

İKİDEN FAZLA BAĞIMSIZ ÖRNEK İÇİN TESTLER

BÖLÜM 9

1

İkiden Fazla Bağımsız Örnek İçin Testler

- Medyan Testi
- Kruskal-Wallis H Testi
  - Çoklu Karşılaştırmalar

2

Medyan Testi

Varsayımlar:

a. Veri, k sayıda yığının her birinden rastgele seçilen n_j hacimli örneklerden oluşturulur.
b. Gözlemler hem örnek içinde hem de örnekler arasında bağımsızdır.
c. Ölçme düzeyi en az sıralamadır.

H_0: Örneklerin seçildikleri yığınlar aynı medyana sahiptir.
H_1: Örneklerin seçildikleri yığınlardan en az birinin medyanı farklıdır.

	Örnek no				
	1	2	⋯	k	Toplam
$\boldsymbol{m}$'den büyük	G_{11}	G_{12}	⋯	G_{1k}	$n/2$
$\boldsymbol{m}$'den küçük veya eşit	G_{21}	G_{22}	⋯	G_{2k}	$n/2$
Toplam	n_1	n_2	⋯	n_k	n

3

Medyan Testi

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{2}\frac{\left(G_{ij}-B_{ij}\right)^2}{B_{ij}} \sim \chi^2_{(k-1)(2-1)}$$

$$B_{ij} = \frac{n_j(n/2)}{n} = \frac{n_j}{2} \qquad j = 1,2,\dots,k; i = 1,2$$

$$\chi^2_h > \chi^2_{(k-1),\alpha}$$

4

Örnek

Şehirler		
A	B	C
100, 80, 110, 115, 130, 85, 87, 96, 99, 132, 131, 145	141, 152, 160, 133, 129, 139, 128, 117, 93, 122, 136, 154	153, 172, 105, 111, 165, 180, 112, 119, 164, 185, 177, 196

H_0: Örneklerin seçildikleri yığınlar aynı medyana sahiptir.
H_1: Örneklerin seçildikleri yığınlardan en az birinin medyanı farklıdır.

	Şehir			
	A	**B**	**C**	**Toplam**
130.5'den büyük	3	7	8	18
130.5'den küçük veya eşit	9	5	4	18
Toplam	12	12	12	36

5

Örnek

	Şehir			
	A	**B**	**C**	**Toplam**
130.5'den büyük	3 (6)	7 (6)	8 (6)	18
130.5'den küçük veya eşit	9 (6)	5 (6)	4 (6)	18
Toplam	12	12	12	36

$$\chi_h^2 = \frac{(3-6)^2}{6} + \frac{(9-6)^2}{6} + \frac{(7-6)^2}{6} + \frac{(5-6)^2}{6} + \frac{(8-6)^2}{6} + \frac{(4-6)^2}{6}$$

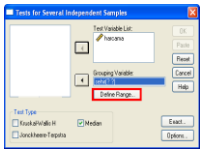
$$\chi_h^2 = 4.66$$

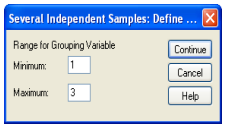
$$\chi_h^2 \not> \chi^2_{(k-1),\alpha} \text{ , yani } 4.66 \not> 5.99$$

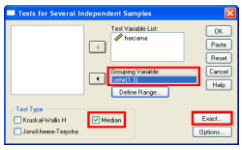
6

SPSS Uygulama

	sehir	harcama
1	1	100
2	1	80
3	1	110
4	1	115
5	1	130
6	1	85
7	1	87
8	1	96
9	1	99
10	1	132
11	1	131
12	1	145
13	2	141
14	2	152
15	2	160
16	2	133
17	2	129
18	2	139
19	2	128
20	2	117
21	2	93
22	2	122
23	2	136
24	2	154
25	3	153
26	3	172
27	3	105
28	3	111
29	3	165







Frequencies

		sehir		
		A	B	C
harcama	> Median	3	7	8
	<= Median	9	5	4

Test Statistics[b]

	harcama
N	36
Median	130,50
Chi-Square	4,667[a]
df	2
Asymp. Sig.	,097
Exact Sig.	,175
Point Probability	,114

a. 0 cells (,0%) have expected frequencies less than 5. The minimum expected cell frequency is 6,0.

b. Grouping Variable: sehir

7

Örnek

İlaç türü		
A	B	C
10, 12, 18, 17, 16, 20, 22, 21, 28, 30, 29	26, 11, 9, 7, 13, 14, 15, 8, 6, 19, 25	32, 26, 23, 34, 40, 42, 10, 12, 25, 27, 30

H_0: Örneklerin seçildikleri yığınlar aynı medyana sahiptir.

H_1: Örneklerin seçildikleri yığınlardan en az birinin medyanı farklıdır.

	İlaç türü			
	A	**B**	**C**	**Toplam**
20'den büyük	5	2	9	16
20'den küçük veya eşit	6	9	2	17
Toplam	11	11	11	33

8

Örnek

	İlaç türü			
	A	B	C	Toplam
20'den büyük	5 (5.33)	2 (5.33)	9 (5.33)	16
20'den küçük	6 (5.67)	9 (5.67)	2 (5.67)	17
Toplam	11	11	11	33

$$\chi_h^2 = \frac{(5-5.33)^2}{5.33} + \frac{(6-5.67)^2}{5.67} + \frac{(2-5.33)^2}{5.33} + \frac{(9-5.67)^2}{5.67} + \frac{(9-5.33)^2}{5.33} + \frac{(2-5.67)^2}{5.67}$$

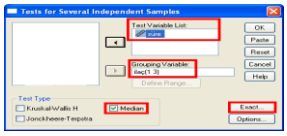
$$\chi_h^2 = 8.978$$

$$\chi_h^2 > \chi^2_{(k-1),\alpha} \text{ , yani } 8.978 > 5.991$$

9

SPSS Uygulama

	ilaç	süre
1	1	10
2	1	12
3	1	18
4	1	17
5	1	16
6	1	20
7	1	22
8	1	21
9	1	28
10	1	30
11	1	29
12	2	26
13	2	11
14	2	9
15	2	7
16	2	13
17	2	14
18	2	15
19	2	8
20	2	6
21	2	19
22	2	25
23	3	32
24	3	26
25	3	23
26	3	34
27	3	40
28	3	42
29	3	10



Frequencies

		ilaç		
		A	B	C
süre	> Median	5	2	9
	<= Median	6	9	2

Test Statistics[b]

	süre
N	33
Median	20,00
Chi-Square	8,978[a]
df	2
Asymp. Sig.	,011
Exact Sig.	,014
Point Probability	,007

a. 0 cells (,0%) have expected frequencies less than 5. The minimum expected cell frequency is 5,5.

b. Grouping Variable: ilaç

10

Kruskal-Wallis H Testi

a. Veri $n_1, n_2, \ldots, n_k$ hacimli k sayıda rastgele seçilen örnekten derlenir.
b. Gözlemler hem örnek içinde hem de örnekler arasında bağımsızdır.
c. Ölçme düzeyi en az sıralamadır.
d. İlgilenilen değişken süreklidir.

H_0: Örneklerin seçildiği k sayıda yığının dağılım fonksiyonları aynıdır.
H_1: Örneklerin seçildiği k sayıda yığının hepsi aynı medyana sahip değildir.

11

Kruskal-Wallis H Testi

Örnek no			
1	2	⋯	k
X_{11}	X_{12}	⋯	X_{1k}
X_{21}	X_{22}	⋯	X_{2k}
⋮	⋮		⋮
$X_{n_1 1}$	$X_{n_2 2}$	⋯	$X_{n_k k}$

Örnek no			
1	2	⋯	k
R_{11}	R_{12}	⋯	R_{1k}
R_{21}	R_{22}	⋯	R_{2k}
⋮	⋮		⋮
$R_{n_1 1}$	$R_{n_2 2}$	⋯	$R_{n_k k}$

$R_{.j}$: j. örnek için sıra sayıları toplamı
$\overline{R}_{.j}$: j. örnek için sıra sayıları ortalaması
$R_{..}$: Sıra sayıları genel toplamı
$\overline{R}_{..}$: Sıra sayıları genel ortalaması

12

Kruskal-Wallis H Testi

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{k} n_j \left(\overline{R}_{\cdot j} - \frac{n+1}{2} \right)^2$$

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{k} \frac{R_{\cdot j}^2}{n_j} - 3(n+1)$$

$$R_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{n_j} R_{ij}, \quad \overline{R}_{\cdot j} = \frac{R_{\cdot j}}{n_j}$$

$$R_{\cdot\cdot} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} R_{ij} = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \overline{R}_{\cdot\cdot} = \frac{R_{\cdot\cdot}}{n} = \frac{(n+1)}{2}$$

13

Örnek

İlaç türü		
A	B	C
12	24	23
10	18	30
7	16	31
6	15	32

H_0: $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$

H_1: τ_j parametrelerinin en az biri farklıdır.

14

Örnek

R_{i1}	R_{i2}	R_{i3}
4	9	8
3	7	10
2	6	11
1	5	12

$$R_{.1} = 4 + 3 + 2 + 1 = 10$$
$$R_{.2} = 9 + 7 + 6 + 5 = 27$$
$$R_{.3} = 8 + 10 + 11 + 12 = 41$$
$$R_{..} = 10 + 27 + 41 = 78$$

$$\overline{R}_{.1} = \frac{10}{4} = 2.5 \qquad \overline{R}_{.2} = \frac{27}{4} = 6.75$$
$$\overline{R}_{.3} = \frac{41}{4} = 10.25 \qquad \overline{R}_{..} = \frac{12+1}{2} = 6.5$$

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{k} n_j \left(\overline{R}_{.j} - \frac{n+1}{2}\right)^2$$

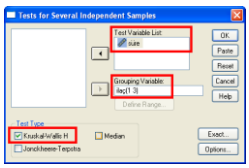
$$H_h = \frac{12}{12(12+1)} [4(2.5-6.5)^2 + 4(6.75-6.5)^2 + 4(10.25-6.5)^2]$$

$$H_h = 9.269$$

15

SPSS Uygulama

	ilaç	süre
1	1	12
2	1	10
3	1	7
4	1	6
5	2	24
6	2	18
7	2	16
8	2	15
9	3	23
10	3	30
11	3	31
12	3	32



Ranks

	ilaç	N	Mean Rank
süre	A	4	2,50
	B	4	6,75
	C	4	10,25
	Total	12	

Test Statistics[a,b]

	süre
Chi-Square	9,269
df	2
Asymp. Sig.	,010
Exact Sig.	,001
Point Probability	,000

a. Kruskal Wallis Test
b. Grouping Variable: ilaç

16

Örnek

Ayçiçeği türü			
A	**B**	**C**	**D**
200	182	210	219
160	174	195	217
140	142	220	230
145	150	215	250
180	166	204	202
	168	193	240
	171		245

$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4$

$H_1: \tau_j$ parametrelerinin en az biri farklıdır.

17

Örnek

R_{i1}	R_{i2}	R_{i3}	R_{i4}
14	11	17	20
5	9	13	19
1	2	21	22
3	4	18	25
10	6	16	15
	7	12	23
	8		24
33	47	97	148

$$R_{\cdot 1} = 33,\ R_{\cdot 2} = 47,\ R_{\cdot 3} = 97,\ R_{\cdot 4} = 148,\ R_{\cdot\cdot} = 325$$

ve

$$\overline{R}_{\cdot 1} = 6.6,\ \overline{R}_{\cdot 2} = 6.71,\ \overline{R}_{\cdot 3} = 16.17,\ \overline{R}_{\cdot 4} = 21.14, \overline{R}_{\cdot\cdot} = 13$$

18

Örnek

$$H = \frac{12}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{k}\frac{R_{.j}^2}{n_j} - 3(n+1)$$

$$H_h = \frac{12}{25(26)}\left(\frac{33^2}{5} + \frac{47^2}{7} + \frac{97^2}{6} + \frac{148^2}{7}\right) - 3(25+1)$$

$$H_h = 18.57$$

$$H = \frac{12}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{k} n_j\left(\overline{R}_{.j} - \frac{n+1}{2}\right)^2$$

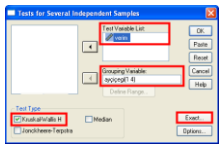
$$H_h = \frac{12}{25(26)}[5(6.6-13)^2 + 7(6.71-13)^2 + 6(16.17-13)^2 + 7(21.14-13)^2]$$

$$H_h = 18.57$$

19

SPSS Uygulama

	ay çiçegi	verim
1	1	200
2	1	160
3	1	140
4	1	145
5	1	180
6	2	182
7	2	174
8	2	142
9	2	150
10	2	166
11	2	168
12	2	171
13	3	210
14	3	195
15	3	220
16	3	215
17	3	204
18	3	193
19	4	219
20	4	217
21	4	230
22	4	250
23	4	202
24	4	240
25	4	245



Ranks

	ay çiçegi	N	Mean Rank
verim	A	5	6,60
	B	7	6,71
	C	6	16,17
	D	7	21,14
	Total	25	

Test Statistics[a,b]

	verim
Chi-Square	18,566
df	3
Asymp. Sig.	,000
Exact Sig.	.
Point Probability	.

a. Kruskal Wallis Test

b. Grouping Variable: ay çiçegi

20

Çoklu Karşılaştırmalar

$$\overline{R}_{\cdot j} = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} R_{ij}}{n_j} \qquad \overline{R}_{\cdot j'} = \frac{\sum_{i=1}^{n_{j'}} R_{ij'}}{n_{j'}}$$

$$V\left(\overline{R}_{\cdot j} - \overline{R}_{\cdot j'}\right) = \frac{n(n+1)}{12}\left(\frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_{j'}}\right)$$

$$\frac{\left|\overline{R}_{\cdot j} - \overline{R}_{\cdot j'}\right|}{\sqrt{V\left(\overline{R}_{\cdot j} - \overline{R}_{\cdot j'}\right)}} > \sqrt{H'_\alpha}$$

21

Örnek

Tedavi yöntemi			
1. grup (A)	**2. grup (B)**	**3. grup (C)**	**4. grup (D)**
12	23	31	12
18	19	30	10
20	24	30	12
14	27	36	9
13	30	30	11
	30		7
			6

$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4$

$H_1: \tau_j$ parametrelerinin en az biri farklıdır.

22

Örnek

Tedavi yöntemi			
1. grup (A)	**2. grup (B)**	**3. grup (C)**	**4. grup (D)**
7	14	22	7
11	12	19	4
13	15	19	7
10	16	23	3
9	19	19	5
	19		2
			1
50	95	102	29

$$H = \frac{12}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{k}\frac{R_{\cdot j}^2}{n_j} - 3(n+1)$$

$$H_h = \frac{12}{23(24)}\left(\frac{50^2}{5} + \frac{95^2}{6} + \frac{102^2}{5} + \frac{29^2}{7}\right) - 3(23+1)$$

$$H_h = 19.4154$$

$$H_h^* = \frac{19.415}{0.9881} = 19.6492$$

23

Örnek

$$H_0: \tau_1 = \tau_2$$
$$H_1: \tau_1 \neq \tau_2$$

$$\frac{|\overline{R}_{\cdot 1} - \overline{R}_{\cdot 2}|}{\sqrt{V(\overline{R}_{\cdot 1} - \overline{R}_{\cdot 2})}} > \sqrt{\chi^2_{k-1,\alpha}}$$

$$\overline{R}_{\cdot 1} = \frac{50}{5} = 10.00$$
$$\overline{R}_{\cdot 2} = \frac{95}{6} = 15.83$$

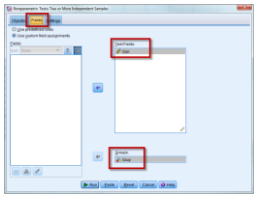
$$\sqrt{V(\overline{R}_{\cdot 1} - \overline{R}_{\cdot 2})} = \sqrt{\frac{n(n+1)}{12}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$
$$= \sqrt{\frac{23(23+1)}{12}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)}$$
$$= 4.11$$

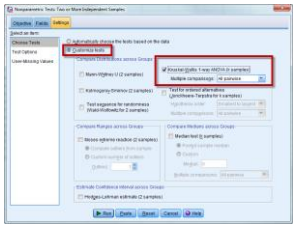
$$\frac{|10.00 - 15.83|}{4.11} \not> \sqrt{7.815}$$
$$1.42 \not> 2.79$$

24

SPSS Uygulama

	Grup	Gün
1	1	12
2	1	18
3	1	20
4	1	14
5	1	13
6	2	23
7	2	19
8	2	24
9	2	27
10	2	30
11	2	30
12	3	31
13	3	30
14	3	30
15	3	36
16	3	30
17	4	12
18	4	10
19	4	12
20	4	9
21	4	11
22	4	7
23	4	6
24		





Hypothesis Test Summary

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of Gün is the same across categories of Grup.	Independent-Samples Kruskal-Wallis Test	,000	Reject the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is ,05.

Sample 1-Sam...	Test Statistic	Std. Error	Std. Test Statistic	Sig.	Adj.Sig.
D-A	5,857	3,948	1,484	,138	,827
D-B	11,690	3,751	3,117	,002	,011
D-C	16,257	3,948	4,118	,000	,000
A-B	-5,833	4,082	-1,429	,153	,918
A-C	-10,400	4,264	-2,439	,015	,088
B-C	-4,567	4,082	-1,119	,263	1,000

Each row tests the null hypothesis that the Sample 1 and Sample 2 distributions are the same.
Asymptotic significances (2-sided tests) are displayed. The significance level is ,05.