
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

HİPERGEOMETRİK ORTOGONAL POLİNOMLAR

Mustafa DUMLUPINAR

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AĞUSTOS 2023

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Mustafa DUMLUPINAR

02/08/2023

HİPERGEOMETRİK ORTOGONAL POLİNOMLAR

(Doktora Tezi)

Mustafa DUMLUPINAR

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ağustos 2023

ÖZET

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı lemmaları ve tanımları içeren ön bilgiler verilmiştir. Sonraki bölümlerde sırasıyla Meixner-Pollaczek polinomları, sürekli Dual Hahn polinomları, Wilson polinomları ve Racah polinomları incelenmiştir. Bu bölümlerde bu polinomların tanımları, doğurucu fonksiyon bağıntıları, ortogonallik bağıntıları, rekürans bağıntıları, integral gösterimleri ve diğer farklı polinomlarla aralarındaki limit ilişkileri verilmiştir. Bu özellikler verilirken önce literatürde olanlar hatırlatılıp sonra orijinal olanları ispatlanmıştır. Ayrıca her bir polinom için bilineer ve bilateral doğurucu fonksiyonlar veren teoremler elde edilmiş ve bunlara örnekler verilmiştir. Son bölüm sonuç ve önerilerden oluşmaktadır.

Bilim Kodu : 20406

Anahtar Kelimeler : Hipergeometrik fonksiyon, ortogonal polinom, doğurucu fonksiyon, rekürans bağıntısı, integral gösterim

Sayfa Adedi : 103

Danışman : Prof. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN

HYPERGEOMETRIC ORTHOGONAL POLYNOMIALS

(Ph. D. Thesis)

Mustafa DUMLUPINAR

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

August 2023

ABSTRACT

This thesis consists of seven chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second part, preliminary information including some lemmas and definitions that will be used in other chapters is given. In the following sections, Meixner-Pollaczek polynomials, continuous Dual Hahn polynomials, Wilson polynomials and Racah polynomials are studied, respectively. In these chapters, definitions of these polynomials, generating function relations, orthogonality relations, recurrence relations, integral representations and limit relations between them with other different polynomials are given. While these properties are given, firstly the ones in the literature are reminded and then the original ones are proved. In addition, theorems that give bilinear and bilateral generating functions for each polynomial are obtained and examples are given. The last section consists of conclusions and recommendations.

Science Code : 20406
Key Words : Hypergeometric function, orthogonal polynomial, generating function, recurrence relation, integral represantation
Page Number : 103
Supervisor : Prof. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca her zaman ilgi, güven ve desteğini gördüğüm, engin bilgi ve tecrübeleriyle bana yol gösteren, bu zorlu süreçte gösterdiği anlayış ve sabır için minnettar olduğum değerli danışman hocam Prof. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN'a, yaptıkları tavsiyeler ve düzeltmelerle tezimi geliştirmemi sağlayan değerli TİK üyeleri Prof. Dr. Mustafa Fahri AKTAŞ (Gazi Üniversitesi) ve Doç. Dr. Meltem GÖLGELİ (TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi) hocalarıma sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım. Ayrıca sabrı ve desteği ile beni güçlendiren, daima yanımda olan sevgili eşim Özge DUMLUPINAR'a, canım oğlum Gökalp DUMLUPINAR'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

SİMGELER VE KISALTMALAR x

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR 3

2.1. Gamma Fonksiyonu 3

2.2. Pochhammer Sembolü 3

2.3. Beta Fonksiyonu 3

2.4. Hipergeometrik Fonksiyon 4

2.5. Hipergeometrik Fonksiyonlarda Komşu Bağıntılar 4

2.6. Doğurucu Fonksiyon 5

2.7. Multilineer Doğurucu Fonksiyon 5

2.8. Multilateral Doğurucu Fonksiyon 5

3. MEİXNER – POLLACZEK POLİNOMLARI 7

3.1. Meixner – Pollaczek Polinomunun Tanımı 7

3.2. Meixner – Pollaczek Polinomu için Bazı Doğurucu Fonksiyonlar 7

3.3. Meixner – Pollaczek Polinomunun Ortogonalliği 9

3.4. Meixner – Pollaczek Polinomu için Bir İntegral Gösterim 10

3.5. Meixner – Pollaczek Polinomunun diğer Bazı Polinomlarla Limit İlişkileri 11

3.6. Meixner – Pollaczek Polinomları için Rekürans Bağıntıları 14

Sayfa

3.7. Meixner – Pollaczek Polinomları için Toplam Formülü 20

3.8. Meixner – Pollaczek Polinomunun Bilineer ve Bilateral Doğurucu Fonksiyonları 20

4. SÜREKLİ DUAL HAHN POLİNOMLARI 25

4.1. Sürekli Dual Hahn Polinomunun Tanımı 25

4.2. Sürekli Dual Hahn Polinomları için Bazı Doğurucu Fonksiyonlar 25

4.3. Sürekli Dual Hahn Polinomunun Ortogonalliği 26

4.4. Sürekli Dual Hahn Polinomları için Rekürans Bağıntıları 29

4.5. Sürekli Dual Hahn Polinomları için İntegral Gösterimler 38

4.6. Sürekli Dual Hahn Polinomlarının diğer Bazı Polinomlarla Limit İlişkileri 42

4.7. Sürekli Dual Hahn Polinomunun Bilineer ve Bilateral Doğurucu Fonksiyonları 44

5. WİLSON POLİNOMLARI 49

5.1. Wilson Polinomunun Tanımı 49

5.2. Wilson Polinomları için Bazı Doğurucu Fonksiyonlar 49

5.3. Wilson Polinomunun diğer Bazı Polinomlarla Limit İlişkileri 50

5.4. Wilson Polinomunun Ortogonalliği 60

5.5. Wilson Polinomları için Rekürans Bağıntıları 63

5.6. Wilson Polinomları için İntegral Gösterimler 67

5.7. Wilson Polinomunun Bilineer ve Bilateral Doğurucu Fonksiyonları 71

6. RACAH POLİNOMLARI 77

6.1. Racah Polinomunun Tanımı 77

6.2. Racah Polinomları için Bazı Doğurucu Fonksiyonlar 77

6.3. Racah Polinomunun diğer Bazı Polinomlarla Limit İlişkileri 78

6.4. Racah Polinomu için Rekürans Bağıntıları 83

Sayfa

6.5. Racah Polinomları için İntegral Gösterimler 89

6.6. Racah Polinomunun Bilineer ve Bilateral Doğurucu Fonksiyonları 91

7. SONUÇ VE ÖNERİLER…..... 95

KAYNAKLAR… 97

EKLER 101

ÖZGEÇMİŞ…..…… 103

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$(\alpha)_r$	Pochhammer Sembolü
$\delta_{m,n}$	Kronecker Delta
$\Gamma(x)$	Gamma Fonksiyonu
$B(x,y)$	Beta Fonksiyonu
${}_2F_1(\alpha\,,\beta\,;\,\gamma\,;\,x)$	Gauss Hipergeometrik Fonksiyonu
${}_pF_q\left(\begin{matrix}\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p\\ \gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_q\end{matrix}\middle\vert\, x\right)$	Genelleştirilmiş Hipergeometrik Seri
$P_n^{(\lambda)}(x;\phi)$	Meixner- Pollaczek Polinomları
$S_n(x^2;a,b,c)$	Sürekli Dual Hahn Polinomları
$W_n(x^2;a,b,c,d)$	Wilson Polinomları
$L_n^{(\alpha)}(x)$	Laguerre Polinomları
$y_n(x;\alpha)$	Bessel Polinomları
$C_n^{(\lambda)}(x)$	Gegenbauer Polinomları
$l_n\,(x;\lambda)$	Gottlieb Polinomları
$\rho_n(x^2;a,b,c,d)$	Sürekli Hahn Polinomları
$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	Jacobi Polinomları
$g_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)$	Lagrange Polinomları
$M_n(x;\beta,z)$	Meixner Polinomları
$T_n(x)$	Birinci Çeşit Chebyshev Polinomları
$U_n(x)$	İkinci Çeşit Chebyshev Polinomları

Simgeler	**Açıklamalar**
$R_n(\lambda(x);\alpha,\beta,\gamma,\delta)$	Racah Polinomları
$R_n(\lambda(x);\alpha,\delta,N)$	Dual Hahn Polinomları
$Q_n(x;\alpha,\beta,N)$	Hahn Polinomları
$K_n\ (y;\rho,N)$	Krawtchouk Polinomları

1. GİRİŞ

Hipergeometrik fonksiyonlar, özel fonksiyonların önemli bir kısmını oluşturmaktadır. Matematik, Fizik, Mühendislik ve İstatistik Teorisinde karşımıza çıkan birçok özel fonksiyonun hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden gösterimi bulunmaktadır. Hipergeometrik serilerle ilgili en önemli gelişmeler 19. yy da Gauss un tezinde,

$$1+\frac{ab}{c}\frac{x}{1!}+\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!}+\cdots$$

hipergeometrik serisini tanımlamasıyla ortaya çıkmıştır.

Ortogonal polinomlar ise kodlama, sayılar ve yaklaşım teorileri, harmonik ve nümerik analiz gibi matematiğin birçok alt alanı ile olasılık teorisi, kuantum mekaniği, katı hal fiziği, optik gibi farklı alanlarda çok sayıda uygulamaya konu olmuştur. Tek değişkenli ortogonal polinomlar teorisi üzerinde yapılan çalışmalar ve elde edilen önemli sonuçlar Jacobi, Hermite, Laguerre ve Stieltjes tarafından verilmiştir. Ortogonal polinomlar teorisinde klasik sonuçlar Szegö tarafından elde edilmiştir [1]. Tek değişkenli ortogonal polinomlar alanındaki çalışmaların artışıyla; biortogonal, q −ortogonal, katlı ortogonal, discrete (ayrık) ortogonal, matris ortogonal ve Sobolev ortogonal kavramları ortaya çıkmış ve bu konulardaki çalışmalar başlamıştır. Çok değişkenli polinomlar ise bu alanlardaki çalışmaların oldukça yeni bir boyutunu oluşturmaktadır. Tek değişkenli ortogonal polinomlardan yararlanılarak, çok değişkenli polinomlar teorisi üzerinde önemli çalışmalar yapılmıştır ve son yıllarda yapılmaya devam etmektedir [2-5]. 2010 yılında Koekoek ve diğerleri yazdıkları kitapta o güne kadar ortogonal polinomlar konusunda yapılmış çalışmaları derlemiş ve polinomları özelliklerine göre sınıflandırmışlardır. Bu sınıflandırma sonucunda Ek-1 de verilen Askey şemasını ortaya koymuşlardır [6].

Meixner-Pollaczek ortogonal polinomları ilk olarak 1934 yılında Meixner tarafından verilmiş, daha sonra 1950 yılında Pollaczek tarafından çalışılmış ve literatüre Meixner-Pollaczek polinomu olarak geçmiştir [7,8]. Meixner-Pollaczek polinomları son yıllarda yapılan pek çok çalışmaya konu olmuştur [9-11].

Sürekli Dual Hahn, Wilson ve Racah polinomları, ilk olarak 1977 yılında Wilson un tezinde verilmiş ve 1980 yılında bu polinomların özelliklerini bir makalesinde çalışmıştır [12,13]. Son yıllarda bu polinomlarla ilgili çalışmalar halen yapılmaktadır [14-16].

Bu tezin ikinci bölümünde tez boyunca kullanılacak temel tanım ve lemmalar ele alınmıştır. Sonraki bölümlerde sırasıyla, Meixner-Pollaczek polinomları, Sürekli Dual Hahn Polinomları, Wilson Polinomları ve Racah Polinomları ile bu polinomların limit durumları olan diğer polinomlar çalışılmıştır. Bu bölümlerde, polinomların tanımları, doğurucu fonksiyonları, ortogonallikleri, rekürans bağıntıları, toplam formülleri, integral gösterimleri ve diğer polinomlarla limit ilişkileri incelenmiştir. Son olarak bilineer, bilateral doğurucu fonksiyonlar elde etmede kullanılacak teoremler elde edilmiş ve buna ilişkin uygulamalar verilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu kısmında, tez boyunca kullanılacak tanımlar, kavramlar ve bilinen lemmalar verilecektir.

2.1. Tanım (Gamma Fonksiyonu)

$\Gamma(z)$ ile gösterilen Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt\,, \quad Re(z) > 0$$

genelleştirilmiş integrali ile tanımlanır. Bu fonksiyon,

$$\Gamma(z+1) = z!$$

ve

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

özelliklerini sağlar [17,18].

2.2. Tanım (Pochhammer Sembolü)

$(a)_n$, Pochhammer sembolü olup

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \qquad (a+n \in \mathbb{C}\setminus \mathbb{Z}_0^-\,, n \in \mathbb{C}\,; a \in \mathbb{C}\setminus \mathbb{Z}_0^-)$$

$$= \begin{cases} 1 & (n=0) \\ a(a+1)(a+2)\dots(a+k-1) & (n=k \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [19].

2.3. Tanım (Beta Fonksiyonu)

$B(x,y)$ ile gösterilen Beta fonksiyonu,

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \quad , \quad Re(x)>0\,, Re(y)>0$$

şeklinde tanımlanır [17,18,20].

2.4. Tanım (Hipergeometrik Fonksiyon)

$a,b\in\mathbb{C}$, $c\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_0^-$ ve $z\in\mathbb{C}$ olmak üzere, $F(a,b;c;z)$ hipergeometrik fonksiyonu,

$$F(a\,,b\,;\,c\,;\,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n\,n!}\,z^n$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyonu da kapsayan genelleştirilmiş hipergeometrik seri $b_1,b_2,\dots,b_q\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_0^-$ için,

$${}_pF_q\left(\begin{matrix}a_1,a_2,\dots,a_p\\ b_1,b_2,\dots,b_q\end{matrix};z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n\,(a_2)_n\,\dots\,(a_p)_n}{(b_1)_n\,(b_2)_n\,\dots\,(b_q)_n\,n!}\,z^n$$

olarak tanımlanır [17,20,21].

2.5. Tanım (Hipergeometrik Fonksiyonlarda Komşu Bağıntılar)

$F(a,b;c;z)$ fonksiyonunda a,b ve c parametrelerinden birini bir artırarak ya da azaltarak elde edilmiş yeni fonksiyonlara komşu fonksiyonlar adı verilir [17,20].

$F(a,b;c;z)$ fonksiyonu için komşu fonksiyonlar,

$F(a+1,b;c;z)$, $F(a-1,b;c;z)$, $F(a,b+1;c;z)$, $F(a,b-1;c;z)$, $F(a,b;c+1;z)$, $F(a,b;c-1;z)$

olmak üzere altı tanedir ve

$$F(a+1,b;c;z)=F(a^+)\,,\ F(a-1,b;c;z)=F(a^-)\,,\ F(a,b+1;c;z)=F(b^+)$$

$$F(a,b-1;c;z)=F(b^-)\,,F(a,b;c+1;z)=F(c^+)\,,\ F(a,b;c-1;z)=F(c^-)$$

olarak gösterilir. Hipergeometrik fonksiyon ile komşu iki fonksiyonu arasında elde edilen bağıntılara komşu fonksiyon bağıntıları denir [17,20].

2.6. Tanım (Doğurucu Fonksiyon)

İki değişkenli bir $F(x,t)$ fonksiyonu t nin kuvvetleri cinsinden

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x)\ t^n$$

şeklinde bir seriye açılabiliyorsa $F(x,t)$ fonksiyonuna, $\{f_n(x)\}$ fonksiyonlar ailesinin bir doğurucu fonksiyonu denir. Burada c_n ler x ve t den bağımsız olarak n nin bir fonksiyonu olup farklı parametreler içerebilirler [17].

2.7. Tanım (Multilineer Doğurucu Fonksiyon)

$\Lambda(x_1,\dots,x_s,t)$ fonksiyonu$(s \in \mathbb{N})$, t nin kuvvetlerine göre

$$\Lambda(x_1,\dots,x_s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k f_k(x_1)\dots f_k(x_s)\, t^k$$

şeklinde bir seriye açılabiliyorsa $\Lambda(x_1,\dots,x_s,t)$ fonksiyonuna $f_k(x_1),\dots,f_k(x_s)$ fonksiyonları için multilineer doğurucu fonksiyon denir. Burada λ_k lar $x_1,\dots,x_s$ ve t den bağımsız, k nın bir fonksiyonudur. Eğer $s=2$ alınırsa $\Lambda(x_1,x_2,t)$ fonksiyonuna bilineer doğurucu fonksiyon denir.

2.8. Tanım (Multilateral Doğurucu Fonksiyon)

$\Psi(x_1,\dots,x_s,t)$ fonksiyonu$(s \in \mathbb{N})$, t nin kuvvetlerine göre

$$\Psi(x_1,\dots,x_s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k f_{k,1}(x_1)\dots f_{k,s}(x_s)\, t^k$$

şeklinde bir seriye açılabiliyorsa $\Psi(x_1,\dots,x_s,t)$ fonksiyonuna $f_{k,1}(x_1),\dots,f_{k,s}(x_s)$ fonksiyonları için multilateral doğurucu fonksiyon denir. Burada ψ_k lar $x_1,\dots,x_s$ ve t den bağımsız, k nın bir fonksiyonudur. Eğer $s=2$ alınırsa $\Psi(x_1,x_2,t)$ fonksiyonuna bilateral doğurucu fonksiyon denir.

2.9. Lemma

$A(k,n)$ k ve n ye, $A(k,m)$ k ve m ye bağlı diziler, p doğal sayı olmak üzere,

$$i.\ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]} A(k,n-pk)$$

$$ii.\ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]} A(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A(k,n+pk)$$

$$iii.\ \sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{[k/p]} A(k,m) = \sum_{m=0}^{[n/p]}\sum_{k=0}^{n-pm} A(k+pm,m)$$

eşitlikleri sağlanır [17]. Burada $[n/p]$, n/p ye eşit ya da n/p den küçük olan en büyük tam sayıyı ifade etmektedir.

3. MEİXNER – POLLACZEK POLİNOMLARI

Bu bölümde Meixner – Pollaczek polinomunun tanımı, bazı doğurucu fonksiyonları, ortogonalliği, bilinen bazı rekürans bağıntıları ve elde ettiğimiz yeni rekürans bağıntıları, toplam formülü, integral gösterimi ve diğer polinomlarla limit ilişkileri incelenecektir. Son olarak bilineer, bilateral doğurucu fonksiyonlar elde etmek için kullanılacak teoremler ve uygulamaları verilecektir.

3.1. Meixner – Pollaczek Polinomunun Tanımı

3.1.1. Tanım

Meixner – Pollaczek polinomu, $P_n^{(\lambda)}(x;\phi)$ ile gösterilir ve

$$P_n^{(\lambda)}(x;\phi) = \frac{(2\lambda)_n}{n!} e^{in\phi} F\left(-n, \lambda + ix; 2\lambda; 1 - e^{-2i\phi}\right) \tag{3.1}$$

$(\lambda > 0\,, \quad 0 < \phi < \pi\,, \quad n = 0,1,2,\dots)$

olarak tanımlanır [8,22].

Meixner – Pollaczek polinomunun ilk üç terimi aşağıdaki gibidir:

$P_0^{(\lambda)}(x;\phi) = 1,$

$P_1^{(\lambda)}(x;\phi) = 2(\lambda cos\phi + xsin\phi),$

$P_2^{(\lambda)}(x;\phi) = x^2 + \lambda^2 + (1+2\lambda)xsin2\phi\,.$

3.2. Meixner – Pollaczek Polinomu için Bazı Doğurucu Fonksiyonlar

3.2.1. Teorem

Meixner – Pollaczek polinomunun bir doğurucu fonksiyon bağıntısı,

$$\left(1 - e^{i\phi}t\right)^{-\lambda+ix}\left(1 - e^{-i\phi}t\right)^{-\lambda-ix} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x;\phi)t^n \tag{3.2}$$

şeklindedir [6,22].

İspat

Eş. 3.2 nin sol tarafında, Lemma 2.9 (*i*) kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$(1-e^{i\phi}t)^{-\lambda+ix}(1-e^{-i\phi}t)^{-\lambda-ix}$$

$$=(1-e^{i\phi}t)^{-2\lambda}\frac{(1-e^{-i\phi}t)^{-\lambda-ix}}{(1-e^{i\phi}t)^{-\lambda-ix}}$$

$$=(1-e^{i\phi}t)^{-2\lambda}\left[1+\frac{e^{i\phi}(1-e^{-2i\phi})t}{1-e^{i\phi}t}\right]^{-\lambda-ix}$$

$$=(1-e^{i\phi}t)^{-2\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda+ix)_k}{k!}\left[\frac{-e^{i\phi}(1-e^{-2i\phi})t}{1-e^{i\phi}t}\right]^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(1-e^{i\phi}t)^{-2\lambda-k}(\lambda+ix)_k\,\frac{\left[-e^{i\phi}(1-e^{-2i\phi})t\right]^k}{k!}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(2\lambda+k)_n\frac{(e^{i\phi}t)^n}{n!}\,(\lambda+ix)_k\,\frac{\left[-e^{i\phi}(1-e^{-2i\phi})t\right]^k}{k!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(2\lambda+k)_n e^{i(n+k)\phi}\frac{(-1)^k(\lambda+ix)_k}{n!\,k!}(1-e^{-2i\phi})^k\,t^{n+k}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(2\lambda+k)_{n-k}e^{in\phi}\frac{(-1)^k(\lambda+ix)_k}{(n-k)!\,k!}(1-e^{-2i\phi})^k\,t^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2\lambda)_n}{(2\lambda)_k}e^{in\phi}\frac{(-1)^k(\lambda+ix)_k}{(n-k)!\,k!}(1-e^{-2i\phi})^k\,t^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(2\lambda)_n e^{in\phi}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(\lambda+ix)_k}{(n-k)!\,(2\lambda)_k k!}(1-e^{-2i\phi})^k\,t^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\lambda)_n}{n!}e^{in\phi}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(\lambda+ix)_k}{(2\lambda)_k k!}(1-e^{-2i\phi})^k\,t^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\lambda)_n}{n!}e^{in\phi}F\left(-n,\lambda+ix;2\lambda;1-e^{-2i\phi}\right)t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x;\phi)t^n$$

elde edilir.

Meixner – Pollaczek polinomları için farklı doğurucu fonksiyon bağıntıları da aşağıda verilmiştir. Bunların ispatları Teorem 3.2.1 in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

3.2.2. Teorem

Meixner – Pollaczek polinomları,

$$e^t\ {}_1F_1\left(\lambda+ix\ ;\ 2\lambda\ ;\ (e^{-2i\phi}-1)t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n^{(\lambda)}(x;\phi)}{(2\lambda)_n e^{in\phi}} t^n \qquad (3.3)$$

şeklinde bir doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir [6,22].

3.2.3. Teorem

Meixner – Pollaczek polinomları hipergeometrik fonksiyon cinsinden,

$$(1-t)^{-\gamma}\ {}_2F_1\left(\gamma\ ,\lambda+ix\ ;\ 2\lambda\ ;\frac{(1-e^{-2i\phi})t}{t-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_n P_n^{(\lambda)}(x;\phi)}{(2\lambda)_n e^{in\phi}} t^n \qquad (3.4)$$

şeklinde bir doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir [6].

Sonuç

Eş. 3.4 doğurucu fonksiyon bağıntısında $\gamma = 2\lambda$ seçilirse,

$$(1-t)^{-\lambda+ix}(1-te^{-2i\phi})^{-\lambda-ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{in\phi}} P_n^{(\lambda)}(x;\phi)t^n \qquad (3.5)$$

elde edilir [9].

3.3. Meixner – Pollaczek Polinomunun Ortogonalliği

3.3.1. Teorem

Meixner – Pollaczek polinomları, $(-\infty,\infty)$ aralığında $\lambda > 0$ ve $0 < \phi < \pi$ olmak üzere,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\phi-\pi)x}|\Gamma(\lambda+ix)|^2\, P_m^{(\lambda)}(x;\phi)\, P_n^{(\lambda)}(x;\phi)dx = \frac{\Gamma(n+2\lambda)}{(2sin\phi)^{2\lambda}n!}\delta_{mn} \tag{3.6}$$

eşitliğini sağlar [6,22].

3.4. Meixner – Pollaczek Polinomları için Bir İntegral Gösterim

3.4.1. Teorem

Meixner – Pollaczek polinomları, $\lambda > 0$ ve $0 < \phi < \pi$ olmak üzere,

$$P_n^{(\lambda)}(x;\phi) = \frac{1}{\Gamma(\lambda-ix)\Gamma(\lambda+ix)}$$

$$\times \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-v_1-v_2}\frac{\left(v_1e^{i\phi}+v_2e^{-i\phi}\right)^n}{n!} {v_1}^{\lambda-ix-1}{v_2}^{\lambda+ix-1}dv_1dv_2 \tag{3.7}$$

şeklinde bir integral gösterimine sahiptir [4].

İspat

Tanım 2.1 de $t = \alpha v$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\alpha^{-x} = \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^{\infty} e^{-\alpha v}v^{x-1}dv\,, \quad Re(x) > 0$$

elde edilir. Bu eşitlik, Eş. 3.2 doğurucu fonksiyon bağıntısında kullanılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x;\phi)t^n$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\lambda-ix)}\int_0^{\infty} e^{(e^{i\phi}t-1)v_1}{v_1}^{\lambda-ix-1}dv_1\frac{1}{\Gamma(\lambda+ix)}\int_0^{\infty} e^{(e^{-i\phi}t-1)v_2}{v_2}^{\lambda+ix-1}dv_2$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\lambda-ix)}\frac{1}{\Gamma(\lambda+ix)}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{e^{i\phi}tv_1-v_1}{v_1}^{\lambda-ix-1}e^{e^{-i\phi}tv_2-v_2}{v_2}^{\lambda+ix-1}dv_1dv_2$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\lambda - ix)} \frac{1}{\Gamma(\lambda + ix)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-v_1 - v_2} e^{t(v_1 e^{i\phi} + v_2 e^{-i\phi})} {v_1}^{\lambda - ix - 1} {v_2}^{\lambda + ix - 1} dv_1 dv_2$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\lambda - ix)} \frac{1}{\Gamma(\lambda + ix)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-v_1 - v_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(v_1 e^{i\phi} + v_2 e^{-i\phi})^n}{n!} t^n \, {v_1}^{\lambda - ix - 1} {v_2}^{\lambda + ix - 1} dv_1 dv_2$$

bulunur. Son eşitliğin her iki tarafında t^n nin katsayıları eşitlenirse istenilen sonuç elde edilir.

3.5. Meixner – Pollaczek Polinomları ile Diğer Bazı Polinomlar Arasında Limit İlişkileri

3.5.1. Teorem

Meixner – Pollaczek polinomları ile Laguerre polinomları arasında,

$$\lim_{\phi \to 0} P_n^{\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\right)} \left(-\frac{1}{2}\phi^{-1} x; \phi\right) = L_n^{(\alpha)}(x) \qquad (3.8)$$

limit ilişkisi mevcuttur [6,22]. Burada $L_n^{(\alpha)}(x)$ Laguerre polinomlarıdır [1,17] ve α negatif olmayan bir parametre olmak üzere,

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \, {}_1F_1(-n \,;\, \alpha + 1 \,;\, x) \qquad (3.9)$$

şeklinde tanımlanır.

İspat

Eş. 3.1 ile tanımlanan Meixner – Pollaczek polinomunda, $\lambda = \frac{1}{2}(\alpha + 1)$ ve x yerine $-\frac{1}{2}\phi^{-1} x$ alınırsa,

$$P_n^{\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\right)} \left(-\frac{1}{2}\phi^{-1} x; \phi\right)$$

$$= \frac{(\alpha + 1)_n}{n!} e^{in\phi} F\left(-n \,, \frac{1}{2}(\alpha + 1) - i\frac{1}{2}\phi^{-1} x \,; \alpha + 1 \,; 1 - e^{-2i\phi}\right)$$

$$= \frac{(\alpha+1)_n}{n!} e^{in\phi} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k \left(\frac{1}{2}(\alpha+1) - i\frac{1}{2}\phi^{-1}x\right)_k}{(\alpha+1)_k k!} (1-e^{-2i\phi})^k$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafının $\phi \to 0$ için limiti alınırsa,

$$\lim_{\phi\to 0} P_n^{\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\right)}\left(-\frac{1}{2}\phi^{-1}x;\phi\right)$$

$$= \lim_{\phi\to 0} \frac{(\alpha+1)_n}{n!} e^{in\phi} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k \left(\frac{1}{2}(\alpha+1) - i\frac{1}{2}\phi^{-1}x\right)_k}{(\alpha+1)_k k!} (1-e^{-2i\phi})^k$$

$$= \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k}{(\alpha+1)_k k!} \left\{\lim_{\phi\to 0} e^{in\phi}\left(\frac{1}{2}(\alpha+1) - i\frac{1}{2}\phi^{-1}x\right)_k (1-e^{-2i\phi})^k\right\}$$

olup burada,

$$\lim_{\phi\to 0} e^{in\phi}\left(\frac{1}{2}(\alpha+1) - i\frac{1}{2}\phi^{-1}x\right)_k (1-e^{-2i\phi})^k = x^k$$

olduğundan,

$$\lim_{\phi\to 0} P_n^{\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\right)}\left(-\frac{1}{2}\phi^{-1}x;\phi\right)$$

$$= \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k}{(\alpha+1)_k k!} x^k$$

$$= \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \ {}_1F_1(-n\,,\alpha+1\,;x)$$

$$= L_n^{(\alpha)}(x)$$

elde edilir.

Meixner – Pollaczek polinomları ile Bessel polinomları arasında yeni bir limit bağıntısı aşağıdaki şekilde elde edilir:

3.5.2. Teorem

Meixner – Pollaczek polinomları,

$$\lim_{\phi\to 0}\left(-\frac{x}{2}\right)^n P_n^{\left(-n-\frac{\alpha}{2}\right)}\left(-\frac{1}{\phi x};\phi\right)=\frac{y_n(x;\alpha)}{n!} \tag{3.10}$$

limit ilişkisini sağlar. Burada, $y_n(x;\alpha)$ Bessel polinomlarıdır[6] ve α negatif olmayan bir parametre olmak üzere,

$$y_n(x;\alpha)=(n+\alpha+1)_n\left(\frac{x}{2}\right)^n\ {}_1F_1\left(-n\,,-2n-\alpha\,;\frac{2}{x}\right) \tag{3.11}$$

şeklinde tanımlanır.

İspat

Eş. 3.1 ile tanımlanan Meixner – Pollaczek polinomunda, $\lambda=-n-\frac{\alpha}{2}$ ve x yerine $-\frac{1}{\phi x}$ alınırsa,

$$P_n^{\left(-n-\frac{\alpha}{2}\right)}\left(-\frac{1}{\phi x};\phi\right)$$

$$=\frac{(-2n-\alpha)_n}{n!}e^{in\phi}F\left(-n\,,-n-\frac{\alpha}{2}-i\frac{1}{\phi x}\,;-2n-\alpha\,;1-e^{-2i\phi}\right)$$

$$=\frac{(-2n-\alpha)_n}{n!}e^{in\phi}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\left(-n-\frac{\alpha}{2}-i\frac{1}{\phi x}\right)_k}{(-2n-\alpha)_k k!}(1-e^{-2i\phi})^k$$

olur. Bu eşitliğin her iki tarafı $\left(-\frac{x}{2}\right)^n$ ile çarpılıp $\phi\to 0$ için limit alınırsa,

$$\lim_{\phi\to 0}\left(-\frac{x}{2}\right)^n P_n^{\left(-n-\frac{\alpha}{2}\right)}\left(-\frac{1}{\phi x};\phi\right)$$

$$=\lim_{\phi\to 0}\left(-\frac{x}{2}\right)^n\frac{(-2n-\alpha)_n}{n!}e^{in\phi}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\left(-n-\frac{\alpha}{2}-i\frac{1}{\phi x}\right)_k}{(-2n-\alpha)_k k!}(1-e^{-2i\phi})^k$$

$$=\left(\frac{x}{2}\right)^n(-1)^n\frac{(-2n-\alpha)_n}{n!}\lim_{\phi\to 0}e^{in\phi}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\left(-n-\frac{\alpha}{2}-i\frac{1}{\phi x}\right)_k}{(-2n-\alpha)_k k!}(1-e^{-2i\phi})^k$$

$$= \frac{(n+\alpha+1)_n}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k}{(-2n-\alpha)_k k!}\left\{\lim_{\phi\to 0} e^{in\phi}\left(-n-\frac{\alpha}{2}-i\frac{1}{\phi x}\right)_k (1-e^{-2i\phi})^k\right\}$$

olup burada,

$$\lim_{\phi\to 0} e^{in\phi}\left(-n-\frac{\alpha}{2}-i\frac{1}{\phi x}\right)_k (1-e^{-2i\phi})^k = \left(\frac{2}{x}\right)^k$$

olduğundan,

$$\lim_{\phi\to 0}\left(-\frac{x}{2}\right)^n P_n^{\left(-n-\frac{\alpha}{2}\right)}\left(-\frac{1}{\phi x};\phi\right)$$

$$= \frac{(n+\alpha+1)_n}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k}{(-2n-\alpha)_k k!}\left(\frac{2}{x}\right)^k$$

$$= (n+\alpha+1)_n \left(\frac{x}{2}\right)^n {}_1F_1\left(-n\,,-2n-\alpha\,;\frac{2}{x}\right)$$

$$= y_n(x;\alpha)$$

elde edilir.

3.6. Meixner – Pollaczek Polinomları için Rekürans Bağıntıları

3.6.1. Lemma

a, b ve c reel ya da kompleks parametreler, $c \notin \{0,-1,-2,\ldots\}$ olmak üzere,
$F(a,b;c;z) = F$ hipergeometrik fonksiyonu,

$$[2a-c+(b-a)z]F = a(1-z)F(a^+) - (c-a)F(a^-) \qquad (3.12)$$

bağıntısını sağlar [23].

3.6.2. Teorem

Meixner – Pollaczek polinomları, $\lambda > 0,\ 0 < \phi < \pi$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$(n+1)P_{n+1}^{(\lambda)}(x;\phi) - 2[x\sin\phi + (n+\lambda)\cos\phi]P_n^{(\lambda)}(x;\phi)$$

$$+(n+2\lambda-1)P_{n-1}^{(\lambda)}(x;\phi)=0 \qquad (3.13)$$

rekürans bağıntısını sağlar [6,7].

İspat

Lemma 3.6.1 de $a=-n$, $b=\lambda+ix$, $c=2\lambda$ ve $z=1-e^{-2i\phi}$ alınırsa,

$$\left[-2n-2\lambda+(\lambda+ix+n)\left(1-e^{-2i\phi}\right)\right]F\left(-n\,,\lambda+ix\,;2\lambda\,;\,1-e^{-2i\phi}\right)$$

$$=-ne^{-2i\phi}F\left(-n+1\,,\lambda+ix\,;2\lambda\,;\,1-e^{-2i\phi}\right)$$

$$-(2\lambda+n)F\left(-n-1\,,\lambda+ix\,;2\lambda\,;\,1-e^{-2i\phi}\right)$$

olur. Meixner – Pollaczek polinomunun Eş. 3.1 de verilen tanımından,

$$\left[-2n-2\lambda+(\lambda+ix+n)\left(1-e^{-2i\phi}\right)\right]\frac{n!}{(2\lambda)_n}e^{-in\phi}P_n^{(\lambda)}(x;\phi)$$

$$=-ne^{-2i\phi}\,\frac{(n-1)!}{(2\lambda)_{n-1}}\,e^{-i(n-1)\phi}P_{n-1}^{(\lambda)}(x;\phi)-(2\lambda+n)\frac{(n+1)!}{(2\lambda)_{n+1}}\,e^{-i(n+1)\phi}P_{n+1}^{(\lambda)}(x;\phi)$$

yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafı $(2\lambda)_n e^{i\phi}$ ile çarpılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\left[(-2n-2\lambda)e^{i\phi}+(\lambda+ix+n)\left(e^{i\phi}-e^{-i\phi}\right)\right]P_n^{(\lambda)}(x;\phi)$$

$$=-(2\lambda+n-1)P_{n-1}^{(\lambda)}(x;\phi)-(n+1)\;P_{n+1}^{(\lambda)}(x;\phi)$$

$$[(-2n-2\lambda)(cos\phi+isin\phi)+(\lambda+ix+n)(2isin\phi)]P_n^{(\lambda)}(x;\phi)$$

$$+(n+2\lambda-1)P_{n-1}^{(\lambda)}(x;\phi)+(n+1)P_{n+1}^{(\lambda)}(x;\phi)$$

$$[-(2n+2\lambda)cos\phi-2insin\phi-2i\lambda sin\phi+2i\lambda sin\phi-2xsin\phi+2insin\phi]P_n^{(\lambda)}(x;\phi)$$

$$+(n+2\lambda-1)P_{n-1}^{(\lambda)}(x;\phi)+(n+1)P_{n+1}^{(\lambda)}(x;\phi)=0$$

$$-2[xsin\phi+(n+\lambda)cos\phi]P_n^{(\lambda)}(x;\phi)+(n+2\lambda-1)P_{n-1}^{(\lambda)}(x;\phi)+(n+1)P_{n+1}^{(\lambda)}(x;\phi)=0$$

elde edilir.

3.6.3. Teorem

Meixner – Pollaczek polinomları $n \geq 0$ olmak üzere,

$$\sum_{k=0}^{n}\left[e^{(k+1)i\phi}(\lambda - ix) + e^{-(k+1)i\phi}(\lambda + ix)\right]P_{n-k}^{(\lambda)}(x;\phi) = (n+1)P_{n+1}^{(\lambda)}(x;\phi) \qquad (3.14)$$

şeklinde bir rekürans bağıntısına sahiptir [9].

İspat

Eş. 3.2 ile verilen doğurucu fonksiyon bağıntısının her iki yanının t ye göre türevi alınırsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP_n^{(\lambda)}(x;\phi)t^{n-1}$$

$$= -(-\lambda + ix)\left(1 - e^{i\phi}t\right)^{-\lambda+ix-1}e^{i\phi}\left(1 - e^{-i\phi}t\right)^{-\lambda-ix}$$

$$-\left(1 - e^{i\phi}t\right)^{-\lambda+ix}(-\lambda - ix)\left(1 - e^{-i\phi}t\right)^{-\lambda-ix-1}e^{-i\phi}$$

$$= -e^{i\phi}(-\lambda + ix)\left(1 - e^{i\phi}t\right)^{-1}\left(1 - e^{i\phi}t\right)^{-\lambda+ix}\left(1 - e^{-i\phi}t\right)^{-\lambda-ix}$$

$$-e^{-i\phi}(-\lambda - ix)\left(1 - e^{-i\phi}t\right)^{-1}\left(1 - e^{i\phi}t\right)^{-\lambda+ix}\left(1 - e^{-i\phi}t\right)^{-\lambda-ix}$$

olup burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}^{(\lambda)}(x;\phi)t^{n}$$

$$= e^{i\phi}(\lambda - ix)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1)_k}{k!}\left(e^{i\phi}t\right)^{k}\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{(\lambda)}(x;\phi)t^{n}$$

$$+e^{-i\phi}(\lambda + ix)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1)_k}{k!}\left(e^{-i\phi}t\right)^{k}\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{(\lambda)}(x;\phi)t^{n}$$

$$= e^{i\phi}(\lambda - ix)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} e^{ik\phi}\, P_n^{(\lambda)}(x;\phi)t^{n+k} + e^{-i\phi}(\lambda + ix)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-ik\phi}\, P_n^{(\lambda)}(x;\phi)t^{n+k}$$

$$= e^{i\phi}(\lambda - ix)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} e^{ik\phi}\, P_{n-k}^{(\lambda)}(x;\phi)t^{n} + e^{-i\phi}(\lambda + ix)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} e^{-ik\phi}\, P_{n-k}^{(\lambda)}(x;\phi)t^{n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left[e^{(k+1)i\phi}(\lambda - ix) + e^{-(k+1)i\phi}(\lambda + ix)\right] P_{n-k}^{(\lambda)}(x;\phi)t^{n}$$

olur. Bu son eşitlikte, t^n nin katsayıları eşitlendiğinde istenilen sonuca ulaşılır.

3.6.4. Teorem

Meixner – Pollaczek Polinomları $n \geq 1$ olmak üzere,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{-ie^{(k+1)i\phi} + ie^{-(k+1)i\phi}}{k+1}\right] P_{n-k-1}^{(\lambda)}(x;\phi) = \frac{d}{dx}P_n^{(\lambda)}(x;\phi) \qquad (3.15)$$

şeklinde türev içeren bir rekürans bağıntısına sahiptir [9].

İspat

Eş. 3.2 doğurucu fonksiyon bağıntısının her iki tarafının *x* e göre türevi alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}P_n^{(\lambda)}(x;\phi)t^n$$

$$= i\left(1 - e^{i\phi}t\right)^{-\lambda+ix}\ln\left(1 - e^{i\phi}t\right)\left(1 - e^{-i\phi}t\right)^{-\lambda-ix}$$

$$-\left(1 - e^{i\phi}t\right)^{-\lambda+ix} i\left(1 - e^{-i\phi}t\right)^{-\lambda-ix}\ln\left(1 - e^{-i\phi}t\right)$$

$$= i\ln\left(1 - e^{i\phi}t\right)\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{(\lambda)}(x;\phi)t^n - i\ln\left(1 - e^{-i\phi}t\right)\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{(\lambda)}(x;\phi)t^n$$

elde edilir. Burada $\ln(1+z) = zF(1,1;2;-z)$ açılımı kullanılırsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} P_n^{(\lambda)}(x;\phi)t^n$$

$$= -ie^{i\phi}t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k (1)_k}{(2)_k k!} \left(e^{i\phi}t\right)^k \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x;\phi)t^n$$

$$+ie^{-i\phi}t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k (1)_k}{(2)_k k!} \left(e^{-i\phi}t\right)^k \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x;\phi)t^n$$

$$= -ie^{i\phi}t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!\,k!}{(k+1)!\,k!} \left(e^{i\phi}t\right)^k \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x;\phi)t^n$$

$$+ie^{-i\phi}t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!\,k!}{(k+1)!\,k!} \left(e^{-i\phi}t\right)^k \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x;\phi)t^n$$

$$= -ie^{i\phi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} e^{ik\phi}\, P_n^{(\lambda)}(x;\phi)t^{n+k+1}$$

$$+ie^{-i\phi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} e^{-ik\phi}\, P_n^{(\lambda)}(x;\phi)t^{n+k+1}$$

$$= -ie^{i\phi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} e^{ik\phi}\, P_{n-k}^{(\lambda)}(x;\phi)t^{n+1} + ie^{-i\phi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} e^{-ik\phi}\, P_{n-k}^{(\lambda)}(x;\phi)t^{n+1}$$

$$= -ie^{i\phi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} e^{ik\phi}\, P_{n-k-1}^{(\lambda)}(x;\phi)t^{n} + ie^{-i\phi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} e^{-ik\phi}\, P_{n-k-1}^{(\lambda)}(x;\phi)t^{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{-i}{k+1} e^{i(k+1)\phi} + \frac{i}{k+1} e^{-i(k+1)\phi}\right] P_{n-k-1}^{(\lambda)}(x;\phi)t^{n}$$

olur. t^n nin katsayıları eşitlendiğinde istenilen sonuca ulaşılır.

3.6.5. Teorem

Meixner – Pollaczek Polinomları, $\lambda > 0$, $0 < \phi < \pi$ ve $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere,

$$(n+1)(2\lambda)(2\lambda-1)P_{n+1}^{(\lambda)}(x;\phi)=(2\lambda+n)(2\lambda)(2\lambda-1)e^{i\phi}P_n^{(\lambda)}(x;\phi)$$

$$+(\lambda+ix)(2\lambda+n)(2\lambda+n-1)(e^{-i\phi}-e^{i\phi})P_n^{(\lambda-\frac{1}{2})}\left(x+\frac{i}{2};\phi\right) \quad (3.16)$$

rekürans bağıntısını sağlar.

İspat

Eş. 3.3 doğurucu fonksiyon bağıntısında ${}_1F_1$ yerine yazılıp her iki tarafın t ye göre türevi alınırsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nP_n^{(\lambda)}(x;\phi)}{(2\lambda)_n e^{in\phi}}t^{n-1}$$

$$=e^t\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda+ix)_k}{(2\lambda)_k\,k!}\left[(e^{-2i\phi}-1)t\right]^k+e^t\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda+ix)_k}{(2\lambda)_k\,k!}k(e^{-2i\phi}-1)\left[(e^{-2i\phi}-1)t\right]^{k-1}$$

olur. Burada eşitliğin sol tarafında n yerine $n+1$, sağ tarafında ikinci toplam ifadesinde de k yerine $k+1$ yazılıp gerekli işlemler yapılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)P_{n+1}^{(\lambda)}(x;\phi)}{(2\lambda)_{n+1}e^{i(n+1)\phi}}t^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n^{(\lambda)}(x;\phi)}{(2\lambda)_n e^{in\phi}}t^n+e^t(e^{-2i\phi}-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda+ix)_{k+1}}{(2\lambda)_{k+1}\,k!}\left[(e^{-2i\phi}-1)t\right]^k$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n^{(\lambda)}(x;\phi)}{(2\lambda)_n e^{in\phi}}t^n+\frac{(e^{-2i\phi}-1)(\lambda+ix)}{2\lambda}e^t\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda+ix+1)_k}{(2\lambda+1)_k\,k!}\left[(e^{-2i\phi}-1)t\right]^k$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n^{(\lambda)}(x;\phi)}{(2\lambda)_n e^{in\phi}}t^n+\frac{(e^{-2i\phi}-1)(\lambda+ix)}{2\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n^{(\lambda-\frac{1}{2})}\left(x+\frac{i}{2};\phi\right)}{(2\lambda-1)_n\,e^{in\phi}}t^n$$

elde edilir. Son eşitlikte t^n nin katsayıları eşitlenip gerekli düzenlemeler yapılırsa istenilen rekürans bağıntısı elde edilir.

3.7. Meixner – Pollaczek Polinomları için Toplam Formülü

3.7.1. Teorem

Meixner – Pollaczek polinomları, $\lambda, \mu > 0$, $0 < \phi < \pi$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$P_n^{(\lambda+\mu)}(x+y;\phi) = \sum_{k=0}^{n} P_{n-k}^{(\lambda)}(x;\phi) P_k^{(\mu)}(y;\phi) \tag{3.17}$$

toplam formülüne sahiptir [9].

İspat

Eş. 3.2 doğurucu fonksiyon bağıntısında λ yerine $\lambda+\mu$ ve x yerine $x+y$ alınıp düzenlenirse,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda+\mu)}(x+y;\phi)\, t^n$$

$$= \left(1-e^{i\phi}t\right)^{-\lambda-\mu+ix+iy}\left(1-e^{-i\phi}t\right)^{-\lambda-\mu-ix-iy}$$

$$= \left(1-e^{i\phi}t\right)^{-\lambda+ix}\left(1-e^{-i\phi}t\right)^{-\lambda-ix}\left(1-e^{i\phi}t\right)^{-\mu+iy}\left(1-e^{-i\phi}t\right)^{-\mu-iy}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x;\phi)t^n \sum_{k=0}^{\infty} P_k^{(\mu)}(y;\phi)t^k$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x;\phi)P_k^{(\mu)}(y;\phi)t^{n+k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} P_{n-k}^{(\lambda)}(x;\phi)P_k^{(\mu)}(y;\phi)t^{n}$$

olur. Burada t^n nin katsayıları eşitlendiğinde istenilen toplam formülü elde edilir.

3.8. Meixner – Pollaczek Polinomları için Bilineer ve Bilateral Doğurucu Fonksiyonlar

Son yıllarda tek ve çok değişkenli polinomlar için multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyonlar veren sonuçlar bir çok makalede çalışılmıştır [4,5,19,24].

Bu kısımda Meixner–Pollaczek polinomlarının bilineer ve bilateral doğurucu fonksiyonlarını elde etmek için kullanılacak teoremler ve uygulamaları verilecektir.

3.8.1. Teorem

μ - yüncü basamaktan s kompleks değişkenli ($s \in \mathbb{N}$) sıfıra denk olmayan $\Omega_{\mu}(\xi_1, \dots, \xi_s)$ fonksiyonu,

$$\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1, \dots, \xi_s; \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \dots, \xi_s)\tau^k$$

($a_k \neq 0$, $\psi \in \mathbb{C}$)

ve $n, p \in \mathbb{N}$ için

$$\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x;\ \phi;\ \xi_1, \dots, \xi_s;\ \zeta) = \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k P_{n-pk}^{(\lambda)}(x;\phi)\ \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \dots, \xi_s)\zeta^k \tag{3.18}$$

olsun. Bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\mu,\psi}\left(x;\ \phi;\ \xi_1, \dots, \xi_s; \frac{\eta}{t^p}\right) t^n$$

$$= \left(1 - e^{i\phi}t\right)^{-\lambda+ix}\left(1 - e^{-i\phi}t\right)^{-\lambda-ix} \Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1, \dots, \xi_s; \eta) \tag{3.19}$$

eşitliği sağlanır [9].

İspat

Eş. 3.19 un sol tarafını S ile gösterelim. $\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}\left(x;\ \phi;\ \xi_1, \dots, \xi_s; \frac{\eta}{t^p}\right)$ polinomunun değeri, Eş. 3.18 den alınıp Eş. 3.19 da yerine yazılır ve Lemma 2.9 (*ii*) uygulanırsa,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k P_{n-pk}^{(\lambda)}(x;\phi)\ \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \dots, \xi_s) \frac{\eta^k}{t^{pk}}\ t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_n^{(\lambda)}(x;\phi)\ \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \dots, \xi_s)\eta^k\ t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x;\phi)t^n \sum_{n=0}^{\infty} a_k\, \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \dots, \xi_s)\eta^k$$

$$= \left(1 - e^{i\phi}t\right)^{-\lambda+ix}\left(1 - e^{-i\phi}t\right)^{-\lambda-ix} \Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1, \dots, \xi_s; \eta)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.8.1 de $\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \dots, \xi_s)$ $(s \in \mathbb{N})$ çok değişkenli fonksiyonu bir ya da çok değişkenli basit fonksiyonlar tarafından ifade edilerek, elde edilen sonuçların farklı uygulamaları verilebilir.

Örnek

Teorem 3.8.1 de $s = 1$, $\xi_1 = y$, $a_k = 1$, $\mu = 0$, $\psi = 1$ ve $\Omega_{\mu+\psi k}(y)$ yerine $P_{\mu+\psi k}^{(\lambda_1)}(y;\phi_1)$ olarak alınırsa Meixner – Pollaczek polinomları için bilineer doğurucu fonksiyonların bir sınıfı aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]} P_{n-pk}^{(\lambda)}(x;\phi)P_k^{(\lambda_1)}(y;\phi_1)\eta^k\, t^{n-pk}$$

$$= \left(1 - e^{i\phi}t\right)^{-\lambda+ix}\left(1 - e^{-i\phi}t\right)^{-\lambda-ix}\left(1 - e^{i\phi_1}\eta\right)^{-\lambda_1+iy}\left(1 - e^{-i\phi_1}\eta\right)^{-\lambda_1-iy}.$$

Örnek

Teorem 3.8.1 de $s = 1, \xi_1 = y$ ve $\Omega_{\mu+\psi k}(y)$ yerine $S_{\mu+\psi k}(y^2; a, b, c)$ alınsın. Burada $S_n(x^2; a, b, c)$ sürekli Dual Hahn polinomları olup

$$(1-t)^{-c+ix}F(a+ix, b+ix; a+b; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n(x^2; a, b, c)}{(a+b)_n\, n!}\, t^n$$

doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir [6]. Elde edilen sonuçta, $a_k = \frac{1}{(a+b)_k\, k!}$, $\mu = 0$, $\psi = 1$ alındığında, Meixner – Pollaczek polinomları ile sürekli Dual Hahn polinomları için bilateral doğurucu fonksiyonların bir sınıfı aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]} P_{n-pk}^{(\lambda)}(x;\phi)\frac{S_k(y^2;a,b,c)}{(a+b)_k\,k!}\eta^k\,t^{n-pk}$$

$$=\left(1-e^{i\phi}t\right)^{-\lambda+ix}\left(1-e^{-i\phi}t\right)^{-\lambda-ix}(1-\eta)^{-c+iy}\;{}_2F_1(a+iy\,,b+iy\,;a+b\,;\eta).$$

3.8.2. Teorem

μ - yüncü basamaktan s kompleks değişkenli ($s\in\mathbb{N}$) sıfıra denk olmayan $\Omega_\mu(\xi_1,\dots,\xi_s)$ fonksiyonu $a_k\neq 0$, $n,p\in\mathbb{N}$ için,

$$\Lambda_{\mu,\psi,\lambda_1,\lambda_2}^{n,p}(x_1+x_2;\phi;y_1,\dots,y_s;z)$$

$$=\textstyle\sum_{k=0}^{[n/p]} a_k P_{n-pk}^{(\lambda_1+\lambda_2)}(x_1+x_2;\phi)\,\Omega_{\mu+\psi k}(y_1,\dots,y_s)z^k \qquad (3.20)$$

olsun. Bu durumda,

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{[k/p]} a_m P_{n-k}^{(\lambda_1)}(x_1;\phi)\,P_{k-pm}^{(\lambda_2)}(x_2;\phi)\Omega_{\mu+\psi m}(y_1,\dots,y_s)z^m$$

$$=\Lambda_{\mu,\psi,\lambda_1,\lambda_2}^{n,p}(x_1+x_2;\phi;y_1,\dots,y_s;z) \qquad (3.21)$$

eşitliği gerçeklenir [9].

İspat

Eş. 3.21 in sol tarafı T ile gösterilir, Lemma 2.9 (*iii)* uygulanır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$T=\sum_{m=0}^{[n/p]}\sum_{k=0}^{n-pm} a_m P_{n-k-pm}^{(\lambda_1)}(x_1;\phi)\,P_k^{(\lambda_2)}(x_2;\phi)\Omega_{\mu+\psi m}(y_1,\dots,y_s)z^m$$

$$=\sum_{m=0}^{[n/p]} a_m\left(\sum_{k=0}^{n-pm} P_{n-k-pm}^{(\lambda_1)}(x_1;\phi)P_k^{(\lambda_2)}(x_2;\phi)\right)\Omega_{\mu+\psi m}(y_1,\dots,y_s)z^m$$

$$=\sum_{m=0}^{[n/p]} a_m P_{n-pm}^{(\lambda_1+\lambda_2)}(x_1+x_2;\phi)\,\Omega_{\mu+\psi m}(y_1,\dots,y_s)z^m$$

$$= \Lambda^{n,p}_{\mu,\psi,\lambda_1,\lambda_2}(x_1 + x_2; \phi; y_1, \dots, y_s; z)$$

elde edilir.

4. SÜREKLİ DUAL HAHN POLİNOMLARI

Bu bölümde, sürekli Dual Hahn polinomunun tanımı, doğurucu fonksiyonları, ortogonalliği, bilinen bazı rekürans bağıntıları, elde ettiğimiz yeni rekürans bağıntıları, integral gösterimler verilecektir. Son olarak bu polinomlar için bilineer, bilateral doğurucu fonksiyonlar veren yeni teoremler ispatlanacak ve uygulamaları verilecektir.

4.1. Sürekli Dual Hahn Polinomlarının Tanımı

4.1.1. Tanım

Sürekli Dual Hahn polinomu, $S_n(x^2;a,b,c)$ ile gösterilir ve

$$\frac{S_n(x^2;a,b,c)}{(a+b)_n(a+c)_n} = {}_3F_2(-n, a+ix, a-ix; a+b, a+c; 1) \tag{4.1}$$

olarak tanımlanır [1,7,14].

4.2. Sürekli Dual Hahn Polinomu için Bazı Doğurucu Fonksiyonlar

Bu kısımda sürekli Dual Hahn polinomunun bilinen bazı doğurucu fonksiyonları verilecektir.

4.2.1. Teorem

Sürekli Dual Hahn polinomları aşağıdaki doğurucu fonksiyon bağıntılarına sahiptir [6]:

$$(1-t)^{-c+ix}F(\,a+ix, b+ix; a+b; t) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{S_n(x^2;a,b,c)}{(a+b)_n n!}t^n \tag{4.2}$$

$$(1-t)^{-b+ix}F(\,a+ix, c+ix; a+c; t) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{S_n(x^2;a,b,c)}{(a+c)_n n!}t^n \tag{4.3}$$

$$(1-t)^{-a+ix}F(\,b+ix, c+ix; b+c; t) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{S_n(x^2;a,b,c)}{(b+c)_n n!}t^n \tag{4.4}$$

$$e^t\;{}_2F_2(\,a+ix, a-ix; a+b, a+c; -t) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{S_n(x^2;a,b,c)}{(a+b)_n(a+c)_n n!}t^n. \tag{4.5}$$

İspat

Sürekli Dual Hahn polinomları için verilen doğurucu fonksiyon bağıntılarından Eş. 4.5 in ispatını yapalım. Eş. 4.5 in sol tarafında e^x fonksiyonunun ve ${}_2F_2$ hipergeometrik fonksiyonunun serisel açılımları yazılıp daha sonra Lemma 2.9 (i) kullanılırsa,

$$e^t\ {}_2F_2(\,a+ix, a-ix; a+b, a+c; -t)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a+ix)_k(a-ix)_k}{(a+b)_k(a+c)_k k!}(-t)^k$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a+ix)_k(a-ix)_k(-1)^k}{(a+b)_k(a+c)_k k!\,n!}t^{n+k}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(a+ix)_k(a-ix)_k(-1)^k n!}{(a+b)_k(a+c)_k k!\,(n-k)!}\frac{t^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(a+ix)_k(a-ix)_k}{(a+b)_k(a+c)_k k!}\frac{t^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}{}_3F_2(-n, a+ix, a-ix; a+b, a+c; 1)\frac{t^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S_n(x^2; a, b, c)}{(a+b)_n(a+c)_n n!}t^n$$

elde edilir.

Diğer doğurucu fonksiyon bağıntılarının ispatları da benzer şekildedir.

4.3. Sürekli Dual Hahn Polinomunun Ortogonalliği

4.3.1. Lemma

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\left|\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(c+s)}{\Gamma(2s)}\right|^2 ds = 2\,\Gamma(a+b)\Gamma(a+c)\Gamma(b+c) \qquad (4.6)$$

olup burada,

$$\left|\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(c+s)}{\Gamma(2s)}\right|^2 = \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(a-s)\Gamma(b+s)\Gamma(b-s)\Gamma(c+s)\Gamma(c-s)}{\Gamma(2s)\Gamma(-2s)}$$

dir. Kontur imajiner eksen boyuncadır ve uygun şekilde deforme edilmiştir. a, b, c parametreleri buna uygun olarak seçilmiştir [20].

4.3.2. Teorem

Sürekli Dual Hahn polinomları,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\left|\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(c+s)}{\Gamma(2s)}\right|^2 S_m(-s^2;a,b,c)\,S_n(-s^2;a,b,c)ds$$

$$= 2n!\;\Gamma(n+a+b)\Gamma(n+a+c)\Gamma(n+b+c)\delta_{mn} \qquad (4.7)$$

bağıntısını sağlar [6].

İspat

Sürekli Dual Hahn polinomunun Eş. 4.1 ile verilen tanımından,

$$S_m(-s^2,a,b,c) = \sum_{k=0}^{m} A_k(b-s)_k(b+s)_k$$

yazılabilir. Burada A_k, işlem kolaylığı için k ye bağlı terimlerden uygun şekilde seçilmiştir. Aşağıdaki işlemlerde karşımıza çıkan integral için Lemma 4.3.1 kullanılarak,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\left|\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(c+s)}{\Gamma(2s)}\right|^2 (b-s)_k(b+s)_k S_n(-s^2;a,b,c)ds$$

$$= (a+b)_n(a+c)_n\sum_{j=0}^{n}\frac{(-n)_j}{(a+b)_j(a+c)_j j!}$$

$$\times \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\left|\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(c+s)}{\Gamma(2s)}\right|^2 (a-s)_j(a+s)_j\,(b-s)_k(b+s)_k ds$$

$$= (a+b)_n(a+c)_n\sum_{j=0}^{n}\frac{(-n)_j}{(a+b)_j(a+c)_j j!}$$

$$\times \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(a-s)\Gamma(b+s)\Gamma(b-s)\Gamma(c+s)\Gamma(c-s)}{\Gamma(2s)\Gamma(-2s)}$$

$$\times \frac{\Gamma(a+j-s)}{\Gamma(a-s)}\,\frac{\Gamma(a+j+s)}{\Gamma(a+s)}\frac{\Gamma(b+k-s)}{\Gamma(b-s)}\frac{\Gamma(b+k+s)}{\Gamma(b+s)}ds$$

$$= (a+b)_n(a+c)_n\sum_{j=0}^{n}\frac{(-n)_j}{(a+b)_j(a+c)_j j!}$$

$$\times \int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\Gamma(a+j+s)\Gamma(a+j-s)\Gamma(b+k+s)\Gamma(b+k-s)}{\Gamma(2s)\Gamma(-2s)}\,|\Gamma(c+s)|^2 ds$$

$$= (a+b)_n(a+c)_n\sum_{j=0}^{n}\frac{(-n)_j}{(a+b)_j(a+c)_j j!}\,2\,\Gamma(a+b+j+k)\Gamma(a+c+j)\Gamma(b+c+k)$$

$$= (a+b)_n(a+c)_n\sum_{j=0}^{n}\frac{(-n)_j}{(a+b)_j(a+c)_j j!}$$

$$\times 2\,\Gamma(a+b+k)(a+b+k)_j\Gamma(a+c)(a+c)_j\Gamma(b+c+k)$$

$$= 2\,\Gamma(a+b+k)\Gamma(a+c+n)\Gamma(b+c+k)(a+b)_n\sum_{j=0}^{n}\frac{(-n)_j(a+b+k)_j}{(a+b)_j j!}$$

$$= 2\,\Gamma(a+b+k)\Gamma(a+c+n)\Gamma(b+c+k)(a+b)_n\;{}_2F_1(-n,a+b+k;a+b;1)$$

$$= 2\,\Gamma(a+b+k)\Gamma(a+c+n)\Gamma(b+c+k)(-k)_n$$

elde edilir. Buradan,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\left|\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(c+s)}{\Gamma(2s)}\right|^2 (b-s)_k(b+s)_k S_n(-s^2;a,b,c)ds$$

$$= 2(-k)_n\,\Gamma(a+b+k)\Gamma(a+c+n)\Gamma(b+c+k)$$

sonucuna varılır. Burada $(-k)_n$ terimi $k<n$ için sıfıra eşit olup $S_n(-s^2;a,b,c)$ polinomu için a ve b nin simetrisinden dolayı,

$$S_n(-s^2;a,b,c)=\frac{(-n)_n}{n!}(b-s)_n(b+s)_n+\sum_{k=0}^{n-1}A_k(b-s)_k(b+s)_k$$

olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.2. de s yerine ix alınırsa,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left|\frac{\Gamma(a+ix)\Gamma(b+ix)\Gamma(c+ix)}{\Gamma(2ix)}\right|^2 S_m(x^2;a,b,c)\,S_n(x^2;a,b,c)dx$$

$$= n!\;\Gamma(n+a+b)\Gamma(n+a+c)\Gamma(n+b+c)\delta_{mn}$$

elde edilir. Buna göre, sürekli Dual Hahn polinomları

$$w(x)=\left|\frac{\Gamma(a+ix)\Gamma(b+ix)\Gamma(c+ix)}{\Gamma(2ix)}\right|^2$$

ağırlık fonksiyonuna göre $(0,\infty)$ aralığında ortogonal olup normu bu son ifadenin karekökü̈ne eşittir.

4.4. Sürekli Dual Hahn Polinomları için Rekürans Bağıntıları

4.4.1. Lemma

a, b, c, d ve e reel ya da kompleks parametreler olmak üzere,

$${}_3F_2\left(\begin{matrix}a,b,c\\ d\;\;e\end{matrix};\;\;1\right)=F(a)$$

hipergeometrik fonksiyonu,

$$bcF(a) - a(d + e - a - b - c - 1)[F(a + 1) - F(a)]$$

$$+(d - a)(e - a)[F(a - 1) - F(a)] = 0$$

bağıntısını sağlar [12,20].

4.4.2. Teorem

Sürekli Dual Hahn polinomları için bir rekürans bağıntısı,

$$-(a^2 + x^2)\tilde{S}_n(x^2) = A_n\tilde{S}_{n+1}(x^2) - (A_n + C_n)\tilde{S}_n(x^2) + C_n\tilde{S}_{n-1}(x^2)$$

şeklindedir. Burada, $n \in \mathbb{N}_0$ olup

$$\tilde{S}_n(x^2) \coloneqq \tilde{S}_n(x^2; a, b, c) = \frac{S_n(x^2; a, b, c)}{(a + b)_n(a + c)_n},$$

$$A_n = (n + a + b)(n + a + c)$$

ve

$$C_n = n(n + b + c - 1)$$

dir [6].

İspat

Lemma 4.4.1 de a yerine $-n$, b yerine $a + ix$, c yerine $a - ix$, d yerine $a + b$, e yerine $a + c$ alınırsa,

$$(a + ix)(a - ix)F(-n) + n(n + b + c - 1)[F(-n + 1) - F(-n)]$$

$$+(n + a + b)(n + a + c)[F(-n - 1) - F(-n)] = 0 \qquad (4.8)$$

elde edilir. Burada,

$$F(-n) = \frac{S_n(x^2; a, b, c)}{(a + b)_n(a + c)_n} = \tilde{S}_n(x^2; a, b, c) = \tilde{S}_n(x^2)$$

$$F(-n-1)=\frac{S_{n+1}(x^2;a,b,c)}{(a+b)_{n+1}(a+c)_{n+1}}=\tilde{S}_{n+1}(x^2;a,b,c)=\tilde{S}_{n+1}(x^2)$$

$$F(-n+1)=\frac{S_{n-1}(x^2;a,b,c)}{(a+b)_{n-1}(a+c)_{n-1}}=\tilde{S}_{n-1}(x^2;a,b,c)=\tilde{S}_{n-1}(x^2)$$

olup bu eşitlikler Eş. 4.8 de yerlerine yazılırsa,

$$(a^2+x^2)\tilde{S}_n(x^2)+n(n+b+c-1)\left[\tilde{S}_{n-1}(x^2)-\tilde{S}_n(x^2)\right]$$

$$+(n+a+b)(n+a+c)\left[\tilde{S}_{n+1}(x^2)-\tilde{S}_n(x^2)\right]=0$$

bulunur. Burada da, $A_n=\ (n+a+b)(n+a+c)$ ve $C_n=n(n+b+c-1)$ olarak alınırsa,

$$(a^2+x^2)\tilde{S}_n(x^2)+C_n\left[\tilde{S}_{n-1}(x^2)-\tilde{S}_n(x^2)\right]+A_n\left[\tilde{S}_{n+1}(x^2)-\tilde{S}_n(x^2)\right]=0$$

olup bu son bağıntı düzenlendiğinde istenilen sonuç elde edilir.

Şimdi sürekli Dual Hahn polinomları için aşağıdaki şekilde yeni rekürans bağıntıları elde edilecektir.

4.4.3. Teorem

Sürekli Dual Hahn polinomları, $n\in\mathbb{N}_0$ için

$$(a+b+n)(a+c+n)S_n(x^2;a,b,c)$$

$$-(a^2+x^2)S_n(x^2;a+1,b,c)=S_{n+1}(x^2;a,b,c)$$

rekürans bağıntısını sağlar.

İspat

Eş. 4.5 ile verilen doğurucu fonksiyon bağıntısında, ${}_2F_2$ hipergeometrik fonksiyonunun seri karşılığı yazılıp eşitliğin her iki yanının t ye göre türevi alınırsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n(x^2;a,b,c)}{(a+b)_n(a+c)_n(n-1)!}\, t^{n-1}$$

$$= e^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+ix)_k(a-ix)_k}{(a+b)_k(a+c)_k k!}(-t)^k - e^t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a+ix)_k(a-ix)_k}{(a+b)_k(a+c)_k(k-1)!}(-t)^{k-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_{n+1}(x^2;a,b,c)}{(a+b)_{n+1}(a+c)_{n+1} n!}\, t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n(x^2;a,b,c)}{(a+b)_n(a+c)_n n!}\, t^n - \; e^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+ix)_{k+1}(a-ix)_{k+1}}{(a+b)_{k+1}(a+c)_{k+1} k!}(-t)^k$$

$$\frac{1}{(a+b)(a+c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_{n+1}(x^2;a,b,c)}{(a+b+1)_n(a+c+1)_n n!}\, t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n(x^2;a,b,c)}{(a+b)_n(a+c)_n n!}\, t^n - \; \frac{(a^2+x^2)e^t}{(a+b)(a+c)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+ix+1)_k(a-ix+1)_k}{(a+b+1)_k(a+c+1)_k k!}(-t)^k$$

$$\frac{1}{(a+b)(a+c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_{n+1}(x^2;a,b,c)}{(a+b+1)_n(a+c+1)_n n!}\, t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n(x^2;a,b,c)}{(a+b)_n(a+c)_n n!}\, t^n - \; \frac{(a^2+x^2)}{(a+b)(a+c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n(x^2;a+1,b,c)}{(a+b+1)_n(a+c+1)_n n!}\, t^n$$

olur. Bulunan bu son eşitliğin her iki yanında $\frac{t^n}{n!}$ nin katsayıları eşitlenirse,

$$\frac{1}{(a+b)(a+c)} \frac{S_{n+1}(x^2;a,b,c)}{(a+b+1)_n(a+c+1)_n}$$

$$= \frac{S_n(x^2;a,b,c)}{(a+b)_n(a+c)_n} - \frac{(a^2+x^2)}{(a+b)(a+c)} \frac{S_n(x^2;a+1,b,c)}{(a+b+1)_n(a+c+1)_n}$$

elde edilir. Burada $(a+b)(a+b+1)_n(a+c)(a+c+1)_n = (a+b)_{n+1}(a+c)_{n+1}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\frac{S_{n+1}(x^2;a,b,c)}{(a+b)_{n+1}(a+c)_{n+1}}=\frac{S_n(x^2;a,b,c)}{(a+b)_n(a+c)_n}-\frac{(a^2+x^2)S_n(x^2;a+1,b,c)}{(a+b)_{n+1}(a+c)_{n+1}}$$

olup bu son eşitliğin her iki tarafı $(a+b)_{n+1}(a+c)_{n+1}$ ile çarpılıp düzenlendiğinde istenilen sonuca ulaşılır.

4.4.4. Lemma

a,b,c,d ve e kompleks sayılar ve $Re(b+d-a-c-e)>1$ olmak üzere,

$${}_3F_2\left(\begin{matrix}a\,,c\,,e\\ b\,,d\end{matrix};\quad 1\right)=A\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}a+1\,,c\,,e\\ b+1\,,d\end{matrix};\quad 1\right)+B\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}a+2\,,c+1\,,e+1\\ b+2\,,d+1\end{matrix};\quad 1\right)$$

dir. Burada,

$$A=\frac{(1+a-d)b+ce}{(1+a-d)b}$$

ve

$$B=\frac{(1+a+c+e-b-d)(1+a)+ce}{(1+a-d)(1+b)bd}$$

şeklindedir [25].

4.4.5. Teorem

Sürekli Dual Hahn polinomları $n=2,3,\ldots$ ve $Re\,(b+c+n)>1$ olmak üzere,

$$S_n(x^2;a,b,c)=[(a+c+n-1)(a+b)-(a^2+x^2)]S_{n-1}(x^2;a,b+1,c)$$

$$+[(b+c+n-1)(1-n)(a^2+x^2)]S_{n-2}(x^2;a+1,b+1,c)$$

rekürans bağıntısına sahiptir.

İspat

Lemma 4.4.4 te a yerine $-n$, b yerine $a+b$, c yerine $a+ix$, d yerine $a+c$ ve e yerine $a-ix$ alınırsa,

$${}_3F_2\left(\begin{matrix}-n\,,a+ix\,,a-ix\\ a+b,a+c\end{matrix};\quad 1\right)=A\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}-n+1\,,a+ix\,,a-ix\\ a+b+1,a+c\end{matrix};\quad 1\right)$$

$$+B\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}-n+2\,,a+ix+1\,,a-ix+1\\ a+b+2,a+c+1\end{matrix};\quad 1\right) \tag{4.9}$$

olur. Burada,

$$A=\frac{(1-n-a-c)(a+b)+(a^2+x^2)}{(1-n-a-c)(a+b)}$$

ve

$$B=\frac{(1-n-b-c)(1-n)(a^2+x^2)}{(1-n-a-c)(1+a+b)(a+b)(a+c)}$$

dir. Eş. 4.1 de verilen sürekli Dual Hahn polinomları ile Eş. 4.9 karşılaştırılır, A ve B değerleri Eş. 4.9 da yerlerine yazılır ve düzenlenirse,

$$\frac{S_n(x^2;a,b,c)}{(a+b)_n(a+c)_n}=\left[\frac{(1-n-a-c)(a+b)+(a^2+x^2)}{(1-n-a-c)(a+b)}\right]\frac{S_{n-1}(x^2;a,b+1,c)}{(a+b+1)_{n-1}(a+c)_{n-1}}$$

$$+\left[\frac{(1-n-b-c)(1-n)(a^2+x^2)}{(1-n-a-c)(1+a+b)(a+b)(a+c)}\right]\frac{S_{n-2}(x^2;a+1,b+1,c)}{(a+b+2)_{n-2}(a+c+1)_{n-2}}$$

olup gerekli işlemler yapıldığında istenilen sonuç elde edilir.

4.4.6. Lemma

a,b,c,d ve e kompleks sayılar ve $Re(b+d-a-c-e)>1$ olmak üzere,

$${}_3F_2\left(\begin{matrix}a\,,c\,,e\\ b\,,d\end{matrix};\quad 1\right)=C\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}a-1\,,c\,,e\\ b,d-1\end{matrix};\quad 1\right)+D\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}a\,,c+1\,,e+1\\ b+1\,,d\end{matrix};\quad 1\right)$$

eşitliği gerçeklenir. Burada,

$$C=\frac{(1+c+e-d)(1-d)}{(1+c-d)(1+e-d)}$$

ve

$$D=\frac{(1+a+c+e-b-d)ce}{(1+c-d)(d-e-1)b}$$

dir [25].

4.4.7. Teorem

Sürekli Dual Hahn polinomları $n \in \mathbb{N}_0$ ve $Re\,(b+c+n) > 1$ olmak üzere,

$$[(1-c)^2+x^2](a+b+n)S_n(x^2;a,b,c) = (c-a-1)S_{n+1}(x^2;a,b,c-1)$$

$$+(n+b+c-1)(a^2+x^2)S_n(x^2;a+1,b,c-1)$$

şeklinde bir rekürans bağıntısına sahiptir.

İspat

Lemma 4.4.6 da a yerine $-n$, b yerine $a+b$, c yerine $a+ix$, d yerine $a+c$ ve e yerine $a-ix$ alınırsa,

$${}_3F_2\left(\begin{matrix}-n\,,a+ix\,,a-ix\\ a+b\,,a+c\end{matrix};\quad 1\right) = C\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}-n-1\,,a+ix\,,a-ix\\ a+b\,,a+c-1\end{matrix};\quad 1\right)$$

$$+D\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}-n\,,a+ix+1\,,a-ix+1\\ a+b+1\,,a+c\end{matrix};\quad 1\right) \tag{4.10}$$

elde edilir. Burada

$$C = \frac{(1+a-c)(1-a-c)}{(1+ix-c)(1-ix-c)}$$

ve

$$D = \frac{(n+b+c-1)(a^2+x^2)}{(1+ix-c)(1-ix-c)(a+b)}$$

dir. Eş. 4.1 ile verilen sürekli Dual Hahn polinomu ile Eş. 4.10 eşitliği karşılaştırılır, C ve D yerlerine yazılırsa,

$$\frac{S_n(x^2;a,b,c)}{(a+b)_n(a+c)_n} = \left[\frac{(1+a-c)(1-a-c)}{(1+ix-c)(1-ix-c)}\right]\frac{S_{n+1}(x^2;a,b,c-1)}{(a+b)_{n+1}(a+c-1)_{n+1}}$$

$$+\left[\frac{(n+b+c-1)(a^2+x^2)}{(1+ix-c)(1-ix-c)(a+b)}\right]\frac{S_n(x^2;a+1,b,c-1)}{(a+b+1)_n(a+c)_n}$$

$$=\left[\frac{(1+a-c)(-1)}{(1+ix-c)(1-ix-c)}\right]\frac{S_{n+1}(x^2;a,b,c-1)}{(a+b)_{n+1}(a+c)_n}$$

$$+\left[\frac{(n+b+c-1)(a^2+x^2)}{(1+ix-c)(1-ix-c)}\right]\frac{S_n(x^2;a+1,b,c-1)}{(a+b)_{n+1}(a+c)_n}$$

bulunur. Son eşitliğin her iki yanı $(a+b)_n(a+c)_n$ ile çarpılıp düzenlenirse istenilen rekürans bağıntısı elde edilir.

4.4.8. Lemma

a, b, c, d ve e kompleks sayılar ve $Re(b+d-a-c-e) > 1$ olmak üzere,

$${}_3F_2\left(\begin{matrix}a\,,c\,,e\\ b\,,d\end{matrix};\quad 1\right) = E\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}a\,,c-1\,,e-1\\ b-1,d-1\end{matrix};\quad 1\right) + H\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}a+1\,,c\,,e\\ b\,,d\end{matrix};\quad 1\right)$$

eşitliği gerçeklenir. Burada,

$$E = \frac{(1-b)(1-d)}{(1+a-b)(1+a-d)}$$

ve

$$H = \frac{a(1+a+c+e-b-d)}{(1+a-b)(1+a-d)}$$

dir [25].

4.4.9. Teorem

Sürekli Dual Hahn polinomları, $n \in \mathbb{N}$ ve $Re\,(b+c+n) > 1$ olmak üzere,

$$S_n(x^2;a,b,c) = S_n(x^2;a-1,b,c) - n(1-n-b-c)S_{n-1}(x^2;a,b,c)$$

rekürans bağıntısına sahiptir.

İspat

Lemma 4.4.8 de a yerine $-n$, b yerine $a+b$, c yerine $a+ix$, d yerine $a+c$ ve e yerine $a-ix$ alınırsa,

$${}_3F_2\left(\begin{matrix}-n\,,a+ix\,,a-ix\\ a+b\,,a+c\end{matrix};\quad 1\right) = E\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}-n\,,a+ix-1\,,a-ix-1\\ a+b-1\,,a+c-1\end{matrix};\quad 1\right)$$

$$+H\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}-n+1\,,a+ix\,,a-ix\\ a+b\,,a+c\end{matrix};\quad 1\right) \tag{4.11}$$

elde edilir. Burada

$$E=\frac{(1-a-b)(1-a-c)}{(1-n-a-b)(1-n-a-c)}$$

ve

$$H=\frac{-n(1-n-b-c)}{(1-n-a-b)(1-n-a-c)}$$

dir. Eş. 4.1 ile verilen sürekli Dual Hahn polinomu ile Eş. 4.11 karşılaştırılır E ve H yerlerine yazılırsa,

$$\frac{S_n(x^2;a,b,c)}{(a+b)_n(a+c)_n}$$

$$=\left[\frac{(1-a-b)(1-a-c)}{(1-n-a-b)(1-n-a-c)}\right]\frac{S_n(x^2;a-1,b,c)}{(a+b-1)_n(a+c-1)_n}$$

$$-\left[\frac{n(1-n-b-c)}{(1-n-a-b)(1-n-a-c)}\right]\frac{S_{n-1}(x^2;a,b,c)}{(a+b)_{n-1}(a+c)_{n-1}}$$

$$=\left[\frac{1}{(1-n-a-b)(1-n-a-c)}\right]\frac{S_n(x^2;a-1,b,c)}{(a+b)_{n-1}(a+c)_{n-1}}$$

$$-\left[\frac{n(1-n-b-c)}{(1-n-a-b)(1-n-a-c)}\right]\frac{S_{n-1}(x^2;a,b,c)}{(a+b)_{n-1}(a+c)_{n-1}}$$

bulunur. Son eşitliğin her iki yanı $(a+b)_n(a+c)_n$ ile çarpılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa istenilen rekürans bağıntısı elde edilir.

4.4.10. Lemma

a,b,c,d ve e kompleks sayılar ve $Re(d+e-a-b-c)>0$ olmak üzere,

$${}_3F_2\left(\begin{matrix}a,b\,,c\\ d-1\,,e\end{matrix};\quad 1\right)-\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}a\,,b\,,c\\ d,e\end{matrix};\quad 1\right)$$

$$= \frac{abc}{(d-1)de}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix} a+1\,, b+1\,, c+1 \\ d+1\,, e+1 \end{matrix};\quad 1\right)$$

eşitliği gerçeklenir [25].

4.4.11. Teorem

Sürekli Dual Hahn polinomları, $n \in \mathbb{N}$ ve $Re\,(b+c+n) > 0$ olmak üzere,

$$(a+b+n-1)S_n(x^2; a, b-1, c)$$

$$= (a+b-1)S_n(x^2; a, b, c) - n(a^2+x^2)S_{n-1}(x^2; a+1, b, c)$$

rekürans bağıntısını sağlar.

İspat

Lemma 4.4.10 da a yerine $-n$, b yerine $a+ix$, c yerine $a-ix$, d yerine $a+b$ ve e yerine $a+c$ alınırsa,

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} -n\,, a+ix\,, a-ix \\ a+b-1\,, a+c \end{matrix};\quad 1\right) - {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n\,, a+ix\,, a-ix \\ a+b\,, a+c \end{matrix};\quad 1\right)$$

$$= \frac{-n(a+ix)(a-ix)}{(a+b-1)(a+b)(a+c)}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n+1\,, a+ix+1\,, a-ix+1 \\ a+b+1\,, a+c+1 \end{matrix};\quad 1\right) \qquad (4.12)$$

bulunur. Eş. 4.1 ile verilen sürekli Dual Hahn polinomu ile Eş. 4.12 karşılaştırılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, istenilen rekürans bağıntısı elde edilir.

4.5. Sürekli Dual Hahn Polinomları için İntegral Gösterimler

4.5.1. Lemma

Hipergeometrik fonksiyonun bir integral gösterimi, $Re(\gamma) > Re(\beta) > 0$ olmak üzere,

$$F\left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix};\quad z\right) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-zu)^{-\alpha}\,du$$

şeklindedir. Burada $\arg u = \arg(1-u) = 0$ dır [6,20,21].

Şimdi sürekli Dual Hahn polinomları için aşağıdaki şekilde yeni integral gösterimler elde edilecektir.

4.5.2. Teorem

Sürekli Dual Hahn polinomları, $Re(a+b) > Re(b+ix) > 0$, $Re(c-ix) > 0$ ve $\arg u = \arg(1-u) = 0$ olmak üzere,

$$S_n(x^2; a, b, c)$$

$$= \frac{\Gamma(a+b+n)\Gamma(c-ix+n)}{\Gamma(a-ix)\Gamma(b+ix)\Gamma(c-ix)} \int_0^1 u^{b+ix-1}(1-u)^{a-ix-1}(1-tu)^{-\alpha-ix}du$$

şeklinde bir integral gösterimine sahiptir.

İspat

Lemma 4.5.1 den

$$F\left(\begin{matrix} a+ix, b+ix \\ a+b \end{matrix}; \quad t\right) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(b+ix)\Gamma(a-ix)} \int_0^1 u^{b+ix-1}(1-u)^{a-ix-1}(1-tu)^{-\alpha-ix}du$$

olup, Eş. 4.2 doğurucu fonksiyon bağıntısında kullanılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n(x^2; a, b, c)}{(a+b)_n n!} t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c-ix)_n}{n!} t^n \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(b+ix)\Gamma(a-ix)} \int_0^1 u^{b+ix-1}(1-u)^{a-ix-1}(1-tu)^{-\alpha-ix}du$$

bulunur. Bu son eşitliğin her iki yanında $\frac{t^n}{n!}$ in katsayıları eşitlenir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa istenilen sonuç elde edilir.

4.5.3. Lemma

Hipergeometrik fonksiyonun başka bir integral gösterimi, $Re(\gamma) > Re(\beta) > 0$ olmak üzere,

$$F\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix};\quad z\right) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^\infty u^{-\beta+\gamma-1}(u+1)^{\alpha-\gamma}(u-z+1)^{-\alpha}du$$

şeklindedir. Burada $|\arg(1-z)| < \pi$ dir [20,26].

4.5.4. Teorem

Sürekli Dual Hahn polinomları $Re(a+b) > Re(b+ix) > 0$, $Re(c-ix) > 0$ ve $|\arg(1-t)| < \pi$ olmak üzere,

$$S_n(x^2;a,b,c)$$

$$= \frac{\Gamma(a+b+n)\Gamma(c-ix+n)}{\Gamma(a-ix)\Gamma(b+ix)\Gamma(c-ix)}\int_0^\infty u^{a-ix-1}(u+1)^{ix-b}(u-t+1)^{-\alpha-ix}du$$

şeklinde bir integral gösterimine sahiptir.

İspat

Lemma 4.5.3 den

$$F\left(\begin{matrix}a+ix,b+ix\\ a+b\end{matrix};\quad t\right) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(b+ix)\Gamma(a-ix)}\int_0^\infty u^{a-ix-1}(u+1)^{ix-b}(u-t+1)^{-\alpha-ix}du$$

eşitliği yazılabilir. Bu son ifade, Eş. 4.2 ile verilen doğurucu fonksiyon bağıntısında kullanılırsa,

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{S_n(x^2;a,b,c)}{(a+b)_n n!}t^n$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{(c-ix)_n}{n!}t^n \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(b+ix)\Gamma(a-ix)}\int_0^\infty u^{a-ix-1}(u+1)^{ix-b}(u-t+1)^{-\alpha-ix}du$$

bulunur. Burada eşitliğin her iki yanında $\frac{t^n}{n!}$ in katsayıları eşitlenir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, istenilen sonuç elde edilir.

4.5.5. Teorem

Sürekli Dual Hahn polinomları, $Re(a+ix)>0$, $Re(a+b)>Re(b+ix)>0$ ve $Re(c-ix)>0$ olmak üzere,

$$S_n(x^2;a,b,c)=\frac{\Gamma(a+b+n)}{\Gamma(a+ix)\Gamma(a-ix)\Gamma(b+ix)\Gamma(c-ix)}$$

$$\times\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty u_1^{c-ix-1}u_2^{a-ix-1}(u_2+1)^{-b+ix}u_3^{a+ix-1}e^{-u_1-u_2u_3-u_3}(u_1+u_3)^n du_1du_2du_3$$

şeklinde bir integral gösterimine sahiptir.

İspat

Tanım 2.1 de $t=\alpha v$ değişken değiştirmesi yapıldığında elde edilen

$$\alpha^{-x}=\frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^\infty e^{-\alpha v}v^{x-1}dv$$

eşitliği Eş. 4.2 ile verilen doğurucu fonksiyon bağıntısında kullanılıp gerekli işlemler yapılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S_n(x^2;a,b,c)}{(a+b)_n n!}t^n=\frac{1}{\Gamma(c-ix)}\int_0^\infty u_1^{c-ix-1}e^{-u_1(1-t)}du_1$$

$$\times\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(b+ix)\Gamma(a-ix)}\int_0^\infty u_2^{a-ix-1}(u_2+1)^{-b+ix}(u_2-t+1)^{-\alpha-ix}du_2$$

$$=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(c-ix)\Gamma(b+ix)\Gamma(a-ix)}$$

$$\times \int_0^\infty \int_0^\infty u_2^{a-ix-1}(u_2+1)^{-b+ix}(u_2-t+1)^{-\alpha-ix}u_1^{c-ix-1}e^{-u_1(1-t)}du_1du_2$$

$$=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(c-ix)\Gamma(b+ix)\Gamma(a-ix)}\int_0^\infty \int_0^\infty u_2^{a-ix-1}(u_2+1)^{-b+ix}$$

$$\times\frac{1}{\Gamma(a+ix)}\int_0^\infty u_3^{a+ix-1}\,e^{-u_3(u_2+1-t)}du_3\;u_1^{c-ix-1}e^{-u_1(1-t)}du_1du_2$$

$$=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(c-ix)\Gamma(b+ix)\Gamma(a-ix)\Gamma(a+ix)}$$

$$\times\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty u_2^{a-ix-1}\,u_1^{c-ix-1}(u_2+1)^{-b+ix}u_3^{a+ix-1}e^{-u_1-u_2u_3-u_3}e^{(u_1+u_3)t}du_1du_2du_3$$

$$=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(c-ix)\Gamma(b+ix)\Gamma(a-ix)\Gamma(a+ix)}$$

$$\times\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty u_2^{a-ix-1}\,u_1^{c-ix-1}(u_2+1)^{-b+ix}u_3^{a+ix-1}e^{-u_1-u_2u_3-u_3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(u_1+u_3)^nt^n}{n!}du_1du_2du_3$$

bulunur. Bu son eşitliğin her iki yanında $\frac{t^n}{n!}$ in katsayıları eşitlenirse istenilen sonuç elde edilir.

4.6. Sürekli Dual Hahn Polinomlarının Diğer Bazı Polinomlarla Limit İlişkileri

4.6.1. Teorem

Sürekli Dual Hahn polinomları ile Meixner – Pollaczek polinomları arasında,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{S_n((x-t)^2;\,\lambda+it,\;\lambda-it,\;tcot\phi)}{t^n n!}=\frac{P_n^{(\lambda)}(x;\phi)}{(sin\phi)^n}$$

şeklinde bir limit ilişkisi mevcuttur [6].

İspat

Eş. 4.2 ile tanımlanan sürekli Dual Hahn polinomunda, x yerine $x-t,\ a=\lambda+it,$

$b=\lambda-it$ ve $c=tcot\phi$ alınırsa,

$$S_n((x-t)^2;\ \lambda+it,\lambda-it,tcot\phi)$$

$$=(2\lambda)_n(\lambda+(i+cot\phi)t)_n\ {}_3F_2(-n\,,\lambda+ix\ \,,\lambda-ix+2it\,;\ 2\lambda\,,\lambda+(i+cot\phi)t\,;\ 1)$$

$$=(2\lambda)_n(\lambda+(i+cot\phi)t)_n\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(\,\lambda+ix)_k(\,\lambda-ix+2it)_k}{(2\lambda)_k(\,\lambda+(i+cot\phi)t)_k k!}$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafı $\frac{1}{t^n n!}$ ile çarpılıp $t\to\infty$ için limit alınır ve

$\lim_{t\to\infty}\frac{(\lambda+(i+cot\phi)t)_n}{t^n}=(i+cot\phi)^n=\frac{e^{in\phi}}{(sin\phi)^n}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{S_n((x-t)^2;\ \lambda+it,\ \lambda-it,\ tcot\phi)}{t^n n!}$$

$$=\frac{(2\lambda)_n}{n!}(i+cot\phi)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(\,\lambda+ix)_k}{(2\lambda)_k k!}\lim_{t\to\infty}\frac{(\,\lambda-ix+2it)_k}{(\,\lambda+(i+cot\phi)t)_k}$$

$$=\frac{(2\lambda)_n e^{in\phi}}{n!\,(sin\phi)^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(\,\lambda+ix)_k}{(2\lambda)_k k!}\left(\frac{2i}{i+cot\phi}\right)^k$$

$$=\frac{1}{(sin\phi)^n}\frac{(2\lambda)_n}{n!}e^{in\phi}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(\,\lambda+ix)_k}{(2\lambda)_k k!}\left(1-e^{-2i\phi}\right)^k$$

$$=\frac{1}{(sin\phi)^n}\frac{(2\lambda)_n}{n!}e^{in\phi}\ F\left(-n\,,\lambda+ix\,;2\lambda\,;1-e^{-2i\phi}\right)$$

$$=\frac{1}{(sin\phi)^n}P_n^{(\lambda)}(x;\phi)$$

elde edilir.

4.7. Sürekli Dual Hahn Polinomları için Bilineer ve Bilateral Doğurucu Fonksiyonlar

Bu kısımda sürekli Dual Hahn Polinomları için bilineer ve bilateral doğurucu fonksiyonlar veren teoremler elde edilecek ve bunlara çeşitli örnekler verilecektir. Bu teoremlerden ilki ispatlanacak, diğerlerinin ispatı benzer olduğu için ispatsız olarak verilecektir.

4.7.1. Teorem

μ - yüncü basamaktan s kompleks değişkenli ($s \in \mathbb{N}$) sıfıra denk olmayan $\Omega_{\mu}(\xi_1, \dots, \xi_s)$ fonksiyonu,

$$\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1, \dots, \xi_s; \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \, \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \dots, \xi_s)\tau^k$$

$(\alpha_k \neq 0 \, , \psi \in \mathbb{C} \,)$

ve $n, p \in \mathbb{N}$ için

$$\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x;\ a,b,c;\ \xi_1, \dots, \xi_s;\ \zeta) = \sum_{k=0}^{[n/p]} \alpha_k \frac{S_{n-pk}(x^2;a,b,c)}{(a+b)_{n-pk}(n-pk)!} \, \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \dots, \xi_s)\zeta^k \qquad (4.13)$$

olsun. Bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\mu,\psi}\left(x;\ a,b,c;\ \xi_1, \dots, \xi_s; \frac{\eta}{t^p}\right) t^n$$

$$= (1-t)^{-c+ix} F(\, a+ix, b+ix; a+b; t) \, \Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1, \dots, \xi_s; \eta) \qquad (4.14)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 4.14 ün sol tarafını T ile gösterelim. $\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}\left(x;\ a,b,c;\ \xi_1, \dots, \xi_s; \frac{\eta}{t^p}\right)$ polinomunun değeri, Eş. 4.13 den alınıp Eş. 4.14 de yerine yazılır ve Lemma 2.9 (*ii*) uygulanıp Eş. 4.2 kullanılırsa,

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} \alpha_k \frac{S_{n-pk}(x^2; a, b, c)}{(a+b)_{n-pk}(n-pk)!}\, \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \dots, \xi_s) \frac{\eta^k}{t^{pk}}\, t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{S_n(x^2; a, b, c)}{(a+b)_n n!} \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \dots, \xi_s) \frac{\eta^k}{t^{pk}}\, t^n t^{pk}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n(x^2; a, b, c)}{(a+b)_n n!} t^n \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k\, \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \dots, \xi_s) \eta^k$$

$$= (1-t)^{-c+ix} F(\, a+ix, b+ix; a+b; t)\, \Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1, \dots, \xi_s; \eta)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

4.7.2. Teorem

μ - yüncü basamaktan s kompleks değişkenli ($s \in \mathbb{N}$) sıfıra denk olmayan $\Omega_{\mu}(\xi_1, \dots, \xi_s)$ fonksiyonu,

$$\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1, \dots, \xi_s; \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k\, \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \dots, \xi_s) \tau^k$$

($\alpha_k \neq 0\,, \psi \in \mathbb{C}\,$)

ve $n, p \in \mathbb{N}$ için

$$\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x;\ a, b, c;\ \xi_1, \dots, \xi_s;\ \zeta) = \sum_{k=0}^{[n/p]} \alpha_k \frac{S_{n-pk}(x^2; a, b, c)}{(a+c)_{n-pk}(n-pk)!}\, \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \dots, \xi_s) \zeta^k$$

olsun. Bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\mu,\psi}\left(x;\ a, b, c;\ \xi_1, \dots, \xi_s; \frac{\eta}{t^p}\right) t^n$$

$$= (1-t)^{-b+ix} F(\, a+ix, c+ix; a+c; t)\, \Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1, \dots, \xi_s; \eta)$$

eşitliği sağlanır.

4.7.3. Teorem

μ - yüncü basamaktan s kompleks değişkenli ($s \in \mathbb{N}$) sıfıra denk olmayan $\Omega_{\mu}(\xi_1, \dots, \xi_s)$ fonksiyonu,

$$\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1, \dots, \xi_s; \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \, \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \dots, \xi_s)\tau^k$$

$(\alpha_k \neq 0 \, , \psi \in \mathbb{C} \,)$

ve $n, p \in \mathbb{N}$ için

$$\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x;\ a, b, c;\ \xi_1, \dots, \xi_s;\ \zeta) = \sum_{k=0}^{[n/p]} \alpha_k \frac{S_{n-pk}(x^2; a, b, c)}{(b+c)_{n-pk}(n-pk)!} \, \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \dots, \xi_s)\zeta^k$$

olsun. Bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\mu,\psi}\left(x;\ a, b, c;\ \xi_1, \dots, \xi_s; \frac{\eta}{t^p}\right) t^n$$

$$= (1-t)^{-a+ix} F(\, b+ix, c+ix; b+c; t) \, \Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1, \dots, \xi_s; \eta)$$

eşitliği sağlanır.

4.7.4. Teorem

μ - yüncü basamaktan s kompleks değişkenli ($s \in \mathbb{N}$) sıfıra denk olmayan $\Omega_{\mu}(\xi_1, \dots, \xi_s)$ fonksiyonu,

$$\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1, \dots, \xi_s; \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \, \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \dots, \xi_s)\tau^k$$

$(\alpha_k \neq 0 \, , \psi \in \mathbb{C} \,)$

ve $n, p \in \mathbb{N}$ için

$$\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x;\ a,b,c;\ \xi_1,\dots,\xi_s;\ \zeta)$$

$$= \sum_{k=0}^{[n/p]} \alpha_k \frac{S_{n-pk}(x^2;a,b,c)}{(a+b)_{n-pk}(a+c)_{n-pk}(n-pk)!}\ \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\dots,\xi_s)\zeta^k$$

olsun. Bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\mu,\psi}\left(x;\ a,b,c;\ \xi_1,\dots,\xi_s;\frac{\eta}{t^p}\right) t^n$$

$$= e^t\ {}_2F_2(\ a+ix, a-ix; a+b; a+c; -t)\ \Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1,\dots,\xi_s;\eta)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 4.7.1 de $\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\dots,\xi_s)$ $(s \in \mathbb{N})$ çok değişkenli fonksiyonu bir ya da çok değişkenli basit fonksiyonlar tarafından ifade edilerek, elde edilen sonuçların farklı uygulamaları verilebilir.

Örnek

Teorem 4.7.1 de $s=1$, $\xi_1 = y$ ve $\Omega_{\mu+\psi k}(y)$ fonksiyonu yerine sürekli Dual Hahn polinomları alınırsa ve elde edilen sonuçta $\alpha_k = \frac{1}{(a+b)_k k!}$, $\mu = 0$, $\psi = 1$ alınıp Eş. 4.2 kullanılırsa bu polinomlar için bilineer doğurucu fonksiyonların bir sınıfı aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]} \frac{S_{n-pk}(x^2;a,b,c)}{(a+b)_{n-pk}(n-pk)!}\frac{S_k(y^2;a,b,c)}{(a+b)_k k!}\eta^k\ t^{n-pk}$$

$$= (1-t)^{-c+ix}F(\ a+ix, b+ix; a+b; t)(1-\eta)^{-c+iy}F(\ a+iy, b+iy; a+b; \eta).$$

Örnek

Teorem 4.7.2 de $s=1$, $\xi_1 = y$ ve $\Omega_{\mu+\psi k}(y) = l_{\mu+\psi k}(y;\lambda)$ alalım. Burada $l_{\mu+\psi k}(y;\lambda)$, Gottlieb polinomları olup

$$(1-t)^{x}\left(1-te^{-\lambda}\right)^{-x-1}=\sum_{n=0}^{\infty} l_n\,(x;\lambda)\,t^n\ ,\qquad |t|<1$$

doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir [27,28]. Elde edilen sonuçta, $\alpha_k=1$, $\mu=0$, $\psi=1$ alınırsa, sürekli Dual Hahn polinomları ile Gottlieb polinomları için bilateral doğurucu fonksiyonların bir sınıfı aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]}\frac{S_{n-pk}(x^2;a,b,c)}{(a+c)_{n-pk}(n-pk)!}\,l_k\,(y;\lambda)\eta^k\,t^{n-pk}$$

$$=(1-t)^{-b+ix}F(\,a+ix,c+ix;a+c;t)(1-\eta)^{y}\left(1-\eta e^{-\lambda}\right)^{-y-1}.$$

α_k $(k\in\mathbb{N}_0)$ katsayılarının uygun her bir seçimi için, eğer $\Omega_\mu(\xi_1,\ldots,\xi_s)$ çok değişkenli fonksiyonu, daha basit bazı fonksiyonların uygun bir çarpımı olarak ifade edilebilirse, bu durumda Teorem 4.7.1 - 4.7.4, Eş. 4.1 ile tanımlanan sürekli Dual Hahn polinomları için multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyonların çeşitli ailelerini elde etmek için kullanılabilir.

5. WİLSON POLİNOMLARI

Bu bölümde Wilson polinomunun tanımı, bazı doğurucu fonksiyonları, ortogonalliği, bilinen bazı rekürans bağıntıları, diğer polinomlarla arasındaki limit bağıntıları verilecek, yeni bir rekürans bağıntısı ve çeşitli integral gösterimler elde edilecektir. Son olarak bu polinomlar için bilineer, bilateral doğurucu fonksiyonlar veren yeni teoremler ispatlanacak ve bunlara örnekler verilecektir.

5.1. Wilson Polinomlarının Tanımı

5.1.1. Tanım

Wilson polinomu,

$$\frac{W_n(x^2;a,b,c,d)}{(a+b)_n(a+c)_n(a+d)_n}$$

$$= {}_4F_3\left(\begin{matrix}-n, n+a+b+c+d-1, a+ix, a-ix \\ a+b,\ a+c,\ a+d\end{matrix};1\right) \tag{5.1}$$

şeklinde tanımlanan ortogonal bir polinomdur [12,13].

5.2. Wilson Polinomunun Doğurucu Fonksiyonları

Bu kısımda Wilson polinomunun bilinen bazı doğurucu fonksiyonları verilecektir.

5.2.1. Teorem

Wilson polinomları için bazı doğurucu fonksiyon bağıntıları,

$$F\left(\begin{matrix}a+ix, b+ix \\ a+b\end{matrix};t\right)F\left(\begin{matrix}c-ix, d-ix \\ c+d\end{matrix};t\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{W_n(x^2;a,b,c,d)}{(a+b)_n(c+d)_n n!}t^n \tag{5.2}$$

$$F\left(\begin{matrix}a+ix, c+ix \\ a+c\end{matrix};t\right)F\left(\begin{matrix}b-ix, d-ix \\ b+d\end{matrix};t\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{W_n(x^2;a,b,c,d)}{(a+c)_n(b+d)_n n!}t^n \tag{5.3}$$

$$F\left(\begin{matrix}a+ix, d+ix \\ a+d\end{matrix};t\right)F\left(\begin{matrix}b-ix, c-ix \\ b+c\end{matrix};t\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{W_n(x^2;a,b,c,d)}{(a+d)_n(b+c)_n n!}t^n \tag{5.4}$$

$$(1-t)^{1-a-b-c-d}\ {}_4F_3\left(\frac{\frac{1}{2}(a+b+c+d-1),\frac{1}{2}(a+b+c+d),a+ix,a-ix}{a+b,a+c,a+d};-\frac{4t}{(1-t)^2}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+b+c+d-1)_n}{(a+b)_n(a+c)_n(a+d)_n n!}W_n(x^2;a,b,c,d)t^n \qquad (5.5)$$

şeklindedir [6,13].

5.3. Wilson Polinomunun Diğer Bazı Polinomlarla Limit İlişkileri

Bu kısımda Wilson polinomları ile diğer bazı polinomlar arasındaki limit bağıntıları verilecektir. Bunlardan ilk üçü literatürde bilinmekte olup diğerleri yeni elde edilmiştir.

5.3.1. Teorem

Wilson polinomları ile sürekli Dual Hahn polinomları arasında

$$\lim_{d\to\infty}\frac{W_n(x^2;a,b,c,d)}{(a+d)_n}=S_n(x^2;a,b,c)$$

şeklinde bir ilişki vardır [6].

İspat

Eş. 5.1 ile verilen Wilson polinomları $\frac{1}{(a+d)_n}$ ile çarpılıp $d\to\infty$ için limit alınırsa sürekli Dual Hahn polinomları elde edilir. Gerçekten,

$$\lim_{d\to\infty}\frac{W_n(x^2;a,b,c,d)}{(a+d)_n}$$

$$=\lim_{d\to\infty}\frac{(a+b)_n(a+c)_n\,(a+d)_n}{(a+d)_n}\ {}_4F_3\left(\begin{matrix}-n,n+a+b+c+d-1,a+ix,a-ix\\ a+b\,,\quad a+c\,,\quad a+d\end{matrix};1\right)$$

$$=\lim_{d\to\infty}(a+b)_n(a+c)_n\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\ (n+a+b+c+d-1)_k\ (a+ix)_k(a-ix)_k}{(a+b)_k(a+c)_k\,(a+d)_k\ k!}$$

$$=(a+b)_n(a+c)_n\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\ (a+ix)_k(a-ix)_k}{(a+b)_k(a+c)_k\,k!}\ \lim_{d\to\infty}\frac{(n+a+b+c+d-1)_k}{(a+d)_k}$$

$$= (a+b)_n (a+c)_n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k \ (a+ix)_k (a-ix)_k}{(a+b)_k (a+c)_k \ k!}$$

$$= (a+b)_n (a+c)_n \ {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -n & , a+ix & , a-ix \\ a+b & , a+c & \end{matrix} \ ; \ 1 \right)$$

$$= S_n(x^2; a, b, c)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

5.3.2. Teorem

Wilson polinomları ile sürekli Hahn polinomları arasında

$$\lim_{t \to \infty} \frac{W_n((x+t)^2 \ ; \ a-it, \ b-it, \ c+it \ , d+it \ )}{(-2t)^n n!} = \rho_n(x^2; a, b, c, d)$$

şeklinde bir bağıntı vardır [6]. Burada $\rho_n(x^2; a, b, c, d)$ sürekli Hahn polinomudur ve

$$\rho_n(x^2; a, b, c, d) = i^n \frac{(\ a+c)_n (a+d)_n}{n!}$$

$$\times {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -n & , n+a+b+c+d-1 & , a+ix \\ a+c & , a+d & \end{matrix} ; 1 \right)$$

şeklinde tanımlanır [6,22,29].

İspat

Eş. 5.1 ile verilen Wilson polinomlarında a yerine $a-it$, b yerine $b-it$, c yerine $c+it$, d yerine $d+it$ ve x yerine $x+t$ yazılırsa,

$$W_n((x+t)^2 \ ; \ a-it \ , b-it \ , c-it \ , d-it \ )$$

$$= (a+b-2it)_n (\ a+c)_n (a+d)_n$$

$$\times {}_4F_3 \left(\begin{matrix} -n & , n+a+b+c+d-1 & , a+ix & , a-ix-2it \\ a+b-2it & , a+c & , a+d & \end{matrix} ; 1 \right)$$

elde edilir. Bu son eşitliğin her iki yanı, $\frac{1}{(-2t)^n n!}$ ile çapılıp $t \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{W_n((x+t)^2\,;\ a-it,\ b-it,\ c-it\,,d-it\,)}{(-2t)^n n!}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(a+b-2it)_n(\,a+c)_n(a+d)_n}{(-2t)^n n!}$$

$$\times\,{}_4F_3\left(\begin{matrix}-n\ ,n+a+b+c+d-1\ ,a+ix\ ,a-ix-2it\\ a+b-2it\ \ ,a+c\ \ ,a+d\end{matrix};1\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(a+b-2it)_n(\,a+c)_n(a+d)_n}{(-2t)^n n!}$$

$$\times\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\ (\,n+a+b+c+d-1)_k\ \ (a+ix)_k(a-ix-2it)_k}{(a+b-2it)_k(a+c)_k\,(a+d)_k\ \ k!}$$

$$=i^n\frac{(\,a+c)_n(a+d)_n}{n!}$$

$$\times\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\ (\,n+a+b+c+d-1)_k\ \ (a+ix)_k}{(a+c)_k\,(a+d)_k\ \ k!}\lim_{t\to\infty}\frac{(a-ix-2it)_k}{(a+b-2it)_k}$$

$$=i^n\frac{(\,a+c)_n(a+d)_n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\ (\,n+a+b+c+d-1)_k\ \ (a+ix)_k}{(a+c)_k\,(a+d)_k\ \ k!}$$

$$=i^n\frac{(\,a+c)_n(a+d)_n}{n!}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}-n\ \ ,n+a+b+c+d-1\ \ ,a+ix\\ a+c\ \ ,a+d\end{matrix};1\right)$$

$$=\rho_n(x^2;a,b,c,d)$$

elde edilir.

5.3.3. Teorem

Wilson polinomları ile Jacobi polinomları arasında

$$\lim_{t\to\infty}\frac{W_n\left(\frac{1}{2}(1-x)t^2\,;\ \frac{1}{2}(\alpha+1),\ \frac{1}{2}(\alpha+1),\ \frac{1}{2}(\beta+1)+it,\ \frac{1}{2}(\beta+1)-it\right)}{t^{2n}\,n!}$$

$$=P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

bağıntısı sağlanır [6]. Burada $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jacobi polinomudur ve $\alpha,\beta > -1$ olmak üzere

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\, F\left(-n\ , 1+\alpha+\beta+n\ ;\ 1+\alpha\ ;\ \frac{1-x}{2}\right)$$

şeklinde tanımlanır [17].

İspat

Eş. 5.1 ile verilen Wilson polinomlarında, $a = b = \frac{1}{2}(\alpha+1)$, $c = \frac{1}{2}(\beta+1)+it$, $d = \frac{1}{2}(\beta+1)-it$ ve x yerine $t\sqrt{\frac{1}{2}(1-x)}$ alınırsa,

$$W_n\left(\tfrac{1}{2}(1-x)t^2\,;\ \tfrac{1}{2}(\alpha+1),\ \tfrac{1}{2}(\alpha+1),\ \tfrac{1}{2}(\beta+1)+it,\ \tfrac{1}{2}(\beta+1)-it\right)$$

$$= (\alpha+1)_n \left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+1+it\right)_n \left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+1-it\right)_n$$

$$\times\, {}_4F_3\left(\begin{matrix} -n\ , \alpha+\beta+n+1\ , \frac{1}{2}(\alpha+1)+it\sqrt{\frac{1}{2}(1-x)}\ , \frac{1}{2}(\alpha+1)-it\sqrt{\frac{1}{2}(1-x)} \\ \alpha+1\ , \qquad \frac{1}{2}(\alpha+\beta)+1+it\ , \qquad \frac{1}{2}(\alpha+\beta)+1-it \end{matrix}\ ;\ 1\right)$$

elde edilir. Bu son eşitliğin her iki yanı, $\frac{1}{t^{2n}\,n!}$ ile çarpılıp $t \to \infty$ için limiti alınırsa,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{W_n\left(\tfrac{1}{2}(1-x)t^2\,;\ \tfrac{1}{2}(\alpha+1),\ \tfrac{1}{2}(\alpha+1),\ \tfrac{1}{2}(\beta+1)+it,\ \tfrac{1}{2}(\beta+1)-it\right)}{t^{2n}\,n!}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{(\alpha+1)_n \left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+1+it\right)_n \left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+1-it\right)_n}{t^{2n}\,n!}$$

$$\times \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k\ (n+\alpha+\beta+1)_k\ \left(\frac{1}{2}(\alpha+1)+it\sqrt{\frac{1}{2}(1-x)}\right)_k \left(\frac{1}{2}(\alpha+1)-it\sqrt{\frac{1}{2}(1-x)}\right)_k}{(\alpha+1)_k \left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+1+it\right)_k \left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+1-it\right)_k\ k!}$$

$$= \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k \ (n+\alpha+\beta+1)_k}{(\alpha+1)_k \ \ k!}$$

$$\times \lim_{t\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}(\alpha+1) + it\sqrt{\frac{1}{2}(1-x)}\right)_k \left(\frac{1}{2}(\alpha+1) - it\sqrt{\frac{1}{2}(1-x)}\right)_k}{\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+1+it\right)_k \left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+1-it\right)_k}$$

$$= \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k \ (n+\alpha+\beta+1)_k}{(\alpha+1)_k \ \ k!} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k$$

$$= \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \ {}_2F_1\left(-n \ , 1+\alpha+\beta+n \ ; \ 1+\alpha \ ; \ \frac{1-x}{2}\right)$$

$$= P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

5.3.4. Teorem

Wilson polinomları ile Lagrange polinomları arasında,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{W_n\left(\frac{y}{y-x}t^2 \ ; \ \frac{1}{2}(-\alpha-n+1), \ \frac{1}{2}(-\alpha-n+1), \ \frac{1}{2}(-\beta-n+1)+it, \ \frac{1}{2}(-\beta-n+1)-it\right)}{t^{2n}\, n!}$$

$$= (y-x)^{-n} g_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)$$

şeklinde bir bağıntı vardır. Burada $g_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)$ Lagrange polinomudur [21] ve $\alpha, \beta > -1$ olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$g_n^{(\alpha,\beta)}(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{-\alpha}{k} \binom{-\beta}{n-k} (-1)^n \, x^k \, y^{n-k} \, .$$

İspat:

Teorem 5.3.3 de α yerine $-\alpha-n$, β yerine $-\beta-n$ ve x yerine $\frac{x+y}{x-y}$ alınıp Jacobi ve Lagrange polinomları arasındaki [3],

$$g_n^{(\alpha,\beta)}(x,y) = (y-x)^n P_n^{(-\alpha-n\,,-\beta-n)}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$$

bağıntısı kullanılarak teorem ispat edilir.

5.3.5. Teorem

Wilson polinomları ile Meixner polinomları arasında,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{W_n\left(\left(1-\frac{1}{z}\right)t^2\,;\ \frac{1}{2}\beta\,,\ \ \frac{1}{2}\beta\,,\ \ \frac{1}{2}(-n-\beta-x+1)+it\,,\ \ \frac{1}{2}(-n-\beta-x+1)-it\right)}{t^{2n}\,(\beta)_n}$$

$$= M_n\,(x;\beta,z)$$

şeklinde bir bağıntı vardır. Burada $\beta > 0,\quad 0 < z < 1$ ve $x = 0, 1, 2 \ldots$ olmak üzere, $M_n\,(x;\beta,z)$ Meixner polinomudur[7] ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$M_n\,(x;\beta,z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k\ (-x)_k}{(\beta)_k\ k!}\left(1-\frac{1}{z}\right)^k$. (5.6)

İspat:

Eş. 5.1 ile tanımlanan Wilson polinomunda $a = b = \frac{1}{2}\beta\,,\ c = \frac{1}{2}(-n-\beta-x+1)+it\ ,$ $d = \frac{1}{2}(-n-\beta-x+1)-it$ ve $x = t\sqrt{1-\frac{1}{z}}$ alınırsa,

$$W_n\left(\left(1-\frac{1}{z}\right)t^2\,;\ \frac{1}{2}\beta\,,\ \ \frac{1}{2}\beta\,,\ \ \frac{1}{2}(-n-\beta-x+1)+it\,,\ \ \frac{1}{2}(-n-\beta-x+1)-it\right)$$

$$= (\beta\,)_n\left(\frac{1}{2}(-n-x+1)+it\right)_n\left(\frac{1}{2}(-n-x+1)-it\right)_n$$

$$\times\ {}_4F_3\left(\begin{matrix} -n\,, & -x\,, & \frac{1}{2}\beta+it\sqrt{1-\frac{1}{z}}\ , & \frac{1}{2}\beta-it\sqrt{1-\frac{1}{z}} \\ \beta\,, & \frac{1}{2}(-n-x+1)+it\,, & \frac{1}{2}(-n-x+1)-it & \end{matrix}\ ;\ 1\right)$$

elde edilir. Bu son eşitliğin her iki yanı, $\frac{1}{t^{2n}\,(\beta)_n}$ ile çarpılıp $t \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{W_n\left(\left(1-\frac{1}{z}\right)t^2;\ \frac{1}{2}\beta,\ \frac{1}{2}\beta,\ \frac{1}{2}(-n-\beta-x+1)+it,\ \frac{1}{2}(-n-\beta-x+1)-it\right)}{t^{2n}\,(\beta)_n}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\beta)_n\left(\frac{1}{2}(-n-x+1)+it\right)_n\left(\frac{1}{2}(-n-x+1)-it\right)_n}{t^{2n}\ (\beta)_n}$$

$$\times\ {}_4F_3\left(\begin{matrix}-n, & -x, & \frac{1}{2}\beta+it\sqrt{1-\frac{1}{z}}\ , & \frac{1}{2}\beta-it\sqrt{1-\frac{1}{z}}\\ \beta, & \frac{1}{2}(-n-x+1)+it, & \frac{1}{2}(-n-x+1)-it & \end{matrix};\ 1\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\ (-x)_k}{(\beta)_k\ k!}\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\beta+it\sqrt{1-\frac{1}{z}}\right)_k\left(\frac{1}{2}\beta-it\sqrt{1-\frac{1}{z}}\right)_k}{\left(\frac{1}{2}(-n-x+1)+it\right)_k\left(\frac{1}{2}(-n-x+1)-it\right)_k}\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\ (-x)_k}{(\beta)_k\ k!}\left(1-\frac{1}{z}\right)^k$$

$$=M_n\ (x;\beta,z)$$

elde edilir.

5.3.6. Teorem

Wilson polinomları ile Gegenbauer polinomları arasında,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{(2\alpha)_n\ W_n\left(\left(\frac{1-x}{2}\right)t^2;\ \frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right),\ \frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right),\ \frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)+it,\ \frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)-it\right)}{t^{2n}\ \left(\alpha+\frac{1}{2}\right)_n\ n!}$$

$$=C_n^{\alpha}(x)$$

şeklinde bir bağıntı vardır. Burada $\alpha>-\frac{1}{2}$, $\alpha\neq 0$ olmak üzere $C_n^{\alpha}(x)$ Gegenbauer polinomudur [1,20,29] ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$C_n^{\alpha}(x)=\frac{(2\alpha)_n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\ (2\alpha+n)_k}{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)_k\ k!}\left(\frac{1-x}{2}\right)^k.$$

İspat:

Eş. 5.1 ile tanımlanan Wilson polinomunda $a = b = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{2}\right),\ c = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) + it,$

$d = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) - it$ ve x yerine $t\sqrt{\frac{1-x}{2}}$ yazılırsa,

$$W_n\left(\left(\frac{1-x}{2}\right)t^2;\ \frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right),\ \frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right),\ \frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)+it,\ \frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)-it\right)$$

$$= \left(\alpha+\tfrac{1}{2}\right)_n \left(\alpha+\tfrac{1}{2}+it\right)_n \left(\alpha+\tfrac{1}{2}-it\right)_n$$

$$\times {}_4F_3\left(\begin{matrix} -n, & 2\alpha+n, & \frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)+it\sqrt{\frac{1-x}{2}}, & \frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)-it\sqrt{\frac{1-x}{2}} \\ & \alpha+\frac{1}{2}, & \alpha+\frac{1}{2}+it, & \alpha+\frac{1}{2}-it \end{matrix};\ 1\right)$$

elde edilir. Bu son eşitliğin her iki yanı, $\frac{1}{t^{2n}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)_n n!}$ ile çarpılıp $t \to \infty$ için limiti alınırsa,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(2\alpha)_n W_n\left(\left(\frac{1-x}{2}\right)t^2;\ \frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right),\ \frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right),\ \frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)+it,\ \frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)-it\right)}{t^{2n}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)_n n!}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{(2\alpha)_n \left(\alpha+\frac{1}{2}\right)_n \left(\alpha+\frac{1}{2}+it\right)_n \left(\alpha+\frac{1}{2}-it\right)_n}{t^{2n}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)_n n!}$$

$$\times {}_4F_3\left(\begin{matrix} -n, & 2\alpha+n, & \frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)+it\sqrt{\frac{1-x}{2}}, & \frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)-it\sqrt{\frac{1-x}{2}} \\ & \alpha+\frac{1}{2}, & \alpha+\frac{1}{2}+it, & \alpha+\frac{1}{2}-it \end{matrix};\ 1\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{(2\alpha)_n \left(\alpha+\frac{1}{2}\right)_n \left(\alpha+\frac{1}{2}+it\right)_n \left(\alpha+\frac{1}{2}-it\right)_n}{t^{2n}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)_n n!}$$

$$\times \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k \ (2\alpha+n)_k \ \left(\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)+it\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)_k \left(\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)-it\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)_k}{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)_k \left(\alpha+\frac{1}{2}+it\right)_k \left(\alpha+\frac{1}{2}-it\right)_k \ k!}$$

$$= \frac{(2\alpha)_n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k \ (2\alpha+n)_k}{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)_k \ k!} \left\{ \lim_{t\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)+it\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)_k \left(\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)-it\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)_k}{\left(\alpha+\frac{1}{2}+it\right)_k \left(\alpha+\frac{1}{2}-it\right)_k} \right\}$$

$$= \frac{(2\alpha)_n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k \ (2\alpha+n)_k}{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)_k \ k!} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k$$

$$= C_n^{\alpha}(x)$$

elde edilir.

5.3.7. Teorem

Wilson polinomları ile birinci çeşit Chebyshev polinomları arasında,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{W_n\left(\left(\frac{1-x}{2}\right)t^2 ; \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{4}+it, \ \frac{1}{4}-it\right)}{t^{2n} \ \left(\frac{1}{2}\right)_n} = T_n \ (x)$$

şeklinde bir bağıntı vardır. Burada $T_n \ (x)$ birinci çeşit Chebyshev polinomudur [1] ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$T_n \ (x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k \ (n)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k \ k!} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k .$$

İspat:

Eş. 5.1 ile tanımlanan Wilson polinomunda $a = b = \frac{1}{4}, \ c = \frac{1}{4}+it, \ d = \frac{1}{4}-it$ ve

x yerine $t\sqrt{\frac{1-x}{2}}$ yazılırsa,

$$W_n\left(\left(\frac{1-x}{2}\right)t^2\,;\ \frac{1}{4}\,,\ \frac{1}{4}\,,\ \frac{1}{4}+it\ ,\ \frac{1}{4}-it\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}+it\right)_n\left(\frac{1}{2}-it\right)_n$$

$$\times\,{}_4F_3\left(\begin{matrix}-n\,, & n\,, & \frac{1}{4}+it\sqrt{\frac{1-x}{2}}\ , & \frac{1}{4}-it\sqrt{\frac{1-x}{2}}\\ \frac{1}{2}\,, & \frac{1}{2}+it\,, & \frac{1}{2}-it & \end{matrix}\ ;\ 1\right)$$

elde edilir. Bu son eşitliğin her iki yanı, $\frac{1}{t^{2n}\left(\frac{1}{2}\right)_n}$ ile çarpılıp $t\to\infty$ için limiti alınırsa,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{W_n\left(\left(\frac{1-x}{2}\right)t^2\,;\ \frac{1}{4}\,,\ \frac{1}{4}\,,\ \frac{1}{4}+it\ ,\ \frac{1}{4}-it\right)}{t^{2n}\ \left(\frac{1}{2}\right)_n}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}+it\right)_n\left(\frac{1}{2}-it\right)_n}{t^{2n}\left(\frac{1}{2}\right)_n}$$

$$\times\ {}_4F_3\left(\begin{matrix}-n\,, & n\,, & \frac{1}{4}+it\sqrt{\frac{1-x}{2}}\ , & \frac{1}{4}-it\sqrt{\frac{1-x}{2}}\\ \frac{1}{2}\,, & \frac{1}{2}+it\,, & \frac{1}{2}-it & \end{matrix}\ ;\ 1\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}+it\right)_n\left(\frac{1}{2}-it\right)_n}{t^{2n}\left(\frac{1}{2}\right)_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\ (n)_k\ \left(\frac{1}{4}+it\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)_k\left(\frac{1}{4}-it\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k\left(\frac{1}{2}+it\right)_k\left(\frac{1}{2}-it\right)_k\,k!}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\ (n)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k\,k!}\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{4}+it\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)_k\left(\frac{1}{4}-it\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)_k}{\left(\frac{1}{2}+it\right)_k\left(\frac{1}{2}-it\right)_k}\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\ (n)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k\,k!}\left(\frac{1-x}{2}\right)^k$$

$= T_n\ (x)$

elde edilir.

5.3.8. Teorem

Wilson polinomları ile ikinci çeşit Chebyshev polinomları arasında,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(n+1)\, W_n\left(\left(\frac{1-x}{2}\right)t^2;\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{4}+it,\ \frac{3}{4}-it\right)}{t^{2n}\ \left(\frac{3}{2}\right)_n} = U_n\ (x)$$

şeklinde bir bağıntı vardır. Burada $U_n\ (x)$ ikinci çeşit Chebyshev polinomudur [1] ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$U_n\ (x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k\ (n+2)_k}{\left(\frac{3}{2}\right)_k\ k!}\ \left(\frac{1-x}{2}\right)^k.$$

İspat:

Teorem 5.3.7 nin ispatına benzer şekilde yapılır.

5.4. Wilson Polinomunun Ortogonalliği

5.4.1. Lemma

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \left|\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(c+s)\Gamma(d+s)}{\Gamma(2s)}\right|^2 ds$$

$$= \frac{2\Gamma(a+b)\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(b+c)\Gamma(b+d)\Gamma(c+d)}{\Gamma(a+b+c+d)}$$

eşitliği sağlanır. Burada,

$$\left|\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(c+s)\Gamma(d+s)}{\Gamma(2s)}\right|^2$$

$$= \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(a-s)\Gamma(b+s)\Gamma(b-s)\Gamma(c+s)\Gamma(c-s)\Gamma(d+s)\Gamma(d-s)}{\Gamma(2s)\Gamma(-2s)}$$

dir. Kontur imajiner eksen boyunca olup a, b, c, d parametreleri buna uygun olarak seçilmiştir [6,12].

5.4.2. Teorem

Wilson polinomları,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\left|\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(c+s)\Gamma(d+s)}{\Gamma(2s)}\right|^2 W_m(-s^2;a,b,c,d)\,W_n(-s^2;a,b,c,d)ds$$

$$= 2(n+a+b+c+d-1)_n n!$$

$$\times \frac{\Gamma(n+a+b)\Gamma(n+a+c)\Gamma(n+a+d)\Gamma(n+b+c)\Gamma(n+b+d)\Gamma(n+c+d)}{\Gamma(2n+a+b+c+d)}\delta_{mn}$$

eşitliğini sağlar [6]. Kontur ve a, b, c, d parametreleri Lemma 5.4.1 ile aynıdır.

İspat

Wilson polinomunun Eş. 5.1 ile verilen tanımından,

$$W_m(-s^2,a,b,c,d) = \sum_{k=0}^{m} A_k (b-s)_k (b+s)_k$$

yazılabilir. Burada A_k , işlem kolaylığı için k ($k \in \mathbb{N}$) ya bağlı terimlerden uygun şekilde seçilmiştir. İşlemler sırasında karşılaşılan integral Lemma 5.4.1 yardımıyla hesaplanır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\left|\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(c+s)\Gamma(d+s)}{\Gamma(2s)}\right|^2 (b-s)_k (b+s)_k\, W_n(-s^2;a,b,c,d)ds$$

$$= (a+b)_n (a+c)_n (a+d)_n \sum_{j=0}^{n} \frac{(-n)_j (n+a+b+c+d-1)_j}{(a+b)_j (a+c)_j (a+d)_j j!}$$

$$\times \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\left|\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(c+s)\Gamma(d+s)}{\Gamma(2s)}\right|^2 (a-s)_j (a+s)_j\,(b-s)_k (b+s)_k ds$$

$$= (a+b)_n(a+c)_n(a+d)_n \sum_{j=0}^{n} \frac{(-n)_j(n+a+b+c+d-1)_j}{(a+b)_j(a+c)_j(a+d)_j j!}$$

$$\times \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(a-s)\Gamma(b+s)\Gamma(b-s)\Gamma(c+s)\Gamma(c-s)\Gamma(d+s)\Gamma(d-s)}{\Gamma(2s)\Gamma(-2s)}$$

$$\times \frac{\Gamma(a+j-s)}{\Gamma(a-s)} \frac{\Gamma(a+j+s)}{\Gamma(a+s)} \frac{\Gamma(b+k-s)}{\Gamma(b-s)} \frac{\Gamma(b+k+s)}{\Gamma(b+s)} ds$$

$$= (a+b)_n(a+c)_n(a+d)_n \sum_{j=0}^{n} \frac{(-n)_j(n+a+b+c+d-1)_j}{(a+b)_j(a+c)_j(a+d)_j j!}$$

$$\times \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(a+j+s)\Gamma(a+j-s)\Gamma(b+k+s)\Gamma(b+k-s)}{\Gamma(2s)\Gamma(-2s)} |\Gamma(c+s)\Gamma(d+s)|^2 ds$$

$$= (a+b)_n(a+c)_n(a+d)_n \sum_{j=0}^{n} \frac{(-n)_j(n+a+b+c+d-1)_j}{(a+b)_j(a+c)_j(a+d)_j j!}$$

$$\times \frac{2\,\Gamma(a+b+j+k)\Gamma(a+c+j)\Gamma(a+d+j)\Gamma(b+c+k)\Gamma(b+d+k)\Gamma(c+d)}{\Gamma(a+b+c+d+k+j)}$$

$$= (a+b)_n(a+c)_n(a+d)_n \sum_{j=0}^{n} \frac{(-n)_j(n+a+b+c+d-1)_j}{(a+b)_j(a+c)_j(a+d)_j j!}$$

$$\times \frac{2\,\Gamma(a+b+k)(a+b+k)_j\Gamma(a+c)(a+c)_j\Gamma(a+d)(a+d)_j\Gamma(b+c+k)\Gamma(b+d+k)\Gamma(c+d)}{\Gamma(a+b+c+d+k)(a+b+c+d+k)_j}$$

$$= \frac{2\,\Gamma(a+b+k)\Gamma(a+c+n)\Gamma(a+d+n)\Gamma(b+c+k)\Gamma(b+d+k)\Gamma(c+d)(a+b)_n}{\Gamma(a+b+c+d+k)}$$

$$\times \sum_{j=0}^{n} \frac{(-n)_j(n+a+b+c+d-1)_j(a+b+k)_j}{(a+b)_j(a+b+c+d+k)_j j!}$$

$$= \frac{2\,\Gamma(a+b+k)\Gamma(a+c+n)\Gamma(a+d+n)\Gamma(b+c+k)\Gamma(b+d+k)\Gamma(c+d)(a+b)_n}{\Gamma(a+b+c+d+k)}$$

$$\times\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}-n, n+a+b+c+d-1, a+b+k \\ a+b, a+b+c+d+k\end{matrix}; 1\right)$$

$$= 2(-k)_n \frac{\Gamma(a+b+k)\Gamma(a+c+n)\Gamma(a+d+n)\Gamma(b+c+k)\Gamma(b+d+k)\Gamma(c+d+n)}{\Gamma(a+b+c+d+n+k)}$$

$$= 2(-k)_n \frac{\Gamma(a+b+k)\Gamma(a+c+n)\Gamma(a+d+n)\Gamma(b+c+k)\Gamma b+d+k)\Gamma(c+d+n)}{\Gamma(a+b+c+d+n+k)}$$

sonucuna varılır. Burada $(-k)_n$ terimi $k < n$ için sıfıra eşit olup, $W_n(x^2; a, b, c, d)$

polinomunun a ve b ye göre simetrisinden dolayı,

$W_n(-s^2; a, b, c, d)$

$$= \frac{(-n)_n}{n!}(n+a+b+c+d-1)_n(b-s)_n(b+s)_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k(b-s)_k(b+s)_k$$

olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 5.4.2. de s yerine ix alınırsa,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \left|\frac{\Gamma(a+ix)\Gamma(b+ix)\Gamma(c+ix)\Gamma(d+ix)}{\Gamma(2ix)}\right|^2 W_m(x^2; a, b, c, d)\, W_n(x^2; a, b, c, d)dx$$

$$= (n+a+b+c+d-1)_n n!$$

$$\times \frac{\Gamma(n+a+b)\Gamma(n+a+c)\Gamma(n+a+d)\Gamma(n+b+c)\Gamma(n+b+d)\Gamma(n+c+d)}{\Gamma(2n+a+b+c+d)}\delta_{mn}$$

elde edilir. Bu bağıntı, Wilson polinomları için ortogonallik bağıntısıdır.

5.5. Wilson Polinomları için Rekürans Bağıntıları

5.5.1. Lemma

a, b, c, d, e, f ve g reel ya da kompleks parametreler olmak üzere,

$${}_4F_3\left(\begin{matrix}a,b,c,d\\e,f,g\end{matrix};\quad 1\right)=F(a,b)$$

hipergeometrik fonksiyonu,

$$\frac{b(e-a)(f-a)(g-a)}{a-b-1}[F(a-1,b+1)-F(a,b)]$$

$$-\frac{a(e-b)(f-b)(g-b)}{b-a-1}[F(a+1,b-1)-F(a,b)]$$

$$+cd(a-b)F(a,b)=0$$

bağıntısını sağlar [20].

5.5.2. Teorem

Wilson polinomları için bir rekürans bağıntısı,

$$-(a^2+x^2)\widetilde{W}_n(x^2)=A_n\widetilde{W}_{n+1}(x^2)-(A_n+C_n)\widetilde{W}_n(x^2)+C_n\widetilde{W}_{n-1}(x^2)$$

şeklindedir [6]. Burada,

$$\widetilde{W}_n(x^2):=\widetilde{W}_n(x^2;a,b,c,d)=\frac{W_n(x^2;a,b,c,d)}{(a+b)_n(a+c)_n(a+d)_n},$$

$$A_n=\frac{(n+a+b+c+d-1)(n+a+b)(n+a+c)(n+a+d)}{(2n+a+b+c+d-1)(2n+a+b+c+d)}$$

$$C_n=\frac{n(n+b+c-1)(n+b+d-1)(n+c+d-1)}{(2n+a+b+c+d-2)(2n+a+b+c+d-1)} \qquad (5.7)$$

dir.

İspat

Lemma 5.5.1 de a yerine $-n$, b yerine $n+a+b+c+d-1$, c yerine $a+ix$, d yerine $a-ix$, e yerine $a+b$, f yerine $a+c$, g yerine $a+d$ alınırsa,

$$\frac{(n+a+b+c+d-1)(a+b+n)(a+c+n)(a+d+n)}{(-2n-a-b-c-d)}$$

$$\times [F(-n-1,n+a+b+c+d)-F(-n,n+b+c+d-1)]$$

$$+\frac{n(-n-c-d+1)(-n-b-d+1)(-n-b-c+1)}{(2n+a+b+c+d-2)}$$

$$\times [F(-n+1,n+a+b+c+d-2)-F(-n,n+b+c+d-1)]$$

$$+(a+ix)(a-ix)(-2n-a-b-c-d+1)F(-n,n+b+c+d-1)=0 \qquad (5.8)$$

elde edilir. Burada,

$$F(-n,n+a+b+c+d-1)=\frac{W_n(x^2;a,b,c,d)}{(a+b)_n(a+c)_n(a+d)_n}$$

$$=\widetilde{W}_n(x^2;a,b,c,d)=\widetilde{W}_n(x^2)$$

$$F(-n+1,n+a+b+c+d-2)=\frac{W_{n-1}(x^2;a,b,c,d)}{(a+b)_{n-1}(a+c)_{n-1}(a+d)_{n-1}}$$

$$=\widetilde{W}_{n-1}(x^2;a,b,c,d)=\widetilde{W}_{n-1}(x^2)$$

$$F(-n-1,n+a+b+c+d)=\frac{W_{n+1}(x^2;a,b,c,d)}{(a+b)_{n+1}(a+c)_{n+1}(a+d)_{n+1}}$$

$$=\widetilde{W}_{n+1}(x^2;a,b,c,d)=\widetilde{W}_{n+1}(x^2)$$

olup bu eşitlikler Eş. 5.8 de yerlerine yazılırsa,

$$\frac{(n+a+b+c+d-1)(n+a+b)(n+a+c)(n+a+d)}{(2n+a+b+c+d)(2n+a+b+c+d-1)}\left[\widetilde{W}_{n+1}(x^2)-\widetilde{W}_n(x^2)\right]$$

$$+\frac{n(n+c+d-1)(n+b+d-1)(n+b+c-1)}{(2n+a+b+c+d-2)(2n+a+b+c+d-1)}\left[\widetilde{W}_{n-1}(x^2)-\widetilde{W}_n(x^2)\right]$$

$$+(a^2+x^2)\widetilde{W}_n(x^2)=0$$

bulunur. Burada, A_n ve C_n Eş. 5.7 deki gibi alınıp düzenlenirse, istenilen rekürans bağıntısı elde edilir.

5.5.3. Lemma

a, b, c, d, e, f ve g kompleks sayılar ve $Re(e+f+g-a-b-c-d) > 0$ olmak üzere,

$$fg\ {}_4F_3\left(\begin{matrix}a\,,b\,,c\,,d\\ e\,,f,g\end{matrix};\quad 1\right)-(f-a)(g-a)\ {}_4F_3\left(\begin{matrix}a\,,b+1\,,c+1\,,d+1\\ e+1\,,f+1\,,g+1\end{matrix};\quad 1\right)$$

$$+\frac{a(e-b)(e-c)(e-d)}{e(e+1)}\ {}_4F_3\left(\begin{matrix}a+1\,,b+1\,,c+1\,,d+1\\ e+2\,,f+1\,,g+1\end{matrix};\quad 1\right)=0$$

eşitliği doğrudur [12].

5.5.4. Teorem

Wilson polinomları için $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$(a+b+n)W_n(x^2;a,b,c,d)-(a+b)W_n(x^2;a+1,b,c,d)$$

$$+n(n+c+d-1)(b^2+x^2)W_{n-1}(x^2;a+1,b+1,c,d)=0$$

rekürans bağıntısı gerçeklenir.

İspat

Lemma 5.5.3 te, a yerine $-n$, b yerine $n+a+b+c+d-1$, c yerine $a+ix$, d yerine $a-ix$, e yerine $a+b$, f yerine $a+c$, g yerine $a+d$ alınırsa,

$$(a+c)(a+d)\ {}_4F_3\left(\begin{matrix}-n,n+a+b+c+d-1\,,a+ix\,,a-ix\\ a+b\,,\quad a+c\,,\quad a+d\end{matrix};1\right)$$

$$-(a+c+n)(a+d+n)\ {}_4F_3\left(\begin{matrix}-n,n+a+b+c+d-1\,,a+1+ix\,,a+1-ix\\ a+b+1\,,\quad a+c+1\,,\quad a+d+1\end{matrix};1\right)$$

$$+\frac{n(n+c+d-1)(b-ix)(b+ix)}{(a+b)(a+b+1)}$$

$$\times\ {}_4F_3\left(\begin{matrix}-n+1,n+a+b+c+d\,,a+1+ix\,,a+1-ix\\ a+b+2\,,\quad a+c+1\,,\quad a+d+1\end{matrix};1\right)=0$$

elde edilir. Son eşitlik Eş. 5.1 ile tanımlanan Wilson polinomu ile karşılaştırılıp gerekli işlemler yapılırsa,

$$(a+c)(a+d)\frac{W_n(x^2;a,b,c,d)}{(a+b)_n(a+c)_n(a+d)_n}$$

$$-(a+c+n)(a+d+n)\frac{W_n(x^2;a+1,b,c,d)}{(a+b+1)_n(a+c+1)_n(a+d+1)_n}$$

$$+\frac{n(n+c+d-1)(b-ix)(b+ix)}{(a+b)(a+b+1)}\frac{W_{n-1}(x^2;a+1,b+1,c,d)}{(a+b+2)_{n-1}(a+c+1)_{n-1}(a+d+1)_{n-1}}=0$$

$$\frac{W_n(x^2;a,b,c,d)}{(a+b)_n(a+c+1)_{n-1}(a+d+1)_{n-1}}$$

$$-(a+c+n)(a+d+n)\frac{W_n(x^2;a+1,b,c,d)}{(a+b+1)_n(a+c+1)_n(a+d+1)_n}$$

$$+n(n+c+d-1)(b^2+x^2)\frac{W_{n-1}(x^2;a+1,b+1,c,d)}{(a+b)_{n+1}(a+c+1)_{n-1}(a+d+1)_{n-1}}=0$$

olur. Eşitliğin her iki yanı, $(a+b)_{n+1}(a+c+1)_{n-1}(a+d+1)_{n-1}$ ile çarpılıp düzenlenirse, istenilen rekürans bağıntısı elde edilir.

5.6. Wilson Polinomları için İntegral Gösterimler

Bu kısımda Wilson polinomları için yeni integral gösterimler elde edilecektir.

5.6.1. Teorem

Wilson polinomları $Re(a-ix)>0$, $Re(d+ix)>0$ ve $Re(a,b,c,d)>0$ olmak üzere,

$$W_n(x^2;a,b,c,d)=\frac{(a+b)_n(a+c)_n\Gamma(a+d+n)}{\Gamma(a-ix)\Gamma(d+ix)}$$

$$\times\int_0^1 t^{a-ix+k-1}(1-t)^{d+ix-1}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}-n, n+a+b+c+d-1, a+ix\\ a+b, \quad a+c\end{matrix};t\right)dt$$

şeklinde bir integral gösterimine sahiptir.

İspat

Wilson polinomunun Eş. 5.1 ile verilen tanımında beta fonksiyonunun tanımı uygulanır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{W_n(x^2;a,b,c,d)}{(a+b)_n(a+c)_n(a+d)_n}$$

$$= {}_4F_3\left(\begin{matrix}-n, n+a+b+c+d-1, a+ix, a-ix \\ a+b, \quad a+c, \quad a+d\end{matrix};1\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k\ (n+a+b+c+d-1)_k\ (a+ix)_k(a-ix)_k}{(a+b)_k(a+c)_k\ (a+d)_k\ k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k\ (n+a+b+c+d-1)_k\ (a+ix)_k\Gamma(a-ix+k)\Gamma(a+d)}{(a+b)_k(a+c)_k\ k!\ \Gamma(a-ix)\Gamma(a+d+k)} \frac{\Gamma(d+ix)}{\Gamma(d+ix)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k\ (n+a+b+c+d-1)_k\,(a+ix)_k\Gamma(a+d)}{(a+b)_k(a+c)_k\ k!\,\Gamma(a-ix)\Gamma(d+ix)} B(a-ix+k, d+ix)$$

$$= \frac{\Gamma(a+d)}{\Gamma(a-ix)\Gamma(d+ix)}$$

$$\times \int_0^1 t^{a-ix-1}(1-t)^{d+ix-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k\ (n+a+b+c+d-1)_k\,(a+ix)_k}{(a+b)_k(a+c)_k\,k!} t^k dt$$

$$= \frac{\Gamma(a+d)}{\Gamma(a-ix)\Gamma(d+ix)}$$

$$\times \int_0^1 t^{a-ix-1}(1-t)^{d+ix-1}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}-n, n+a+b+c+d-1, a+ix \\ a+b, \quad a+c\end{matrix};t\right) dt$$

elde edilir.

5.6.2. Teorem

Wilson polinomları $Re(a+b) > Re(b+ix) > 0,\ Re(c+d) > Re(d-ix) > 0,$ $\arg u = \arg(1-u) = 0$ ve $\arg v = \arg(1-v) = 0$ olmak üzere,

$$W_n(x^2; a, b, c, d)$$

$$= \frac{\Gamma(a+b+n)\Gamma(c+d+n)}{\Gamma(a-ix)\Gamma(b+ix)\Gamma(c+ix)\Gamma(d-ix)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a+ix)_{n-k}(c-ix)_k$$

$$\times \int_0^1 \int_0^1 u^{b+ix+n-k-1}(1-u)^{a-ix-1} v^{d-ix+k-1}(1-v)^{c+ix-1} du dv$$

şeklinde bir integral gösterimine sahiptir.

İspat

Eş. 5.2 ile verilen doğurucu fonksiyon bağıntısında, Lemma 4.5.1 ve Lemma 2.9 (*i*) kullanılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{W_n(x^2; a, b, c, d)}{(a+b)_n (c+d)_n n!} t^n$$

$$= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(b+ix)\Gamma(a-ix)} \int_0^1 u^{b+ix-1}(1-u)^{a-ix-1}(1-tu)^{-\alpha-ix} du$$

$$\times \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(d-ix)\Gamma(c+ix)} \int_0^1 v^{d-ix-1}(1-v)^{c+ix-1}(1-tv)^{-c+ix} dv$$

$$= \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(c+d)}{\Gamma(b+ix)\Gamma(a-ix)\Gamma(d-ix)\Gamma(c+ix)}$$

$$\times \int_0^1 \int_0^1 u^{b+ix-1}(1-u)^{a-ix-1}\, v^{d-ix-1}(1-v)^{c+ix-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+ix)_n}{n!} t^n u^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(c-ix)_k}{k!} t^k v^k du dv$$

$$= \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(c+d)}{\Gamma(b+ix)\Gamma(a-ix)\Gamma(d-ix)\Gamma(c+ix)}$$

$$\times \int_0^1 \int_0^1 u^{b+ix-1}(1-u)^{a-ix-1}\, v^{d-ix-1}(1-v)^{c+ix-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(a+ix)_{n-k}(c-ix)_k}{(n-k)!\,k!} t^n u^{n-k} v^k\right] dudv$$

$$= \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(c+d)}{\Gamma(b+ix)\Gamma(a-ix)\Gamma(d-ix)\Gamma(c+ix)}$$

$$\times \int_0^1 \int_0^1 u^{b+ix-1}(1-u)^{a-ix-1}\, v^{d-ix-1}(1-v)^{c+ix-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a+ix)_{n-k}(c-ix)_k \frac{t^n}{n!} u^{n-k} v^k\right] dudv$$

bulunur. Bu son eşitliğin her iki yanında $\frac{t^n}{n!}$ in katsayıları eşitlenir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, istenilen sonuç elde edilir.

5.6.3. Teorem

Wilson polinomları, $Re(a+ix) > 0$, $Re(b+ix) > 0$, $Re(c+d) > Re(d-ix) > 0$ ve $\arg u = \arg(1-u) = 0$ olmak üzere,

$$W_n(x^2; a, b, c, d) = \frac{\Gamma(a+ix+n)\Gamma(b+ix+n)\Gamma(c+d+n)}{\Gamma(a+ix)\Gamma(b+ix)\Gamma(c+ix)\Gamma(d-ix)}$$

$$\times \int_0^1 u^{d-ix-1}(1-u)^{c+ix-1}(1-tu)^{-c+ix} du$$

şeklinde bir integral gösterimine sahiptir.

İspat

Eş. 5.2 ile verilen doğurucu fonksiyon bağıntısında Lemma 4.5.1 gösterimi kullanılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{W_n(x^2; a, b, c, d)}{(a+b)_n (c+d)_n n!} t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+ix)_n (b+ix)_n}{(a+b)_n n!} t^n \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(d-ix)\Gamma(c+ix)} \int_0^1 u^{d-ix-1}(1-u)^{c+ix-1}(1-tu)^{-c+ix} du$$

olur. Eşitliğin her iki yanında $\frac{t^n}{n!}$ in katsayıları eşitlenip gerekli düzenlemeler yapılırsa istenilen integral gösterim elde edilir.

5.7. Wilson Polinomları için Bilineer ve Bilateral Doğurucu Fonksiyonlar

Bu kısımda Wilson polinomları için bilineer ve bilateral doğurucu fonksiyonlar veren teoremler elde edilecek ve bunlara çeşitli örnekler verilecektir. Bu teoremlerden ilki ispatlanacak, diğerlerinin ispatı benzer olduğu için ispatsız olarak verilecektir.

5.7.1. Teorem

μ - yüncü basamaktan s kompleks değişkenli ($s \in \mathbb{N}$) sıfıra denk olmayan $\Omega_\mu(\xi_1, \dots, \xi_s)$ fonksiyonu,

$$\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1, \dots, \xi_s; \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \, \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \dots, \xi_s)\tau^k$$

$(\alpha_k \neq 0 \, , \psi \in \mathbb{C})$

ve $n, p \in \mathbb{N}$ için

$$\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x;\ a,b,c,d;\ \xi_1, \dots, \xi_s;\ \zeta)$$

$$= \sum_{k=0}^{[n/p]} \alpha_k \frac{W_{n-pk}(x^2;a,b,c,d)}{(a+b)_{n-pk}(c+d)_{n-pk}(n-pk)!} \, \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \dots, \xi_s)\zeta^k \qquad (5.9)$$

olsun. Buna göre,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\mu,\psi}\left(x;\ a,b,c,d;\ \xi_1, \dots, \xi_s; \frac{\eta}{t^p}\right) t^n$$

$$= F\left(\begin{matrix} a+ix, b+ix \\ a+b \end{matrix}; t\right) F\left(\begin{matrix} c-ix, d-ix \\ c+d \end{matrix}; t\right) \Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1, \dots, \xi_s; \eta) \qquad (5.10)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 5.10 un sol tarafını S ile gösterelim. $\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}\left(x;\ a,b,c;\ \xi_1,\dots,\xi_s;\frac{\eta}{t^p}\right)$ polinomunun değeri, Eş. 5.9 dan alınıp Eş. 5.10 da yerine yazılır ve Lemma 2.9 (ii) uygulanıp Eş. 5.2 kullanılırsa

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]}\alpha_k\frac{W_{n-pk}(x^2;a,b,c,d)}{(a+b)_{n-pk}(c+d)_{n-pk}(n-pk)!}\,\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\dots,\xi_s)\frac{\eta^k}{t^{pk}}\,t^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\frac{W_n(x^2;a,b,c,d)}{(a+b)_n(c+d)_n n!}\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\dots,\xi_s)\eta^k\,t^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{W_n(x^2;a,b,c,d)}{(a+b)_n(c+d)_n n!}t^n\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\,\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\dots,\xi_s)\eta^k$$

$$=F\left(\begin{matrix}a+ix,b+ix\\a+b\end{matrix};t\right)F\left(\begin{matrix}c-ix,d-ix\\c+d\end{matrix};t\right)\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1,\dots,\xi_s;\eta)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

5.7.2. Teorem

μ - yüncü basamaktan s kompleks değişkenli ($s\in\mathbb{N}$) sıfıra denk olmayan $\Omega_\mu(\xi_1,\dots,\xi_s)$ fonksiyonu,

$$\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1,\dots,\xi_s;\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\,\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\dots,\xi_s)\tau^k$$

$(\alpha_k\neq 0\,,\psi\in\mathbb{C}\,)$

ve $n,p\in\mathbb{N}$ için

$$\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x;\ a,b,c,d;\ \xi_1,\dots,\xi_s;\ \zeta)$$
$$=\sum_{k=0}^{[n/p]}\alpha_k\frac{W_{n-pk}(x^2;a,b,c,d)}{(a+c)_{n-pk}(b+d)_{n-pk}(n-pk)!}\,\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\dots,\xi_s)\zeta^k$$

olsun. Buna göre,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\mu,\psi}\left(x;\ a,b,c,d;\ \xi_1,\dots,\xi_s;\frac{\eta}{t^p}\right)t^n$$

$$= F\left(\begin{matrix}a+ix,c+ix\\ a+c\end{matrix};t\right)\ F\left(\begin{matrix}b-ix,d-ix\\ b+d\end{matrix};t\right)\ \Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1,\dots,\xi_s;\eta)$$

eşitliği sağlanır.

5.7.3. Teorem

μ - yüncü basamaktan s kompleks değişkenli ($s \in \mathbb{N}$) sıfıra denk olmayan $\Omega_{\mu}(\xi_1,\dots,\xi_s)$ fonksiyonu,

$$\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1,\dots,\xi_s;\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k\ \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\dots,\xi_s)\tau^k$$

$(\alpha_k \neq 0\ , \psi \in \mathbb{C}\ )$

ve $n,p \in \mathbb{N}$ için

$$\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x;\ a,b,c,d;\ \xi_1,\dots,\xi_s;\ \zeta)$$
$$= \sum_{k=0}^{[n/p]} \alpha_k \frac{W_{n-pk}(x^2;a,b,c,d)}{(a+d)_{n-pk}(b+c)_{n-pk}(n-pk)!}\ \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\dots,\xi_s)\zeta^k$$

olsun. Buna göre,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\mu,\psi}\left(x;\ a,b,c,d;\ \xi_1,\dots,\xi_s;\frac{\eta}{t^p}\right)t^n$$

$$= F\left(\begin{matrix}a+ix,d+ix\\ a+d\end{matrix};t\right)\ F\left(\begin{matrix}b-ix,c-ix\\ b+c\end{matrix};t\right)\ \Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1,\dots,\xi_s;\eta)$$

eşitliği sağlanır.

5.7.4. Teorem

μ - yüncü basamaktan s kompleks değişkenli ($s \in \mathbb{N}$) sıfıra denk olmayan $\Omega_{\mu}(\xi_1, \dots, \xi_s)$ fonksiyonu,

$$\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1, \dots, \xi_s; \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \, \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \dots, \xi_s)\tau^k$$

$(\alpha_k \neq 0 \, , \psi \in \mathbb{C} \,)$

ve $n, p \in \mathbb{N}$ için,

$$\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x;\ a, b, c, d;\ \xi_1, \dots, \xi_s;\ \zeta)$$
$$= \sum_{k=0}^{[n/p]} \alpha_k \frac{(a+b+c+d-1)_{n-pk} W_{n-pk}(x^2; a, b, c, d)}{(a+b)_{n-pk}(a+c)_{n-pk}(a+d)_{n-pk}(n-pk)!} \, \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \dots, \xi_s)\zeta^k$$

olsun. Buna göre,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\mu,\psi}\left(x;\ a, b, c, d;\ \xi_1, \dots, \xi_s; \frac{\eta}{t^p}\right) t^n$$

$$= (1-t)^{1-a-b-c-d} \, {}_4F_3\left(\frac{1}{2}(a+b+c+d-1), \frac{1}{2}(a+b+c+d), a+ix, a-ix; -\frac{4t}{(1-t)^2}\right)$$
$$a+b, a+c, a+d$$

$\times \Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1, \dots, \xi_s; \eta)$

eşitliği sağlanır.

Teorem 5.7.1 de $\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \dots, \xi_s)$ $(s \in \mathbb{N})$ çok değişkenli fonksiyonu bir ya da çok değişkenli basit fonksiyonlar tarafından ifade edilerek, elde edilen sonuçların farklı uygulamaları verilebilir.

Örnek

Teorem 5.7.1 de $s = 1 \, , \xi_1 = y$ ve $\Omega_{\mu+\psi k}(y)$ yerine $W_{\mu+\psi k}(y^2; a, b, c, d)$ olarak alınır ve elde edilen sonuçta, $\alpha_k = \frac{1}{(a+b)_k (c+d)_k k!}$, $\mu = 0$ ve $\psi = 1$ yazılarak Eş. 5.2

kullanılırsa Wilson polinomları için bilineer doğurucu fonksiyonların bir sınıfı aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]}\frac{W_{n-pk}(x^2;a,b,c,d)}{(a+b)_{n-pk}(c+d)_{n-pk}(n-pk)!}\frac{W_k(y^2;a,b,c,d)}{(a+b)_k(c+d)_k k!}\eta^k\, t^{n-pk}$$

$$= F\left(\begin{matrix}a+ix,b+ix\\a+b\end{matrix};t\right)F\left(\begin{matrix}c-ix,d-ix\\c+d\end{matrix};t\right)F\left(\begin{matrix}a+iy,b+iy\\a+b\end{matrix};\eta\right)F\left(\begin{matrix}c-iy,d-iy\\c+d\end{matrix};\eta\right).$$

Örnek

Teorem 5.7.4 te $s=1$, $\xi_1=y$ ve $\Omega_{\mu+\psi k}(y)=P_{\mu+\psi k}^{(\lambda)}(y;\phi)$ olsun. Burada $P_{\mu+\psi k}^{(\lambda)}(y;\phi)$ Meixner – Pollaczek polinomları olup Eş. 3.2 doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir. Böylece elde edilen sonuçta, $\alpha_k=1$, $\mu=0$ ve $\psi=1$ alınıp Eş. 3.2 kullanılırsa Wilson polinomları ile Meixner–Pollaczek polinomları için bilateral doğurucu fonksiyonların bir sınıfı aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]}\frac{(a+b+c+d-1)_{n-pk}W_{n-pk}(x^2;a,b,c,d)}{(a+b)_{n-pk}(a+c)_{n-pk}(a+d)_{n-pk}(n-pk)!}P_k^{(\lambda)}(y;\phi)\eta^k\, t^{n-pk}$$

$$= (1-t)^{1-a-b-c-d}\ {}_4F_3\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}(a+b+c+d-1),\frac{1}{2}(a+b+c+d),a+ix,a-ix\\a+b,a+c,a+d\end{matrix};-\frac{4t}{(1-t)^2}\right)$$

$$\times\left(1-e^{i\phi}\eta\right)^{-\lambda+iy}\left(1-e^{-i\phi}\eta\right)^{-\lambda-iy}.$$

α_k $(k\in\mathbb{N}_0)$ katsayılarının uygun her bir seçimi için, eğer $\Omega_\mu(\xi_1,\dots,\xi_s)$ çok değişkenli fonksiyonu, daha basit bazı fonksiyonların uygun bir çarpımı olarak ifade edilebilirse, bu durumda Teorem 5.7.1 - 5.7.4 , Eş. 5.1 ile tanımlanan Wilson polinomları için multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyonların çeşitli ailelerini elde etmek için kullanılabilir.

6. RACAH POLİNOMLARI

Bu bölümde Racah polinomunun tanımı, bazı doğurucu fonksiyonları, ortogonalliği, bir rekürans bağıntısı, bazı polinomlar ile aralarındaki limit bağıntıları incelenecektir. Daha sonra bu polinomlar için yeni bir rekürans bağıntısı ve integral gösterim elde edilecektir. Racah polinomlarının limit geçişlerinden faydalanılarak Hahn, dual Hahn ve Meixner polinomları için yeni rekürans bağıntıları ve dual Hahn polinomu için yeni bir integral gösterim elde edilecektir. Son olarak bu polinomlar için bilineer, bilateral doğurucu fonksiyonlar veren yeni bir teorem ispatlanacak ve uygulamaları verilecektir.

6.1. Racah Polinomlarının Tanımı

6.1.1. Tanım

Racah polinomları, $n = 0,1,2,\dots,N$, $\lambda(x) = x(x+\gamma+\delta+1)$ olmak üzere,

$$R_n(\lambda(x);\alpha,\beta,\gamma,\delta) = {}_4F_3\left(\begin{matrix}-n, n+\alpha+\beta+1, x+\gamma+\delta+1, -x \\ \alpha+1,\ \beta+\delta+1,\ \gamma+1\end{matrix};1\right) \tag{6.1}$$

şeklinde tanımlanır [6,12,13]. Burada $\alpha+1=-N$, $\beta+\delta+1=-N$ veya $\gamma+1=-N$ olup N negatif olmayan bir tam sayıdır.

6.2. Racah Polinomunun Doğurucu Fonksiyonları

Bu kısımda Racah polinomunun bilinen bazı doğurucu fonksiyonları verilecektir.

6.2.1. Teorem

Racah polinomlarının bazı doğurucu fonksiyon bağıntıları $x = 0,1,2,\dots,N$ ve $\beta+\delta+1=-N$ veya $\gamma+1=-N$ olmak üzere,

$$F\left(\begin{matrix}-x, -x+\alpha-\gamma-\delta \\ \alpha+1\end{matrix};t\right)F\left(\begin{matrix}x+\beta+\delta+1, x+\gamma+1 \\ \beta+1\end{matrix};t\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{(\beta+\delta+1)_n(\gamma+1)_n}{(\beta+1)_n n!} R_n(\lambda(x);\alpha,\beta,\gamma,\delta)t^n, \tag{6.2}$$

$\alpha+1=-N$ veya $\gamma+1=-N$ olmak üzere,

$$F\left(\begin{matrix}-x,-x+\beta-\gamma\\ \beta+\delta+1\end{matrix};t\right)F\left(\begin{matrix}x+\alpha+1,x+\gamma+1\\ \alpha-\delta+1\end{matrix};t\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{N}\frac{(\alpha+1)_n(\gamma+1)_n}{(\alpha-\delta+1)_n n!}R_n(\lambda(x);\alpha,\beta,\gamma,\delta)t^n\,, \tag{6.3}$$

$\alpha+1=-N$ veya $\beta+\delta+1=-N$ olmak üzere,

$$F\left(\begin{matrix}-x,-x-\delta\\ \gamma+1\end{matrix};t\right)F\left(\begin{matrix}x+\alpha+1,x+\beta+\delta+1\\ \alpha+\beta-\gamma+1\end{matrix};t\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{N}\frac{(\alpha+1)_n(\beta+\delta+1)_n}{(\alpha+\beta-\gamma+1)_n n!}R_n(\lambda(x);\alpha,\beta,\gamma,\delta)t^n, \tag{6.4}$$

$$\left[(1-t)^{-\alpha-\beta-1}\,{}_4F_3\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}(\alpha+\beta+1),\frac{1}{2}(\alpha+\beta+2),-x,x+\gamma+\delta+1\\ \alpha+1,\quad \beta+\delta+1,\quad \gamma+1\end{matrix};-\frac{4t}{(1-t)^2}\right)\right]_N$$

$$=\sum_{n=0}^{N}\frac{(\alpha+\beta+1)_n}{n!}R_n(\lambda(x);\alpha,\beta,\gamma,\delta)t^n \tag{6.5}$$

şeklindedir [6,13].

6.3. Racah Polinomunun Diğer Bazı Polinomlarla Limit İlişkileri

6.3.1. Teorem

Racah polinomları ile Hahn polinomları arasında

i. $\lim_{\delta\to\infty} R_n(\lambda(x);\alpha,\beta,-N-1,\delta)=Q_n(x;\alpha,\beta,N)$

ii. $\lim_{\gamma\to\infty} R_n(\lambda(x);\alpha,\beta,\gamma,-\beta-N-1)=Q_n(x;\alpha,\beta,N)$

iii. $\lim_{\delta\to\infty} R_n(\lambda(x);-N-1,\beta+\gamma+N+1,\gamma,\delta)=Q_n(x;\gamma,\beta,N)$

şeklinde limit ilişkileri mevcuttur [6,13]. Burada $Q_n(x;\alpha,\beta,N)$ Hahn polinomudur ve

$$Q_n(x;\alpha,\beta,N)\;=\;{}_3F_2\left(\begin{matrix}-n\;\;,n+\alpha+\beta+1\;\;,-x\\ \alpha+1\;\;,-N\end{matrix};\;1\right),\quad n=0,1,2,\dots,N \tag{6.6}$$

olarak tanımlanır [6,22,30].

İspat

i. Eş. 6.1 ile verilen Racah polinomlarında $n = 0,1,2,\dots,N$ olmak üzere $\gamma = -N-1$ alınırsa,

$$R_n(\lambda(x);\alpha,\beta,-N-1,\delta) = {}_4F_3\left(\begin{matrix}-n, n+\alpha+\beta+1, -x, x-N+\delta \\ \alpha+1\,, \beta+\delta+1\,, -N\end{matrix}; 1\right)$$

olur. Eşitliğin her iki tarafının $\delta \to \infty$ için limiti alınırsa,

$$\lim_{\delta\to\infty} R_n(\lambda(x);\alpha,\beta,-N-1,\delta)$$

$$= \lim_{\delta\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k\ (n+\alpha+\beta+1)_k\,(-x)_k(x-N+\delta)_k}{(\alpha+1)_k(\beta+\delta+1)_k\,(-N)_k\ k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k\ (n+\alpha+\beta+1)_k\,(-x)_k}{(\alpha+1)_k\,(-N)_k\ k!} \left\{\lim_{\delta\to\infty} \frac{(x-N+\delta)_k}{(\beta+\delta+1)_k}\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k\ (n+\alpha+\beta+1)_k\,(-x)_k}{(\alpha+1)_k\,(-N)_k\ k!}$$

$$= {}_3F_2\left(\begin{matrix}-n\ , n+\alpha+\beta+1\ , -x \\ \alpha+1\ , -N\end{matrix};\ 1\right)$$

$$= Q_n(x;\alpha,\beta,N)$$

elde edilir.

ii. Eş 6.1 de verilen Racah polinomlarında $n = 0,1,2,\dots,N$ olmak üzere, $\delta = -\beta-N-1$ alınırsa,

$$R_n(\lambda(x);\alpha,\beta,\gamma,-\beta-N-1) = {}_4F_3\left(\begin{matrix}-n, n+\alpha+\beta+1, -x, x+\gamma-\beta-N \\ \alpha+1\,, -N\,, \gamma+1\end{matrix}; 1\right)$$

olur. Eşitliğin her iki tarafının $\gamma \to \infty$ için limiti alınırsa,

$$\lim_{\gamma\to\infty} R_n(\lambda(x);\alpha,\beta,\gamma,-\beta-N-1)$$

$$= \lim_{\gamma\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k\ (n+\alpha+\beta+1)_k\,(-x)_k(x+\gamma-\beta-N)_k}{(\alpha+1)_k\,(-N)_k\,(\gamma+1)_k\,k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k\ (n+\alpha+\beta+1)_k\,(-x)_k}{(\alpha+1)_k\,(-N)_k\ k!} \left\{ \lim_{\gamma\to\infty} \frac{(x+\gamma-\beta-N)_k}{(\gamma+1)_k} \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k\ (n+\alpha+\beta+1)_k\,(-x)_k}{(\alpha+1)_k\,(-N)_k\ k!}$$

$$= {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -n & , n+\alpha+\beta+1 & , -x \\ \alpha+1 & , -N & \end{matrix} \ ;\ 1 \right)$$

$$= Q_n(x;\alpha,\beta,N)$$

elde edilir.

iii. Eş 6.1 ile verilen Racah polinomlarında $n = 0,1,2,\dots,N$ olmak üzere $\alpha = -N-1$ ve $\beta \to \beta+\gamma+N+1$ alınırsa,

$$R_n(\lambda(x);-N-1,\beta+\gamma+N+1\,,\gamma,\delta)$$

$$= {}_4F_3 \left(\begin{matrix} -n, n+\beta+\gamma+1, -x, x+\gamma+\delta+1 \\ -N\,, \beta+\gamma+N+\delta+2\,, \gamma+1 \end{matrix} ; 1 \right)$$

olur. Eşitliğin her iki tarafının $\delta \to \infty$ için limiti alınırsa,

$$\lim_{\delta\to\infty} R_n(\lambda(x);-N-1,\beta+\gamma+N+1\,,\gamma,\delta)$$

$$= \lim_{\delta\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k\ (n+\beta+\gamma+1)_k\,(-x)_k(x+\gamma+\delta+1)_k}{(-N)_k(\beta+\gamma+N+\delta+2)_k\,(\gamma+1)_k\,k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k\ (n+\beta+\gamma+1)_k\,(-x)_k}{(\gamma+1)_k\,(-N)_k\ k!} \left\{ \lim_{\delta\to\infty} \frac{(x+\gamma+\delta+1)_k}{(\beta+\gamma+N+\delta+2)_k} \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k\ (\ n+\beta+\gamma+1)_k\,(-x)_k}{(\gamma+1)_k\,(-N)_k\ k!}$$

$$= {}_3F_2\left(\begin{matrix}-n & , n+\beta+\gamma+1 & , -x \\ \gamma+1 & , -N & \end{matrix}\ ;\ 1\right)$$

$$= Q_n(x;\ \gamma, \beta, N)$$

elde edilir.

6.3.2. Teorem

Racah polinomları ile Dual Hahn polinomları arasında,

$i.\ \lim_{\beta\to\infty} R_n(\lambda(x); -N-1, \beta, \gamma, \delta) = R_n(\lambda(x); \gamma, \delta, N)$

$ii.\ \lim_{\alpha\to\infty} R_n(\lambda(x); \alpha, -\delta-N-1, \gamma, \delta) = R_n(\lambda(x); \gamma, \delta, N)$

$iii.\ \lim_{\beta\to\infty} R_n(\lambda(x); \alpha, \beta, -N-1, \alpha+\delta+N+1) = R_n(\lambda(x); \alpha, \delta, N)$

şeklinde limit ilişkileri mevcuttur [6]. Burada $R_n(\lambda(x); \alpha, \delta, N)$ Dual Hahn polinomudur ve

$$R_n(\lambda(x); \alpha, \delta, N) = {}_3F_2\left(\begin{matrix}-n & , -x & , x+\alpha+\delta+1 \\ \alpha+1 & , -N & \end{matrix}\ ;\ 1\right), \quad n = 0,1,2,\dots,N \qquad (6.7)$$

olarak tanımlanır [6,22].

İspat

(i), (ii) ve (iii) ile verilen bağıntıların ispatları, Teorem 6.3.1 in ispatına benzer olarak yapılır.

Hahn polinomları ile Gegenbauer polinomları arasında aşağıdaki şekilde yeni bir bağıntı elde edilmiştir.

6.3.3. Teorem

Hahn polinomları ile Gegenbauer polinomları arasında,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{(2\lambda)_n}{n!} Q_n\left(\frac{N(1-x)}{2}; \lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2}, N\right) = C_n^{(\lambda)}(x)$$

limit ilişkisi vardır.

İspat

Eş. 6.6 da $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$ ve x yerine $\frac{N(1-x)}{2}$ yazılırsa, $n = 1,2,\dots,N$ ve $\lambda \neq 0$ olmak üzere,

$$Q_n\left(\frac{N(1-x)}{2}; \lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2}, N\right) = {}_3F_2\left(\begin{matrix}-n\ , n+2\lambda\ , \frac{-N(1-x)}{2} \\ \lambda+\frac{1}{2}\ , -N\end{matrix}\ ;\ 1\right)$$

olup eşitliğin her iki yanı $\frac{(2\lambda)_n}{n!}$ ile çarpılır ve $N \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{(2\lambda)_n}{n!} Q_n\left(\frac{N(1-x)}{2}; \lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2}, N\right)$$

$$= \frac{(2\lambda)_n}{n!} \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k\,(n+2\lambda)_k \left(\frac{-N(1-x)}{2}\right)_k}{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_k (-N)_k k!}$$

$$= \frac{(2\lambda)_n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k\,(n+2\lambda)_k}{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_k k!} \lim_{N\to\infty} \frac{\left(\frac{-N(1-x)}{2}\right)_k}{(-N)_k}$$

$$= \frac{(2\lambda)_n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k\,(n+2\lambda)_k}{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_k k!} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k$$

$$= \frac{(2\lambda)_n}{n!}\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}-n\ , n+2\lambda \\ \lambda+\frac{1}{2}\end{matrix}\ ;\ \frac{1-x}{2}\right)$$

$$= C_n^{(\lambda)}(x)$$

elde edilir.

6.4. Racah Polinomları için Rekürans Bağıntıları

Bu kısımda Racah polinomları için yeni bir rekürans bağıntısı elde edilecek ve bu bağıntıdan yararlanılarak Dual Hahn, Hahn ve Meixner polinomları için yeni rekürans bağıntıları içeren sonuçlar verilecektir.

6.4.1. Teorem

Racah polinomları $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$(\beta+\delta+1)(\gamma+1)R_n(\lambda(x);\alpha,\beta,\gamma,\delta)$$

$$-(\beta+\delta+n+1)(\gamma+n+1)R_n(\lambda(x-1);\alpha+1,\beta,\gamma+1,\delta+1)$$

$$+\frac{n(n+\beta)(\alpha+x+1)(\alpha-x-\gamma-\delta)}{(\alpha+1)(\alpha+2)}R_{n-1}(\lambda(x-1);\alpha+2,\beta,\gamma+1,\delta+1)=0$$

şeklinde bir rekürans bağıntısına sahiptir.

İspat

Lemma 5.5.3 te a yerine $-n$, b yerine $n+\alpha+\beta+1$, c yerine $-x$, d yerine $x+\gamma+\delta+1$, e yerine $\alpha+1$, f yerine $\beta+\delta+1$ ve g yerine $\gamma+1$ alınırsa,

$$(\beta+\delta+1)(\gamma+1)\ {}_4F_3\left(\begin{matrix}-n, n+\alpha+\beta+1, -x, x+\gamma+\delta+1\\ \alpha+1, \quad \beta+\delta+1, \quad \gamma+1\end{matrix};1\right)$$

$$-(\beta+\delta+n+1)(\gamma+n+1)\ {}_4F_3\left(\begin{matrix}-n, n+\alpha+\beta+2, -x+1, x+\gamma+\delta+2\\ \alpha+2, \quad \beta+\delta+2, \quad \gamma+2\end{matrix};1\right)$$

$$+\frac{n(n+\beta)(\alpha+1+x)(\alpha-x-\gamma-\delta)}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$$

$$\times\ {}_4F_3\left(\begin{matrix}-n+1, n+\alpha+\beta+2, -x+1, x+\gamma+\delta+2\\ \alpha+3, \quad \beta+\delta+2, \quad \gamma+2\end{matrix};1\right)=0$$

elde edilir. Son eşitlik Eş. 6.1 ile tanımlanan Racah polinomu ile karşılaştırılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa, istenilen rekürans bağıntısı elde edilir.

Sonuç

Teorem 6.4.1 de $\beta = -\delta - N - 1$ yazılırsa,

$$(-N)(\gamma+1)\ {}_4F_3\left(\begin{matrix}-n, n+\alpha-\delta-N\,, -x\,, x+\gamma+\delta+1 \\ \alpha+1\,, \quad -N\,, \quad \gamma+1\end{matrix}; 1\right)$$

$$+(N-n)(\gamma+n+1)\ {}_4F_3\left(\begin{matrix}-n, n+\alpha-\delta-N+1, -x+1\,, x+\gamma+\delta+2 \\ \alpha+2\,, \quad -N+1\,, \quad \gamma+2\end{matrix}; 1\right)$$

$$+\frac{n(n-\delta-N-1)(\alpha+x+1)(\alpha-x-\gamma-\delta)}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$$

$$\times\ {}_4F_3\left(\begin{matrix}-n+1, n+\alpha-N-\delta+1\,, -x+1\,, x+\gamma+\delta+2 \\ \alpha+3\,, \quad -N+1, \quad \gamma+2\end{matrix}; 1\right) = 0$$

elde edilir. Bu son eşitliğin sol tarafının $\alpha \to \infty$ için limiti alınırsa,

$$(-N)(\gamma+1)\lim_{\alpha\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(-x)_k(x+\gamma+\delta+1)_k(n+\alpha-\delta-N)_k}{(-N)_k(\gamma+1)_k(\alpha+1)_k k!}$$

$$+(N-n)(\gamma+n+1)\lim_{\alpha\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(-x+1)_k(x+\gamma+\delta+2)_k(n+\alpha-\delta-N+1)_k}{(-N+1)_k(\gamma+2)_k(\alpha+2)_k k!}$$

$$+n(n-\delta-N-1)\lim_{\alpha\to\infty}\frac{(\alpha+x+1)(\alpha-x-\gamma-\delta)}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$$

$$\times\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n+1)_k(-x+1)_k(x+\gamma+\delta+2)_k(n+\alpha-\delta-N+1)_k}{(-N+1)_k(\gamma+2)_k(\alpha+3)_k k!}$$

$$=(-N)(\gamma+1)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(-x)_k(x+\gamma+\delta+1)_k}{(-N)_k(\gamma+1)_k k!}$$

$$+(N-n)(\gamma+n+1)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(-x+1)_k(x+\gamma+\delta+2)_k}{(-N+1)_k(\gamma+2)_k k!}$$

$$+n(n-\delta-N-1)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-n+1)_k(-x+1)_k(x+\gamma+\delta+2)_k}{(-N+1)_k(\gamma+2)_k k!}$$

$$= (-N)(\gamma+1)\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}-n,-x\ ,x+\gamma+\delta+1\\ -N\ ,\quad \gamma+1\end{matrix};1\right)$$

$$+(N-n)(\gamma+n+1)\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}-n,-x+1\ ,x+\gamma+\delta+2\\ -N+1\ ,\quad \gamma+2\end{matrix};1\right)$$

$$+n(n-\delta-N-1)\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}-n+1\ ,-x+1\ ,x+\gamma+\delta+2\\ -N+1,\quad \gamma+2\end{matrix};1\right)$$

olup Eş. 6.7 göz önüne alındığında $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$(-N)(\gamma+1)R_n(\lambda(x);\gamma,\delta,N)$$

$$+(N-n)(\gamma+n+1)R_n(\lambda(x-1);\gamma+1,\delta,N-1)$$

$$+n(n-\delta-N-1)R_{n-1}(\lambda(x-1);\gamma+1,\delta,N-1)=0$$

şeklinde Dual Hahn polinomları için yeni bir rekürans bağıntısı elde edilir.

Sonuç

Teorem 6.4.1 de $\delta = -\beta - N - 1$ yazılırsa,

$$(-N)(\gamma+1)\ {}_4F_3\left(\begin{matrix}-n,n+\alpha+\beta+1\ ,-x\ ,x+\gamma-\beta-N\\ \alpha+1\ ,\quad -N\ ,\quad \gamma+1\end{matrix};1\right)$$

$$+(N-n)(\gamma+n+1)\ {}_4F_3\left(\begin{matrix}-n,n+\alpha+\beta+2,-x+1\ ,x+\gamma-\beta-N+1\\ \alpha+2\ ,\quad -N+1\ ,\quad \gamma+2\end{matrix};1\right)$$

$$+\frac{n(n+\beta)(\alpha+x+1)(\alpha+\beta+N-x-\gamma+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$$

$$\times\ {}_4F_3\left(\begin{matrix}-n+1,n+\alpha+\beta+2\ ,-x+1\ ,x+\gamma-\beta-N+1\\ \alpha+3\ ,\quad -N+1,\quad \gamma+2\end{matrix};1\right)=0$$

olur. Bu son eşitliğin sol tarafı $\frac{1}{\gamma+1}$ ile çarpılıp $\gamma \to \infty$ için limiti alınırsa,

$$(-N)\lim_{\gamma\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(-x)_k(\,n+\alpha+\beta+1)_k(\,x+\gamma-\beta-N)_k}{(-N)_k(\gamma+1)_k(\alpha+1)_k k!}$$

$$+(N-n)\lim_{\gamma\to\infty}\frac{\gamma+n+1}{\gamma+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(-x+1)_k(\,n+\alpha+\beta+2)_k(\,x+\gamma-\beta-N+1)_k}{(-N+1)_k(\gamma+2)_k(\alpha+2)_k k!}$$

$$+n(n+\beta)\frac{(\alpha+x+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\lim_{\gamma\to\infty}\frac{\alpha+\beta+N-x-\gamma+1}{\gamma+1}$$

$$\times\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-n+1)_k(-x+1)_k(n+\alpha+\beta+2)_k(\,x+\gamma-\beta-N+1)_k}{(-N+1)_k(\gamma+2)_k(\alpha+3)_k k!}$$

$$=(-N)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(\,n+\alpha+\beta+1)_k(-x)_k}{(\alpha+1)_k(-N)_k k!}$$

$$+(N-n)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(\,n+\alpha+\beta+2)_k(-x+1)_k}{(\alpha+2)_k(-N+1)_k k!}$$

$$-\frac{n(n+\beta)(\alpha+x+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-n+1)_k(\,n+\alpha+\beta+2)_k(-x+1)_k}{(\alpha+3)_k(-N+1)_k k!}$$

$$=(-N)\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}-n,n+\alpha+\beta+1,-x\\ \alpha+1,-N\end{matrix};1\right)$$

$$+(N-n)\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}-n,n+\alpha+\beta+2,-x+1\\ \alpha+2,-N+1\end{matrix};1\right)$$

$$-\frac{n(n+\beta)(\alpha+x+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}-n+1,n+\alpha+\beta+2,-x+1\\ \alpha+3,-N+1\end{matrix};1\right)$$

olup burada Eş. 6.6 kullanılırsa $n\in\mathbb{N}$ için,

$$(-N)Q_n(x;\alpha,\beta,N)+(N-n)Q_n(x-1;\alpha+1,\beta,N-1)$$

$$-\frac{n(n+\beta)(\alpha+x+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)}Q_{n-1}(x-1;\alpha+1,\beta,N-1)=0$$

şeklinde Hahn polinomları için yeni bir rekürans bağıntısı elde edilir. Burada $Re(x-N-\beta)>0$ dır.

Sonuç

Teorem 6.4.1 de $\gamma = \beta - 1$ ve $\delta = \frac{N(1-c)}{c}$ yazılırsa $n \in \mathbb{N}$ için,

$$-N\beta R_n\left(\lambda(x); \beta - 1, \frac{N(1-c)}{c}, N\right)$$

$$+(N-n)(\beta+n)R_n\left(\lambda(x-1); \beta, \frac{N(1-c)}{c}, N-1\right)$$

$$+n\left(n-1-\frac{N}{c}\right)R_{n-1}\left(\lambda(x-1); \beta, \frac{N(1-c)}{c}, N-1\right) = 0$$

olur. Bu son eşitliğin sol yanı $\frac{1}{N}$ ile çarpılıp $N \to \infty$ için limit alınırsa,

$$-\beta \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k(-x)_k\left(x+\beta+\frac{N(1-c)}{c}\right)_k}{(-N)_k(\beta)_k k!}$$

$$+(\beta+n)\lim_{N\to\infty}\frac{N-n}{N}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(-x+1)_k\left(x+\beta+\frac{N(1-c)}{c}\right)_k}{(-N+1)_k(\beta+1)_k k!}$$

$$+\lim_{N\to\infty}\frac{n\left(n-1-\frac{N}{c}\right)}{N}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-n+1)_k(-x+1)_k\left(x+\beta+\frac{N(1-c)}{c}\right)_k}{(-N+1)_k(\beta+1)_k k!}$$

$$= -\beta\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(-x)_k}{(\beta)_k k!}\left(1-\frac{1}{c}\right)^k + (\beta+n)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(-x+1)_k}{(\beta+1)_k k!}\left(1-\frac{1}{c}\right)^k$$

$$-\frac{n}{c}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-n+1)_k(-x+1)_k}{(\beta+1)_k k!}\left(1-\frac{1}{c}\right)^k$$

$$= -\beta\, F\left(\begin{matrix}-n,-x\\ \beta\end{matrix}; 1-\frac{1}{c}\right) + (\beta+n)F\left(\begin{matrix}-n,-x+1\\ \beta+1\end{matrix}; 1-\frac{1}{c}\right)$$

$$-\frac{n}{c}F\left(\begin{matrix}-n+1,-x+1\\ \beta+1\end{matrix}; 1-\frac{1}{c}\right)$$

olup burada Eş. 5.6 kullanılırsa,

$$-\beta M_n(x;\beta,c)+(\beta+n)M_n(x-1;\beta+1,c)-\frac{n}{c}M_{n-1}(x-1;\beta+1,c)=0$$

şeklinde elde edilir.

Meixner polinomları için başka bir rekürans bağıntısı da bu polinomun doğurucu fonksiyon bağıntısından yararlanılarak aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

6.4.2. Teorem

Meixner polinomları için

$$M_n(x;\beta,c)-\frac{x(1-c)}{\beta c}M_n(x-1;\beta+1,c)-M_{n+1}(x;\beta,c)=0$$

rekürans bağıntısı gerçeklenir.

İspat

Eş. 5.6 da tanımlanan Meixner polinomlarının bir doğurucu fonksiyon bağıntısı

$$e^t\,{}_1F_1\left(\begin{matrix}-x\\ \beta\end{matrix};\left(\frac{1-c}{c}\right)t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M_n(x;\beta,c)}{n!}t^n \qquad (6.8)$$

şeklindedir [6,7,22].

Eş. 6.8 in her iki tarafının t ye göre türevi alınırsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M_n(x;\beta,c)}{(n-1)!}t^{n-1}=e^t\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)_k}{(\beta)_k k!}\left(\frac{1-c}{c}\right)^k t^k+e^t\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-x)_k}{(\beta)_k (k-1)!}\left(\frac{1-c}{c}\right)^k t^{k-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M_{n+1}(x;\beta,c)}{(n)!}t^n$$

$$=e^t\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)_k}{(\beta)_k k!}\left(\frac{1-c}{c}\right)^k t^k+e^t\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)_{k+1}}{(\beta)_{k+1} k!}\left(\frac{1-c}{c}\right)^{k+1} t^k$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M_n(x;\beta,c)}{n!}t^n+-\frac{x}{\beta}\left(\frac{1-c}{c}\right)e^t\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x+1)_k}{(\beta+1)_k k!}\left(\frac{1-c}{c}\right)^k t^k$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n(x;\beta,c)}{n!} t^n - \frac{x}{\beta}\left(\frac{1-c}{c}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n(x-1;\beta+1,c)}{n!} t^n$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafında $\frac{t^n}{n!}$ in katsayıları eşitlenirse istenilen rekürans bağıntısı elde edilir.

6.5. Racah Polinomları için İntegral Gösterimler

Bu kısımda Racah polinomları için yeni bir integral gösterim bulunacak ve bu gösterimden yararlanılarak dual Hahn polinomları için de yeni bir integral gösterim elde edilecektir.

6.5.1. Teorem

Racah polinomları, $n = 0,1,2, \dots, N$, $\lambda(x) = x(x+\gamma+\delta+1)$,

$Re(\gamma+1) > Re(x+\gamma+\delta+1) > 0$ olmak üzere,

$$R_n(\lambda(x);\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(x+\gamma+\delta+1)\Gamma(-x-\delta)}$$

$$\times \int_0^1 t^{x+\gamma+\delta}(1-t)^{-x-\delta-1}\, {}_3F_2\left(\begin{matrix}-n, n+\alpha+\beta+1, -x \\ \alpha+1, \quad \beta+\delta+1\end{matrix}; t\right) dt$$

şeklinde bir integral gösterimine sahiptir.

İspat

Racah polinomunun Eş. 6.1 ile verilen tanımında Tanım 2.3 kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$R_n(\lambda(x);\alpha,\beta,\gamma,\delta)$

$$= {}_4F_3\left(\begin{matrix}-n, n+\alpha+\beta+1, -x, x+\gamma+\delta+1 \\ \alpha+1, \ \beta+\delta+1, \ \gamma+1\end{matrix}; 1\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k \ (n+\alpha+\beta+1)_k \ (-x)_k (\ x+\gamma+\delta+1)_k}{(\alpha+1)_k (\beta+\delta+1)_k \ (\gamma+1)_k \ k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k\ (n+\alpha+\beta+1)_k\,(-x)_k}{(\alpha+1)_k(\beta+\delta+1)_k k!} \frac{\Gamma(x+\gamma+\delta+1+k)}{\Gamma(x+\gamma+\delta+1)} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1+k)} \frac{\Gamma(-x-\delta)}{\Gamma(-x-\delta)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k\ (n+\alpha+\beta+1)_k\,(-x)_k}{(\alpha+1)_k(\beta+\delta+1)_k k!} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(x+\gamma+\delta+1)\Gamma(-x-\delta)}$$

$$\times B(x+\gamma+\delta+1+k, -x-\delta)$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(x+\gamma+\delta+1)\Gamma(-x-\delta)}$$

$$\times \int_0^1 t^{x+\gamma+\delta}(1-t)^{-x-\delta-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k\ (n+\alpha+\beta+1)_k\,(-x)_k}{(\alpha+1)_k(\beta+\delta+1)_k\,k!} t^k dt$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(x+\gamma+\delta+1)\Gamma(-x-\delta)}$$

$$\times \int_0^1 t^{x+\gamma+\delta}(1-t)^{-x-\delta-1}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}-n, n+\alpha+\beta+1, -x \\ \alpha+1, \quad \beta+\delta+1\end{matrix}; t\right) dt$$

integral gösterimi elde edilir.

Sonuç

Teorem 6.5.1 de $\gamma = -N-1$, $\delta \to \alpha+\delta+N+1$ yazılıp $\beta \to \infty$ için eşitliğin her iki tarafının limiti alınırsa,

$$R_n(\lambda(x); \alpha, \delta, N) = \lim_{\beta\to\infty} R_n(\lambda(x); \alpha, \beta, -N-1, \alpha+\delta+N+1)$$

$$= \lim_{\beta\to\infty} \left\{ \frac{\Gamma(-N)}{\Gamma(x+\alpha+\delta+1)\Gamma(-x-\alpha-\delta-N-1)} \right.$$

$$\left. \times \int_0^1 t^{x+\alpha+\delta}(1-t)^{-x-\alpha-\delta-N-2}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}-n, n+\alpha+\beta+1, -x \\ \alpha+1, \alpha+\beta+\delta+N+2\end{matrix}; t\right) dt \right\}$$

$$= \frac{\Gamma(-N)}{\Gamma(x+\alpha+\delta+1)\Gamma(-x-\alpha-\delta-N-1)}$$

$$\times \int_0^1 t^{x+\alpha+\delta}(1-t)^{-x-\alpha-\delta-N-2} \lim_{\beta\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k\ (n+\alpha+\beta+1)_k\,(-x)_k}{(\alpha+1)_k(\ \alpha+\beta+\delta+N+2)_k\ k!}\right\} dt$$

$$= \frac{\Gamma(-N)}{\Gamma(x+\alpha+\delta+1)\Gamma(-x-\alpha-\delta-N-1)}$$

$$\times \int_0^1 t^{x+\alpha+\delta}(1-t)^{-x-\alpha-\delta-N-2} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k\ (-x)_k}{(\alpha+1)_k k!}\, dt$$

$$= \frac{\Gamma(-N)}{\Gamma(x+\alpha+\delta+1)\Gamma(-x-\alpha-\delta-N-1)}$$

$$\times \int_0^1 t^{x+\alpha+\delta}(1-t)^{-x-\alpha-\delta-N-2} F\left(\begin{matrix}-n\ ,-x\\ \alpha+1\ ,\end{matrix};t\right) dt$$

şeklinde dual Hahn polinomları için bir integral gösterim elde edilir.

6.6. Racah Polinomları için Bilineer ve Bilateral Doğurucu Fonksiyonlar

Bu bölümde Racah Polinomları için bilineer ve bilateral doğurucu fonksiyonlar veren bir teorem elde edilecek ve bu teoreme örnekler verilecektir. Burada elde edilen teoremde Eş. 6.2 kullanılmış olup Eş. 6.3, Eş. 6.4 ve Eş. 6.5 bağıntıları kullanılarak da benzer teoremler elde edilebilir.

6.6.1. Teorem

μ - yüncü basamaktan s kompleks değişkenli ($s \in \mathbb{N}$) sıfıra denk olmayan $\Omega_\mu(\xi_1, \dots, \xi_s)$ fonksiyonu,

$$\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1, \dots, \xi_s; \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\ \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \dots, \xi_s)\tau^k$$

$(a_k \neq 0\ , \psi \in \mathbb{C}\ )$

ve $n, p \in \mathbb{N}$ için

$$\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(\lambda(x); \alpha, \beta, \gamma, \delta;\ \xi_1, \dots, \xi_s;\ \zeta)$$

$$= \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k \frac{(\beta+\delta+1)_{n-pk}(\gamma+1)_{n-pk}}{(\beta+1)_{n-pk}(n-pk)!} R_{n-pk}(\lambda(x); \alpha, \beta, \gamma, \delta)\ \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \dots, \xi_s)\zeta^k \qquad (6.9)$$

olsun. Buna göre,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\mu,\psi}\left(\lambda(x); \alpha, \beta, \gamma, \delta; \xi_1, \dots, \xi_s; \frac{\eta}{t^p}\right) t^n$$

$$= F\left(\begin{matrix}-x, -x+\alpha-\gamma-\delta \\ \alpha+1\end{matrix}; t\right) F\left(\begin{matrix}x+\beta+\delta+1, x+\gamma+1 \\ \beta+1\end{matrix}; t\right) \Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1, \dots, \xi_s; \eta) \qquad (6.10)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 6.10 un sol tarafını A ile gösterelim. $\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}\left(\lambda(x); \alpha, \beta, \gamma, \delta;\ \xi_1, \dots, \xi_s; \frac{\eta}{t^p}\right)$ polinomunun değeri, Eş. 6.9 dan alınıp Eş. 6.10 da yerine yazılır ve Lemma 2.9 (i) uygulanıp Eş. 6.2 kullanılırsa,

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k \frac{(\beta+\delta+1)_{n-pk}(\gamma+1)_{n-pk}}{(\beta+1)_{n-pk}(n-pk)!} R_{n-pk}(\lambda(x); \alpha, \beta, \gamma, \delta)\ \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \dots, \xi_s) \frac{\eta^k}{t^{pk}}\ t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(\beta+\delta+1)_n(\gamma+1)_n}{(\beta+1)_n\, n!} R_n(\lambda(x); \alpha, \beta, \gamma, \delta) \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \dots, \xi_s)\eta^k\ t^n$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \dots, \xi_s)\eta^k \sum_{n=0}^{N} \frac{(\beta+\delta+1)_n(\gamma+1)_n}{(\beta+1)_n\, n!} R_n(\lambda(x); \alpha, \beta, \gamma, \delta) t^n$$

$$= F\left(\begin{matrix}-x, -x+\alpha-\gamma-\delta \\ \alpha+1\end{matrix}; t\right) F\left(\begin{matrix}x+\beta+\delta+1, x+\gamma+1 \\ \beta+1\end{matrix}; t\right) \Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1, \dots, \xi_s; \eta)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 6.6.1 de $\Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1,\dots,\xi_s)\,(s\in\mathbb{N})$ çok değişkenli fonksiyonu, bir ya da çok değişkenli basit fonksiyonlar tarafından ifade edilerek, elde edilen sonuçların farklı uygulamaları verilebilir.

Örnek

Teorem 6.6.1 de $s=1\,,\xi_1=y$ ve $\Omega_{\mu+\psi k}(y)$ yerine Racah polinomu alınır ve elde edilen sonuçta $a_k=\frac{(\beta+\delta+1)_k(\gamma+1)_k}{(\beta+1)_k\,k!}$, $\mu=0$ ve $\psi=1$ yazılarak Eş. 6.2 kullanılırsa, bu polinomlar için bilineer doğurucu fonksiyonların bir sınıfı aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]}\frac{(\beta+\delta+1)_{n-pk}(\gamma+1)_{n-pk}}{(\beta+1)_{n-pk}(n-pk)!}R_{n-pk}(\lambda(x);\alpha,\beta,\gamma,\delta)$$

$$\times\frac{(\beta+\delta+1)_k(\gamma+1)_k}{(\beta+1)_k\,k!}R_k(\lambda(y);\alpha,\beta,\gamma,\delta)\eta^k t^{n-pk}$$

$$=F\left(\begin{matrix}-x,-x+\alpha-\gamma-\delta\\ \alpha+1\end{matrix};t\right)F\left(\begin{matrix}x+\beta+\delta+1,x+\gamma+1\\ \beta+1\end{matrix};t\right)$$

$$\times F\left(\begin{matrix}-y,-y+\alpha-\gamma-\delta\\ \alpha+1\end{matrix};\eta\right)F\left(\begin{matrix}y+\beta+\delta+1,y+\gamma+1\\ \beta+1\end{matrix};\eta\right).$$

Örnek

Teorem 6.6.1 de $s=1\,,\xi_1=y$ ve $\Omega_{\mu+\psi k}(y)$ yerine $K_{\mu+\psi k}(y;\rho,N)$ alalım. Burada $K_n\,(y;\rho,N)$ Krawtchouk polinomları olup $x=0,1,2,\dots,N$ olmak üzere,

$$\left[e^t\;{}_1F_1\left(\begin{matrix}-x\\ -N\end{matrix};\frac{-t}{\rho}\right)\right]_N=\sum_{n=0}^{N}\frac{K_n\,(x;\rho,N)}{n!}t^n \qquad (6.11)$$

doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir [6]. Böylece elde edilen sonuçta $a_k=1\,,\ \mu=0\,,$ $\psi=1$ alınıp Eş. 6.11 kullanılırsa, Racah polinomları ile Krawtchouk polinomları için bilateral doğurucu fonksiyonların bir sınıfı aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]}\frac{(\beta+\delta+1)_{n-pk}(\gamma+1)_{n-pk}}{(\beta+1)_{n-pk}(n-pk)!\,k!}R_{n-pk}(\lambda(x);\alpha,\beta,\gamma,\delta)K_k\;(y;\rho,N)\eta^k\,t^{n-pk}$$

$$= F\left(\begin{matrix}-x, -x+\alpha-\gamma-\delta \\ \alpha+1\end{matrix}; t\right) F\left(\begin{matrix}x+\beta+\delta+1, x+\gamma+1 \\ \beta+1\end{matrix}; t\right)\left[e^{\eta}\ {}_1F_1\left(\begin{matrix}-y \\ -N\end{matrix}; \frac{-\eta}{\rho}\right)\right]_N.$$

a_k $(k \in \mathbb{N}_0)$ katsayılarının uygun her bir seçimi için, eğer $\Omega_\mu(\xi_1, \ldots, \xi_s)$ çok değişkenli fonksiyonu, daha basit bazı fonksiyonların uygun bir çarpımı olarak ifade edilebilirse, bu durumda Teorem 6.6.1 Racah polinomları için multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyonların çeşitli ailelerini elde etmek için kullanılabilir.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, Ek-1 de verilen Askey şemasında yer alan sürekli ve ayrık değişkenli ortogonal polinomlar incelenmiştir. İlk olarak Meixner – Pollaczek polinomları daha sonra bu polinomların daha geneli olan Sürekli Dual Hahn ve Wilson polinomları ile ayrık değişkenli polinomların bir sınıfından olan Racah polinomları ele alınmıştır. Bu polinomların ortogonallik özellikleri, doğurucu fonksiyonları, rekürans bağıntıları, diğer bazı polinomlarla limit ilişkileri, integral gösterimleri ve bazıları için toplam formülleri çalışılmıştır. Askey şemasındaki bu polinomların birbiri arasındaki geçişleri limit yardımıyla sağlanmıştır. Literatürde yer alan özellikleri dışında yeni rekürans bağıntıları, integral gösterimleri ve yeni limit bağıntıları elde edilmiştir. Son olarak bu polinomlar için bilineer, bilateral doğurucu fonksiyonlar veren yeni teoremler elde edilmiş ve bunlara örnekler verilmiştir.

Bu tezden elde edilen sonuçlar, hipergeometrik ortogonal polinomların incelenmesi üzerine yapılabilecek çalışmalar için kaynak oluşturmaktadır. Tezin içeriğinde oluşturulan ortogonal polinomlar arasındaki bağıntılar yardımıyla başka polinomlar arasındaki geçişler düşünülebilir. Kombinatorik nesnelerin dizilerini ve yapılarını temsil etmek, istatiksel dağılımların özelliklerini ve olasılık kütle fonksiyonlarını temsil etmek, sayılar teorisi alanında aritmetik fonksiyonların özelliklerini incelemek, mühendislikte sinyallerin Z-dönüşümü ve Laplace dönüşümünü hesaplamak gibi farklı alanlarda kullanılan doğurucu fonksiyonlar, tezde çalışılan polinomlar dışında başka polinomlar için de elde edilebilir. Komşu fonksiyon bağıntıları kullanılarak yeni rekürans bağıntıları elde edilebilir. Bu bağıntılar ile polinomlar arasındaki limit ilişkilerinden faydalanılarak diğer polinomlar için de yeni sonuçlara ulaşılablilir.

KAYNAKLAR

1. Szegö, G. (1975). *Orthogonal Polynomials* (Fourth edition). Rhode Island: American Mathematical Society Colloqulum Publications, 23-312.

2. Erkuş, E. and Srivastava, H.M. (2006). A unified presentation of some families of multivariable polynomials. *Integral Transforms and Special Functions*, 17, 267-273.

3. Chan, W.-Ch.C., Chyan, Ch.-J. and Srivastava, H.M. (2001). The Lagrange polynomials in several variables. *Integral Transform Special Functions*, 12, 139-148.

4. Ozmen, N. and Erkus-Duman, E. (2018). Some families of generating functions for the generalized Cesaro polynomials. *Journal of Computational Analysis and Applications*, 25, 1124-1127.

5. Erkus-Duman, E., Altın A. and Aktas, R. (2011). Miscellaneous properties of some multivariable polynomials. *Mathematical and Computer Modelling*, 54, 1875-1885.

6. Koekoek, R., Lesky, P.A. and Swarttouw, R.F. (2010). *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q −Analogues*. New York: Springer, 183-253.

7. Meixner, J. (1934). Orthogonale polynomsysteme mit einer besonderen gestalt der erzeugenden funktion. *Journal of the London Mathematical Society*, 9, 6-13.

8. Pollaczek, F. (1950). Sur une famille de polynomes orthogonaux qui contient les polynomes d'Hermite et de Laguerre comme cas limites. *Ibid*., 230, 1563-1565.

9. Özmen, N. and Göksu, H. (2017). Some properties of hypergeometric Meixner-Pollaczek polynomials. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 7(2), 21-31.

10. Kanas, S. and Tatarczak, A. (2013). Generalized Meixner-Pollaczek Polynomials. *Advances in Difference Equations*, 2013(1).

11. Luo, M., Raina, R. K., & Zhao, S. (2021). Certain results on generating functions related to the associated Meixner-Pollaczek polynomials. *Integral Transforms and Special Functions*, *33*(6), 496–512.

12. Wilson, J.A. (1977). *Three-term contiguous relations and some new orthogonal polynomials.* New York: Academic Press, 227-232.

13. Wilson, J. A. (1980). Some hypergeometric orthogonal polynomials. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 11, 690-701.

14. Wlodek, B. (2022). On the continuous dual Hahn process. *Stochastic Processes and their Applications*, 143(C), 185-206.

15. Masson, D.R. (1991). Associated Wilson polynomials. *Constructive Approximation*,7, 521-534.

16. Li, Y., Wang, X. and Wong, R.S. (2020). Asymptotics of the Wilson polynomials. *Analysis and Applications*, 18(2), 237-270.

17. Rainville, E.D. (1960). *Special Functions*. New York: The Macmillan Company, 8-301.

18. Altın, A. (2011). *Uygulamalı Matematik*. Ankara: Gazi Kitabevi, 12-49.

19. Erkus-Duman, E. and Choi, J. (2021). Gottlieb polynomials and their q −extensions. *Mathematics*, 9(13), 1499.

20. Askey, R., Andrews, G.E. and Roy, R. (1999). *Special Functions* (17th Press). Cambridge: Cambridge University, 2-391.

21. Srivastava, H.M. and Manocha, H.L. (1984). *A treatise on generating function.* New York, Chichester, Brisbane and Toronto: Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester). John Wilcy and Sons, 19-489.

22. Olver, F.W.J., Lozier, D.W., Boisvert, R.F. and Clark, C.W. (2010). *NIST Handbook of Mathematical Functions*. New York: Cambridge University Press, 436-478.

23. Rakha, M.A., Rathie, A.K. and Chopra, P. (2011). On some new contiguous relations for the Gauss hypergeometric function with applications. *Computers and Mathematic Applications*, 61, 620-629.

24. Korkmaz-Duzgun, D. and Erkus-Duman, E. (2018). The Laguerre type d −orthogonal polynomials. *Journal of Science and Arts*, 42, 95-106.

25. Chu, W. and Wang, X. (2007). Abel's method on summation by parts and hypergeometric contiguous relations. *Integral Transforms and Special Functions*, 18(11), 771-807.

26. Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger F. and Tricomi, F.G. (1955). *Higher Transcendental Functions*. Vol III. New York, Toronto and London: McGraw-Hill Book Company, 59-116.

27. Gottlieb, M.J. (1938). Concerning some polynomials orthogonal on a finite or enumerable set of points. *American Journal of Mathematics*, 60(2), 453-458.

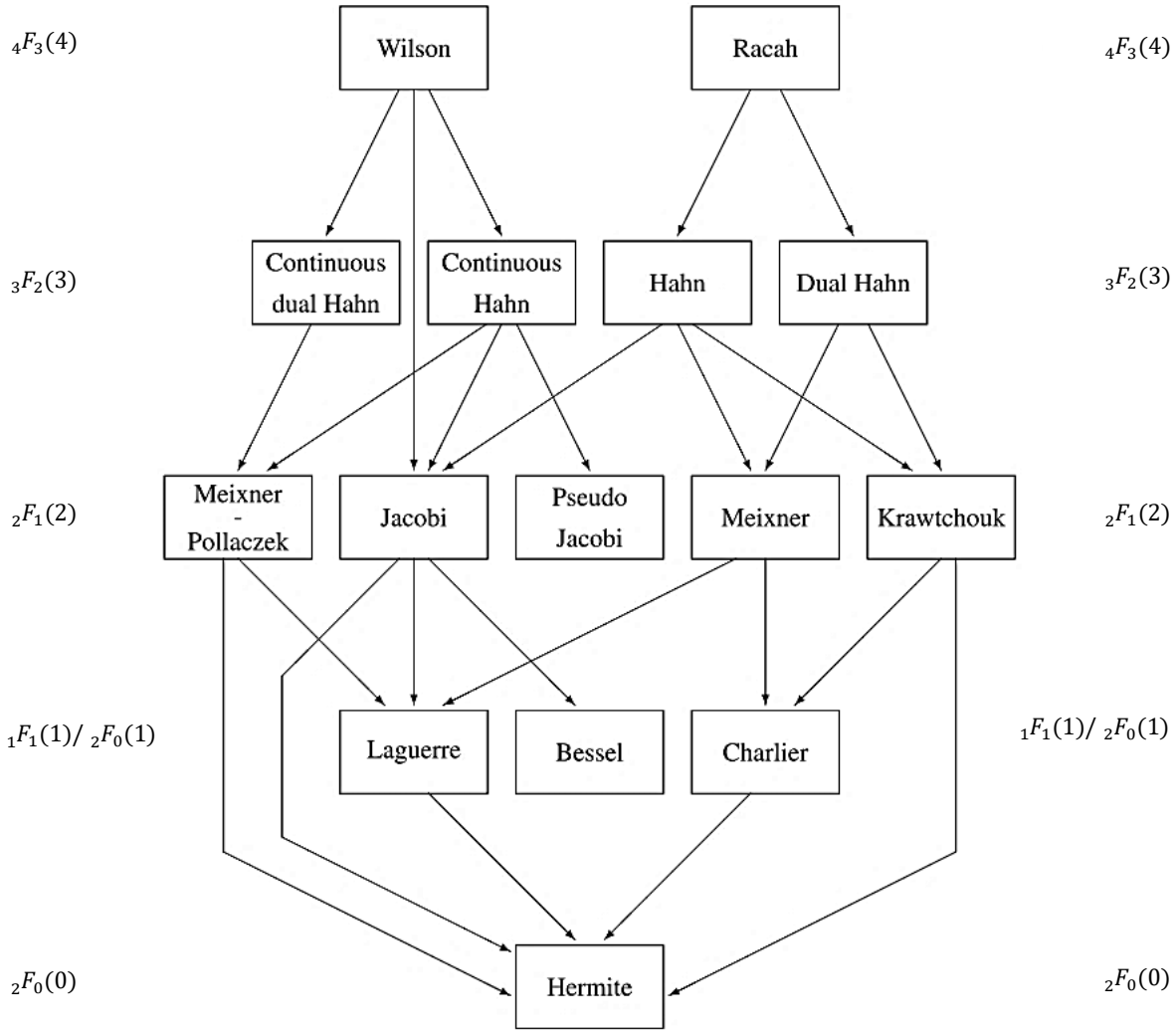
28. Agarwal, A.K. and Manocha, H.L. (1980). On some new generating functions. *Matematicki Vesnik*, 4(17)(32), 395-402.

29. Diejen, J.F.V. (1995). Multivariable continuous Hahn and Wilson polynomials related to integrable difference systems. *Journal of Physics A: General Physics*, 28, 1-5.

30. Hahn, W. (1949). Über Orthogonal polynome, die q −Differenzengleichungen genügen. *Mathematische Nachrichten,* 2, 4-34

EKLER

EK-1. Hipergeometrik Ortoganal Polinomlar için Askey Şeması





Gazili olmak ayrıcalıktır