
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

DÖNÜŞÜMLER İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE UYGULAMALARI

Maide GÖKŞİN TAŞ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2024

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Maide GÖKŞİN TAŞ

18/01/2024

DÖNÜŞÜMLER İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE UYGULAMALARI

(Doktora Tezi)

Maide GÖKŞİN TAŞ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2024

ÖZET

Bu tez çalışmasında M-tam M-metrik uzaylarda tek ve küme değerli θ-büzülme dönüşümleri ile P-büzülme dönüşümleri için bazı sabit nokta teoremleri ifade ve ispat edilerek detaylı bir şekilde incelenmiştir. Öncelikle sabit nokta teorinin gelişiminden ve M-metrik uzay ve bu uzay üzerinde yapılan çalışmalardan kısaca bahsedilmiştir . Ardından θ-büzülme kavramı, özellikleri, aralarındaki ilişki, verilen sabit nokta teoremleri ve bu alanda yapılan çalışmaların birbiri ile ilişkisi incelenmiştir. Tezin asıl kısmında M-tam M-metrik uzaylarda tek değerli θ-büzülme dönüşümleri için sabit nokta teoremleri ifade edilerek bir uygulaması olarakta lineer olmayan Hammerstein integral denkleminin sabit noktasının var ve tek olduğu gösterilmiştir. Daha sonra, M-tam M-metrik uzaylarda Feng-Liu'nun tekniklerini kullanarak küme değerli θ-büzülme dönüşümleri için bazı sabit nokta teoremleri elde edilmiştir ve örneklerle desteklenmiştir. Son olarak, M-metrik uzaylarda P-büzülme ve P-büzülebilir dönüşüm tanımları verilerek bazı sabit nokta sonuçları ifade ve ispat edilmiş ayrıca uygulamalarına da yer verilerek böylece literatürdeki çalışmalar farklı bir açıdan genişletilmiştir.

Bilim Kodu	:	20405
Anahtar Kelimeler	:	Sabit nokta, tek değerli dönüşüm, küme değerli dönüşüm, M-metrik, θ-büzülme, P-büzülme
Sayfa Adedi	:	68
Danışman	:	Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

SOME FIXED POINT THEOREMS AND APPLICATIONS FOR MAPPINGS

(Ph. D. Thesis)

Maide GÖKŞİN TAŞ

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2024

ABSTRACT

In this thesis, some fixed point theorems for single and set valued θ-contraction mappings and P-contraction mappings in M-complete M-metric spaces are examined in detail by expressing and proving them. First of all, the development of the fixed point theory and the m metric space and the studies on this space are briefly mentioned. Then the concept of θ-contraction, its properties, the relationship between them, the given fixed point theorems and the relationship between the studies in this field are examined. In the main part of the thesis, fixed point theorems for univalent θ-contraction mappings in M-complete M-metric spaces are expressed and it is shown that some Hammestein integral inclusions have fixed points and odd as an application. Then, using Feng-Liu's techniques in M-complete M-metric spaces, some fixed point theorems for set-valued θ-contraction mappings are obtained and supported with examples. Finally, in M-metric spaces by giving a new definition of P-contraction and P-contractive some fixed point results are expressed and proved, also included are its applications so that the studies in the literature are expanded from a different perspective.

Science Code : 20405

Key Words : Fixed point, single valued mapping, multivalued mapping, M-metric, θ-contraction, P-contraction

Page Number : 68

Supervisor : Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın planlanması ve yürütülmesi aşamalarında çalışmama yön veren ve engin tecrübelerinden istifade ettiğim danışmanım Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU'na en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bilgi, destek ve yönlendirmeleri ile tez çalışmamın bilimsel temeller üzerinde yürütülmesini sağlayan Prof. Dr. İshak ALTUN ve Prof. Dr. Hakan EFE'ye teşekkürlerimi sunarım.

Tez yazım sürecindeki desteklerinden dolayı eşim Doç. Dr. Zeki TAŞ ve oğullarıma teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

SİMGELER VE KISALTMALAR viii

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL TANIM VE TOREMLER 5

2.1. $\boldsymbol{M}$-Metrik 5

2.2. θ -Büzülme Dönüşümleri 9

3. $\boldsymbol{M}$-METRİK UZAYLARDA $\boldsymbol{\theta}$- BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE UYGULAMALARI 17

3.1. Tek Değerli $\boldsymbol{\theta}$-Büzülme Dönüşümleri İçin Sabit Nokta Teoremi ve Uygulaması 17

3.2. $\boldsymbol{M}$-metrik Uzaylarda Feng Liu Tipi $\boldsymbol{\theta}$-Büzülmeler İçin Sabit Nokta Teoremleri 26

4. $\boldsymbol{M}$-METRİK UZAYLARDA $\boldsymbol{P}$-BÜZÜLMELER İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE UYGULAMALARI 47

4.1. $\boldsymbol{M}$-Metrik Uzaylarda $\boldsymbol{P}$-Büzülmeler İçin Bazı Sabit Nokta Teoremleri 47

4.2. İkinci Dereceden $(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})$ Langevin Diferansiyel Denklemleri İçin Uygulamalar 56

5. SONUÇ VE ÖNERİLER 61

KAYNAKLAR 63

ÖZGEÇMİŞ 67

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\boldsymbol{\tau_s}$	Dizisel topoloji
$\boldsymbol{\tau_m}$	M-metriğin ürettiği topoloji
$\boldsymbol{\overline{A^m}}$	τ_m topolojisine göre $A \subseteq X$'nin kapanışı
$\boldsymbol{\overline{A^s}}$	τ_s topolojisine göre $A \subseteq X$'nin kapanışı
$\boldsymbol{P_m(X)}$	M-metriğinde X'in bütün alt kümelerinin ailesi
$\boldsymbol{C_m(X)}$	τ_m topolojisine göre X'in kapalı alt kümelerinin ailesi
$\boldsymbol{C_s(X)}$	τ_s topolojisine göre X'in kapalı alt kümelerinin ailesi
$\boldsymbol{K_m(X)}$	τ_m topolojisine göre X'in kompakt alt kümelerinin ailesi
$\boldsymbol{\liminf_{n\to\infty} x_n}$	$\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ dizisinin alt limiti

1. GİRİŞ

Sabit nokta teorisi matematiğin çeşitli dalları ile olduğu kadar fizik, ekonomi, iktisat gibi pek çok alanda da uygulamaları var olan bir disiplindir. Tarihsel olarak topolojik, ayrık ve metrik olmak üzere üç ana dalda gelişme göstermiştir.

İlk topolojik çalışmalar 1912 yılında Brouwer'in $\mathbb{R}^n$ nin kapalı birim yuvarından kendisine tanımlı sürekli dönüşümlerin sabit noktasının var olduğunu göstermesi ile başlamıştır. Ardından 1930 yılında Schauder bir Banach uzayının kompakt konveks alt kümesinden kendisine tanımlı sürekli dönüşümlerin sabit noktasının varlığını ispat ederek Brouwer'in çalışmasını sonsuz boyutlu uzaylara genişletmiştir. Darbo ise 1955 yılında kompaktlık şartını yoğunlaştırıcı dönüşüm olmasını dikkate alarak yeniden düzenlemiştir. Ayrıca Krasnoselskii (1955) ve Mönch (1980) bu alandaki çalışmaları genişletmişlerdir.

İkinci olarak Ayrık metrik uzay üzerindeki çalışmalar 1950 yılında Kneser tarafından verilen kısmi sıralı bir kümeden kendisine tanımlı dönüşümlerin sabit noktalarının var olduğunu göstermekle başlamış. Ardından Tarski (1955) ve Amann (1977) ın çalışmaları ile devam etmiştir.

Son olarak metrik sabit nokta teorideki çalışmaların temeli Banach'ın (1922) sabit nokta teoremine dayanmaktadır. (X, d) metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq ld(x, y)$$

eşitsizliğini sağlayan $l \geq 0$ sabiti varsa T ye bir Lipschitz dönüşümü denir. Bu eşitsizliği gerçekleyen l sayılarının en küçüğüne T nin Lipschitz sabiti denir ve l ile gösterilir. Eğer l<1 ise T ye büzülme, eğer l≤1 ise T ye genişlemeyen dönüşüm denir. Yine $x \neq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

oluyorsa T ye büzülebilir dönüşüm denir. Buna göre her büzülme dönüşümü büzülebilir ve her büzülebilir dönüşüm de genişlemeyendir. Banach'ın sabit nokta teoremi diğer sabit nokta

teoremlerinden farklı olarak sabit noktanın varlığını garanti ederek nasıl bulunabileceğini de göstermektedir:

"(X,d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşümü $l \in [0,1)$ olacak şekilde

$$d(Tx,Ty) \leq ld(x,y)$$

büzülme şartını sağlasın. Buna göre T dönüşümünün X uzayında bir tek sabit noktası vardır. Ayrıca X uzayındaki her hangi bir $x \in X$ başlangıç noktası ile elde edilen $\{T^n x\}$ Picard iterasyonu T dönüşümünün sabit noktasına yakınsar."

Bu teoremdeki büzülme dönüşüm prensibi yerine çok sayıda araştırmacı tarafından büzülme tip bazı eşitsizlikler ifade edilerek yeni sabit nokta teoremleri elde edilmiştir. [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. Bu genişletilme ve genelleştirmeler elde edilirken bazen farklı tipte büzülme dönüşümleri yada farklı genelleştirilmiş metrik uzaylar tanımlanmıştır. Yani günümüze kadar bu büzülme çeşitlerinin daha genel durumları ve çeşitli uzaylardaki karşılıkları üzerine sonuçlar elde edilmiştir.

Bu şekildeki diğer önemli çalışmalardan birisi de Jleli ve Samet in 2014 yılındaki çalışmasıdır [9]. Jleli ve Samet bir $\theta : (0,\infty) \to (1,\infty)$ fonksiyonlarının ailesini kullanarak θ-büzülme adında yeni bir büzülme dönüşü tanımlayarak yeni bir sabit nokta teoremi ispatlamıştır. Ardından pek çok yazar tarafından bu büzülmenin çeşitli genelleştirilmeleri elde edilmiştir. Diğer taraftan 2018 yılına Asadi ve diğ. metrik uzay kavramını M-metrik uzay ve M_b metrik uzaylara genişletilerek bu uzaylarda Banach büzülme ilkesi elde etmişlerdir. Asadi ve diğerlerinin ardından bu alanda topolojik yapıyı özetleyen yayınların yanı sıra M-metrik uzayının yapısı ve bazı temel yönleri üzerine çeşitli araştırmalar yapılmıştır [10-14].

Tek değerli dönüşümler içi verilen sabit nokta teoremlerinden farklı olarak 1969 da Nadler [15] Banach sabit nokta teoreminin küme değerli dönüşümler için olan ifadesini aşağıdaki şekilde ifade ederek ve ispatlamıştır.

" (X,d) metrik uzay ve $T: X \to CB(X)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. Eğer her

$x, y \in X$

$H(Tx, Ty) \leq Ld(x, y)$

olacak şekilde $L \in [0,1)$ sabiti varsa T dönüşümüne küme değerli büzülme dönüşümü denir."

Burada $H: CB(X) \times CB(X) \to \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon olmak üzere her

$A, B \in CB(X)$ için

$H(A, B) = \max\{sup_{x \in A} D(x, B), sup_{y \in B} D(y, A)$

$CB(X)$ üzerinde bir metrik tanımlar ve bu metrik Hausdorff metriği olarak bilinir.

(X, d) bir tam metrik uzay ise $(CB(X), H)$ ve $(K(X), H)$ metrik uzayları da tamdır.

"(X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to CB(X)$ küme değerli bir büzülme dönüşümü ise o zaman T , X de bir sabit noktaya sahiptir."

Nadler in bu sonucundan ilham alınarak, günümüze kadar küme değerli büzülmelerle ilgili pek çok sabit nokta sonuçları çalışılmıştır [16-24]. Şüphesiz ki bunlardan en dikkat çekeni Feng ve Liu nin çalışmasıdır. Bu çalışmada Hausdorff metriğini kullanmadan ve ayrıca küme değerli dönüşümün değer kümesini $CB(X)$ (X in bütün kapalı ve sınırlı altkümelerinin ailesi) yerine $C(X)$ (X in bütün kapalı alt kümelerinin ailesi) alarak genişletmişlerdir.

Bir kümenin elemanları arasındaki mesafe kavramını anlamak için bir çerçeve sağlayan metrik uzayların incelenmesi matematiksel analiz ve topoloji için temel bir kavramdır. Metrik uzaylar modern matematiğin önemli bir parçasıdır ve bilim ve mühendisliğin çeşitli dallarında çok sayıda uygulama alanı bulmuştur. Metrik uzayların özellikleri arasında dikkat çekici olanlar dönüşümlerin davranışlarını ortaya çıkarabilme yetenekleridir. Bu bağlamda sabit nokta sonuçları içinde metrik uzayların incelenmesi matematikçiler için önemli bir ilgi alanı haline gelmiştir. Metrik uzaylar üzerindeki sabit nokta teorisi dönüşümler altında değişmeden kalan bazı noktaların incelenmesi ile ilgilidir. Bu sabit noktalar analiz, fonksiyonel analiz ve diferansiyel denklemlerin çeşitli alanlarında geniş kapsamlı çıkarımlara sahiptir. Biz de bu çalışmada M-metrik uzaylarda sabit nokta teorisine

odaklanacağız. M-metrik uzaylar sıradan metrik uzayların bir genellemesidir ve uzaklık, yakınsama gibi daha karmaşık kavramları ele alacak şekilde dizayn edilmiştir.

Bu tez çalışmasında öncelikle M-tam M-metrik uzaylarda tek değerli θ-büzülme dönüşümleri için sabit nokta teoremleri ifade ve ispat edilerek bu sonuçların uygulanabilirliği açısından Hammerstein integral denkleminin sabit noktasının var ve tek olduğunu göstermede kullanılacaktır. Sonrasında M-tam M-metrik uzaylarda Feng-Liu'nun teknikleri kullanılarak küme değerli θ-büzülme dönüşümleri için bazı sabit nokta teoremleri elde edilip örneklerle desteklenecektir. Son olarak, M-metrik uzaylarda P-büzülme ve P-büzülebilir dönüşüm tanımları yapılarak bunlarla ilgili sabit nokta teoremleri elde edilerek bu teoremlerin uygulanabilirliğini görmek adına 2. dereceden $(p-q)$ Langevin diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlık ve tekliği gösterilecektir.

2. TEMEL TANIM VE TOREMLER

Bu bölümde çalışmada yer alan bazı temel tanım ve teoremler ile aralarındaki ilişkiye değineceğiz.

2.1. M-Metrik

Klasik Banach büzülmesinin farklı metriklerde ve farklı dönüşüm tipleri ile ilgili literatürde pek çok genellemesi ve genelleşmişine yer verilmiştir. Asadi ve diğ. [10] Matthews'in [25] yaptığı kısmi metrik uzay tanımını ve burdaki çalışmaları M-metrik uzay tanımını vererek genişletmişler ve M-tam M-metrik uzaylar üzerinde tek değerli dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri elde etmişlerdir . Şimdi M-Metrik ve bu alanda yapılan bazı çalışmaları hatırlayalım:

2.1.1.Tanım

$X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $m: X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu eğer her $x, y, z \in X$ için,

$m1)\ m(x,y) = m(x,x) = m(y,y) \Leftrightarrow x = y,$
$m2)\ m_{xy} = \min\{m(x,x), m(y,y)\} \leq m(x,y)$
$m3)\ m(x,y) = m(y,x)$
$m4)\ m(x,y) - m_{xy} \leq (m(x,z) - m_{xz}) + (m(y,z) - m_{yz})$

şartlarını sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde bir M-metrik denir ve (X, m) ikilisine de M-metrik uzay denir [10].

Çalışma boyunca

$m_{xy} := \min\{m(x,x), m(y,y)\}$
$M_{xy} := \max\{m(x,x), m(y,y)\}$ gösterimleri kullanılacaktır.

Matthews'in [25] çalışmasında her sıradan metriğin ve kısmi metriğin bir M-metrik uzay olduğu açıktır. Fakat tersi doğru değildir. Aşağıdaki örnek bunu göstermektedir.

Örnek

$X = [0, \infty)$ olsun ve $m_1, m_2 : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ metrikleri X üzerinde $m_1(x, y) = \min\{x, y\}$ ve $m_2(x, y) = \frac{x+y}{2}$ şeklinde tanımlı metrik olsun. İkisi de ne ne sıradan metriktir ne de kısmi metriktir fakat M-metriktir.

Uyarı 1

(X, m) bir M-metrik uzay olsun. $v(x, y) = m(x, y) - 2m_{xy} + M_{xy}$ dönüşümü X üzerinde tanımlı sıradan metrik uzaydır. Dahası (X, m) de bir $\{x_n\}$ dizisinin M-Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart (X, v) de bir Cauchy dizisi olmalıdır. Hatta (X, m) bir M-tam M-metrik uzaydır gerek ve yeter şart (X, v) bir tam metrik uzaydır.

2.1.2. Tanım

(X, m) bir M-metrik uzay, $\{x_n\} \subseteq X$ bir dizi ve $x \in X$ olmak üzere,

$i)$ $\{x_n\}$ dizisinin x noktasına M-yakınsak olması için ($x_n \to x$ olarak gösterilir) gerek ve yeter koşul $\lim_{n\to\infty} [m(x_n, x) - m_{x_n x}] = 0$ olmasıdır.

$ii)$ $Eğer$ $\{x_n\}$ dizisi için

$$\lim_{n,m\to\infty} [\, m(x_n, x_m) - m_{x_n x_m}] \text{ ve } \lim_{n,m\to\infty} [\, M_{x_n x_m} - m_{x_n x_m}]$$

limitleri var ve sonlu ise bu diziye M-Cauchy dizisidir denir.

$iii)$ $Eğer$ (X, m) uzayında her M-Cauchy dizisi bir $x \in X$ noktasına M-yakınsak ise bu uzaya M-tamdır denir öyle ki

$\lim_{n\to\infty} [m(x_n, x) - m_{x_n x}] = 0$ ve $\lim_{n,m\to\infty} [\, M_{x_n x} - m_{x_n x}] = 0$ dır [10].

2.1.3. Tanım

(X, m) bir M-metrik uzay, $\{x_n\} \subseteq X$ bir dizi ve $x \in X$ olmak üzere,

$i)$ $\{x_n\}$ dizisinin x noktasına M-yakınsak olması için gerek ve yeter koşul

$\lim_{n\to\infty}[m(x_n,x)-m_{x_nx}]=0$ olmasıdır.

$ii)$ $Eğer$ $\{x_n\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty}[\,m(x_n,x_m)-m_{x_nx_m}]$ var ve sonlu ise bu diziye M-Cauchy dizisidir denir.

$iii)$ $Eğer$ (X,m) uzayında her M-Cauchy dizisi bir $x\in X$ noktasına M-yakınsak ise bu uzaya M-tamdır denir [12].

2.1.4. Lemma

(X,m) bir M-metrik uzay ve $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri bu uzayda $x_n\to x$ ve $y_n\to y$ olacak şekilde M-yakınsak diziler olsunlar. O zaman

$\lim_{n\to\infty}[m(x_n,y_n)-m_{x_ny_n}]=m(x,y)-m_{xy}$ dır [10].

2.1.5. Lemma

(X,m) bir M-metrik uzay ve $\{x_n\}$ dizisi için $x_n\to x$ yakınsak bir dizi olsun. O zaman

$\lim_{n\to\infty}[m(x_n,\mathrm{y})-m_{x_ny}]=m(x,y)-m_{xy}$ dır [10].

Örnek

1) $X=[0,\infty)$ ve $m:X\times X\longrightarrow[0,\infty)$ metriği X üzerinde $m(x,y)=\min\{x,y\}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda (X,m) M-tam M-metrik uzaydır.
2) $X=\left\{\frac{1}{n}:n\geq 1,n\in\mathbb{N}\right\}$ ve $m:X\times X\longrightarrow[0,\infty)$ metriği X üzerinde $m(x,y)=\min\{x,y\}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda (X,m) M-tam M-metrik uzaydır.
3) $X=\left\{\frac{1}{n}:,n\geq 1,\ n\in\mathbb{N}\right\}$ ve $m:X\times X\longrightarrow[0,\infty)$ metriği X üzerinde $m(x,y)=\frac{\mathrm{x+y}}{2}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda (X,m) M-tam M-metrik uzaydır.

Altun ve diğ. M-metrik uzay üzerindeki topolojik yapıları incemişler ve bazı önemli sonuçlar elde etmişlerdir. (X, m) bir M-metrik uzay ve $V \subseteq X$ olsun. Buna göre $V \subseteq X$ alt kümesi dizisel açıktır gerek ve yeter koşul $x \in V$ ve $\lim_{n\to\infty} m(x_n, x) = 0$ olacak şekildeki her $(x_n) \subseteq X$ dizisi sonunda V kümesi içinde kalır. Bu uzaydaki bütün dizisel açık kümelerin ailesi τ_s ile gösterilirse bu aile X üzerinde bir topoloji belirtir ve bu topolojiye dizisel topoloji denir [26].

M metrikte açık yuvarlar her $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$B_m(x, \varepsilon) = \{y \in X : m(x, y) < m_{xy} + \varepsilon\}$$

şeklinde tanımlanır. $\{B_m(x, \varepsilon) : x \in X, \varepsilon < 0\}$ kümesi X üzerindeki τ_m topolojisi için bir tabandır. Bu topolojiye göre bir V kümesinin kapanışı $\overline{V^m}$ ile gösterilir. M-metrik uzay üzerinde bir dizinin yakınsaklığı τ_m topolojisine göre yakınsaklık ile çakışır. Altun ve diğ. $\tau_m \subseteq \tau_s$ olduğunu hatta $\tau_s \nsubseteq \tau_m$ olduğunu da ispatlamışlardır [26].

2.1.6. Lemma

(X, m) bir M-metrik uzay $V \subseteq X$ ve $x \in V$ olsun.

Eğer $m(x, V) = 0 \Longrightarrow x \in \overline{V^m} \subseteq \overline{V^s}$ dır [26].

Uyarı

$x \in \overline{V^m}$ ise $m(x, V) = 0$ olmak zorunda değildir [26].

Aşağıdaki örnekler bunu göstermektedir.

Örnek

1. $X = \{\frac{1}{n} : n \geq 1, n \in \mathbb{N}\}$ ve $m(x, y) = min\{x, y\}$ olarak tanımlanırsa, X kümesi üzerinde tanımlı M-metriği $\tau_m = \{\emptyset, X\}$ olur. $V = \{\frac{1}{n} : 20 > n \geq 1, n \in \mathbb{N}\}$ ve $x = 1$ olarak alınırsa $x \in \overline{V^m}$ fakat $m(x, V) > 0$ dır.

2. $X = \{0\} \cup [1, \infty)$ ve $m(x, y) = \frac{x+y}{2}$ olarak tanımlanırsa, X kümesi üzerinde tanımlı M-metriği τ_m, X üzerinde alışılmış topoloji olur. M-metrik uzay ve $V = [1,2) \subseteq X$ ve $x = 1$ olarak alınırsa $x \in V$ fakat $m(x, V) > 0$ dır.

2.1.7. Önerme

(X, m) bir M-metrik uzay, $V \subseteq X$ ve $x \in V$ olsun. $x \in \overline{V^m}$ olması için gerek ve yeter koşul $\inf\{m(x, y) - m_{xy} : y \in V\} = 0$ olmasıdır [26].

2.1.7. Tanım

Boştan farklı bir X kümesi üzerinde m_1 ve m_2 M-metrikleri verilmiş olsun. X deki m_1-açık kümeler (τ_{m_1} topolojisinin ürettiği topolojiye göre açık kümeler) m_2- açık (τ_{m_2} topolojisinin ürettiği topolojiye göre açık kümeler) ve m_2-açık kümeler m_1-açık ise m_1 ve m_2 metriklerine M-denk (ya da eşdeğer) metrikler denir.

2.1.8. Teorem

(X, m) bir M-tam M-metrik uzay olsun. $T : X \to X$ bir dönüşüm olmak üzere, eğer her $x, y \in X$ için $k \in (0,1)$ var öyle ki,

$$m(Tx, Ty) \leq km(x, y) \tag{2.1}$$

eşitsizliği sağlanıyor olsun. Buna göre T bir tek sabit noktaya sahiptir [10].

2.2. θ -Büzülme Dönüşümleri

Sabit nokta teorinin en önemli genelleştirmelerinden birini Jleli ve Samed [9] aşağıdaki özelliklere sahip fonksiyonları kullanarak yeni bir büzülme çeşidi tanımlayarak vermiştir. (Literatürde buna kısaca JS büzülme de denilir.)

"Θ aşağıdaki şartları sağlayan bütün $\theta : (0, \infty) \to (1, \infty)$ fonksiyonlarının ailesi olsun;

(θ_1) θ azalmayandır.

(θ_2) $\{t_n\} \subset (0,\infty)$ olacak şekildeki her $\{t_n\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} \theta(t_n) = 1$ dır ancak ve ancak $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ dır.

(θ_3) $\lim_{t\to 0^+} \frac{\theta(t)-1}{t^r} = \ell$ olacak şekilde bir $r \in (0,1)$ ve $\ell \in (0,\infty]$ vardır.''

Branciari [27] genelleşmiş metrik uzay (g.m.s.) kavramını vermiştir. Genelleşmiş metrik uzay ise metrikte yer alan üçgen eşitsizliğinin "$x \neq y$, $u \neq v$ olacak şekildeki her $x, y, u, v \in X$ için $d(x,y) \leq d(x,u) + d(u,v) + d(v,y)$ dır." eşitsizliği ile yer değiştirmesidir. Açıktır ki her metrik uzay genelleşmiş bir metrik uzaydır.

Aşağıda θ-büzülme teoremi genelleşmiş metrik uzaylar için ifade edilmiştir. Ayrıca θ-büzülme ile ilgili elde edilen bazı sonuçlardan bahsedilmektedir.

2.2.1. Teorem

(X,d) genelleşmiş tam metrik uzay $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki

$\theta \in \Theta$ ve $d(Tx,Ty) \neq 0$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için

$$\theta(d(Tx,Ty)) \leq \theta(d(x,y))^k$$

olacak şekilde bir $k \in (0,1)$ var olsun. O zaman T bir tek sabit noktaya sahiptir [9].

Metrik uzaylar genelleşmiş metrik uzaylar olduğu için şu sonuç çıkarılmıştır.

2.2.2. Sonuç

(X,d) bir tam metrik uzay $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $\theta \in \Theta$ ve $d(Tx,Ty) \neq 0$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için

$$\theta(d(Tx,Ty)) \leq \theta(d(x,y))^k \qquad (2.2)$$

olacak şekilde bir $k \in (0,1)$ var olsun. O zaman T bir tek sabit noktaya sahiptir [9].

Örnek

$\theta_1(t) = e^{\sqrt{t}}$, $\theta_2(t) = e^{\sqrt{te^t}}$, $0 < \alpha < 1$ ve $t > 0$ olmak üzere $\theta_3(t) = 2 - \frac{2}{\pi}\arctan(\frac{1}{t^\alpha})$, $\theta_4(t) = e^{\sqrt{t+t^2}}$, $i \in \{1,2,3,4\}$ için $\theta_i \in \Theta$.

Sonuç 2.2.2 den her Banach büzülmenin bir θ-büzülme olduğu görülür. Gerçekten T bir Banach büzülme ise, yani her $x, y \in X$ için

$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y)$ olacak şekilde $\lambda \in (0,1)$ var ise

$e^{d(Tx,Ty)} \leq [e^{d(x,y)}]^k$

yazılabilir. $\theta(t) = e^{\sqrt{t}}$ olarak tanımlanırsa $\theta \in \Theta$ dır. Buradan aynı zamanda her θ-büzülme olan T dönüşümünün sürekli olduğu sonucuna da varılır. Ayrıca Banach büzülme olmayan θ-büzülmeler de vardır [9].

Şimdi θ-büzülme kavramı ile ilgili elde edilen sabit nokta teoremleri ve bunların birbiri ile olan ilişkisine değineceğiz.

X. Liu ve diğ. [28] (θ_2) ve (θ_3) koşulları olmadan sabit nokta teoremleri verilebilir mi? Açık sorusunu yönelterek bu şartları irdelediler.

(θ_4) θ sürekli bir fonksiyondur.

Buna göre; (θ_1), (θ_2), (θ_3), (θ_4) koşullarını sağlayan fonksiyonlar sınıfı Υ ile (θ_1), (θ_2), (θ_4) koşullarını sağlayan fonksiyonlar sınıfı da Ω ile gösterilsin.

Örnek

Her $t > 0$ için; $\theta_1(t) = e^{\sqrt{t}}$, $\theta_2(t) = e^{\sqrt{te^t}}$, $\theta_3(t) = e^t$, $\theta_4(t) = cosht$,

$\theta_5(t) = 1 + \ln(1 + t)$, $\theta_6(t) = te^t$, $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ için $\theta_i \in \Omega$ dır.

(θ_3) koşulu güçlü bir şarttır. Çünkü Ω sınıfına ait çok fonksiyon olmasına rağmen, Θ sınıfına ait fonksiyonlar o kadar çok değildir [28].

Örnek

$p > 0 \quad için \qquad \theta(t) = e^{e^{-\frac{1}{t^p}}}$

ile tanımlı θ fonksiyonu için $\theta \in \Omega$ olmasına rağmen , (θ_3) koşulunu ise sağlamaz. Gerçekten; her $r > 0$ için,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\theta(t)-1}{t^r} = \lim_{t\to 0^+} \frac{e^{e^{-\frac{1}{t^p}}}-1}{t^r} = \lim_{t\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{t^p}}}{t^r} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{1}{t^r}}{e^{\frac{1}{t^p}}} = 0$$

olup (θ_3) koşulu sağlanmaz [28].

Dahası (θ_3) koşulu bir eşitlik ile yer değiştirilebilir. Bu da daha basit bir koşul olan $\inf_{t\in(0,\infty)} \theta(t) = 1$ olmasıdır. Bunu sonuca varmak için aşağıdaki lemmadan yararlanılmıştır.

2.2.3 Lemma

$\theta : (0,\infty) \to (1,\infty)$ azalmayan ve sürekli bir fonksiyon olsun. $\inf_{t\in(0,\infty)} \theta(t) = 1$ ve

$\{t_k\} \subset (0,\infty)$ da bir dizi olmak üzere; $\lim_{k\to\infty} \theta(t_k) = 1$ dır ancak ve ancak $\lim_{k\to\infty} t_k = 0$ dır.

$\tilde{\Theta}$ ailesi aşağıdaki koşulları sağlayan fonksiyonlardan oluşsun.

$(\theta_1)'$ θ azalmayan ve sürekli

$(\theta_2)'$ $\inf_{t\in(0,\infty)} \theta(t) = 1$ [28].

Örnek

$\theta_1(t) = e^{e^{-\frac{1}{t^p}}}$ $p > 0$, $\theta_2(t) = e^{\sqrt{t}}$ $t > 0$, $\theta_3(t) = 1 + t$, $\theta_4(t) = 2 - \frac{2}{\pi}\arctan(\frac{1}{t^\alpha})$ $0 < \alpha < 1$ $t > 0$, $i \in \{1,2,3,4\}$ için $\theta_i \in \widetilde{\Theta}$ [28].

Jamshaid ve diğ. [29] ise (θ_3), (θ_4) koşullarının birbirinden bağımsız olduğunu gösterdi. Gerçekten;

$\theta(t) = e^{t^p}$ $, p \geq 1$ için,

şeklinde tanımlı θ fonksiyonu (θ_3) koşulunu sağlamamasına rağmen (θ_4) koşulunu sağlar. Buna göre $\Omega \nsubseteq \Theta$ dır. Jamshaid ve diğ. [29], Jleli ve Samed [9] in Θ ailesine ait fonksiyonlar için elde ettiği sabit nokta teoremlerini Ω ailesine ait fonksiyonlar için elde etmiştir.

Hussain ve diğ. [30] ise bir çalışmasında daha önce ifade ettiğimiz büzülme tip dönüşümlerin, θ-büzülme şartlı sabit nokta teorelerini ifade ve ispat ettiler.

Ψ aşağıdaki şartları sağlayan bütün $\theta : [0, \infty) \to [1, \infty)$ fonksiyonların ailesi olsun;

(θ_1) θ azalmayandır ve $\theta(t) = 1 \Leftrightarrow t = 0$;

(θ_2) $\{t_n\} \subset (0, \infty)$ olacak şekildeki her $\{t_n\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} \theta(t_n) = 1$ dır ancak ve ancak $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$;

(θ_3) $\lim_{t\to 0^+} \frac{\theta(t)-1}{t^r} = \ell$ olacak şekilde bir $r \in (0,1)$ ve $\ell \in (0, \infty]$ vardır.

(θ_4) Her $a, b > 0$ için, $\theta(a + b) \leq \theta(a)\theta(b)$.

2.2.4. Teorem

(X, d) bir tam metrik uzay $T : X \to X$ sürekli bir dönüşüm olsun. $\theta \in \Psi$ ve $0 \leq k_1 + k_2 + k_3 + 2k_4 < 1$ olacak şekilde k_1, k_2, k_3, k_4 pozitif reel sayıları var öyleki her $x, y \in X$ için

$$\theta\big(d(Tx,Ty)\big) \leq \theta\big(d(x,y)\big)^{k_1}\theta\big(d(x,Tx)\big)^{k_2}\theta\big(d(y,Ty)\big)^{k_3}[\theta(d(x,Ty)+\theta(d(y,Tx)))^{k_4}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda T bir tek sabit noktaya sahiptir [30].

Teorem 2.2.4 de ;

- θ fonksiyonu $\theta(t) = e^{\sqrt{t}}$ olarak tanımlanırsa Ciric in genelleşmişi,
- $k_1 = k_4 = 0$ alınırsa Kannan in genelleşmişi ,
- $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ alınırsa Chatterjea'nin genelleşmişi,
- $k_4 = 0$ alınırsa Reich in genelleşmişi,
- θ fonksiyonu $\theta(t) = e^{\sqrt[n]{t}}$ olarak tanımlanırsa Hardy ve Rogers'ın genelleşmişi

elde edilir [30]. Farklı metrikler ve uzayın yapısı değişerek çeşitli θ-büzülme sabit nokta teoremleri elde edilmiştir. Şimdi küme değerli dönüşümler için elde edilmiş olan bazı sabit nokta teoremlerini hatırlayalım. θ-büzülmenin küme değerli versiyonunu Hançer ve diğ. [31] şu şekilde ifade ettiler.

2.2.5. Tanım

(X,d) bir metrik uzay $T : X \to CB(X)$ bir dönüşüm ve $\theta \in \Theta$ olsun. $H(Tx,Ty) > 0$ olmak üzere her $x, y \in X$ için,

$$\theta\big(H(Tx,Ty)\big) \leq \theta\big(d(x,y)\big)^{k}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $k \in (0,1)$ var ise T ye küme değerli bir θ-büzülme denir.

2.2.6. Teorem

(X,d) bir tam metrik uzay $T : X \to K(X)$ bir küme değerli θ-büzülme dönüşümü olsun. O zaman T bir sabit noktaya sahiptir [31].

Burada her $x \in X$ için Tx kompakttır. Bunun aslında çok güçlü bir şart olduğu ve teoremin ifadesinde yer alan $K(X)$ in yerine $CB(X)$ in alınamayacağı aynı çalışmada şu örnekle ifade edilmiştir.

Örnek

$X = [0,2]$ ve $d(x,y) = \begin{cases} 0 & , \ x = y \\ 1 + |x - y| & , \ x \neq y \end{cases}$

ile tanımlı d metriği ile (X, d) tam metrik uzaydır. $T : X \rightarrow CB(X)$

$Tx = \begin{cases} \mathbb{Q} & , \quad x \notin \mathbb{Q} \\ X \backslash \mathbb{Q} & , \quad x \in \mathbb{Q} \end{cases}$,

küme değerli dönüşümü ve

$\theta(t) = \begin{cases} e^{\sqrt{t}} & , \ t \leq 1 \\ 9 & , \ t > 1 \end{cases}$

ile tanımlı θ dönüşümünün ise $\theta \in \Theta$ olduğu görülür. Fakat T nin hiçbir sabit noktası yoktur.

Aynı çalışmada $K(X)$ yerine $CB(X)$ alınabilmesi için T dönüşümünün aşağıdaki (θ_4) koşulunu sağlaması gerektiğini göstermişler:

(θ_4) $infV > 0$ olacak şekildeki her $V \subset (0,1)$ için, $\theta(infV) = inf\theta(V)$

Ayrıca T, (θ_1) koşulu sağlasın. Buna göre (θ_4) koşulunun sağlanması için gerekli ve yeterli koşul T dönüşümü sağdan süreklidir. (θ_1)– (θ_4) koşullarını sağlayan fonksiyonların sınıfı Ξ ile gösterilecektir [31].

2.2.7 Teorem

(X, d) bir tam metrik uzay $T : X \rightarrow CB(X)$ küme değerli bir Ξ büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda T dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir [31].

Bu teoremlerin ifadesinden de anlaşıldığı üzere Nadler'in birer genelleştirmesidirler. Altun ve arkadaşları küme değerli θ-büzülmeler ile ilgili Feng Liu, Klim Wardowski ve Mizoguchi-Takahashi tipi sabit nokta teoremlerini ve bunların lineer olmayan formlarının da ifade ve ispatlarını vermişlerdir [32-36]. Literatürde θ-büzülmeler ile ilgili küme değerli pek çok sabit nokta sonucu elde edilmiştir.

3. M-METRİK UZAYLARDA θ- BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE UYGULAMALARI

Bu bölümde tezin orijinal kısmını oluşturan çalışmalara değineceğiz. Bu çalışmada M-metrik uzayda sabit nokta teorisine odaklanacağız. M-metrik uzaylar sıradan metrik uzayların bir genellemesidir ve uzaklık ve yakınsama gibi daha karmaşık kavramları ele alacak şekilde dizayn edilmiştir.

3.1. Tek Değerli θ-Büzülme Dönüşümleri İçin Sabit Nokta Teoremi ve Uygulaması

Bu bölümde öncelikle M-metrik uzaylarda tek değerli θ-büzülme dönüşümleri için sabit nokta teoremini ifade ve ispat ederek, lineer olmayan Hammerstein integral denklem uygulamasına yer verilmiştir [37]. Ayrıca elde edilen sonuçların hem Banach büzülme ilkesini hem de literatürde var olan çalışmaları farklı açıdan genişlettiğini örneklerle destekledik.

3.1.1. Teorem

(X, m) bir M-tam M-metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda $\theta \in \Theta$ ve $k \in (0,1)$ var öyle ki,

$$m(Tx, Ty) \neq 0 \Longrightarrow \theta(m(Tx, Ty)) \leq \theta(m(x, y))^k \tag{3.1}$$

eşitsizliği sağlanıyor olsun. Buna göre T bir tek sabit noktaya sahiptir [37].

İspat

Kabul edelim ki $x_0 \in X$ ve $\{x_n\}$ dizisini $x_n := T^n x_0 = Tx_{n-1}$ olarak tanımlayalım. Eğer $Tx_n = Tx_{n-1}$ ise dönüşümün sabit noktası vardır ve ispat tamamlanır. Kabul edelim ki dönüşümün sabit noktası olmasın. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $m(x_n, x_{n+1}) > 0$ olur.

$$1 < \theta(m(x_n, x_{n+1})) = \theta(m(Tx_{n-1}, Tx_n))$$
$$\leq (\theta(m(x_{n-1}, x_n))^k = (\theta(m(Tx_{n-2}, Tx_{n-1})))^k$$
$$\leq (\theta(m(x_{n-2}, x_{n-1}))^{k^2}$$
$$\vdots$$
$$\leq (\theta(m(x_0, Tx_0))^{k^n} \qquad (3.2)$$

ve böylece

$$\theta(m(x_n, Tx_n)) \leq (\theta(m(x_0, Tx_0))^{k^n}.$$

Eş. 3.2 de $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \theta(m(x_n, x_{n+1})) = 1$$

elde edilir . (θ_2) özelliğinden yararlanılarak

$$\lim_{n\to\infty} m(x_n, x_{n+1}) = 0 \qquad (3.3)$$

ve böylece

$$\lim_{n\to\infty} m(x_n, Tx_n) = 0 \ .$$

(θ_2) özelliğinden yararlanılarak $r \in (0,1)$ ve $\ell \in (0, \infty]$ var öyle ki,

$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta(m(x_n,x_{n+1}))-1}{(m(x_n,x_{n+1}))^r} = \ell$ dır.

1.Durum: Eğer $\ell < \infty$ ise. $\varepsilon = \ell/2 > 0$ olarak alınırsa $n \geq n_0$ olacak şekildeki her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left|\frac{\theta(m(x_n, x_{n+1})) - 1}{(m(x_n, x_{n+1}))^r} - \ell\right| \leq \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Her $n \geq n_0$ için

$$\frac{\theta\big(m(x_n, x_{n+1})\big) - 1}{(m(x_n, x_{n+1}))^r} \geq \ell - \varepsilon = \varepsilon$$

dır. O zaman, burada $A = 1/\varepsilon$ olmak üzere her $n \geq n_0$ için

$$n.[m(x_n, x_{n+1})]r \leq A.n.[\theta(m(x_n, x_{n+1})) - 1].$$

2.Durum: Eğer $\ell = \infty$ ise. $\varepsilon > 0$ herhangi bir keyfi bir pozitif sabit olsun. Limit tanımından $n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n \geq n_0$ için

$$\frac{\theta\big(m(x_n, x_{n+1})\big) - 1}{(m(x_n, x_{n+1}))^r} \geq \varepsilon$$

dır. O zaman, burada $A = 1/\varepsilon$ olmak üzere, her $n \geq n_0$ için

$$n.[m(x_n, x_{n+1})]r \leq A.n.[\theta(m(x_n, x_{n+1})) - 1]$$

dır. Böylece bütün durumlarda $A > 0$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n \geq n_0$ için

$$n.[m(x_n, x_{n+1})]^r \leq A.n.[\theta(m(x_n, x_{n+1})) - 1]$$

dır. Böylece Eş.3.2 ile birlikte düşünülürse her $n \geq n_0$ için

$$n.[m(x_n, x_{n+1})]^r \leq A.n.[\ (\theta(m(x_0, Tx_0))^{k^n} - 1]$$

dır. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa $\lim_{n\to\infty} n.[m(x_n, x_{n+1})]^r = 0$ dır. Böylece limit tanımından $n_1 \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n \geq n_1$ için

$$m(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{n^{1/r}} \qquad (3.4)$$

dır. $\{x_n\}$ dizisinin bir M-Cauchy dizisi olduğunu görmek istiyoruz. $m, n > 0$ olacak şekildeki her $m, n \in \mathbb{N}$ için $(m4)$ ve Eş.3.4 den

$$m(x_n, x_m) - m_{x_n x_m} \leq [m(x_n, x_{n+1}) - m_{x_n x_{n+1}}] + \cdots + [m(x_{m-1}, x_m) - m_{x_{m-1} x_m}]$$
$$\leq m(x_n, x_{n+1}) + m(x_{n+1}, x_{n+2}) \ldots + m(x_{m-1}, x_m)$$
$$\leq \sum_{i=n}^{m-1} m(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{i=n}^{\infty} m(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}}.$$

$\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}}$ serisinin yakınsaklığından $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$m(x_n, x_m) - m_{x_n x_m} \to 0$ elde edilir. Böylece $\{x_n\}$ dizisi (X, m) uzayında bir M-Cauchy dizisidir. (X, m) bir M-tam M-metrik uzay olduğu için $\{x_n\}$ dizisi bir $z \in X$ noktasına M-yakınsaktır. Yani Tanım 2.1.3 den $\lim_{n\to\infty} [m(x_n, z) - m_{x_n z}] = 0$ dır. Ayrıca $m(x_n, x_n) \neq 0$ olmak üzere,

$$1 < \theta(m(x_n, x_n)) = \theta(m(Tx_{n-1}, Tx_{n-1}))$$
$$\leq (\theta(m(x_{n-1}, x_{n-1}))^k = (\theta(m(Tx_{n-2}, Tx_{n-2})))^k$$
$$\leq (\theta(m(x_{n-2}, x_{n-2}))^{k^2}$$
$$\vdots$$
$$\leq (\theta(m(x_0, x_0))^{k^n} \qquad (3.5)$$

ve böylece

$$\theta(m(x_n, x_n)) \leq (\theta(m(x_0, x_0))^{k^n}.$$

Eş. 3.5 de $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \theta(m(x_n, x_n)) = 1$$

elde edilir . (θ_2) özelliğinden yararlanılarak

$$\lim_{n\to\infty} m(x_n, x_n) = 0 \qquad (3.6)$$

elde edilir ve $m_{x_n z} = min\{ m(x_n, x_n), m(z, z)\} \leq m(x_n, z)$ olup bu eşitsizlikte $n \to \infty$ limit alınırsa Eş.3.6 den $\lim_{n\to\infty} m_{x_n z} = 0$ olup $x_n \to z$ olduğu için $\lim_{n\to\infty} m(x_n, z) = 0$ buluruz.

Göstermek istiyoruz ki $Tx_n \to Tz$ (Yani $\lim_{n\to\infty}[\mathrm{m}(\mathrm{T}x_n, \mathrm{Tz}) - m_{T_{x_n}T_Z}] = 0$). Eş. 3.1 den

$$\theta(\mathrm{m}(Tx_n, \mathrm{Tz})) \leq (\theta(m(x_n, \mathrm{z}))^k < \theta(\mathrm{m}(x_n, \mathrm{z}))$$

olduğunu biliyoruz ve (θ_1) den

$$m(Tx_n, Tz) \leq m(x_n, z) \tag{3.7}$$

elde edilir. $(m2)$ ve Eş.3.7 den

$$m_{T_{x_n}T_z} = min\{\, m(Tx_n, Tx_n), m(Tz, Tz)\} \leq m(Tx_n, Tz)\,) \leq m(x_n, z).$$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}\left[m(\mathrm{T}x_n, \mathrm{Tz}) - m_{T_{x_n}T_Z}\right]$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} m(Tx_n, Tz) \leq \lim_{n\to\infty} m(x_n, \mathrm{z})$$

$$= 0.$$

Yani $Tx_n \to Tz$ elde edilir. Teoremin ifadesinde yer alan büzülme koşulu (3.1), (θ_1) ve Eş.3.3 birlikte düşünülürse $m(Tz, Tz) \leq m(z, z)$ ve $m(x_n, Tx_n) \to 0$ elde edilir. $m_{x_nTx_n} \to 0$ olduğu için Lemma 2.1.4 den $m(z, Tz) = m_{zTz} = m(Tz, Tz)$ elde edilir. Sonuç olarak Lemma 2.1.4 ve $x_n = Tx_{n-1} \to z$ olduğu için

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mathrm{m}(x_n, \mathrm{T}x_n) - m_{x_nT_{x_n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathrm{m}(x_n, x_{n-1}) - m_{x_nT_{x_n}}$$

$$= \; m(z, z) - m_{zT_z}$$

dir ve böylece $m(z, z) = m_{zTz}$ bulunur. $m(z, Tz) = m_{zTz} = m(Tz, Tz)$ olduğu için $(m1)$ den $z = Tz$ elde edilir. Şimdi bu sabit noktanın tekliğini görelim. Kabul edelim ki T nin z den farklı sabit noktası u olsun. Yani,

$$Tz = z \neq u = Tu$$

Kabulden dolayı $\theta(m(z, u)) = \theta(m(Tz, Tu)) \leq (\theta\big(m(z, u)\big)^k < \theta(m(z, u))$, $k \in (0,1)$ olup bu bir çelişkidir. z , T nin tek sabit noktasıdır.

Şimdi M-metrikte θ-büzülmenin Banach büzülmenin bir genelleşmişi olduğunu gösterelim.

Örnek

$S_1 = 1, S_2 = 1 + 5, \cdots, S_n = 1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = n(2n - 1), \quad \ldots \quad .$

$X = \{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi üzerinde M-metriği $m(x, y) = \frac{x+y}{2}$ şeklinde tanımlanırsa, bu durumda (X, m) bir M-tam M-metrik uzaydır.

$T : X \to X$ dönüşümünü $T(S_1) = S_1$, $T(S_n) = S_{n-1}$ şeklinde tanımlayalım. Açıktır ki T bir Banach büzülme değildir. Gerçekten,

$\lim_{n\to\infty} \frac{m(T(S_n),T(S_1))}{m(S_n,S_1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(S_{n-1}+1)}{2}}{\frac{S_n+1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-5n+4}{2n^2-n+1} = 1$ dır.

Şimdi T nin bir θ-büzülme olduğunu gösterelim $\theta: (0, \infty) \to (1, \infty)$ dönüşümünü

$\theta(t) \coloneqq e^{\sqrt{te^t}}$ olarak tanımlayalım, $\theta \in \Theta$ dır. İki durumda inceleyelim:

1. *Durum*: $n = 1 \; ve \; m > 2$ iken

$$\frac{m(T(S_1),T(S_m)e^{(m(T(S_1),T(S_m))-m(S_1,S_m))}}{m(S_1,S_m)} = \frac{2m^2-5m+4}{2m^2-m+1} e^{-2m+3/2} \leq e^{-1} .$$

2. *Durum*: $m > n > 1$ iken

$$\frac{m(T(S_n),T(S_m)e^{(m(T(S_n),T(S_m))-m(S_n,S_m))}}{m(S_n,S_m)} = \frac{2m^2-5m+3+2n^2-5n+3}{2m^2-m+2n^2-n} e^{-2(n+m)+3} \leq e^{-1} .$$

Sonuç olarak

$$m(T(S_n), T(S_m)) \neq 0 \Rightarrow \frac{m(T(S_n), T(S_m)e^{m(T(S_n),T(S_m))-m(S_n,S_m)}}{m(S_n, S_m)} \leq k^2$$

ve böylece bütün durumlarda

$$m(T(S_n),T(S_m)) \neq 0 \Rightarrow e^{\sqrt{m(T(S_n),T(S_m))e^{m(T(S_n),T(S_m))}}} \leq e^{k\sqrt{m(S_n,S_m)e^{m(S_n),S_m)}}}$$

$k = e^{-1/2}$ için Eş.3.1 sağlanır. Buna göre Teorem 3.1 den T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır [37].

Şimdi M-metrikte tek değerli θ-büzülme dönüşümleri için verdiğimiz teoremin bir uygulaması olarak lineer olayan Hammerstein integral denklemleminin çözümünün varlık ve tekliğini göstereceğiz. Lineer olmayan Hammerstein integral denklemi:

$x(t)$ reel değerli bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere;

$$x(t) := h(t) + \int_0^t K(t,s)f(s,x(s))\,ds. \tag{3.8}$$

$X = C([0,E])$ uzayı $[0,E]$ üzerinde tanımlı reel değerli bütün sürekli fonksiyonların uzayı olsun. $C([0,E])$ uzayı üzerinde tanımlı

$$d_m(\text{x,y}) = |x-y| + min\{x,y\} = \max_{t\in[0,E]}|x(t)-y(t)| + \min_{t\in[0,E]}\{x(t),y(t)\},$$

metriği ile birlikte bir M- tam M-metrik uzaydır.

$T: X \to X$ dönüşümünü şu şekilde tanımlayalım:

$$Tx(t) := h(t) + \int_0^t K(t,s)f(s,x(s))\,ds, \quad \forall t \in [0,E] \tag{3.9}$$

x$\in X$ olsun ve $\beta \geq 1$ keyfi bir sabit olmak üzere

$$m(x,y) = \max_{t\in[0,E]}\{|x(t)-y(t)|\,e^{-\beta t}\} + \min_{t\in[0,E]}\{\{x(t),y(t)\}e^{-\beta t}\}$$

olsun. m metriği bir M-metriktir ve X uzayı bu metrikle birlikte bir M-tam M-metrik uzaydır. Ayrıca Tanım 2.1.7 dikkate alınırsa m ve d_m metrikleri M-denk metriklerdir. Buna göre aynı τ_m topolojisini üretirler.

Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim:

(A1) $f:[0,E]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon , $h\in X$ ve $K\in C([0,E]\times[0,E])$, öyleki

$K(t,s)\geq 0$;

(A2) $f(t,.):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $t\in[0,E]$ için artan bir fonksiyon;

(A3) Her $x,y\in X, t\in[0,E]$ için

$|f(t,x)-f(t,y)|\leq\frac{\beta}{2}e^{-\beta}(|x-y|)$ ve

$$|f(t,x)-f(t,y)|\leq\frac{\beta}{2}e^{-\beta}(\min\{x,y\})$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde $\beta\in[1,\infty)$ vardır.

(A4) $\max\limits_{t,s\in[0,E]}|K(t,s)|\leq 1$.

3.1.2. Teorem

$X=C([0,E])$ uzayı , (X,m) uzayı M-tam M-metrik uzay, $T,f,K(t,s)$ için yukarıda tanımlandığı gibi dönüşümler olmak üzere (A1)-(A4) koşulları sağlansın. Buna göre (3.8) ile tanımlı lineer olmayan Hammerstein integral denklemi bir tek $x^*\in C([0,E])$ çözümüne sahiptir .

İspat

(3.9) de tanımladığımız $T:X\to X$ dönüşümünün bir θ-büzülme olduğunu gösterelim:

Her bir $x,y\in X,\ x\leq y\ ve\ \ t\in[0,E]$ için (A2) ve (A3) koşullarından,

$$|Tx(t)-Ty(t)|=\left|\int_0^t K(t,s)(f(s,x(s))-f(s,y(s)))ds\right|$$
$$\leq\int_0^t|K(t,s)||f(s,x(s))-f(s,y(s))|ds$$

$$\leq \int_0^t |f(s,x(s)) - f(s,y(s))| ds$$

$$\leq \int_0^t \frac{\beta}{2} e^{-\beta} (|x(s) - y(s)| + min\{x(s), y(s)\})\, ds$$

$$= \frac{\beta}{2} e^{-\beta} \int_0^t e^{\beta s} (|x(s) - y(s)| + min\{x(s), y(s)\}) e^{-\beta s} ds$$

$$\leq \frac{\beta}{2} e^{-\beta} \int_0^t e^{\beta s} (\max_{s\in[0,E]} |x(s) - y(s)|\, e^{-\beta s} + \min_{s\in[0,E]} \{x(s), y(s)\} e^{-\beta s})\, ds$$

$$\leq \frac{\beta}{2} e^{-\beta} m(x,y) \int_0^t e^{\beta s} ds$$

$$= \frac{\beta}{2} e^{-\beta} m(\mathrm{x},\mathrm{y}) \left(\frac{e^{\beta t} - 1}{\beta}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2} e^{-\beta(1-t)} m(\mathrm{x},\mathrm{y})$$

elde edilir. Bu da gösterir ki ;

$$|Tx(t) - Ty(t)| e^{-\beta t} \leq \frac{1}{2} e^{-\beta}\, m(\mathrm{x},\mathrm{y})$$

dir. Her iki tarafın $t \in [0, E]$ üzerinden maksimumu alınırsa,

$$\max_{t\in[0,E]} |Tx(t) - Ty(t)| e^{-\beta t} \leq \frac{1}{2} e^{-\beta}\, m(\mathrm{x},\mathrm{y})$$

elde edilir. $x(t) \leq y(t)$ olduğu için (A2) de f artan olduğu için $Tx(t) \leq Ty(t)$ olur ki

$$\min_{t\in[0,E]} \{Tx(t), Ty(t)\} = Tx(t)$$

dir. M- metriğin tanımlanışından,

$$\min_{t\in[0,E]} \{Tx(t), Ty(t)\} e^{-\beta t} \leq \frac{1}{2} e^{-\beta} m(x,y)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$m(Tx,Ty) = \max_{t\in[0,E]}\{|Tx(t) - Ty(t)|\, e^{-\beta t}\} + \min_{t\in[0,E]}\{Tx(t)e^{-\beta t}, Ty(t)e^{-\beta t}\}$$
$$\leq e^{-\beta}\, m(\mathrm{x},\mathrm{y}).$$

Şimdi $\theta(t) = e^{\sqrt{t}} \in \Theta$, $t > 0$, olarak alınırsa, her $x, y \in X$ için,

$$e^{\sqrt{m(\mathrm{Tx},\mathrm{Ty})}} \leq e^{\sqrt{e^{-\beta} m(\mathrm{x},\mathrm{y})}} = [e^{\sqrt{m(\mathrm{x},\mathrm{y})}}]^k$$

sağlanır, burada $k = \sqrt{e^{-\beta}}$ ve $\beta \geq 1$ olduğu için $k \in (0,1)$ dir. Bu durumda T bir θ-büzülmedir ve Teorem 3.1.1 in bütün koşullarını sağlar ve böylece T bir tek $x^* \in X$ sabit noktasına sahiptir, buna göre de eşitlik (3.8) ile ifade edilen lineer olmayan Hammerstein integral denklemi bir tek $x^* \in C([0,E])$ çözümüne sahiptir.

3.2. M-metrik Uzaylarda Feng Liu Tipi θ-Büzülmeler İçin Sabit Nokta Teoremleri

Asadi ve arkadaşları M-metrik uzay tanımı vermişler ve bu uzay üzerinde tek değerli dönüşümler için sabit nokta teoremlerini ispatlamışlardır [10]. Ardından Altun ve arkadaşları M-metrik uzaylar üzerindeki topolojik yapıları ortaya koymuşlar ve Feng-Liu tip küme değerli dönüşümlerde önemli bazı sabit nokta sonuçları vermişlerdir [12, 26]. Bu kısımda ilk olarak M-metrik uzaylarda küme değerli Feng-Liu tip θ-büzülmeler için bazı sabit nokta teoremleri elde edilerek ardınadan bu teoremlerin birbiri ile ilişkisine değinildi.

İlk olarak Feng Liu'nin Pompei Hausdorrf metriğini kullanmadan küme değerli dönüşümler için verdiği sabit nokta teoremini hatırlayalım:

3.2.1. Teorem

(X,d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to C(X)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. Her $x \in X$ için öyle bir $y \in I_b^x = \{y \in Tx: bd(x,y) \leq d(x,Tx)\}$ ve $0 < c < b < 1$ var öyleki aşağıdaki eşitsizlik sağlanıyor olsun:

$$d(y,Ty) \leq cd(x,y).$$

Eğer $f(x) = d(x, Tx)$ fonksiyonu alt yarı sürekli ise T dönüşümü X üzerinde bir sabit noktaya sahiptir [18].

Şimdi M-metrik uzaylarda Feng-Liu tip küme değerli dönüşümler için verilen sabit nokta teoremlerini hatırlayalım:

3.2.2. Teorem

(X, m) bir M-tam M-metrik uzay ve $T: X \to C_m(X)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. Bu durumda $m(x, Tx) > 0$ olmak üzere her $x \in X$ için öyle bir $\alpha, b, c \in (0,1)$ ve $y \in T_b^x(m)$ var öyle ki,

$$m(y, Ty) \leq cm(x, y)$$

eşitsizliği sağlanıyor olsun. Eğer $c < b \; ve \;\; f(x) = m(x, Tx)$ fonksiyonu τ_m topolojisine göre alt yarı sürekli ise T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir [26].

Bu teoremdeki küme değerli dönüşümü $C_m(X)$ değerli yerine $C_s(X)$ ve $f(x) = m(x, Tx)$ fonksiyonunun alt yarı sürekliliğinin τ_m topolojisine göre değil de τ_s topolojisine göre olduğu kabul edilerek yeni bir sabit nokta teoremi daha verilmiştir. Bu teoremin $C_s(X)$ ailesi $C_m(X)$ ailesinden daha geniş olmasından dolayı önemli olduğu vurgulanmıştır.

3.2.3. Tanım

(X, m) M-metrik uzayında her M-Cauchy dizisi bir $x \in X$ noktasına τ_s dizisel topolojisine göre yakınsak ise bu uzaya S-tamdır denir [26].

3.2.4. Teorem

(X, m) bir S-tam M-metrik uzay ve $T: X \to C_s(X)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. Buna göre $m(x, Tx) > 0$ olmak üzere her $x \in X$ için öyle bir $\alpha, b, c \in (0,1)$ ve

$y \in T_b^x(m)$ var öyle ki,
$m(y, Ty) \leq cm(x, y)$

eşitsizliği sağlanıyor olsun. Eğer $c < b \; ve \;\; f(x) = m(x, Tx)$ fonksiyonu τ_s topolojisine göre alt yarı sürekli ise T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir [26].

Şimdi bu vereceğimiz teorem ile Jeli ve Samet tarafından tanımlanan θ-büzülme kavramıyla, küme değerli dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri M-metrik uzaylarda ifade edilerek hem Banach büzülme ilkesini hem de literatürde yer alan çalışmaları başka bir bakış açısıyla genişleteceğiz. Daha önceki çalışmalarda θ-büzülme tanımı ve sabit nokta teoremlerinin ifadesini verdiğimiz için teoremimizin ifade ve ispatına geçmeden önce şu sonuçları hatırlayalım:

Θ ailesine (θ_4) koşulunun eklenmesi ile yeni bir θ-dönüşümler ailesi oluşturulup bunlar ile ilgili küme değerli sabit nokta teoremleri daha önce elde edilmiştir.

(θ_4) $inf\; V > 0$ olacak şekildeki her $V \subseteq X$ için $\theta(infV) = inf\; \theta(V)$ dır.

Bundan sonra (θ_1) - (θ_4) koşullarını sağlayan bütün $\theta: (0, \infty) \to (1, \infty)$ fonksiyonlarının ailesini Ξ ile göstereceğiz.

Not: θ dönüşümü (θ_1) şartını sağlamak üzere, (θ_4) koşulunun sağlanması için gerek ve yeter koşul θ dönüşümünün sağdan sürekli olmasıdır.

$T: X \to P(X)$ dönüşümünü alalım ve $\theta \in \Theta$ ve $b \in (0,1]$ olsun. $\Theta_b^x(m) \subseteq X$ kümesini şu şekilde tanımlayalım: $x \in X$, $m(x, Tx) > 0$ olmak üzere;

$$\Theta_b^x(m) = \left\{ y \in Tx: \theta\big(m(x,y)\big)^b \leq \theta\big(m(x,Tx)\big) \right\}.$$

Uyarı

$b \leq c$ ise $\exists\; x \in X$ için $\Theta_c^x(m) \subseteq \Theta_b^x(m)$ dir.

Şimdi $\Theta_b^x(m)$ ailesi için şu üç durumu inceleyelim:

1.Durum: $T: X \to K_m(X)$ küme değerli bir dönüşüm ve $x \in X$, $m(x, Tx) > 0$ olmak üzere $\Theta_1^x(m) \neq \emptyset$ dır. Gerçekten Tx kompakt olduğu için her $x \in X$ için $m(x, Tx) =$

$m(x,y)$ olacak şekilde $x \neq y$ olmak üzere $y \in Tx$ vardır. Buna göre $m(x,Tx) > 0$ olmak üzere her $x \in X$ için $\theta(m(x,Tx)) = \theta(m(x,y))$ olur. Böylece $\Theta_1^x(m) \neq \emptyset$ dır.

2.Durum : $T: X \to C_m(X)$ küme değerli bir dönüşüm ve $x \in X$, $m(x,Tx) > 0$ olmak üzere en az bir $x \in X \; ve \; b \in (0,1)$ için $\Theta_b^x(m) = \emptyset$ olabilir. Örneğin;

$X = \{0\} \cup (1,2)$ kümesi üzerinde tanımlı M-metrik $m(x,y) = \frac{x+y}{2}$ olsun. Bu durumda (X,m) bir M-tam M-metrik uzay olur. Şimdi $T: X \to C_m(X)$ ve $\theta: (0,\infty) \to (1,\infty)$ dönüşümlerini

$$Tx = \begin{cases} \{0\} & , \quad x \in (1,2) \\ (1,2) & , \quad x = 0 \end{cases},$$

$$\theta(t) = \begin{cases} e^{\sqrt{t}} & , \quad t \leq \frac{1}{2} \\ 16t & , \quad t > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

olacak şekilde tanımlayalım. Bu durumda $x = 0$ ve $b = \frac{1}{2}$ için

$$\Theta_{\frac{1}{2}}^0(m) = \{y \in T0: \theta\big(m(0,y)\big)^{\frac{1}{2}} \leq \theta\big(m(0,T0)\big)\}$$
$$= \{y \in (1,2): \theta\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \theta\big(m(0,T0)\big)\}$$
$$= \{y \in (1,2): \theta\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \theta\left(\frac{1}{2}\right)\}$$
$$= \{y \in (1,2): (16y)^{\frac{1}{2}} \leq e^{\sqrt{\frac{1}{2}}}\}$$
$$= \emptyset$$

3.Durum: $T: X \to C_m(X)$ küme değerli bir dönüşüm ve $x \in X$, $m(x,Tx) > 0$ olmak üzere her $b \in (0,1)$ için $\theta \in \Xi$ olmak üzere $\Theta_b^x(m) \neq \emptyset$ dır. Gerçekten (θ_4) özelliğini kullanarak

$$\Theta_b^x(m) = \{y \in Tx: \theta\big(m(x,y)\big)^b \leq \theta\big(m(x,Tx)\big)\}$$
$$= \{y \in Tx: \theta\big(m(x,y)\big)^b \leq \theta\big(inf\{m(x,y): y \in Tx\}\big)\}$$
$$= \{y \in Tx: \theta\big(m(x,y)\big)^b \leq inf\; \theta\big(m(x,y): y \in Tx\}\big)$$
$$\neq \emptyset.$$

$C_m(X)$ değerli küme değerli dönüşümler için sabit nokta teoreminin verilebilmesi için daha önce bahsettiğimiz Ξ ailesini göz önüne almalıyız. Şimdi yukarıdaki sonuçları dikkate alarak vereceğimiz yeni sabit nokta teoremlerimizi ifade ve ispat edelim:

3.2.5. Teorem

(X, m) bir M-tam M-metrik uzay ve $T: X \to C_m(X)$ küme değerli bir dönüşüm ve θ∈ Ξ olsun. Buna göre $m(x, Tx) > 0$ olmak üzere her $x \in X$ için öyle bir $k \in (0,1)$ var öyle ki $y \in \Theta_b^x(m)$ ve $b \in (0,1)$ için

$$\theta(m(y, Ty)) \leq \theta(m(x, y))^k \tag{3.10}$$

eşitsizliği sağlanıyor olsun. Eğer $k < b$ ve $f(x) = m(x, Tx)$ dönüşümü τ_m topolojisine göre alt yarı sürekli ise T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir [38].

İspat

Kabul edelim ki T dönüşümünün sabit noktası olmasın. Buna göre her $x \in X$ için $m(x, Tx) > 0$ dır. Gerçekten $m(x, Tx) = 0$ ise böylece $x \in \overline{T^m x} = Tx$ olduğu için $x \in Tx$ dir. θ∈ Ξ olduğundan $m(x, Tx) > 0$ olacak şekildeki her $x \in X$ için ve her $b \in (0,1)$ için $\Theta_b^x(m) \neq \emptyset$ dır. Şimdi $x_0 \in X$ başlangıç noktası olsun. O zaman öyle $x_1 \in \Theta_b^{x_0}(m)$ var öyle ki aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\Theta(m(x_1, Tx_1)) \leq (\Theta(m(x_0, x_1)))^k$$

ve $x_2 \in X$ için $x_2 \in \Theta_b^{x_1}(m)$ var öyle ki aşagıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\Theta(m(x_2, Tx_2)) \leq (\Theta(m(x_1, x_2)))^k$$

elde edilir. Benzer şekilde devam edilirse her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in \Theta_b^{x_n}(m)$ ve

$$\theta(m(x_{n+1}, Tx_{n+1})) \leq (\theta(m(x_n, x_{n+1})))^k \tag{3.11}$$

olacak şekilde bir $\{x_n\}$ dizisi vardır. $\{x_n\}$ dizisinin M-Cauchy dizisi olduğunu görmek

istiyoruz. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in \Theta_b^{x_n}(m)$ olduğu için

$$(\theta(m(x_n, x_{n+1})))^b \leq \theta(m(x_n, Tx_n) \tag{3.12}$$

Eş.3.11 ve Eş.3.12 birlikte değerlendirildiğinde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\theta(m(x_{n+1}, Tx_{n+1})) \leq (\theta(m(x_n, Tx_n)))^{\frac{k}{b}} \tag{3.13}$$

$$\theta(m(x_{n+1}, x_{n+2})) \leq (\theta(m(x_n, x_{n+1})))^{\frac{k}{b}}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu şekilde devam edilerek her $n \in \mathbb{N}$ için

$$1 < \theta(m(x_n, x_{n+1})) \leq (\theta(m(x_0, x_1)))^{(\frac{k}{b})^n} \tag{3.14}$$

$$1 < \theta(m(x_n, Tx_n)) \leq (\theta(m(x_0, Tx_0)))^{(\frac{k}{b})^n}$$

elde edilir. Eş.3.14 de $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \theta(m(x_n, x_{n+1})) = 1$$

olur. (θ_2) özelliğinden

$$\lim_{n\to\infty} m(x_n, x_{n+1}) = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\lim_{n\to\infty} m(x_n, Tx_n) = 0$$

bulunur. (θ_3) özelliğinden yararlanılarak $r \in (0,1)$ ve $\ell \in (0, \infty]$ var öyle ki,

$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta(m(x_n, x_{n+1}))-1}{(m(x_n, x_{n+1}))^r} = \ell$ dır.

1.Durum: Eğer $\ell < \infty$ ise. $\varepsilon = \ell/2 > 0$ olarak alınırsa $n \geq n_0$ olacak şekildeki her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left| \frac{\theta(m(x_n, x_{n+1})) - 1}{(m(x_n, x_{n+1}))^r} - \ell \right| \leq \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Her $n \geq n_0$ için

$$\frac{\theta(m(x_n, x_{n+1})) - 1}{(m(x_n, x_{n+1}))^r} \geq \ell - \varepsilon = \varepsilon$$

dır. O zaman, burada $A = 1/\varepsilon$ olmak üzere, Her $n \geq n_0$ için

$n.[m(x_n, x_{n+1})]r \leq A.n.[\theta(m(x_n, x_{n+1})) - 1]$ dır.

2.Durum: Eğer $\ell = \infty$ ise. $\varepsilon > 0$ herhangi bir keyfi pozitif sabit olsun. Limit tanımından

$n_0 \in \mathbb{N}$ var öyleki her $n \geq n_0$ için

$$\frac{\theta(m(x_n, x_{n+1})) - 1}{(m(x_n, x_{n+1}))^r} \geq \varepsilon$$

dır. O zaman, burada $A = 1/\varepsilon$ olmak üzere, her $n \geq n_0$ için

$n.[m(x_n, x_{n+1})]r \leq A.n.[\theta(m(x_n, x_{n+1})) - 1]$

dır. Böylece bütün durumlarda $A > 0$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n \geq n_0$ için

$n.[m(x_n, x_{n+1})]^r \leq A.n.[\theta(m(x_n, x_{n+1})) - 1]$

dır. Eş. 3.14 uygulanırsa her $n \geq n_0$ için

$n.[m(x_n, x_{n+1})]^r \leq A.n.[\ (\theta(m(x_0, Tx_0))^{(\frac{k}{b})^n} - 1]$

dır. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} n.[m(x_n, x_{n+1})]^r = 0$$

dır. Böylece limit tanımından $n_1 \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n \geq n_1$ için

$$m(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{n^{1/r}} \tag{3.15}$$

dır. $\{x_n\}$ dizisinin bir M-Cauchy dizisi olduğunu görmek için; $m, n > 0$ olacak şekildeki her $m, n \in \mathbb{N}$ için $(m4)$ ve Eş. 3.15 birlikte kulanılırsa,

$$m(x_n, x_m) - m_{x_n x_m} \leq [m(x_n, x_{n+1}) - m_{x_n x_{n+1}}] + \cdots + [m(x_{m-1}, x_m) - m_{x_{m-1} x_m}]$$
$$\leq m(x_n, x_{n+1}) + m(x_{n+1}, x_{n+2}) \ldots + m(x_{m-1}, x_m)$$
$$\leq \sum_{i=n}^{m-1} m(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{i=n}^{\infty} m(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}} \quad ,$$

eşitsizliğini elde ederiz. $\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}}$ serisinin yakınsaklığından $n \to \infty$ için limit alınırsa, $m(x_n, x_m) - m_{x_n x_m} \to 0$ elde edilir. Eş. 3.11 ve Eş. 3.15 eşitsizlikleri göz önünde bulundurulduğunda görülecektir ki $\lim_{n\to\infty} m(x_n, x_n) = 0$ olup $n \to \infty$ için $m(x_n, x_m) \to 0$ olur. (X, m) bir M-tam M-metrik uzay olduğundan $\{x_n\}$ dizisi M-yakınsaktır ve $\lim_{n,m\to\infty} m(x_n, x_m) = m(z, z)$ olacak şekilde bir $z \in X$ elemanı vardır. Ayrıca Eş.3.15 ve (θ_2) özelliğinden yararlanılarak $\lim_{n\to\infty} m(x_n, Tx_n) = 0$ elde edilir.

Hipotezden $f(x) = m(x, Tx)$ dönüşümü τ_m topolojisine göre alt yarı sürekli ve $\{x_n\}$ dizisi z noktasına M-yakınsak olduğu için,

$$0 < m(z, Tz) = f(z) \leq \lim_{n\to\infty} inf\ f(x_n) = \lim_{n\to\infty} inf\ m(x_n, Tx_n) = 0$$

bulunur ve bu bir çelişkidir. Dolayısıyla kabul yanlış olup T dönüşümü X üzerinde bir sabit noktaya sahiptir.

Teorem 3.2.5 in Teorem 3.2.1 in (hatta Teorem 3.2.2 nin) bir genelleşmişi olduğunu aşağıdaki örnekle görebiliriz.

Örnek

$X = \{0\} \cup \{1/n : n \geq 3, n \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere eğer $m: X \times X \to [0, \infty)$ dönüşümü

her $x, y \in X$ için $m(x, y) = \frac{x+y}{2}$ şeklinde tanımlanırsa, bu durumda (X, m) bir M-tam

M-metrik uzaydır. $T: X \to C_m(X)$ küme değerli dönüşümünü,

$$Tx = \begin{cases} \left\{\frac{1}{2(n+1)}\right\} & , \quad x = \frac{1}{n} \\ \{0\} & , \quad x = 0 \end{cases},$$

ve $\theta: (0, \infty) \to (1, \infty)$ dönüşümü

$$\theta(t) = \begin{cases} e^{\sqrt{t}}, & t \leq \frac{5}{12} \\ 12t, & t > \frac{5}{12} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Açıktır ki $\theta \in \Theta$ ve

$$f(x) = m(x, Tx) = \begin{cases} \frac{2n+1}{2n^2+2n} & , \quad x = \frac{1}{n} \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases},$$

dönüşümü τ_m topolojisine göre alt yarı süreklidir.

$x = \frac{1}{n}$, için $m(x, Tx) > 0$ dır. Dolayısıyla $Tx = \left\{\frac{1}{2(n+1)}\right\}$ olduğundan $y = \frac{1}{n+1}$, $y \in T_b^x(m)$ alalım. Buna göre kabul edelim ki $0 < c < b < 1$ olacak şekilde bir $b, c \in (0,1)$ için Teorem 3.2.1 in büzülme koşulu sağlansın. Bu durumda $n > 1$ için,

$$m\left(\frac{1}{n+1}, T\frac{1}{n+1}\right) \leq c.m\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right) \Leftrightarrow m\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{2(n+2)}\right) \leq c.m\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}\right)/2 \leq c.\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)/2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}} \leq c$$

ve $n \to \infty$ için limit alınırsa $1 \leq c$ olup bu bir çelişkidir. Dolayısıyla bu örneğe Teorem 3.2.1 uygulanamaz. Şimdi Teorem 3.2.5 in bütün hipotezlerinin sağlandığını ve dolayısıyla bir sabit noktaya sahip olduğunu gösterelim. Teoremin ifadesinde yer alan büzülme koşulunun $m(x,Tx) > 0$ olacak şekildeki her $x \in X$ ve $k < b = 0.95$ için sağlandığını göstermeliyiz. Gerçekten, $x = \frac{1}{n}, \quad n \geq 2$ için $y = \frac{1}{n+1} \in \Theta_b^x(m)$ alırsak

$$\theta\big(m(y,Ty)\big) \leq \theta\big(m(x,y)\big)^k \Leftrightarrow \theta\left(m\left(\frac{1}{n+1}, T\frac{1}{n+1}\right)\right) \leq \theta\left(m\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right)\right)^k$$

$$\Leftrightarrow \theta\left(m\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{2(n+2)}\right)\right) \leq \theta\left(m\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right)\right)^k$$

$$\Leftrightarrow \theta\left(\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}\right)/2\right) \leq \theta\left(\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)/2\right)^k$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{\sqrt{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+2)}}}\right) \leq \left(\left(e^{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}}\right)\right)^k$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+2)}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}} \leq k.$$

Eşitsizliğin sol tarafı en büyük değerini $n = 2$ iken 0,805 olarak aldığı n büyüdükçe azaldığı görülmektedir. Sonuç olarak $k < b = 0.95 < 1$ olup Teorem 3.2.5 ün bütün koşullarını sağlanır ve gerçekten T dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir.

Teorem 3.2.5 deki $C_m(X)$ yerine $K_m(X)$ alabilmek için θ üzerindeki (θ_4) koşulunu kaldıracağız ve 1.Durum daki gibi $b = 1$ olarak alacağız. Şimdi teoremin ifade ve ispatını verelim.

3.2.6. Teorem

(X,m) bir M-tam M-metrik uzay ve $T: X \to K_m(X)$ küme değerli bir dönüşüm ve $\theta \in \Theta$ olsun. Buna göre $m(x,Tx) > 0$ olmak üzere her $x \in X$ için öyle bir $k \in (0,1)$ var öyle ki $y \in \Theta_1^x(m)$ ve

$\theta(m(y,Ty)) \leq \theta(m(x,y))^k$

eşitsizliği sağlanıyor olsun. Eğer $f(x) = m(x,Tx)$ dönüşümü τ_m topolojisine göre alt yarı sürekli ise T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat

Kabul edelim ki T dönüşümünün bir sabit noktası olmasın. Buna göre her $x \in X$ için $m(x,Tx) > 0$ dır. Gerçekten Tx kompakt olduğu için her $x \in X$ için $m(x,Tx) = m(x,y)$ olacak şekilde $x \neq y$ olmak üzere $y \in Tx$ vardır. Buna göre $m(x,Tx) > 0$ olacak şekildeki her $x \in X$ için $\theta(m(x,Tx)) = \theta(m(x,y))$ olur. Böylece $y \in \Theta_1^x(m)$ dir. Yani $\Theta_1^x(m) \neq \emptyset$ dır. İspatın devamı Teorem 3.2.5 in ispatında yer aldığı gibi $Tz \in K_m(X)$ olduğu göz önüne alınarak tamamlanır.

Şimdi Teorem 3.2.5 de T dönüşümünün $C_m(X)$ değerli yerine $C_s(X)$ ve $f(x) = m(x,Tx)$ fonksiyonunun τ_m topolojisine göre alt yarı sürekli olması yerine τ_s topolojisine göre alt yarı sürekli olduğunu kabul ederek yeni bir sabit nokta teoremi daha verelim. $C_s(X)$ ailesinin $C_m(X)$ ailesinden daha geniş olduğu biliniyor. Yani $\tau_m \subseteq \tau_s$ olduğundan $C_m(X) \subseteq C_s(X)$ dir.

3.2.7. Teorem

(X,m) bir S-tam M-metrik uzay ve $T: X \to C_s(X)$ küme değerli bir dönüşüm ve θ∈ Ξ olsun. Buna göre $m(x,Tx) > 0$ olmak üzere her $x \in X$ için öyle bir $k \in (0,1)$ var öyle ki $y \in \Theta_b^x(m)$ ve $b \in (0,1)$

$\theta(m(y,Ty)) \leq \theta(m(x,y))^k$

eşitsizliği sağlanıyor olsun. Eğer $k < b \; ve \; f(x) = m(x,Tx)$ dönüşümü τ_s topolojisine göre alt yarı sürekli ise T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat

Teorem 3.2.5 de yaptığımız gibi X de bir $\{x_n\}$ S-Cauchy dizisi var olduğu gösterilebilir. Teoremin ifadesinde yer aldığı gibi (X,m) nin bir S-tam M-metrik uzay olmasından τ_s

topolojisine göre $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak olacağı bir $z \in X$ vardır. İspatın kalan kısmı Teorem 3.2.5 in ispatında olduğu gibi $\lim_{n\to\infty} m(x_n, Tx_n) = 0$ olduğu gösterilerek, hipotezden $f(x) = m(x, Tx)$ dönüşümünün τ_s topolojisine göre alt yarı sürekli ve $\{x_n\}$ dizisinin z noktasına S-yakınsak olduğu dikkate alınarak tamamlanır.

Şimdi θ üzerindeki (θ_4) koşulunu kaldırarak, $C_m(X)$ ailesinden bağımsız X in aşağıda tanımlayacağımız özelliklere sahip bir $M(X)$ ailesi için $M(X)$ değerli dönüşümler için yeni sabit nokta sonuçlarını verelim [38].

(X, m) bir M-metrik uzay olsun. $P_m(X)$, M-metriğinde X in bütün alt kümelerinin ailesi olmak üzere aşağıdaki özelliklere sahip X in bütün M alt kümelerinin ailesini $M(X)$ ile gösterelim:

Her $x \in X$ için,

$$\begin{cases} m(x, M) = 0 \Rightarrow x \in M \\ \qquad\qquad ve \\ m(x, M) > 0 \Longrightarrow \exists a_x \in M, m(x, a_x) = m(x, M). \end{cases}$$

(X, m) bir M-metrik uzay olmak üzere, $M(X) \subseteq C_s(X)$ iken $M(X)$ ile $C_m(X)$ arasında ise bir ilişki yoktur. Bu gerçeği örnekler ile gösterelim:

Uyarı 1

(X, m) bir M-metrik uzay olmak üzere, $M \in M(X)$ olsun. $M \in C_s(X)$ olduğunu gösterelim. Bunun için $M^c \in \tau_s$ olduğunu görelim. Yani M^c kümesinin dizisel açık olduğunu gösterelim. Bu durumda keyfi bir $x \in M^c$ ve bu nokta için $\lim_{n\to\infty} m(x_n, x) = 0$ olacak şekildeki her hangi bir $\{x_n\} \subseteq X$ dizisi alalım. $x \notin M$ ve $M \in M(X)$ olduğundan $m(x, M) > 0$ dır .

Aksini kabul edelim $\{x_n\} \subseteq X$ dizisi sonunda M^c içinde kalmasın. Bu durumda her $k \in \mathbb{N}$ için $n_k \geq k$ olmak üzere doğal sayıların artan bir $\{n_k\}$ alt dizisi vardır öyle ki $x_{n_k} \in M$ ve

$\lim_{k\to\infty} m(x_{n_k}, x) = 0$ dir.

$m(x,M) = inf\{m(x,a): a \in M\} \leq inf\{m(x,x_{n_k}): k \in \mathbb{N}\} = 0$

elde edilir ki bu $M \in M(X)$ olduğundan $m(x,M) > 0$ olması ile çelişir.O halde kabul yanlış olup $\{x_n\} \subseteq X$ dizisi sonunda M^c içinde kalır. Yani $M^c \in \tau_s$ olup $M \in C_s(X)$ elde edilir.

Örnek

$X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}: n \geq 1, n \in \mathbb{N}\}$ olsun ve $m: X \times X \to [0,\infty)$ dönüşümü bu küme üzerinde

$m(x,y) = min\{x,y\}$ şeklinde tanımlansın. Buna göre τ_m, X üzerinde tanımlı ayrık olmayan topolojidir. $M = \{\frac{1}{n} : n > 3, n \in \mathbb{N}\}$ şeklinde alırsak, açıktır ki; $M \in C_m(X)$ dir.

Ancak $x = 0$ ve her $a \in M$ için $m(x,M) = 0$ fakat $0 \notin M$ olduğundan $M \notin M(X)$ dir.

Örnek

$X = [1,2]$ olsun ve $m: X \times X \to [0,\infty)$ dönüşümü bu küme üzerinde $m(x,y) = min\{x,y\}$ şeklinde tanımlansın. Buna göre τ_m, X üzerinde ayrık olmayan topolojidir. Eğer $M = [\frac{3}{2}, 2]$ olarak alırsak $M \in M(X)$ dir. Ancak $M \notin C_m(X)$ dir.

3.2.8. Teorem

(X,m) bir M-tam M-metrik uzay ve $T: X \to M(X)$ küme değerli bir dönüşüm ve

$\theta \in \Theta$ olsun. Bu durumda $m(x,Tx) > 0$ olacak şekildeki her $x \in X$ için öyle bir $k \in (0,1)$ var öyle ki $y \in \Theta_b^x(m)$ için $m(y,Ty) > 0$ ve $b \in (0,1]$ için

$\theta(m(y,Ty)) \leq \theta(m(x,y))^k$

eşitsizliği sağlanıyor olsun. Eğer $k < b$ ve $f(x) = m(x,Tx)$ dönüşümü τ_m topolojisine göre alt yarı sürekli ise T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir [38].

İspat

Kabul edelim ki T dönüşümünün sabit noktası olmasın. Buna göre her $x \in X$ için $m(x,Tx) > 0$ dır. Gerçekten $m(x,Tx) = 0$ ise bu durumda $Tx \in M(X)$ olduğu için $x \in Tx$ dir. O halde her $x \in X$ için $m(x,Tx) > 0$ ve $Tx \in M(X)$ olduğundan her $x \in X$ için $m(x,Tx) = m(x,y)$ olacak şekilde $y \in Tx$ vardır. Buna göre $m(x,Tx) > 0$ olmak üzere her $x \in X$ için $\theta(m(x,Tx)) = \theta(m(x,y))$ olur. Böylece $y \in \Theta_1^x(m)$ dir.

Yani $\Theta_1^x(m) \neq \emptyset$ dır. İspatın kalan kısmı Teorem 3.2.5 in ispatında olduğu gibi $Tz \in M(X)$ olduğu dikkate alınarak tamamlanır.

Şimdi vereceğimiz teoremde ise $C_m(X)\ ile\ P_m(X)$ in yer değiştirebileceğini göstereceğiz bunun için teoremin ifadesinde belirteceğimiz ek bir koşula ihtiyacımız var.

3.2.9. Teorem

(X,m) bir M-tam M-metrik uzay ve $T: X \to P_m(X)$ küme değerli bir dönüşüm ve $\theta \in \Xi$ olsun. Buna göre $m(x,Tx) > 0$ olmak üzere her $x \in X$ için öyle bir $k \in (0,1)$ var öyle ki

$y \in \Theta_b^x(m)$ için $m(y,Ty) > 0$ ve $b \in (0,1)$ için

$$\theta(m(y,Ty)) \leq \theta(m(x,y))^k \tag{3.16}$$

eşitsizliği sağlanıyor olsun.

Ayrıca ,

$\begin{cases} \text{Her } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ için } x_{n+1} \in Tx_n \text{ olacak şekildeki her } \{x_n\} \text{ dizisi için} \\ T(limx_n) \text{ kümesi kapalıdır.} \end{cases}$

şartını sağlayan $m(x_0,Tx_0) > 0$ olacak şekilde $x_0 \in X$ var olsun. Eğer $k < b\ ve\ f(x) = m(x,Tx)$ dönüşümü τ_m topolojisine göre alt yarı sürekli ise T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat

$m(x_0, Tx_0) > 0$ olduğundan öyle $x_1 \in \Theta_b^{x_0}(m)$ var öyle ki aşagıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\theta(m(x_1, Tx_1)) \leq (\theta(m(x_0, x_1)))^k$$

ve $x_2 \in X$ için $x_2 \in \Theta_b^{x_1}(m)$ var öyle ki aşagıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\theta(m(x_2, Tx_2)) \leq (\theta(m(x_1, x_2)))^k$$

bulunur. Benzer şekilde devam edilerek her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in \Theta_b^{x_n}(m)$ ve

$$\theta(m(x_{n+1}, Tx_{n+1})) \leq (\theta(m(x_n, x_{n+1})))^k \tag{3.17}$$

olacak şekilde bir $\{x_n\}$ dizisi vardır. $\{x_n\}$ dizisinin M-Cauchy dizisi olduğu Teorem 3.2.5 in ispatında olduğu gibi gösterilebilir. (X, m) bir M-tam M-metrik uzay olduğundan $\{x_n\}$ dizisi M-yakınsaktır ve $\lim_{n,m\to\infty} m(x_n, x_m) = m(z, z)$ olacak şekilde bir $z \in X$ elemanı vardır.

Ayrıca Eş.3.17. ve (θ_2) özelliğinden yararlanılarak $\lim_{n\to\infty} m(x_n, Tx_n) = 0$ elde edilir. Hipotezden $f(x) = m(x, Tx)$ dönüşümü τ_m topolojisine göre alt yarı sürekli ve (x_n) dizisi z noktasına M-yakınsak olduğu için,

$$0 \leq m(z, Tz) = f(z) \leq \lim_{n\to\infty} inf\ f(x_n) = \lim_{n\to\infty} inf\ m(x_n, Tx_n) = 0$$

olup $z \in \overline{Tz^m}$ elde edilir. Hipotez gereği Tz kümesi kapalıdır. Buna göre $z \in Tz$ olup T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.

Şimdiye kadar verdiğimiz teoremlerin uygun bir genelleşmişi olan ve lineer olmayan formlarını ifade ve ispat edeceğiz.

3.2.10. Teorem

(X, m) bir M-tam M-metrik uzay ve $T: X \to C_m(X)$ küme değerli bir dönüşüm

ve $\theta \in \Xi$ olsun. Buna göre $m(x,Tx) > 0$ olmak üzere her $x \in X$ için $0 < b < 1$ olmak üzere $k: [0,\infty) \to [0,b)$ fonksiyonu var öyle ki, her $u \in [0,\infty)$ için

$$\lim_{t \to u^+} supk(t) < b \tag{3.18}$$

şartı sağlasın ve

$$\theta(m(y,Ty)) \leq \theta(m(x,y))^{k(m(x,y))} \tag{3.19}$$

olacak şekilde bir $y \in \Theta_b^x(m)$ var olsun. Eğer, $f(x) = m(x,Tx)$ dönüşümü τ_m topolojisine göre alt yarı sürekli ise T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat

Kabul edelim ki T dönüşümünün sabit noktası olmasın. Bu durumda her $x \in X$ için $m(x,Tx) > 0$ dır. Gerçekten $m(x,Tx) = 0$ ise buradan $x \in \overline{T^m x} = Tx$ olduğu için $x \in Tx$ bulunur. $\theta \in \Xi$ olduğundan $m(x,Tx) > 0$ olacak şekildeki her $x \in X$ için ve her $b \in (0,1)$ için $\Theta_b^x(m) \neq \emptyset$ dır

Şimdi $x_0 \in X$ başlangıç noktası olsun. O zaman öyle $x_1 \in \Theta_b^{x_0}(m)$ var öyle ki aşagıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\theta(m(x_1,Tx_1)) \leq (\theta(m(x_0,x_1)))^{k(m(x_0,x_1))}$$

ve $x_2 \in X$ için $x_2 \in \Theta_b^{x_1}(m)$ var öyle ki aşagıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\theta(m(x_2,Tx_2)) \leq (\theta(m(x_1,x_2)))^{k(m(x_1,x_2))}$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilerek her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in \Theta_b^{x_n}(m)$ ve

$$\theta(m(x_{n+1},Tx_{n+1})) \leq (\theta(m(x_n,x_{n+1})))^{k(m(x_n,x_{n+1}))} \tag{3.20}$$

olacak şekilde bir $\{x_n\}$ dizisi vardır. $\{x_n\}$ dizisinin M-Cauchy dizisi olduğunu görmek istiyoruz. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in \Theta_b^{x_n}(m)$ olduğu için

$$(\theta(m(x_n, x_{n+1})))^b \leq \theta(m(x_n, Tx_n) \tag{3.21}$$

Eş. 3.20 ve Eş. 3.21 birlikte değerlendirildiğinde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\theta(m(x_{n+1}, Tx_{n+1})) \leq (\theta(m(x_n, Tx_n)))^{\frac{k(m(x_n, x_{n+1}))}{b}} \tag{3.22}$$

ve

$$\theta(m(x_{n+1}, x_{n+2})) \leq (\theta(m(x_n, x_{n+1})))^{\frac{k(m(x_n, x_{n+1}))}{b}} \tag{3.23}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Eş.3.22 ve (θ_1) den { $m(x_{n+1}, Tx_{n+1})$} ve $\{m(x_{n+1}, x_{n+2})\}$ dizileri azalandır ve dolayısıyla yakınsaktır. Şimdi Eş.3.18 den

$$\lim_{n\to\infty} supk\big(m(x_n, x_{n+1})\big) = c$$

olacak şekilde $c \in [0, b)$ vardır. Bu durumda $n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n \geq n_0$ için $k(m(x_n, x_{n+1})) < s$ olacak şekilde s $\in (c, b)$ vardır. Böylece Eş.3.23 dan her $n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned}
&1 < \theta\big(m(x_n, x_{n+1})\big) \\
&\leq (\theta(m(x_{n-1}, x_n)))^{\frac{k(m(x_{n-1}, x_n))}{b}} \\
&\leq (\theta(m(x_{n-2}, x_{n-1})))^{\frac{k(m(x_{n-1}, x_n))}{b}\frac{k(m(x_{n-1}, x_n))}{b}} \\
&\vdots \\
&\leq (\theta(m(x_0, x_1)))^{\frac{k(m(x_0, x_1))}{b} \dots \frac{k(m(x_{n-1}, x_n))}{b}\frac{k(m(x_{n-1}, x_n))}{b}} \\
&= (\theta(m(x_0, x_1)))^{\frac{k(m(x_0, x_1))}{b} \dots \frac{k(m(x_{n_0-1}, x_{n_0}))}{b}\frac{k(m(x_{n_0}, x_{n_0+1}))}{b} \dots \frac{k(m(x_{n-1}, x_n))}{b}\frac{k(m(x_{n-1}, x_n))}{b}} \\
&\leq (\theta(m(x_0, x_1)))^{\frac{k(m(x_{n_0}, x_{n_0+1}))}{b} \dots \frac{k(m(x_{n-1}, x_n))}{b}\frac{k(m(x_{n-1}, x_n))}{b}} \\
&\leq (\theta(m(x_0, x_1)))^{\frac{s^{(n-n_0)}}{b^{(n-n_0)}}}
\end{aligned}$$

olur. O halde her $n \geq n_0$ için

$$1 < \theta\big(m(x_n, x_{n+1})\big) \leq (\theta(m(x_0, x_1)))^{(\frac{s}{b})^{(n-n_0)}} \quad . \tag{3.24}$$

Eş. 3.24 de $n \to \infty$ için limit alınırsa $\lim_{n\to\infty} (\frac{s}{b})^{(n-n_0)} = 0$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} \theta(m(x_n, x_{n+1})) = 1 \tag{3.25}$$

olur. (θ_2) den

$\lim_{n\to\infty} m(x_n, x_{n+1}) = 0$

elde edilir. Benzer şekilde

$\lim_{n\to\infty} m(x_n, Tx_n) = 0$

elde edilir. (θ_3) özelliğinden yararlanılarak $r \in (0,1)$ ve $\ell \in (0, \infty]$ var öyle ki,

$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta(m(x_n,x_{n+1}))-1}{(m(x_n,x_{n+1}))^r} = \ell$

dır. Kabul edelim ki $\ell < \infty$ olsun. Bu durumda $\varepsilon = \ell/2 > 0$ olarak alınırsa limit tanımından $n \geq n_1$ olacak şekildeki her $n \in \mathbb{N}$ için

$\left|\frac{\theta(m(x_n,x_{n+1}))-1}{(m(x_n,x_{n+1}))^r} - \ell\right| \leq \varepsilon$

eşitsizliği sağlanır. Bu da gösterir ki her $n \geq n_1$ için

$\frac{\theta(m(x_n,x_{n+1}))-1}{(m(x_n,x_{n+1}))^r} \geq \ell - \varepsilon = \varepsilon$

dır. Buna göre $A = 1/\varepsilon$ olmak üzere, her $n \geq n_1$ için

$n.[m(x_n, x_{n+1})]r \leq A.n.[\theta(m(x_n, x_{n+1})) - 1]$

dır. Şimdi kabul edelim ki $\ell = \infty$ olsun. $\varepsilon > 0$ herhangi bir keyfi pozitif sabit olsun limit tanımını kullanarak $n_1 \in \mathbb{N}$ var öyleki her $n \geq n_1$ için

$\frac{\theta(m(x_n,x_{n+1}))-1}{(m(x_n,x_{n+1}))^r} \geq \varepsilon$

dır. Buna göre $A = 1/\varepsilon$ olmak üzere, her $n \geq n_1$ için

$$n.[m(x_n, x_{n+1})]r \leq A.n.[\theta(m(x_n, x_{n+1})) - 1]$$

dır. Böylece bütün durumlarda $A > 0$ ve $n_1 \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n \geq n_1$ için

$$n.[m(x_n, x_{n+1})]^r \leq A.n.[\theta(m(x_n, x_{n+1})) - 1]$$

bulunur. Eş.3.24 uygulanırsa her $n \geq n_2 = max\{n_0, n_1\}$ için

$$n.[m(x_n, x_{n+1})]^r \leq A.n.[\ (\theta(m(x_0, x_1))^{(\frac{s}{b})^{(n-n_2)}} - 1]$$

dır. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} n.[m(x_n, x_{n+1})]^r = 0$$

olur. Böylece limit tanımından $n_3 \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n \geq n_3$ için

$$m(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{n^{1/r}} \qquad (3.26)$$

dır. $\{x_n\}$ dizisinin bir M-Cauchy dizisi olduğunu görmek için; $m, n > 0$ olacak şekildeki her $m, n \in \mathbb{N}$ için $(m4)$ ve Eş.3.26 uygulanırsa

$$m(x_n, x_m) - m_{x_n x_m} \leq [m(x_n, x_{n+1}) - m_{x_n x_{n+1}}] + \cdots + [m(x_{m-1}, x_m) - m_{x_{m-1} x_m}]$$
$$\leq m(x_n, x_{n+1}) + m(x_{n+1}, x_{n+2}) \ldots + m(x_{m-1}, x_m) \leq \sum_{i=n}^{m-1} m(x_i, x_{i+1}) \leq$$
$$\sum_{i=n}^{\infty} m(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}} \quad ,$$

eşitsizliğini elde ederiz. $\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}}$ serisinin yakınsaklığından $n \to \infty$ için limit alınırsa, $m(x_n, x_m) - m_{x_n x_m} \to 0$ elde edilir . Eş.3.20 ve Eş.3.26 birlikte kullanılırsa görülecektir ki $\lim_{n\to\infty} m(x_n, x_n) = 0$ olup $n \to \infty$ için $m(x_n, x_m) \to 0$ olur. (X, m) bir M-tam M-metrik uzay olduğundan $\{x_n\}$ dizisi M-yakınsaktır ve $\lim_{n,m\to\infty} m(x_n, x_m) = m(z, z)$ olacak

şekilde bir $z \in X$ elemanı vardır. Ayrıca Eş.3.23 ve (θ_2) özelliğinden yararlanılarak $\lim_{n\to\infty} m(x_n, Tx_n) = 0$ elde edilir.

Hipotezden $f(x) = m(x, Tx)$ dönüşümü τ_m topolojisine göre alt yarı sürekli ve $\{x_n\}$ dizisi z noktasına M-yakınsak olduğu için,

$$0 < m(z, Tz) = f(z) \leq \lim_{n\to\infty} inf\ f(x_n,) = \lim_{n\to\infty} inf\ m(x_n, Tx_n) = 0$$

bulunur ve bu bir çelişkidir. Dolayısıyla kabul yanlış olup T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.

Teorem 3.2.10 daki $C_m(X)$ yerine $K_m(X)$ alacağız fakat bunun için θ üzerindeki (θ_4) koşulunu kaldıracağız ve Durum1 deki gibi $b = 1$ olarak alacağız. Şimdi teoremin ifade ve ispatını verelim.

3.2.11. Teorem

(X, m) bir M-tam M-metrik uzay ve $T: X \to K_m(X)$ küme değerli bir dönüşüm ve $\theta \in \Theta$ olsun. Bu durumda $m(x, Tx) > 0$ olmak üzere her $x \in X$ için $k: [0, \infty) \to [0,1)$ fonksiyonu var öyle ki, her $u \in [0, \infty)$ için

$$\lim_{t\to u^+} supk(t) < b \tag{3.27}$$

şartı sağlasın ve

$$\theta(m(y, Ty)) \leq \theta(m(x, y))^{k(m(x,y))} \tag{3.28}$$

olacak şekilde bir $y \in \Theta_1^x(m)$ var olsun. Eğer, $f(x) = m(x, Tx)$ dönüşümü τ_m topolojisine göre alt yarı sürekli ise T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat

Kabul edelim ki T dönüşümünün sabit noktası olmasın. Bu durumda her $x \in X$ için $m(x, Tx) > 0$ dır. Gerçekten Tx kompakt olduğu için her $x \in X$ için $m(x, Tx) = m(x, y)$

olacak şekilde $x \neq y$ olmak üzere $y \in Tx$ vardır. Buna göre $m(x, Tx) > 0$ olmak üzere her $x \in X$ için $\theta(m(x, Tx)) = \theta(m(x, y))$ olur. Böylece $y \in \Theta_1^x(m)$ dir.

Yani $\Theta_1^x(m) \neq \emptyset$ dır. Şimdi $x_0 \in X$ başlangıç noktası olsun. İspatın kalan kısmı Teorem 3.2.10 ispatında olduğu gibi benzer metodları kullanarak $Tz \in K_m(X)$ olduğu dikkate alınarak tamamlanır.

Teorem 3.2.10 ve Teorem 3.2.11, Teorem 3.2.5 in uygun bir genelleşmişidir. Hatta Klim ve Wardowski'nin [19] uygun bir genelleşmişidir.

4. M-METRİK UZAYLARDA P-BÜZÜLMELER İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE UYGULAMALARI

M-metrik uzaylarda sabit nokta sonuçları matematikçiler için zengin ve zorlu bir bakış açısı sunar. Yani bu uzay üzerindeki dönüşümün davranışlarını anlamak için araçlara ve güçlü teoremlerin geliştirilmesine yol açan bu inceleme aracılığıyla M-metrik uzaylarda P-büzülme dönüşümleri için temel sabit nokta teoremleri sunacağız. İlk olarak P-büzülme kavramını Popescu[53] vermiş ve bununla ilgili çeşitli sabit nokta sonuçları üzerine Altun ve diğerleri de çeşitli sonuçlar elde etmişlerdir [39-40]. Bu bölümün ikinci kısmında ise bu teoremlerin uygulanabilirliğini görmek için ikinci dereceden $(p-q)$ Langevin diferansiyel denklemlerinin çözümünün varlık ve tekliğini göstereceğiz.

4.1. M-Metrik Uzaylarda P-Büzülmeler İçin Bazı Sabit Nokta Teoremleri

İlk olarak metrik uzaylarda P-büzülme ve P-büzülme dönüşümleri için verilen temel sabit nokta teoremini hatırlayalım:

4.1.1. Tanım

(X,d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda her $x,y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq L[d(x,y) + |d(x,Tx) - d(y,Ty)|\,]$$

olacak şekilde $L \in [0,1)$ var ise T ye bir P-büzülme dönüşümü denir. $x \neq y$ olmak üzere her $x,y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) < d(x,y) + |d(x,Tx) - d(y,Ty)|$$

eşitsizliği sağlanıyor ise T ye bir P-büzülebilir dönüşüm denir [53].

4.1.2. Teorem

(X,d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir P-büzülme dönüşümü olsun. O zaman

T bir tek sabit noktaya sahiptir ve her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ dizisi bu sabit noktaya yakınsar [53].

4.1.3 Tanım

(X, m) bir M-metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda her $x, y \in X$ için

$$m(Tx, Ty) \leq L[m(x, y) + |m(x, Tx) - m(y, Ty)|\,] \tag{4.1}$$

olacak şekilde $L \in [0,1)$ var ise T ye bir P-büzülme dönüşümü denir. $m(x, y) > 0$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$m(Tx, Ty) < m(x, y) + |m(x, Tx) - m(y, Ty)| \tag{4.2}$$

eşitsizliği sağlanıyor ise T ye bir P-büzülebilir dönüşüm denir.

Eğer $m(x, y) = 0 \Leftrightarrow m(Tx, Ty) = 0$ ise T ye 0-özellikli dönüşüm denir [41].

Uyarı 1

Açıktır ki M-metrik uzayda her büzülme dönüşümü bir P-büzülmedir ancak tersinin doğru olamayacağını aşağıdaki örnekle gösterelim.

Örnek 1

$X = [0,1] \cup [2,3]$ ve $m(x, y) = \begin{cases} 1 + |x - y| & , \quad x \neq y \\ 0 & , \quad x = y \end{cases}$,

olsun. O zaman (X, m) bir M-metrik uzaydır. $T: X \to X$ dönüşümünü

$$Tx = \begin{cases} 1 & , \ x \in [0,1] \\ 0 & , \ x \in [2,3] \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Buna göre T bir büzülme dönüşümü olamaz. Gerçekten,

$$m(T1, T2) = m(1,0) = 2 = m(1,2).$$

Fakat $L = \frac{1}{2}$ için bir P-büzülmedir. Bunu göstermek için şu durumları inceleyeceğiz:

1.Durum: Eğer $x, y \in [0,1]$ ise o zaman,

$$m(Tx, Ty) = m(1,1) = 0 \leq \frac{1}{2}[m(x,y) + |m(x,Tx) - m(y,Ty)|].$$

2.Durum: Eğer $x, y \in [2,3]$ ise o zaman,

$$m(Tx, Ty) = m(0,0) = 0 \leq \frac{1}{2}[m(x,y) + |m(x,Tx) - m(y,Ty)|].$$

3.Durum: Eğer $x \in [0,1]$ ve $y \in [2,3]$ ise o zaman,

$$m(Tx, Ty) = m(1,0) = 2$$

ve

$$m(x,y) + |m(x,Tx) - m(y,Ty)| = 1 + |x - y| + |m(x,1) - m(y,0)|$$

$$= \begin{cases} 1 + y - x + |1 - x - y| & , \quad x \neq 1 \\ 2y + 1 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2y & , \quad x \neq 1 \\ 2y + 1 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

ve böylece

$$m(Tx, Ty) = 2 = \frac{1}{2}4 \leq \frac{1}{2}2y \leq \frac{1}{2}[m(x,y) + |m(x,Tx) - m(y,Ty)|].$$

Şimdi ana teoremimizi verelim.

4.1.4 Teorem

(X, m) bir M-tam M-metrik uzay ve $T: X \to X$ bir P-büzülme dönüşümü olsun. O zaman

T bir tek sabit noktaya sahiptir [41].

İspat

Kabul edelim ki $x_0 \in X$ ve bir $\{x_n\}$ dizisini $x_n := T^n x_0 = Tx_{n-1}$ olarak tanımlayalım. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için

$$m(x_n, x_n) = m(Tx_{n-1}, Tx_{n-1})$$
$$\leq L[m(x_{n-1}, x_{n-1}) + |m(x_{n-1}, Tx_{n-1}) - m(x_{n-1}, Tx_{n-1})|]$$
$$= L[m(x_{n-1}, x_{n-1})$$

ve böylece

$$m(x_n, x_n) \leq L^n m(x_0, x_0).$$

Bu da gösterir ki

$$\lim_{n\to\infty} m(x_n, x_n) = 0. \tag{4.3}$$

Diğer taraftan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$m(x_{n+1}, x_n) = m(Tx_n, Tx_{n-1})$$
$$\leq L[m(x_n, x_{n-1}) + |m(x_n, Tx_n) - m(x_{n-1}, Tx_{n-1})|]$$
$$= L[[m(x_n, x_{n-1}) + |m(x_n, x_{n+1}) - m(x_{n-1}, x_n)|] \tag{4.4}$$

Şimdi iki durumda düşünelim:

1. *Durum:* Kabul edelim ki bir $k \in \mathbb{N}$ var öyleki $m(x_k, x_{k+1}) \geq m(x_{k-1}, x_k)$ eşitsizliği sağlansın. O zaman Eş.4.4 den

$$m(x_k, x_{k+1}) \leq Lm(x_k, x_{k+1})$$

dır. Bu da gösterir ki $m(x_k, x_{k+1}) = 0$ (aksi takdirde son eşitsizlik bir çelişki olur) ve böylece $m(x_{k-1}, x_k) = 0$. M-metriğin üçgen eşitsizliğinden

$$m(x_{k-1}, x_{k+1}) - m_{x_{k-1}x_{k+1}} \leq (m(x_{k-1}, x_k) - m_{x_{k-1}x_k}) + (m(x_k, x_{k+1}) - m_{x_k x_{k+1}})$$
$$= -[m_{x_{k-1}x_k} + m_{x_k x_{k+1}}] \quad (4.5)$$

elde ederiz. Son eşitsizlik eğer $m_{x_{k-1}x_k} = 0 = m_{x_k x_{k+1}}$ ise yada

$$min\{m(x_{k-1}, x_{k-1}), m(x_k, x_k)\} = 0 = min\{m(x_k, x_k), m(x_{k+1}, x_{k+1})\} \quad (4.6)$$

ise doğrudur.

Şimdi eğer $m(x_{k-1}, x_{k-1}) = 0$ ise o zaman Eş.4.1. den

$$m(x_k, x_k) = m(Tx_{k-1}, Tx_{k-1})$$
$$\leq L[m(x_{k-1}, x_{k-1}) + |m(x_{k-1}, Tx_{k-1}) - m(x_{k-1}, Tx_{k-1})|]$$
$$= 0$$

elde ederiz ve böylece $x_k = x_{k-1}$ bulunur . Yani x_{k-1}, T nin bir sabit noktasıdır.

Eğer $m(x_{k+1}, x_{k+1}) = 0$ ise o zaman Eş.4.1 den benzer şekilde

$$m(x_k, x_k) = m(Tx_{k-1}, Tx_{k-1})$$
$$\leq L[m(x_{k-1}, x_{k-1}) + |m(x_{k-1}, Tx_{k-1}) - m(x_{k-1}, Tx_{k-1})|]$$
$$= Lm(x_{k-1}, x_{k-1})$$
$$= 0$$

elde ederiz ve böylece Eş.4.6 dan $m(x_k, x_k) = 0$ bulunur. Böylece $x_k = x_{k+1}$ olup yani x_k, T nin bir sabit noktasıdır.

Eğer $m(x_k, x_k) = 0$ ise o zaman Eş.4.1 den benzer şekilde

$$m(x_{k+1}, x_{k+1}) = m(Tx_k, Tx_k)$$
$$\leq L[m(x_k, x_k) + |m(x_k, Tx_k) - m(x_k, Tx_k)|$$
$$= 0$$

bulunur. Böylece $x_k = x_{k+1}$ olup yani x_k, T nin bir sabit noktasıdır.

2. *Durum:* Kabul edelim ki her $n \in \mathbb{N}$ var öyleki $m(x_n, x_{n+1}) \geq m(x_{n-1}, x_n)$ eşitsizliği sağlansın. O zaman Eş.4.4 den her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$m(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{2L}{1+L} m(x_{n-1}, x_n)$$

elde ederiz. $\frac{2L}{1+L} < 1$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} m(x_n, x_{n+1}) = 0 \tag{4.7}$$

elde edilir. Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin bir M-Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Bunun için $\{x_n\}$ dizisinin (X, ν) de bir Cauchy dizisi olduğunu görmek yeterlidir. Öncelikle Eş.4.3 ve Eş.4.7 den

$$\lim_{n\to\infty} m(x_n, x_n) = 0 = \lim_{n\to\infty} m(x_n, x_{n+1})$$

elde ederiz böylece

$$\lim_{n,\mu\to\infty} m_{x_n x_\mu} = 0 = \lim_{n,\mu\to\infty} M_{x_n x_\mu}.$$

Kabul edelim ki $\{x_n\}$ dizisi (X, ν) de bir Cauchy dizisi olmasın. O zaman $\varepsilon > 0$ ve $\{x_{n_k}\}$, $\{x_{\mu_k}\}$ alt dizileri var öyleki $n_k > \mu_k > k$ için $\nu(x_{n_k}, x_{\mu_k}) \geq \varepsilon$ dır. Şimdi μ_k için $n_k > \mu_k$ ve $\nu(x_{n_k}, x_{\mu_k}) \geq \varepsilon$ olacak şekildeki en küçük n_k değerini seçelim. Dolayısıyla $\nu(x_{n_k}, x_{\mu_k}) < \varepsilon$ olup böylece şunu elde ederiz:

$$\varepsilon \leq \nu(x_{n_k}, x_{\mu_k}) \leq \nu\left(x_{n_k}, x_{n_{k-1}}\right) + \nu\left(x_{n_{k-1}}, x_{\mu_k}\right) < \nu\left(x_{n_k}, x_{n_{k-1}}\right) + \varepsilon \ .$$

$\nu\left(x_{n_k}, x_{n_k-1}\right) \to 0$ olduğu için

$$\lim_{k\to\infty} \nu\left(x_{n_k}, x_{\mu_k}\right) = \varepsilon$$

elde ederiz. Benzer şekilde

$$\nu(x_{n_k}, x_{\mu_k}) \leq \nu(x_{n_k}, x_{n_{k-1}}) + \nu(x_{n_{k-1}}, x_{\mu_{k-1}}) + \nu(x_{\mu_{k-1}}, x_{\mu_k})$$

Ve

$$\nu(x_{n_{k-1}}, x_{\mu_{k-1}}) \leq \nu(x_{n_k-1}, x_{n_k}) + \nu(x_{n_k}, x_{\mu_k}) + \nu(x_{\mu_k}, x_{\mu_{k-1}})$$

olup bu eşitsizliklerde $k \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{k\to\infty} \nu(x_{n_{k-1}}, x_{\mu_{k-1}}) = \varepsilon$$

elde edilir. Böylece

$$\lim_{k\to\infty} m(x_{n_k}, x_{\mu_k}) = \lim_{k\to\infty} (\, m(x_{n_k}, x_{\mu_k}) - 2m_{x_{n_k}x_{\mu_k}} + M_{x_{n_k}x_{\mu_k}})$$

$$= \lim_{k\to\infty} \nu(x_{n_k}, x_{\mu_k}) = \varepsilon$$

elde ederiz ve benzer şekilde

$$\lim_{k\to\infty} m(x_{n_{k-1}}, x_{\mu_{k-1}}) = \varepsilon$$

elde ederiz. Şimdi Eş.4.1. den

$$\varepsilon = \lim_{k\to\infty} m(x_{n_k}, x_{\mu_k})$$
$$\leq \lim_{n\to\infty} L\left[m(x_{n_{k-1}}, x_{\mu_{k-1}}) + \left|\nu(x_{n_{k-1}}, x_{n_k}) - \nu(x_{\mu_{k-1}}, x_{\mu_k})\right|\right]$$
$$= L\varepsilon,$$

buluruz ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\{x_n\}$ dizisi (X, ν) de bir Cauchy dizisidir ve böylece $\{x_n\}$ dizisi (X, m) M-tam M-metrik uzayında da bir M-Cauchy dizisidir. Böylece yakınsadığı bir $z \in X$ noktası vardır öyleki

$$\lim_{n\to\infty} \left(m(x_n, z) - m_{x_n z}\right) = 0.$$

$\lim_{n\to\infty} m_{x_n z} = 0$ olduğu için $\lim_{n\to\infty} m(x_n, z) = 0$ olarak buluruz. Dolayısıyla $m(z,z) = 0$ dır. Şimdi z elemanının T dönüşümünün bir sabit noktası olduğunu göstermek istiyoruz. Eş.4.1den

$$m(Tz, Tz) \leq L[m(z,z) + |m(z,Tz) - m(z,Tz)|] = 0$$

olup $m(Tz, Tz) = 0$ olur. Diğer taraftan Eş.4.1 den

$$m(x_n, Tz) \leq L[m(x_{n-1}, z) + |m(x_{n-1}, x_n) - m(z,Tz)|] = 0$$

dır ve bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa $m(z,Tz) \leq Lm(z,Tz)$ olur ki bu da ancak

$m(z,Tz) = 0$ olması ile mümkündür. Sonuç olarak ,

$$m(z,Tz) = m(Tz,Tz) = m(z,z)$$

ve böylece $z = Tz$ elde ederiz. Şimdi T dönüşümünün bir başka sabit noktası ω olsun. O zaman Eş.4.1 den şunu yazabiliriz:

$$\begin{aligned} m(\omega,\omega) &= m(T\omega, T\omega) \\ &\leq L[m(\omega,\omega) + |m(\omega,T\omega) - m(\omega,T\omega)|] \\ &= Lm(\omega,\omega), \end{aligned}$$

bu da gösterir ki $m(\omega,\omega) = 0$. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} m(z,\omega) &= m(Tz, T\omega) \\ &\leq L[m(z,\omega) + |m(z,Tz) - m(\omega,T\omega)|] \\ &= L[m(z,\omega) + |m(z,z) - m(\omega,\omega)|] \\ &= Lm(z,\omega). \end{aligned}$$

Sonuç olarak, $m(z,\omega) = 0 = m(z,z) = m(\omega,\omega)$ elde ederiz. Dolayısıyla $z = \omega$ buluruz.

Uyarı1 ve Örnek 1 bize Teorem 4.1.4 in Teorem 4.1.2 nin hatta Teorem 2.1 in de uygun bir genelleşmişi olduğunu gösterir.

Şimdi P-büzülebilir dönüşümler için sabit nokta teoreminin ifade ve ispatını vereceğiz.

4.1.5.Teorem

(X, m) bir M-metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşümü 0-özellikli bir P-büzülebilir dönüşüm olsun. $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = m(x, Tx)$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer $f(x_0) \leq f(Tx_0)$ olacak şekilde $x_0 \in X$ elemanı varsa T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir [41].

İspat

x_0 yukarıda belirtilen koşulu sağlayan bir nokta olsun. Bu durumda eğer $m(x_0, Tx_0) > 0$ ise o zaman T nin P-büzülebilir özelliğinden,

$$
\begin{aligned}
&f(Tx_0) = m(Tx_0, TTx_0) \\
&< m(x_0, Tx_0) + |m(x_0, Tx_0) - m(Tx_0, TTx_0)| \\
&= f(x_0) + |f(x_0) - f(Tx_0)| \\
&= f(x_0) + f(Tx_0) - f(x_0) \\
&= f(Tx_0) ,
\end{aligned}
$$

bu ise çelişki. Dolayısıyla $m(x_0, Tx_0) = 0$ olur. Buradan $m_{x_0 Tx_0} = 0$ bulururz ve böylece T nin 0-özellikli oluşundan $x_0 = Tx_0$ elde ederiz. Sabit noktanın tekliği T nin P-büzülebilir oluşundan açıktır.

Uyarı 2

$f(x) = m(x, Tx)$ şeklinde tanımlı fonksiyonun minimumu varsa o zaman

$f(x_0) = inf\, f(M)$ olacak şekilde $x_0 \in X$ elemanı vardır. Bu durumda $f(x_0) \leq f(Tx_0)$ olup böylece Teorem 4.1.5 den x_0 T dönüşümünün tek sabit noktasıdır.

4.1.4.Teorem

(X, m) bir M-kompakt M-metrik uzay ve $T: X \to X$ 0-özellikli bir P-büzülebilir dönüşüm olsun. Eğer $f(x) = m(x, Tx)$ fonksiyonu alt yarı sürekli ise T dönüşümü X de bir tek sabit noktaya sahiptir [41].

İspat

Teorem 2.5.4 [41] den f fonksiyonu minimum noktasını içerir. O zaman Teorem 4.1.5 ve Uyarı 2 den T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

4.2. İkinci Dereceden $(p-q)$ Langevin Diferansiyel Denklemleri İçin Uygulamalar

Bu bölümde bir önceki bölümde elde ettiğimiz sabit nokta teoremlerinin uygulamalarına yer vereceğiz. Bunun için ikinci dereceden $(p-q)$ Langevin diferansiyel denklemlerinin çözümlerinin varlık ve tekliğini ispatlayacağız. Sınır değer koşulları ile verilen ikinci dereceden $(p-q)$ Langevin diferansiyel denklemi

$$\begin{cases} D_{p,q}\left(D_{p,q}+\gamma\right)x(t) = f\left(t, x(t)\right), \ \ t \in [0,1] \\ \qquad\qquad x(0) = \alpha \ , \ \ D_{p,q}x(0) = \beta \ , \end{cases} \tag{4.8}$$

olup, burada $f: [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon, $0 < q < p \leq 1$, ve γ, α, β verilmiş sabitlerdir. İlk olarak $(p-q)$ denklemleri hakkında [42] de yer alan bazı temel tanım ve teoremleri gözden geçirelim. Bir g fonksiyonunun $(p-q)$ türevi ve $(p-q)$ integrali şu şekilde tanımlanmıştır; $0 < q < p \leq 1$ sabitleri için

$$D_{p,q}g(t) = \begin{cases} \dfrac{g(pt)-g(qt)}{(p-q)t}, & t \neq 0, \\ \lim\limits_{t\to 0} D_{p,q}g(t)\,, & t \geq 0, \end{cases}$$

ve

$$\int_0^t g(s)d_{p,q}s = (p-q)t\sum_0^\infty \frac{q^n}{p^{n+1}}g\left(\frac{q^n}{p^{n+1}}t\right)$$

sağ tarafın yakınsaması şartıyla.

$(p-q)$ integralleri şu şekilde verilmiştir:

$$\int_a^b g(pt)D_{p,q}h(t)d_{p,q}t = g(t)h(t)\Big|_a^b - \int_a^b h(qt)D_{p,q}g(t)d_{p,q}t, \tag{4.9}$$

$$D_{p,q}\left(\int_0^t g(s)d_{p,q}s\right) = g(t) \ , \tag{4.10}$$

$$\int_0^t D_{p,q}g(s)d_{p,q}s = g(t) - g(0), \tag{4.11}$$

$$\int_a^t D_{p,q}g(s)d_{p,q}s = g(t) - g(a) \ , \quad a \in (0,t) \tag{4.12}$$

q −denklemleri, $(p-q)$ denklemleri ve onların sabit nokta teoremleri arasındaki ilişkiler ile ilgili daha fazla bilgi edinmek için şu kaynaklara bakınız [44-52].

Her bir $t \in [p,1]$ için $f\big(t,x(t)\big) = 0$ kabul edilirse (4.8) in

$$x(t) = \alpha + (\beta+\gamma\alpha) - \gamma\int_0^t x(s)d_{p,q}s + \int_0^{\frac{t}{p}}(t-pqs)f\left(s,\big(x(s)\big)\right)d_{p,q}s, \tag{4.13}$$

ile tanımlı integral denklemine eşdeğer olduğu görülebilir. Kabul edelim ki $C([0,1])$ uzayı $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı bütün sürekli fonksiyonların uzayı olsun.

$T: C([0,1]) \to C([0,1])$ operatörü,

$$Tu(t) = \alpha + (\beta+\gamma\alpha) - \gamma\int_0^t u(s)d_{p,q}s + \int_0^{\frac{t}{p}}(t-pqs)f\left(s,\big(u(s)\big)\right)d_{p,q}s \tag{4.14}$$

ile tanımlansın. Buna göre u, T nin bir sabit noktası ise o zaman (4.13) integral denkleminin bir çözümüdür ve böylece (4.8) deki $(p-q)$ Langevin diferansiyel denklemleminin bir çözümüdür. Burada $X = C([0,1])$ olarak alalım.

X üzerinde bir M-metriğini $u \neq v$ için

$$m(u,v) = max\left\{\sup_{t\in[0,1]} u(t), \sup_{t\in[0,1]} v(t)\right\} + \sup_{t\in[0,1]}\{|u(t)-v(t)|\}$$

ile tanımlayalım eğer $u = v$ ise de $m(u, v) = 0$ olsun. Bu durumda (X, m) bir M-tam M-metrik uzaydır.

Şimdi aşağıdaki kabulleri düşünelim:

(A1) $f: [0,1] \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ sürekli ve her $t \in [p, 1]$ için $f(t, x) = 0$,

(A2) $\alpha(1 + \gamma) + \beta = 0$,

(A3) Her $x \in [0, \infty)$ için $f(t, x) \leq L_1 x$ olacak şekilde $L_1 \geq 0$ vardır,

(A4) Her $x, y \in [0, \infty)$ için $|f(t, x) - f(t, y)| \leq L_2 |x - y|$ olacak şekilde $L_2 \geq 0$ vardır.

4.2.1. Teorem

(A1)-(A4) koşullarına ek olarak kabul edelim ki

$$|\gamma| + max\{L_1, L_2\} \frac{p + q - qp^2}{p^2(p + q)} < 1,$$

sağlansın. O zaman (4.8) deki gibi tanımlı $(p - q)$ Langevin diferansiyel denklemi bir tek pozitif çözüme sahiptir [41].

İspat

(X, m) yukarıda tanımladığımız gibi bir M-metrik uzay olsun. O zaman T, (A1) ve (A2) koşullarından dolayı X üzerinde birebir bir eşlemedir. Hatta (A2) , (A3) ve (A4) den, her $x, v \in X$ için

$$m_1 := max\left\{\sup_{t\in[0,1]} Tu(t), \sup_{t\in[0,1]} Tv(t)\right\}$$

$$= max\left\{\begin{array}{l}\sup_{t\in[0,1]}\left\{\alpha+(\beta+\gamma\alpha)-\gamma\int_0^t u(s)d_{p,q}s+\int_0^{\frac{t}{p}}(t-pqs)f\left(s,\left(u(s)\right)\right)d_{p,q}s\right\},\\ \sup_{t\in[0,1]}\left\{\alpha+(\beta+\gamma\alpha)-\gamma\int_0^t v(s)d_{p,q}s+\int_0^{\frac{t}{p}}(t-pqs)f\left(s,\left(v(s)\right)\right)d_{p,q}s\right\},\end{array}\right\}$$

$$\leq max\left\{\begin{array}{l}\alpha+(\beta+\gamma\alpha)-|\gamma|\sup_{t\in[0,1]}u(t)+\sup_{t\in[0,1]}\int_0^{\frac{t}{p}}(t-pqs)f\left(s,\left(u(s)\right)\right)d_{p,q}s,\\ \alpha+(\beta+\gamma\alpha)-|\gamma|\sup_{t\in[0,1]}v(t)+\sup_{t\in[0,1]}\int_0^{\frac{t}{p}}(t-pqs)f\left(s,\left(v(s)\right)\right)d_{p,q}s\end{array}\right\}$$

$$\leq max\left\{\begin{array}{l}|\gamma|\sup_{t\in[0,1]}u(t)+L_1\sup_{t\in[0,1]}u(t)\sup_{t\in[0,1]}\int_0^{\frac{t}{p}}(t-pqs)d_{p,q}s,\\ |\gamma|\sup_{t\in[0,1]}v(t)+L_1\sup_{t\in[0,1]}v(t)\sup_{t\in[0,1]}\int_0^{\frac{t}{p}}(t-pqs)d_{p,q}s\end{array}\right\}$$

$$= \left(|\gamma|+L_1\frac{p+q-qp^2}{p^2(p+q)}\right)max\left\{\sup_{t\in[0,1]}u(t), \sup_{t\in[0,1]}v(t)\right\}$$

ve

$$m_2 = \sup_{t\in[0,1]}\{|Tu(t)-Tv(t))|\}$$

$$= \sup_{t\in[0,1]}\left\{\left|\begin{array}{l}\gamma\int_0^t u(s)d_{p,q}s-\int_0^{\frac{t}{p}}(t-pqs)f\left(s,\left(u(s)\right)\right)d_{p,q}s\\ -\gamma\int_0^t v(s)d_{p,q}s-\int_0^{\frac{t}{p}}(t-pqs)f\left(s,\left(v(s)\right)\right)d_{p,q}s-\end{array}\right|\right\}$$

$$= \sup_{t\in[0,1]}\left\{|\gamma|\int_0^t[u(s)-v(s)]d_{p,q}s+\int_0^{\frac{t}{p}}(t-pqs)\left[f\left(s,\left(u(s)\right)\right)-f\left(s,\left(v(s)\right)\right)\right]d_{p,q}s\right\}$$

$$\leq \sup_{s\in[0,1]}\{|u(s)-v(s))|\}\sup_{t\in[0,1]}\left\{\left|\gamma\int_0^t d_{p,q}s+L_2\int_0^{\frac{t}{p}}(t-pqs)d_{p,q}s\right|\right\}$$

$$\leq \left(|\gamma|+L_2\frac{p+q-qp^2}{p^2(p+q)}\right)\sup_{s\in[0,1]}\{|u(s)-v(s))|\}.$$

Dolayısıyla,

$$m(Tu,Tv) = m_1 + m_2$$
$$\leq \left(|\gamma| + L_1 \frac{p+q-qp^2}{p^2(p+q)}\right) max\left\{\sup_{t\in[0,1]} u(t), \sup_{t\in[0,1]} v(t)\right\} +$$
$$\left(|\gamma| + L_2 \frac{p+q-qp^2}{p^2(p+q)}\right) \sup_{s\in[0,1]} \{|u(s) - v(s))|\}$$
$$\leq \lambda\left\{max\left\{\sup_{t\in[0,1]} u(t), \sup_{t\in[0,1]} v(t)\right\} + \sup_{t\in[0,1]} \{|u(t) - v(t))|\}\right\}$$
$$= \lambda m(u,v),$$

elde edilir. Burada $\lambda = max\left\{|\gamma| + L_1 \frac{p+q-qp^2}{p^2(p+q)}, |\gamma| + L_2 \frac{p+q-qp^2}{p^2(p+q)}\right\}$

$$= |\gamma| + max\{L_1, L_2\} \frac{p+q-qp^2}{p^2(p+q)} < 1.$$

Böylece Teorem 4.1.4 den T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir. Yani (4.8) deki gibi tanımlı $(p-q)$ Langevin diferansiyel denklemi bir tek pozitif çözüme sahiptir

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Tam metrik uzaylarda Banach sabit nokta teoreminin zamanla pek çok genellemesi ve genelleşmişi yapılmıştır. Bu çalışmalar dönüşümün özelliklerinin değiştirilmesi ya da farklı dönüşümler ve dönüşüm çiftleri ile olduğu gibi farklı metrikler ya da uzayın yapısının değiştirilmesi şeklinde olmuştur. Çalışmanın birinci bölümünde kısaca bu değişimlerden bahsedildi. İkinci bölümde θ-büzülmeler ve M-metrik uzaylarda yapılan sabit nokta teori çalışmalarına değinilip tez boyunca kullanılacak temel kavram ve teoremlere yer verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde tek değerli dönüşümler için M-tam M-metrik uzaylarda θ-büzülme kavramı tanımlanmış ve bu tip dönüşümler için sabit nokta teoremi elde edilmiştir. Ve uygulama olarak Hammerstein integral denklemine ait çözümlerin varlık ve tekliği gösterilmiştir. Ardından küme değerli dönüşümler için M-tam M-metrik uzaylarda Feng Liu tip θ-büzülme kavramı tanımlanmış ve bu tip dönüşümler için sabit nokta teoremleri elde edilmiştir. Küme değerli θ-büzülme kavramı genişletilerek Θ, Ξ ve $K_m(X)$, $C_m(X)$ $P_m(X)$ aileleri dikkate alınarak sabit nokta teoremleri elde edilmiştir. Ve var olan karşılıkları irdelenmiştir. Bu çalışmayı daha da genişletmek amacıyla X ve Θ ailesinin belirli özelliklere sahip alt kümelerinin ailesi $M(X)$ tanımlanmış ve bu aile üzerinde sabit nokta teoremi elde edilmiştir. Ayrıca bulunan sonuçların literatürde yer alan Banach, Nadler, Mizoguchi-Takahaski, Feng-Lui, Klim Wardowski gibi temel sabit nokta teoremlerinden daha genel oldukları ifade edilmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde son olarak çalışmamızı bir üst adıma taşımak için M-metrik uzaylarda P-büzülme ve P-büzülebilir kavramalarını sunarak sabit noktaya yeni bir bakış açısı kazandırılmıştır. Sonra bu iki kavramı kullanarak literatürde daha önceden yapılan bazı teoremlerin genellemeleri olan sabit nokta teoremleri elde edilmiştir. Ardından M-metrik uzaylarda daha önce hiç yapılmamış bir çalışma olarak P-büzülmeler için 2.dereceden Langevin $(p-q)$ diferansiyel denklemelerinin varlık ve tekliği ispatlanmıştır. Elde edilen sonuçlar literatürde yer alan pek çok çalışmanın bir genellemesi ve genişletilmişidir. Bu bağlamda M-metrik üzerinde P-büzülmeler için küme değerli yeni sabit nokta sonuçları elde edilerek literatüre katkıda bulunulabilir.

KAYNAKLAR

1. Kannan, R. (1968). Some results on fixed points. *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society.* 60 71–76.

2. Reich, S. (1971). Some remarks concerning contraction mappings. *Canadian Mathematical Bulletin*. 14(1), 121-124.

3. Chatterjea, S. K. (1972) Fixed point theorems. *Proceedings of the Bulgarian Academy of Sciences.* 25 727–730.

4. Hardy, G. E. And Rogers, T. D. (1973). A generalization of a fixed point theorem of Reich, *Canadian Mathematical Bulletin*. 16 201–206.

5. Ciric, L. B. (1972). Fixed point theorems for mappings with a generalized contractive iterate at a point. *Publications de l'Institut Mathématique*, 13(27), 11-16.

6. Berinde, V., Takens, F. (2007). *Iterative Approximation of Fixed Points*, 1912 322. Berlin: Springer.

7. Suzuki, T. (2009). A new type of fixed point theorem in metric spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 71(11), 5313-5317.

8. Wardowski, D. (2012). Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 2012(1), 1-6.

9. Jleli, M., Samet, B. (2018). On a new generalization of metric spaces. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 20(3), 128.

10. Asadi, M., Karapınar, E., Salimi, P. (2014). New extension of p-metric spaces with some fixed-point results on M-metric spaces. *Journal of Inequalities and Applications*, 2014 1-9.

11. Asadi, M. (2015). Fixed point theorems for Meir-Keeler type mappings in M-metric spaces with applications. *Fixed Point Theory and Applications*, 2015, 1-10.

12. Sahin, H., Altun, I., Turkoglu, D. (2019). Two fixed point results for multivalued F-contractions on M-metric spaces. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 113, 1839-1849.

13. Monfared, H., Azhini, M., Asadi, M. (2016). Fixed point results on M-metric spaces. *Journal of Mathematical Analysis*, 7(5), 85-101.

14. Mohanta, S. K., ve Biswas, D. (2021). Characterization of completeness for m-metric spaces and a related fixed point theorem. *The Journal of Analysis*, 29(3), 701-711.

15. Nadler Jr, S. B. (1969). Multi-valued contraction mappings. California: *Pacific Journal of Mathematics*, 30(2) 475-488.

16. Mizoguchi, N., Takahashi, W. (1989). Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 141(1), 177-188.

17. Daffer, P. Z., Kaneko, H. (1995). Fixed points of generalized contractive multi-valued mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 192(2), 655-666.

18. Feng, Y., Liu, S. (2006). Fixed point theorems for multi-valued contractive mappings and multi-valued Caristi type mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 317(1), 103-112.

19. Klim, D., Wardowski, D. (2007). Fixed point theorems for set-valued contractions in complete metric spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 334(1), 132-139.

20. Suzuki, T. A. (2008). Generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 136 1861–1869.

21. Ćirić, L. (2009). Common fixed point theorems for a family of non-self mappings in convex metric spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 71(5-6), 1662-1669.

22. Kamran, T., Kiran, Q. (2011). Fixed point theorems for multi-valued mappings obtained by altering distances. *Mathematical and Computer Modelling*, 54(11-12), 2772-2777.

23. Du, W. S. (2012). On coincidence point and fixed point theorems for nonlinear multivalued maps. *Topology and its Applications*, 159(1), 49-56.

24. Mınak, G., Altun, I. (2013). Some new generalizations of Mizoguchi-Takahashi type fixed point theorem. *Journal of Inequalities and Applications*, 2013, 1-10.

25. Matthews, S. G. (1994). Partial metric topology. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 728(1), 183-197.

26. Altun, I., Sahin, H., ve Turkoglu, D. (2018). Fixed point results for multivalued mappings of Feng-Liu type on M-metric spaces. *Journal of Nonlinear Functional Analysis*, 2018(7), 1-8.

27. Branciari, A. (2000). A fixed point theorem of Banach-Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 57(1-2), 31-37.

28. Liu, X. D., Chang, S. S., Xiao, Y., ve Zhao, L. C. (2016). Existence of fixed points for Θ-type contraction and Θ-type Du. *Fixed Point Theory and Applications*, 1-12.

29. Ahmad, J., Al-Mazrooei, A. E., Cho, Y. J., Yang, Y. O. (2017). Fixed point results for generalized Θ-contractions. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 10(5), 2350-2358.

30. Nawab, H., Parvaneh, V., Samet, B., Vetro, C. (2015). Some fixed point theorems for generalized contractive mappings in complete metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 2015 185.

31. Hancer, H. A., Minak, G., Altun, I. (2017). On a broad category of multivalued weakly Picard operators. *Fixed Point Theory*, 18(1), 229-236.

32. Altun, I., Minak, G. (2015). On fixed point theorems for multivalued mappings of Feng-Liu type. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 52(6), 1901-1910.

33. Mınak, G., Altun, I. (2016). Overall approach to Mizoguchi-Takahashi type fixed point results. *Turkish Journal of Mathematics*, 40(4), 895-904.

34. Altun, I., Hançer, H. A., Mınak, G. (2015). On a general class of weakly Picard operators. *Miskolc Mathematical Notes*, 16(1), 25-32.

35. Durmaz, G., Altun, I. (2017). A new perspective for multivalued weakly picard operators. *Publications De L'institut Mathematique*, 101(115), 197-204.

36. Durmaz, G., Altun, I. (2020). On nonlinear set-valued θ-contractions. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 43(1), 389-402.

37. Taş, M. G., Türkoğlu, D., Altun, I. (2022). A fixed point result for θ-contraction on M-metric spaces. *American Institute of Physics Conference Proceedings*, 2483(1).

38. Taş, M. G., Türkoğlu, D., Altun, I. (2022). Fixed point theorems for multivalued mappings of feng-liu type θ-contractions on m-metric spaces. *Proceedings of International Mathematical Sciences*, 4(2), 88-94.

39. Altun, I., Durmaz, G., Olgun, M. (2018). P-contractive mappings on metric spaces. *Journal of Nonlinear Functional Analysis*, 2018(43), 1-7.

40. Altun, I., Hancer, H. A. (2019). Almost picard operators. *In American Institute of Physics Conference Proceedings*, 2183(1), 1-4.

41. Taş, M. G., Türkoğlu, D., Altun, I. (2024). Fixed point results for p-contractive mappings on m-metric space and application, *American Institute of Physics Press*, (In Press).

42. Agarwal, R. P., O'Regan, D., Sahu, D. R. (2009). *Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings and Applications, Springer* New York, 6 1-20.

43. Sadjang, P. N. (2018). On the fundamental theorem of (p; q)-calculus and some (p; q)-Taylor formulas, *Results in Mathematics*, 73 39.

44. Chakrabarti, R., R. Jagannathan (1991). A (p; q)-oscillator realization of two-parameter quantum algebras, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 24(13), 711-718.

45. Gençtürk, İ. (2022). Boundary value problems for a second-order · (p; q)-difference equation with integral conditions, *Turkish Journal of Mathematics*, 46(1), 499-515.

46. Gholami, Y. (2019). Second order two-parametric quantum boundary value problems, *Differential Equations Applications*, 11 (2), 243-265.

47. Jackson, F. H. (1910). q-Difference equations, *American Journal of Mathematics*, 32, 305-314.

48. Kamsrisuk, N., Promsakon, C., Ntouyas, S. K., Tariboon, J. (2018). Nonlocal boundary value problems for (p; q)-difference equations, *Differential Equations and Applications*, 10(2), 183-195

49. Neang, P., Nonlaopon, K., Tariboon, J., Ntouyas, S. K., Ahmad, B. (2021). Nonlocal Boundary Value Problems of Nonlinear Fractional (p; q), *Difference Equations. Fractal and Fractional*, 5(4), 270.

50. Neang, P., Nonlaopon, K., Tariboon, J., Ntouyas, S. K. and Ahmad, B. (2022). Existence and uniqueness results for fractional (p; q)-difference equations with separated boundary conditions, *Mathematics, Multidisciplinary Publishing Institute* (MDPI), 10(5), 767.

51. Nuntigrangjana, T., Putjuso, S., Ntouyas, S. K., Tariboon, J. (2020). Impulsive quantum (p; q)-difference equations, *Advances in Difference Equations*, 2020(1), 1-20.

52. Promsakon, C., Kamsrisuk, N., Ntouyas, S. K., Tariboon, J. (2018). On the second-order quantum (p; q)-difference equations with separated boundary conditions, *Advances in Mathematical Physics*, 1-9.

53. Popescu, O. (2008). A new type of contractive mappings in complete metric spaces. *Bulletin of the Transilvania University of Braşov: Series III Mathematics and Computer Science*. 63(1), 247-256.



Gazili olmak ayrıcalıktır…