



VEKTÖR METRİK UZAYLAR ÜZERİNDE FONKSİYONLAR VE
SÜREKLİLİK

Sümevra TUNGA

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARALIK 2018

Sümeýra TUNGA tarafından hazırlanan "VEKTÖR METRİK UZAYLAR ÜZERİNDE FONKSİYONLAR VE SÜREKLİLİK" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Cüneyt ÇEVİK

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Başkan: Prof. Dr. Bahri TURAN

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Doç. Dr. Murat OLGUN

Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Tez Savunma Tarihi: 20/12/2018

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Sümeyra TUNGA

20/12/2018

VEKTÖR METRİK UZAYLAR ÜZERİNDE FONKSİYONLAR VE SÜREKLİLİK
(Yüksek Lisans Tezi)

SümeYra TUNGA

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Aralık 2018

ÖZET

Bu çalışmada vektörel sürekli ve vektörel sınırlı fonksiyonlardan oluşan $C_v^0(X, F)$ kümesinin alt kümeleri için vektörel eşsüreklilik ve topolojik eşsüreklilik tanımları verildi. F Riesz uzayı Arşimedyan iken topolojik eşsüreklilik kümesinin vektörel eşsüreklilik olduğu ispatlandı. Ayrıca, vektörel düzgün süreklilik ve vektörel eşsüreklilik tanımlarını destekleyen sonuçlar elde edildi. Son olarak, herhangi bir eşsüreklilik kümesinin içindeki her bir fonksiyonun vektörel düzgün sürekli olduğu gösterildi.

Bilim Kodu : 20404

Anahtar Kelimeler : Riesz uzayı, vektör metrik, vektörel süreklilik.

Sayfa Adedi : 33

Danışman : Doç. Dr. Cüneyt ÇEVİK

FUNCTIONS ON VECTOR METRIC SPACES AND CONTINUITY

(M. Sc. Thesis)

Sümeýra TUNGA

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

December 2018

ABSTRACT

In this study, to subsets of $C_v^0(X, F)$ composed of vectorially continuous and vectorial bounded functions is given the definitions of vectorially equicontinuous and topologically equicontinuous. While F Riesz space is Archimedean, it is proven that the topologically equicontinuous set is vectorially equicontinuous. In addition, some results that support the definitons of vectorially uniformly continuous and vectorially equicontinuous are obtained. Finally, it is shown that each function in an equicontinuous set is vectorial uniformly continuous.

Science Code : 20404

Key Words : Riesz space, vector metric, vectorial continuity.

Page Number : 33

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Cüneyt ÇEVİK

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim süresince, değerli zamanını ve bilgi birikimini benimle paylaşan, yol göstericiliği ile desteklerini esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Cüneyt Çevik'e, tüm çalışmalarım boyunca desteklerini her zaman yanımda hissettiğim aileme ve arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	3
3. VEKTÖR METRİK UZAYLAR VE SÜREKLİLİK	13
4. VEKTÖREL SÜREKLİ FONKSİYON UZAYLARI VE EŞSÜREKLİLİK	23
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	29
KAYNAKLAR	31
ÖZGEÇMİŞ	33

1. GİRİŞ

20. yüzyılın başlarında Fransız matematikçi Maurice Fréchet, reel ve kompleks sayılar teorisindeki bir çok önemli sonucu elde etmemizi sağlayan uzaklık kavramını genelleştirerek metrik uzaylar teorisini oluşturdu [5]. Bu teoriyi genelleştirmek için yapılan çalışmalara, 1975’de Kramosil ve Michalek tarafından tanımlanan fuzzy metrik uzayları [7], 1997’de Zabreiko tarafından tanımlanan ve metrik dönüşümünün reel sayılar yerine sıralı bir Banach uzayında değer almasıyla oluşan K-metrik uzayları [11] örnek olarak verilebilir.

Çevik ve Altun (2009) tarafından yayınlanan çalışmada metrik dönüşümü tanımında reel sayılar yerine Riesz uzayı ve böylece $\mathbb{R}$ ’deki alışılmış sıralama yerine Riesz uzayındaki kısmi sıralama karşılık getirilerek metrik kavramı genelleştirilmiş ve vektör metrik uzay olarak adlandırılmıştır [2]. Bu çalışmada, metrik uzayların bilinen bazı sonuçları vektör metrik uzaylarda verilmiştir.

Fonksiyonel analizin önemli teoremlerinden biri, yeterli ve gerekli koşullar altında kapalı ve sınırlı bir aralıkta tanımlanan reel değerli sürekli fonksiyonlar uzayındaki her dizinin düzgün yakınsak bir alt diziye sahip olup olmadığına karar vermek için kullanılan Arzela-Ascoli teoremidir. Bu teorem aslında düzgün metrikle verilen $C([a, b])$ uzayının alt kümeleri için kompaktlık kriterini açıklar (Kelley, 1955 [6], Munkres, 1975 [9]). Bu açıklama düzgün sınırlılık ve eşsüreklilik kavramlarının tanıtılmasından sonra yapılır. Bu tezde bu kavramları vektör metrik uzaylar için verilmiş ve bunlar üzerine birtakım sonuçlar elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde ilk defa 1928 yılında F. Riesz tarafından tanımlanan [10] ve çok sayıda uygulama alanı bulunan Riesz uzaylarının bazı temel tanım ve teoremlerini gösterilmiştir.

Üçüncü bölümde vektör metrik uzayların tanımı ve bazı özellikleri incelenmiştir. Burada Çevik (2014) tarafından yayınlanan çalışmada yer alan vektör metrik uzaylar arasında tanımlı fonksiyonlar için vektörel süreklilik ve vektörel düzgün süreklilik tanımlarını verilmiştir [3]. Bu bölümün son kısmında vektörel düzgün süreklilik

tanımını destekleyen yeni bir sonuç ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde çalışma, (X, d, E) vektör metrik uzay üzerinde tanımlı F Riesz uzayı değerli vektörel ve topolojik sürekli fonksiyonlar üzerine yoğunlaştırılmıştır. Vektörel sürekli fonksiyonların $C_v(X, F)$ kümesi ile, topolojik sürekli fonksiyonların $C_t(X, F)$ kümesi fonksiyonlar arasındaki doğal sıralamaya göre Riesz uzayıdır. Her $x, y \in X$ ve bir $T : X \rightarrow Y$ pozitif operatörü için $|f(x) - f(y)| \leq T(d(x, y))$ özelliğini sağlayan tüm vektörel sürekli ve vektörel sınırlı f fonksiyonlarının $C_v^0(X, F)$ kümesi $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ ile tanımlanan $d_\infty : C_v^0(X, F) \times C_v^0(X, F) \rightarrow F$ düzgün metriği ile bir vektör metrik uzaydır [3]. Bu kısımda $C_v^0(X, F)$ kümesinin bir A alt kümesi için vektörel eşsüreklilik ve topolojik eşsüreklilik tanımları yapılmıştır. F Riesz uzayını Arşimedyen seçtiğimizde topolojik eşsüreklilik kümesinin vektörel eşsüreklilik olduğu ispatlanmıştır. Devamında yapılan tanımlar doğrultusunda yeni iki sonuç elde edilmiştir. Bunlardan birincisi, vektörel eşsüreklilik tanımını destekler. Diğerisi ise, herhangi bir eşsüreklilik kümesinin içindeki her bir fonksiyonun vektörel düzgün sürekli olmasıdır.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde Riesz uzaylarının sonraki bölümlerde kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremleri verilecektir. Konu hakkında detaylı bilgi için [1] ve [8] kaynaklarına bakılabilir.

2.1. Tanım (Sıralı küme)

Herhangi bir boş olmayan E kümesinde $\leq$ bağıntısı her $x, y, z \in E$ için

(a) $x \leq x$ (Yansıma özelliği)

(b) $x \leq y$ ve $x \leq y$ ise $y = x$ (Ters simetri özelliği)

(c) $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$ (Geçişme özelliği)

özelliklerini sağlıyorsa $\leq$ bağıntısına sıralama bağıntısı, $(E, \leq)$ ikilisine de sıralı küme denir. Bu özelliklere ek olarak, E kümesinin herhangi iki elemanı karşılaştırılıyor, yani her $x, y \in E$ için

(d) $x \leq y$ ya da $y \leq x$

oluyorsa E 'ye tam sıralı küme denir. (d) özelliği sağlanmıyorsa E kümesine kısmi sıralı küme denir.

Örnek

$\mathbb{N}^+ = \{1, 2, \dots\}$ sayma sayılar kümesi $\leq$ 'küçük eşit bağıntısı'na göre tam sıralı bir küme olmasına karşın her $x, y \in \mathbb{N}$ için

$x \mid y \Leftrightarrow y = kx$ olacak biçimde $k \in \mathbb{N}$ var

biçiminde tanımlanan tam (kalansız) bölme bağıntısı bir sıralama bağıntısıdır ve bu sıralama bağıntısına göre $\mathbb{N}^+$ kısmi sıralı kümedir.

Örnek

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesi her $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$x \leq_k y \Leftrightarrow x_1 \leq y_1 \text{ ve } x_2 \leq y_2$$

biçiminde tanımlanan $\leq_k$ koordinat sıralaması ile kısmi sıralı küme,

$$x \leq_s y \Leftrightarrow x_1 < x_2 \text{ ya da } (x_1 = x_2 \text{ ve } y_1 \leq y_2)$$

biçiminde tanımlanan $\leq_s$ sözlüksel sıralaması ile tam sıralı kümedir.

Örnek

X bir topolojik uzay ve X üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların kümesi $C(X)$ olsun. Her $f, g \in C(X)$ ve her $x \in X$ için

$$f \leq g \iff f(x) \leq g(x)$$

biçiminde tanımlanan bağıntı sıralama bağıntısıdır ve ‘noktasal sıralama bağıntısı’ olarak adlandırılır.

2.2. Tanım

E reel vektör uzayı ve üzerindeki sıralama bağıntısı $\leq$ olmak üzere her $x, y, z \in E$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $x \leq y$ iken

$$(a) \ x + z \leq y + z \quad \text{ve} \quad (b) \ \lambda x \leq \lambda y$$

oluyorsa E ’ye sıralı vektör uzayı denir. Bunlara ek olarak, her $x, y \in E$ için

$$(c) \ x \vee y = \sup\{x, y\} \in E \text{ veya } x \wedge y = \inf\{x, y\} \in E$$

oluyorsa E 'ye Riesz uzayı (vektör örgüsü) denir.

2.3. Teorem

E Riesz uzayı olmak üzere, her $x, y, z \in E$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için

$$(1) \ x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)] \text{ ve } x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)],$$

$$(2) \ x + y = (x \vee y) + (x \wedge y),$$

$$(3) \ x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z) \text{ ve } x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z),$$

$$(4) \ \lambda(x \vee y) = (\lambda x) \vee (\lambda y) \text{ ve } \lambda(x \wedge y) = (\lambda x) \wedge (\lambda y)$$

eşitlikleri sağlanır.

2.4. Tanım

E Riesz uzayı $x \in E$ olsun.

(a) $x \vee 0$ elemanına x elemanının pozitif kısmı denir ve x^+ ile gösterilir.

(b) $(-x) \vee 0$ elemanına x elemanının negatif kısmı denir ve x^- ile gösterilir.

(c) $(-x) \vee x$ elemanına x elemanının modülü denir ve $|x|$ ile gösterilir.

2.5. Teorem

E Riesz uzayı $x \in E$ olmak üzere,

$$(1) \ x = x^+ - x^-,$$

$$(2) \ |x| = x^+ + x^-,$$

$$(3) \ x^+ \wedge x^- = 0$$

eşitlikleri sağlanır.

2.6. Teorem

E Riesz uzayı olmak üzere, her $x, y \in E$ için

$$(1) \ x \vee y = \frac{1}{2} [(x + y) + |x - y|],$$

$$(2) \ x \wedge y = \frac{1}{2} [(x + y) - |x - y|],$$

$$(3) \ |x - y| = (x \vee y) - (x \wedge y),$$

$$(4) \ |x| \vee |y| = \frac{1}{2} (|x + y| + |x - y|),$$

$$(5) \ |x| \wedge |y| = \frac{1}{2} ||x + y| - |x - y||,$$

$$(6) \ x = (x - y)^+ + x \wedge y,$$

$$(7) \ |x + y| \wedge |x - y| = ||x| - |y|| \text{ ve}$$

$$(8) \ |x + y| \vee |x - y| = |x| + |y|$$

eşitlikleri sağlanır.

2.7. Teorem

E Riesz uzayı olmak üzere, her $x, y, z \in E$ için

$$(1) \ |x \vee y - z \vee y| + |x \wedge y - z \wedge y| = |x - z| \text{ (Birkhoff Özdeşliği),}$$

$$(2) \ |x \vee y - z \vee y| \leq |x - z| \text{ ve } |x \wedge y - z \wedge y| \leq |x - z| \text{ (Birkhoff Eşitsizliği),}$$

$$(3) |x^+ - z^+| \leq |x - z| \text{ ve } |x^- - z^-| \leq |x - z|$$

önergeleri sağlanır.

İspat

(1) $|p - h| = p \vee h - p \wedge h$ eşitliğinde $p = x \vee y$, $h = z \vee y$ ve $p = x \wedge y$, $h = z \wedge y$ alınır,

$$\begin{aligned} |x \vee y - z \vee y| + |(x \wedge y) - z \wedge y| &= [(x \vee y) \vee (z \vee y) - (x \vee y) \wedge (z \vee y)] \\ &\quad + [(x \wedge y) \vee (z \wedge y) - (x \wedge y) \wedge (z \wedge y)] \\ &= x \vee y \vee z - (x \wedge z) \vee y \\ &\quad + (x \vee z) \wedge y - x \wedge y \wedge z \\ &= [(x \vee z) \vee y + (x \vee z) \wedge y] \\ &\quad - [(x \wedge z) \vee y + (x \wedge z) \wedge y] \\ &= (x \vee z + y) - (x \wedge z + y) = x \vee z - x \wedge z \\ &= |x - z| \end{aligned}$$

sağlanır.

$$\begin{aligned} (2) \quad x \vee y - z \vee y &= [(x - y) \vee 0 + y] - [(z - y) \vee 0 + y] \\ &= (x - y)^+ - (z - y)^+ \\ &= [(x - z) + (z - y)]^+ - (z - y)^+ \\ &\leq [(x - z)^+ + (z - y)^+] - (z - y)^+ \\ &= (x - z)^+ \leq |x - z| \end{aligned}$$

Benzer olarak $x \vee y - z \vee y \leq |x - z|$ elde edilir ve böylece $|x \vee y - z \vee y| \leq |x - z|$ elde edilir. Diğer eşitsizlik benzer yolla gösterilebilir.

(3) (1)'de $y = 0$ alınır istenilen elde edilir.

2.8. Tanım

E Riesz uzayında bir dizi (x_n) olsun.

(a) Her $m, n \in \mathbb{N}$ için $m < n$ iken $x_m \geq x_n$ oluyorsa (x_n) dizisi azalandır denir ve $x_n \downarrow$ yazılır. $x_n \downarrow$ ve $\inf x_n = x$ ise $x_n \downarrow x$ yazılır.

(b) Her $m, n \in \mathbb{N}$ için $m < n$ iken $x_m \leq x_n$ oluyorsa (x_n) dizisi artandır denir ve $x_n \uparrow$ yazılır. $x_n \uparrow$ ve $\sup x_n = x$ ise $x_n \uparrow x$ yazılır.

2.9. Tanım

E Riesz uzayındaki her $x \in E^+$ için $n^{-1}x \downarrow 0$ oluyorsa E 'ye Arşimedyen Riesz uzayı denir.

Örnek

(a) $\mathbb{R}^2$ koordinat sıralamasına göre Arşimedyandır. Gerçekten, her $n \in \mathbb{N}$ için $(0, 0) \leq_k (x_1, x_2) \leq_k \frac{1}{n} (y_1, y_2)$ olacak biçimde $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ seçilirse, $(0, 0) \leq_k (x_1, x_2) \leq_k \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} (y_1, y_2)$ olur. $0 \leq x_1 \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} y_1$ ve $0 \leq x_2 \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} y_2$ eşitsizliklerinden ve $\mathbb{R}$ Arşimedyen Riesz uzayı olduğundan $\inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} (y_1, y_2) = (0, 0)$ elde edilir. Bu durumda $x = 0$ olur.

(b) $\mathbb{R}^2$ sözlüksel sıralamaya göre Arşimedyen Riesz uzayı değildir. Gerçekten, $x = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $(0, 0) \leq_s (0, 1) \leq_s \left(\frac{1}{n}, 0\right) = \frac{1}{n}x$ olur. Bu durumda $\inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{n}x\right)$ yoktur.

2.10. Tanım

E Riesz uzayı olmak üzere E nin üstten sınırlı (alttan sınırlı) her altkümesi supremuma (infimuma) sahipse, E 'ye Dedekind tam Riesz uzayı denir. E uzayının sayılabilir ve üstten sınırlı (alttan sınırlı) her altkümesinin supremumu (infimumu) varsa, E 'ye σ -Dedekind tam Riesz uzayı denir.

Örnek

(a) $\mathbb{R}^2$ koordinat sıralamasına göre Dedekind tam Riesz uzayıdır. Gerçekten, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ve $A = A_1 \times A_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ kümesi için $A \leq_k x$ olsun. Her $a = (a_1, a_2) \in A$ için

$$a \leq_k x \iff a_1 \leq x_1 \text{ ve } a_2 \leq x_2$$

ve $\mathbb{R}$ Dedekind tam olduğundan $\sup A_1 \leq x_1$ ve $\sup A_2 \leq x_2$ elde edilir. Dolayısıyla, $y = (\sup A_1, \sup A_2) \in \mathbb{R}^2$ için $y \leq_k x$ olduğundan her $a = (a_1, a_2) \in A$ için $a = (a_1, a_2) \leq_k y$ sağlanır.

(b) $\mathbb{R}^2$ sözlüksel sıralamaya göre Dedekind tam Riesz uzayı değildir. Gerçekten, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ olacak şekilde $A = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ kümesini alalım. ve $\inf A = y = (y_1, y_2)$ olduğunu kabul edelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için $(y_1, y_2) \leq_s (y_1, y_2 + \frac{1}{n}) \leq_s (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ olacak biçimde $(y_1, y_2 + \frac{1}{n}) \in \mathbb{R}^2$ seçilirse, $(y_1, y_2) \leq_s \inf_{n \in \mathbb{N}} (y_1, y_2 + \frac{1}{n}) \leq_s \inf_{n \in \mathbb{N}} (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ ve $\mathbb{R}$ Arşimedyan Riesz uzayı olduğundan $(y_1, y_2) \leq_s (y_1, y_2) \leq_s (0, 0)$ çelişkisini elde ederiz. Bu durumda $\inf A = y$ olacak şekilde $y \in A$ yoktur.

2.11. Teorem

Her Dedekind tam Riesz uzayı Arşimedyanıdır.

İspat

E Dedekind tam Riesz uzayı olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq nx \leq y$ olacak biçimde $x, y \in E$ olsun. Her n için $0 \leq x \leq \frac{1}{n}y$ olduğundan E Riesz uzayının tamlığından dolayı $\frac{1}{n}y \downarrow z \geq x$ olacak biçimde $z \in E$ vardır. Böylece $\frac{2}{n}y = 2\frac{1}{n}y \downarrow 2z$ olur. Diğer taraftan $\frac{2}{n}y \downarrow z$ olduğundan $2z = z$ elde edilir. Yani $z = 0$ olur. Sonuç olarak $0 \leq x \leq z = 0$ olduğundan $x = 0$ bulunur.

2.12. Tanım

E Riesz uzayı, (b_n) E içinde bir dizi ve $b \in E$ olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \downarrow 0$ ve $|b_n - b| \leq a_n$ olacak şekilde E içinde bir (a_n) dizisi varsa (b_n) dizisi b elemanına sıra yakınsak (o-yakınsak) denir ve bu yakınsama $b_n \xrightarrow{o} b$ biçiminde yazılır.

2.13. Teorem

E Arşimedyan Riesz uzayı, (x_n) ve (y_n) E içinde iki dizi ve $x, y \in E$ olmak üzere

$$(1) \ x_n \xrightarrow{o} x \text{ ve } x_n \xrightarrow{o} y \text{ ise } x = y,$$

$$(2) \ x_n \downarrow x \text{ (veya } x_n \uparrow x) \text{ ise } x_n \xrightarrow{o} x,$$

$$(3) \ x_n \uparrow \text{ (veya } x_n \downarrow) \text{ ve } x_n \xrightarrow{o} x \text{ ise } x_n \uparrow x \text{ (veya } x_n \downarrow x)$$

sağlanır. Ek olarak, $a, b \in \mathbb{R}$, $x_n \xrightarrow{o} x$ ve $y_n \xrightarrow{o} y$ ise

$$(4) \ ax_n + by_n \xrightarrow{o} ax + by,$$

$$(5) \ x_n \vee y_n \xrightarrow{o} x \vee y,$$

$$(6) \ x_n \wedge y_n \xrightarrow{o} x \wedge y,$$

$$(7) \ (x_n)^+ \xrightarrow{o} x^+,$$

$$(8) \ (x_n)^- \xrightarrow{o} x^-,$$

$$(9) \ |x_n| \xrightarrow{o} |x|$$

önergeleri sağlanır.

2.14. Tanım

E ve F Riesz uzayları, $f : E \longrightarrow F$ bir fonksiyon olsun. Eğer E içinde $b_n \xrightarrow{o} b$ iken F içinde $f(b_n) \xrightarrow{o} f(b)$ oluyorsa f fonksiyonuna sıra süreklidir (o-süreklidir) denir.

2.15. Tanım

E Arşimedyan Riesz uzayı ve (x_n) E içinde bir dizi olsun. Her $n, p \in \mathbb{N}$ için $|x_{n+p} - x_n| \leq y_n$ ve $y_n \downarrow 0$ olacak biçimde E içinde bir (y_n) dizisi varsa (x_n) dizisine sıra Cauchy dizisi denir.

Pozitif elemanları pozitif elemanlara taşıyan sıralı vektör uzay arasındaki bir lineer operatör literatürde pozitif operatör olarak bilinir. Daha verimli ve kullanışlı sonuçlar elde etmek için pozitif operatörün tanım ve değer kümeleri Riesz uzay alınacaktır.

2.16. Tanım

E ve F Riesz uzayları ve $T : E \longrightarrow F$ lineer dönüşüm olsun. Her $x \in E^+$ için $T(x) \in F^+$ oluyorsa T dönüşümüne pozitif operatör denir.

2.17. Tanım

E ve F Riesz uzayları ve $T : E \longrightarrow F$ lineer dönüşüm olsun. Her $x, y \in E$ için E içinde $x \leq y$ olduğunda F içinde $T(x) \leq T(y)$ oluyorsa T fonksiyonuna sıra koruyan denir.

2.18. Teorem

E ve F Riesz uzayları ve $T : E \longrightarrow F$ lineer dönüşüm olsun. T dönüşümünün pozitif olması için gerek ve yeterli koşul T dönüşümünün sıra koruyan olmasıdır.

3. VEKTÖR METRİK UZAYLAR VE SÜREKLİLİK

Bu bölümde metrik dönüşümü tanımında reel sayılar yerine Riesz uzayı ve böylece reel sayılar kümesindeki alışılmış sıralama yerine Riesz uzayındaki kısmi sıralama karşılık getirilerek oluşturulan vektör metrik kavramını inceleyeceğiz. Daha sonra vektör metrik uzaylar üzerinde tanımlı fonksiyonların vektörel süreklilik ve vektörel düzgün süreklilik kavramları ele alınacaktır. Bu bölüm [2] ve [3] çalışmaları temel alınarak oluşturulmuştur.

3.1. Tanım

$X \neq \emptyset$ bir küme ve E bir Riesz uzayı olsun. $d : X \times X \longrightarrow E$ fonksiyonu

$$(a) \text{ Her } x, y \in X \text{ için } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$(b) \text{ Her } x, y, z \in X \text{ için } d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$$

özelliklerini sağlarsa d fonksiyonuna vektör metrik ya da E -metrik denir. (X, d, E) üçlüsüne de vektör metrik uzay ya da E -metrik uzay denir.

3.2. Teorem

E -metrik uzayında her $x, y, z, w \in E$ için

$$(1) \quad 0 \leq d(x, y),$$

$$(2) \quad d(x, y) = d(y, x),$$

$$(3) \quad |d(x, z) - d(y, z)| \leq |d(x, y)| \text{ ve}$$

$$(4) \quad |d(x, z) - d(y, w)| \leq d(x, y) + d(z, w)$$

özellikleri sağlanır.

Örnek

E Riesz uzayı, $d(x, y) = |x - y|$ ile tanımlanan $d : E \times E \rightarrow E$ dönüşümle vektör metrik uzaydır.

Örnek

İkinci bölümde verilen $\leq_k$ koordinat sıralaması ve $\leq_s$ sözlüksel sıralamasına göre $\mathbb{R}^2$ Riesz uzayıdır. Herhangi iki α ve β pozitif reel sayıları için

$$d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (\alpha |x_1 - y_1|, \beta |x_2 - y_2|)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon $\mathbb{R}^2$ üstünde vektör metrik ($\mathbb{R}^2$ -metrik) olur.

Örnek

$\alpha, \beta \geq 0$ ve $\alpha + \beta > 0$ olmak üzere

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, d(x, y) = (\alpha |x - y|, \beta |x - y|)$$

olsun. Bu durumda d koordinat ve sözlüksel sıralamalarıyla vektör metriktir.

3.3. Tanım

(X, d, E) bir vektör metrik uzay olmak üzere, (x_n) X içinde bir dizi ve $x \in X$ olsun.

(a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \downarrow 0$ ve $d(x_n, x) \leq a_n$ olacak biçimde E içinde bir (a_n) dizisi varsa (x_n) x elemanına E -yakınsak veya vektörel yakınsak denir ve $x_n \xrightarrow{d, E} x$ ile gösterilir.

(b) Her $n, p \in \mathbb{N}$ için $a_n \downarrow 0$ ve $d(x_n, x_{n+p}) \leq a_n$ olacak biçimde E içinde bir (a_n) dizisi varsa (x_n) dizisine E -Cauchy dizisi denir.

(c) Her bir E -Cauchy dizisi E -yakınsak olan vektör metrik uzaya E -tam denir.

3.4. Teorem

(X, d, E) bir vektör metrik uzay olmak üzere, (x_n) X içinde bir dizi ve $x_n \xrightarrow{d,E} x$ ise

(1) Dizinin yakınsadığı x elemanı tektir,

(2) (x_n) dizisinin her alt dizisi x elemanın E -yakınsaktır,

ve bunlara ek olarak X içinde bir (y_n) dizisi $y_n \xrightarrow{d,E} y$ ise

(3) Her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, y_n) \xrightarrow{o} d(x, y)$ olur.

İspat

(1) $(x_n) \xrightarrow{d,E} x$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \downarrow 0$ ve $d(x_n, x) \leq a_n$ olacak biçimde E içinde bir (a_n) dizisi vardır. $x \neq y$ olmak üzere $x_n \xrightarrow{d,E} y$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n \downarrow 0$ ve $d(x_n, y) \leq b_n$ olacak biçimde E içinde bir b_n dizisi vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $(a_n + b_n) \downarrow 0$ ve $d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(y, x_n) \leq (a_n + b_n)$ olduğundan $x = y$ elde edilir.

(2) $(x_n) \xrightarrow{d,E} x$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \downarrow 0$ ve $d(x_n, x) \leq a_n$ olacak biçimde E içinde bir (a_n) dizisi vardır. Dolayısıyla herhangi bir x_{n_k} dizisi ve her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_{n_k}, x) \leq a_{n_k}$ ve $a_{n_k} \downarrow 0$ sağlanır. Bu ise $x_{n_k} \xrightarrow{d,E} x$ olduğunu gösterir.

(3) $x_n \xrightarrow{d,E} x$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \downarrow 0$ ve $d(x_n, x) \leq a_n$ olacak biçimde E içinde bir (a_n) dizisi vardır. $y_n \xrightarrow{d,E} y$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n \downarrow 0$ ve $d(y_n, y) \leq b_n$ olacak biçimde E içinde bir (b_n) dizisi vardır. $|d(x, z) - d(y, w)| \leq d(x, y) + d(z, w)$ eşitsizliğinden her $n \in \mathbb{N}$ için $(a_n + b_n) \downarrow 0$ ve $|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) \leq (a_n + b_n)$ elde edilir. Buda her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, y_n) \xrightarrow{o} d(x, y)$ olduğunu gösterir.

3.5. Tanım

(X, d, E) bir vektör metrik uzay olmak üzere, $A \subset X$ ve $A \neq \emptyset$ olsun.

(a) $\sup \{d(x, y) : x, y \in A\}$ değeri varsa bu supremum değerine A kümesinin E -çapı denir.

(b) Her $x, y \in A$ için $d(x, y) \leq a$ olacak biçimde E Riesz uzayında bir a elemanı varsa A kümesine E -sınırlı küme denir.

3.6. Teorem

(X, d, E) bir vektör metrik uzay olmak üzere

(1) Her E -yakınsak dizi E -Cauchy dizisidir.

(2) Her E -Cauchy dizisi E -sınırlıdır.

(3) (x_n) bir E -Cauchy dizisi ve bu dizinin alt dizisi (x_{n_k}) olmak üzere eğer $(x_{n_k}) \xrightarrow{d, E} x$ ise $(x_n) \xrightarrow{d, E} x$ olur.

(4) (x_n) ve (y_n) E -Cauchy dizileri ise $(d(x_n, y_n))$ bir sıra Cauchy dizisidir.

İspat

(1) (x_n) E -yakınsak dizi olsun. Bu durumda her $n, \in \mathbb{N}$ için $a_n \downarrow 0$ ve $d(x_n, x) \leq a_n$ olacak biçimde (a_n) dizisi vardır. Her $n, p \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x) + d(x_{n+p}, x) \leq 2a_n \downarrow 0$ olduğundan (x_n) bir E -Cauchy dizisidir.

(2) (x_n) bir E -Cauchy dizisi olsun. Bu durumda her $n, p \in \mathbb{N}$ için $a_n \downarrow 0$ ve $d(x_n, x_{n+p}) \leq a_n$ olacak biçimde (a_n) dizisi vardır. Her n için (a_n) azalan bir dizi olduğundan $d(x_n, x_{n+p}) \leq a_1$ olacak biçimde E içinde $a_1 > 0$ elemanı olduğundan (x_n) E -sınırlı dizi olur.

(3) (x_n) bir E -Cauchy dizisi olsun. Bu durumda her $n, p \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x_{n+p}) \leq a_n \downarrow 0$ olacak biçimde E içinde bir (a_n) dizisi vardır. (x_n) dizisinin alt dizisini (x_{n_k}) ile gösterelim ve bu dizi x elemanına E -yakınsak olsun. Burada n_k doğal sayıların

artan bir dizisi olduğundan her $n, p \in \mathbb{N}$ için $n_k = n + p$ olmak üzere $d(x_{n_k}, x) = d(x_{n+p}, x) \leq b_n \downarrow 0$ olacak biçimde E içinde bir (b_n) dizisi vardır. Her $n, p \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n+p}) + d(x_{n+p}, x) \leq (a_n + b_n) \downarrow 0$ olacağından $(x_n) \xrightarrow{d, E} x$ elde edilir.

(4) (x_n) bir E -Cauchy dizisi ise her $n, p \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x_{n+p}) \leq a_n \downarrow 0$ olacak biçimde E içinde bir (a_n) dizisi vardır. (y_n) bir E -Cauchy dizisi ise her $n, p \in \mathbb{N}$ için $d(y_n, y_{n+p}) \leq b_n \downarrow 0$ olacak biçimde E içinde bir (b_n) dizisi vardır. Her $n, p \in \mathbb{N}$ için $|d(x_n, y_n) - d(x_{n+p}, y_{n+p})| \leq d(x_n, x_{n+p}) + d(y_n, y_{n+p}) \leq (a_n + b_n) \downarrow 0$ elde edilir. Buda $(d(x_n, y_n))$ dizisinin E içinde sıra Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

3.7. Tanım

(a) (X, d, E) ve (Y, ρ, F) iki vektör metrik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Her $b \in F, b > 0$ için $y \in X$ ve $d(x, y) < a$ iken $\rho(f(x), f(y)) < b$ olacak şekilde $a \in E$ varsa f fonksiyonuna $x \in X$ noktasında topolojik sürekli fonksiyon denir.

(b) (X, d, E) ve (Y, ρ, F) iki vektör metrik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ fonksiyon olsun. X içinde $x_n \xrightarrow{d, E} x$ iken Y içinde $f(x_n) \xrightarrow{\rho, F} f(x)$ oluyorsa f fonksiyonuna vektörel sürekli (veya (E, F) -sürekli) fonksiyon denir.

3.8. Teorem

(X, d, E) ve (Y, ρ, F) vektör metrik uzaylar ve F Arşimedyan Riesz uzayı olsun. $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu topolojik sürekli ise vektörel sürekli.

İspat

(x_n) X içinde E -yakınsak bir dizi olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \downarrow 0$ ve $d(x_n, x) \leq a_n$ olacak biçimde (a_n) dizisi vardır. f fonksiyonunun topolojik sürekliliğinden her $b \in F, b > 0$ için $y \in X$ ve $d(x, y) < a$ iken $\rho(f(x), f(y)) < b$ olacak şekilde E içinde bir a elemanı vardır. Yani her $n \in \mathbb{N}$ ve $\frac{1}{n}b \in F^+$ için $d(x_n, x) < b_n$ iken $\rho(f(x_n), f(x)) \leq \frac{1}{n}b$ olacak şekilde E içinde bir b_n dizisi vardır. Burada $b_n = b_n((1/n)b; x_n)$ biçiminde seçilmiştir. Böylece E Riesz uzayında her $n \in \mathbb{N}$ için $c_n = a_n \vee b_n$ olacak şekilde E içinde

(c_n) dizisi vardır ve her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x) \leq a_n < c_n$ olduğundan $\rho(f(x_n), f(x)) \leq \frac{1}{n}b$ sağlanır. F Arşimedyan olduğundan $(\frac{1}{n})b \downarrow 0$ olur. Dolayısıyla f fonksiyonu vektörel sürekli fonksiyondur.

Sonuç

(X, d, E) ve (Y, ρ, F) vektör metrik uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonu için aşağıdakiler sağlanır.

(1) f fonksiyonu vektörel sürekli ise $d(x_n, x) \downarrow 0$ iken $\rho(f(x_n), f(x)) \xrightarrow{o} 0$ olur.

(2) $d(x_n, x) \downarrow 0$ iken $\rho(f(x_n), f(x)) \xrightarrow{o} 0$ oluyorsa f fonksiyonu vektörel sürekli dir.

(3) f fonksiyonunun vektörel sürekli olması için gerek ve yeter şart $d(x_n, x) \downarrow 0$ iken $\rho(f(x_n), f(x)) \xrightarrow{o} 0$ olmasıdır.

İspat

(1) $d(x_n, x) \downarrow 0$ ise $x_n \xrightarrow{d,E} x$ olur. f fonksiyonunun vektörel sürekliliğinden $x_n \xrightarrow{d,E} x$ iken $f(x_n) \xrightarrow{p,F} f(x)$ olur. Yani her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n \downarrow 0$ ve $\rho(f(x_n), f(x)) \leq b_n$ olacak şekilde F içinde bir (b_n) dizisi vardır. Böylece $\rho(f(x_n), f(x)) \xrightarrow{o} 0$ olur.

(2) $d(x_n, x) \downarrow 0$ iken $\rho(f(x_n), f(x)) \xrightarrow{o} 0$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \xrightarrow{d,E} x$ iken $f(x_n) \xrightarrow{p,F} f(x)$ olur. Bu, f fonksiyonunun vektörel sürekli olduğunu gösterir.

(3) İspat (1) ve (2)'den açıktır.

3.9. Tanım

X boştan farklı bir küme ve (Y, ρ, F) vektör metrik uzay olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : X \rightarrow Y$ biçiminde tanımlı fonksiyonların oluşturduğu (f_n) fonksiyon dizisini düşünelim. $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olmak üzere, her bir $x \in X$ için $\rho(f_n(x), f(x)) \leq a_n$ ve $a_n \downarrow 0$ olacak biçimde F içinde bir a_n dizisi varsa (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna düzgün

F -yakınsaktır denir.

3.10. Teorem

(X, d, E) ve (Y, ρ, F) vektör metrik uzaylar ve bu uzaylar arasında vektörel sürekli fonksiyonların dizisi (f_n) bir f fonksiyonuna düzgün F -yakınsak ise yakınsadığı f fonksiyonu vektörel süreklidir.

İspat

X içinde bir (x_n) dizisi için $x_n \xrightarrow{d,E} x$ olsun. (f_n) dizisinin f fonksiyonuna düzgün F -yakınsaklığından $a_n \downarrow 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\rho(f_n(x), f(x)) \leq a_n$ olacak biçimde F içinde (a_n) dizisi vardır. Diğer taraftan f_k fonksiyonlarının vektörel sürekliliğinden her bir $k \in \mathbb{N}$ ve $b_n \downarrow 0$ için $\rho(f_k(x_n), f_k(x)) \leq b_n$ olacak biçimde F içinde bir (b_n) dizisi vardır. Burada $k = n$ olarak alınırsa

$$\rho(f(x_n), f(x)) \leq \rho(f(x_n), f_n(x_n)) + \rho(f(x), f_n(x)) + \rho(f_n(x_n) - f_n(x)) \leq 2a_n + b_n$$

elde edilir. Böylece $f(x_n) \xrightarrow{\rho,F} f(x)$ sağlanır. Dolayısıyla f fonksiyonu vektörel süreklidir.

3.11. Tanım

(a) (X, d, E) ve (Y, ρ, F) vektör metrik uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Her $b \in F, b > 0$ için $x, y \in X$ ve $d(x, y) < a$ iken $\rho(f(x), f(y)) < b$ olacak biçimde bir $a \in E$ varsa f fonksiyonuna X üstünde topolojik düzgün sürekli fonksiyon denir.

(b) (X, d, E) ve (Y, ρ, F) vektör metrik uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. X içinde herhangi iki (x_n) ve (y_n) dizisi için E içinde $d(x_n, y_n) \xrightarrow{o} 0$ iken F içinde $\rho(f(x_n), f(y_n)) \xrightarrow{o} 0$ oluyorsa f fonksiyonuna X üstünde vektörel düzgün sürekli fonksiyon denir.

3.12. Teorem

(X, d, E) ve (Y, ρ, F) vektör metrik uzaylar ve F Arşimedian Riesz uzayı olsun. $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu topolojik düzgün sürekli ise vektörel düzgün süreklidir.

İspat

X içinde herhangi iki (x_n) ve (y_n) dizisi için $d(x_n, y_n) \xrightarrow{o} 0$ olsun. Bu durumda $a_n \downarrow 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, y_n) \leq a_n$ olacak biçimde E içinde (a_n) dizisi vardır. f fonksiyonunun topolojik düzgün sürekliliğinden her $b \in F, b > 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, y_n) < b_n$ iken $\rho(f(x_n), f(y_n)) < \left(\frac{1}{n}\right)b$ olacak biçimde E içinde (b_n) dizisi vardır. Böylece E Riesz uzayında her $n \in \mathbb{N}$ için $c_n = a_n \vee b_n$ olacak şekilde (c_n) dizisi vardır ve her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, y_n) \leq a_n < c_n$ olduğundan $\rho(f(x_n), f(y_n)) < \left(\frac{1}{n}\right)b$ sağlanır. F Arşimedian olduğundan $\left(\frac{1}{n}\right)b \downarrow 0$ olur. Dolayısıyla $\rho(f(x_n), f(y_n)) \xrightarrow{o} 0$ sağlanır.

Sonuç

(X, d, E) ve (Y, ρ, F) vektör metrik uzaylar, (x_n) ve (y_n) X içinde herhangi iki dizi olmak üzere $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu için aşağıdakiler sağlanır.

(1) f fonksiyonu vektörel düzgün sürekli ise $d(x_n, y_n) \downarrow 0$ iken $\rho(f(x_n), f(y_n)) \xrightarrow{o} 0$ olur.

(2) $d(x_n, y_n) \downarrow 0$ iken $\rho(f(x_n), f(y_n)) \xrightarrow{o} 0$ oluyorsa f fonksiyonu vektörel düzgün süreklidir.

(3) f fonksiyonunun vektörel düzgün sürekli olması için gerek ve yeter şart $d(x_n, y_n) \downarrow 0$ iken $\rho(f(x_n), f(y_n)) \xrightarrow{o} 0$ olmasıdır.

İspat

(1) $d(x_n, y_n) \downarrow 0$ ise $d(x_n, y_n) \xrightarrow{o} 0$ olur. f fonksiyonunun vektörel düzgün sürekliliğinden $a_n \downarrow 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\rho(f(x_n), f(y_n)) \leq a_n$ olacak biçimde F içinde

bir (a_n) dizisi vardır. Böylece $\rho(f(x_n), f(y_n)) \xrightarrow{o} 0$ sağlanır.

(2) $d(x_n, y_n) \downarrow 0$ iken $\rho(f(x_n), f(y_n)) \xrightarrow{o} 0$ olsun. Bu durumda herhangi iki (x_n) ve (y_n) dizisi için E içinde $d(x_n, y_n) \xrightarrow{o} 0$ iken F içinde $\rho(f(x_n), f(y_n)) \xrightarrow{o} 0$ olur. Böylece f fonksiyonu vektörel düzgün süreklidir.

(3) İspat (1) ve (2)'den açıktır.

Örnek

(X, d, E) vektör metrik uzay olsun. $d(x_n, y_n) \xrightarrow{o} 0$ ve $d(u_n, v_n) \xrightarrow{o} 0$ ise $|d(x_n, u_n) - d(y_n, v_n)| \leq d(x_n, y_n) + d(u_n, v_n)$ eşitsizliği yardımıyla E içinde $|d(x_n, u_n) - d(y_n, v_n)| \xrightarrow{o} 0$ sağlanır; yani, $d : X^2 \rightarrow E$ vektör metriği vektörel düzgün süreklidir. Burada $\tilde{d}$, X^2 üstünde her $x, y, u, v \in X$ için

$$\tilde{d}((x, y), (u, v)) = d(x, u) + d(y, v)$$

ile tanımlanan E -değerli vektör metrik ve $|\cdot|$ E üstündeki mutlak değer metriğidir.

4. VEKTÖREL SÜREKLİ FONKSİYON UZAYLARI VE EŞSÜREKLİLİK

Bu bölümde vektörel sınırlı fonksiyonlardan oluşan $C_v^0(X, F)$ kümesinin alt kümeleri için vektörel eşsüreklilik ve topolojik eşsüreklilik tanımları verilecek ve daha sonra topolojik eşsüreklilik ve vektörel eşsüreklilik arasındaki ilişkiyi veren teoremler ve vektörel düzgün süreklilik ve vektörel eşsüreklilik tanımlarını destekleyen sonuçlar verilecektir. Son olarak herhangi bir eşsüreklilik kümesinin içindeki her bir fonksiyonun vektörel düzgün sürekli olduğu gösterilecektir.

4.1. Tanım

(X, d, E) vektör metrik uzayının bir alt kümesi A olsun. Her $x, y \in A$ için $d(x, y) \leq a$ olacak biçimde E Riesz uzayında bir $0 \leq a$ elemanı varsa A kümesine E -sınırlı küme denir.

4.2. Tanım

(X, d, E) ve (Y, ρ, F) iki vektör metrik uzay olmak üzere $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu X in E -sınırlı alt kümelerini Y nin F -sınırlı alt kümelerine dönüştürüyor ise f fonksiyonuna vektörel sınırlı fonksiyon denir.

4.3. Teorem

(X, d, E) ve (Y, ρ, F) iki vektör metrik uzay olmak üzere $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ için $\rho(f(x), f(y)) \leq T(d(x, y))$ olacak biçimde bir $T : E \rightarrow F$ pozitif operatörü varsa $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu vektörel sınırlıdır.

İspat

(X, d, E) ve (Y, ρ, F) iki vektör metrik uzay olmak üzere $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve bir $T : E \rightarrow F$ pozitif operatörü için $\rho(f(x), f(y)) \leq T(d(x, y))$ olsun. Herhangi bir E -sınırlı A kümesi için $x, y \in A$ iken $d(x, y) \leq a$ olacak biçimde E Riesz uzayında bir

$0 \leq a$ elemanı vardır. $d(x, y) \leq a$ ise T pozitif operatör olduğundan sıra koruyandır, bu durumda $T(d(x, y)) \leq T(a)$ olur. $\rho(f(x), f(y)) \leq T(d(x, y)) \leq T(a)$ olduğundan f vektörel sınırlı fonksiyondur.

(X, d, E) vektör metrik uzay ve F Riesz uzayı olmak üzere

$$C_v(X, F) = \{f : (X, d, E) \rightarrow F \mid f \text{ vektörel sürekli}\} \text{ ve}$$

$$C_t(X, F) = \{f : (X, d, E) \rightarrow F \mid f \text{ topolojik sürekli}\}$$

kümelerini tanımlayalım. F Arşimedyen olduğunda $C_t(X, F) \subseteq C_v(X, F)$ olur.

4.4. Teorem

$C_t(X, F)$ ve $C_v(X, F)$ fonksiyonlar arasındaki doğal sıralamaya göre Riesz uzayıdır.

İspat

$C_v(X, F) = \{f \mid f : (X, d, E) \rightarrow F \text{ vektörel sürekli fonksiyon}\}$ Her $f, g \in C_v(X, F)$ için $f \leq g \iff \forall x \in X$ için $f(x) \leq g(x)$ sıralama bağıntısı ile $(C_v(X, F), \leq)$ sıralı kümedir. Burada F üzerinde $\rho(x, y) = |x - y|$ ile tanımlı $\rho : F \times F \rightarrow F$ vektör metriği düşünülecektir.

(a) Her $f, g \in C_v(X, F)$ için,

(i) $f + g \in C_v(X, F)$ olduğunu gösterelim. $f \in C_v(X, F)$ ise $x_n \xrightarrow{d, E} x$ iken $f(x_n) \xrightarrow{\rho, F} f(x)$ ve $g \in C_v(X, F)$ ise $x_n \xrightarrow{d, E} x$ iken $g(x_n) \xrightarrow{\rho, F} g(x)$ olur. $f(x_n) \xrightarrow{\rho, F} f(x)$ ve $g(x_n) \xrightarrow{\rho, F} g(x)$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $|f(x_n) - f(x)| \leq a_n \downarrow 0$ ve $|g(x_n) - g(x)| \leq b_n \downarrow 0$ olacak biçimde F içinde (a_n) ve (b_n) dizileri vardır.

$$\begin{aligned} |(f + g)(x_n) - (f + g)(x)| &= |f(x_n) - f(x) + g(x_n) - g(x)| \\ &\leq |f(x_n) - f(x)| + |g(x_n) - g(x)| \leq (a_n + b_n) \downarrow 0 \end{aligned}$$

olur. Bu durumda $x_n \xrightarrow{d, E} x$ iken $(f + g)(x_n) \xrightarrow{\rho, F} (f + g)(x)$ sağlanır. Böylece $f + g \in$

$C_v(X, F)$ olur.

(ii) Her $\lambda > 0$ için $\lambda f \in C_v(X, F)$ olduğunu gösterelim. $f \in C_v(X, F)$ ise $x_n \xrightarrow{d, E} x$ iken $f(x_n) \xrightarrow{\rho, F} f(x)$ olur. $f(x_n) \xrightarrow{\rho, F} f(x)$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $|f(x_n) - f(x)| \leq a_n \downarrow 0$ olacak biçimde F içinde (a_n) dizisi vardır.

$$|(\lambda f)(x_n) - (\lambda f)(x)| = |\lambda f(x_n) - \lambda f(x)| = |\lambda| |f(x_n) - f(x)| \leq |\lambda| a_n \downarrow 0$$

olacak biçimde E içinde $(|\lambda| a_n)$ dizisi vardır. Böylece $\lambda f \in C_v(X, F)$ olur. Dolayısıyla $(C_v(X, F), \leq)$ alt vektör uzayıdır.

(iii) $f \vee g \in C_v(X, F)$ olduğunu gösterelim. $f \in C_v(X, F)$ ise $x_n \xrightarrow{d, E} x$ iken $f(x_n) \xrightarrow{\rho, F} f(x)$ ve $g \in C_v(X, F)$ ise $x_n \xrightarrow{d, E} x$ iken $g(x_n) \xrightarrow{\rho, F} g(x)$ olur. $f(x_n) \xrightarrow{\rho, F} f(x)$ ve $g(x_n) \xrightarrow{\rho, F} g(x)$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $|f(x_n) - f(x)| \leq a_n \downarrow 0$ ve $|g(x_n) - g(x)| \leq b_n \downarrow 0$ olacak biçimde F içinde (a_n) ve (b_n) dizileri vardır. Buda $f(x_n) \xrightarrow{o} f(x)$ ve $g(x_n) \xrightarrow{o} g(x)$ olması demektir. Dolayısıyla $f(x_n) \vee g(x_n) \xrightarrow{o} f(x) \vee g(x)$ olur. Böylece $f \vee g \in C_v(X, F)$ olur. $C_v(X, F)$ Riesz uzayıdır.

(b) Her $f, g \in C_t(X, F)$ için,

(i) $f + g \in C_t(X, F)$ olduğunu gösterelim. $f \in C_t(X, F)$ ise her $\frac{b}{2} \in F^+$ için $y \in X$ ve $d(x, y) < a_1$ iken $|f(x) - f(y)| < \frac{b}{2}$ olacak biçimde $a_1 \in E$ vardır ve $g \in C_t(X, F)$ ise her $\frac{b}{2} \in F^+$ için $y \in X$ ve $d(x, y) < a_2$ iken $|g(x) - g(y)| < \frac{b}{2}$ olacak biçimde $a_2 \in E$ vardır. $a = a_1 \vee a_2$ olsun. $d(x, y) < a$ olduğunda

$$\begin{aligned} |(f + g)(x) - (f + g)(y)| &= |f(x) - f(y) + g(x) - g(y)| \\ &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq b \end{aligned}$$

olacak biçimde bir $a \in E$ vardır. Böylece $f + g \in C_t(X, F)$ olur.

(ii) Her $\lambda > 0$ için $\lambda f \in C_t(X, F)$ olduğunu gösterelim. $f \in C_t(X, F)$ ise her $\frac{b}{|\lambda|} \in F^+$

için $y \in X$ ve $d(x, y) < a$ iken $|f(x) - f(y)| < \frac{b}{|\lambda|}$ olacak biçimde $a \in E$ vardır.

$$|(\lambda f)(x) - (\lambda f)(y)| = |\lambda f(x) - \lambda f(y)| = |\lambda| |f(x) - f(y)| \leq |\lambda| \frac{b}{|\lambda|} = b$$

olacak biçimde bir $a \in E$ vardır. Böylece $\lambda f \in C_t(X, F)$ olur. Dolayısıyla $(C_t(X, F), \leq)$ alt vektör uzayıdır.

(iii) $f \vee g \in C_t(X, F)$ olduğunu gösterelim. $f \in C_t(X, F)$ ise her $\frac{b}{2} \in F^+$ için $y \in X$ ve $d(x, y) < a_1$ iken $|f(x) - f(y)| < \frac{b}{2}$ olacak biçimde $a_1 \in E$ vardır ve $g \in C_t(X, F)$ ise her $\frac{b}{2} \in F^+$ için $y \in X$ ve $d(x, y) < a_2$ iken $|f(x) - f(y)| < \frac{b}{2}$ olacak biçimde $a_2 \in E$ vardır. $a = a_1 \vee a_2$ olsun. $d(x, y) < a$ olduğunda Birkhoff eşitsizliğinden

$$0 \leq |(f \vee g)(x) - (f \vee g)(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq b$$

olacak biçimde bir $a \in E$ vardır. Dolayısıyla $f \vee g \in C_t(X, F)$ olur. Böylece $C_t(X, F)$ Riesz uzayıdır.

Her $x, y \in X$ için $|f(x) - f(y)| \leq T(d(x, y))$ olacak biçimde $T : X \rightarrow Y$ pozitif operatörünün var olduğu f fonksiyonlarının kümesi $C_v^0(X, F)$ şeklinde gösterelim. Birkhoff eşitsizliğinden $C_v^0(X, F) \subseteq C_v(X, F)$ Riesz alt uzayıdır. Üstelik her bir $f \in C_v^0(X, F)$ fonksiyonu vektörel sınırlıdır.

Sonuç

(X, d, E) vektör metrik uzay ve F Dedekind tam Riesz uzayı olmak üzere,

$$d_\infty : C_v^0(X, F) \times C_v^0(X, F) \rightarrow F; d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

ile tanımlanan düzgün metriği ile $C_v^0(X, F)$ bir vektör metrik uzayıdır.

4.5. Tanım

(a) $A \subseteq C_v^0(X, F)$ olsun. Her $b \in F, b > 0$ için $x, y \in X$ ve $d(x, y) < a$ iken her

$f \in A$ için $|f(x) - f(y)| < b$ olacak biçimde bir $a \in E$ varsa A kümesine X üzerinde topolojik eşsürekli küme denir.

(b) $A \subseteq C_v^0(X, F)$ olsun. X içinde herhangi iki (x_n) ve (y_n) dizisi için E içinde $d(x_n, y_n) \xrightarrow{o} 0$ iken her $f \in A$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $|f(x_n) - f(y_n)| \leq a_n$ ve $(a_n) \downarrow 0$ olacak biçimde F içinde (a_n) dizisi varsa A kümesine X üzerinde vektörel eşsürekli küme denir.

4.6. Teorem

$A \subseteq C_v^0(X, F)$ ve F Arşimedyan olsun. A kümesi topolojik eşsürekli ise A kümesi vektörel eşsüreklidir.

İspat

X içinde herhangi iki (x_n) ve (y_n) dizisi için E içinde $d(x_n, y_n) \xrightarrow{o} 0$ olsun. Bu durumda $a_n \downarrow 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, y_n) \leq a_n$ olacak biçimde E içinde bir (a_n) dizisi vardır. A kümesinin topolojik eşsürekliliğinden bir $b \in F, b > 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, y_n) < b_n$ iken her $f \in A$ için $|f(x_n) - f(y_n)| < (\frac{1}{n})b$ olacak biçimde E içinde (b_n) dizi vardı. Böylece E Riesz uzayında $c_n = a_n \vee b_n$ olacak şekilde (c_n) dizisi vardır ve her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, y_n) \leq a_n < c_n$ olduğundan her $f \in A$ ve her $n \in \mathbb{N}$ iken $|f(x_n) - f(y_n)| < (\frac{1}{n})b$ sağlanır. F Arşimedyan Riesz uzayı olduğundan $(\frac{1}{n})b \downarrow 0$ olur.

Sonuç

$A \subseteq C_v^0(X, F)$ ve (x_n) ve (y_n) X içinde herhangi iki dizi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanır.

(1) A kümesi X üzerinde vektörel eşsürekli ise $d(x_n, y_n) \downarrow 0$ iken her $f \in A$ için $|f(x_n) - f(y_n)| \xrightarrow{o} 0$ olur.

(2) $d(x_n, y_n) \downarrow 0$ iken her $f \in A$ için $|f(x_n) - f(y_n)| \xrightarrow{o} 0$ oluyorsa A kümesi vektörel eşsüreklidir.

(3) A kümesine X üzerinde vektörel eşsürekli olması için gerek ve yeter şart $d(x_n, y_n) \downarrow 0$ iken her $f \in A$ için $|f(x_n) - f(y_n)| \xrightarrow{o} 0$ sağlanır olmasıdır.

İspat

(1) $d(x_n, y_n) \downarrow 0$ ise $d(x_n, y_n) \xrightarrow{o} 0$ olur. A kümesinin vektörel eşsürekliliğinden $(a_n) \downarrow 0$, her $n \in \mathbb{N}$ ve her $f \in A$ için $|f(x_n) - f(y_n)| \leq a_n$ olacak biçimde F içinde bir (a_n) dizisi vardır. Bu durumda $|f(x_n) - f(y_n)| \xrightarrow{o} 0$ sağlanır.

(2) $d(x_n, y_n) \downarrow 0$ iken her $f \in A$ için $|f(x_n) - f(y_n)| \xrightarrow{o} 0$ olsun. $(a_n) \downarrow 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, y_n) < a_n$ olacak biçimde E içinde bir (a_n) dizisi vardır. Böylece $d(x_n, y_n) \xrightarrow{o} 0$ iken $|f(x_n) - f(y_n)| \xrightarrow{o} 0$ sağlanır. Böylece A kümesi vektörel eşsürekli dir.

(3) İspat (1) ve (2)'den açıktır.

Sonuç

$A \subseteq C_v^0(X, F)$ olsun. A vektörel eşsürekli ise A içindeki her bir f fonksiyonu vektörel düzgün süreklidir.

İspat

(x_n) ve (y_n) X içinde herhangi iki dizi ve $d(x_n, y_n) \xrightarrow{o} 0$ olsun. A vektörel eşsürekli olduğundan her $f \in A$ için $|f(x_n) - f(y_n)| \leq a_n \downarrow 0$ olacak biçimde F içinde (a_n) dizisi vardır. $A \subseteq C_v^0(X, F)$ olduğundan başta verilen f için $|f(x_n) - f(y_n)| \xrightarrow{o} 0$ sağlanır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Fonksiyonel analizin önemli teoremlerinden biri, düzgün metrikle verilen $C([a, b])$ uzayının alt kümeleri için kompaktlık kriterini açıklayan Arzela-Ascoli teoremidir. Bu teorem düzgün sınırlılık ve eşsüreklilik kavramlarının tanıtılmasından sonra yapılır. Bu çalışmada Arzela-Ascoli teoreminden yola çıkarak vektörel sürekli ve vektörel sınırlı fonksiyonlardan oluşan $C_v^0(X, F)$ kümesinin alt kümeleri için vektörel eşsüreklilik ve topolojik eşsüreklilik tanımları verildi. Riesz uzayı Arşimedyan iken topolojik eşsüreklilik kümesinin vektörel eşsüreklilik olduğu ispatlandı. Ayrıca, vektörel düzgün süreklilik ve vektörel eşsüreklilik tanımlarına denk sonuçlar elde edildi. Son olarak, herhangi bir eşsüreklilik kümesinin içindeki her bir fonksiyonun vektörel düzgün sürekli olduğu gösterildi. Elde edilenlerin ışığında çalışmalara devam edilip konu geliştirilebilir.

KAYNAKLAR

1. Aliprantis, C. D., Burkinshaw, O. (2006). *Positive Operators*. Dordrecht: Springer, 1-8.
2. Çevik, C., Altun, I. (2009). Vector Metric Spaces and Some Properties. *Topological Methods in Nonlinear Analysis Journal of the Juliusz Schauder Center*, 34(2), 375-382.
3. Çevik C. (2014). On Continuity Functions Between Vector Metric Spaces, *Journal of Function Spaces*, Volume 2014, 6 p.
4. Engelking, R. (1989). *General Topology*. Berlin: Heldermann Verlag, 626 s.
5. Fréchet, M. (1906). Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 22, 1-74.
6. Kelley, J.L. (1955). *General Topology*. New York: D. Van Nostrand Company. 233-234.
7. Kramosil, I., Michalek J. (1975). Fuzzy Metric and Statistical Metric Spaces. *Kybernetika*, 11, 326-334.
8. Luxemburg, W. A. J., Zaanen, A. C. (1971). *Riesz Spaces I*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1-9.
9. Munkres, J.R. (1975). *Topology : A First Course*. New Jersey: Prentice-Hall Englewood Cliffs, 274-293.
10. F. Riesz. (1930). Sur la décomposition des opérations linéaires. *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici*, Bologna, 3, 143-148.
11. Zabreiko, P. P. (1997). K-metric and K-normed Linear Spaces. *Collectanea Mathematica*, 48, 825-859.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı : Tunga Sümeýra
 Uýruęu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 19.06.1991 Heidelberg
 Medeni hali : Bekar
 Telefon : 0 505 484 31 38
 e-mail : sumeyra.tunga@gmail.com



Eęitim

Derece	Eęitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik Böl.	Devam ediyor.
Lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik Böl.	2015
Lise	Mehmet Özöncel Anadolu Lisesi	2009

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1)Tunga, S. (2018,12-15 Eylül). Vektör Metrik Uzaylar Üzerinde Fonksiyonlar ve Eşşüreklik, Ulusal Matematik Sempozyumu, Erzincan.

Hobiler Resim, Kitap, Yüzme.



GAZİ GELECEKTİR..