

**BAZI ÖZEL TİPTE BAŞLANGIÇ DEĞER VE SINIR DEĞER  
PROBLEMLERİNİN MAPLE VE NÜMERİK YÖNTEMLER  
YARDIMIYLA SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**

**Gülcan GÜMÜŞ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HAZİRAN 2008  
ANKARA**



**BAZI ÖZEL TİPTE BAŞLANGIÇ DEĞER VE SINIR DEĞER  
PROBLEMLERİNİN MAPLE VE NÜMERİK YÖNTEMLER  
YARDIMIYLA SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**

**Gülcan GÜMÜŞ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HAZİRAN 2008  
ANKARA**

Gülcan GÜMÜŞ tarafından hazırlanan Bazı Özel Tipte Başlangıç Değer ve Sınır Değer Problemlerinin Maple ve Nümerik Yöntemler Yardımıyla Sayısal Çözümleri adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Fatma AYZAZ .....  
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. M. Naci ÖZER .....  
Matematik Anabilim Dalı, O. Ü.

Yrd. Doç. Dr. Fatma AYZAZ .....  
Matematik Anabilim Dalı, G. Ü.

Yrd. Doç. Dr. Ülkü DİNLEMEZ .....  
Matematik Anabilim Dalı, G. Ü.

27 / 06 / 2008

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nermin ERTAN .....  
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Gülcan GÜMÜŞ

**BAZI ÖZEL TİPTE BAŞLANGIÇ DEĞER VE SINIR DEĞER  
PROBLEMLERİNİN MAPLE VE NÜMERİK YÖNTEMLER YARDIMIYLA  
SAYISAL ÇÖZÜMLERİ  
(Yüksek Lisans Tezi)**

**Gülcan GÜMÜŞ**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
Haziran 2008**

**ÖZET**

Bu tezde, ikinci mertebeden lineer olmayan bazı özel tipte sınır değer ve başlangıç değer problemlerinin yaklaşık çözümleri üzerine çalışılmıştır. Sınır değer problemleri için Shooting metodu kullanılarak; ikinci mertebeden lineer olmayan adi diferensiyel denklem iki farklı başlangıç değer problemine dönüştürülmüş ve sayısal çözümler dördüncü mertebeden Runge-Kutta metodu ve Maple 11 yardımıyla elde edilmiştir. Bulunan yaklaşık çözümler bazı durumlar için analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır. Başlangıç değer problemi olarak da Van der Pol denklemi (veya osilatörü) denilen ve elektronik devrelerin salınımlarını modelleyen ikinci mertebeden non-lineer denklem ele alınmıştır. Farklı parametre değeri ve başlangıç şartlarına sahip durumlar için yine dördüncü mertebeye Runge Kutta Yöntemi ve Maple 11 yardımı ile yaklaşık çözümlere ulaşılmıştır. Sonuçlar tablolar ve grafikler yardımı ile gösterilmiştir.

**Bilim Kodu : 204.1.138**

**Anahtar Kelimeler : Shooting Metot, Dördüncü mertebeden Runge  
Kutta, Van der pol denklemi.**

**Sayfa Adedi : 64**

**Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Fatma AYZ**

**NUMERICAL SOLUTIONS VIA MAPLE AND NUMERICAL METHODS OF  
SOME PARTICULAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS AND INITIAL  
VALUE PROBLEMS**

**(M.Sc. Thesis)**

**Gülcan GÜMÜŞ**

**GAZİ UNIVERSITY**

**INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

**June 2008**

**ABSTRACT**

In this thesis, It has been studied on the numerical solutions of some particular types of second order nonlinear boundary and initial value problems. For boundary value problems, shooting method has been used to transform the second order nonlinear ordinary differential equation into two initial value problems and numerical solutions have been obtained by the fourth order Runge-Kutta method with using the package programme Maple 11. For some cases, the approximate solutions results have been compared with analytical solutions. As an initial value problem, Van der Pol equation or ordinary differential called Van der Pol oscillator, which is a second order nonlinear equation and models the oscillations in an electronic circuit, have been considered. For different parameters and initial conditions, approximate solutions have been obtained again by the fourth order Runge-Kutta method and via Maple 11. The results have been illustrated by the help of tables and graphics.

**Science Code: 204.1.138**

**Key Words : Shooting Method, fourth order Runge Kutta, Van der pol  
Equation.**

**Page Number: 64**

**Adviser : Yrd. Doç. Dr. Fatma AYZAZ**

## TEŞEKKÜR

Bu alıőmayı hazırlarken benden bilgi birikimini esirgemeyen, kaynaklarla destekleyen ve değerli zamanlarını bana ayıran tez danıőmanım Yrd. Doç. Dr. Fatma AYZ'a sonsuz teőekkürlerimi sunarım. Ayrıca, bu çalışma süresince manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme ve çok değerli arkadaşlarım Sibel YURTSEVEN ile Öznur BAYSAL'a teőekkürü bir borç bilirim.

## İÇİNDEKİLER

	<b>Sayfa</b>
ÖZET .....	iv
ABSTRACT .....	v
TEŞEKKÜR .....	vi
İÇİNDEKİLER .....	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ .....	viii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ .....	x
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xi
1. GİRİŞ.....	1
2.SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN SHOOTİNG METODU VE RUNGE KUTTA ALGORİTMASI.....	4
2.1. Sınır Değer Problemleri İçin Varlık ve Teklik Teoremi.....	4
2.2. Lineer Shooting Metodu .....	9
2.3. Lineer Olmayan Shooting Metodu.....	18
3. BAZI ÖZEL PROBLEMLERE SHOOTİNG METODUNUN UYGULANMASI .....	28
4. VAN DER POL DENKLEMİ VE SAYISAL ÇÖZÜMLER .....	36
4.1 Vander Pol Denklemi .....	36
4.2 Sayısal Çözümler .....	38
5. SONUÇ .....	46
KAYNAKLAR.....	47
EKLER.....	48
EK-1 Maple 11 Uygulamaları.....	49
EK-2 Maple 11 Uygulamaları.....	57
EK-3 Maple 11 Uygulamaları.....	61
ÖZGEÇMİŞ .....	64

## ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. $y_1(x)$ , $y_2(x)$ ve Shooting metodu ile çözümleri .....	11
Şekil 2.2. Eş.2.13 'ün $u_{1,i}$ yaklaşık çözümlerinin Maple 11 ile bulunması ..	15
Şekil 2.3. Eş.2.14 'ün $v_{1,i}$ yaklaşık çözümlerinin Maple 11 ile bulunması....	16
Şekil 2.4. $t_0$ parametresi ile başlayan çözüm eğrileri .....	19
Şekil 2.5. $t_1, t_2, \dots$ değerleri için $y(b, t_k)$ yaklaşık çözümleri .....	21
Şekil 2.6. Eş.2.23'ün çözüm eğrisi.....	27
Şekil 3.1. Eş.3.4 sınır değer probleminin $y(x_i)$ çözümleri .....	30
Şekil 3.2. Eş.3.4 sınır değer probleminin $y'(x_i)$ çözümleri.....	30
Şekil 3.3. Eş.3.7 sınır değer probleminin $y(x_i)$ çözümleri .....	32
Şekil 3.4. Eş.3.7 sınır değer probleminin $y'(x_i)$ çözümleri.....	32
Şekil 3.5. Eş.3.10 sınır değer probleminin $y(x_i)$ çözümleri .....	33
Şekil 3.6. Eş.3.10 sınır değer probleminin $y'(x_i)$ çözümleri.....	33
Şekil 3.7. Eş.3.13 sınır değer probleminin $y(x_i)$ çözümleri .....	34
Şekil 3.8. Eş.3.13 sınır değer probleminin $y'(x_i)$ çözümleri.....	35
Şekil 4.1. $\mu$ 'nün farklı değerleri için çözüm grafikleri .....	38
Şekil 4.2. $\mu = 0$ için Van der pol denkleminin çözümü.....	40
Şekil 4.3. $\mu = 0$ van der pol denkleminin $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ çözümleri .....	41
Şekil 4.4. $\mu = 1$ için Van der pol denkleminin çözümü .....	41

<b>Şekil</b>	<b>Sayfa</b>
Şekil 4.5. $\mu = 1$ için Van der pol denkleminin $y_1(x)$ çözümü.....	42
Şekil 4.6. $\mu = 1$ için Van der pol denkleminin $y_2(x)$ çözümü .....	42
Şekil 4.7. $\mu = 3$ için Van der pol denkleminin çözümü.....	43
Şekil 4.8. $\mu = 3$ için Van der pol denkleminin $y_1(x)$ çözümü.....	43
Şekil 4.9. $\mu = 3$ için Van der pol denkleminin $y_2(x)$ çözümü.....	44
Şekil 4.10. $\mu = 5.6$ için Van der pol denkleminin $y_1(x)$ çözümü.....	44
Şekil 4.11. $\mu = 5.6$ için Van der pol denkleminin $y_2(x)$ çözümü .....	45

## ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 2.1. Eş.2.12 sınır değer probleminin yaklaşık ve gerçek çözümleri ve hata hesabı.....	16
Çizelge 2.2. Eş.2.20'nin analitik çözümleri $y(x)$ ve yaklaşık çözümleri $w_1$ değerlerinin karşılaştırılması ve hata .....	26
Çizelge 3.1. Eş.3.4'ün $y(x_i)$ ve $y'(x_i)$ yaklaşık çözümleri .....	29
Çizelge 3.2. Eş.3.7'nin $y(x_i)$ ve $y'(x_i)$ yaklaşık çözümleri.....	31

## SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

<b>Simgeler</b>	<b>Açıklama</b>
$A^T$	A ' nın transpozu
$y'$	y 'nin x'e göre birinci mertebeden türevi
$y''$	y 'nin x'e göre ikinci mertebeden türevi
$\approx$	Yaklaşık değer
$t_0$	Başlangıç parametresi
$u$	u vektörü

## 1.GİRİŞ

Fizikte, mühendislikte ve hatta sosyal alanlarda olaylar matematiksel olarak modellendiğinde karşımıza çıkan denklemler türevli denklemlerdir. İster adi isterse kısmi türevli olsun bu denklemler genellikle lineer olmayan yapıda ve ikinci mertebededir. Bu tür denklemlerin bazı özel durumlar dışında analitik çözümlerini bulmak oldukça zordur. Bir diferensiyel denklemin belli şartları sağlayan çözümünün varlığı bilinmesine rağmen (Teorem2.1) analitik çözümler çoğu zaman bulunamayabilir. Bu durumda yaklaşık çözüm metotları ya da sayısal metotlara başvurulması sıkça karşılaşılan bir durumdur. Hatta analitik çözümlerin var olduğu durumlarda bile yaklaşık çözüm yöntemlerine başvurulabilmektedir. Çünkü genellikle bu çözümler oldukça karmaşık yapıdadır ve olayların yorumlanmasında bazı güçlükler ortaya çıkabilir.

Diferensiyel denklemlerin nümerik çözümleri üzerine çalışmaların geçmişi oldukça eskidir ve bu konuda pek çok metot geliştirilmiş olup bu yöntemler çoğu zaman uygulamalı matematikçilerin ve disiplinler arası çalışan kişilerin yoğun ilgisini çekmekte ve sıklıkla kullanılmaktadır. Bu yöntemlerden birisi de Shooting metodu olup, ikinci mertebeden bir sınır değer problemini yine ikinci mertebeden iki farklı başlangıç değer problemine dönüştürülerek çözümünün hedeflendiği bir metottur [1].

Bu tezde, ikinci mertebeden sınır değer problemlerinin yaklaşık çözüm yöntemlerinden biri olan Shooting metodu kullanılarak Maple 11 paket programı desteğiyle bazı özel tipte denklemlerin yaklaşık çözümleri bulunmuştur. Özellikle lineer olmayan denklemler için uygulanmış olup; yaklaşık hesaplamalardan kaynaklanan hatalarda incelenmiştir.

Adi diferensiyel denklemler için sınır değer problemleri iki ya da daha fazla ayrık noktada çözüm fonksiyonunun ek koşullarını gerektiren problemlerdir. Bununla birlikte, n tane sınır şartı ile birden fazla nokta için tanımlanmış n.mertebeden bir sınır değer problemi için varlık ve teklik teorisi başlangıç değer problemlerinkinden önemli ölçüde karmaşıktır. Sadece iki nokta için sınır şartları tanımlandığında denklemlerin pek çok özel sınıfı ve sistemler için basit bir teori geliştirilebilir. Bu varlık ve teklik teorisi sınır değer problemlerinin çözümü için kullanılan nümerik metotların analizinde ve geliştirilmesinde önemli bir rol oynar[2].

Bu tezin ikinci bölümünde, n.mertebeden, bir tek noktada n tane şart ile tanımlanmış başlangıç değer probleminin tek çözümünün olabilmesi temel varlık ve teklik teoremlerine yer verilmiştir. Yine aynı bölüm içerisinde

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \quad (1.1)$$

formunda verilen, ikinci mertebeden bazı özel tipte sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümlerini elde etmek için Shooting metodu ve Runge-Kutta yöntemlerinden bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde;

$$y'' = f(x, y, y'), \quad -1 < x < 1, \quad y(-1) = y(1) = 0 \quad (1.2)$$

şeklinde verilen  $f(x, y, y')$ 'ye bağlı olarak lineerliğin bozulduğu denklemlerin çözümleri üzerinde çalışılmış olup yaklaşık sonuçlar Shooting metodu ve Maple 11 yardımıyla elde edilmiştir. Bu tür denklemlerde  $f(x, y, y')$ , sadece  $y$ 'ye bağlı kübik bir denklem olarak seçildiğinde bu tür sınır değer problemlerinin çözümlerinin şok tabakaları ürettiği kaynak [3]'de incelenmiştir.

Dördüncü bölümde; elektrik veya elektronik devrelerde oluşan salınımları modellemek için kullanılan ve ilk kez Hollandalı bir elektrik mühendisi olan Balthazar Van der Pol tarafından kendi adıyla literatüre geçen Van der Pol denkleminin farklı başlangıç şartları ve denklemin değişen parametreleri için yaklaşık çözümler yine Runge Kutta yöntemi ve Maple 11 yardımı ile elde edilmiştir.

Beşinci bölümde ise sonuçlar ve önerilere yer verilmiştir.

Ekler bölümünde ise problemlerin çözümlerinin Maple 11 programlarına yer verilmiştir[4].

## 2. SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN SHOOTİNG METODU VE RUNGE- KUTTA ALGORİTMASI

Bu bölümde lineer ve lineer olmayan sınır değer problemleri için Shooting metodu kullanılarak, ikinci mertebeden sınır değer problemi iki tane birinci mertebeden başlangıç değer problemlerine dönüştürülmüş ve bunların sayısal çözümleri dördüncü mertebeden Runge-Kutta metodu kullanılarak Maple 11 yardımı ile elde edilmiştir.

### 2.1 Sınır Değer Problemleri için Varlık ve Teklik Teoremi

Adi diferensiyel denklemler için sınır değer problemlerinin teorisi başlangıç değer problemine dayalıdır. Sınır değer problemini çözmek için kullanılan bazı nümerik metotlar başlangıç değer probleminin çözümünden yararlanarak elde edilir. Her n.mertebeden bir diferensiyel denklem ona eş olan n tane birinci mertebeden denklemlerle ifade edilebildiğinden

$$\mathbf{u}' = f(x; \mathbf{u}) \quad (2.1)$$

göz önüne alındığında  $\mathbf{u} \equiv (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$  n-boyutlu bir sütun vektörünü ve  $u_k(x)$ 'ler de bağımlı değişkenleri gösterir. Kabul edelim ki;  $\mathbf{u}(x)$  vektör değerli bir fonksiyon ve  $f(x; \mathbf{u})$  ise bileşenleri  $f_k(x, u_1, u_2, \dots, u_n)$  olan vektör değerli bir fonksiyon olmak üzere, Eş.2.1 ile  $x = a$  noktasında

$$\mathbf{u}(a) = \alpha \quad (2.2)$$

şartları bir başlangıç değer problemi tanımlar. Bu tür problemlerin varlık ve tekliği  $f$ 'nin bir  $(a; \alpha)$  komşuluğunda sürekliliği ve türevlenebilirliği şartlarına bağlıdır[2].

## Teorem 2.1

Fonksiyon  $f(x; \mathbf{u})$  şeklinde verilsin.

$R: a \leq x \leq b, \|\mathbf{u}\| < \infty$  bölgesinde sürekli ve

her  $(x; \mathbf{u})$  ve  $(x; \mathbf{v}) \in R$  için  $|\mathbf{f}(x; \mathbf{u}) - \mathbf{f}(x; \mathbf{v})| \leq K \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$  ( $K$ :sabit)

Lipschitz şartını sağlasın.

i. Başlangıç değer probleminin

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(x; \mathbf{u}), \quad \mathbf{u}(a) = \boldsymbol{\alpha} \quad (2.3)$$

$[a, b] \equiv \{x | a \leq x \leq b\}$  aralığında tanımlı  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x; \boldsymbol{\alpha})$  şeklinde bir tek çözümü vardır.

ii. Bu çözüm  $\boldsymbol{\alpha}$ 'da Lipschitz sürekli ve

$$\text{her } (x; \boldsymbol{\alpha}) \text{ ve } (x; \boldsymbol{\beta}) \in R \text{ için } \|\mathbf{u}(x; \boldsymbol{\alpha}) - \mathbf{u}(x; \boldsymbol{\beta})\| \leq e^{K(x-a)} \|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}\|$$

şartını sağlar [2].

İspat:

Eğer Eş.2.3 ile verilen başlangıç değer probleminin bir çözümü varsa, bu çözümü verilen denklem her iki tarafının integrali alınıp başlangıç şartı kullanılarak

$$\mathbf{u}(x) = \boldsymbol{\alpha} + \int_a^x \mathbf{f}(\xi; \mathbf{u}(\xi)) d\xi \quad (2.4)$$

şeklinde elde edilir[2]. Eğer  $u(x)$  sürekli ve Eş.2.4'ü sağlarsa diferensiyellenebilir ve Eş.2.3 denklemini sağlamaktadır. Picard ardışık yaklaşımlar metodunu kullanarak bu integral denkleminin çözümünü oluşturursak

$$u^{(0)}(x) \equiv \alpha,$$

$$u^{(v+1)}(x) = \alpha + \int_a^x f(\xi; u(\xi)) d\xi, \quad v = 0, 1, \dots$$

$f(x; u)$  lipschitz sürekli olduğundan

$$|u^{(v+1)}(x) - u^{(v)}(x)| \leq \int_a^x K |u^{(v)}(\xi) - u^{(v-1)}(\xi)| d\xi, \quad v = 1, 2, \dots$$

$[a, b]$  aralığında  $|f(x; \alpha)| \leq M$  şartı ile buradan

$$|u^{(v+1)}(x) - u^{(v)}(x)| \leq \frac{M}{K} \frac{(K[x-a])^{v+1}}{(v+1)!}$$

elde edilebilir.

$$u^{(v+1)}(x) = u^0 + \sum_{\mu=0}^v [u^{(\mu+1)}(x) - u^{(\mu)}(x)]$$

olduğundan  $\{u^{(v)}(x)\}$  sürekli fonksiyonlar dizisinin  $[a, b]$ 'de düzgün yakınsak olduğu gösterilebilir. Limit fonksiyonu açıkça üstteki integral denklemine ve dolayısıyla da Eş.2.3 'ü sağlar. Böylece herhangi bir  $\alpha$  için varlık gösterilmiş olur.  $\beta \rightarrow \alpha$  iken  $u(x; \beta)$ 'nin sürekliliğinden de çözümün tekliği bulunur.

ii'yi göstermek için

$$[u(x; \alpha) - u(x; \beta)] = [\alpha - \beta] + \int_a^x [f(\xi; u(\xi; \alpha)) - f(\xi; u(\xi; \beta))] d\xi$$

yazabiliriz.  $f$ 'nin Lipschitz süreklilik şartından

$$|u(x; \alpha) - u(x; \beta)| \leq |\alpha - \beta| + K \int_a^x |u(\xi; \alpha) - u(\xi; \beta)| d\xi \quad (2.5)$$

elde edilir. Hata  $E(x) \equiv \int_a^x |u(\xi; \alpha) - u(\xi; \beta)| d\xi$  olarak alınırsa Eş.2.5

$$E'(x) - KE(x) \leq |\alpha - \beta|$$

diferensiyel denkleme dönüşür. Bu diferensiyel denklem  $e^{-K(x-a)}$  integral çarpanı ile çarpılır ve  $[a, x]$  aralığında integrali alınırsa

$$E(x) \leq \frac{|\alpha - \beta|}{K} [e^{K(x-a)} - 1]$$

bulunur. Bu ise ii koşulunun sağlandığını kanıtlar[2].

Aşağıdaki formda verilen ikinci mertebeden sınır değer probleminin

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \quad (2.6)$$

çözümünün varlık ve tekliğini garanti eden genel koşulları bir teorem ile verilecektir.

### Teorem 2.2

Eş.2.6 ile verilen sınır değer probleminde bulunan  $f$  fonksiyonu,  $f_y$  ve  $f_{y'}$  kısmi türevleri  $D = \{(x, y, y') \mid a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty, -\infty < y' < \infty\}$  bölgesinde sürekli olsun. Eğer

i. Her  $(x, y, y') \in D$  için  $f_y(x, y, y') > 0$  ve

ii.  $|f_{y'}(x, y, y')| \leq M$ , olacak şekilde her  $(x, y, y') \in D$  için bir  $M$  sabiti varsa

Eş.2.6 sınır değer probleminin bir tek çözümü vardır[1].

Örneğin, aşağıda verilen sınır değer probleminin Teorem 2.2 şartlarını sağladığını gösterelim.

$$y'' + e^{-xy} + \sin y' = 0 \quad 1 \leq x \leq 2, \quad y(1) = y(2) = 0 \quad (2.7)$$

Eş.2.7'de  $f(x, y, y') = -e^{-xy} - \sin y'$  'dir.

$$f_y(x, y, y') = xe^{-xy} > 0 \text{ ve } |f_{y'}(x, y, y')| = |-\cos y'| \leq 1$$

olduğundan bu problemin bir tek çözümü vardır.

$$y'' = f(x, y, y') \quad (2.8)$$

lineer diferensiyel denkleminin genel formu

$$f(x, y, y') = p(x)y' + q(x)y + r(x) \quad (2.9)$$

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \quad a \leq x \leq b$$

şeklinde ise Teorem 2.2'den bu problemin hangi durumlarda çözümünün elde edileceği görülmektedir.

### Sonuç 2.1

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

şeklinde verilen sınır değer problemi için

- i.  $[a,b]$  aralığında  $p(x)$ ,  $q(x)$  ve  $r(x)$  sürekli,
- ii.  $[a,b]$  aralığında  $q(x) > 0$ ,

koşulları sağlanıyorsa bir tek çözüm vardır[1].

## 2.2 Linear Shooting Metodu

$$f(x, y, y') = p(x)y' + q(x)y + r(x) \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta,$$

lineer sınır değer probleminin çözümünü elde edebilmek için aşağıdaki gibi iki başlangıç değer problemine dönüştürüldüğünde,

$$y_1'' = p(x)y_1' + q(x)y_1 + r(x), \quad a \leq x \leq b, \quad y_1(a) = \alpha, \quad y_1'(a) = 0 \quad (2.10.a)$$

$$y_2'' = p(x)y_2' + q(x)y_2, \quad a \leq x \leq b, \quad y_2(a) = 0, \quad y_2'(a) = 1 \quad (2.10.b)$$

başlangıç değer problemlerinin Sonuç 2.1 koşullarını sağladığı ve bir tek çözümünün olduğu görülür. Eş.2.10.a probleminin çözümü  $y_1(x)$  ile, Eş.2.10.b probleminin çözümü de  $y_2(x)$  ile gösterilsin. Kabul edelim ki, sınır değer probleminin çözümü

$$y(x) = y_1(x) + cy_2(x) \quad (2.11)$$

olsun. Burada  $c = \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)}$  olmak üzere

$$y(a) = y_1(a) + cy_2(a) = \alpha + c \cdot 0 = \alpha$$

$$y(b) = y_1(b) + cy_2(b) = y_1(b) + \beta - y_1(b) = \beta$$

olur. Buradan

$$y'(x) = y_1'(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2'(x)$$

$$y''(x) = y_1''(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2''(x)$$

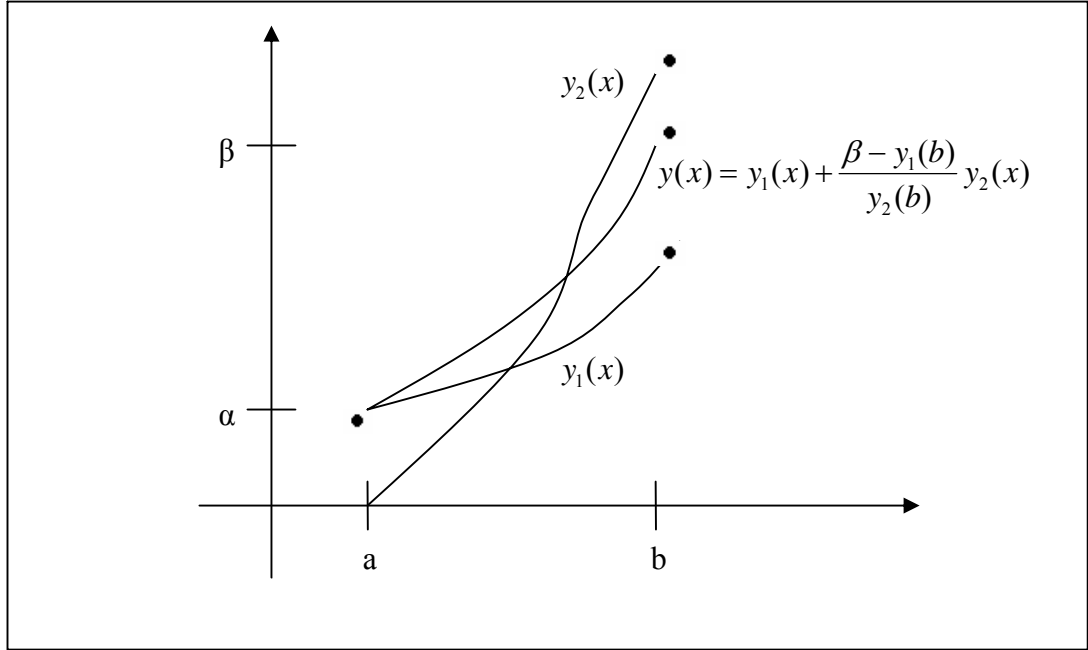
eşitlikleri elde edilir. Böylece

$$y'' = p(x)y_1' + q(x)y_1 + r(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} (p(x)y_2' + q(x)y_2)$$

$$= p(x) \left( y_1' + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2' \right) + q(x) \left( y_1 + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2 \right) + r(x)$$

$$= p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x)$$

olduğu görülür.  $y_2(b) \neq 0$  olmak şartı ile  $y(x)$  lineer sınır değer probleminin tek bir çözümüdür[1].



Şekil 2.1  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  ve Shooting metodu ile çözümleri

Lineer denklemler için Shooting metodu lineer sınır değer problemini Eş.2.10.a ve Eş.2.10.b ile tanımlanan iki başlangıç değer problemi ile değiştirmektedir. Uygun nümerik metotlar kullanılarak  $y_1(x)$  ve  $y_2(x)$  yaklaşık çözümleri hesaplanabilir. Sonuç olarak bu değerler Eş.2.11 denkleminde yerine yazılarak Eş.2.6 ile tanımlanan sınır değer probleminin çözümü yaklaşık olarak bulunur.

Algoritma 2.1'de  $y_1(x)$  ve  $y_2(x)$  çözümlerinin yaklaşık değerlerini bulmak için 4.mertebeden Runge Kutta tekniği kullanılmıştır. Ayrıca Algoritma2.1 içerisinde 4.adımda başka tekniklerde (Euler,Heun vb.) kullanılarak başlangıç değer problemleri yaklaşık olarak çözülebilir.

Algoritma 2.1 Lineer Shooting metot

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

Sınır değer probleminin çözümüne yaklaşmak için; Eş.2.10.a ve Eş.2.10.b ikinci mertebeden başlangıç değer problemleri oluşturulur.

Girdi:  $a$  ve  $b$  noktaları,  $\alpha, \beta$  sınır koşulları ve aralık sayısı  $N$ .

Çıktı:  $y(x_i)$  nin yaklaşık çözümleri  $w_{1,i}$ ,  $y'(x_i)$  'nin yaklaşık çözümleri  $w_{2,i}$ ,  
 $i = 1, \dots, N$

Adım 1:

$$h = (b - a) / N;$$

$$u_{1,0} = \alpha;$$

$$u_{2,0} = 0;$$

$$v_{1,0} = 0;$$

$$v_{2,0} = 1$$

değerleri belirlenir.

Adım 2:

$i = 0, 1, \dots, N - 1$  Adım2 ve Adım3'te kullanılır (Runge-Kutta metodu için).

Adım 3:

$$x = a + ih \quad \text{olsun.}$$

Adım 4:

$$k_{1,1} = hu_{2,i};$$

$$k_{1,2} = h[p(x)u_{2,i} + q(x)u_{1,i} + r(x)];$$

$$k_{2,1} = h[u_{2,i} + (1/2)k_{1,2}];$$

$$k_{2,2} = h[p(x+h/2)(u_{2,i} + (1/2)k_{1,2}) + q(x+h/2)(u_{1,i} + (1/2)k_{1,1}) + r(x+h/2)];$$

$$k_{3,1} = h[u_{2,i} + (1/2)k_{2,2}];$$

$$k_{3,2} = h[p(x+h/2)(u_{2,i} + (1/2)k_{2,2}) + q(x+h/2)(u_{1,i} + (1/2)k_{2,1}) + r(x+h/2)];$$

$$k_{4,1} = h[u_{2,i} + k_{3,2}];$$

$$k_{4,2} = h[p(x+h)(u_{2,i} + k_{3,2}) + q(x+h)(u_{1,i} + k_{3,1}) + r(x+h)];$$

**Adım 4** (Devam):

$$u_{1,i+1} = u_{1,i} + (1/6)[k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1}];$$

$$u_{2,i+1} = u_{2,i} + (1/6)[k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2}];$$

$$k'_{1,1} = hv_{2,i};$$

$$k'_{1,2} = h[p(x)v_{2,i} + q(x)v_{1,i}];$$

$$k'_{2,1} = h[v_{2,i} + (1/2)k'_{1,2}];$$

$$k'_{2,2} = h[p(x+h/2)(v_{2,i} + (1/2)k'_{1,2}) + q(x+h/2)(v_{1,i} + (1/2)k'_{1,1})];$$

$$k'_{3,1} = h[v_{2,i} + (1/2)k'_{2,2}];$$

$$k'_{3,2} = h[p(x+h/2)(v_{2,i} + (1/2)k'_{2,2}) + q(x+h/2)(v_{1,i} + (1/2)k'_{2,1})];$$

$$k'_{4,1} = h[v_{2,i} + k'_{3,2}];$$

$$k'_{4,2} = h[p(x+h)(v_{2,i} + k'_{3,2}) + q(x+h)(v_{1,i} + k'_{3,1})];$$

$$v_{1,i+1} = v_{1,i} + (1/6)[k'_{1,1} + 2k'_{2,1} + 2k'_{3,1} + k'_{4,1}];$$

$$v_{2,i+1} = v_{2,i} + (1/6)[k'_{1,2} + 2k'_{2,2} + 2k'_{3,2} + k'_{4,2}];$$

**Adım 5:**

Kabul edelim ki,

$$w_{1,0} = \alpha;$$

$$w_{2,0} = \frac{\beta - u_{1,N}}{v_{1,N}};$$

Çıktı( $a, w_{1,0}, w_{2,0}$ ).

**Adım 6:**

$i = 0, \dots, N$  için

$$W1 = u_{1,i} + w_{2,0}v_{1,i};$$

$$W2 = u_{2,i} + w_{2,0}v_{2,i};$$

$x = a + ih$  kabul edelim.

Çıktı( $x, W1, W2$ ).

**Adım 7:** Son.

Aşağıda verilen sınır değer probleminin,

$$y'' = -\frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}, 1 \leq x \leq 2, \quad y(1)=1, \quad y(2)=2 \quad (2.12)$$

analitik çözümü

$$y = c_1x + \frac{c_2}{x^2} - \frac{3}{10}\sin(\ln x) - \frac{1}{10}\cos(\ln x)$$

olarak hesaplanabilir. Sınır şartlarından  $c_1, c_2$  katsayıları ise

$$c_2 = \frac{1}{70}[8 - 12\sin(\ln 2) - 4\cos(\ln 2)] \approx -0.03920701320$$

$$c_1 = \frac{11}{10} - c_2 \approx 1.1392070132$$

olarak bulunabilir. Eş.2.12 ile tanımlanan başlangıç değer problemini test problem olarak ele alıp Algoritma 2.1'den yararlanarak Shooting metodu ile çözelim. Bu durumda Eş.2.10.a ve Eş.2.10.b 'yi kullanarak iki başlangıç değer problemini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$y_1'' = -\frac{2}{x}y_1' + \frac{2}{x^2}y_1 + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}, 1 \leq x \leq 2, \quad y_1(1)=1, \quad y_1'(1)=0 \quad (2.13)$$

$$y_2'' = -\frac{2}{x}y_2' + \frac{2}{x^2}y_2, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad y_2(1)=0, \quad y_2'(1)=1 \quad (2.14)$$

$N = 10$  ve  $h = 0.1$  için Algoritma 2.1'den bulunan sonuçlar Çizelge 2.1'de verilmektedir. Listede  $y_1(x_i)$ 'nin yaklaşık değerleri  $u_{1,i}$  ile  $y_2(x_i)$ 'nin yaklaşık

değerleri de  $v_{1,i}$  ile gösterilmektedir. Eş.2.11 kullanılarak Eş.2.9 sınır değer probleminin çözümü olan  $w_i$  yaklaşık değerleri de

$$y(x_i) = y_1(x_i) + \frac{2 - y_1(2)}{y_2(2)} y_2(x_i)$$

denkleminde bulunmaktadır. Maple 11 kullanılarak Eş.2.13'ün  $u_{1,i}$  çözümleri ve Eş.2.14'ün  $v_{1,i}$  çözümleri Shooting metodu ile aşağıdaki gibi bulunur.

```
> denklem1:= { diff(y(x), x$2)=(-
2/x)*diff(y(x), x)+(2/x^2)*y(x)+sin(ln(x))/x^2};
      denklem1 := {y''(x) = - $\frac{2y'(x)}{x} + \frac{2y(x)}{x^2} + \frac{\sin(\ln(x))}{x^2}$ }
> bsl:= { y(1)=1, D(y)(1)=0};
      bsl := {D(y)(1)=0, y(1)=1}
> dsol4 := dsolve(denklem1 union bsl, numeric,
method=rkf45,
      relerr=Float(1,-8), abserr=Float(1,-
8),
      maxfun=0, output=procedurelist);
      dsol4 := proc(x_rkf45) ... end proc
> dsol4(1);
      [x = 1., y(x) = 1., y'(x) = 0.]
> dsol4(1.1);
      [x = 1.1, y(x) = 1.00895641634053534, y'(x) = 0.16979407711439406]
```

Şekil 2.2 Eş.2.13 'ün  $u_{1,i}$  yaklaşık çözümlerinin Maple 11 ile bulunması ( $y(x)$  sonuçları  $u_{1,i}$  çözümlerini göstermektedir)

```

> denklem2 := { diff(y(x), x$2)=(-
2/x)*diff(y(x),x)+(2/x^2)*y(x) };
          denklem2 := { y''(x) = -\frac{2y'(x)}{x} + \frac{2y(x)}{x^2} }
> bk2 := { y(1)=0, D(y)(1)=1 };
          bk2 := { D(y)(1) = 1, y(1) = 0 }
> dsol5 := dsolve(denklem2 union bk2, numeric,
method=rkf45,
          relerr=Float(1,-8), abserr=Float(1,-
8),
          maxfun=0, output=procedurelist);
          dsol5 := proc(x_rkf45) ... end proc
> dsol5(1);
          [x = 1., y(x) = 0., y'(x) = 1.]
> dsol5(1.1);
[x = 1.1, y(x) = 0.0911845729801589455, y'(x)
= 0.83420985983169593]

```

Şekil 2.3 Eş.2.14 'ün  $v_{1,i}$  yaklaşık çözümlerinin Maple 11 ile bulunması  
( $y(x)$  sonuçları  $v_{1,i}$  çözümlerini göstermektedir)

Çizelge 2.1 Eş.2.12 sınır değer probleminin yaklaşık ve gerçek çözümleri  
ve hata hesabı

$x_i$	$u_{1,i}$	$v_{1,i}$	$w_i$	$y(x_i)$	$ y(x_i) - w_i $
1.0	1.00000000	0.00000000	1.00000000	1.00000001	$1 \cdot 10^{-8}$
1.1	1.00895641	0.09118472	1.09262929	1.09262931	$1.1 \cdot 10^{-8}$
1.2	1.03244870	0.16851852	1.18708484	1.18708485	$1.0 \cdot 10^{-8}$
1.3	1.06673692	0.23609467	1.28338237	1.28338237	$5 \cdot 10^{-9}$
1.4	1.10928080	0.29659864	1.38144595	1.38144596	$7 \cdot 10^{-9}$
1.5	1.15829276	0.35185185	1.48115942	1.48115943	$1.1 \cdot 10^{-8}$
1.6	1.21247648	0.40312499	1.58239246	1.58239246	$-1 \cdot 10^{-9}$
1.7	1.27086736	0.45132641	1.68501396	1.68501397	$8 \cdot 10^{-9}$
1.8	1.33273136	0.49711934	1.78889854	1.78889855	$1.5 \cdot 10^{-8}$
1.9	1.39749907	0.54099723	1.8939295	1.89392952	$1.1 \cdot 10^{-8}$
2.0	1.46472106	0.58333333	2.00000000	2.00000002	$2 \cdot 10^{-8}$

Gerçeğe yakın değerler bulmak için bu örneklerde başlangıç değer problemine 4.mertebeden Runge-Kutta ile yaklaşılmaktadır. Ne yazık ki, yuvarlama hataları nedeni ile bu teknikte bazı problemler ortaya çıkabilir. Eğer  $y_1(x)$  değerleri  $x$ ,  $a$ 'dan  $b$ 'ye giderken hızla artarsa bu durumda  $u_{1,N}$  yaklaşık olarak  $y_1(b)$ 'ye eşit olacak ve bu da oldukça büyük bir değer olacaktır. Eğer  $\beta$ ,  $u_{1,N}$  ile büyüklük olarak karşılaştırıldığında çok küçük ise  $w_{2,0} = (\beta - u_{1,N}) / v_{1,N}$  yaklaşık olarak  $-u_{1,N} / v_{1,N}$ 'e eşit olacaktır. Dolayısıyla Adım 6'daki hesaplamalar

$$W1 = u_{1,i} + w_{2,0}v_{1,i} \approx u_{1,i} - \left( \frac{u_{1,N}}{v_{1,N}} \right) v_{1,i}$$

$$W2 = u_{2,i} + w_{2,0}v_{2,i} \approx u_{2,i} - \left( \frac{u_{1,N}}{v_{1,N}} \right) v_{2,i}$$

ki bu da terim iptal etmekten dolayı anlamlı basamak kaybına yol açar[1]. Bununla birlikte  $u_{1,i}$ ,  $y_1(x_i)$ 'nin yaklaşık çözümü olduğundan  $y_1$ 'in davranışı kolaylıkla izlenebilir. Eğer  $u_{1,i}$ ,  $a$ 'dan  $b$ 'ye hızla artıyorsa bu durumda Shooting metodu  $x_0 = b$ 'den  $x_N = a$ 'ya geriye doğru çalıştırılabilir. Böylece,

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \leq x \leq b, \quad y(b) = \beta, \quad y'(b) = 0,$$

$$y'' = p(x)y' + q(x)y, \quad a \leq x \leq b, \quad y(b) = 0, \quad y'(b) = 1$$

çözümleri hesaplanır. Yine hatalar devam ederse farklı teknikler kullanılmalıdır. Bununla birlikte genelde bulunan  $u_1$  ve  $v_1$  çözümleri  $h^n$ .mertebeden ise asıl elde edilen çözümlerde yine  $h^n$ .mertebeden olmalıdır. Bu da,

$$|w_{1,i} - y(x_i)| \leq Kh^n \left| 1 + \frac{v_{1,i}}{v_{1,N}} \right|$$

eşitsizliğinden dolayı sağlanır[1].

### 2.3. Lineer Olmayan Denklemlerde Shooting Metodu

İkinci mertebeden sınır değer problemi,

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \quad (2.15)$$

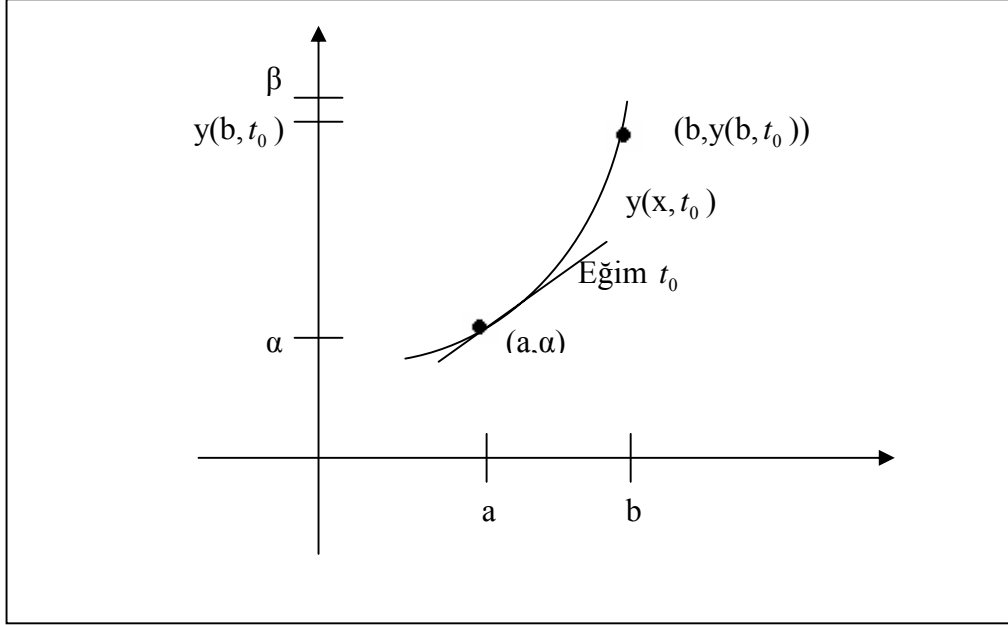
şeklinde tanımlansın. Bu problemin yaklaşık çözümleri de lineer problemlere benzer olarak Shooting metodu ile çözülmektedir. Fakat burada sınır değer probleminin çözümü iki farklı başlangıç değer probleminin bir lineer birleşimi olarak ifade edilemez. Bunun yerine, bir  $t$  parametresi içeren başlangıç değer problemlerinin bir dizisinin çözümlerini kullanarak sınır değer problemlerinin yaklaşık değerleri Shooting metodu ile elde edilebilir. Bu problemler aşağıdaki formdadır.

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y'(a) = t \quad (2.16)$$

Burada  $t = t_k$  parametresi Eş.2.17 koşulunu sağlayacak şekilde seçilir.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(b, t_k) = y(b) = \beta \quad (2.17)$$

$y(x, t_k)$  ise  $t = t_k$  'da Eş.2.16'nın çözümüdür,  $y(x)$  ise Eş.2.15'in çözümüdür.



Şekil 2.4  $t_0$  parametresi ile başlayan çözüm eğrileri

Bu metot sabit bir hedefi vurma işlemine benzer olarak Shooting tekniği olarak adlandırılmaktadır (Şekil 2.4). Bu metoda göre bir  $t_0$  parametresi ile başlanır.  $(a, \alpha)$  noktasından atışlenen bir nesnenin hangi başlangıç düzeyinde olduğunu belirtir[1]. Metoda göre  $(a, \alpha)$  koordinatlarında bulunan bir nesnenin başlangıç pozisyonu  $t_0$  parametresi ile gösterilir ve çözüm eğrisi boyunca nesnenin hareketi

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y'(a) = t_0$$

başlangıç değer probleminin çözümü olarak alınır. Eğer  $y(b, t_0)$  noktası  $\beta$ 'ya yeterince yaklaşık bir değer değilse  $\beta$ 'ya yaklaşımımızı düzeltmek için  $t_1, t_2, \dots$  noktaları seçilerek  $y(b, t_k)$ ' lar hesaplanır(Şekil2.5).

$t_k$  parametrelerini belirlemek için, varsayalım ki; Eş.2.16 formunda verilen sınır değer problemi Teorem 2.2'deki hipotezleri sağlasın. Eğer  $y(x, t_k)$  başlangıç değer probleminin çözümünü gösterirse,

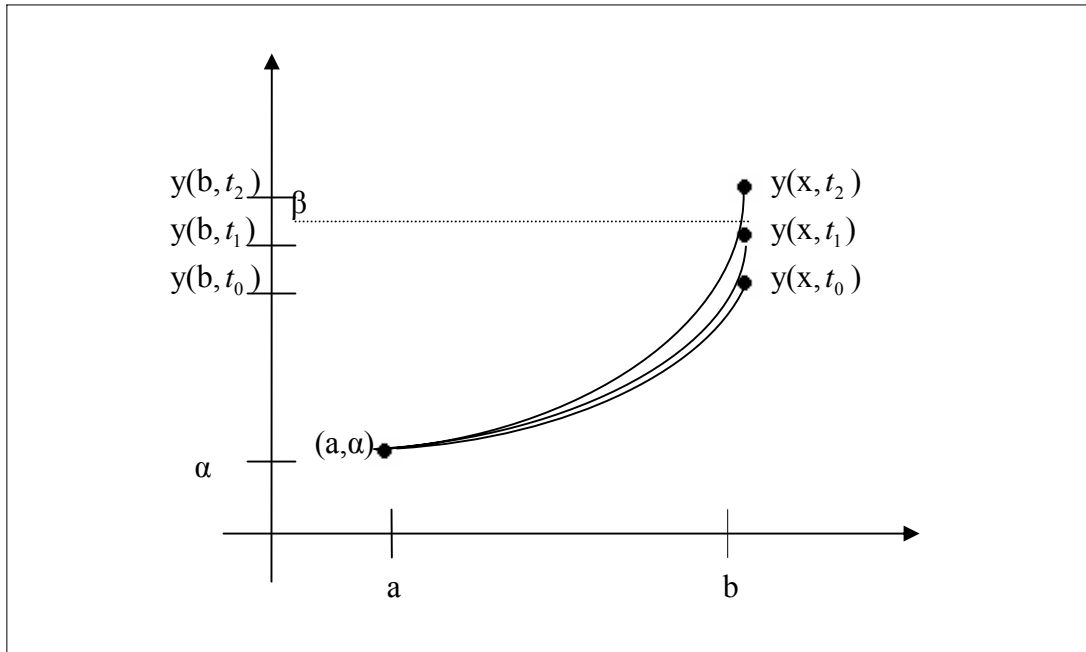
$$y(b, t) - \beta = 0$$

ile  $t$  belirlenebilir. Bu ise lineer olmayan bir denklemdir. Bu denklemin çözümü için pek çok nümerik metot bilinmektedir. Bu metotlardan bazıları sabit nokta iterasyonu, newton iterasyonu, sekant metodu v.b. olarak verilebilir[5].

Burada Eş.2.16'nın çözümü için sekant metodu ve başlangıç değerleri için de  $t_0$  ,  $t_1$  değerleri seçilirse,  $t_k$  'ların hesaplanması

$$t_k = t_{k-1} - \frac{(y(b, t_{k-1}) - \beta)(t_{k-1} - t_{k-2})}{y(b, t_{k-1}) - y(b, t_{k-2})}, \quad k = 2, 3, \dots$$

denklemini ile bulunur.



Şekil 2.5  $t_1, t_2, \dots$  değerleri için  $y(b, t_k)$  yaklaşık çözümleri

Daha kuvvetli olan Newton metodunda  $t_k$ 'ların bulunması için tek bir başlangıç değeri olan  $t_0$ 'a ihtiyaç vardır ve  $t_k$ 'lar aşağıda verilen iterasyon

$$t_k = t_{k-1} - \frac{y(b, t_{k-1}) - \beta}{\frac{dy}{dt}(b, t_{k-1})}, \quad (2.18)$$

formülüne sahiptir. Yalnız bu metoda göre  $t_k$ 'ların hesaplanabilmesi için paydadaki  $(dy/dt)(b, t_{k-1})$  türevlerinin bilinmesi gerekmektedir. Newton metodunda  $y(b, t)$  noktası açık bir şekilde ifade edilemediğinden bu türevler bulunamaz fakat  $y(b, t_0), y(b, t_1), \dots, y(b, t_{k-1})$  değerler bilindiğinden

$$y''(x, t) = f(x, y(x, t), y'(x, t)), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a, t) = \alpha, \quad y'(a, t) = t \quad (2.19)$$

problemde  $t = t_{k-1}$  noktasında  $(dy/dt)(b,t)$  'yi hesaplamak için Eş.2.19'un her iki tarafının  $t$ 'ye göre türevini aldığımızda aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\begin{aligned}\frac{\partial y''}{\partial t}(x,t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(x, y(x,t), y'(x,t)), \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x,t), y'(x,t)) \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x,t), y'(x,t)) \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x,t), y'(x,t)) \frac{\partial y'}{\partial t}(x,t).\end{aligned}$$

Burada  $x$  ve  $t$  parametreleri birbirinden bağımsız olduğundan  $\partial x / \partial t = 0$  olur ve yukarıdaki denklem aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$\frac{\partial y''}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x,t), y'(x,t)) \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x,t), y'(x,t)) \frac{\partial y'}{\partial t}(x,t) \quad (2.20.a)$$

$a \leq x \leq b$  için başlangıç koşulları ise

$$\frac{\partial y}{\partial t}(a,t) = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial y'}{\partial t}(a,t) = 1 \quad (2.20.b)$$

olur. Yazımı kolaylaştırmak için  $(\partial y / \partial t)(x,t)$  kısmi türevi  $z(x,t)$  ile gösterilirse Eş.2.20.a başlangıç koşulları ile birlikte aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$z''(x,t) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)z(x,t) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)z'(x,t) \quad (2.21)$$

$$a \leq x \leq b, \quad z(a,t) = 0, \quad z'(a,t) = 1.$$

Newton metodu, Eş.2.19 ve Eş.2.21 ile verilen iki başlangıç değer probleminin her iterasyonda çözülmesini gerektirdiğinden Eş.2.18'den yararlanarak  $t_k$ 'lar aşağıdaki gibi bulunur.

$$t_k = t_{k-1} - \frac{y(b, t_{k-1}) - \beta}{z(b, t_{k-1})} \quad (2.22)$$

Ne yazık ki burada bahsedilen başlangıç değer problemlerinin hiçbiri tam olarak çözülemez, Algoritma 2.2 yaklaşık metotlardan 4.mertebeden Runge Kutta metodu ve Newton metodu kullanılarak Eş.2.19 ve Eş.2.21 denklemlerinin çözüm adımlarını tanımlamaktadır[1].

## Algoritma 2.2

Lineer olmayan Shooting metot

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

Lineer olmayan sınır değer probleminin yaklaşık çözümü için

(ilk olarak Eş.2.19 ve Eş.2.21 problemleri yazılır)

**Girdi:**  $a$  ve  $b$  noktaları,  $\alpha, \beta$  sınır koşulları, aralık sayısı  $N \geq 2$ , hata payı TOL, maksimum iterasyon sayısı  $M$ .

**Çıktı:**  $y(x_i)$ 'nin yaklaşık çözümleri  $w_{1,i}$ ;  $y'(x_i)$ 'nin yaklaşık çözümleri  $w_{2,i}$ ,  
 $i = 0, 1, \dots, N$

**Adım 1:**  $h = (b - a) / N$ ;

$k = 1$ ;

$t_k = (\beta - \alpha) / (b - a)$  verilsin.

**Adım 2:**  $k \leq M$  ise Adım 3-10.

**Adım 3:**  $w_1 = \alpha$ ;

$$w_2 = t_k;$$

$$u_1 = 0;$$

$$u_2 = 1 \quad \text{olsun.}$$

**Adım 4:**  $i = 1, \dots, N$  Adım 5 ve Adım 6'da kullanılır (Runge-Kutta metodu için).

**Adım 5:**  $x = a + (i-1)h$  olsun.

**Adım 6:**  $k_{1,1} = hw_{2,i-1}$ ;

$$k_{1,2} = hf(x, w_{1,i-1}, w_{2,i-1});$$

$$k_{2,1} = h(w_{2,i-1} + (1/2)k_{1,2});$$

$$k_{2,2} = hf(x + h/2, w_{1,i-1} + (1/2)k_{1,1}, w_{2,i-1} + (1/2)k_{1,2});$$

$$k_{3,1} = h(w_{2,i-1} + (1/2)k_{2,2});$$

$$k_{3,2} = hf(x + h/2, w_{1,i-1} + (1/2)k_{2,1}, w_{2,i-1} + (1/2)k_{2,2});$$

$$k_{4,1} = h(w_{2,i-1} + k_{3,2});$$

$$k_{4,2} = hf(x + h, w_{1,i-1} + k_{3,1}, w_{2,i-1} + k_{3,2});$$

$$w_{1,i} = w_{1,i-1} + (k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1})/6;$$

$$w_{2,i} = w_{2,i-1} + (k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2})/6;$$

$$k'_{1,1} = hu_2;$$

$$k'_{1,2} = h[f_y(x, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})u_1 + f_{y'}(x, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})u_2];$$

$$k'_{2,1} = h[u_2 + (1/2)k'_{1,2}];$$

$$k'_{2,2} = h[f_y(x + h/2, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_1 + (1/2)k'_{1,1}) + f_{y'}(x + h/2, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_2 + (1/2)k'_{1,2})];$$

$$k'_{3,1} = h(u_2 + (1/2)k'_{2,2});$$

$$k'_{3,2} = h[f_y(x + h/2, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_1 + (1/2)k'_{2,1}) + f_{y'}(x + h/2, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_2 + (1/2)k'_{2,2})];$$

$$k'_{4,1} = h(u_2 + k'_{3,2});$$

$$k'_{4,2} = h[f_y(x + h, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_1 + k'_{3,1}) + f_{y'}(x + h, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_2 + k'_{3,2})];$$

$$u_1 = u_1 + (1/6)[k'_{1,1} + 2k'_{2,1} + 2k'_{3,1} + k'_{4,1}];$$

$$u_2 = u_2 + (1/6)[k'_{1,2} + 2k'_{2,2} + 2k'_{3,2} + k'_{4,2}].$$

Adım 7: Eğer  $|w_{1,N} - \beta| \leq TOL$  ise Adım 8 ve Adım 9 uygulanır.

Adım 8:  $i = 0, 1, \dots, N$  için

$x = a + ih$  olsun.

Çıktı( $a, w_{1,i}, w_{2,i}$ ).

Adım 9: Runge kutta için tamamlandı.

Adım 10:  $t_k = t_k - \frac{w_{1,N} - \beta}{u_1}$ ;

(Newton metodu ile  $t_k$  değerleri bulunur.)

$k = k + 1$  .

Adım 11: Son.

Adım1'de seçilen  $t_0 = t_k$  değerleri  $(a, \alpha)$  ve  $(b, \beta)$  noktalarından geçen doğrunun eğimini verir. Lineer olmayan sınır değer problemi Teorem 2.2 'nin hipotezlerini sağlarsa  $t_0$  'in herhangi bir seçimi için yakınsaklık sağlanır fakat  $t_0$  'in iyi bir yaklaşım değeri ile seçimi ise yakınsamayı hızlandırır. Bu süreç teoremin hipotezlerinin sağlanmadığı birçok problem içinde işlemektedir[1]. Lineer olmayan Shooting metodunu aşağıdaki sınır değer problemine uygulayalım.

$$y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy'), \quad 1 \leq x \leq 3, \quad y(1) = 17, \quad y(3) = \frac{43}{3} \quad (2.23)$$

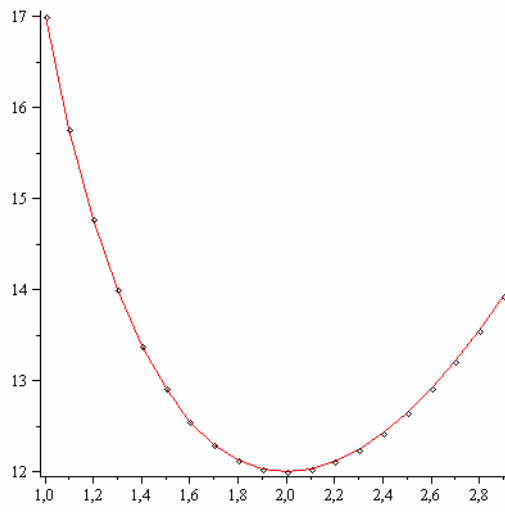
probleminin analitik çözümü  $y(x) = x^2 + 16/x$  olarak verilmektedir[1]. Algoritma2.2'de verilen Shooting metodunu uygulayabilmek için başlangıç değer problemlerinin yaklaşık çözümlerine ihtiyaç duyulmaktadır.

$$y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy'), \quad 1 \leq x \leq 3, \quad y(1) = 17, \quad y'(1) = t_k$$

$$z'' = -\frac{1}{8}(y'z + yz'), \quad 1 \leq x \leq 3, \quad z(1) = 0, \quad z'(1) = 1$$

Çizelge 2.2 Eş.2.23'ün analitik çözümleri  $y(x)$  ve yaklaşık çözümleri  $w_1$  değerlerinin karşılaştırılması ve hata

$x_i$	$w_{1,i}$	$y(x_i)$	$ w_{1,i} - y(x_i) $
1.0	17.000000	17.000000	0.00000000
1.1	15.755496	15.755454	0.00004160
1.2	14.773391	14.773333	0.00005783
1.3	13.997754	13.997692	0.00006197
1.4	13.388632	13.388571	0.00006035
1.5	12.916723	12.916667	0.00005604
1.6	12.560051	12.560000	0.00005060
1.7	12.301810	12.301765	0.00004485
1.8	12.128928	12.128889	0.00003920
1.9	12.031086	12.031053	0.00003385
2.0	12.000029	12.000000	0.00002889
2.1	12.029072	12.029048	0.00002434
2.2	12.112748	12.112727	0.00002023
2.3	12.246538	12.246522	0.00001651
2.4	12.426679	12.426667	0.00001319
2.5	12.650010	12.650000	0.00001023
2.6	12.913854	12.913846	$7.61 \cdot 10^{-6}$
2.7	13.215931	13.215926	$5.30 \cdot 10^{-6}$
2.8	13.554289	13.554286	$3.29 \cdot 10^{-6}$
2.9	13.927243	13.927241	$1.52 \cdot 10^{-6}$
3.0	14.333333	14.333333	0



Şekil 2.6 Eş.2.23'ün çözüm eğrisi (nokta:analitik çözümleri, çizgi:yaklaşık çözüm eğrisini göstermektedir)

İki başlangıç değer probleminin çözümünü gerektiren Shooting metodunda Newton ve Sekant metotları kullanılmasına rağmen Newton metodu Sekant metoduna göre daha çabuk sonuca yakınsar. İyi başlangıç değerlerinin seçiminde her iki metotta lokal olarak yakınsar[2]. Shooting metodu, Eş.2.15 lineer olmayan sınır değer probleminin çözümleri ve türevinin çözümleri  $[a,b]$  aralığında  $x$  değerleri arttıkça hızla artan değerler alıyorsa, yuvarlama hatalarına daha duyarlı olduğu söylenebilir[2].

### 3. BAZI ÖZEL PROBLEMLERE SHOOTİNG METODUNUN UYGULANMASI

Genel formu

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(-1) = y(1) = 0 \quad (3.1)$$

şeklinde verilen sınır değer problemi  $f(x, y, y')$  lineer olmamak koşulu ile Eş.3.1 kütlesi ile karşılaştırıldığında oldukça büyük bir yay sabitine sahip olan lineer olmayan bir yayın hareketinin denklemini olarak alınabilir[3]. Eş. 3.1'in yaklaşık çözümü lineer olmayan Shooting metodu ile elde edilmektedir. Eş.2.17 koşulunu sağlayacak şekilde  $t = t_k$  parametresi alınarak Eş.3.1 lineer olmayan sınır değer problemine Shooting metodu uygulandığında,

$$y''(x, t) = f(x, y(x, t), y'(x, t)), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad y(-1, t) = 0, \quad y'(-1, t) = t \quad (3.2)$$

$-1 \leq x \leq 1$  için başlangıç koşulları ise  $\frac{\partial y}{\partial t}(-1, t) = 0$  ve  $\frac{\partial y'}{\partial t}(-1, t) = 1$  olarak alınır ve yazımı kolaylaştırmak için  $(\partial y / \partial t)(x, t)$  kısmi türevi  $z(x, t)$  ile gösterilirse diğer başlangıç değer problemi

$$z''(x, t) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)z(x, t) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, z)z'(x, t)$$

$$-1 \leq x \leq 1, \quad z(-1, t) = 0, \quad z'(-1, t) = 1 \quad (3.3)$$

şeklinde yazılır. Eş.3.2 ve Eş.3.3 başlangıç değer problemlerinin Algoritma 2.2'ye göre Maple 11 yardımı ile yaklaşık çözümleri elde edilmiştir. Burada  $y(x_i)$ 'in yaklaşık çözümleri  $w_{1,i}$ ,  $y'(x_i)$  nin yaklaşık çözümleri  $w_{2,i}$  ile gösterilmiştir.

Durum 1:

$$y'' + ((y')^2 - 2y - x^2) = 0, \quad y(-1) = y(1) = 0 \quad (3.4)$$

sınır değer problemi verilmiş olsun. Burada  $y'$ ,  $z$  ile gösterilmiş olup lineer olmayan shooting metodunda  $t$  değeri Eş.2.15 formunda olan Eş.3.4 sınır değer probleminde  $t = (\beta - \alpha) / (b - a)$  kullanılarak  $t = 0$  olarak elde edilir.

$$y'' + ((y')^2 - 2y - x^2) = 0, \quad y(-1) = 0 \quad y'(-1) = 0 \quad (3.5)$$

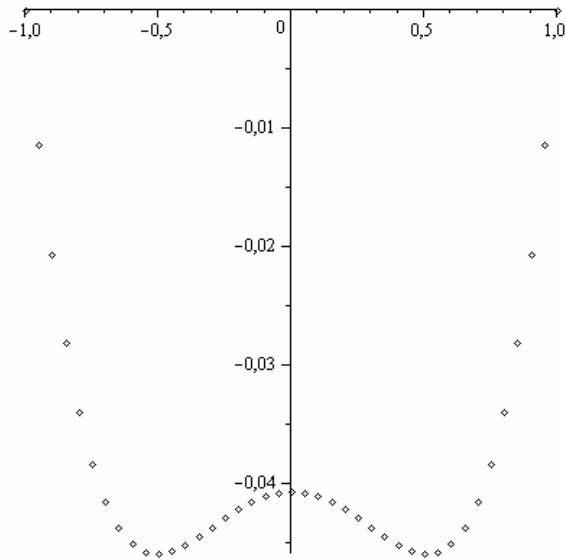
$$z'' + 2zz' - 2z = 0, \quad z(-1) = 0 \quad z'(-1) = 1 \quad (3.6)$$

Eş.3.4 sınır değer problemi Eş.3.5 ve Eş.3.6 şeklinde iki farklı başlangıç değer problemine dönüştürülmüştür. Daha sonra Algoritma 2.2 kullanılarak ve Maple11 yardımı ile sonuçlar elde edilmiş ve Çizelge 3.1'de verilmiştir.

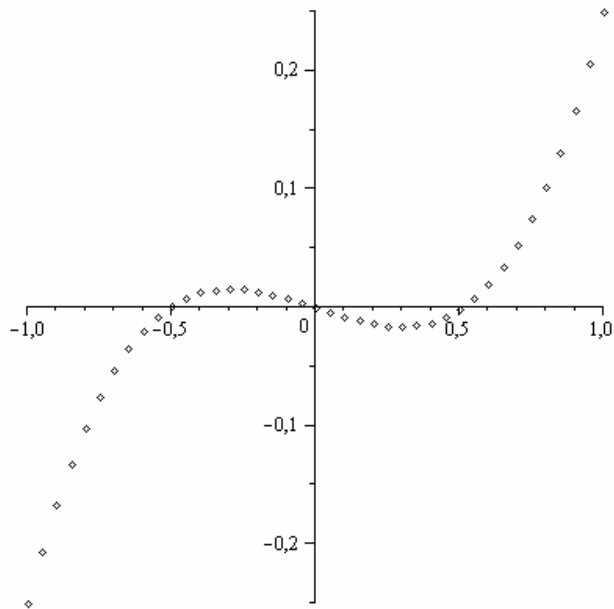
Çizelge 3.1 Eş.3.4'ün  $y(x_i)$  ve  $y'(x_i)$  yaklaşık çözümleri

$x_i$	$w_{1,i}$	$w_{2,i}$
-1.0	0	-0.2501769477
-0.9	-0.02066384173	-0.1663789148
-0.8	-0.03390325793	-0.1013992031
-0.7	-0.04150574830	-0.05328465659
-0.6	-0.04504745711	-0.01979750428
-0.5	-0.04587456532	0.001397580268
-0.4	-0.04510032962	0.01260766266
-0.3	-0.04361181967	0.01604183979
-0.2	-0.04208128550	0.01378624273
-0.1	-0.04097831458	0.007811233444
0.0	-0.04058012707	$-2.1118310^{-7}$
0.1	-0.04097834578	-0.007811652109
0.2	-0.04208134608	-0.01378664937
0.3	-0.04361190590	-0.01604222330
0.4	-0.04510043574	-0.01260800756
0.5	-0.04587468334	-0.001397865549
0.6	-0.04504757688	0.01979730534
0.7	-0.04150585780	0.05328457497
0.8	-0.03390334397	0.1013992706
0.9	-0.02066389106	0.1663791587
1.0	$-6.2610^{-10}$	0.2501773855

Şekil 3.1 ve Şekil 3.2 sırası ile Eş.3.4 probleminde  $y(x)$  ve  $y'(x)$  çözüm eğrilerini göstermektedir.



Şekil 3.1 Eş.3.4 sınır değer probleminin  $y(x_i)$  çözümleri



Şekil 3.2 Eş.3.4 sınır değer probleminin  $y'(x_i)$  çözümleri

**Durum 2:**

$f(x, y, y') = -y + e^y$  olmak üzere

$$y'' + (y - e^y) = 0, \quad y(-1) = y(1) = 0 \quad (3.7)$$

sınır değer problemi verilsin.

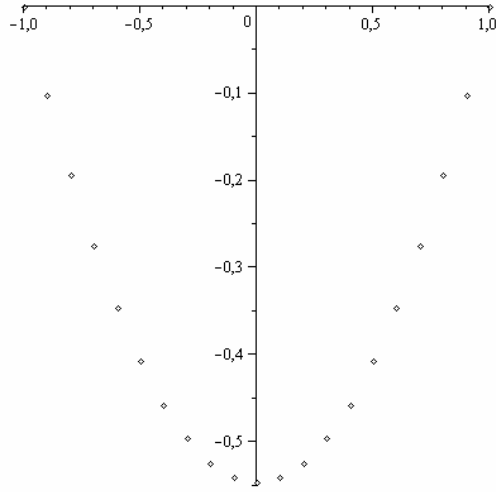
$$y'' + (y - e^y) = 0, \quad y(-1) = 0 \quad y'(-1) = 0 \quad (3.8)$$

$$z'' + (1 - e^y)z = 0, \quad z(-1) = 0 \quad z'(-1) = 1 \quad (3.9)$$

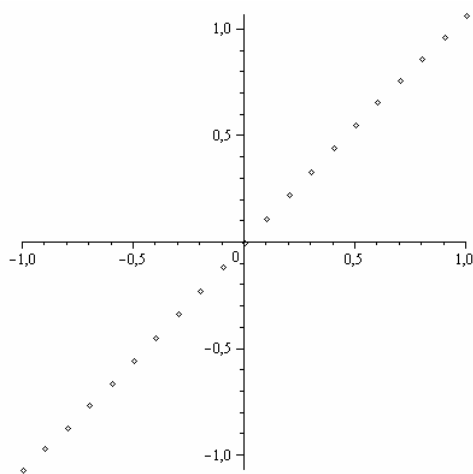
Eş.3.7 sınır değer problemi Eş.3.8 ve Eş.3.9 şeklinde iki farklı başlangıç değer problemine dönüştürülmüştür. Daha sonra Algoritma 2.2 kullanılarak ve Maple11 yardımı ile sonuçlar elde edilmiş ve Çizelge3.2'de verilmiştir.

Çizelge 3.2 Eş.3.7'nin  $y(x_i)$  ve  $y'(x_i)$  yaklaşık çözümleri

$x_i$	$w_{1,i}$	$w_{2,i}$
-1.0	0	-1.068062246
-0.9	-0.1018017667	-0.9678895854
-0.8	-0.1935471697	-0.8668090412
-0.7	-0.2751131083	-0.7642261050
-0.6	-0.3463314182	-0.6598233439
-0.5	-0.4070136273	-0.5535036181
-0.4	-0.4569706299	-0.4453445251
-0.3	-0.4960282154	-0.3355605670
-0.2	-0.5240390974	-0.2244706533
-0.1	-0.5408918876	-0.1124692586
0.0	-0.5465173151	$-1.117 \cdot 10^{-8}$
0.1	-0.5408918870	0.1124692365
0.2	-0.5240390963	0.2244706318
0.3	-0.4960282139	0.3355605468
0.4	-0.4569706280	0.4453445064
0.5	-0.4070136252	0.5535036014
0.6	-0.3463314159	0.6598233293
0.7	-0.2751131058	0.7642260923
0.8	-0.1935471674	0.8668090297
0.9	-0.1018017649	0.9678895739
1.0	$6.7 \cdot 10^{-10}$	1.068062231



Şekil 3.3 Eş.3.7 sınır değer probleminin  $y(x_i)$  çözümleri



Şekil 3.4 Eş.3.7 sınır değer probleminin  $y'(x_i)$  çözümleri

**Durum 3:**

$f(x, y, y') = +2y^2 + 2y + 1$  olmak üzere

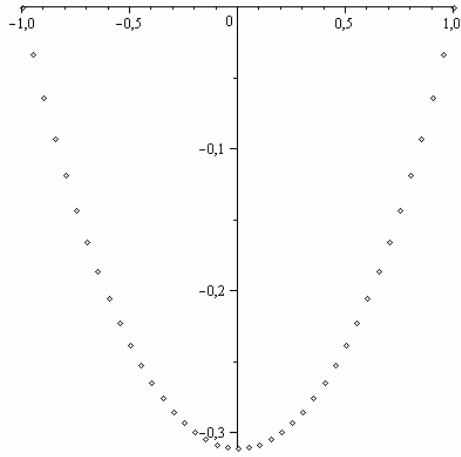
$$y'' - 2y^2 - 2y - 1 = 0, \quad y(-1) = y(1) = 0 \quad (3.10)$$

sınır değer problemi verilmiş olsun.

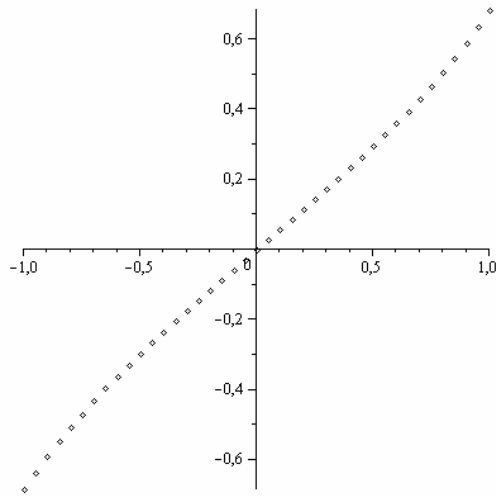
$$y'' + (-2y^2 - 2y - 1) = 0, \quad y(-1) = 0 \quad y'(-1) = 0 \quad (3.11)$$

$$z'' + (-4y - 2)z = 0, \quad z(-1) = 0 \quad z'(-1) = 1 \quad (3.12)$$

Eş.3.10 sınır değer problemi Eş.3.11 ve Eş.3.12 şeklinde iki farklı başlangıç değer problemine dönüştürülmüştür. Daha sonra Algoritma 2.2 kullanılarak ve Maple11 yardımı ile sonuçlar elde edilmiştir.



Şekil 3.5 Eş.3.10 sınır değer probleminin  $y(x_i)$  çözümleri



Şekil 3.6 Eş.3.10 sınır değer probleminin  $y'(x_i)$  çözümleri

Durum 4:

$f(x, y, y') = -e^y + \sin(y)$  olmak üzere

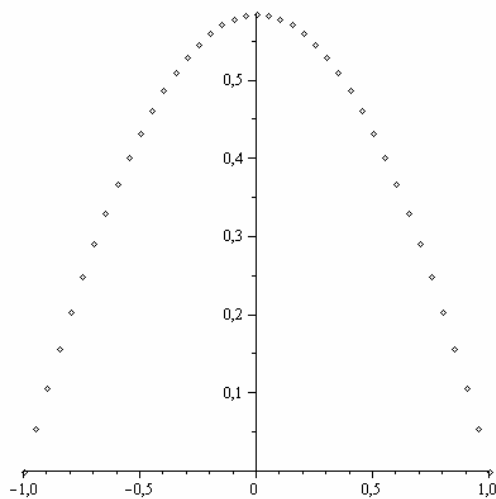
$$y'' + e^y - \sin(y) = 0, \quad y(-1) = y(1) = 0 \quad (3.13)$$

sınır değer problemi verilmiş olsun.

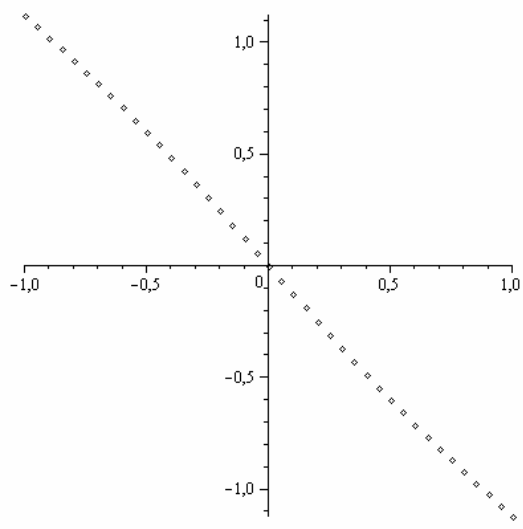
$$y'' + e^y - \sin(y) = 0, \quad y(-1) = 0 \quad y'(-1) = 0 \quad (3.14)$$

$$z'' + (e^y - \cos(y))z = 0, \quad z(-1) = 0 \quad z'(-1) = 1 \quad (3.15)$$

Eş.3.13 sınır değer problemi Eş.3.14 ve Eş.3.15 şeklinde iki farklı başlangıç değer problemine dönüştürülmüştür. Daha sonra Algoritma 2.2 kullanılarak ve Maple11 yardımı ile sonuçlar elde edilmiştir.



Şekil 3.7 Eş.3.13 sınır değer probleminin  $y(x_i)$  çözümleri



Şekil 3.8 Eş.3.13 sınır değer probleminin  $y'(x_i)$  çözümleri

#### 4. VAN DER POL DENKLEMİ VE SAYISAL ÇÖZÜMLER

Titreşimlerin elektrik devrelerinden başka, kalp atışı, mekanik sistemlerdeki salınımlar, ses ve akustiğe kadar pek çok alanda da uygulamaları mevcuttur. İnsan kalbinin düzenli çalışma aralığını incelemek için Balthazar Van der Pol aynı zamanda bir kalp pili ile çalışan gerçek bir insan kalbine benzer şekilde, dışarıdan verilen sinyallerle çalışan elektronik devre modelleri de geliştirmiş ve kalbin düzensiz atışlarının nasıl düzenlenebileceği üzerine çalışmalar yapmıştır. Daha sonraları pek çok bilim adamı fiziksel ve biyolojik olayları bu denklemle modelleyerek çalışmalarını sürdürmüşlerdir[9].

Van der Pol denklemi ya da Van der Pol salınımı (elektrik titreşimleri üreten aygıt) olarak da bilinen bu denklem elektronik teknolojisinin gelişmeye başladığı 1920'lerde vakum tüplerinden oluşan elektrik devrelerinin salınım davranışını modelleyen bir denklem olarak Balthazar Van der Pol (1889-1959) tarafından ilk kez tanımlanmış ve onun adıyla literatüre geçmiştir. Bu tür devrelerin çalışması ve devrelerle ilgili bilgiler kaynak [5]'de bulunabilir. 20. yüzyılın başlarında Balthazar Van der Pol radyo ve telekomünikasyon alanlarında ilk çalışmaları başlatan kişi olmuş ve araştırmalarını vakum tüplerden oluşan elektrik devreler üzerinde deneysel çalışmalara dayandırmıştır. Deneysel çalışmaları sonucunda bu tüplerin (osilatörlerin), günümüzde limit cycle denilen kararlı salınımlar yaptığını açıklamıştır. Bu devrelere, dışarıdan frekansı bu limit cycle ile çok yakın bir sinyal verildiğinde sistemin periyodik salınımlarının bu sinyal ile devam ettirildiğini göstermiştir [7-8]. Bu çalışmalar günümüzde, televizyon ya da radyo verici devrelerinde elektrik akışının kontrolü açısından oldukça önem taşımaktadır[9].

##### 4.1 Vander Pol Denklemi

Van der Pol denkleminin standart formu

$$y'' - \mu(1 - y^2)y' + y = 0 \quad (4.1)$$

şeklinde. Burada  $y$  bağımlı değişkeni zamanın fonksiyonu olup, ikinci terim lineer olmayan damping (bir salınımlı sistemde salınımların genliğini azaltmaya yarayan kuvvet) terimi olarak tanımlanır.  $\mu$  ise lineer olmayan damping teriminin büyüklüğünü gösteren sabit bir sayıdır ve  $\mu$ 'nün farklı durumları için salınımın karakteri aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$\mu < 0$  sistem sönümlenmekte ,

$\mu = 0$  damping (sönüm) terimi ortadan kalkacağından denklem

$$y'' + y = 0$$

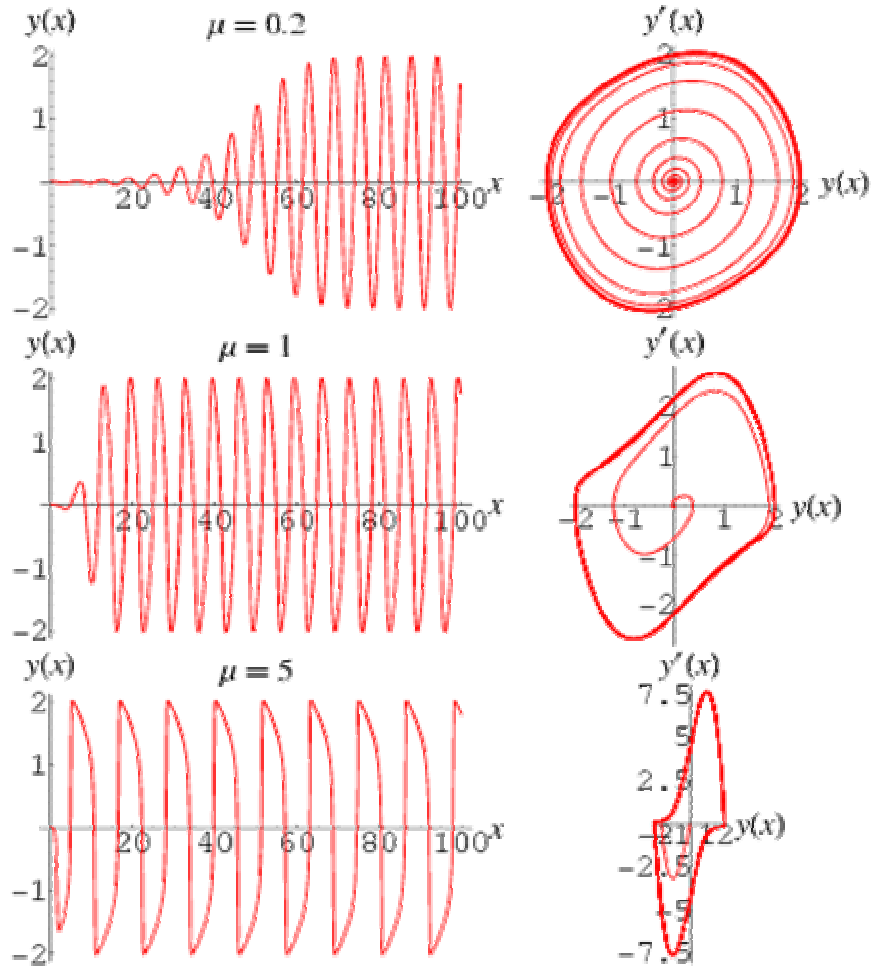
şekline dönüşmekte bu ise basit harmonik salınımı tanımlamaktadır.

$\mu \geq 0$  olduğunda sistem kararlı salınımlar yapmaktadır.

$|\mu| \gg 0$  olduğunda ise sistem kısa zamanda sönümlü duruma geçmektedir.

Şekil 4.1'de Eş.4.1 Vander Pol denkleminin bazı  $\mu$  değerleri için çözümlerinin grafikleri verilmiştir[10].

Van der Pol denklemin lineer olmayan dinamik sistemler için değeri göz önüne alındığında bu tür sistemlerin önemli özelliklerinin ortaya çıkarılmasında, denklemin çözümlerinin bulunması da oldukça önemlidir. Bu denklemin belli başlangıç şartlarında yaklaşık çözümleri üzerine pek çok çalışmalar yapılmıştır[9].



Şekil 4.1  $\mu$ 'nün farklı değerleri için çözüm grafikleri [10]

## 4.2. Sayısal Çözümler

Van der Pol denkleminin standart formu olan

$$y'' - \mu(1 - y^2)y' + y = 0, \quad y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta \quad (4.2)$$

Eş.4.2 denkleminde, ikinci terimin katsayısını değiştirerek  $\mu$ 'nün farklı değerleri için 4. mertebeden Runge Kutta metodu kullanılarak verilen

başlangıç şartlarında yaklaşık çözümler Maple 11 ile elde edilmiş ve grafiklerle gösterilmiştir.

#### Algoritma 4.1 (Van der pol Denklemi)

Lineer olmayan Van der Pol başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümü için ilk olarak Eş.4.2 problemi yazılır.

Girdi:  $a$  ve  $b$  noktaları,  $\alpha, \beta$  sınır koşulları, aralık sayısı  $N \geq 2$ .

Çıktı:  $y(x_i)$  nin yaklaşık çözümleri  $w_{1,i}$ ;  $y'(x_i)$  nin yaklaşık çözümleri  $w_{2,i}$ ,  
 $i = 0, 1, \dots, N$

Adım 1:  $w_1 = \alpha$ ;

$w_{2,0} = 0$ ;      olsun.

Adım 2:  $i = 1, \dots, N$  Adım 3 ve Adım 4'te kullanılır (Runge-Kutta metodu için).

Adım 3:  $x = a + (i-1)h$  olsun.

Adım 4:  $k_{1,1} = hw_{2,i-1}$ ;

$$k_{1,2} = hf(x, w_{1,i-1}, w_{2,i-1});$$

$$k_{2,1} = h(w_{2,i-1} + (1/2)k_{1,2});$$

$$k_{2,2} = hf(x + h/2, w_{1,i-1} + (1/2)k_{1,1}, w_{2,i-1} + (1/2)k_{1,2});$$

$$k_{3,1} = h(w_{2,i-1} + (1/2)k_{2,2});$$

$$k_{3,2} = hf(x + h/2, w_{1,i-1} + (1/2)k_{2,1}, w_{2,i-1} + (1/2)k_{2,2});$$

$$k_{4,1} = h(w_{2,i-1} + k_{3,2});$$

$$k_{4,2} = hf(x + h, w_{1,i-1} + k_{3,1}, w_{2,i-1} + k_{3,2});$$

$$w_{1,i} = w_{1,i-1} + (k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1}) / 6;$$

$$w_{2,i} = w_{2,i-1} + (k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2}) / 6$$

Adım 5:  $i = 0, 1, \dots, N$  için

$x = a + ih$  olsun.

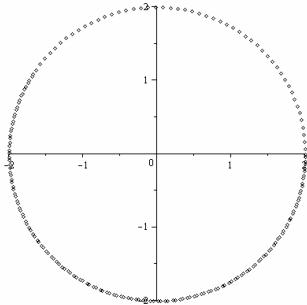
Çıktı( $a, w_{1,i}, w_{2,i}$ ).

Adım 6: Son.

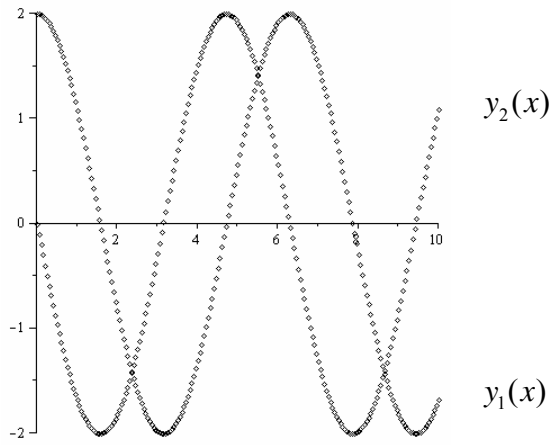
$\mu = 0$  değeri için;

$$y'' + y = 0 \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0 \quad (4.3)$$

başlangıç değer probleminin çözümleri yarıçapı 2 olan bir çember belirtir (Şekil 4.1).  $y_1(x)$  Eş.4.3'ün ve  $y_2(x)$ 'de Eş.4.3'ün türevlerinin çözüm eğrileridir (Şekil 4.2).



Şekil 4.2  $\mu = 0$  için Van der pol denkleminin çözümü

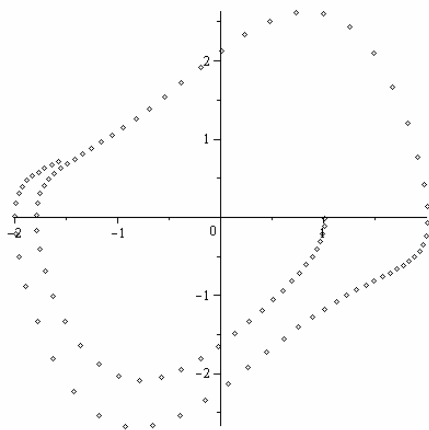


Şekil 4.3  $\mu = 0$  van der pol denkleminin  $y_1(x)$  ve  $y_2(x)$  çözümleri

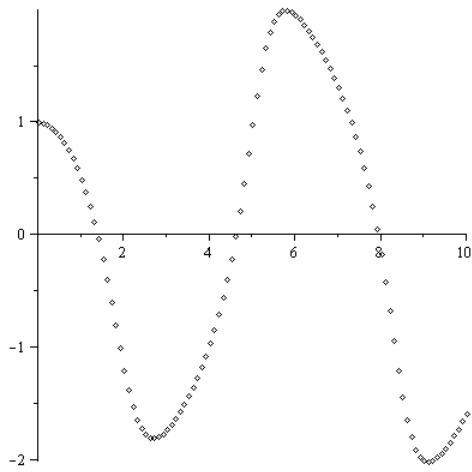
$\mu = 1$  için;

$$y'' - (1 - y')y + y = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \quad (4.4)$$

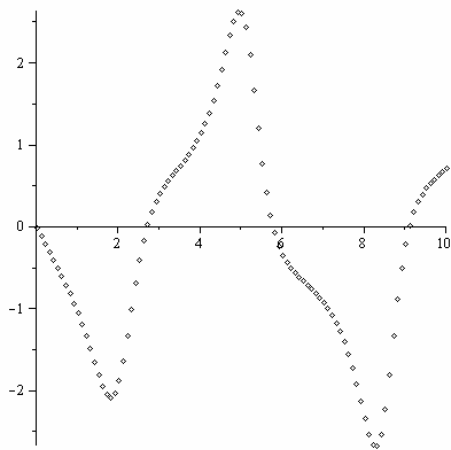
başlangıç değer probleminin çözümü aşağıdaki şekildedir:



Şekil 4.4  $\mu = 1$  için Van der pol denkleminin çözümü



Şekil 4.5  $\mu = 1$  için Van der pol denkleminin  $y_1(x)$  çözümü

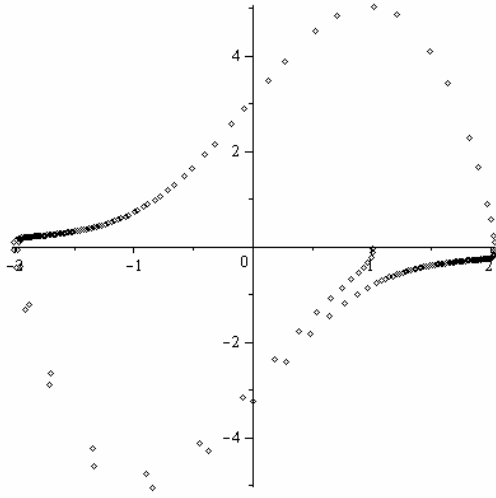


Şekil 4.6  $\mu = 1$  için Van der pol denkleminin  $y_2(x)$  çözümü

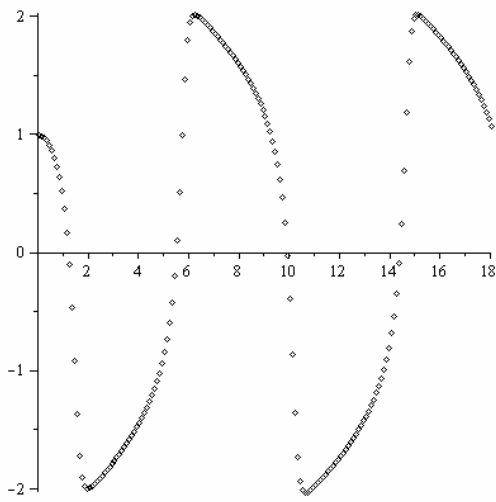
$\mu = 3$  için;

$$y'' - 3(1 - y')y + y = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \quad (4.5)$$

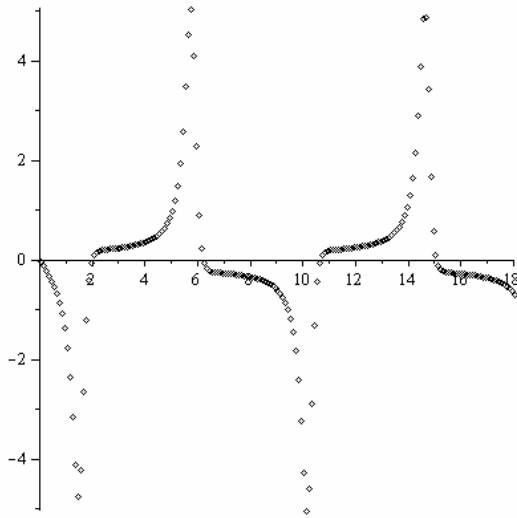
başlangıç değer probleminin çözümü aşağıdaki şekildedir:



Şekil 4.7  $\mu = 3$  için Van der pol denkleminin çözümü



Şekil 4.8  $\mu = 3$  için Van der pol denkleminin  $y_1(x)$  çözümü

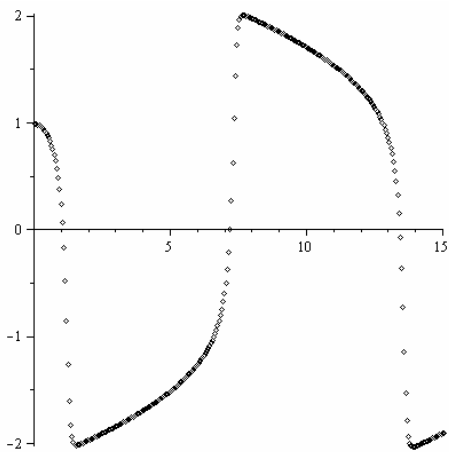


Şekil 4.9  $\mu = 3$  için Van der pol denkleminin  $y_2(x)$  çözümü

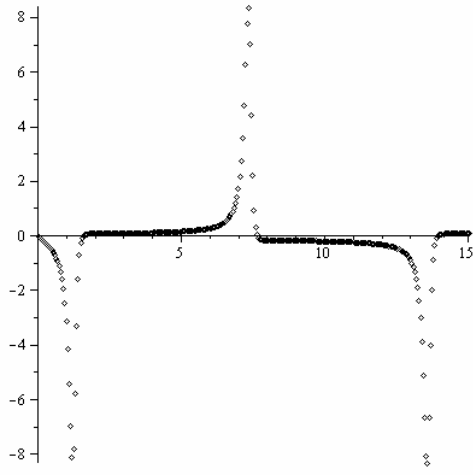
$\mu = 5.6$  için;

$$y'' - \left(\frac{28}{5}\right)(1 - y')y + y = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \quad (4.7)$$

başlangıç değer probleminin  $y_1(x)$  ve  $y_2(x)$  çözümleri Şekil 4.10 ve Şekil 4.11'de verilmektedir.



Şekil 4.10  $\mu = 5.6$  için Van der pol denkleminin  $y_1(x)$  çözümü



Şekil 4.11  $\mu = 5.6$  için Van der pol denkleminin  $y_2(x)$  çözümü

## 5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, Lineer ve lineer olmayan bazı özel tipte sınır değer problemleri için Shooting metodu kullanılarak, ikinci mertebeden sınır değer problemi iki tane birinci mertebeden başlangıç değer problemlerine dönüştürülmüş ve bunların sayısal çözümleri dördüncü mertebeden Runge-Kutta metodu kullanılarak Maple 11 yardımı ile elde edilmiştir. Dördüncü mertebeden Runge-Kutta metodu başlangıç değer problemlerinin yaklaşık çözümleri için sıkça tercih edilen güçlü metotlardan birisidir. Lokal kesme hatası  $O(h^4)$  mertebesinden olup oldukça küçüktür. Bu çalışma sonunda elde edilen sayısal değerler tam çözümlerin olduğu durumlar için incelenmiş ve hata oranlarının oldukça küçük olduğu görülmüştür. Sonuçlar Çizelge 2.1, Çizelge 2.2 ve Şekil 2.6'da karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Tam çözümlerin bilinmediği durumlarda da metodun yakınsadığı görülmektedir. Maple 11 yardımı ile yaklaşık çözümlerin grafikleri verilmiştir. Günlük hayatımızda pek çok bilim dalında ve özellikle elektronik devrelerdeki salınımları veya kalp atışlarının ritmini modellemek için kullanılan Van der Pol denkleminin de bazı özel başlangıç şartları ve  $\mu$  (damping teriminin büyüklüğünü tanımlayan parametre)'nün farklı değerleri için Runge Kutta metodu ile Maple 11 programında yaklaşık çözümleri elde edilerek salınım eğrileri çizdirilmiştir. Sonuçların kaynak [1]'de varolan sonuçlarla uyumlu olduğu görülmüştür. İleride hedeflenen bu programların daha da geliştirilerek Van der Pol denklemine dışarıdan etki eden kuvvetlerin olduğu yani denklemin homojen olmayan durumlarını da göz önünde bulundurarak çalışmaların ilerletilmesidir.

## KAYNAKLAR

1. Burden, R.L., Faires, J.D., "Boundary-value problems for ordinary differential equations", Numerical Analysis 7<sup>th</sup> ed., **Brooks Cole**, USA, 645-660 (2001).
2. Keller, H.B., "Numerical Methods For Two-Point Boundary-Value Problems", **Dover Publications, Inc**, New York, 1-3,191-209(1992).
3. Ou,C.H., Wong, R., "Studies in Applied Mathematics", **Blackwell Publishing**, Oxford, 112:161-200(2004).
4. Internet: Maple 11 "Maplesoft a division of Naterloo Maple Inc.", <http://www.maplesoft.com/products/maple> (2007).
5. Bradie, B., "A Friendly Introduction to Numerical Analysis", **Pearso Education, Inc**, New Jersey, 714-715(2006).
6. Strogatz,S., "Nonlinear Dynamics and Chaos", **Addison**, Wesley, 228(1994).
7. Appleton,E.V.,Van der Pol, B., "On a type of oscillation-hysteresis in a simple triode generator", **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science** , 6(43):177-193(1922).
8. Appleton,E.V.,Van der Pol, B., "On the form of free triode vibrations", **The London, Edinburgh, and Dublin Pphilosophical Magazine and Journal of Science**, 6(42):201-220(1921).
9. Tsatsos, M., "Theoretical and Numerical Study of the Van der Pol Equation", **Aristotle University of ThessalonikiSchool of SciencesDepartment of PhysicsSection of Astrophysics Astronomy and MechanicsMechanics**, Thessaloniki, 8-10,33,(2006).
10. İnternet : Wolfram MathWorld "2008 van der Pol Equation" <http://mathworld.wolfram.com/vanderPolEquation.html> (2008).

## **EKLER**

## EK-1 Shooting Metodu

### Problem 1.1

$$y'' = -\frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad y(1)=1, \quad y(2)=2$$

Sınır değer probleminin Maple 11 yardımı ile çözümünün elde edilmesi aşağıda verilmektedir.

```
> restart;
> denklem1:= { diff(y(x), x$2)=(-
2/x)*diff(y(x),x)+(2/x^2)*y(x)+sin(ln(x))/x^2};
      denklem1 := { y''(x) = -\frac{2y'(x)}{x} + \frac{2y(x)}{x^2} + \frac{\sin(\ln(x))}{x^2} }
> bsl:= { y(1)=1, D(y)(1)=0};
      bsl := {y(1) = 1, D(y)(1) = 0}
> dsol4 := dsolve(denklem1 union bsl, numeric,
method=rkf45,
      relerr=Float(1,-8), abserr=Float(1,-8),
      maxfun=0, output=procedurelist);
      dsol4 := proc(x_rkf45) ... end proc
> dsol4(1);
      [x = 1., y(x) = 1., y'(x) = 0.]
> dsol4(1.1);
      [x = 1.1, y(x) = 1.0089564163405353, y'(x) = 0.16979407711439406]
> u[0]:=1.00000000;
      u_0 := 1.00000000
> u0 :=op(2,dsol4(1)[2]);
      u0 := 1.
> u[1] :=op(2,dsol4(1.1)[2]);
      u_1 := 1.0089564163405353
> u[2] :=op(2,dsol4(1.2)[2]);
      u_2 := 1.0324487023729247
> u[3] :=op(2,dsol4(1.3)[2]);
      u_3 := 1.0667369240965987
> u[4] :=op(2,dsol4(1.4)[2]);
      u_4 := 1.1092808005580370
> u[5] :=op(2,dsol4(1.5)[2]);
      u_5 := 1.1582927555381261
> u[6] :=op(2,dsol4(1.6)[2]);
```

**EK-1 (Devam) Shooting Metodu**

```

                                u6 := 1.2124764787977051
> u[7] :=op(2,dsol4(1.7)[2]);
                                u7 := 1.2708673504470204
> u[8] :=op(2,dsol4(1.8)[2]);
                                u8 := 1.3327313676605379
> u[9] :=op(2,dsol4(1.9)[2]);
                                u9 := 1.3974990682412702
> u[10] :=op(2,dsol4(2)[2]);
                                u10 := 1.4647210603894047

> denklem2 := { diff(y(x), x$2)=(-
2/x)*diff(y(x),x)+(2/x^2)*y(x)};
                                denklem2 := { y''(x) = -  $\frac{2y'(x)}{x} + \frac{2y(x)}{x^2}$  }
> bk2 := { y(1)=0, D(y)(1)=1};
                                bk2 := {y(1)=0, D(y)(1)=1}
> dsol5 := dsolve(denklem2 union bk2, numeric,
method=rkf45,
                                relerr=Float(1,-8), abserr=Float(1,-8),
                                maxfun=0, output=procedurelist);
                                dsol5 := proc(x_rkf45) ... end proc

> dsol5(1);
                                [x = 1., y(x) = 0., y'(x) = 1.]
> dsol5(1.1);
                                [x = 1.1, y(x) = 0.091184572980158945y'(x)
                                = 0.83420985983169593]

> v[0]:=0.00000000;
                                v0 := 0.
> v[1] :=op(2,dsol5(1.1)[2]);
                                v1 := 0.091184572980158945
> v[2] :=op(2,dsol5(1.2)[2]);
                                v2 := 0.16851851851438667
> v[3] :=op(2,dsol5(1.3)[2]);
                                v3 := 0.23609467468368994
> v[4] :=op(2,dsol5(1.4)[2]);
                                v4 := 0.29659863937304448
> v[5] :=op(2,dsol5(1.5)[2]);
                                v5 := 0.35185185202690438
> v[6] :=op(2,dsol5(1.6)[2]);
                                v6 := 0.40312499948966185
> v[7] :=op(2,dsol5(1.7)[2]);

```

### EK-1 (Devam) Shooting Metodu

```

v7 := 0.45132641244065946
> v[8] :=op(2,dsol5(1.8)[2]);
v8 := 0.49711934054589851
> v[9] :=op(2,dsol5(1.9)[2]);
v9 := 0.54099722976342157
> v[10] :=op(2,dsol5(2)[2]);
v10 := 0.58333333310283230
> de := diff(y(x), x$2)=(-
2/x)*diff(y(x),x)+(2/x^2)*y(x)+sin(ln(x))/x^2;
ic := y(1)=1,y(2)=2;
dsolve({de,ic},y(x)):
g := unapply(evalf[9](rhs(%)),x);

```

$$de := y''(x) = -\frac{2y'(x)}{x} + \frac{2y(x)}{x^2} + \frac{\sin(\ln(x))}{x^2}$$

$$ic := y(1) = 1, y(2) = 2$$

$$g := x \mapsto 1.13920702x - \frac{0.039207014}{x^2} - 0.200000000\cos(0.500000000\ln(x))^2 + 0.100000000 - 0.600000000\sin(0.500000000\ln(x)) \cos(0.500000000\ln(x))$$

```

> c := evalf[9]((2-u[10])/v[10]);
c := 0.91762104
> w := x -> un(x)+c*vn(x);
w := x \mapsto un(x) + c vn(x)
> w[0]:=1;
w0 := 1
> w[1]:=u[1]+c*v[1];
w1 := 1.092629299
> w[2]:=u[2]+c*v[2];
w2 := 1.187084840
> w[3]:=u[3]+c*v[3];
w3 := 1.283382360
> w[4]:=u[4]+c*v[4];
w4 := 1.381445950
> w[5]:=u[5]+c*v[5];
w5 := 1.481159419
> w[6]:=u[6]+c*v[6];
w6 := 1.582392460
> w[7]:=u[7]+c*v[7];
w7 := 1.685013960

```

**EK-1 (Devam) Shooting Metodu**

```

> w[8]:=u[8]+c*v[8];
                                     w8 := 1.78889853:

> w[9]:=u[9]+c*v[9];
                                     w9 := 1.89392950:

> w[10]:=u[10]+c*v[10];
                                     w10 := 2.00000000:

> xvals := [seq(1+i*0.1,i=0..10)]:
gvals := evalf(evalf[9](map(g,xvals))):
linalg[matrix]([[x,'u(x)'],'v(x)'],'w','g(x)'],'hata'],
               seq([xvals[i],u[i-1],v[i-1],w[i-1],gvals[i],gvals[i]-w[i-1]],i=1..11)]);

```

```

[[x,u(x),v(x),w,g(x),hata],
 [1.,1.000000000.,1,1.000000011.10-8],
 [1.1,1.0089564163405353340.09118457298015894551.092629299
 1.092629311.10-8],
 [1.2,1.032448702372924740.1685185185143866781.187084840
 1.187084851.010-8],
 [1.3,1.066736924096598700.2360946746836899421.283382365
 1.283382375.10-9],
 [1.4,1.109280800558037020.2965986393730444821.381445953
 1.381445967.10-9],
 [1.5,1.158292755538126100.3518518520269043881.481159419
 1.481159431.10-8],
 [1.6,1.212476478797705150.4031249994896618501.582392461
 1.58239246-1.10-9],
 [1.7,1.270867350447020480.4513264124406594631.685013962
 1.685013978.10-9],
 [1.8,1.332731367660537900.4971193405458985141.788898535
 1.788898551.510-8],
 [1.9,1.397499068241270220.5409972297634215721.893929509
 1.893929521.10-8],
 [2.0,1.464721060389404700.5833333331028323082.000000000
 2.000000022.010-8]]

```

**EK-1 (Devam) Shooting Metodu****Problem 1.2**

$$y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy'), \quad 1 \leq x \leq 3, \quad y(1) = 17, \quad y(3) = \frac{43}{3}$$

Sınır değer problemini shooting metodu ile

$$y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy'), \quad 1 \leq x \leq 3, \quad y(1) = 17, \quad y'(1) = t_k$$

$$z'' = \frac{\partial f}{\partial y} z + \frac{\partial f}{\partial y'} z' = -\frac{1}{8}(y'z + yz'), \quad 1 \leq x \leq 3, \quad z(1) = 0, \quad z'(1) = 1$$

iki başlangıç değer problemine dönüştürüp Maple 11 ile yaklaşık çözümleri elde edilerek  $y(x) = x^2 + 16/x$  analitik çözüm değerleri ile karşılaştırılmasının yapıldığı Maple 11 programı aşağıda verilmektedir.

```
> restart;
> h:=0.1;
w1[0]:=17;
u1[0]:=0;
u2[0]:=1;
x1[0]:=1;
beta:=43/3;
t[0]:=-4/3;
tol:=10^(-4);
```

```
h := 0.1
w1_0 := 17
u1_0 := 0
u2_0 := 1
x1_0 := 1
beta := 43/3
t_0 := -4/3
```

### EK-1 (Devam) Shooting Metodu

$$tol := \frac{1}{10000}$$

> basl:=y(0)=-4/3,y(1)=43/3;

$$basl := y(0) = -\frac{4}{3}, y(1) = \frac{43}{3}$$

> f:=(x,y,z)->(1/8)\*(32+2\*x^3-y\*z);

$$f := (x,y,z) \mapsto 4 + \frac{x^3}{4} - \frac{yz}{8}$$

> fy:=(x,y,z)->-z/8;

fz:=(x,y,z)->-y/8;

$$fy := (x,y,z) \mapsto -\frac{z}{8}$$

$$fz := (x,y,z) \mapsto -\frac{y}{8}$$

> for l from 0 to 19 do

w2[0]:=t[l]:

for i from 0 to 20 do

x1[i+1]:=x1[i]+h:

k1[1]:=h\*w2[i]:

k1[2]:=subs(h\*f(x1[i],w1[i],w2[i])):

k2[1]:=h\*(w2[i]+k1[2]/2):

k2[2]:=subs(h\*f(x1[i]+h/2,w1[i]+k1[1]/2,w2[i]+k1[2]/2)):

k3[1]:=h\*(w2[i]+k2[2]/2):

k3[2]:=subs(h\*f(x1[i]+h/2,w1[i]+k2[1]/2,w2[i]+k2[2]/2)):

k4[1]:=h\*(w2[i]+k3[2]):

k4[2]:=subs(h\*f(x1[i]+h,w1[i]+k3[1],w2[i]+k3[2])):

w1[i+1]:=w1[i]+(k1[1]+2\*k2[1]+2\*k3[1]+k4[1])/6:

w2[i+1]:=w2[i]+(k1[2]+2\*k2[2]+2\*k3[2]+k4[2])/6:

p1[1]:=h\*u2[i]:

p1[2]:=subs(h\*(fy(x1[i],w1[i],w2[i])\*u1[i]+fz(x1[i],w1[i],w2[i])\*u2[i])):

p2[1]:=h\*(u2[i]+p1[2]/2):

p2[2]:=subs(h\*(fy(x1[i]+h/2,w1[i],w2[i])\*(u1[i]+p1[1]/2)+fz(x1[i]+h/2,w1[i],w2[i])\*(u2[i]+p1[2]/2))):

p3[1]:=h\*(u2[i]+p2[2]/2):

p3[2]:=subs(h\*(fy(x1[i]+h/2,w1[i],w2[i])\*(u1[i]+p2[1]/2)+fz(x1[i]+h/2,w1[i],w2[i])\*(u2[i]+p2[2]/2))):

p4[1]:=h\*(u2[i]+p3[2]):

p4[2]:=subs(h\*(fy(x1[i]+h,w1[i],w2[i])\*(u1[i]+p3[1])+fz(x1[i]+h,w1[i],w2[i])\*(u2[i]+p3[2]))):

u1[i+1]:=u1[i]+(p1[1]+2\*p2[1]+2\*p3[1]+p4[1])/6:

u2[i+1]:=u2[i]+(p1[2]+2\*p2[2]+2\*p3[2]+p4[2])/6:

end do:

t[l+1]:=t[l]-(w1[20]-beta)/u1[20]:

end do:

> for l from 0 to 20 do

**EK-1 (Devam) Shooting Metodu**

```
y(x[1]) := x1[1]^2 + 16/x1[1]:
```

```
end do:
```

```
> linalg[matrix]([['x', 'w1', 'yi', 'w1[i]-y(x)'],
  seq([x1[i], w1[i], y(x[i]), w1[i]-y(x[i])], i=0..20)]);
```

Çizelge 2.1 Problem 2.1 sınır değer probleminin yaklaşık çözümleri ve hata

$x$	$w1$	$y_i$	$w1_i - y(x)$
1	17	17	0
1.1	15.75549615	15.75545455	0.00004160
1.2	14.77339116	14.77333333	0.00005783
1.3	13.99775428	13.99769231	0.00006197
1.4	13.38863178	13.38857143	0.00006035
1.5	12.91672271	12.91666667	0.00005604
1.6	12.56005060	12.56000000	0.00005060
1.7	12.30180956	12.30176471	0.00004485
1.8	12.12892809	12.12888889	0.00003920
1.9	12.03108648	12.03105263	0.00003385
2.0	12.00002889	12.00000000	0.00002889
2.1	12.02907196	12.02904762	0.00002434
2.2	12.11274750	12.11272727	0.00002023
2.3	12.24653825	12.24652174	0.00001651
2.4	12.42667986	12.42666667	0.00001319
2.5	12.65001023	12.65000000	0.00001023
2.6	12.91385376	12.91384615	$7.61 \cdot 10^{-6}$
2.7	13.21593123	13.21592593	$5.30 \cdot 10^{-6}$
2.8	13.55428900	13.55428571	$3.29 \cdot 10^{-6}$
2.9	13.92724290	13.92724138	$1.52 \cdot 10^{-6}$
3.0	14.33333333	14.33333333	0.

```
> linalg[matrix]([['x', 'w1', 'yi'],
  seq([x1[i], w1[i], y(x[i])], i=0..20)]);
```

```
> with(plots);
```

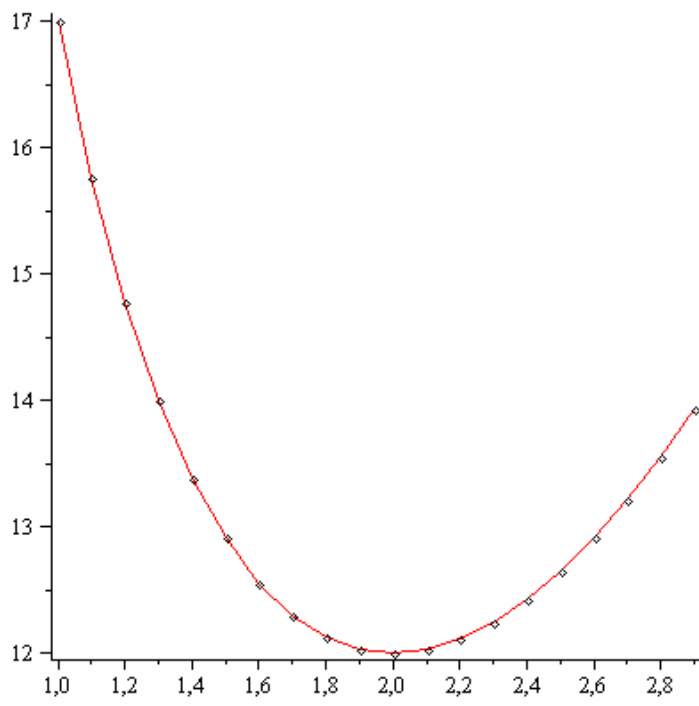
```
> p1 := plot({seq([x1[i], w1[i]], i=0..19)});
```

*p1 := PLOT(...)*

```
> p2 := pointplot({seq([x1[i], x1[i]^2 + 16/x1[i]], i=0..19)});
```

*p2 := PLOT(...)*

**EK-1 (Devam) Shooting Metodu**  
`display([p1,p2]);`



Şekil 2.1 Problem 2.1 Lineer olmayan sınır değer probleminin çözüm eğrileri

## EK-2 Bazı Özel Problemlere Shooting Metodunun Uygulanması

$$y'' + ((y')^2 - 2y - x^2) = 0, \quad y(-1) = y(1) = 0$$

Sınır değer probleminin lineer olmayan Shooting metodu ile Maple 11 kullanılarak yaklaşık çözümleri aşağıdaki program ile elde edilmiştir.

```

> restart;
> h:=0.1;
w1[0]:=0;
u1[0]:=0;
u2[0]:=1;
x1[0]:=-1;
beta:=0;
t[0]:=0;

                                h := 0.1
                                w1_0 := 0
                                u1_0 := 0
                                u2_0 := 1
                                x1_0 := -1
                                beta := 0
                                t_0 := 0

> Q:=(x,y,z)->(x^2+2*y-z^2);
                                Q := (x,y,z) ↦ x2 + 2y - z2
> basl:=y(-1)=0,y(1)=0;
                                basl := y(-1) = 0, y(1) = 0

> Qy:=(x,y,z)->2;
                                Qy := (x,y,z) ↦ 2
Qz:=(x,y,z)->-2*z;
                                Qz := (x,y,z) ↦ -2z

> for l from 0 to 19 do
w2[0]:=t[l]:
for i from 0 to 20 do
x1[i+1]:=x1[i]+h:
k1[1]:=h*w2[i]:
k1[2]:=subs(h*Q(x1[i],w1[i],w2[i])):
k2[1]:=h*(w2[i]+k1[2]/2):
k2[2]:=subs(h*Q(x1[i]+h/2,w1[i]+k1[1]/2,w2[i]+k1[2]/2)):
k3[1]:=h*(w2[i]+k2[2]/2):
k3[2]:=subs(h*Q(x1[i]+h/2,w1[i]+k2[1]/2,w2[i]+k2[2]/2)):

```

## EK-2 (Devam) Bazı Özel Problemlere Shooting Metodunun Uygulanması

```

k4[1]:=h*(w2[i]+k3[2]):
k4[2]:=subs(h*Q(x1[i]+h,w1[i]+k3[1],w2[i]+k3[2])):
w1[i+1]:=w1[i]+(k1[1]+2*k2[1]+2*k3[1]+k4[1])/6:
w2[i+1]:=w2[i]+(k1[2]+2*k2[2]+2*k3[2]+k4[2])/6:
p1[1]:=h*u2[i]:
p1[2]:=subs(h*(Qy(x1[i],w1[i],w2[i])*u1[i]+Qz(x1[i],w1[i],w2[i])*u2[i])):
p2[1]:=h*(u2[i]+p1[2]/2):
p2[2]:=subs(h*(Qy(x1[i]+h/2,w1[i],w2[i])*(u1[i]+p1[1]/2)+Qz(x1[i]+h/2,w1[i],w2[i])*(u2[i]+p1[2]/2))):
p3[1]:=h*(u2[i]+p2[2]/2):
p3[2]:=subs(h*(Qy(x1[i]+h/2,w1[i],w2[i])*(u1[i]+p2[1]/2)+Qz(x1[i]+h/2,w1[i],w2[i])*(u2[i]+p2[2]/2))):
p4[1]:=h*(u2[i]+p3[2]):
p4[2]:=subs(h*(Qy(x1[i]+h,w1[i],w2[i])*(u1[i]+p3[1])+Qz(x1[i]+h,w1[i],w2[i])*(u2[i]+p3[2]))):
u1[i+1]:=u1[i]+(p1[1]+2*p2[1]+2*p3[1]+p4[1])/6:
u2[i+1]:=u2[i]+(p1[2]+2*p2[2]+2*p3[2]+p4[2])/6:
end do:
t[l+1]:=t[l]-(w1[20]-beta)/u1[20]:
end do:
> linalg[matrix](['x','w1','w2'],
    seq([x1[i],w1[i],w2[i]],i=0..20));

```

## EK-2 (Devam) Bazı Özel Problemlere Shooting Metodunun Uygulanması

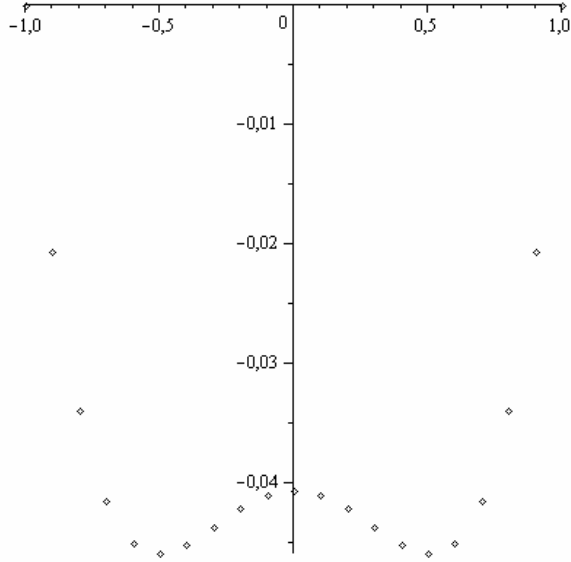
Çizelge 3.2 Problem 3.2  $y(x_i)$  ve  $y'(x_i)$ 'nin çözümleri

$x$	$w1$	$w2$
-1	0	-0.2501769477
-0.9	-0.02066384173	-0.1663789148
-0.8	-0.03390325793	-0.1013992031
-0.7	-0.04150574830	-0.05328465659
-0.6	-0.04504745711	-0.01979750428
-0.5	-0.04587456532	0.001397580268
-0.4	-0.04510032962	0.01260766266
-0.3	-0.04361181967	0.01604183979
-0.2	-0.04208128550	0.01378624273
-0.1	-0.04097831458	0.007811233444
0.	-0.04058012707	$-2.11183 \cdot 10^{-7}$
0.1	-0.04097834578	-0.007811652109
0.2	-0.04208134608	-0.01378664937
0.3	-0.04361190590	-0.01604222330
0.4	-0.04510043574	-0.01260800756
0.5	-0.04587468334	-0.001397865549
0.6	-0.04504757688	0.01979730534
0.7	-0.04150585780	0.05328457497
0.8	-0.03390334397	0.1013992706
0.9	-0.02066389106	0.1663791587
1.0	$-6.26 \cdot 10^{-10}$	0.2501773855

```
> with(plots);
```

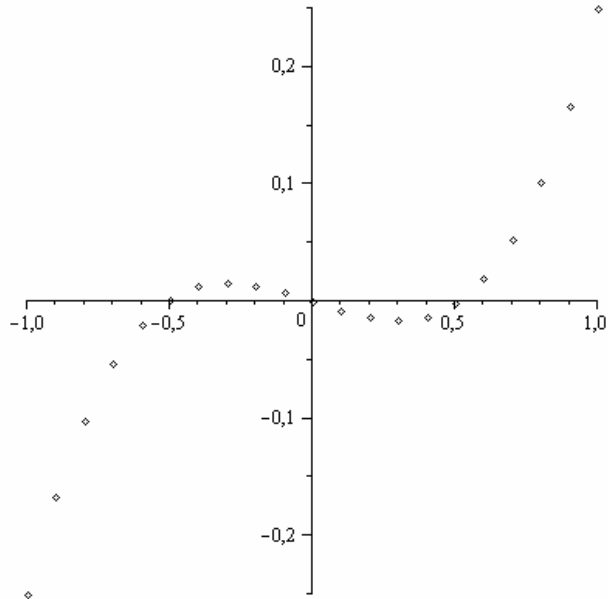
```
> pointplot({seq([x1[i],w1[i]],i=0..20)},colour=black);
```

## EK-2 (Devam) Bazı Özel Problemlere Shooting Metodunun Uygulanması



Şekil 3.3 Problem 3.2 Lineer olmayan sınır değer probleminin  $y(x_i)$  çözümü

```
> pointplot({seq([x1[i],w2[i]],i=0..20)});
```



Şekil 3.4 Problem 3.2 Lineer olmayan sınır değer probleminin  $y'(x_i)$  çözümü

### EK-3 Van Der Pol Denklemi ve Sayısal Çözümler

$$y'' - \mu(1 - y^2)y' + y = 0, \quad y(0) = \alpha, \quad y'(0) = 0$$

genel formunda verilen Van der pol denkleminin çözümlerinin  $\mu = 2$  için yazılan Maple 11 programı aşağıda verilmektedir.

$$y'' - 2(1 - y^2)y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

```

> restart;
> h:=0.1;
w1[0]:=1;
w2[0]:=0;
x1[0]:=0;

                                     h := 0.1
                                     w1_0 := 1
                                     w2_0 := 0
                                     x1_0 := 0

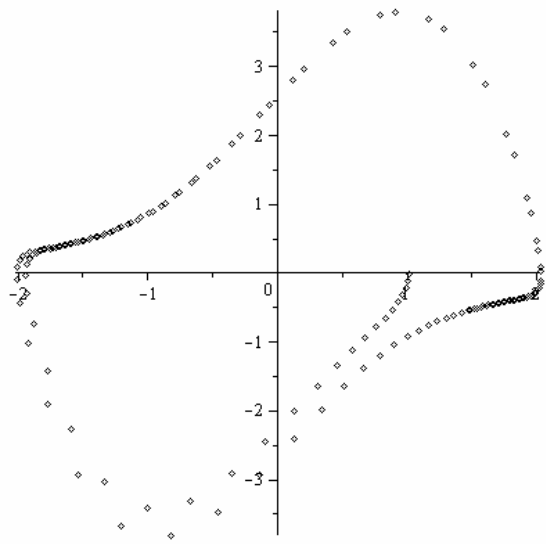
> f:=(x,y,z)->2*(1-y^2)*z-y;
                                     f := (x,y,z) ↦ 2(1-y^2)z - y

> for i from 0 to 150 do
x1[i+1]:=x1[i]+h:
k1[1]:=h*w2[i]:
k1[2]:=subs(h*f(x1[i],w1[i],w2[i])):
k2[1]:=h*(w2[i]+k1[2]/2):
k2[2]:=subs(h*f(x1[i]+h/2,w1[i]+k1[1]/2,w2[i]+k1[2]/2)):
k3[1]:=h*(w2[i]+k2[2]/2):
k3[2]:=subs(h*f(x1[i]+h/2,w1[i]+k2[1]/2,w2[i]+k2[2]/2)):
k4[1]:=h*(w2[i]+k3[2]):
k4[2]:=subs(h*f(x1[i]+h,w1[i]+k3[1],w2[i]+k3[2])):
w1[i+1]:=w1[i]+(k1[1]+2*k2[1]+2*k3[1]+k4[1])/6:
w2[i+1]:=w2[i]+(k1[2]+2*k2[2]+2*k3[2]+k4[2])/6:
end do:
> with(plots);

> pointplot({seq([w1[i],w2[i]],i=0..150)});

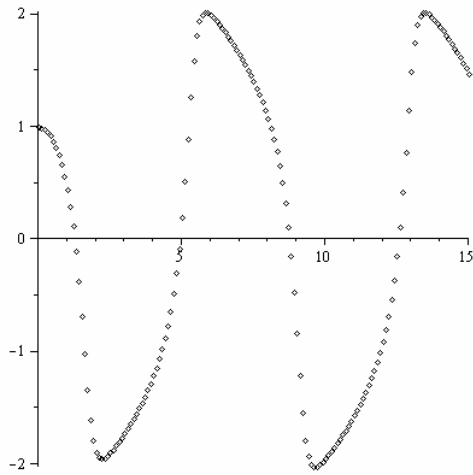
```

### EK-3 (Devam) Van Der Pol Denklemini ve Sayısal Çözümler



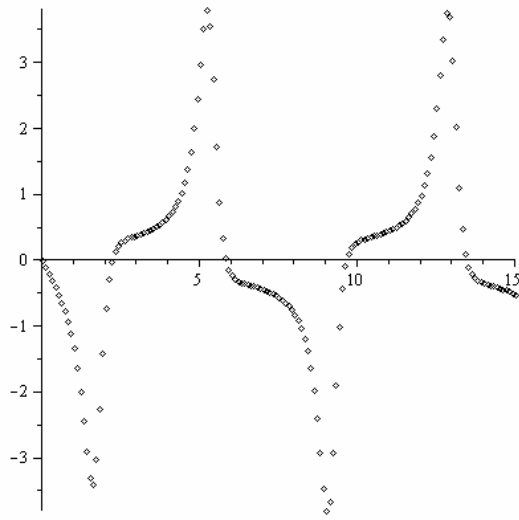
Şekil 4.6 Van der pol denkleminin çözümü ( $\mu = 2, \alpha = 1$ )

```
> pointplot({seq([x1[i],w1[i]],i=0..150)});
```



Şekil 4.7 Van der pol denkleminin  $y(x_i)$  çözümü ( $\mu = 2$ )

```
> pointplot({seq([x1[i],w2[i]],i=0..150)});
```

**EK-3 (Devam) Van Der Pol Denklemini ve Sayısal Çözümler**

Şekil 4.8 Van der pol denkleminin  $y'(x_i)$  çözümü ( $\mu = 2$ )

## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : GÜMÜŞ, Gülcan  
Uyruğu : T.C.  
Doğum tarihi ve yeri : 22.05.1977 Yalova  
Medeni hali : Bekar  
e-mail : [g\\_gumus77@hotmail.com](mailto:g_gumus77@hotmail.com)

### Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Ankara Üniv. / Matematik Bölümü	2001
Lise	Nevzat Ayaz Lisesi	1994

### İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2000–2002	Garanti Bankası	Gişe Asistanı
2002–2004	Yalova Önder Dershanesi	Matematik Öğretmeni
2004–2005	Siirt Gazi Lisesi	Matematik Öğretmeni
2005–2007	Ankara Bala Lisesi	Matematik Öğretmeni
2007-	Kocaeli Anibal Anadolu Lisesi	Matematik Öğretmeni

### Yabancı Dil

İngilizce

### Hobiler

Bilgisayar teknolojileri, Kitap, Satranç