{-r}\right)+\beta^{n}\left(\beta^{r}+\beta^{-r}\right)$$

yazılabilir. Eğer r çift sayı ise o zaman

$\alpha^{-r}=\beta^{r}$ ve $\beta^{-r}=\alpha^{r}$

dir. Böylece

$$Q_{n+r}(x)+Q_{n-r}(x)=\alpha^{n}\left(\alpha^{r}+\beta^{r}\right)+\beta^{n}\left(\beta^{r}+\alpha^{r}\right)$$

$$=\left(\alpha^{r}+\beta^{r}\right)\left(\alpha^{n}+\beta^{n}\right)$$

yazılır. Burada Eş. 1.6' da verilen Binet formülünden

$$Q_{n+r}(x)+Q_{n-r}(x)=Q_{r}(x)Q_{n}(x)$$

olarak bulunur. Şimdi de r tek sayı olsun. Bu durumda

$\alpha^{-r}=-\beta^{r}$ ve $\beta^{-r}=-\alpha^{r}$

dir. Böylece

$$Q_{n+r}(x)+Q_{n-r}(x)=\alpha^{n}\left(\alpha^{r}-\beta^{r}\right)+\beta^{n}\left(\beta^{r}-\alpha^{r}\right)$$

$$=\left(\alpha^{r}-\beta^{r}\right)\left(\alpha^{n}-\beta^{n}\right)$$

$$=\frac{\left(\alpha^{r}-\beta^{r}\right)\left(\alpha^{n}-\beta^{n}\right)(\alpha-\beta)^{2}}{(\alpha-\beta)^{2}}$$

yazılır. Eş. 1.7 ve Eş. 1.8’ den

$$(\alpha-\beta)^{2}=4\left(x^{2}+1\right)$$

olduğu görülür. Dolayısı ile buradan

$$Q_{n+r}(x)+Q_{n-r}(x)=4\left(x^{2}+1\right)P_{r}(x)P_{n}(x)$$

olarak bulunur.

Eş. 4.21, Eş. 4.23 ve Eş. 3.3’ den

$$P^{2}{}_{n+r}(x)-P^{2}{}_{n-r}(x)=P_{2n}(x)P_{2r}(x) \tag{4.25}$$

ve

Eş. 4.22, Eş. 4.24 ve Eş. 3.3’ den

$$Q^{2}{}_{n+r}(x)-Q^{2}{}_{n-r}(x)=4\left(x^{2}+1\right)P_{2n}(x)P_{2r}(x) \tag{4.26}$$

eşitlikleri elde edilir.

Eş. 4.25’ in ispatı

$$P^{2}{}_{n+r}(x)-P^{2}{}_{n-r}(x)=\left(P_{n+r}(x)-P_{n-r}(x)\right)\left(P_{n+r}(x)+P_{n-r}(x)\right)$$

şeklinde yazılabilir. Eğer r çift ise bu durumda Eş. 4.21 ve Eş. 4.23’ den

$$P^2{}_{n+r}(x) - P^2{}_{n-r}(x) = (P_n(x)Q_r(x))(Q_n(x)P_r(x))$$

yazılır ve Eş. 3.3' den

$$P^2{}_{n+r}(x) - P^2{}_{n-r}(x) = P_{2n}(x)P_{2r}(x)$$

elde edilir. r ' nin tek olması durumunda da benzer şekilde istenilen elde edilir.

$$P_{mn+r}(x) = \begin{cases} P_n(x)Q_{(m-1)n+r}(x) + (-1)^n P_{(m-2)n+r}(x) \\ P_{(m-1)n+r}(x)Q_n(x) + (-1)^{n-1} P_{(m-2)n+r}(x) \end{cases} \tag{4.27}$$

$$Q_{mn+r}(x) = Q_{(m-1)n+r}(x)Q_n(x) + (-1)^{n-1} Q_{(m-2)n+r} \tag{4.28}$$

$$\left.\begin{array}{r} P^2{}_n(x) - P_{n+r}(x)P_{n-r}(x) = (-1)^{n-r} P^2{}_r(x) \\ Q^2{}_n(x) - Q_{n+r}(x)Q_{n-r}(x) = (-1)^{n-r+1} 4(x^2+1)P^2{}_r(x) \end{array}\right\} \text{ Simson formülleri} \tag{4.29}$$

$$P_{n+h}(x)P_{n+k}(x) - P_n(x)P_{n+h+k}(x) = (-1)^n P_h(x)P_k(x) \tag{4.30}$$

$$Q_{n+h}(x)Q_{n+k}(x) - Q_n(x)Q_{n+h+k}(x) = (-1)^{n-1} 4(x^2+1)P_h(x)P_k(x) \tag{4.31}$$

$$P_{n+h}(x)Q_{n+k}(x) - P_n(x)Q_{n+h+k}(x) = (-1)^n P_h(x)Q_k(x) \tag{4.32}$$

Eş. 4.29' deki birinci eşitliğin ispatı

$$P^2{}_n(x) - P_{n+r}(x)P_{n-r}(x) = \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)^2 - \left(\frac{\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n-r} - \beta^{n-r}}{\alpha - \beta}\right)$$

$$= \frac{-2\alpha^n\beta^n + \alpha^{n+r}\beta^{n-r} + \beta^{n+r}\alpha^{n-r}}{(\alpha - \beta)^2}$$

$$= (\alpha\beta)^n (\alpha\beta)^{-r} \left(\frac{\alpha^{2r} - 2\alpha^r \beta^r + \beta^{2r}}{(\alpha - \beta)^2} \right)$$

elde edilir. Eş. 1.9' deki $\alpha\beta = -1$ ve Eş. 1.5' den dolayı

$$P^2{}_n(x) - P_{n+r}(x)P_{n-r}(x) = (-1)^{n-r} \left(\frac{\alpha^r - \beta^r}{\alpha - \beta} \right)^2$$

$$= (-1)^{n-r} P^2{}_r(x)$$

olarak bulunur.

Eş. 4.30' un ispatı

$P_n(x)$ ve $Q_n(x)$ polinomları için Eş. 1.5 ve Eş. 1.6 kullanılarak

$$P_{n+h}(x)P_{n+k}(x) - P_n(x)P_{n+h+k}(x)$$

$$= \left(\frac{\alpha^{n+h} - \beta^{n+h}}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{\alpha^{n+k} - \beta^{n+k}}{\alpha - \beta} \right) - \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{\alpha^{n+h+k} - \beta^{n+h+k}}{\alpha - \beta} \right)$$

$$= \frac{\alpha^{2n+h+k} - \alpha^{n+h}\beta^{n+k} - \beta^{n+h}\alpha^{n+k} + \beta^{2n+h+k} - \alpha^{2n+h+k} + \alpha^n \beta^{n+h+k} + \beta^n \alpha^{n+h+k} - \beta^{2n+h+k}}{(\alpha - \beta)^2}$$

$$= \frac{(\alpha\beta)^n \left(\alpha^{h+k} - \alpha^h \beta^k - \beta^h \alpha^k + \beta^{h+k} \right)}{(\alpha - \beta)^2}$$

elde edilir. Eş. 1.9' deki $\alpha\beta = -1$ ve Eş. 1.5' den dolayı

$$P_{n+h}(x)P_{n+k}(x)-P_n(x)P_{n+h+k}(x)=(-1)^n\left(\frac{\alpha^h-\beta^h}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}\right)$$
$$=(-1)^n P_h(x)P_k(x)$$

elde edilir.

Diğer eşitliklerin ispatları da benzer şekilde yapılabilir.

5. PELL VE PELL-LUCAS POLİNOMLARINI ÜRETEN PASCAL DİZİLERİ

Aşağıdaki Çizelge 5.1' i gözönüne alalım.

Çizelge 5.1. Köşegenler üzerindeki Pell polinomları

m \ n	1	2	3	4	5	6	…
1	1						
2	$2x$	1					
3	$4x^2$	$4x$	1				
4	$8x^3$	$12x^2$	$6x$	1			
5	$16x^4$	$32x^3$	$24x^2$	$8x$	1		
6	$32x^5$	$80x^4$	$80x^3$	$40x^2$	$10x$	1	
⋮							

(m,n), m. satır ve n. sütundaki x' in kuvvetlerinin katsayılarını göstersin.

Şimdi Çizelge 5.1' deki yükselen köşegenlerin Pell polinomlarını ürettiği gösterilecektir.

$(2x+1)^{m-1}$' in açılımından elde edilen terimler m. satırın girdileri olarak yerleştirilecektir.

$$(2x+1)^{m-1}=\binom{m-1}{0}(2x)^{m-1}+\binom{m-1}{1}(2x)^{m-2}+\ldots+1$$

binom açılımını gözönüne alıp

$$\sum_{n=1}^{m}(m,n)\;x^{m-n}=(2x+1)^{m-1} \qquad m\geq n \tag{5.1}$$

ifadesini elde ederiz. Burada

$$(m,n)=\binom{m-1}{m-n}\;2^{m-n} \qquad m\geq n \tag{5.2}$$

dir.

Çizelge 5.1' de x'e bağlı ve m. dereceden köşegenler üzerindeki polinom $R_m(x)$ olmak üzere Eş. 5.1 ve Eş. 5.2 gözönüne alınırsa

$$R_m(x)=\sum_{n=1}^{\left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor}(m+1-n,n)\;x^{m+1-2n} \qquad m\geq 1$$

şeklinde tanımlanır ve burada Eş. 5.2 gözönüne alınırsa

$$R_m(x)=\sum_{n=1}^{\left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor}\binom{m-n}{m+1-2n}\;(2x)^{m+1-2n}$$

olarak bulunur. Gerçekten binom açılımının $\binom{x}{y}=\binom{x}{x-y}$ özelliğinden

$$R_m(x) = \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor} \binom{m-n}{n-1} (2x)^{m+1-2n}$$

olduğu kolayca görülebilir. Son ifadede n yerine $n+1$ yazılırsa

$$R_m(x) = \sum_{n=0}^{\left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor} \binom{m-n-1}{n} (2x)^{m-1-2n}$$

elde edilir. Daha sonra Eş. 3.15 gözönüne alınırsa

$$R_m(x) = P_m(x)$$

elde edilir. Şimdi aşağıdaki Çizelge 5.2' yi gözönüne alalım.

Çizelge 5.2. Köşegenler üzerindeki Pell-Lucas polinomları

m \ n	1	2	3	4	5	6	**7**	...
1	$2x$	2						
2	$4x^2$	$6x$	2					
3	$8x^3$	$16x^2$	$10x$	2				
4	$16x^4$	$40x^3$	$36x^2$	$14x$	2			
5	$32x^5$	$96x^4$	$112x^3$	$64x^2$	$18x$	2		
6	$64x^6$	$224x^5$	$320x^4$	$240x^3$	$100x^2$	$22x$	2	
⋮								

$[m,n]$, m . satır ve n . sütundaki x ' in kuvvetlerinin katsayılarını göstersin.

Şimdi Çizelge 5.2' deki yükselen köşegenlerin Pell-Lucas polinomlarını ürettiği gösterilecektir.

$(2x+1)^m + (2x+1)^{m-1} = (2x+1)^{m-1}(2x+2)$ açılımından elde edilen terimler m . satırın girdileri olarak yerleştirilecektir.

Çizelge 5.1' deki yazılıma benzer olarak

$$\sum_{n=1}^{m+1} [m,n]\, x^{m+1-n} = (2x+1)^{m-1}(2x+2) \tag{5.3}$$

şeklinde yazılırsa dolayısıyla

$$\begin{aligned} [m,n] &= 2(m,n) + 2(m,n-1) = 2(m,n) + (m,n-1) + (m,n-1) \\ &= (m+1,n) + (m,n-1) \end{aligned} \tag{5.4}$$

dir.

Çizelge 5.2' de x ' e bağlı ve m . dereceden köşegenler üzerindeki polinom $S_m(x)$ olmak üzere Eş. 5.3 ve Eş. 5.4' den

$$S_m(x) = \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{m+2}{2} \right\rfloor} [m+1-n,n]\, x^{m+2-2n}$$

şeklinde tanımlanır ve burada Eş. 5.4 gözönüne alınırsa

$$S_m(x)=\sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{m+2}{2} \right\rfloor}\{(m+2-n,n)+(m+1-n,n-1)\}x^{m+2-2n}$$

olarak bulunur. Burada Eş. 5.2 gözönüne alınırsa

$$S_m(x)=\sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{m+2}{2} \right\rfloor}\left\{\binom{m+1-n}{n-1}+\binom{m-n}{n-2}\right\}(2x)^{m+2-2n}$$

elde edilir. Son ifadede n yerine $n+1$ yazılırsa

$$S_m(x)=\sum_{n=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor}\left\{\binom{m-n}{n}+\binom{m-n-1}{n-1}\right\}(2x)^{m-2n}$$

elde edilir. Dolayısı ile

$$S_m(x)=\sum_{n=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor}\frac{m}{m-n}\binom{m-n}{n}(2x)^{m-2n}$$

elde edilir. Böylece Eş. 3.16 gözönüne alınarak

$$S_m(x)=Q_m(x)$$

elde edilir.

Böylece Pell ve Pell-Lucas polinomlarının sırasıyla Çizelge 5.1 ve Çizelge 5.2' deki köşegenler üzerindeki polinomlar tarafından üretildiği gösterilmiş oldu. Şimdi $P_n(x)$ polinomlarındaki x' in kuvvetlerinin katsayıları, Pascal benzeri bir gösterimle aşağıdaki çizelgede yerleştirilecektir.

Çizelge 5.3. Pell polinomlarının katsayıları

Kuvvet / $P_n(x)$ sırası	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
1	1										
2	0	2									
3	1	0	4								
4	0	4	0	8							
5	1	0	12	0	16						
6	0	6	0	32	0	32					
7	1	0	24	0	80	0	64				
8	0	8	0	80	0	192	0	128			
9	1	0	40	0	240	0	448	0	256		
10	0	10	0	160	0	672	0	1024	0	512	
⋮											

Çizelge 5.3' deki r. satır ve c. sütun girdileri $\{r, c\}$ şeklinde gösterilecektir. Yukarıdaki Çizelge 5.3 ve Eş. 3.15 gözönüne alınırsa

$$\{2r, 2c\} = 0 \tag{5.5}$$

$$\{2r, 2c-1\} = \begin{cases} \binom{r+c-1}{r-c} 2^{2c-1}, & c = 1, 2, \ldots, r \\ 0, & c > r \text{ ise} \end{cases} \tag{5.6}$$

$$\{2r-1, 2c-1\} = 0 \tag{5.7}$$

$$\{2r-1,2c\}=\begin{cases}\binom{r+c-1}{r-c-1}2^{2c}, & c=0,1,2,\ldots,r-1\\ 0, & c\geq r \; ise\end{cases} \tag{5.8}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada Eş. 5.5 ve Eş. 5.6' nın doğruluğu gösterilecektir. Diğer eşitlikler de benzer şekilde yapılabilir.

Eş. 5.5' in doğru olduğunu gösterelim.

Eş. 3.15' te $n=2r$ yazarsak

$$P_{2r}(x)=\sum_{m=0}^{\left\lfloor\frac{2r-1}{2}\right\rfloor}\binom{2r-m-1}{m}(2x)^{2r-2m-1}$$

elde edilir. $r-m$ yerine c yazarsak x' in kuvvetleri tek sayı olarak gelecektir. Dolayısıyla x' in çift sayı kuvvetlerinin katsayıları sıfır olacaktır. Sonuç olarak

$$\{2r,2c\}=0$$

dir.

Eş. 5.6' nın doğru olduğunu gösterelim.

Benzer şekilde Eş. 3.15' te $n=2r$ ve $r-m$ yerine c yazarsak

$$P_{2r}(x)=\sum_{m=0}^{\left\lfloor\frac{2r-1}{2}\right\rfloor}\binom{r+c-1}{r-c}(2x)^{2c-1}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\{2r,2c-1\}=\begin{cases}\dbinom{r+c+1}{r-c}2^{2c-1}, & c=1,2,\ldots,r\\ 0, & c>r \; ise\end{cases}$$

dir.

5.1. Teorem

Aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

a) $$\sum_{i=0}^{r-1}\{2r-1-i,i\}=3^{r-1} \tag{5.9}$$

b) $$\sum_{i=1}^{2r}\{i,2c-1\}=\frac{1}{2}\{2r+1,2c\} \tag{5.10}$$

c) $$\sum_{i=1}^{2r}\{i,2c\}=\frac{1}{2}\{2r,2c+1\} \tag{5.11}$$

d) $$\sum_{i=1}^{2r-1}\{i,2c-1\}=\frac{1}{2}\{2r-1,2c\} \tag{5.12}$$

e) $$\sum_{i=1}^{2r-1}\{i,2c\}=\frac{1}{2}\{2r,2c+1\} \tag{5.13}$$

İspat

a) $$\sum_{i=0}^{r-1}\{2r-1-i,i\}=\{2r-1,0\}+\{2r-2,1\}+\ldots+\{r,r-1\}$$

Eş. 5.6 ve Eş. 5.8 gözönüne alınarak

$$\sum_{i=0}^{r-1}\{2r-1-i,i\}=\binom{r-1}{r-1}2^0+\binom{r-1}{r-2}2^1+\ldots+\binom{r-1}{0}2^{r-1}$$

yazarız. Binom açılımından

$$\sum_{i=0}^{r-1}\{2r-1-i,i\}=(1+2)^{r-1}$$

$$=3^{r-1}$$

elde edilir.

b) $\sum_{i=1}^{2r}\{i,2c-1\}=\{2,2c-1\}+\{4,2c-1\}+\ldots+\{2r,2c-1\}$

$$=\{2c,2c-1\}+\{2c+2,2c-1\}+\ldots+\{2r,2c-1\}$$

eşitliğini Eş. 5.6 gözönüne alınarak

$$\sum_{i=1}^{2r}\{i,2c-1\}=2^{2c-1}\left(\binom{2c-1}{0}+\binom{2c}{1}+\cdots+\binom{r+c-1}{r-c}\right)$$

$$=2^{2c-1}\left(\binom{2c-1}{2c-1}+\binom{2c}{2c-1}+\cdots+\binom{r+c-1}{2c-1}\right)$$

$$=2^{2c-1}\binom{r+c}{2c}$$

yazarız. Burada Eş. 5.8’ den

$$\sum_{i=1}^{2r}\{i,2c-1\}=\frac{1}{2}\{2r+1,2c\}$$

eşitliği elde edilir.

Benzer şekilde $Q_n(x)$ için de bir çizelge oluşturalım.

Çizelge 5.4. Pell-Lucas polinomlarının katsayıları

Kuvvet / $Q_n(x)$ sırası	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
1	0	2								
2	2	0	4							
3	0	6	0	8						
4	2	0	16	0	16					
5	0	10	0	40	0	32				
6	2	0	36	0	96	0	64			
7	0	14	0	112	0	225	0	128		
8	2	0	64	0	320	0	512	0	256	
⋮										

Çizelge 5.4' deki r. satır ve c. sütun girdileri $\overline{r,c}$ şeklinde gösterilecektir. Yukarıdaki Çizelge 5.4 ve Eş. 3.16 gözönüne alınırsa

$$\overline{2r,2c-1}=0 \tag{5.14}$$

$$\overline{2r,2c}=\begin{cases}\dfrac{2r}{r+c}\dbinom{r+c}{r-c}2^{2c}, & c=0,1,2,\ldots,r-1\\ 0, & c>r \ ise\end{cases} \tag{5.15}$$

$$\overline{2r-1,2c}=0 \tag{5.16}$$

$$\overline{2r-1,2c-1}=\begin{cases}\dfrac{2r-1}{r+c-1}\dbinom{r+c-1}{r-c}2^{2c-1}, & c=0,1,2,\ldots,r-1\\ 0, & c\geq r\ ise\end{cases} \tag{5.17}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada Eş. 5.14 ve Eş. 5.15' in doğruluğu gösterilecektir. Diğer eşitlikler de benzer şekilde yapılabilir.

Eş. 5.14' ün doğru olduğunu gösterelim.

Eş. 3.16' da $n=2r$ yazarsak

$$Q_{2r}(x)=\sum_{m=0}^{\left\lfloor\frac{2r}{2}\right\rfloor}\frac{2r}{2r-m}\binom{2r-m}{m}(2x)^{2r-2m}$$

elde edilir. $r-m$ yerine c yazarsak x' in kuvvetleri çift sayı olarak gelecektir. Dolayısıyla x' in tek sayı kuvvetlerinin katsayıları sıfır olacaktır. Sonuç olarak

$$\overline{2r,2c-1}=0$$

dir.

Eş. 5.15' in doğru olduğunu gösterelim.

Benzer şekilde Eş. 3.16' da $n=2r$ ve $r-m$ yerine c yazarsak

$$Q_{2r}(x)=\sum_{m=0}^{\left\lfloor\frac{2r}{2}\right\rfloor}\frac{2r}{r+c}\binom{r+c}{r-c}(2x)^{2c}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\overline{2r,2c}=\begin{cases}\dfrac{2r}{r+c}\dbinom{r+c}{r-c}2^{2c}, & c=0,1,2,\ldots,r-1\\ 0, & c>r\ ise\end{cases}$$

dir.

Eş. 3.1' den

$$\begin{aligned}\overline{r,c}&=\{r+1,c\}+\{r-1,c\}\\ &=2\{r,c-1\}+2\{r-1,c\}\end{aligned} \tag{5.18}$$

elde edilir. Ayrıca Eş. 3.2' den

$$\overline{r+1,\ c}+\overline{r-1,\ c}=4\{r,c\}+4\{r,c-2\}$$

eşitliği elde edilir.

Bu bölümü sonlandırırken Çizelge 5.1 ve Çizelge 5.3' de sırasıyla bahsedilen (m,n) ve $\{r,c\}$ arasındaki ilişkiler elde edilecektir.

Eş. 5.6' daki $2c-1$, $P_{2r}(x)$ 'deki x' in kuvvetidir. Eş. 3.15' deki x^{2c-1} teriminin katsayısı ile Eş. 5.2' deki bu terimin katsayısını karşılaştıralım. Eş. 5.2' den

$$(r+c,r-c+1)=\binom{r+c-1}{2c-1}2^{2c-1}$$

şeklinde yazılabilir.

$\dbinom{m-1}{m-n}=\dbinom{m-1}{n-1}$ binom eşitliği gözönüne alınırsa

$$\left(r+c,r-c+1\right)=\binom{r+c-1}{r-c}2^{2c-1}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\left\{2r,2c-1\right\}=\left(r+c,r-c+1\right)$$

eşitliği elde edilir ve böylece

$$\left(r,c\right)=\left\{r+c-1,r-c\right\} \tag{5.19}$$

bulunmuş olur.

Yukarıda Eş. 3.15, Eş. 5.2 ve Eş. 5.6 için yapılan uygulamalar benzer şekilde Eş. 5.8 için yapılırsa

$$\left\{2r-1,2c\right\}=\left(r+c,r-c\right)$$

eşitliği elde edilir. Buradan Eş. 5.19 eşitliğine tekrar varılır.

Son olarak $Q_{2r}(x)$ 'deki x^{2c}' nin katsayısı olan $\overline{2r,2c}$' yi gözönüne alalım. Eş. 5.18' den

$$\overline{2r,2c}=\left\{2r+1,2c\right\}+\left\{2r-1,2c\right\}=2\left\{2r,2c-1\right\}+2\left\{2r-1,2c\right\}$$

yazılabilir. Eş. 5.8' i gözönüne alırsak

$$\overline{2r,2c}=\left(\binom{r+c}{r-c}+\binom{r+c-1}{r-c-1}\right)2^{2c} \tag{5.20}$$

elde edilir.

Eş. 5.2 ile Eş. 5.4 kullanılarak

$$\begin{aligned}[m,n] &= 2^{m-n+1}\left(\binom{m}{m-n+1}+\binom{m-1}{m-n+1}\right)\\ &= 2^{m-n+1}\left(\binom{m}{n-1}+\binom{m-1}{n-2}\right)\end{aligned} \quad (5.21)$$

yazarız. Eş. 5.20 ve Eş. 5.21 karşılaştırıldığında

$$\overline{2r,2c} = [r+c, r-c+1] \quad (5.22)$$

ifadesi elde edilir ve böylece

$$[r,c] = \overline{r+c-1, r-c+1} \quad (5.23)$$

dir.

Benzer işlemler yapılarak Eş. 5.22 için de benzer bir formül

$$\overline{2r-1,2c+1} = [r+c, r-c] \quad (5.24)$$

şeklinde bulunur. Buradan Eş. 5.23 eşitliğine tekrar varılır.

6. $P_n(x)$, $Q_n(x)$, $J_n(x)$ ve $j_n(x)$ POLİNOMLARININ DETERMİNANT YARDIMIYLA ELDE EDİLMESİ

Bu bölümde Pell, Pell-Lucas ve Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas polinomları $n\times n$ tipindeki matrislerin determinantları yardımıyla elde edilecektir. Fibonacci ve Pell sayılarının matrislerle elde edilişi [11, 13 ,14] de gösterilmiştir. Matris ve determinant yöntemlerinin birçok bilim dalında uygulamaları vardır [1, 8, 10].

6.1. Teorem

A, $n\times n$ tipindeki bir matris olsun. Bu matrisin i. satır ve j. sütunundaki elemanı için gösterimi a_{ij} şeklinde yazılsın. A matrisi

$$a_{ij}=\begin{cases} 2x, & i=j \quad ise \\ 1, & j=i+1 \ ise \\ -1, & j=i-1 \ ise \\ 0, & aksi \ halde \end{cases}$$

yani

$$A=\begin{bmatrix} 2x & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2x & 1 & & & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & -1 & 2x & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2x \end{bmatrix}_{nxn}$$

olsun ve $\det(A)$, $\Delta_n(x)$ şeklinde gösterilsin. Bu durumda

$$\det(A)=\Delta_n(x)=P_{n+1}(x)$$

dir. Burada $P_{n+1}(x)$, $(n+1)$. Pell polinomudur.

İspat

İspatı n üzerinden tümevarımla yapalım. $n=1$ olsun. Bu durumda $A=[2x]$ ve $\Delta_n(x)=2x$ olup $P_2(x)=2x$ olduğundan $n=1$ için iddia doğrudur. Kabul edelim ki $(n-1)$ için iddia doğru olsun. O halde

$$\Delta_{n-1}(x)=P_n(x)$$

ifadesi elde edilir. Buna göre eşitliğin n için doğru olduğunu gösterelim. Minörler ile determinantların hesaplanması yöntemi ile A matrisinin determinantı birinci satıra göre açılarak hesaplanırsa

$$\Delta_n(x)=2x\Delta_{n-1}(x)+\Delta_{n-2}(x)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\Delta_n(x)&=2x\Delta_{n-1}(x)+\Delta_{n-2}(x)\\&=2xP_n(x)+P_{n-1}(x)\\&=P_{n+1}(x)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

6.2. Teorem

A, $n\times n$ tipindeki bir matris olsun. Bu matrisin i. satır ve j. sütunundaki elemanı için gösterimi a_{ij} şeklinde yazılsın. A matrisi

$$a_{ij}=\begin{cases} 2x, & i=j \quad ise \\ -1, & j=i+1 \ ise \\ 1, & j=i-1 \ ise \\ 0, & aksi \ halde \end{cases}$$

yani

$$A=\begin{bmatrix} 2x & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2x & -1 & & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & & & & 1 & 2x & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2x \end{bmatrix}_{nxn}$$

olsun ve $\det(A)$, $\delta_n(x)$ şeklinde gösterilsin. Bu durumda

$$\det(A)=\delta_n(x)=P_{n+1}(x)$$

dir. Burada $P_{n+1}(x)$, $(n+1)$. Pell polinomudur.

İspat

İspatı n üzerinden tümevarımla yapalım. $n=1$ olsun. Bu durumda $A=[2x]$ ve $\delta_n(x)=2x$ olup $P_2(x)=2x$ olduğundan $n=1$ için iddia doğrudur. Kabul edelim ki $(n-1)$ için iddia doğru olsun. O halde

$$\delta_{n-1}(x)=P_n(x)$$

ifadesi elde edilir. Buna göre eşitliğin n için doğru olduğunu gösterelim. A matrisinin determinantı birinci sütuna göre açılarak hesaplanırsa

$$\begin{aligned}\delta_n(x) &= 2x\delta_{n-1}(x)+\delta_{n-2}(x)\\ &= 2xP_n(x)+P_{n-1}(x)\\ &= P_{n+1}(x)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

6.3. Teorem

A, $n \times n$ tipindeki bir matris olsun. Bu matrisin i. satır ve j. sütunundaki elemanı için gösterimi a_{ij} şeklinde yazılsın. A matrisi

$$a_{ij} = \begin{cases} 2x, & i=j \quad ise \\ 2, & i=1\, ve\ j=2 \quad ise \\ 1, & j=i+1\ ve\ i>1\ ise \\ -1, & j=i-1 \quad ise \\ 0, & aksi\ halde \end{cases}$$

yani

$$A = \begin{bmatrix} 2x & 2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2x & 1 & & & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & -1 & 2x & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2x \end{bmatrix}_{nxn}$$

olsun ve $\det(A)$, $\Delta^*{}_n(x)$ şeklinde gösterilsin. Bu durumda

$$\det(A) = \Delta^*{}_n(x) = Q_n(x)$$

dir. Burada $Q_n(x)$, n. Pell-Lucas polinomudur.

İspat

İspatı n üzerinden tümevarımla yapalım. $n=1$ olsun. Bu durumda $A=[2x]$ ve $\Delta^*{}_n(x)=2x$ olup $Q_1(x)=2x$ olduğundan $n=1$ için iddia doğrudur. Kabul edelim ki $(n-1)$ için iddia doğru olsun. O halde

$$\Delta^*{}_{n-1}(x)=Q_{n-1}(x)$$

ifadesi elde edilir. Buna göre eşitliğin n için doğru olduğunu gösterelim. A matrisinin determinantı son sütuna göre açılarak hesaplanırsa

$$\begin{aligned}\Delta^*{}_n(x) &= 2x\Delta^*{}_{n-1}(x)+\Delta^*{}_{n-2}(x)\\ &= 2xQ_{n-1}(x)+Q_{n-2}(x)\\ &= Q_n(x)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

6.4. Teorem

A, $n\times n$ tipindeki bir matris olsun. Bu matrisin i. satır ve j. sütunundaki elemanı için gösterimi a_{ij} şeklinde yazılsın. A matrisi

$$a_{ij}=\begin{cases} 2x, & i=j \quad ise\\ -2, & i=1 \ ve \ j=2 \quad ise\\ -1, & j=i+1 \ ve \ i>1 \ \ ise\\ 1, & j=i-1 \quad ise\\ 0, & aksi \ halde\end{cases}$$

yani

$$A = \begin{bmatrix} 2x & -2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2x & -1 & & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & & & & 1 & 2x & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2x \end{bmatrix}_{nxn}$$

olsun ve $\det(A)$, $\delta^*{}_n(x)$ şeklinde gösterilsin. Bu durumda

$$\det(A) = \delta^*{}_n(x) = Q_n(x)$$

dir. Burada $Q_n(x)$, n. Pell-Lucas polinomudur.

İspat

İspatı n üzerinden tümevarımla yapalım. $n=1$ olsun. Bu durumda $A=[2x]$ ve $\delta^*{}_n(x)=2x$ olup $Q_1(x)=2x$ olduğundan $n=1$ için iddia doğrudur. Kabul edelim ki $(n-1)$ için iddia doğru olsun. O halde

$$\delta^*{}_{n-1}(x) = Q_{n-1}(x)$$

ifadesi elde edilir. Buna göre eşitliğin n için doğru olduğunu gösterelim. A matrisinin determinantı son satıra göre açılarak hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \delta^*{}_n(x) &= 2x\delta^*{}_{n-1}(x) + \delta^*{}_{n-2}(x) \\ &= 2xQ_{n-1}(x) + Q_{n-2}(x) \\ &= Q_n(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

6.5. Teorem

A, $n\times n$ tipindeki bir matris olsun. Bu matrisin i. satır ve j. sütunundaki elemanı için gösterimi a_{ij} şeklinde yazılsın. A matrisi

$$a_{ij}=\begin{cases} 1, & i=j \\ -1, & j=i+1 \\ 2x, & j=i-1 \\ 0, & aksi\ halde \end{cases}$$

yani

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2x & 1 & -1 & & & & \vdots \\ 0 & 2x & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & & & & 2x & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 2x & 1 \end{bmatrix}_{nxn}$$

olsun. Bu durumda

$$\det(A_n)=J_{n+1}(x)$$

dir. Burada $J_n(x)$, $(n+1)$. Jacobsthal polinomudur.

İspat

İspatı n üzerinden tümevarımla yapalım. $n=1$ olsun. Bu durumda $A=[1]$ ve $\det(A_n)=1$ olup $J_2(x)=1$ olduğundan $n=1$ için iddia doğrudur. Kabul edelim ki $(n-1)$ için iddia doğru olsun. O halde

$$\det(A_{n-1}) = J_n(x)$$

ifadesi elde edilir. Buna göre eşitliğin n için doğru olduğunu gösterelim. A matrisinin determinantı birinci sütuna göre açılarak hesaplanırsa

$$\begin{aligned}\det(A_n) &= \det(A_{n-1}) + 2x\det(A_{n-2}) \\ &= J_n(x) + 2xJ_{n-1}(x) \\ &= J_{n+1}(x)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

6.6. Teorem

A, $n \times n$ tipindeki bir matris olsun. Bu matrisin i. satır ve j. sütunundaki elemanı için gösterimi a_{ij} şeklinde yazılsın. A matrisi

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \quad ise \\ -2, & i = 1 \ ve \ j = 2 \quad ise \\ -1, & j = i+1 \ ve \ i > 1 \ ise \\ 2x, & j = i-1 \ ise \\ 0, & aksi \ halde \end{cases}$$

yani

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2x & 1 & -1 & & & & \vdots \\ 0 & 2x & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & & & & 2x & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 2x & 1 \end{bmatrix}_{nxn}$$

olsun. Bu durumda

$$\det(A_n) = j_n(x)$$

dir. Burada $j_n(x)$, n. Jacobsthal-Lucas polinomudur.

İspat

İspatı n üzerinden tümevarımla yapalım. $n=1$ olsun. Bu durumda $A=[1]$ ve $\det(A_n)=1$ olup $j_1(x)=1$ olduğundan $n=1$ için iddia doğrudur. Kabul edelim ki $(n-1)$ için iddia doğru olsun. O halde

$$\det(A_{n-1}) = j_{n-1}(x)$$

ifadesi elde edilir. Buna göre eşitliğin n için doğru olduğunu gösterelim. A matrisinin determinantı son satıra göre açılarak hesaplanırsa

$$\begin{aligned}\det(A_n) &= \det(A_{n-1}) + 2x\det(A_{n-2}) \\ &= j_{n-1}(x) + 2xj_{n-2}(x) \\ &= j_n(x)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

KAYNAKLAR

1. Koshy, T., "Fibonacci and Lucas Numbers with Applications", ***Wiley-Interscience***, 215-226 (2001).

2. Cahill, N.D., Narayan, D.A., "Fibonacci and Lucas Numbers as tridiagonal matrix determinants", ***Fibonacci Quart.,*** 42 (3): 216-221 (2004).

3. Öcal, A.A., Tuğlu, N., Altınışık, E., "On the representation of k-generalized Fibonacci and Lucas Numbers", ***Appl. Math. Comput.,*** 170: 584-596 (2005).

4. Miles, E.P Jr., "Generalized Fibonacci numbers and associated matrices", ***Amer.Math.Monthly,*** 745-752 (1960).

5. Cahill, N.D., Errico J.R.D., Narayan D.A., Narayan J.Y., "Fibonacci Determinants", ***College Math.,*** J. 33 (3): 221-225 (2002).

6. Horadam, A.F., "Pell İdentities", ***Fibonacci Quart.,*** 9 (3): 245-252, 263 (1971).

7. Horadam, A. F. and Mahon, Bro. J. M., "Pell and Pell-Lucas Polynomials", ***Fibonacci Quart.***, 23 (1): 7-20 (1985).

8. Vorob'yev, N.N., "Fibonacci Numbers", ***Blaisdell***, New York, 1-176 (1961).

9. Horadam, A.F., "A generalized Fibonacci sequence", ***Amer. Math. Monthly,*** 68: 455- 459 (1961).

10. Vajda, S., "Fibonacci & Lucas numbers, and the golden section. Theory and applications" ***John Wiley & Sons,*** New York, 24-61 (1989).

11. Miles, E.P., "Generalized Fibonacci numbers and associated matrices", ***Amer. Math. Monthly,*** 67: 745-752 (1960).

12. Lee, G.-Y., "*k*-Lucas numbers and associated bipartite graphs", ***Linear Algebra Appl.***, 320 (1-3): 51-61 (2000).

13. Bong, N. H., "Fibonacci matrices and Matrix Representation of Fibonacci Numbers", ***Southeast Asian Bull. Math***., 23: 357-374 (1999).

14. Ercolano, J., "Matrix generators of Pell sequences", ***Fibonacci Quart.,*** 17 (1): 71-77 (1979).

15. Er, M. C., "Sums of Fibonacci numbers by matrix methods", ***Fibonacci Quart.,*** 22 (3): 204-207 (1984).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: BİRİNCİ, Ayşen Tuğba
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 14.04.1983 Ankara
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: 0 (312) 472 43 34
e-mail	: tugba.birinci@hotmail.com.

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik Bölümü	2005
Lise	Yahya Kemal Beyatlı Lisesi	2001

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2007-2008	Genelkurmay Başkanlığı	Bilgisayar Programcısı

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Bilgisayar Teknolojileri, Masa Tenisi, Yüzme, Dans