
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

KUADRA MERSENNE-JACOBSTHAL VE KUADRA MERSENNE-PELL DİZİLERİ ÜZERİNE BAZI CEBİRSEL ÖZDEŞLİKLER

SENANUR ÇAKACI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARALIK 2022

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Senanur ÇAKACI

01/12/2022

KUADRA MERSENNE-JACOBSTHAL DİZİSİ ÜZERİNE BAZI CEBİRSEL ÖZDEŞLİKLER

(Yüksek Lisans Tezi).

Senanur ÇAKACI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Aralık 2022

ÖZET

Kuadra Mersenne-Jacobsthal, kuadra Mersenne-Pell dizileri ve bu dizilerin kuarterniyonlarının incelendiği bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, teze giriş verilmiştir ve literatür özetlenmiştir. İkinci bölümde, tez için kullanılacak olan Pell, Jocabtshal, Fibonacci, Mersenne ve Lucas sayı dizileri tanımlanarak tezin ilerleyen bölümlerinin daha iyi kavranması açısından bu sayı dizilerinin Binet formülleri ve üreteç fonksiyonları verilmiştir. Üçüncü bölümde, bu tez ile birlikte literatüre kazandırılacak olan kuadra Mersenne-Jacobsthal ve kuadra Mersenne-Pell sayı dizilerini tanımlanmıştır. Bu sayı dizilerinin Binet formülleri ve üreteç fonksiyonları oluşturulmuştur. Dördüncü bölümde, ilk olarak kuaterniyon kavramı tanımlanmış ve bazı özellikleri verilmiştir. Daha sonra Pell, Jocabtshal, Fibonacci, Mersenne ve Lucas kuaterniyonlarının bazı özellikleri verilmiştir. Beşinci bölümde kuadra Mersenne-Jacobsthal ve kuadra Mersenne-Pell kuaterniyonları tanımlanmış ve bu kuaterniyonlar için Binet formülleri, üreteç fonksiyonları ile bazı bağıntılar verilmiştir. Altıncı bölümde yani son bölümde de genel bir değerlendirme yapılmıştır.

Bilim Kodu	:	20401
Anahtar Kelimeler	:	Kuadra Mersenne-Jacobthsal dizisi, kuadra Mersenne-Pell dizisi, kuadra Mersenne-Jacobthsal kuaterniyonu, kuadra Mersenne-Pell kuaterniyonu
Sayfa Adedi	:	39
Danışman	:	Dr. Öğr. Üyesi GÜL ÖZKAN KIZILIRMAK

SOME ALGEBRAIC IDENTITIES ON QUADRA MERSENNE-JACOBSTHAL SEQUENCE

(M. Sc. Thesis).

Senanur ÇAKACI

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

December 2022

ABSTRACT

This thesis, in which quadra Mersenne-Jacobsthal, quadra Mersenne-Pell sequences and their quaternions are examined, consists of six chapters.In the first chapter, an introduction to the thesis is given and the literature is summarized. In the second part, Pell, Jocabtshal, Fibonacci, Mersenne and Lucas number sequences to be used for the thesis are defined and Binet formulas and generating functions of these number sequences are given in order to better understand the later parts of the thesis. In the third chapter, quadra Mersenne-Jacobsthal and quadra Mersenne-Pell number sequences, which will be brought to the literature with this thesis, are defined. Binet formulas and generating functions of these number sequences were created. In the fourth chapter, firstly the concept of quaternion is defined and some of its properties are given. Then, some properties of Pell, Jocabsthal, Fibonacci, Mersenne and Lucas quaternions are given. In the fifth chapter, quadra Mersenne-Jacobsthal and quadra Mersenne-Pell quaternions are defined and Binet formulas for these quaternions and some relations with generating functions are given. In the sixth chapter, that is, in the last chapter, a general evaluation has been made.

Science Code : 20401
Key Words : Quadra Mersenne-Jacobsthal numbers, quadra Mersenne-Pell numbers, Quadra Mersenne-Jacobsthal quaternion, Quadra Mersenne-Pell quaternion
Page Number : 39
Supervisor : Assist. Prof. Dr. Gül ÖZKAN KIZILIRMAK

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim ve bu tez dönemi boyunca tüm destekleri için değerli hocam Dr.Öğr.Üyesi GÜL ÖZKAN KIZILIRMAK'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, hayatımın her aşamasında bana maddi ve manevi destek olan hayat boyu her sıkıntımda yanımda olan aileme teşekkür etmeyi borç bilirim. Son olarak ilkokuldan beri eksikliklerini hissettirmeyen sevgili arkadaşlarım Kübra YAMAN KÖKBIYIK ve Cansu Nur ALGAN'a, lisede servis köşelerinde başlayıp her zor durumumda hala yanımda olan Zeynep CENK ve Damla Nur OĞUZ'a sonsuz teşekkürlerimle…

Senanur ÇAKACI

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

SİMGELER VE KISALTMALAR ix

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL KAVRAMLAR 3

2.1. Fibonacci Dizisi 3

2.2. Lucas Dizisi 4

2.3. Pell Dizisi 5

2.4. Jacobsthal Dizisi 6

2.5. Mersenne Dizisi 7

3. KUADRA MERSENNE-JACOBTSHAL VE KUADRA MERSENNE-PELL SAYI DİZİLERİ 9

3.1. Kuadra Mersenne-Jacobsthal Dizisi ve Bazı Özellikleri 9

3.2. Kuadra Mersenne-Pell Dizisi ve Bazı Özellikleri 12

4. KUATERNİYONLAR 17

4.1. Kuaterniyon Tanımı ve Özellikleri 17

4.2. Fibonacci Kuaterniyonu ve Bazı Özellikleri 19

4.3. Lucas Kuaterniyonu ve Bazı Özellikleri 20

4.4. Jacobtshal Kuaterniyonu ve Bazı Özellikleri 20

4.5. Pell Kuaterniyonu ve Bazı Özellikleri 21

4.6. Mersenne Kuaterniyonu ve Bazı Özellikleri 21

5. KUADRA MERSENNE- JACOBSTHAL VE KUADRA MERSENNE- PELL KUATERNİYONLARI 23

Sayfa

5.1. Kuadra Mersenne-Jacobthsal Kuaterniyonu ve Bazı Bağıntıları 23

5.2. Kuadra Mersenne-Pell Kuaterniyonu ve Bazı Özellikleri 29

6. TARTIŞMA VE SONUÇ..... 35

KAYNAKLAR 37

ÖZGEÇMİŞ 39

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\boldsymbol{F_n}$	n.Fibonacci sayısı
$\boldsymbol{L_n}$	n.Lucas sayısı
$\boldsymbol{P_n}$	n.Pell sayısı
$\boldsymbol{M_n}$	n.Mersenne sayısı
$\boldsymbol{ML_n}$	n.Kuadra Mersenne-Lucas sayısı
$\boldsymbol{MP_n}$	n. Kuadra Mersenne-Pell sayısı
$\boldsymbol{\mathcal{MJ}(x)}$	Mersenne-Jacobsthal üreteç fonksiyonu
$\boldsymbol{\mathcal{MP}(x)}$	Mersenne-Pell üreteç fonksiyonu
$\boldsymbol{G_{Q\mathcal{MJ}}(t)}$.	Mersenne-Jacobsthal kuaterniyon üreteç fonksiyonu
$\boldsymbol{G_{Q\mathcal{MP}}(t)}$.	Mersenne-Pell kuaterniyon üreteç fonksiyonu
$\boldsymbol{Q\mathcal{MP}_k}$	Mersenne-Pell kuaterniyonu
$(\boldsymbol{Q\mathcal{MP}_k})^*$	Mersenne-Pell kuaterniyonu eşleniği
$(\boldsymbol{Q\mathcal{MJ}_k})^*$	Mersenne-Jacobsthal kuaterniyonu eşleniği
$\boldsymbol{Q\mathcal{MJ}_k}$	Mersenne-Jacobsthal kuaterniyonu
$\boldsymbol{i, j, k}$	Bilimsel imajiner elemanlar
$\boldsymbol{G_F(x)}$	Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu
$\boldsymbol{G_L(x)}$	Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu
$\boldsymbol{G_P(x)}$	Pell dizisinin üreteç fonksiyonu
$\boldsymbol{G_J(x)}$	Jacobtshal dizisinin üreteç fonksiyonu
$\boldsymbol{G_M(x)}$	Mersenne dizisinin üreteç fonksiyonu

1. GİRİŞ

Sayı dizileri, belirli bir kural doğrultusunda devam eden sayı gruplarına verilen isimdir. Sayı dizilerinde dizinin genel terimine göre sayılar aritmetik, geometrik vb. şekillerde artar veya azalır.

Tamsayı dizilerinin belki de en önemlisi Fibonacci dizisidir. Fibonacci dizisinde her bir sayı kendinden önceki iki sayı ile toplanmakta ve sayı dizisi bu şekilde devam etmektedir. Dizinin bu şekilde devam etmesi ile sayılar birbirine oranlandığında altın oran elde edilmektedir. Fibonacci sayıları ve bazı diğer tamsayı dizileri literatürde çalışma alanı olarak oldukça büyük bir yer edinmektedir (Hoggatt, 1967; Bicknell, 1975; Horadam, 1994).

Taşçı (2009) kuadra Pell sayılarını tanımlamış ve Binet formülünü, üreteç fonksiyonunu ve bazı cebirsel bağıntılarını elde etmiştir. Daha sonra Özkoç (2015) quadra Fibona-Pell sayılarını tanıtmış ve quadra Fibona-Pell dizilerinin bazı özelliklerini vermiştir. Kızılateş (2017) quadra Lucas-Jacobsthal sayılarını tanımlamış ve bu dizilerin bazı özelliklerini elde etmiştir.

Son yıllarda, tamsayı dizileri kullanılarak birçok kombinasyonlar elde edilmiş ve bu dizileri kullanılarak kuaterniyon sayı dizileri tanımlanmıştır. Son zamanlarda da bu alanda oldukça özgün çalışmalara rastlanmıştır. Gün geçtikçe de bu yönde çalışmalar artmaktadır (Halıcı, 2011; Horadam, 1963; Iakin, 1977).

Horadam (1963) kuaterniyon tanımını kullanarak Fibonacci kuaterniyon sayılarını tanımlamış ve bu sayıların bazı özelliklerini sunmuştur.

Halıcı (2011) Fibonacci ve Lucas dizilerinin, Çimen ve İpek (2015). Pell ve Pell-Lucas dizilerinin, Szynal-Liana ve Wloch (2015) Jacobsthal dizisinin kuaterniyonlara uygulanmasını ifade etmişler ve bu yeni kuaterniyon dizilerinin sayı dizileri ile arasındaki ilişkiyi detaylı bir şekilde incelemişlerdir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı tamsayı dizilerinin tanımları ve önemli özellikleri verilmiştir.

2.1. Fibonacci Dizisi

2.1.1.Tanım: Başlangıç koşulları $F_0 = 0, F_1 = 1$ ve

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \geq 0$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{F_n\}_{n\geq 0}$ dizisine Fibonacci dizisi denir.

Bu dizinin elemanlarına, Fibonacci sayıları denir (Koshy, 2001)..

Fibonacci dizisinin bazı terimleri $\{F_n\} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$ şeklindedir.

Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi,

$$x^2 - x - 1 = 0$$

olup bu denklemin kökleri,

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \ \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

dir.

Fibonacci dizisinin Binet formülü karakteristik denkleminin köklerine bağlı olarak

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

şeklinde elde edilmiştir (Koshy, 2001)..

2.1.2. Teorem: Fibonacci dizisi için üreteç fonksiyonu,

$$G_F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

biçimindedir (Hoggatt, 1967)..

2.2. Lucas Dizisi

2.2.1.Tanım: Başlangıç koşulları $L_0 = 2, L_1 = 1$ olan ve

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, n \geq 0$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{L_n\}_{n\geq 0}$ dizisine Lucas dizisi denir (Koshy, 2001).

Lucas dizisinin karakteristik denklemi,

$$x^2 - x - 1 = 0$$

olup bu denklemin kökleri,

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \ , \beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

dir.olmak üzere $n.$ Lucas sayısı,

$$L_n = \alpha^n - \beta^n$$

şeklinde bir formülle ifade edilmekte ve bu formüle Lucas dizisi için Binet formülü denilmektedir (Koshy, 2001).

2.2.2. Teorem: Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu,

$$L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = \frac{2-x}{1-x-x^2}$$

dir (Hoggatt, 1967).

2.3. Pell Dizisi

2.3.1.Tanım: Başlangıç koşulları $P_0 = 0, P_1 = 1$ ve

$$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n, n \geq 0$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{P_n\}_{n\geq 0}$ dizisine Pell dizisi denir (Koshy, 2001).

Pell dizisinin karakteristik denklemi,

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

ve bu denklemin kökleri;

$$\gamma = 1 + \sqrt{2}, \delta = 1 - \sqrt{2}$$

dir. Binet formülü de,

$$P_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}$$

şeklinde ifade edilmektedir (Koshy, 2001).

2.3.2. Teorem: Pell dizisi için üreteç fonksiyonu,

$$G_P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n = \frac{x}{1 - 2x - x^2}$$

biçimindedir (Mansour, 2004).

2.4. Jacobsthal Dizisi

2.4.1. Tanım: Başlangıç koşulları $J_0 = 0, J_1 = 1$ ve

$$J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n, n \geq 0$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{J_n\}_{n\geq 0}$ dizisine Jacobsthal dizisi denir.

Jacobtshal dizisinin karakteristik denklemi,

$$x^2 - x - 2 = 0$$

olup bu denklemin kökleri,

$$\lambda = 2, \mu = -1$$

olmak üzere Jacobsthal dizisinin Binet formülü,

$$J_n = \frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu}$$

şeklinde ifade edilmektedir (Horadam, 1994).

2.4.2. Teorem**:** J_n Jacobtshal dizisi için üreteç fonksiyonu,

$$G_J(x) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n\, x^n = \frac{x}{1 - x - 2x^2}$$

şeklindedir (Horadam, 1994).

2.5. Mersenne Dizisi

2.5.1. Tanım: Başlangıç koşulları $M_0 = 0, M_1 = 1$ ve

$$M_{n+2} = 3M_{n+1} - 2M_n, n \geq 0$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{M_n\}_{n\geq 0}$ dizisine Mersenne dizisi denir.

Mersenne dizisinin karakteristik denklemi,

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

ve bu denklemin kökleri,

$$\alpha = 2, \beta = 1$$

dir. Ayrıca Binet formülü,

$$M_n = \alpha^n - \beta^n$$

şeklindedir (Boussayoud, Chelgham, 2018).

2.5.2. Teorem: Mersenne dizisi için üreteç fonksiyonu,

$$G_M(x) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k \, x^k = \frac{x}{1 - 3x + 2x^2}$$

dir (Boussayoud, Chelgham, 2018).

3. KUADRA MERSENNE-JACOBTSHAL VE KUADRA MERSENNE-PELL SAYI DİZİLERİ

Üçüncü bölümde literatüre yeni kazandıracak olduğumuz kuadra Mersenne-Jacobsthal ve kuadra Mersenne-Pell dizileri tanımlanmış ve bu diziler için Binet formülü ve üreteç fonksiyonu elde edilmiştir. Ayrıca bu diziler daha sonraki bölümlerde tanımlanacak olan kuadra Mersenne-Jacobsthal ve kuadra Mersenne-Pell kuaterniyonları için zemin oluşturacaktır.

3.1. Kuadra Mersenne-Jacobsthal Dizisi ve Bazı Özellikleri

3.1.1.Tanım: Başlangıç koşulları $\mathcal{MJ}_0 = 0, \mathcal{MJ}_1 = 2, \mathcal{MJ}_2 = 4, \mathcal{MJ}_3 = 10, \mathcal{MJ}_4 = 20$ ve $n \geq 0$ olmak üzere

$$\mathcal{MJ}_{n+4} = 4\mathcal{MJ}_{n+3} - 3\mathcal{MJ}_{n+2} - 4\mathcal{MJ}_{n+1} + 4\mathcal{MJ}_n$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{\mathcal{MJ}_n\}_{n\geq 0}$ dizisine kuadra Mersenne-Jacobsthal dizisi denir. Bu dizinin elemanlarına kuadra Mersenne-Jacobsthal sayıları denir. Bazı kuadra Mersenne-Jacobthsal sayıları,

$$\begin{cases} n = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ \mathcal{MJ}_n = & 0 & 2 & 4 & 10 & 20 & 52 & 106 & \cdots \end{cases}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Kuadra Mersenne-Jacobsthal dizisinin karakteristik denklemi

$$x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = 0$$

ile ifade edilir.

Bu denklemin kökleri ise sırasıyla,

$\alpha = 2$, $\beta = 1, \lambda = 2$ ve $\mu = -1$ dir.

3.1.2. Teorem: Kuadra Mersenne-Jacobsthal dizisi için üreteç fonksiyonu

$$\mathcal{MJ}(x) = \frac{2x - 4x^2}{-4x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x + 1}$$

seklindedir.

İspat:

$$\mathcal{MJ}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{MJ}_n x^n = \mathcal{MJ}_0 + \mathcal{MJ}_1 x + \mathcal{MJ}_2 x^2 + \mathcal{MJ}_3 x^3 + \cdots + \mathcal{MJ}_n x^n + \cdots$$

şeklinde ifade edilir.

Burada,

$$\begin{aligned}
-4x^4\mathcal{MJ}(x) &= -4\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{MJ}_n x^{n+4} \\
&= 4\mathcal{MJ}_0 x^4 - 4\mathcal{MJ}_1 x^5 - 4\mathcal{MJ}_2 x^6 - 4\mathcal{MJ}_3 x^7 - \cdots - 4\mathcal{MJ}_n x^{n+4} - \cdots \\
4x^3\mathcal{MJ}(x) &= 4\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{MJ}_n x^{n+3} \\
&= 4\mathcal{MJ}_0 x^3 + 4\mathcal{MJ}_1 x^4 + 4\mathcal{MJ}_2 x^5 + 4\mathcal{MJ}_3 x^6 + \cdots + 4\mathcal{MJ}_n x^{n+3} + \cdots \\
3x^2\mathcal{MJ}(x) &= 3\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{MJ}_n x^{n+2} \\
&= 3\mathcal{MJ}_0 x^2 + 3\mathcal{MJ}_1 x^3 + 3\mathcal{MJ}_2 x^4 + 3\mathcal{MJ}_3 x^5 + \cdots + 3\mathcal{MJ}_n x^{n+2} + \cdots \\
-4x\mathcal{MJ}(x) &= -4\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{MJ}_n x^{n+1} \\
&= -4\mathcal{MJ}_0 x - 4\mathcal{MJ}_1 x^2 - 4\mathcal{MJ}_2 x^3 - 4\mathcal{MJ}_3 x^4 - \cdots - 4\mathcal{MJ}_n x^{n+1} + \cdots \\
\mathcal{MJ}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{MJ}_n x^n = \mathcal{MJ}_0 + \mathcal{MJ}_1 x + \mathcal{MJ}_2 x^2 + \mathcal{MJ}_3 x^3 + \cdots + \mathcal{MJ}_n x^n + \cdots
\end{aligned}$$

İfadeleri taraf tarafa toplanıp, başlangıç koşulları $\mathcal{MJ}_0 = 0, \mathcal{MJ}_1 = 2, \mathcal{MJ}_2 = 4, \mathcal{MJ}_3 = 10, \mathcal{MJ}_4 = 20$ yerine konulursa,

$$(-4x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x + 1)\mathcal{MJ}(x) = 2x - 4x^2$$

olur. Buradan da

$$\mathcal{MJ}(x) = \frac{2x - 4x^2}{-4x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x + 1}$$

dir.

3.1.3. Lemma: Kuadra Mersenne-Jacobsthal sayısı için,

$$\mathcal{MJ}_n = M_n + J_n$$
$$= (\alpha^n - \beta^n) + \frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu}$$

dir.

İspat: Tümevarımdan görülür.

3.1.4. Teorem: Kuadra Mersenne-Jacobsthal sayısnın Binet formülü,

$$\mathcal{MJ}_n = \frac{4}{3}\alpha^n - \beta^n - \frac{1}{3}\mu^n$$

dir.

İspat:

$\mathcal{MJ}_n = a_1\alpha^n + b_1\beta^n + c_1\lambda^n + d_1\mu^n$ ifadesini alalım.

Burada sırasıyla $n = 0, n = 1, n = 2, n = 3$ alınır.

$\mathcal{MJ}_0 = a_1\alpha^0 + b_1\beta^0 + c_1\lambda^0 + d_1\mu^0$
$\mathcal{MJ}_1 = a_1\alpha^1 + b_1\beta^1 + c_1\lambda^1 + d_1\mu^1$
$\mathcal{MJ}_2 = a_1\alpha^2 + b_1\beta^2 + c_1\lambda^2 + d_1\mu^2$
$\mathcal{MJ}_3 = a_1\alpha^3 + b_1\beta^3 + c_1\lambda^3 + d_1\mu^3$

Burada $\alpha = 2, \beta = 1,\ \lambda = 2, \mu = -1$ ve $\mathcal{MJ}_0 = 0, \mathcal{MJ}_1 = 2, \mathcal{MJ}_2 = 4, \mathcal{MJ}_3 = 10, \mathcal{MJ}_4 = 20$ değerleri yerine yazılırsa,

$0 = a_1 + b_1 + c_1 + d_1$
$2 = 2a_1 + b_1 + 2c_1 - d_1$
$4 = 4a_1 + b_1 + 4c_1 + d_1$
$10 = 8a_1 + b_1 + 8c_1 - d_1$

olur. Burada katsayılar matrisi oluşturulup a_1, b_1, c_1, d_1 değerleri bulunup ifade de yerlerine yazılırsa Binet formülü,

$$\mathcal{MJ}_n = \frac{4}{3}\alpha^n - \beta^n - \frac{1}{3}\mu^n$$

elde edilir.

3.2. Kuadra Mersenne-Pell Dizisi ve Bazı Özellikleri

3.2.1. Tanım: Başlangıç koşulları $\mathcal{MP}_0 = 0, \mathcal{MP}_1 = 0, \mathcal{MP}_2 = 1, \mathcal{MP}_3 = 4, \mathcal{MP}_4 = 12$ ve $n \geq 0$ olmak üzere;

$$\mathcal{MP}_{n+4} = 5\mathcal{MP}_{n+3} - 7\mathcal{MP}_{n+2} + \mathcal{MP}_{n+1} + 2\mathcal{MP}_n$$

rekürans bağıntısıyla ile tanımlanan $\{\mathcal{MP}_n\}_{n\geq 0}$ dizisine kuadra Mersenne-Pell dizisi denir. Bu dizinin elemanlarına kuadra Mersenne-Pell sayıları denir.

Bazı kuadra Mersenne-Pell sayıları,

$$\begin{cases} n = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ \mathcal{MP}_n = & 0 & 0 & 1 & 4 & 12 & 31 & 74 & \cdots \end{cases}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Kuadra Mersenne-Pell dizisinin karakteristik denklemi

$$x^4 - 5x^3 + 7x^2 - x - 2 = 0$$

olup bu denklemin kökleri

$\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 1 + \sqrt{2}$ ve $\delta = 1 - \sqrt{2}$

dir.

3.2.2. Teorem: Kuadra Mersenne-Pell dizisinin üreteç fonksiyonu

$$\mathcal{MP}(x) = \frac{x^2}{-2x^4 + x^3 + 4x^2 - 4x + 1}$$

şeklindedir.

İspat:

$$\mathcal{MP}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{MP}_n x^n = \mathcal{MP}_0 + \mathcal{MP}_1 x + \mathcal{MP}_2 x^2 + \mathcal{MP}_3 x^3 + \cdots + \mathcal{MP}_n x^n + \cdots$$

şeklinde ifade edilir.

Burada,

$$\begin{aligned} -2x^4\mathcal{MP}(x) &= -2\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{MP}_n x^{n+4} \\ &= -2\mathcal{MP}_0 x^4 - 2\mathcal{MP}_1 x^5 - 2\mathcal{MP}_2 x^6 - 2\mathcal{MP}_3 x^7 + \cdots - 2\mathcal{MP}_n x^{n+4} + \cdots \end{aligned}$$

$$x^3\mathcal{MP}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{MP}_n x^{n+3} = x^3 MP_0 + x^4 MP_1 + x^5 MP_2 + x^6 MP_3 + \cdots + MP_n x^{n+3} + \cdots$$

$$4x^2\mathcal{MP}(x) = 4\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{MP}_n x^{n+2}$$

$$= 4\mathcal{MP}_0 x^2 + 4\mathcal{MP}_1 x^3 + 4\mathcal{MP}_2 x^4 + 4\mathcal{MP}_3 x^5 + \cdots + 4\mathcal{MP}_n x^{n+2} + \cdots$$

$$-4x\mathcal{MP}(x) = -4\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{MP}_n x^{n+1}$$

$$= -4\mathcal{MP}_0 x - 4\mathcal{MP}_1 x^2 - 4\mathcal{MP}_2 x^3 - 4\mathcal{MP}_3 x^4 - \cdots - 4\mathcal{MP}_n x^{n+1} + \cdots$$

$$\mathcal{MP}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{MP}_n x^n = \mathcal{MP}_0 + \mathcal{MP}_1 x + \mathcal{MP}_2 x^2 + \mathcal{MP}_3 x^3 + \cdots + \mathcal{MP}_n x^n + \cdots$$

ifadeleri taraf tarafa toplanıp, başlangıç koşulları $\mathcal{MP}_0 = 0, \mathcal{MP}_1 = 0\,, \mathcal{MP}_2 = 1, \mathcal{MP}_3 = 4, \mathcal{MP}_4 = 12$ başlangıç koşulları yerine yazılırsa,

$$(-2x^4 + x^3 + 4x^2 - 4x + 1)\mathcal{MP}(x) = x^2$$

ve buradan

$$\mathcal{MP}(x) = \frac{x^2}{-2x^4 + x^3 + 4x^2 - 4x + 1}$$

elde edilir.

3.2.3. Lemma: Kuadra Mersenne-Pell sayıları,

$$\mathcal{MP}_n = M_n P_n$$

$$= (\alpha^n - \beta^n)\frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}$$

şeklindedir.

İspat: Tümevarımdan görülür.

3.2.4. Teorem: Kuadra Mersenne-Pell dizisinin Binet formülü,

$$\mathcal{MP}_n = -\alpha^n + \frac{2+\sqrt{2}}{4}\gamma^n + \frac{2-\sqrt{2}}{4}\delta^n$$

dir.

İspat: Burada,

$\mathcal{MP}_n = a_1\alpha^n + b_1\beta^n + c_1\gamma^n + d_1\delta^n$ ifadesini alalım.

Burada sırasıyla $n = 0, n = 1, n = 2, n = 3$ alınır.

$\mathcal{MP}_0 = a_1\alpha^0 + b_1\beta^0 + c_1\gamma^0 + d_1\delta^0$
$\mathcal{MP}_1 = a_1\alpha^1 + b_1\beta^1 + c_1\gamma^1 + d_1\delta^1$
$\mathcal{MP}_2 = a_1\alpha^2 + b_1\beta^2 + c_1\gamma^2 + d_1\delta^2$
$\mathcal{MP}_3 = a_1\alpha^3 + b_1\beta^3 + c_1\gamma^3 + d_1\delta^3$

Burada $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 1+\sqrt{2}$ ve $\delta = 1-\sqrt{2}$

ve $\mathcal{MP}_0 = 0, \mathcal{MP}_1 = 0, \mathcal{MP}_2 = 1, \mathcal{MP}_3 = 4, \mathcal{MP}_4 = 12$ değerleri yerine yazılırsa,

$0 = a_1 + b_1 + c_1 + d_1$
$0 = 2a_1 + b_1 + \left(1+\sqrt{2}\right)c_1 + (1-\sqrt{2}).\, d_1$
$1 = 4a_1 + b_1 + \left(3+2\sqrt{2}\right)c_1 + \left(3-2\sqrt{2}\right)d_1$
$4 = 8a_1 + b_1 + \left(7+5\sqrt{2}\right)c_1 + \left(7-5\sqrt{2}\right)d_1$

olur. Burada katsayılar matrisi oluşturulup a_1, b_1, c_1, d_1 değerleri bulunup ifade de yerlerine yazılırsa Binet formülü,

$$\mathcal{MP}_n = -\alpha^n + \frac{2+\sqrt{2}}{4}\gamma^n + \frac{2-\sqrt{2}}{4}\delta^n$$

elde edilir.

4. KUATERNİYONLAR

Bu bölümde kuaterniyon kavramı, kuaterniyonlar ile ilgili bazı özellikler ile Fibonacci, Lucas, Jacobtshal, Pell ve Mersenne kuaterniyonlarının özellikleri verilecektir.

4.1. Kuaterniyon Tanımı ve Özellikleri

4.1.1.Tanım:

$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
$ij = k = -ji, jk = i = -kj$ ve $ki = j = -ik$

şeklinde tanımlı i, j ve k birimsel imajiner elemanları için,

$\mathbb{H} = \{p = a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$

kümesine reel kuaterniyonlar kümesi denir. Her bir elemana reel kuaterniyon denir.

4.1.2. Tanım: p kuaterniyonu için,

$p = a + bi + cj + dk$ ve $p = a + ib + jc + kf$

biçiminde değiştirebilir. Burada,

$p_0 = a$ kısmına skaler kısım ve $p = bi + cj + dk$ kısmına da vektörel kısım denir.

4.1.3.Tanım: p ve q kuaterniyonları eşit ise,

$p = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ ve $q = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ kuaterniyonları için
$a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2$ ve $d_1 = d_2$ olur.

4.1.4. Tanım: p, q ve r kuaterniyon ve λ reel sayı olmak üzere,

i. Toplama işlemi,

$$p + q = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k,$$

ii. Çıkarma işlemi,

$$p - q = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i + (c_1 - c_2)j + (d_1 - d_2)k,$$

iii. Reel sayı ile çarpma,

$$\lambda p = (\lambda a_1) + (\lambda b_1)i + (\lambda c_1)j + (\lambda d_1)k,$$

iv. İki kuaterniyonun çarpımı,

$$\begin{aligned} pq &= (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k\,)(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k\,) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2)i \\ &\qquad + (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2)j + (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2)k \end{aligned}$$

dır.

Bu özelliklerin yanı sıra $p, q, r \in \mathbb{H}$ için kuaterniyonlarda toplama ve çarpma işlemiyle ilgili şu bilgiler verilebilir.

i. Toplama işlemi değişme özelliğine sahiptir:

$$p + q = q + p$$

ii. Toplama işlemi birleşme özelliğine sahiptir:

$$p + (q + r) = (p + q) + r$$

iii. Çarpma işlemi, toplama işlemi üzerine dağılma özelliğine sahiptir:

$p(q+r) = pq + pr$

iv. Çarpma işlemi birleşme özelliğine sahiptir:

$p(qr) = (pq)r$

v. Çarpma işlemi değişme özelliğine sahip değildir.

4.1.5. Tanım: $p = a + bi + cj + dk$ kuaterniyonu ele alınırsa bu kuaterniyonun eşleniği;

$\bar{p} = a - bi - cj - dk$

şeklindedir. p, q ve r kuaterniyon ve λ reel sayı olmak üzere aşağıdakiler eşitlikler doğrudur.

i. $\overline{p \mp q} = \bar{q} \mp \bar{p}$
ii. $\bar{\bar{p}} = p$
iii. $\overline{\lambda p} = \lambda\bar{p}$
iv. $\overline{pq} = \bar{p}\bar{q}$
v. $p \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{p} = p$

4.2. Fibonacci Kuaterniyonu ve Bazı Özellikleri

4.2.1. Tanım: $\{F_n\}_{n\geq 0}$, Fibonacci dizisi olmak üzere,

$QF_n = F_n + iF_{n+1} + jF_{n+2} + kF_{n+3}$

ifadesine n. Fibonacci kuaterniyonu denir (Halıcı, 2011).

4.2.2. Teorem: Fibonacci kuaterniyonunun Binet formülü $n \geq 0$ için

$$QF_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[\underline{\alpha}\alpha^n - \underline{\beta}\beta^n]$$

şeklinde verilir (Halıcı, 2011).

4.2.3. Teorem: QF_n Fibonacci kuaterniyonu için üreteç fonksiyonu,

$$QF_n(x) = \frac{t + i + j(t+1) + k(t+2).}{1 - t - t^2}$$

dir (Halıcı, 2011).

4.3. Lucas Kuaterniyonu ve Bazı Özellikleri

4.3.1.Tanım: $\{L_n\}_{n\geq 0}$, Lucas dizisi olmak üzere,

$$QL_n = L_n + iL_{n+1} + jL_{n+2} + kL_{n+3}$$

ifadesine n. Lucas kuaterniyonu denir (Halıcı, 2011).

4.3.2. Teorem: Lucas kuaterniyonunun Binet formülü $n \geq 0$ için

$$QL_n = [\underline{\alpha}\alpha^n - \underline{\beta}\beta^n]$$

şeklindedir (Halıcı, 2011).

4.4. Jacobtshal Kuaterniyonu ve Bazı Özellikleri

4.4.1.Tanım: J_n, Jacobtshal dizisi olmak üzere,

$$QJ_n = J_n + iJ_{n+1} + jJ_{n+2} + kJ_{n+3}$$

ifadesine n. Jacobtshal kuaterniyonu denir (Szynal-Liana ve Wloch, 2015).

4.4.2. Teorem: Jacobtshal kuaterniyonunun Binet formülü $n \geq 0$ için

$$QJ_n = \frac{1}{3}[\underline{\lambda}\lambda^n - \underline{\varphi}\varphi^n]$$

şeklindedir.

4.4.3. Teorem: QJ_n Jacobtshal kuaterniyonu için üreteç fonksiyonu,

$$QJ_n(x) = \frac{t + i + j(2t+1) + k(2t+3).}{1 - t - 2t^2}$$

biçimindedir.

4.5. Pell Kuaterniyonu ve Bazı Özellikleri

4.5.1. Tanım: $\{P_n\}_{n\geq 0}$, Pell dizisi olmak üzere,

$$QP_n = P_n + iP_{n+1} + jP_{n+2} + kP_{n+3}$$

ifadesine Pell kuaterniyonu denir (Çimen ve İpek, 2015).

4.5.2. Teorem: Pell kuaterniyonunun Binet formülü $n \geq 0$ için

$$QP_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}[\underline{\gamma}\gamma^n - \underline{\delta}\delta^n]$$

şeklinde verilir.

4.5.3. Teorem: QP_n Pell kuaterniyonu için üreteç fonksiyonu,

$$QP_n(x) = \frac{t + i + j(t+2) + k(2t+5).}{1 - 2t - t^2}$$

biçimindedir.

4.6. Mersenne Kuaterniyonu ve Bazı Özellikleri

4.6.1.Tanım: $\{M_n\}_{n\geq 0}$ Mersenne dizisi olmak üzere Mersenne kuaterniyonu,

$$QM_n = M_n + iM_{n+1} + jM_{n+2} + kM_{n+3}$$

şeklinde tanımlanır.

İfadeyi genelleştirmemiz gerekir ise n, p, r ve s bir tam sayı olmak üzere,

$$QM_n{}^{(p,r,s).} = M_n + iM_{n+p} + jM_{n+r} + kM_{n+s}$$

şeklindedir (Dasdemir ve Bilgici, 2019).

4.6.2. Teorem: Her pozitif n tam sayı ve $\underline{A} = 1 + i + j + k$ olmak üzere,

$$QM_{n+1}{}^{(p,r,s).} = 3M_n{}^{(p,r,s).} - 2M_{n-1}{}^{(p,r,s).}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da

$$QM_{n+1}{}^{(p,r,s).} = 2M_n{}^{(p,r,s).} + \underline{A}$$ olur.

4.6.3. Teorem: Mersenne kuaterniyonunun Binet formülü $n \geq 0$, $\underline{A} = 1 + i + j + k$ ve $\underline{M}^{(p,r,s).} = 1 + i2^p + j2^r + k2^s$ olmak üzere,

$$QM_n{}^{(p,r,s).} = 2^n \underline{M}^{(p,r,s).} - \underline{A}$$

şeklindedir.

4.6.4. Teorem: Mersenne kuaterniyonunun üreteç fonksiyonu,

$$QM_n{}^{(p,r,s)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n{}^{(p,r,s).}\, t^n = \frac{M_0{}^{(p,r,s).} - (M_1{}^{(p,r,s)} - \underline{A}).\, t}{1 - 3t + 2t^2}$$

şeklindedir.

5. KUADRA MERSENNE- JACOBSTHAL VE KUADRA MERSENNE-PELL KUATERNİYONLARI

Bu bölümde kuadra Mersenne-Jacobsthal ve kuadra Mersenne-Pell dizilerinin kuaterniyonları sunulacaktır. Kuadra Mersenne-Jacobsthal ve kuadra Mersenne-Pell dizilerinin kuaterniyonlarının tanımları ile Binet formülleri, üreteç fonksiyonları ve bazı bağıntıları verilecektir.

Bu bölümde tanımlanan kuadra Mersenne-Jacobsthal ve kuadra Mersenne-Pell dizilerinin kuaterniyonları ilk defa bu tez ile literatüre girecektir.

5.1. Kuadra Mersenne-Jacobthsal Kuaterniyonu ve Bazı Bağıntıları

5.1.1.Tanım: $\{\mathcal{MJ}_n\}_{n\geq 0}$ kuadra Mersenne-Jacobsthal dizisi olmak üzere $Q\mathcal{MJ}_n$ kuadra Mersenne-Jacobsthal kuaterniyonu,

$$Q\mathcal{MJ}_n = \mathcal{MJ}_n + i\mathcal{MJ}_{n+1} + j\mathcal{MJ}_{n+2} + k\mathcal{MJ}_{n+3}$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca kuadra Mersenne-Jacobthsal kuaterniyonunun eşleniği

$$(Q\mathcal{MJ}_n)^* = (\mathcal{MJ}_n - i\mathcal{MJ}_{n+1} - j\mathcal{MJ}_{n+2} - k\mathcal{MJ}_{n+3}).$$

dir.

5.1.2. Teorem: $Q\mathcal{MJ}_n$ kuadra Mersenne-Jacobthsal kuaterniyonu olmak üzere Binet formülü $n \geq 0$ için,

$$\underline{\alpha} = (1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3)$$
$$\underline{\beta} = (1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3)$$
$$\underline{\lambda} = (1 + i\lambda + j\lambda^2 + k\lambda^3)$$
$$\underline{\mu} = (1 + i\mu + j\lambda\mu^2 + k\mu^3)$$

olmak üzere,

$$Q\mathcal{MJ}_n = \alpha^n \underline{\alpha} - \beta^n \beta + \left(\frac{\lambda^n \underline{\lambda} - \mu^n \underline{\mu}}{3}\right)$$

dir.

İspat:

Kuadra Mersenne-Jacobsthal dizisi için,

$$\mathcal{MJ}_n = (\alpha^n - \beta^n) + \frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu}$$

olduğundan, $\lambda = 2, \mu = -1$ değerleri yerlerine yazılırsa,

$$\mathcal{MJ}_n = (\alpha^n - \beta^n) + \frac{\lambda^n - \mu^n}{2 - (-1).} = (\alpha^n - \beta^n) + \frac{(\lambda^n - \mu^n).}{3}$$

ifadesi elde edilir.

Bu ifade kuadra Mersenne-Jacobthsal kuaterniyonunda yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} Q\mathcal{MJ}_n &= \left[(\alpha^n - \beta^n) + \frac{(\lambda^n - \mu^n).}{3}\right] + i\left[(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) + \frac{(\lambda^{n+1} - \mu^{n+1}).}{3}\right] \\ &\quad + j\left[(\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}) + \frac{(\lambda^{n+2} - \mu^{n+2}).}{3}\right] + k\left[(\alpha^{n+3} - \beta^{n+3}) + \frac{(\lambda^{n+3} - \mu^{n+3}).}{3}\right] \\ &= \alpha^n(1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3) - \beta^n(1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3) + \frac{\lambda^n}{3}(1 + i\lambda + j\lambda^2 + k\lambda^3) \\ &\quad - \frac{\mu^n}{3}(1 + i\mu + j\lambda\mu^2 + k\mu^3) \end{aligned}$$

elde edilir.

İfadede gerekli düzenlemeler yapılır ve

$\underline{\alpha} = (1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3)$

$\underline{\beta} = (1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3)$

$\underline{\lambda} = (1 + i\lambda + j\lambda^2 + k\lambda^3)$

$\underline{\mu} = (1 + i\mu + j\lambda\mu^2 + k\mu^3)$

eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$QM\mathcal{J}_n = \alpha^n\underline{\alpha} - \beta^n\beta + \left(\frac{\lambda^n\underline{\lambda} - \mu^n\underline{\mu}}{3}\right)$$

elde edilir.

5.1.3. Teorem: Kuadra Mersenne-Jacobthsal kuaterniyonunun üreteç fonksiyonu,

$$QM\mathcal{J}_n(t). = \frac{\mathcal{A} + i\mathcal{B} + j\mathcal{C} + k\mathcal{D}}{(t^4 - 4t^3 + 3t^2 + 4t - 4)}$$

dir. Burada

$\mathcal{A} = (-8t - 8t^2 - 12t^3)$

$\mathcal{B} = (-8 - 8t - 18t^2 - 36t^3)$

$\mathcal{C} = (16 - 24t - 28t^2 - 114t^3)$

$\mathcal{D} = (-40 - 40t + 98t^2 - 196t^3)$

şeklindedir.

İspat: Kuadra Mersenne-Jacobthsal kuaterniyonunun üreteç fonksiyonu

$$QM\mathcal{J}_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} QM\mathcal{J}_n t^n = QM\mathcal{J}_0 + QM\mathcal{J}_1 t + QM\mathcal{J}_2 t^2 + \cdots + QM\mathcal{J}_n t^n + \cdots$$

şeklinde ifade edilir.

Burada

$$t^4 QM\mathcal{J}_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} QM\mathcal{J}_n t^{n+4}$$
$$= QM\mathcal{J}_0 t^4 + QM\mathcal{J}_1 t^5 + QM\mathcal{J}_2 t^6 + QM\mathcal{J}_3 t^7 + QM\mathcal{J}_4 t^8 + \cdots + QM\mathcal{J}_n t^{n+4} + \cdots$$

$$-4t^3 QM\mathcal{J}_n(t) = -4\sum_{n=0}^{\infty} QM\mathcal{J}_n t^{n+3}$$
$$= -4QM\mathcal{J}_0 t^3 - 4QM\mathcal{J}_1 t^4 - 4QM\mathcal{J}_2 t^5 - 4QM\mathcal{J}_3 t^6 - 4QM\mathcal{J}_4 t^7 + \cdots - 4QM\mathcal{J}_n t^{n+3} + \cdots$$

$$3t^2 QM\mathcal{J}_n(t) = 3\sum_{n=0}^{\infty} QM\mathcal{J}_n t^{n+2}$$
$$= 3QMJ_0 t^2 + 3QMJ_1 t^3 + 3QMJ_2 t^4 + 3QMJ_3 t^5 + 3QMJ_4 t^6 + \cdots$$
$$+ 3QM\mathcal{J}_n t^{n+2} + \cdots$$

$$4tQM\mathcal{J}_n(t) = 4\sum_{n=0}^{\infty} QM\mathcal{J}_n t^{n+1}$$
$$= 4QM\mathcal{J}_0 t + 4QM\mathcal{J}_1 t^2 + 4QM\mathcal{J}_2 t^3 + 4QM\mathcal{J}_3 t^4 + 4QM\mathcal{J}_4 t^5 + \cdots$$
$$+ 4QM\mathcal{J}_n t^{n+1} + \cdots$$

$$-4QM\mathcal{J}_n(t) = -4\sum_{n=0}^{\infty} QM\mathcal{J}_n t$$
$$= -4QMJ_0 - 4QMJ_1 t - 4QMJ_2 t^2 - 4QMJ_3 t^3 - 4QMJ_4 t^4 + \cdots$$
$$- 4QM\mathcal{J}_n t + \cdots$$

ve bu ifadede başlangıç koşulları olan

$QM\mathcal{J}_0 = (M\mathcal{J}_0, M\mathcal{J}_1, M\mathcal{J}_2, M\mathcal{J}_3) = (0, 2, 4, 10).$
$QM\mathcal{J}_1 = (M\mathcal{J}_1, M\mathcal{J}_2, M\mathcal{J}_3, M\mathcal{J}_4) = (2, 4, 10, 20).$
$QM\mathcal{J}_2 = (M\mathcal{J}_2, M\mathcal{J}_3, M\mathcal{J}_4, M\mathcal{J}_5) = (4, 10, 20, 52).$
$QM\mathcal{J}_3 = (M\mathcal{J}_3, M\mathcal{J}_4, M\mathcal{J}_5, M\mathcal{J}_6) = (10, 20, 52, 106).$

yerine yazılırsa,

$$QM\mathcal{J}_n(t)$$
$$= \frac{\begin{matrix}-8t-8t^2-12t^3+i(-8-8t-18t^2-36t^3)+j(16-24t-28t^2-114t^3)\\ +k(-40-40t+98t^2-196t^3)\end{matrix}}{(t^4-4t^3+3t^2+4t-4)}$$

elde edilir. Burada

$\mathcal{A}=(-8t-8t^2-12t^3)$
$\mathcal{B}=(-8-8t-18t^2-36t^3)$
$\mathcal{C}=(16-24t-28t^2-114t^3)$
$\mathcal{D}=(-40-40t+98t^2-196t^3)$

alınırsa,

$$QM\mathcal{J}_n(t).=\frac{\mathcal{A}+i\mathcal{B}+j\mathcal{C}+k\mathcal{D}}{(t^4-4t^3+3t^2+4t-4)}$$

şeklindedir.

5.1.4. Teorem: $QM\mathcal{J}_n$ kuadra Mersenne-Jacobthsal kuaterniyonları için aşağıdaki bağıntılar doğrudur.

i. $QM\mathcal{J}_k(QM\mathcal{J}_k)^*=\sum_{i=0}^{3}\mathcal{MJ}^2{}_{k+i}$

ii. $2\mathcal{MJ}_n=QM\mathcal{J}_k+(QM\mathcal{J}_k)^*$

iii. $(QM\mathcal{J}_k).^2=2\mathcal{MJ}_k(QM\mathcal{J}_k).-(QM\mathcal{J}_k).(QM\mathcal{J}_k)^*$

iv. $QM\mathcal{J}_{k+1}=QM\mathcal{J}_k-2QM\mathcal{J}_{k-1}+2QM_k$

İspat:

i. Kuadra Mersenne-Jacobthsal kuaterniyonu ve eşleniğinin tanımları kullanılarak,

ii.

$$QM\mathcal{J}_k(QM\mathcal{J}_k)^*=(\mathcal{MJ}_k+i\mathcal{MJ}_{k+1}+j\mathcal{MJ}_{k+2}+k\mathcal{MJ}_{k+3}).(\mathcal{MJ}_k-i\mathcal{MJ}_{k+1}-j\mathcal{MJ}_{k+2}-k\mathcal{MJ}_{k+3}).$$
$$=MJ_k{}^2+MJ_{k+1}{}^2+MJ_{k+2}{}^2+MJ_{k+3}{}^2$$

$$= \sum_{i=0}^{3} {MJ_{k+i}}^2$$

elde edilir.

i. Kuadra Mersenne-Jacobthsal kuaterniyonu ve eşleniğinin tanımları kullanılarak,

$(Q\mathcal{MJ}_k) + (Q\mathcal{MJ}_k)^* = (\mathcal{MJ}_k + i\mathcal{MJ}_{k+1} + j\mathcal{MJ}_{k+2} + k\mathcal{MJ}_{k+3}) + (\mathcal{MJ}_k - i\mathcal{MJ}_{k+1} - j\mathcal{MJ}_{k+2} - k\mathcal{MJ}_{k+3})$

$= 2\mathcal{MJ}_k$

dir.

i. Kuadra Mersenne-Jacobsthal Kuaterniyonunun tanımı kullanılarak

$$(Q\mathcal{MJ}_k)^2 = (\mathcal{MJ}_k + i\mathcal{MJ}_{k+1} + j\mathcal{MJ}_{k+2} + kMJ_{k+3})(\mathcal{MJ}_k + i\mathcal{MJ}_{k+1} + j\mathcal{MJ}_{k+2} + k\mathcal{MJ}_{k+3})$$
$$= 2{\mathcal{MJ}_k}^2 + 2i\mathcal{MJ}_k\mathcal{MJ}_{k+1} + 2j\mathcal{MJ}_k\mathcal{MJ}_{k+2} + 2k\mathcal{MJ}_k\mathcal{MJ}_{k+3} - {\mathcal{MJ}_k}^2 - {\mathcal{MJ}_{k+1}}^2 - {\mathcal{MJ}_{k+2}}^2 - {\mathcal{MJ}_{k+3}}^2$$
$$= 2MJ_k(QMJ_k) - (QMJ_k)(QMJ_k)^*.$$

elde edilir.

i. $\mathcal{MJ}_k = M_k + J_k$ olduğundan dolayı,

$$\mathcal{MJ}_{k+1} = M_{k+1} + J_{k+1}$$
$$= 3M_k - 2M_{k-1} + J_k - 2J_{k-1} = M_k + J_k - 2(M_{k-1} + J_{k-1}) + 2M_k$$
$$= \mathcal{MJ}_k - 2\mathcal{MJ}_{k-1} + 2M_k.$$

elde edilir. Elde edilen eşitlik

$Q\mathcal{MJ}_{k+1} = (\mathcal{MJ}_{k+1}, \mathcal{MJ}_{k+2}, \mathcal{MJ}_{k+3}, \mathcal{MJ}_{k+4})$ ifadesinde yerine yazılırsa,

$Q\mathcal{MJ}_{k+1} = (\mathcal{MJ}_k - 2\mathcal{MJ}_{k-1} + 2M_k, \mathcal{MJ}_{k+1} - 2\mathcal{MJ}_k + 2M_{k+1}, \mathcal{MJ}_{k+2} - 2\mathcal{MJ}_{k+1} + 2M_{k+2}, \mathcal{MJ}_{k+3} - 2\mathcal{MJ}_{k+2} + 2M_{k+3})$

$= (\mathcal{MJ}_k, \mathcal{MJ}_{k+1}, \mathcal{MJ}_{k+2}, \mathcal{MJ}_{k+3}) - 2(\mathcal{MJ}_{k-1}, \mathcal{MJ}_k, \mathcal{MJ}_{k+1}, \mathcal{MJ}_{k+2}) + 2(M_k, M_{k+1}, M_{k+2}, M_{k+3})$

Olup

$$QMJ_{k+1} = QMJ_k - 2QMJ_{k-1} + 2QM_k$$

elde edilir.

5.2. Kuadra Mersenne-Pell Kuaterniyonu ve Bazı Özellikleri

5.2.1.Tanım: $\{\mathcal{MP}_n\}_{n\geq 0}$ kuadra Mersenne-Pell dizisi olmak üzere kuadra Mersenne-Pell kuaterniyonu

$$QMP_n = \mathcal{MP}_n + i\mathcal{MP}_{n+1} + j\mathcal{MP}_{n+2} + k\mathcal{MP}_{n+3}$$

şeklinde tanımlanır.

5.2.2. Teorem: Kuadra Mersenne-Pell kuaterniyonunun Binet formülü $n \geq 0$ için,

$$\eta = (1 + i\alpha\gamma + j\alpha^2\gamma^2 + k\alpha^3\gamma^3)$$
$$\theta = (1 + i\alpha\delta + j\alpha^3\delta^3 + k\alpha^3\delta^3)$$
$$\vartheta = (1 + i\beta\gamma + j\beta^2\gamma^2 + k\beta^3\gamma^3)$$
$$\nu = (1 + i\beta\delta + j\beta^3\delta^3 + k\beta^3\delta^3)$$

olmak üzere,

$$QMP_n = -\frac{1}{2}[\alpha^n(\eta - \theta) - \beta^n(\vartheta - \nu).]$$

dir.

İspat:

Kuadra Mersenne-Pell dizisi için,

$$MP_n = (\alpha^n - \beta^n)\frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}$$

olduğundan,

$\gamma = 1 - \sqrt{2},\ \delta = 1 + \sqrt{2}$ değerleri formülde yerine yazılırsa

$$\mathcal{MP}_n = (\alpha^n - \beta^n)\left(\frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}\right) = (\alpha^n - \beta^n)\frac{\gamma^n - \delta^n}{\left(1 - \sqrt{2}\right) - \left(1 + \sqrt{2}\right)} = (\alpha^n - \beta^n)\frac{\gamma^n - \delta^n}{-\sqrt{2}}$$

elde edilir.

Bu ifade kuadra Mersenne-Pell kuaterniyonunda yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} Q\mathcal{MP}_n = {} & (\alpha^n - \beta^n)\left(\frac{\gamma^n - \delta^n}{-\sqrt{2}}\right) + i(\alpha^{n+1} - \beta^n + 1)\left(\frac{\gamma^{n+1} - \delta^{n+1}}{-\sqrt{2}}\right) \\ & + j(\alpha^{n+2} - \beta^{n+2})\left(\frac{\gamma^{n+2} - \delta^{n+2}}{-\sqrt{2}}\right) + k(\alpha^{n+3} - \beta^{n+3})\left(\frac{\gamma^{n+3} - \delta^{n+3}}{-\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} = -\frac{1}{2}\big[& \alpha^n\big(\gamma^n(1 + i\alpha\gamma + j\alpha^2\gamma^2 + k\alpha^3\gamma^3) - \delta^n(1 + i\alpha\delta + j\alpha^3\delta^3 + k\alpha^3\delta^3)\big) \\ & - \beta^n(\gamma^n(1 + i\beta\gamma + j\beta^2\gamma^2 + k\beta^3\gamma^3) - \delta^n(1 + i\beta\delta + j\beta^3\delta^3 + k\beta^3\delta^3)).\big] \end{aligned}$$

İfadede gerekli düzenlemeler yapılır ve

$$\eta = (1 + i\alpha\gamma + j\alpha^2\gamma^2 + k\alpha^3\gamma^3)$$
$$\theta = (1 + i\alpha\delta + j\alpha^3\delta^3 + k\alpha^3\delta^3)$$
$$\vartheta = (1 + i\beta\gamma + j\beta^2\gamma^2 + k\beta^3\gamma^3)$$
$$\nu = (1 + i\beta\delta + j\beta^3\delta^3 + k\beta^3\delta^3)$$

eşitlikleri kullanılarak ifade düzenlenirse,

$$QM\mathcal{P}_n = -\frac{1}{2}[\alpha^n(\eta-\theta) - \beta^n(\vartheta-\nu).]$$

elde edilir.

5.2.3. Teorem: Kuadra Mersenne-Pell kuaterniyonunun üreteç fonksiyonu,

$$QM\mathcal{P}(t). = \frac{\mathcal{A} + i\mathcal{B} + j\mathcal{C} + k\mathcal{D}}{(t^4 - 5t^3 + 7t^2 - t - 2)}$$

dir. Burada,

$\mathcal{A} = (-2t^2 - 9t^3).$
$\mathcal{B} = (-2t - 9t^2 - 21t^3)$
$\mathcal{C} = (-2 - 9t - 21t^2 - 51t^3)$
$\mathcal{D} = (-8 - 28t - 46t^2 - 115t^3).$

şeklindedir.

İspat: Kuadra Mersenne-Pell kuaterniyonunun üreteç fonksiyonu,

$$QM\mathcal{P}_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} QM\mathcal{P}_n t^n = QM\mathcal{P}_0 + QM\mathcal{P}_1 t + QM\mathcal{P}_2 t^2 + \cdots + QM\mathcal{P}_n t^n + \cdots$$

şeklinde ifade edilir. Burada,

$$t^4 QM\mathcal{P}_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} QM\mathcal{P}_n t^{n+4}$$
$$= QM\mathcal{P}_0 t^4 + QM\mathcal{P}_1 t^5 + QM\mathcal{P}_2 t^6 + QM\mathcal{P}_3 t^7 + \cdots + QM\mathcal{P}_n t^{n+4} + \cdots$$
$$-5t^3 QM\mathcal{P}_n(t) = -5\sum_{n=0}^{\infty} QM\mathcal{P}_n t^{n+3}$$
$$= -5QM\mathcal{P}_0 t^3 - 5QM\mathcal{P}_1 t^4 - 5QM\mathcal{P}_2 t^5 - 5\mathcal{MP}_3 t^6 + \cdots -$$
$$5QM\mathcal{P}_n t^{n+3} + \cdots$$

$$7t^2 QM\mathcal{P}_n(t) = 7\sum_{n=0}^{\infty} QM\mathcal{P}_n t^{n+2}$$
$$= 7QM\mathcal{P}_0 t^2 + 7QM\mathcal{P}_1 t^3 + 7QM\mathcal{P}_2 t^4 + 7QM\mathcal{P}_3 t^5 + \cdots + \cdots + 7QM\mathcal{P}_n t^{n+2} + \cdots$$

$$-tQM\mathcal{P}_n(t) = -\sum_{n=0}^{\infty} QM\mathcal{P}_n t^{n+1}$$
$$= -QM\mathcal{P}_0 t - QM\mathcal{P}_1 t^2 - QM\mathcal{P}_2 t^3 - QM\mathcal{P}_3 t^4 + \cdots - QM\mathcal{P}_n t^{n+1} + \cdots$$

$$-2QM\mathcal{P}_n(t) = -2\sum_{n=0}^{\infty} QM\mathcal{P}_n t^n$$
$$= -2QM\mathcal{P}_0 - 2QM\mathcal{P}_1 t - 2QM\mathcal{P}_2 t^2 - 2QM\mathcal{P}_3 t^3 + \cdots - 2QM\mathcal{P}_n t^n + \cdots$$

ve bu ifadede başlangıç koşulları olan,

$QM\mathcal{P}_0 = (\mathcal{MP}_0, \mathcal{MP}_1, \mathcal{MP}_2, \mathcal{MP}_3) = (0, 0, 1, 4).$
$QM\mathcal{P}_1 = (\mathcal{MP}_1, \mathcal{MP}_2, \mathcal{MP}_3, \mathcal{MP}_4) = (0, 1, 4, 12).$
$QM\mathcal{P}_2 = (\mathcal{MP}_2, \mathcal{MP}_3, \mathcal{MP}_4, \mathcal{MP}_5) = (1, 4, 12, 31).$
$QM\mathcal{P}_3 = (\mathcal{MP}_3, \mathcal{MP}_4, \mathcal{MP}_5, \mathcal{MP}_6) = (4, 12, 31, 74).$

yerine yazılırsa,

$$QM\mathcal{P}_n(t) = \frac{-2t^2 - 9t^3 + i(-2t - 9t^2 - 21t^3) + j(-2 - 9t - 21t^2 - 51t^3) + k(-8 - 28t - 46t^2 - 115t^3).}{(t^4 - 5t^3 + 7t^2 - t - 2)}$$

elde edilir. Burada,

$\mathcal{A} = -2t^2 - 9t^3$
$\mathcal{B} = (-2t - 9t^2 - 21t^3)$
$\mathcal{C} = (-2 - 9t - 21t^2 - 51t^3)$
$\mathcal{D} = (-8 - 28t - 46t^2 - 115t^3).$

alınırsa,

$$QMP(t).=\frac{\mathcal{A}+i\mathcal{B}+j\mathcal{C}+k\mathcal{D}}{(t^4-5t^3+7t^2-t-2)}$$

dır.

5.2.4. Teorem: Kuadra Mersenne-Pell kuarterniyonları için aşağıdaki bağıntılar doğrudur.

i. $QMP_k(QMP_k)^* = \sum_{i=0}^{3} MP^2{}_{k+i}$

ii. $2MP_n = QMP_k + (QMP_k)^*$

iii. $(QMP_k).^2 = 2MP_k(QMP_k). - (QMP_k).(QMP_k)^*$

iv. $QMP_{k+1} = 6QMP_k - 2QMP_{k-1} - 4QM_{k-1}QP_k - 4QM_kQP_{k-1}$

İspat:

i. Kuadra Mersenne-Pell kuarterniyonu ve eşleniğinin tanımları kullanılarak

$$QMP_k(QMP_k)^* = (MP_k + iMP_{k+1} + jMP_{k+2} + kMP_{k+3}).(MP_k - iMP_{k+1} - jMP_{k+2} - kMP_{k+3}).$$

$$= MP_k{}^2 + MP_{k+1}{}^2 + MP_{k+2}{}^2 + MP_{k+3}{}^2$$

$$= \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{3}} MP_{k+i}{}^2$$

elde edilir.

ii. Kuadra Mersenne-Pell kuarterniyonu ve eşleniğinin tanımları kullanılırsa

$$(QMP_k) + (QMP_k)^*$$

$$= (MP_k + iMP_{k+1} + jMP_{k+2} + kMP_{k+3})$$

$$+ (MP - iMP_{k+1} - jMP_{k+2} - kMP_{k+3})$$

$$= 2MP_k$$

bulunur.

iii. $(QMP_k)^{\mathbf{2}} = (MP_k + iMP_{k+1} + jMP_{k+2} + kMP_{k+3})(MP_k + iMP_{k+1} + jMP_{k+2} + kMP_{k+3})$

$$= 2\mathcal{MP}_k(\mathcal{MP}_k + i\mathcal{MP}_{k+1} + j\mathcal{MP}_{k+2} + k\mathcal{MP}_{k+3}) - \left(\mathcal{MP}_k{}^2 + \mathcal{MP}_{k+1}{}^2 + \mathcal{MP}_{k+2}{}^2 + \mathcal{MP}_{k+3}{}^2\right)$$
$$= 2\mathcal{MP}_k(Q\mathcal{MP}_k) - (Q\mathcal{MP}_k).(Q\mathcal{MP}_k).^*$$

dir.

iv. $\mathcal{MP}_n = M_nP_n$ olduğundan dolayı;

$$\mathcal{MP}_{n+1} = M_{n+1}P_{n+1}$$
$$= (3M_n - 2M_{n-1})(2P_n - P_{n-1})$$
$$= 6\mathcal{MP}_n + 3M_nP_{n-1} - 4M_{n-1}P_n - 2\mathcal{MP}_{n-1}$$

bulunur.

$$Q\mathcal{MP}_{k+1} = (\mathcal{MP}_{k+1}, \mathcal{MP}_{k+2}, \mathcal{MP}_{k+3}, \mathcal{MP}_{k+4})$$

eşitliğinde elde edilen ifade yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$Q\mathcal{MP}_{k+1} = 6Q\mathcal{MP}_k - 2Q\mathcal{MP}_{k-1} - 4QM_{k-1}QP_k - 4QM_kQP_{k-1}$$

elde edilir.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Çalışmalarımız boyunca elde etmiş olduğumuz yeni sonuçlar bu tezin üçüncü ve beşinci bölümlerinde verilmiştir.

Üçüncü bölümde Mersenne, Jacobtshal ve Pell sayı dizilerinin tanımları, Binet formülleri ve üreteç fonksiyonları yardımıyla elde etmiş olduğumuz Kuadra Mersenne-Jacobsthal ve Kuadra Mersenne-Pell dizileri tanımlanmıştır. Ayrıca bu dizilerin Binet formülleri ve üreteç fonksiyonları edilmiştir.

Beşinci bölümde ise üçüncü bölümde tanımlamış olduğumuz Kuadra Mersenne-Jacobsthal ve Kuadra Mersenne-Pell dizilerinin kuaterniyonları tanımlanmıştır. Ayrıca Binet formülü ve üreteç fonksiyonu bulunarak bu kuaterniyonlar için bazı özdeşlikler elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

Bicknell, M (1975). A primer on the pell sequence and related sequences. *Fibonacci Quarterly*, 345-349.

Boussayoud, A., Chelgham, M. and Boughaba, S (2018). On some identities and generating functions for. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 93-97.

Catarino, P., Campos, H. and Vasco, P (2016). On the mersenne sequence. *Annales Mathematicae Et Informaticae*, 37-53.

Cook, C. and Bacon, M (2013). Some ıdentities for jacobsthal and jacobsthal-lucas numbers satisfying higherorder recurrence relations. *Annales Mathematicae Et Informaticae*, 27-39.

Çakacı, S. ve Özkan Kızılırmak, G (2022). *Kuadratik mersenne-jacobsthal ve kuadratik mersenne-pell sayıları.* 3. Baskent İnternational Conference on Multidisciplinary Studies, Ankara, 958-963.

Çimen, C., & İpek, A (2007). On sum of pell numbers. *Accademia delle Scienze di Torino* 23-31.

Daşdemir , A., & Bilgici, G (2019). Gaussian mersenne numbers and generalized mersenne quaternions. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 87-96.

Devi, B., & Devibala, B (2021). The exponential generating functions of mersenne and mersenne-lucas ıdentities. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education* 12, 739-747.

Dişkaya, O., & Menken, H (2019). On the quadra fibona-pell and hexa fibona-pell-jacobsthal sequences. *Mathematical Sciences And Applications*, 3, 149-160.

Halıcı, S (2011). Some sums formulae for productsof terms of pell, pell-lucas and modified pell sequences. *Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 5, 151-155.

Halıcı, S (2012). On fibonacci quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 2, 321-327.

Hamilton, W (1853). *Lecrures on Quaternions.* London: Whittaker & Co, Ave-Maria Lane.

Hoggatt, V. and Lind, D. (Eds.) (1973). *A primer for the fibonacci numbers: Part VI.* New York: The Fibonacci Association.

Horadam, A. F (1997). Jacobsthal representation numbers. *Fibonacci Quaterly*, 2(2), 137-148.

Kızılateş, C (2017). On the quadra lucas-jacobsthal numbers. *Karaelmas Fen ve Mühendislik Dergisi*, 3(2), 619-621.

Koshy, T (2001). *Fibonacci and lucas numbers with applications.* New York: John Wiley.

Koshy, T. and Gao, Z (2011). Some divisibility properties of catalan numbers. *The Mathematical Gazette*, 95(532), 96-102.

Koshy, T. and Gao, Z (2013). Catalan numbers with mersenne subscripts. *Mathematical Scientist*, 38(2), 89-91.

Özkoç, A (2015). Some algebraic ıdentities on quadra fibona-pell ınteger sequence. *Advances in Difference Equations a Springer Open Journal*, 2015(1), 148.

Taşcı, D (2009). On quadrapell numbers and quadrapell polynomials. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 38(3), 265 – 275.



GAZİ GELECEKTİR…