
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLER: SAYISAL İNTEGRAL ALMA YÖNTEMLERİ

İrem BEKTAŞ GÜNER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2018

İrem BEKTAŞ GÜNER tarafından hazırlanan "KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLER: SAYISAL İNTEGRAL ALMA YÖNTEMLERİ" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof.Dr. Fatma AYAZ

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ..……

Başkan: Prof.Dr. Ömer AKIN

Matematik Anabilim Dalı, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ……...

Üye: Doç.Dr. Fikriye Nuray YILMAZ

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ……...

Tez Savunma Tarihi: 31/01/2018

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

……

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

İrem BEKTAŞ GÜNER

31/01/2018

KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLER: SAYISAL İNTEGRAL ALMA YÖNTEMLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

İrem BEKTAŞ GÜNER

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2018

ÖZET

Bu tez çalışması, temel olarak iki konudan oluşmaktadır. Bu iki konu beş bölüm halinde incelenmiştir. Birinci olarak, kesirli değişen mertebeden diferensiyel denklemler için yakınsaklığı 2. mertebeden sayısal bir yöntem incelenmiş ve daha sonra kesirli diferensiyel denklemlere farklı terimlerinde ilavesiyle yöntemin geçerliliği daha genel bir sınıf için test edilmiştir. İkinci konu, lineer ve lineer olmayan kesirli diferensiyel denklemler için DTM ya da diferensiyel dönüşüm yöntemi de denilen Taylor seri yöntemine dayalı ve katsayıların cebirsel olarak hesaplandığı bir yöntemin değişen mertebeden kesirli diferensiyel denklemlere uyarlanmasını içermektedir.

Bilim Kodu : 20406

Anahtar Kelimeler : Kesirli Mertebeden Diferensiyel Denklemler, Taylor Seri Yöntemi Sayısal Integral Alma Yöntemleri, Diferensiyel Dönüşüm Metodu.

Sayfa Adedi : 62

Danışman : Prof. Dr. Fatma AYAZ

APPROXIMATE METHODS FOR FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS: NUMERICAL INTEGRATION TECHNIQUES

(M. Sc. Thesis)

İrem BEKTAŞ GÜNER

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2018

ABSTRACT

This thesis, mainly, consists of two subjects. These subjects are studied through five chapters. Firstly, the second order convergent numerical method has been investigated for variable order fractional differential equations and by adding extra terms to the general equation, this method has been tested for more general classes of equations. The second subject involves approximate solutions to variable order linear or nonlinear fractional equations by applying the DTM or it is called a differential transform method, which is based on the evaluations of Taylor series coefficients algebraically.

Science Code : 20406

Key Words : Approximate Solutions for Fractional Order Differential Equations, Numerical Integration Techniques.

Page Number : 62

Supervisor : Prof. Dr. Fatma AYAZ

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının gerçekleştirilmesinde, iki yıl boyunca değerli bilgilerini benimle paylaşan, kullandığı her kelimenin hayatıma kattığı önemini asla unutmayacağım saygıdeğer danışman hocam; Prof. Dr. Fatma AYAZ'a, çalışmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen değerli aileme ve çalışma süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen ve hayatımın her evresinde bana destek olan hayat arkadaşım Mustafa GÜNER'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

ÇİZELGELERİN LİSTESİ ix

ŞEKİLLERİN LİSTESİ x

SİMGELER VE KISALTMALAR xi

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ 3

2.1. Gamma Fonksiyonu 3

2.2. Beta Fonksiyonu 4

2.3. Grünwald-Letnikov Kesirli Türev ve İntegrali 4

2.4. Riemann-Liouville Kesirli Türev ve İntegrali 6

2.5. Caputo Kesirli Türevi 7

3. DEĞİŞEN KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN SAYISAL ÇÖZÜM YÖNTEMİ 9

3.1. Değişen Mertebeden Kesirli Diferensiyel Denklemler İçin Sayısal İntegral Alma Yöntemi 9

3.2. Kararlılık ve Yakınsama Analizi 12

3.3. Sayısal Örnekler 14

3.4. Değişen Mertebeden Kesirli Diferensiyel Denkleme $y(t_k)$ Teriminin Eklenmesi 23

3.5. Değişen Mertebeden Kesirli Diferensiyel Denkleme $y''(t_k)$ Teriminin Eklenmesi 29

Sayfa

4. KESİRLİ MERTEBEDEN ÇOK TERİMLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLER 33

4.1. Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi 33

4.2. Bagley-Torvik Denklemi 34

4.3. Özel Tipte Bagley-Torvik Denklemlerinin DTM ile Yaklaşık Çözümleri 34

5. KESİRLİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ 45

6. SONUÇ VE ÖNERİLER 49

KAYNAKLAR 51

EKLER 53

EK-1. $\alpha(t) = 0,5t$ için MATLAB (R2015b) program kodu 54

EK-2. $\alpha(t) = \sin t$ için MATLAB (R2015b) program kodu 55

EK-3. Eklenen $y(t_k)$ terimi için MATLAB (R2015b) program kodu 56

EK-4. $N = 10$ ve $\alpha = 0,5$ MATLAB (R2015b) program kodu 57

EK-5. $0 < \alpha < 1$ ve $q = 1$ Değişken mertebeden Bagley-Torvik denklemi 58

EK-6. $\alpha = 1$ ve $q = 1$ için MATLAB (R2015b) program kodu 59

EK-7. $1 < \alpha_i < 2$ ve $q = 1$ Değişken mertebeden kesirli diferensiyel denklemi 60

EK-8. Lineer olmayan diferensiyel denklemin $\alpha = 1$ yaklaşık çözümü 61

ÖZGEÇMİŞ 62

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

Çizelge 3.1. Örnek 3.1 deki problemde $T=1$ ve $\alpha(t)=0,5t$ için $N=4$, $N=8$ adım aralığında kesirli türevin sayısal ve gerçek değerlerin incelenmesi.. 17

Çizelge 3.2. Örnek 3.1 deki problemde $T=1$ ve $\alpha(t)=0,5t$ için $N=16$, $N=32$ adım aralığında kesirli türevin sayısal ve gerçek değerlerin incelenmesi.. 18

Çizelge 3.3. Örnek 3.1 deki problemde $T=1$ ve $\alpha(t)=0,5t$ için $N=64$ adım aralığında kesirli türevin sayısal ve gerçek değerlerin incelenmesi..... 19

Çizelge 3.4. Örnek 3.1 deki problemde $T=1$ ve $\alpha(t)=0,5t$ için mutlak hata değerlerinin ve yakınsama mertebelerinin incelenmesi 20

Çizelge 3.5. Örnek 3.1 deki problemde $T=1$ ve $\alpha(t)=\sin(t)$ için $N=4$, $N=8$ adım aralığında kesirli türevin sayısal ve gerçek değerlerin incelenmesi.. 20

Çizelge 3.6. Örnek 3.1 deki problemde $T=1$ ve $\alpha(t)=\sin(t)$ için $N=16$, $N=32$ adım aralığında kesirli türevin sayısal ve gerçek değerlerin incelenmesi.. 21

Çizelge 3.7. Örnek 3.1 deki problemde $T=1$ ve $\alpha(t)=\sin(t)$ için $N=64$ adım aralığında kesirli türevin sayısal ve gerçek değerlerin incelenmesi..... 22

Çizelge 3.8. Örnek 3.1 deki problemde $T=1$ ve $\alpha(t)=\sin(t)$ için mutlak hata değerlerinin ve yakınsama mertebelerinin incelenmesi 23

Çizelge 3.9. Örnek 3.2 deki problemde $T=1$ ve $\alpha(t)=0,5$ için mutlak hata değerlerinin ve yakınsama mertebelerinin incelenmesi 26

Çizelge 3.10. Örnek 3.2 deki problemde $T=1$ ve $\alpha(t)=0,5$ için $N=4$, $N=8$ adım aralığında kesirli türevin sayısal ve gerçek değerlerin incelenmesi 26

Çizelge 3.11. Örnek 3.2 deki problemde $T=1$ ve $\alpha(t)=0,5$ için $N=16$, $N=32$ adım aralığında kesirli türevin sayısal ve gerçek değerlerin incelenmesi 27

Çizelge 3.12. Örnek 3.2 deki problemde $T=1$ ve $\alpha(t)=0,5$ için $N=64$ adım aralığında kesirli türevin sayısal ve gerçek değerlerinin incelenmesi..... 28

Çizelge 3.13. Örnek 3.3 deki problemde $T=1$ ve $\alpha(t)=0,5$ için $N=10$, $N=100$ adım aralığında kesirli türevin sayısal ve gerçek değerlerin incelenmesi 31

Çizelge 5.1. Lineer olmayan diferensiyel denklemin $\alpha=1$ için yaklaşık çözümü 47

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

Şekil 2.1. Gamma fonksiyonu eğrisi 3

Şekil 3.1. $\alpha(t) = 0,5t$ için $N = 4$, $N = 8$ adım aralığında kesirli türevin sayısal ve gerçek değerleri üst üste çakışmaktadır 20

Şekil 4.1. Bagley-Torvik denkleminin $\alpha = 1$ ve $q = 1$ olmak üzere yaklaşık çözümü .. 37

Şekil 4.2. Değişken mertebeden Bagley-Torvik denklemin yaklaşık çözümü 39

Şekil 4.3. Çok terimli kesirli mertebeden diferensiyel denklemin $\alpha = 1$ için diferensiyel dönüşüm yöntemi ile yaklaşık çözümü 41

Şekil 4.4. Değişken mertebeden diferensiyel denklemin $1 < \alpha_i < 2$, $0 \le t < 1$ ve $q = 1$ için diferensiyel dönüşüm yöntemi ile yaklaşık çözümü 43

Şekil 5.1. Lineer olmayan diferensiyel denklemin $\alpha = 1$ için yaklaşık çözümü 47

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
Γ	Gamma fonksiyonu
$B(x,y)$	Beta fonksiyonu
$E_\infty(\tau)$	Mutlak hata
$f^{(n)}$	f fonksiyonunun n. mertebeden türevi
${}_aD^p{}_t$	f fonksiyonunun p. mertebeden kesirli türevi
${}_aD^{-p}{}_t f$	f fonksiyonunun p. mertebeden kesirli integrali
$order_\infty(\tau)$	Yakınsama mertebesi

Kısaltmalar	**Açıklamalar**
DTM	Differential Transform Method
MATLAB	Matrix Laboratory

1. GİRİŞ

Günümüzde birçok sistemin matematiksel modelinin oluşturulmasında türev kavramına ihtiyaç duyulur. Çünkü oluşturulan modellerdeki bir değişkenin başka bir değişkene göre değişimini ifade etmek için türev kavramına ihtiyaç vardır. Türev kavramını ilk olarak kullanan bilim adamı Isaac Newton dur [1].

Türev kavramı geçmişten bugüne gelişmeler kaydederek gelmiş ve kesirli türev kavramı da ortaya çıkmıştır. Leibniz in L'Hopital e yazdığı mektupta; "Tamsayılı mertebeden türevler kesirli mertebeden türevlere genelleştirilebilir mi?" sorusuna cevap olarak $\frac{d^n y}{dx^n}$ türevinde $n = \frac{1}{2}$ için ne ifade eder karşılığını almış ve cevaben "Bu birgün faydalı sonuçların elde edileceği bir paradoksa sebep olur." demiştir. Bu ifadelerin yazıldığı mektup, kesirli diferensiyel denklemlerin doğuşu olarak kabul edilir. Leibniz den günümüze kadar geçen 300 senelik dönemde bu alanda çalışan ünlü matematikçiler olarak; Liouville, Rienmann, Weyl, Fourier, Caputo, Euler, Abel, Laplace, Lagrange, Grünwald, Hadamard, Riezs ve Letnikov söylenebilir [2].

Kesirli diferensiyel denklemler; mühendislik, temel bilimler ve birçok alanda kullanılmaktadır. Özellikle son yıllarda kesirli mertebeden diferensiyel denklemlerin kullanımı daha da yaygınlaşmıştır. Bunun nedeni ise; kesirli diferensiyel denklemler ile gerçeğe daha yakın ve hassas modelleme yapılabilmesidir.

Kesirli diferensiyel denklemleri çözebilmek için kesirli türev ve integrallerin tanımlarını iyi bilmeli ve anlamalıyız. Günümüzde, kesirli türev ve integral için Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov ve Caputo tanımlarını kullanmaktayız.

Kesirli diferensiyel denklemler ile bilimin temel prensipleri kullanılarak bu alanda büyük ilerlemeler kaydedilmiştir. Karmaşık sistem modellerinin sabit mertebeden kesirli diferensiyel denklemler ile iyi bir şekilde açıklanamayacağı tespit edilmiştir. Bu nedenle kesirli değişen mertebeden diferensiyel denklemler kullanılarak bu tür sistemlerin daha iyi tanımlandığı belirtilmiştir.

Bu durum kesirli mertebeden denklemlerin pek çok alana uygulanabilirliliğini göstermiş ve değişen mertebeden kesirli diferensiyel denklem tanımlanması yapılmıştır. Ancak, değişen mertebeden kesirli diferensiyel denklemlerin analitik çözümlerinin elde edilmesi her zaman mümkün değildir. Bu sebeple yüksek mertebeden doğruluğa sahip sayısal yöntemlerin geliştirilmesine ihtiyaç duyulmaktadır.

Bu kapsamda yapılan çalışmalar neticesinde hazırlanan bu tez, birincisi giriş bölümü

olmak üzere altı bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde; kesirli diferensiyel denklemlerin çözülebilmesi için temel kavramlar olan Gamma ve Beta fonksiyonları verilmiş, hemen ardından Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türev ve integral tanımlarına değinilmiştir.

Üçüncü bölümde; [15] kaynağından yararlanarak, kesirli değişen mertebeden belli bir sınıftan diferensiyel denklemler için sayısal integral alma yöntemiyle çözümlere yer verilmiş, kararlılık analizi ve hata sınırları incelenmiştir. Bu çözümün algoritması MATLAB (R2015b) programlama diline uygulanarak, sayısal hesaplama için bir yazılım oluşturulmuştur. Bu bölümde ayrıca genel denkleme yeni terimler ekleyerek ve sonlu fark yaklaşımlarıyla birlikte hibrit bir yöntem geliştirilerek yeni denklemlerin sayısal çözümleri elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde Taylor seri çözümüne dayalı fakat katsayıların ardışık cebirsel bir yöntemle elde edilişinin gerçekleştirildiği diferensiyel dönüşüm yada DTM adı verilen yöntem kullanılarak kesirli mertebeden değişen türevler içeren Bagley Torvik denkleminin özel bir sınıfı çalışılmış ve değişen kesirli türevler için sonuçlar MATLAB (R2015b) yardımı ile grafiklerle gösterilmiştir.

Beşinci bölümde ise lineer olmayan kesirli mertebeden diferensiyel denklemlerin DTM çözümleri yine değişen kesirli türevler için MATLAB (R2015b) programı ile bulunmuş ve sonuçlar grafiklerle gösterilmiştir.

Tez çalışmasının altıncı ve son bölümünde ise, bu tez çalışması ile ilgili genel değerlendirmelerden bahsedilmiş, gelecek çalışmalar için önerilerde bulunulmuştur.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Gamma Fonksiyonu

Gamma fonksiyonu denilen ve $\Gamma(.)$ ile gösterilen bu önemli fonksiyon kesirli mertebeden diferensiyel denklemlerin çözümlerinde sıklıkla kullanılmaktadır. Gamma fonksiyonu için genelleştirilmiş integral tanımı aşağıda verilmiştir.

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt \tag{2.1}$$

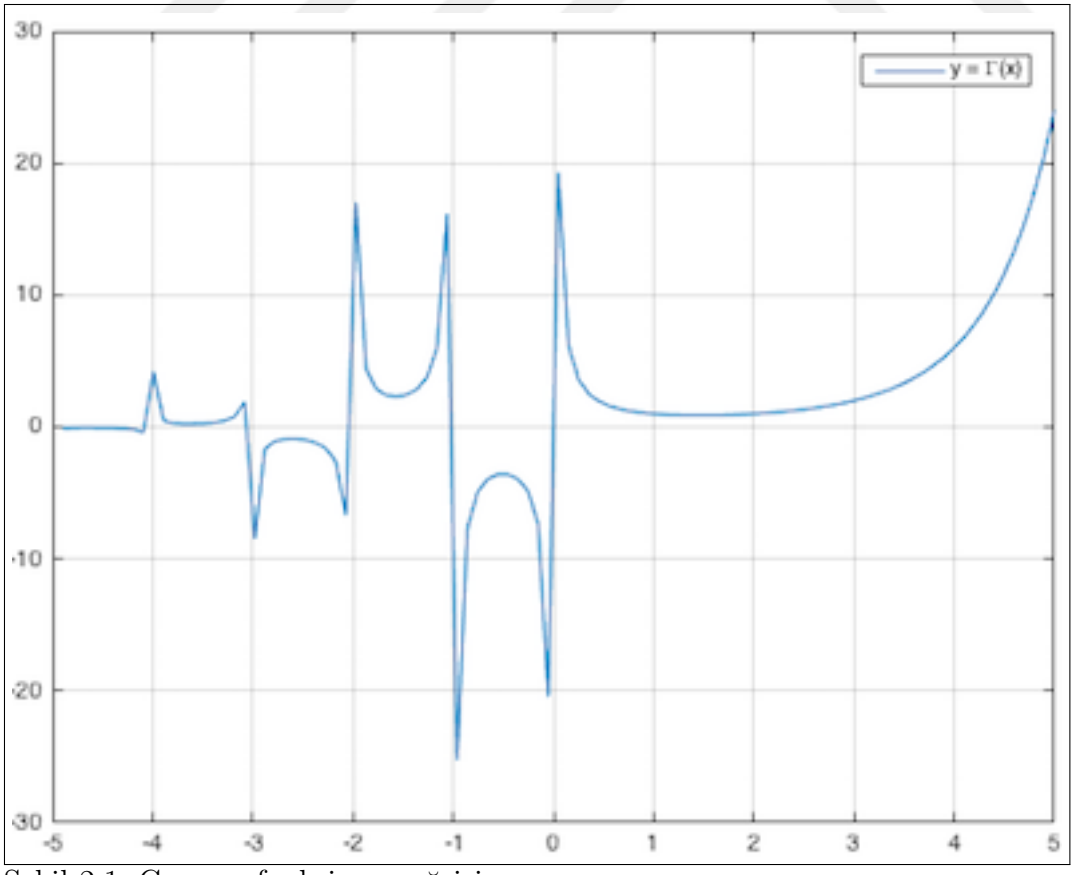
Gamma fonksiyonunun temel özelliklerinden biri, aşağıda verilen fonksiyonel eşitliği sağlamasıdır.

$$\Gamma(n+1) = n.\Gamma(n) \qquad\qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

Gamma fonksiyonuna ilişkin bazı rakamsal değerler aşağıda verilmiştir.

$\Gamma(0)=$ Tanımsız, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \approx$1,772, $\Gamma(1)=$ 1, $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \approx$0,886, $\Gamma(2)$=1,

$\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2}\sqrt{\pi} \approx$1,329, $\Gamma(3)$=2, $\Gamma(\frac{7}{2}) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi} \approx$3,323, $\Gamma(\infty) = \infty$



Şekil 2.1. Gamma fonksiyonu eğrisi

Gamma fonksiyonunun eğrisi MATLAB (R2015b) programı ile çizilmiştir.

2.2. Beta Fonksiyonu

Beta fonksiyonu;

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \qquad (Re(z)>0, \qquad Re(w)>0) \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanan integrale denir.

Beta fonksiyonu, Gamma fonksiyonu cinsinden de yazılabilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{2.4}$$

Burada $B(p,q)=B(q,p)$ simetrik özelliği açıkça görülür.

Beta fonksiyonu yardımıyla Gamma fonksiyonunun iki önemli özelliği verilmiştir.

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{sin(\pi z)} \tag{2.5}$$

ve

$$\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}2^{2z-1}\Gamma(2z) \qquad (2z\neq 0,-1,-2,...) \tag{2.6}$$

2.3. Grünwald-Letnikov Kesirli Türev ve İntegrali

Anton Karl Grünwald ve Aleksey Letnikov tarafından türevin genel tanımından yola çıkılmış ve Gamma fonksiyonu tanımından yararlanarak Grünwald-Letnikov türevi tanımlanmıştır.

Herhangi bir $f(t)$ fonksiyonunun birinci mertebeden türevi,

$$f'(t)=\frac{df}{dt}=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(t)-f(t-h)}{h} \tag{2.7}$$

şeklindedir. Buradan ikinci mertebeden türevi,

$$f''(t)=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f'(t)-f'(t-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}(\frac{f(t)-f(t-h)}{h}-\frac{f(t-h)-f(t-2h)}{h})$$

$$=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(t)-2f(t-h)+f(t-2h)}{h^2} \tag{2.8}$$

olarak bulunur. Benzer biçimde üçüncü mertebeden türevi,

$$f'''(t) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3} \tag{2.9}$$

olur. Bu ifade genelleştirilirse,

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} f(t - rh) \tag{2.10}$$

olur. Burada

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!} \tag{2.11}$$

binom katsayılarıdır. Eş. 2.7-2.10 genelleştirildiğinde,

$$f_h^{(p)}(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p}{r} f(t - rh) \tag{2.12}$$

elde edilir. Benzer şekilde p nin negatif olması durumunda

$$\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = \frac{p(p+1)...(p+r-1)}{r!} \tag{2.13}$$

olduğundan,

$$\binom{-p}{r} = \frac{-p(-p-1)(-p-2)...(-p-r+1)}{r!} = (-1)^r \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

elde edilir. Bu açılım Eş. 2.12 de yerine yazılıp $-p$ için düzenlenirse,

$$f_h^{(-p)}(t) = \frac{1}{h^{-p}} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t - rh) \tag{2.15}$$

bulunur. $h = \frac{t-a}{n}$ alınır ve $n \longrightarrow \infty$ için $h \longrightarrow 0$ için

$$\lim_{\substack{h \longrightarrow 0 \\ nh = t-a}} f_h^{-p}(t) =_a D_t^{-p} f(t) \tag{2.16}$$

olarak alınırsa,

$${}_aD_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h \longrightarrow 0 \\ nh = t-a}} h^p \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t - rh) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \tag{2.17}$$

elde edilir. Eş. 2.12 ve Eş. 2.17 birleştirilirse,

$${}_aD_t^{p} f(t) = \lim_{\substack{h \longrightarrow 0 \\ nh = t-a}} h^p \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p}{r} f(t - rh) \tag{2.18}$$

denklemi yazılabilir.

Bu denklemde p nin pozitif değerleri türevi, negatif değerleri ise integrali göstermektedir. Burada

$$ {}_aD_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \tag{2.19} $$

Grünwald-Letnikov kesirli integralini göstermekte olup,

$$ {}_aD_t^{p} f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \tag{2.20} $$

ise f sürekli bir fonksiyon ve $f^{(k)}(t)(k = 1, 2, ..., m+1)$ türevleri de $[a, t]$ aralığında sürekli, $m > p-1$ olmak üzere $m < p < m+1$ şartını sağlayan f fonksiyonunun p. mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türevin tanımını vermektedir [4].

Bu türev için başka bir gösterim ise;

$$ \frac{d^q f(t)}{[d(t-a)]^q} \equiv \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{(\frac{t-a}{n})^{-q}}{\Gamma(-q)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(k+1)} f\Big(t - k\Big[\frac{t-a}{n}\Big]\Big) \tag{2.21} $$

şeklindedir. Eş. 2.21 denkleminde de q nun pozitif değerleri kesirli türevi, negatif değerleri kesirli integrali tanımlamaktadır [17].

2.4. Riemann-Liouville Kesirli Türev ve İntegrali

Riemann-Liouville kesirli türev ve integral tanımı kesirli diferensiyel denklem hesaplamalarında oldukça yaygın olarak kullanılmaktadır. $\alpha > 0, t > a, \alpha, a, t \in \Re$ ve $n-1 < \alpha < n \in N$ için

$$ {}_aD_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \Big(\frac{d}{dt}\Big)^n \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau \tag{2.22} $$

ifadesi Riemann-Liouville kesirli türevinin tanımıdır [22].

Benzer şekilde $t > 0$ için $v > 0$ olmak üzere f fonksiyonu $(0, \infty)$ da parçalı sürekli ve $[0, \infty)$ da integrallenebilir olmak üzere,

$$ {}_0D_t^{-v} f(t) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^t (t-\xi)^{v-1} f(\xi) d\xi \tag{2.23} $$

ise Riemann-Liouville kesirli integralin tanımıdır.

2.1. Teorem

f sürekli bir fonksiyon ve $v > 0$ olmak üzere, kesirli integrallerin türevi ve türevli fonksiyonun kesirli integrali sırasıyla,

$$D^{-v-1}[Df(t)] = D^{-v}f(t) - \frac{f(0)}{\Gamma(v+1)}t^v \tag{2.24}$$

ve

$$D[D^{-v}f(t)] = D^{-v}[Df(t)] + \frac{f(0)}{\Gamma(v)}t^{v-1}, \qquad t > 0 \tag{2.25}$$

olarak yazılır. $\mu > 0$ ve $v = m - \mu > 0$ olmak üzere;

$$D^{\mu}f(t) = D^{m}[D^{-v}f(t)], \qquad \mu > 0, \qquad t > 0 \tag{2.26}$$

eşitliği sağlanır [8].

2.5. Caputo Kesirli Türevi

Caputo kesirli türev tanımı;

$${}_a^C D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}, \qquad (n-1) < \alpha < n \tag{2.27}$$

şeklindedir. $f(t)$ fonksiyonunun $\alpha \longrightarrow n$ için Caputo kesirli türevi n nci mertebeden türevi vermektedir. $0 \leq n-1 < \alpha < n$ aralığında ise aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \longrightarrow n} \quad {}_a^C D_t^{\alpha} f(t) &= \lim_{\alpha \longrightarrow n} \left(\frac{f^{(n)}(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \right) + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(\tau)d\tau \\ &= f^n(a) + \int_a^t f^{(n+1)}(\tau)d\tau = f^{(n)}(t), \qquad n = 1, 2, .. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Aşağıda Caputo tanımı kullanılarak bir fonksiyonun kesirli mertebeden türevi hesaplanmıştır.

2.1.*Örnek*
Caputo türev tanımı ile $f(t) = t$ fonksiyonunun $1/2$. mertebeden türevinin hesaplanması. Eş. 2.27 denkleminde $a = 0$, $\alpha = 1/2$, $n = 1$, $f(t) = t$ değerleri yerine yazılırsa,

$${}^C D^{1/2} t = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau \tag{2.29}$$

olur. $u = (t-\tau)^{1/2}$ dönüşümü yardımıyla,

$$
\begin{aligned}
{}^{C}D^{1/2}t &= \frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}d\tau \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} \frac{2u}{u}du \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{t}-0) \\
&= \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}
\end{aligned} \tag{2.30}
$$

elde edilir. Buradan, $f(t) = t^n$ fonksiyonunun α. mertebeden Caputo türevi,

$$
\begin{aligned}
{}^{C}D^{\alpha}t^n &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t \frac{(\tau^p)^{(n)}}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)}(\tau^{p-n})(t-\tau)^{n-\alpha-1}d\tau
\end{aligned} \tag{2.31}
$$

şeklinde yazılır. Burada $\tau = \lambda t$ dönüşümü yapılırsa $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$
\begin{aligned}
{}^{C}D^{\alpha}t^n &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)}\int_0^1 (\lambda t)^{p-n}((1-\lambda)t)^{n-\alpha-1}td\tau \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)}t^{p-\alpha}\int_0^1 \lambda^{p-n}(1-\lambda)^{n-\alpha-1}d\tau \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)}t^{p-\alpha}B(p-n+1,n-\alpha) \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)}t^{p-\alpha}\frac{\Gamma(p-n+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(p-\alpha+1)} \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)}t^{p-\alpha}
\end{aligned} \tag{2.32}
$$

olur.

3. DEĞİŞEN KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN SAYISAL ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Yoğun karmaşık sistemlerin modelleri sabit mertebeden kesirli diferensiyel denklemler ile iyi bir şekilde ifade edilemezler [7]. Kesirli analiz; bilimin ve mühendisliğin birçok alanında sistemlerin daha iyi tanımlanabilmesi ve modellenebilmesinde önemli faydalar sağlamaktadır. Bu kapsamda kesirli mertebeden diferensiyel denklemlerin analizinde son zamanlarda büyük ilerlemeler kaydedilmiş ve sonrasında değişen mertebeden operatör tanımlanması yapılmıştır [5]. Ancak değişen mertebeden kesirli diferensiyel denklemlerin sayısal çözümlerinin elde edilmesi zordur, bu yüzden yüksek mertebeden doğruluk ile gerçeğe yakın ve hassas sayısal metotların geliştirilmesi uygulamalı matematik alanında oldukça önemli bir konudur [8].

Bu alanda geliştirilen sayısal yöntemlerin yakınsaklık mertebesi çoğunlukla 1. mertebedir. Bu ise yüksek mertebeden sayısal yöntemlerin, değişen mertebeden kesirli operatörler için daha ileri seviyede çalışılması yönünde pozitif motivasyon oluşturmaktadır [6].

Bu bölümde; [15] kaynağında bahsedildiği gibi, değişen mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevine ikinci mertebeden sayısal yakınsamanın gerçekleştirildiği bir yöntemden bahsedilerek, değişen mertebeden kesirli diferensiyel denklemlerin bir sınıfı için sayısal çözüm elde edilecektir.

3.1. Değişen Mertebeden Kesirli Diferensiyel Denklemler İçin Sayısal İntegral Alma Yöntemi

Bu bölümde bahsedilen sayısal yöntemin uygulandığı diferensiyel denklemlerin sınıfı için tanımlanan başlangıç değer problemi aşağıda verilmiştir. Burada değişen mertebeden kesirli türev Caputo kesirli türevi olup $f(t)$ fonksiyonu verilen aralıkta sürekli bir fonksiyondur.

$$\begin{cases} {}_C D_{0,t}^{\alpha(t)} y(t) = f(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Eğer $y(0) = \mu$ ise $v(t) = y(t) - \mu$ dönüşümü yapılarak yine $y(0) = 0$ koşulu elde edilebilir. Burada $\alpha(t) \in (0, 1)$ için değişen mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi (RL ile gösterilmektedir),

$${}_{RL} D_{0,t}^{\alpha(t)} y(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha(t))} \frac{d}{dt} \int_0^t (t - s)^{-\alpha(t)} y(s) ds \tag{3.2}$$

ve Caputo kesirli türev tanımı (C ile gösterilmektedir) ise;

$$ {}_{C}D_{0,t}^{\alpha(t)}y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))}\int_{0}^{t}(t-s)^{-\alpha(t)}y^{'}(s)ds \tag{3.3} $$

şeklinde tanımlanır.

3.1. Lemma

Eğer $y(t) \in C[0,\infty)$ ise sabit mertebeden kesirli operatörlere benzer aşağıdaki ilişkiyi kurabiliriz;

$$ {}_{C}D_{0,t}^{\alpha(t)}y(t) =_{RL} D_{0,t}^{\alpha(t)}[y(t)-y(0)] \tag{3.4} $$

Eş. 3.1 de başlangıç koşulu $y(0)=0$ olduğundan, ${}_{C}D_{0,t}^{\alpha(t)}y(t) =_{RL} D_{0,t}^{\alpha(t)}y(t)$ olduğu açıktır.

Riemann-Liouville değişen mertebeden türeve, ikinci mertebeden sayısal bir metot ile yaklaşabilmek için öncelikle bir $y(t)$ fonksiyonunun değiştirilmiş Grünwald yaklaşımından bahsedilecektir.

$$ \mathcal{A}_{\tau,p}^{\alpha(t)}y(t) = \frac{1}{\tau^{\alpha(t)}}\sum_{k=0}^{\infty} g_{k}^{\alpha(t)}y(t-(k-p)\tau) \tag{3.5} $$

burada $k \geq 0$ için $g_{k}^{\alpha(t)} = (-1)^{k}\binom{\alpha(t)}{k}$. Değişen mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevine ikinci mertebeden yakınsama yöntemi aşağıda verilen teoremle gösterilmektedir [15–18].

3.2. Teorem

$y(t) \in L^{1}(R)$ olsun, ${}_{RL}D_{-\infty,t}^{\alpha(t)+2}y(t)$ ve onun $L^{1}(R)$ bağlı olan Fourier dönüşümü;

$$ D_{\tau,p,q}^{\alpha(t)}y(t) = \frac{\alpha(t)-2q}{2(p-q)}\mathcal{A}_{\tau,p}^{\alpha(t)}y(t) + \frac{2p-\alpha(t)}{2(p-q)}\mathcal{A}_{\tau,q}^{\alpha(t)}y(t) \tag{3.6} $$

olup her $t_k \in \mathbb{R}$ için;

$$ D_{\tau,p,q}^{\alpha(t_k)}y(t) =_{RL} D_{-\infty,t}^{\alpha(t_k)}y(t) + O(\tau^{2}) \tag{3.7} $$

yazılabilir. Burada p ve q tam sayı ve $p \neq q$.

İspat

Eş. 3.5 ile verilen $\mathcal{A}_{\tau,p}^{\alpha(t)}y(t)$ tanımına göre;

$$D_{\tau,p,q}^{\alpha(t_k)}y(t) = \frac{\alpha(t_k)-2q}{2(p-q)}\frac{1}{\tau^{\alpha(t_k)}}\sum_{k=0}^{\infty} g_k^{\alpha(t_k)} y(t-(k-p)\tau) + \frac{2p-\alpha(t_k)}{2(p-q)}\frac{1}{\tau^{\alpha(t_k)}}\sum_{k=0}^{\infty} g_k^{\alpha(t_k)} y(t-(k-q)\tau) \tag{3.8}$$

Eş. 3.8 e Fourier dönüşümü uygulandığında;

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{D_{\tau,p,q}^{\alpha(t_k)}y(t);w\right\} &= \frac{1}{\tau^{\alpha(t_k)}}\sum_{k=0}^{\infty} g_k^{\alpha(t_k)}\left[\frac{\alpha(t_k)-2q}{2(p-q)}e^{-iw(k-p)\tau}\right. \\ &\quad \left.+\frac{2p-\alpha(t_k)}{2(p-q)}e^{-iw(k-q)\tau}\right]\mathcal{F}(w) \\ &= \frac{1}{\tau^{\alpha(t_k)}}\left[\frac{\alpha(t_k)-2q}{2(p-q)}(1-e^{-iw\tau})^{\alpha(t_k)}e^{iw\tau p}\right. \\ &\quad \left.+\frac{2p-\alpha(t_k)}{2(p-q)}(1-e^{-iw\tau})^{\alpha(t_k)}e^{iw\tau q}\right]\mathcal{F}(w) \\ &= (iw)^{\alpha(t_k)}\left[\frac{\alpha(t_k)-2q}{2(p-q)}W_p(iw\tau)+\frac{2p-\alpha(t_k)}{2(p-q)}W_q(iw\tau)\right]\mathcal{F}(w)\end{aligned} \tag{3.9}$$

bulunur. Burada $\mathcal{F}(w)$; $y(t)$ fonksiyonun Fourier dönüşümüdür ve

$$\begin{aligned}W_r(z) &= \left(\frac{1-e^{-z}}{z}\right)^{\alpha(t_k)} e^{rz} \\ &= 1+\left(r-\frac{\alpha(t_k)}{2}\right)z+O(z^2), \qquad r=p,q.\end{aligned} \tag{3.10}$$

$\hat{g}\{w,\tau\} = \mathcal{F}\left\{D_{\tau,p,q}^{\alpha(t_k)}y;w\right\} - \mathcal{F}\left\{{}_{RL}D_{-\infty,t}^{\alpha(t_k)}y;w\right\}$ olduğunu ifade edip, sonra Eş. 3.9 ve Eş. 3.10 yardımıyla aşağıdaki bağıntıya ulaşılır. Bu ise yöntemin yakınsaklık mertebesinin τ ya göre ikinci mertebeden olduğunu göstermektedir [15].

$$\begin{aligned}\left|D_{\tau,p,q}^{\alpha(t_k)}y(t) - {}_{RL}D_{-\infty,t}^{\alpha(t_k)}y(t)\right| = |g| &\le \frac{1}{2\pi}\int_R |\hat{g}(w,\tau)|dw \le C\|(iw)^{\alpha(t_k)+2}F(w)\|_{L^1}\tau^2 \\ &= O(\tau^2) \qquad \square\end{aligned}$$

Şimdi Eş. 3.1 denklemini sayısal olarak çözebilmek için $\tau = \frac{T}{N}$ olarak seçeriz. Burada N bir tam sayı olup, $k = 0,1,2,3\ldots,N$ dir ve $t_k = k\tau$ olmak üzere, $\alpha(t_k) = \alpha_k$ olarak tanımlanmaktadır. Eş. 3.6 denkleminde $(p,q) = (0,-1)$ olarak seçildiğinde; $\frac{\alpha(t)-2q}{2(p-q)} = \frac{2+\alpha(t)}{2}$, $\frac{2p-\alpha(t)}{2(p-q)} = -\frac{\alpha(t)}{2}$ elde edilir ve sonrasında Eş. 3.1 çözümü için ikinci

mertebeden sayısal yöntem aşağıdaki gibi tanımlanabilir [15].

$$\begin{cases} \tau^{-\alpha_k} \sum_{j=0}^{k} w_j^{\alpha_k} y^{k-j} = f(t_k), \quad 1 \leq k \leq N, \\ y^0 = 0, \end{cases} \tag{3.11}$$

Burada $w_0^{\alpha_k} = (\frac{2+\alpha_k}{2}) g_0^{\alpha_k}$, $w_j^{\alpha_k} = (\frac{2+\alpha_k}{2}) g_j^{\alpha_k} - (\frac{\alpha_k}{2}) g_{j-1}^{\alpha_k}$, $k \geq 1$ dir.

3.2. Kararlılık ve Yakınsama Analizi

Bu bölümde; Eş. 3.11 ile sunulan ikinci mertebeden sayısal çözüm için kararlılık ve yakınsama analizinden bahsedilecektir.

3.3. Lemma

$\alpha_k \in (0,1)$ olmak üzere; $w_j^{\alpha_k}$ katsayıları aşağıdaki özellikleri sağlar [15].

$$\begin{cases} w_0^{\alpha_k} = \frac{2+\alpha_k}{2}, \quad w_j^{\alpha_k} < 0, \; j \geq 1 \\ \sum_{j=0}^{\infty} w_j^{\alpha_k} = 0, \quad -\sum_{j=1}^{k} w_j^{\alpha_k} < w_0^{\alpha_k}, \; k \geq 1 \end{cases} \tag{3.12}$$

3.4. Teorem

$y(t) \in C[0,\infty)$ analitik çözüm ve $\{y^k | k = 0,1,2,3 \ldots N\}$ belli k lar için sayısal yöntemden elde edilen sonuçları göstermek üzere;

$$|y^k| \leq \frac{5}{(1-\alpha_{min}) 2^{\alpha_{min}}} k^{\alpha_{min}} \tau^{\alpha_{min}} \max_{1 \leq m \leq k} |f(t_m)| \tag{3.13}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat

Lemma 3.2 ye göre; $w_0^{\alpha_k} = \frac{2+\alpha_k}{2}$, $w_j^{\alpha_k} < 0$, $j \geq 1$ olduğunu biliyoruz, burdan Eş. 3.11 yeniden düzenlenirse;

$$w_0^{\alpha_k} y^k = \sum_{j=1}^{k-1} (-w_j^{\alpha_k}) y^{k-j} + \tau^{\alpha_k} f(t_k), \qquad 1 \leq k \leq N \tag{3.14}$$

elde edilir. $k = 1$ olduğu zaman;

$$|y^1| = |w_0^{\alpha_1}|^{-1}\tau^{\alpha_1}|f(t_1)| \leq \frac{5}{(1-\alpha_{min})2^{\alpha_{min}}}\tau^{\alpha_{min}}|f(t_1)|$$

böylelikle Eş. 3.13, $k = 1$ için geçerlidir. Şimdide Eş. 3.13 denkleminin $j = 1, 2, 3, \ldots, k-1$ değerleri içinde geçerli olduğunu göstermeliyiz. Bunun için Eş. 3.14 denkleminin her iki tarafının mutlak değeri alınıp, Eş. 3.13 sonucu bu eşitsizlikte yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
w_0^{\alpha_k}|y^k| &\leq \left[\sum_{j=1}^{k-1}(-w_j^{\alpha_k})|y^{k-j}| + \tau^{\alpha_k}|f(t_k)|\right] \\
&\leq \sum_{j=1}^{k-1}(-w_j^{\alpha_k})\frac{5}{(1-\alpha_{min})2^{\alpha_{min}}}(k-j)^{\alpha_{min}}\tau^{\alpha_{min}}\max_{1\leq m\leq k-j}|f(t_m)| + \tau^{\alpha_{min}}|f(t_k)| \\
&\leq \left[\sum_{j=1}^{k-1}(-w_j^{\alpha_k})\frac{5}{(1-\alpha_{min})2^{\alpha_{min}}}k^{\alpha_{min}} + 1\right]\tau^{\alpha_{min}}\max_{1\leq m\leq k}|f(t_m)| \\
&\leq \left\{\left[w_0^{\alpha_k} - \frac{1-\alpha_{min}}{5}(\frac{2}{k})^{\alpha_{min}}\right]\frac{5}{(1-\alpha_{min})2^{\alpha_{min}}} + 1\right\}\tau^{\alpha_{min}}\max_{1\leq m\leq k}|f(t_m)| \\
&= \frac{5w_0^{\alpha_k}}{(1-\alpha_{min})2^{\alpha_{min}}}k^{\alpha_{min}}\tau^{\alpha_{min}}\max_{1\leq m\leq k}|f(t_m)|
\end{aligned}$$

buradan;

$$|y^k| \leq \frac{5}{(1-\alpha_{min})2^{\alpha_{min}}}k^{\alpha_{min}}\tau^{\alpha_{min}}\max_{1\leq m\leq k}|f(t_m)|$$

elde edilir. Sonuç olarak; matematiksel tümevarım yöntemi kullanarak Eş. 3.13 ün tüm $1 \leq k \leq N$ değerleri için geçerli olduğu ispatlanmış olur [15]. □

3.5. Teorem

$y(t) \in C[0, \infty)$ olsun ve Eş. 3.1 in analitik çözümü $\{y(t_k)|k = 0, 1, 2, 3 \ldots N\}$ ve sayısal çözümü $\{y^k|k = 0, 1, 2, 3 \ldots N\}$ ile gösterilsin. $e^k = y(t_k) - y^k, k = 0, 1, \ldots N$ hatası için, $|e^k| \leq \frac{5c}{(1-\alpha_{min})2^{\alpha_{min}}}T^{\alpha_{min}}\tau^2$ geçerli olur. Burada c değeri, τ dan bağımsız pozitif sabit bir sayıdır.

İspat

Eş. 3.11 gereğince hata denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\begin{cases}
\tau^{-\alpha_k}\displaystyle\sum_{j=0}^{k} w_j^{\alpha_k}e^{k-j} = R^k, \quad 1 \leq k \leq N, \\
e^0 = 0.
\end{cases} \tag{3.15}$$

Burada $|R^k| \leq c\tau^2$ dir. Teorem 3.2 ve Teorem 3.4 kullanılarak;

$$|e^k| \leq \frac{5c}{(1-\alpha_{min})2^{\alpha_{min}}} k^{\alpha_{min}} \tau^{\alpha_{min}} \max_{1\leq m\leq k} |R^m|$$
$$\leq \frac{5c}{(1-\alpha_{min})2^{\alpha_{min}}} T^{\alpha_{min}} \tau^2$$

elde edilir ve böylece ispatı tamamlanmış olur [15]. □

3.3. Sayısal Örnekler

Bu kısımda; değişen mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevine yukarıda bahsedilen yöntemle yaklaşımın uygulandığı bazı örneklere yer verilecektir.

Herhangi bir t_k noktasındaki sayısal çözüm y^k ile gösterilmiş olsun. Bu çözümün doğruluğunu kontrol etmek için, mutlak hata ve yakınsamanın mertebesi aşağıdaki gibi tanımlanacaktır.

$$\text{Mutlak hata} = \max_{0\leq k\leq N} |y(t_k) - y^k|$$
$$\text{Yakınsama mertebesi} = \log_2 \left(\frac{E_\infty(2\tau)}{E_\infty(\tau)} \right)$$

Bu bölümde verilen formüller ile belirtilen değerlerin hesaplanabilmesi için bir algoritma oluşturulmuş ve bu algoritma MATLAB (R2015b) programında yazılmıştır.

Farklı örnekler için MATLAB (R2015b) program kodu çalıştırılmış ve elde edilen veriler tablolarla verilmiştir.

3.1. *Örnek*

$0 < \alpha(t) < 1$, $T = 1$ ve $f(t) = \frac{3t^{1-\alpha(t)}}{\Gamma(2-\alpha(t))} + \frac{2t^{2-\alpha(t)}}{\Gamma(3-\alpha(t))}$ olmak üzere Eş. 3.1,

$$\begin{cases} {}_C D_{0,t}^{\alpha(t)} y(t) = f(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{3.16}$$

başlangıç değer probleminin genel çözümünün $y(t) = 3t + t^2$ olduğu bilinmektedir. Burada $\alpha(t) = \frac{1}{2}t$ alınarak yukarıda bahsedilen sayısal yöntemle elde edilen sonuçlar analitik sonuçlarla karşılaştırılarak yöntemin güvenilirliği test edilecektir. Sayısal

çözüm,

$$\begin{cases} \tau^{-\alpha_k} \sum_{j=0}^{k} w_j^{\alpha_k} y^{k-j} = f(t_k), \quad 1 \leq k \leq N, \\ y^0 = 0, \end{cases} \tag{3.17}$$

denklemi farklı t_k değerleri için kolayca elde edilir. Burada $w_0^{\alpha_k} = (\frac{2+\alpha_k}{2}) g_0^{\alpha_k}$
$w_j^{\alpha_k} = (\frac{2+\alpha_k}{2}) g_j^{\alpha_k} - (\frac{\alpha_k}{2}) g_{j-1}^{\alpha_k}$, $k \geq 1$ dir.

Farklı τ değerleri için sayısal çözüm bir tek $k = 1$ değeri için hesaplanmış ve sonuçlar analitik çözümle karşılaştırılarak aşağıda verilmiştir.

Durum 1,
$\tau = \frac{1}{4}$, $N = 4$, $k = 1$ ve $T = 1$ seçilirse, $\tau = \frac{T}{N} = \frac{1}{4}$ olur. Buradan, $t_k = k\tau = \frac{1}{4}$, $\alpha(t_k) = \alpha_k = \frac{1}{2} t_k = \frac{1}{8}$ değerlerini alır. $\tau^{-\alpha_k}[w_0^{\alpha_k} y^1 + w_1^{\alpha_k} y^0] = f(t_k)$ denkleminde $y^0 = 0$ dan faydalanıp sadeleştirme yaparak bulduğumuz değerleri yerine yazdığımızda;

$f(\frac{1}{4}) = (\frac{1}{4})^{-\frac{1}{8}} [w_0^{\frac{1}{8}} y^1]$ olur.

$g_0^{\frac{1}{8}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{8}+1)}{\Gamma(0+1)+\Gamma(\frac{1}{8}-0+1)} = 1$

$w_0^{\frac{1}{8}} = \frac{2+\frac{1}{8}}{2} g_0^{\frac{1}{8}} = \frac{17}{16}$

$f(\frac{1}{4}) = (\frac{1}{4})^{-\frac{1}{8}} [w_0^{\frac{1}{8}} y^1]$

$f(\frac{1}{4}) = \frac{3(\frac{1}{4})^{1-\frac{1}{8}}}{\Gamma(2-\frac{1}{8})} + \frac{2(\frac{1}{4})^{2-\frac{1}{8}}}{\Gamma(3-\frac{1}{8})} = 1,01860619408401$ değerini yerine yazarak;

$y^1 = 0,806157456151$ sayısal çözümü buluruz.

$y(t_k) = 3t_k + (t_k)^2$ denkleminde;

$y(\frac{1}{4}) = 3\frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 = 0,81250000$ alırsak bu gerçek değeri elde ederiz.

Durum 2,
$\tau = \frac{1}{8}$, $N = 8$, $k = 1$, $T = 1$ alınırsa, $\tau = \frac{T}{N} = \frac{1}{8}$ olur ve $t_k = k\tau = \frac{1}{8}$, $\alpha(t_k) = \alpha_k = \frac{1}{2} t_k = \frac{1}{16}$ değerlerini alır. $\tau^{-\alpha_k}[w_0^{\alpha_k} y^1 + w_1^{\alpha_k} y^0] = f(t_k)$ denkleminde $y^0 = 0$ dan faydalanıp sadeleştirme yaparak bulduğumuz değerleri yerine yazdığımızda;

$f(\frac{1}{8}) = (\frac{1}{8})^{-\frac{1}{16}}[w_0^{\frac{1}{16}} y^1]$ olur.

$g_0^{\frac{1}{16}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{16}+1)}{\Gamma(0+1)+\Gamma(\frac{1}{16}-0+1)} = 1$

$w_0^{\frac{1}{16}} = \frac{2+\frac{1}{16}}{2} g_0^{\frac{1}{16}} = \frac{33}{32}$

$f(\frac{1}{8}) = (\frac{1}{8})^{-\frac{1}{16}}[w_0^{\frac{1}{16}} y^1]$

$f(\frac{1}{8}) = \frac{3(\frac{1}{8})^{1-\frac{1}{16}}}{\Gamma(2-\frac{1}{16})} + \frac{2(\frac{1}{8})^{2-\frac{1}{16}}}{\Gamma(3-\frac{1}{16})} = 0,456756409078933$ değerini yerine yazarak;

$y^1 = 0,388935481314$ sayısal çözümü buluruz.

$y(t_k) = 3t_k + (t_k)^2$ denkleminde;

$y(\frac{1}{8}) = 3\frac{1}{8} + (\frac{1}{8})^2 = 0,390625000$ alırsak bu gerçek değeri elde ederiz.

Durum 3,
$\tau = \frac{1}{16}$, $N = 16$, $k = 1$, $T = 1$ seçildiğinde, $\tau = \frac{T}{N} = \frac{1}{16}$ olur ve $t_k = k\tau = \frac{1}{16}$,$\alpha(t_k) = \alpha_k = \frac{1}{2}t_k = \frac{1}{32}$ değerlerini alır. $\tau^{-\alpha_k}[w_0^{\alpha_k} y^1 + w_1^{\alpha_k} y^0] = f(t_k)$ denkleminde $y^0 = 0$ dan faydalanıp sadeleştirme yaparak bulduğumuz değerleri yerine yazdığımızda;

$f(\frac{1}{16}) = (\frac{1}{16})^{-\frac{1}{32}}[w_0^{\frac{1}{32}} y^1]$ olur.

$g_0^{\frac{1}{32}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{32}+1)}{\Gamma(0+1)+\Gamma(\frac{1}{32}-0+1)} = 1$

$w_0^{\frac{1}{32}} = \frac{2+\frac{1}{32}}{2} g_0^{\frac{1}{32}} = \frac{65}{64}$

$f(\frac{1}{16}) = (\frac{1}{16})^{-\frac{1}{32}}[w_0^{\frac{1}{32}} y^1]$

$f(\frac{1}{16}) = \frac{3(\frac{1}{16})^{1-\frac{1}{32}}}{\Gamma(2-\frac{1}{32})} + \frac{2(\frac{1}{16})^{2-\frac{1}{32}}}{\Gamma(3-\frac{1}{32})} = 0,211507496606437$ değerini yerine yazarak;

$y^1 = 0,190969333717$ sayısal çözümü buluruz.

$y(t_k) = 3t_k + (t_k)^2$ denkleminde; $y(\frac{1}{16}) = 3\frac{1}{16} + (\frac{1}{16})^2 = 0,19140625000$ alırsak bu gerçek değeri elde ederiz.

Durum 4,
$\tau = \frac{1}{32}$, $N = 32$, $k = 1$, $T = 1$ seçilirse, $\tau = \frac{T}{N} = \frac{1}{32}$ olur ve $t_k = k\tau = \frac{1}{32}$, $\alpha(t_k) = \alpha_k = \frac{1}{2}t_k = \frac{1}{64}$ değerlerini alır. $\tau^{-\alpha_k}[w_0^{\alpha_k}y^1 + w_1^{\alpha_k}y^0] = f(t_k)$ denkleminde $y^0 = 0$ dan faydalanıp sadeleştirme yaparak bulduğumuz değerleri yerine yazdığımızda;

$f(\frac{1}{32}) = (\frac{1}{32})^{-\frac{1}{64}}[w_0^{\frac{1}{64}}y^1]$ olur.

$g_0^{\frac{1}{64}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{64}+1)}{\Gamma(0+1)+\Gamma(\frac{1}{64}-0+1)} = 1$

$w_0^{\frac{1}{64}} = \frac{2+\frac{1}{64}}{2} g_0^{\frac{1}{64}} = \frac{129}{128}$

$f(\frac{1}{32}) = (\frac{1}{32})^{-\frac{1}{64}}[w_0^{\frac{1}{64}}y^1]$

$f(\frac{1}{32}) = \frac{3(\frac{1}{32})^{1-\frac{1}{64}}}{\Gamma(2-\frac{1}{64})} + \frac{2(\frac{1}{32})^{2-\frac{1}{64}}}{\Gamma(3-\frac{1}{64})} = 0,100660630729$ değerini yerine yazarak; $y^1 = 0,094615423638$ sayısal çözümü buluruz.

$y(t_k) = 3t_k + (t_k)^2$ denkleminde; $y(\frac{1}{32}) = 3\frac{1}{32} + (\frac{1}{32})^2 = 0,094726562500$ alırsak bu gerçek değeri elde ederiz.

$\alpha(t) = \frac{1}{2}t$ esas alınarak problemin çözümü için MATLAB (R2015b) program kodu EK-1 de sunulmuştur. Bu program yardımıyla $\alpha(t) = \frac{1}{2}t$ için $T = 1$ olmak üzere $N = 4, 8, 16, 32, 64$ hesaplanan sayısal ve gerçek değerler verilmiştir. Benzer şekilde $\alpha(t) = sin(t)$ esas alınarak problemin çözümü için MATLAB (R2015b) program kodu EK-2 de sunulmuştur. Bu program yardımıyla $\alpha(t) = sin(t)$ için $T = 1$ olmak üzere $N = 4, 8, 16, 32, 64$ hesaplanan sayısal ve gerçek değerler verilmiştir.

Çizelge 3.1. Örnek 3.1 deki problemde $T = 1$ ve $\alpha(t) = \frac{1}{2}t$ için $N = 4$, $N = 8$ adım aralığında kesirli türevin sayısal ve gerçek değerlerin incelenmesi

$\tau = \frac{1}{4}$		$\tau = \frac{1}{8}$	
sayısal değer	gerçek değer	sayısal değer	gerçek değer
0,806157456151	0,812500000000	0,388935481314	0,390625000000
1,743414271990	1,750000000000	0,810745139639	0,812500000000
2,806202087906	2,812500000000	1,263918142034	1,265625000000
3,994014945905	4,000000000000	1,748355466655	1,750000000000
		2,264042393433	2,265625000000
		2,810975167975	2,812500000000
		3,389152483801	3,390625000000
		3,998573836740	4,000000000000

Çizelge 3.2. Örnek 3.1 deki problemde $T = 1$ ve $\alpha(t) = \frac{1}{2}t$ için $N = 16$, $N = 32$ adım aralığında kesirli türevin sayısal ve gerçek değerlerin incelenmesi

$\tau = \frac{1}{16}$		$\tau = \frac{1}{32}$	
sayısal değer	gerçek değer	sayısal değer	gerçek değer
0,190969333717	0,191406250000	0,094615423638	0,094726562500
0,390168425750	0,390625000000	0,191289608582	0,191406250000
0,597204270428	0,597656250000	0,289922357608	0,290039062500
0,812056502729	0,812500000000	0,390509189828	0,390625000000
1,034722151963	1,035156250000	0,493049429619	0,493164062500
1,265200437577	1,265625000000	0,597542896551	0,597656250000
1,503491075175	1,503906250000	0,703989525702	0,704101562500
1,749593937717	1,750000000000	0,812389288867	0,812500000000
2,003508960064	2,003906250000	0,922742172037	0,922851562500
2,265236105578	2,265625000000	1,035048167506	1,035156250000
2,534775352514	2,535156250000	1,149307270671	1,149414062500
2,812126687793	2,812500000000	1,265519478597	1,265625000000
3,097290103864	3,097656250000	1,383684789304	1,383789062500
3,390265596989	3,390625000000	1,503803201392	1,503906250000
3,691053166230	3,691406250000	1,625874713838	1,625976562500
3,999652812814	4,000000000000	1,749899325873	1,750000000000
		1,875877036904	1,875976562500
		2,003807846471	2,003906250000
		2,133691754215	2,133789062500
		2,265528759855	2,265625000000
		2,399318863176	2,399414062500
		2,535062064016	2,535156250000
		2,672758362260	2,672851562500
		2,812407757834	2,812500000000
		2,954010250700	2,954101562500
		3,097565840850	3,097656250000
		3,243074528307	3,243164062500
		3,390536313121	3,390625000000
		3,539951195366	3,540039062500
		3,691319175139	3,691406250000
		3,844640252556	3,844726562500
		3,999914427756	4,000000000000

Çizelge 3.3. Örnek 3.1 deki problemde $T = 1$ ve $\alpha(t) = \frac{1}{2}t$ için $N = 64$ adım aralığında kesirli türevin sayısal ve gerçek değerlerin incelenmesi

$\tau = \frac{1}{64}$			
sayısal değer	gerçek değer	sayısal değer	gerçek değer
0,000000000000	0,000000000000	1,812719238396	1,812744140625
0,047091111521	0,047119140625	1,875951804881	1,875976562500
0,094697073537	0,094726562500	1,939672650888	1,939697265625
0,142792591458	0,142822265625	2,003881776411	2,003906250000
0,191376625585	0,191406250000	2,068579181444	2,068603515625
0,240449013660	0,240478515625	2,133764865981	2,133789062500
0,290009711961	0,290039062500	2,199438830020	2,199462890625
0,340058704815	0,340087890625	2,265601073554	2,265625000000
0,390595985483	0,390625000000	2,332251596583	2,332275390625
0,441621550678	0,441650390625	2,399390399101	2,399414062500
0,493135398633	0,493164062500	2,467017481108	2,467041015625
0,545137528327	0,545166015625	2,535132842601	2,535156250000
0,597627939133	0,597656250000	2,603736483579	2,603759765625
0,650606630644	0,650634765625	2,672828404042	2,672851562500
0,704073602587	0,704101562500	2,742408603988	2,742431640625
0,758028854770	0,758056640625	2,812477083419	2,812500000000
0,812472387052	0,812500000000	2,883033842333	2,883056640625
0,867404199330	0,867431640625	2,954078880733	2,954101562500
0,922824291523	0,922851562500	3,025612198619	3,025634765625
0,978732663567	0,978759765625	3,097633795993	3,097656250000
1,035129315412	1,035156250000	3,170143672857	3,170166015625
1,092014247016	1,092041015625	3,243141829213	3,243164062500
1,149387458344	1,149414062500	3,316628265064	3,316650390625
1,207248949366	1,207275390625	3,390602980413	3,390625000000
1,265598720056	1,265625000000	3,465065975262	3,465087890625
1,324436770392	1,324462890625	3,540017249616	3,540039062500
1,383763100355	1,383789062500	3,615456803479	3,615478515625
1,443577709927	1,443603515625	3,691384636854	3,691406250000
1,503880599093	1,503906250000	3,767800749746	3,767822265625
1,564671767839	1,564697265625	3,844705142160	3,844726562500
1,625951216153	1,625976562500	3,922097814101	3,922119140625
1,687718944024	1,687744140625	3,999978765574	4,000000000000
1,749974951441	1,750000000000		

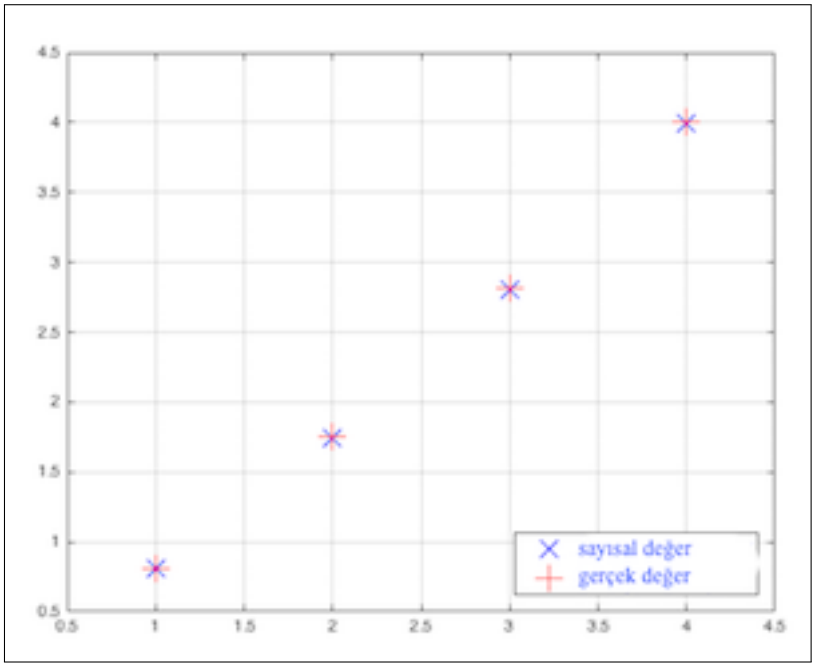
Şekil 3.1 de $\alpha(t) = \frac{1}{2}t$ için, $N = 4$ adım aralığında kesirli türevin sayısal ve gerçek değerleri MATLAB (R2015b) programı ile çizilmiştir.

Çizelge 3.4. Örnek 3.1 deki problemde $T = 1$ ve $\alpha(t) = \frac{1}{2}t$ için mutlak hata değerlerinin ve yakınsama mertebelerinin incelenmesi

τ	Mutlak hata	Yakınsama mertebesi
$\frac{1}{4}$	6,585728e-03	
$\frac{1}{8}$	1,754860e-03	1,9079
$\frac{1}{16}$	4,565743e-04	1,9424
$\frac{1}{32}$	1,167049e-04	1,9679
$\frac{1}{64}$	2,967417e-05	1,9755

Çizelge 3.5. Örnek 3.1 deki problemde $T = 1$ ve $\alpha(t) = sin(t)$ için $N = 4$, $N = 8$ adım aralığında kesirli türevin sayısal ve gerçek değerlerin incelenmesi

$\tau = \frac{1}{4}$		$\tau = \frac{1}{8}$	
sayısal değer	gerçek değer	sayısal değer	gerçek değer
0,794762793636	0,812500000000	0,386640240204	0,390625000000
1,727520208074	1,750000000000	0,807736213198	0,812500000000
2,788340347789	2,812500000000	1,260492640055	1,265625000000
3,975298905324	4,000000000000	1,744647341126	1,750000000000
		2,260140733492	2,265625000000
		2,806943289836	2,812500000000
		3,385034208527	3,390625000000
		3,994397919795	4,000000000000



Şekil 3.1. $\alpha(t) = \frac{1}{2}t$ için, $N = 4$ adım aralığında kesirli türevin sayısal ve gerçek değerleri üst üste çakışmaktadır

Çizelge 3.6. Örnek 3.1 deki problemde $T = 1$ ve $\alpha(t) = sin(t)$ için $N = 16$, $N = 32$ adım aralığında kesirli türevin sayısal ve gerçek değerlerin incelenmesi

$\tau = \frac{1}{16}$		$\tau = \frac{1}{32}$	
sayısal değer	gerçek değer	sayısal değer	gerçek değer
0,190458811746	0,191406250000	0,094495229084	0,094726562500
0,389552027574	0,390625000000	0,191152917929	0,191406250000
0,596522633108	0,597656250000	0,289776299993	0,290039062500
0,811321611175	0,812500000000	0,390355236098	0,390625000000
1,033941750135	1,035156250000	0,492888269766	0,493164062500
1,264381028701	1,265625000000	0,597375029086	0,597656250000
1,502638440292	1,503906250000	0,703815383037	0,704101562500
1,748713235941	1,750000000000	0,812209273587	0,812500000000
2,002604749102	2,003906250000	0,922556668864	0,922851562500
2,264312355507	2,265625000000	1,034857547135	1,035156250000
2,533835469305	2,535156250000	1,149111890582	1,149414062500
2,811173548221	2,812500000000	1,265319682707	1,265625000000
3,096326099295	3,097656250000	1,383480907242	1,383789062500
3,389292682744	3,390625000000	1,503595547725	1,503906250000
3,690072913517	3,691406250000	1,625663587402	1,625976562500
3,998666460891	4,000000000000	1,749685009261	1,750000000000
		1,875659796152	1,875976562500
		2,003587930921	2,003906250000
		2,133469396549	2,133789062500
		2,265304176291	2,265625000000
		2,399092253795	2,399414062500
		2,534833613201	2,535156250000
		2,672528239233	2,672851562500
		2,812176117265	2,812500000000
		2,953777233375	2,954101562500
		3,097331574386	3,097656250000
		3,242839127892	3,243164062500
		3,390299882272	3,390625000000
		3,539713826696	3,540039062500
		3,691080951124	3,691406250000
		3,844401246297	3,844726562500
		3,999674703724	4,000000000000

Çizelge 3.7. Örnek 3.1 deki problemde $T = 1$ ve $\alpha(t) = sin(t)$ için, $N = 64$ adım aralığında kesirli türevin sayısal ve gerçek değerlerin incelenmesi

$\tau = \frac{1}{64}$			
sayısal değer	gerçek değer	sayısal değer	gerçek değer
0,000000000000	0,000000000000	1,812666035101	1,812744140625
0,047061959891	0,047119140625	1,875898252036	1,875976562500
0,094665078190	0,094726562500	1,939618763607	1,939697265625
0,142759220383	0,142822265625	2,003827569304	2,003906250000
0,191342149514	0,191406250000	2,068524668620	2,068603515625
0,240413529760	0,240478515625	2,133710061054	2,133789062500
0,289973272207	0,290039062500	2,199383746104	2,199462890625
0,340021345372	0,340087890625	2,265545723278	2,265625000000
0,390557735942	0,390625000000	2,332195992086	2,332275390625
0,441582437566	0,441650390625	2,399334552049	2,399414062500
0,493095446929	0,493164062500	2,466961402692	2,467041015625
0,545096762166	0,545166015625	2,535076543551	2,535156250000
0,597586382157	0,597656250000	2,603679974170	2,603759765625
0,650564306173	0,650634765625	2,672771694103	2,672851562500
0,704030533696	0,704101562500	2,742351702913	2,742431640625
0,757985064322	0,758056640625	2,812420000175	2,812500000000
0,812427897706	0,812500000000	2,882976585475	2,883056640625
0,867359033524	0,867431640625	2,954021458408	2,954101562500
0,922778471457	0,922851562500	3,025554618582	3,025634765625
0,978686211182	0,978759765625	3,097576065616	3,097656250000
1,035082252360	1,035156250000	3,170085799142	3,170166015625
1,091966594635	1,092041015625	3,243083818802	3,243164062500
1,149339237635	1,149414062500	3,316570124251	3,316650390625
1,207200180968	1,207275390625	3,390544715156	3,390625000000
1,265549424223	1,265625000000	3,465007591196	3,465087890625
1,324386966974	1,324462890625	3,539958752060	3,540039062500
1,383712808776	1,383789062500	3,615398197452	3,615478515625
1,443526949173	1,443603515625	3,691325927086	3,691406250000
1,503829387695	1,503906250000	3,767741940688	3,767822265625
1,564620123863	1,564697265625	3,844646237995	3,844726562500
1,625899157186	1,625976562500	3,922038818757	3,922119140625
1,687666487169	1,687744140625	3,999919682733	4,000000000000
1,749922113309	1,750000000000		

Çizelge 3.8. Örnek 3.1 deki problemde $T = 1$ ve $\alpha(t) = sin(t)$ için mutlak hata değerlerinin ve yakınsama mertebelerinin incelenmesi

τ	Mutlak hata	Yakınsama mertebesi
$\frac{1}{4}$	2,470109e-02	
$\frac{1}{8}$	5,602080e-03	2,1513
$\frac{1}{16}$	1,333539e-03	2,0707
$\frac{1}{32}$	3,253162e-04	2,0353
$\frac{1}{64}$	8,032494e-05	2,0179

Çizelge 3.4 ve çizelge 3.8 de mutlak hata ve yakınsama mertebeleri α nın iki farklı değeri için verilmiştir. Buradaki sonuçlar çözümün sayısal hatalarının küçük, doğruluğun ikinci mertebeden ve istenilen bir tolerans değerinden daha küçük olduğunu göstermektedir.

3.4. Değişen Mertebeden Kesirli Diferensiyel Denkleme $y(t)$ Teriminin Eklenmesi

Bu bölümde; Eş. 3.11 ile verilen ikinci mertebeden sayısal çözüme $y(t)$ teriminin ilave edilmesiyle sayısal çözümün geçerliliği test edilecektir. Başlangıç değer problemimiz;

$$\begin{cases} {}_CD_{0,t}^{\alpha(t)} y(t) + ay(t) = f(t), \quad 0 \le t \le T, \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{3.18}$$

olarak tanımlanıp, $a = 1$ alınırsa, çözüm şeması herhangi bir t_k noktasında,

$$\begin{cases} \tau^{-\alpha_k} \sum_{j=0}^{k} w_j^{\alpha_k} y^{k-j} = f(t_k) - y(t_k), \quad 1 \le k \le N, \\ y^0 = 0, \end{cases} \tag{3.19}$$

şeklinde belirlenir. Burada $w_0^{\alpha_k} = (\frac{2+\alpha_k}{2}) g_0^{\alpha_k}$, $w_j^{\alpha_k} = (\frac{2+\alpha_k}{2}) g_j^{\alpha_k} - (\frac{\alpha_k}{2}) g_{j-1}^{\alpha_k}$, $k \ge 1$ dir.

3.2. *Örnek*

Eş. 3.18 probleminde, $0 < \alpha(t) < 1$ olmak üzere $f(t) = t^2 + \frac{2}{\Gamma(\frac{5}{2})} t^{\frac{3}{2}}$ ile $T = 1$ alınırsa, bu problemin analitik çözümünün $y(t) = t^2$ açıktır. Sayısal çözümde τ nun farklı değerleri için hesaplamalar aşağıda farklı durumlar olarak incelenmiştir.

Durum 1,
$\tau = \frac{1}{4}$, $N = 4$, $k = 1$, $T = 1$ seçilirse, $\tau = \frac{T}{N} = \frac{1}{4}$, $t_k = k\tau = \frac{1}{4}$ olur, $\alpha(t_k) = \alpha_k = 2t_k = \frac{1}{2}$ değerlerini alır. $\tau^{-\alpha_k}[w_0^{\alpha_k} y^1 + w_1^{\alpha_k} y^0] = -y(t_k) + f(t_k)$ denkleminde $y^0 = 0$ alırsak aşağıdaki ifade;

$-y(\frac{1}{4}) + f(\frac{1}{4}) = (\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}}[w_0^{\frac{1}{2}} y^1]$ olur.

$g_0^{\frac{1}{2}} = (-1^0)\binom{0.5}{0} = 1$

$w_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2+\frac{1}{2}}{2} g_0^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{4}$

$f(\frac{1}{4}) = (\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}}[w_0^{\frac{1}{2}} y^1] + y^1$

$f(t_k) = {t_k}^2 + \frac{2}{\Gamma(\frac{5}{2})} {t_k}^{\frac{3}{2}} = 0,2506$ değerini yerine yazarak;

$y^1 = 0,071589484$ sayısal çözümü buluruz.

$y(t_k) = (t_k)^2$ denkleminde;

$y(\frac{1}{4}) = (\frac{1}{4})^2 = 0,062500000$ alırsak bu gerçek değeri elde ederiz.

Durum 2,
$\tau = \frac{1}{8}$, $N = 8$, $k = 1$, $T = 1$ seçilirse, $\tau = \frac{T}{N} = \frac{1}{8}$, olur ve $t_k = k\tau = \frac{1}{8}$, $\alpha(t_k) = \alpha_k = 2t_k = \frac{1}{4}$ değerlerini alır. $\tau^{-\alpha_k}[w_0^{\alpha_k} y^1 + w_1^{\alpha_k} y^0] = -y(t_k) + f(t_k)$ denkleminde $y^0 = 0$ dan faydalanıp sadeleştirme yaparak bulduğumuz değerleri yerine yazdığımızda;

$-y(\frac{1}{8}) + f(\frac{1}{8}) = (\frac{1}{8})^{-\frac{1}{4}}[w_0^{\frac{1}{4}} y^1]$ olur.

$g_0^{\frac{1}{4}} = (-1^0)\binom{0.25}{0} = 1$

$w_0^{\frac{1}{4}} = \frac{2+\frac{1}{4}}{2} g_0^{\frac{1}{4}} = \frac{9}{8}$

$f(\frac{1}{8}) = (\frac{1}{8})^{-\frac{1}{4}}[w_0^{\frac{1}{4}} y^1] + y^1$

$f(t_k) = {t_k}^2 + \frac{2}{\Gamma(\frac{5}{2})} {t_k}^{\frac{3}{2}} = 0,0821$ değerini yerine yazarak;

$y^1 = 0,018104898$ sayısal çözümü buluruz.

$y(t_k) = (t_k)^2$ denkleminde;

$y(\frac{1}{8}) = (\frac{1}{8})^2 = 0,015625000$ alırsak bu gerçek değeri elde ederiz.

Durum 3,
$\tau = \frac{1}{16}$, $N = 16$, $k = 1$, $T = 1$ seçildiğinde, $\tau = \frac{T}{N} = \frac{1}{16}$, $t_k = k\tau = \frac{1}{16}$, $\alpha(t_k) = \alpha_k = 2t_k = \frac{1}{8}$ değerlerini alır. $\tau^{-\alpha_k}[w_0^{\alpha_k} y^1 + w_1^{\alpha_k} y^0] = -y(t_k) + f(t_k)$ denkleminde $y^0 = 0$ dan faydalanıp sadeleştirme yaparak bulduğumuz değerleri yerine yazdığımızda;

$-y(\frac{1}{16}) + f(\frac{1}{16}) = (\frac{1}{16})^{-\frac{1}{8}}[w_0^{\frac{1}{8}} y^1]$ olur.

$g_0^{\frac{1}{8}} = (-1^0)\binom{\frac{1}{8}}{0} = 1$

$w_0^{\frac{1}{8}} = \frac{2+\frac{1}{8}}{2} g_0^{\frac{1}{8}} = \frac{17}{16}$

$f(\frac{1}{16}) = (\frac{1}{16})^{-\frac{1}{8}}[w_0^{\frac{1}{8}} y^1] + y^1$

$f(t_k) = {t_k}^2 + \frac{2}{\Gamma(\frac{5}{2})} {t_k}^{\frac{3}{2}} = 0,0274$ değerini yerine yazarak;

$y^1 = 0,004569025$ sayısal çözümü buluruz.

$y(t_k) = (t_k)^2$ denkleminde;

$y(\frac{1}{16}) = (\frac{1}{16})^2 = 0,003906250$ alırsak bu gerçek değeri elde ederiz.

Durum 4,
$\tau = \frac{1}{64}$, $N = 64$, $k = 1$, $T = 1$ seçilirse, $\tau = \frac{T}{N} = \frac{1}{64}$ olur ve $t_k = k\tau = \frac{1}{64}$, $\alpha(t_k) = \alpha_k = 2t_k = \frac{1}{32}$ değerlerini alır. $\tau^{-\alpha_k}[w_0^{\alpha_k} y^1 + w_1^{\alpha_k} y^0] = -y(t_k) + f(t_k)$ denkleminde $y^0 = 0$ dan faydalanıp sadeleştirme yaparak bulduğumuz değerleri yerine yazdığımızda;

$-y(\frac{1}{64}) + f(\frac{1}{64}) = (\frac{1}{64})^{-\frac{1}{32}}[w_0^{\frac{1}{32}} y^1]$ olur.

$g_0^{\frac{1}{32}} = (-1^0)\binom{\frac{1}{32}}{0} = 1$

$w_0^{\frac{1}{32}} = \frac{2+\frac{1}{32}}{2} g_0^{\frac{1}{32}} = \frac{65}{64}$

$f(\frac{1}{64}) = (\frac{1}{64})^{-\frac{1}{32}}[w_0^{\frac{1}{32}} y^1] + y^1$

$f(t_k) = {t_k}^2 + \frac{2}{\Gamma(\frac{5}{2})} {t_k}^{\frac{3}{2}} = 0,0109$ değerini yerine yazarak;

$y^1 = 0,000289330$ sayısal çözümü buluruz.

$y(t_k) = (t_k)^2$ denkleminde;

$y(\frac{1}{64}) = (\frac{1}{64})^2 = 0,000244141$ alırsak bu gerçek değeri elde ederiz.

$\alpha(t) = \frac{1}{2}$ esas alınarak oluşturulan algoritma ile tüm iterasyonlar için hesaplama yapan MATLAB (R2015b) program kodu EK-3 te sunulmuştur. Söz konusu program yardımıyla $\alpha(t) = \frac{1}{2}$ için $T = 1$ olmak üzere $N = 4, 8, 16, 32, 64$ hesaplanan sayısal ve gerçek değerler verilmiştir.

Çizelge 3.9. Örnek 3.2 deki problemde $T = 1$ ve $\alpha(t) = \frac{1}{2}$ için mutlak hata değerlerinin ve yakınsama mertebelerinin incelenmesi

τ	Mutlak hata	Yakınsama mertebesi
$\frac{1}{4}$	9,201325e-03	
$\frac{1}{8}$	2,623652e-03	1,81026
$\frac{1}{16}$	7,261612e-04	1,85321
$\frac{1}{32}$	1,960721e-04	1,88890
$\frac{1}{64}$	5,190739e-05	1,91737

Çizelge 3.10. Örnek 3.2 deki problemde $T = 1$ ve $\alpha(t) = \frac{1}{2}$ için $N = 4$, $N = 8$ adım aralığında kesirli türevin sayısal ve gerçek değerlerin incelenmesi

$\tau = \frac{1}{4}$		$\tau = \frac{1}{8}$	
sayısal değer	gerçek değer	sayısal değer	gerçek değer
0,071589484	0,062500000	0,018104898	0,015625000
0,259201325	0,250000000	0,065123652	0,062500000
0,570794767	0,562500000	0,143068543	0,140625000
1,007516570	1,000000000	0,252264939	0,250000000
		0,392746275	0,390625000
		0,564505596	0,562500000
		0,767534747	0,765625000
		1,001828241	1,000000000

Çizelge 3.11. Örnek 3.2 deki problemde $T = 1$ ve $\alpha(t) = \frac{1}{2}$ için $N = 16$, $N = 32$ adım aralığında kesirli türevin sayısal ve gerçek değerlerin incelenmesi

$\tau = \frac{1}{16}$		$\tau = \frac{1}{32}$	
sayısal değer	gerçek değer	sayısal değer	gerçek değer
0,004569025	0,003906250	0,001150760	0,000976562
0,016351161	0,015625000	0,004102322	0,003906250
0,035851178	0,035156250	0,008980809	0,008789062
0,063157151	0,062500000	0,015809364	0,015625000
0,098281108	0,097656250	0,024591676	0,024414062
0,141222933	0,140625000	0,035328044	0,035156250
0,191981309	0,191406250	0,048018296	0,047851562
0,250555215	0,250000000	0,062662261	0,062500000
0,316943955	0,316406250	0,079259815	0,079101562
0,391147053	0,390625000	0,097810869	0,097656250
0,473164167	0,472656250	0,118315358	0,118164062
0,562995042	0,562500000	0,140773233	0,140625000
0,660639483	0,660156250	0,165184459	0,165039062
0,766097340	0,765625000	0,191549003	0,191406250
0,879368490	0,878906250	0,219866843	0,219726562
1,000452834	1,000000000	0,250137959	0,250000000
		0,282362334	0,282226562
		0,316539954	0,316406250
		0,352670807	0,352539062
		0,390754883	0,390625000
		0,430792174	0,430664062
		0,472782672	0,472656250
		0,516726370	0,516601562
		0,562623262	0,562500000
		0,610473343	0,610351562
		0,660276608	0,660156250
		0,712033054	0,711914062
		0,765742676	0,765625000
		0,821405470	0,821289062
		0,879021435	0,878906250
		0,938590567	0,938476562
		1,000112863	1,000000000

Çizelge 3.12. Örnek 3.2 deki problemde $T = 1$ ve $\alpha(t) = \frac{1}{2}$ için $N = 64$ adım aralığında kesirli türevin sayısal ve gerçek değerlerin incelenmesi

$\tau = \frac{1}{64}$			
sayısal değer	gerçek değer	sayısal değer	gerçek değer
0,000289330	0,000244141	0,265903306	0,265869141
0,001028470	0,000976562	0,282260460	0,282226562
0,002248883	0,002197266	0,299105903	0,299072266
0,003956541	0,003906250	0,316439634	0,316406250
0,006152485	0,006103516	0,334261653	0,334228516
0,008836854	0,008789062	0,352571960	0,352539062
0,012009635	0,011962891	0,371370554	0,371337891
0,015670803	0,015625000	0,390657435	0,390625000
0,019820338	0,019775391	0,410432602	0,410400391
0,024458225	0,024414062	0,430696056	0,430664062
0,029584451	0,029541016	0,451447797	0,451416016
0,035199009	0,035156250	0,472687823	0,472656250
0,041301892	0,041259766	0,494416136	0,494384766
0,047893095	0,047851562	0,516632734	0,516601562
0,054972612	0,054931641	0,539337618	0,539306641
0,062540441	0,062500000	0,562530787	0,562500000
0,070596578	0,070556641	0,586212241	0,586181641
0,079141020	0,079101562	0,610381980	0,610351562
0,088173766	0,088134766	0,635040005	0,635009766
0,097694813	0,097656250	0,660186314	0,660156250
0,107704161	0,107666016	0,685820907	0,685791016
0,118201806	0,118164062	0,711943786	0,711914062
0,129187749	0,129150391	0,738554948	0,738525391
0,140661987	0,140625000	0,765654395	0,765625000
0,152624520	0,152587891	0,793242127	0,793212891
0,165075348	0,165039062	0,821318142	0,821289062
0,178014468	0,177978516	0,849882441	0,849853516
0,191441880	0,191406250	0,878935025	0,878906250
0,205357585	0,205322266	0,908475892	0,908447266
0,219761580	0,219726562	0,938505043	0,938476562
0,234653866	0,234619141	0,969022478	0,968994141
0,250034441	0,250000000	1,000028196	1,000000000

Bu kısımda mertebenin yine iki olduğu görülmüştür.

3.5. Değişen Mertebeden Kesirli Diferensiyel Denkleme $y''(t)$ Teriminin Eklenmesi

Bu bölümde; Eş. 3.11 ile verilen ikinci mertebeden sayısal çözüm yöntemi ile daha genel bir denklem sınıfına ait hibrit bir çözüm yöntemi geliştirilecektir. Eş. 3.1 denklemine $y(t)$ ve $y''(t)$ terimlerinin eklenmesi ile denklem daha genel bir denklem olarak ifade edilebilecektir. Burada ikinci mertebeden türev sonlu farklar cinsinden ifade edilerek kesirli mertebeden türev ise Eş. 3.11 denklemi ile hesaplanacaktır. Böylece başlangıç değer problemimiz,

$$\begin{cases} {}_C D_{0,t}^{\alpha(t)} y(t) = f(t) + a y''(t) + b y(t), \quad 0 \le t \le T, \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases} \tag{3.20}$$

şeklinde tanımlanır ve sayısal çözüm şeması için kesirli türev yaklaşımı aşağıda verildiği şekilde olur.

$$\tau^{-\alpha_k} \sum_{j=0}^{k} w_j^{\alpha_k} y^{k-j} = f(t_k) + a y''(t_k) + b y(t_k) \tag{3.21}$$

Eş. 3.20 probleminde, a ve b birer sabit olmak üzere sırasıyla $1, -1$ olarak seçilebilir ve ikinci mertebeden türevlere de sonlu farklarla yaklaşılarak problemin sayısal çözüm şeması elde edilir.

Geliştirilen bu sayısal çözüm metodunda kullanılmak üzere, ikinci mertebeden türev için sonlu fark formülleri aşağıda verilmiştir.

İkinci Mertebeden Türev için İleri Fark Yaklaşımı

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} \tag{3.22}$$

İkinci Mertebeden Türev için Geri Fark Yaklaşımı

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})}{h^2} \tag{3.23}$$

İkinci Mertebeden Türev için Merkezi Fark Yaklaşımı

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} \tag{3.24}$$

3.3. *Örnek*

Sayısal çözüm yöntemi (Bakınız [8]) Eş. 3.18 deki denklem,

$$D^{\alpha(t)}y(t_k) = y''(t_k) - y(t_k) + f(t_k) \tag{3.25}$$

şeklinde düzenlenir. Burada özel olarak $\alpha(t) = \frac{1}{2}$ seçilirse,

$$D^{\frac{1}{2}}y(t_k) = y''(t_k) - y(t_k) + f(t_k) \tag{3.26}$$

olur ve ikinci mertebeden türeve merkezi fark yaklaşımı uygulanırsa,

$$\tau^{-\alpha_k}\sum_{j=0}^{k} w_j^{\alpha_k} y^{k-j} = \frac{y(t_{k+1}) - 2y(t_k) + y(t_{k-1})}{h^2} - y(t_k) + f(t_k) \tag{3.27}$$

elde edilir. Yöntemin geçerliliğinin test edilebilmesi için çözümü bilinen bir denklemle karşılaştırılması uygun olacağından $f(t)$ fonksiyonu t_k noktalarında,

$$f(t) = t^2 - 2 + \frac{2}{\Gamma(\frac{5}{2})}t^{\frac{3}{2}} \tag{3.28}$$

olarak seçilip denklemde yerine yazıldığında;

$$\tau^{-\alpha_k}\sum_{j=0}^{k} w_j^{\alpha_k} y^{k-j} = \frac{y(t_{k+1}) - 2y(t_k) + y(t_{k-1})}{h^2} - y(t_k) + {t_k}^2 - 2 + \frac{2}{\Gamma(\frac{5}{2})}{t_k}^{\frac{3}{2}} \tag{3.29}$$

olur. Burada $h = \tau$ olarak seçilmiştir. Sonuç olarak;

$$y(t_{k+1}) = h^2\tau^{-\alpha_k}\sum_{j=0}^{k} w_j^{\alpha_k} y^{k-j} + 2y(t_k) - y(t_{k-1}) + h^2 y(t_k) - h^2[{t_k}^2 - 2 + \frac{2}{\Gamma(\frac{5}{2})}{t_k}^{\frac{3}{2}}] \tag{3.30}$$

elde edilir. Burada çözümü yapılan tüm örnekler MATLAB (R2015b) programı ile hesaplanmıştır. Eş. 3.26 denklemine başlangıç koşulları olarak $y(0) = 0,0$ ve $y'(0) = 0,0$ eklenirse, gerçek çözümün $y(t_k) = {t_k}^2$ olduğu kolayca görülebilir. Problemin sayısal çözümü τ nun tek bir değeri için ayrıntılı incelenen sayısal sonuçlar aşağıda verilmiştir.

$N = 10$, $k = 2$, $T = 1$ seçilirse, $\tau = \frac{T}{N} = \frac{1}{10}$, $t_k = k\tau = \frac{2}{10}$, $\alpha(t_k) = \alpha_k = \frac{1}{2}$ değerlerini alır. $f(0,2) = (0,2)^2 - 2 + \frac{2}{\Gamma(\frac{5}{2})}(0,2)^{\frac{3}{2}}$, $f(0,2) = -1,825432932158925$ olur.

Denklemde $y^0 = 0$ dan faydalanıp sadeleştirme yaparak bulduğumuz değerleri yerine yazdığımızda;
$y(t_{2+1}) = (0,1)^2\tau^{-\alpha_k}\sum_{j=0}^{2} w_j^{\alpha_k} y^{k-j} + 2y(t_2) - y(t_{2-1}) + (0,1)^2 y(t_2) - (0,1)^2[{t_2}^2 - 2 + \frac{2}{\Gamma(\frac{5}{2})}{t_2}^{\frac{3}{2}}]$,
$y^3 = 0,088670141$ sayısal çözümü buluruz.

$y(t_k) = (t_k)^2$ denkleminde $k = 3$ için $t_k = \frac{3}{10}$ ile hesapladığımızda $0,09$ olarak gerçek değeri elde ederiz. Gerçek ile sayısal değerler arasındaki fark $0,001329859$ olarak bulunur. $\alpha(t) = \frac{1}{2}$ esas alınarak oluşturulan algoritma ile tüm iterasyonlar için MATLAB (R2015b) programı EK-4 de sunulmuştur. Söz konusu program ile $\alpha(t) = \frac{1}{2}$ için $T = 1$ olmak üzere $N = 10$ ve $N = 100$ için hesaplanan gerçek ve sayısal değerler verilmiştir.

Çizelge 3.13. Örnek 3.3 deki problemde $T = 1$ ve $\alpha(t) = \frac{1}{2}$ için $N = 10$, $N = 100$ adım aralığında kesirli türevin sayısal ve gerçek değerlerin incelenmesi

t_k	$y(t_k) = {t_k}^2$	$N = 10$ için y^k	$N = 100$ için y^k
0,1	0,01	0,010000000	0,010000470
0,2	0,04	0,040000000	0,040000729
0,3	0,09	0,090235468	0,090000693
0,4	0,16	0,160461209	0,160000405
0,5	0,25	0,250691879	0,249999884
0,6	0,36	0,360931289	0,359999132
0,7	0,49	0,491183812	0,489998146
0,8	0,64	0,641454438	0,639996910
0,9	0,81	0,811748730	0,809995404
1,0	1,0	1,002072855	0,999993598
	Mutlak Hata	0,002072855	0,000006401

4. KESİRLİ MERTEBEDEN ÇOK TERİMLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLER

4.1. Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi

Diferensiyel dönüşüm yöntemi; doğrusal ve doğrusal olmayan başlangıç değer problemlerini çözmek için ilk olarak Zhou [23] tarafından önerilmiştir. Bu metod seri formunda bir analitik çözüm oluşturur. Ayrıca geleneksel yüksek mertebeden Taylor serisi yönteminden de farklıdır. Bu yöntem kesirli mertebeden diferensiyel denklemlerin çözümü için Ertürk, Momani ve Odibat tarafından daha da geliştirilmiştir [24].

Tek bileşenli $f(x)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşüm fonksiyonu $F(k)$ olmak üzere, $f(x)$ in tek boyutlu diferensiyel dönüşümü [9–13];

$$F_\alpha(k) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha k)}[(D^\alpha_{x_0})^k f(x)]_{x=x_0} \tag{4.1}$$

olarak tanımlanır. Burada $0 < \alpha \leq 1$ ve $(D^\alpha_{x_0})^k = (D^\alpha_{x_0}).(D^\alpha_{x_0})....(D^\alpha_{x_0})$ k tanedir. $F(k)$ dönüşüm fonksiyonunun ters diferensiyel dönüşüm fonksiyonu ise,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_\alpha(k)(x-x_0)^{\alpha k} \tag{4.2}$$

biçimde tanımlanır [21].

Diferensiyel Dönüşüm Yönteminin bazı temel özellikleri aşağıda verilmiştir. $f(x)$, $g(x)$ ve $h(x)$ fonksiyonlarının diferensiyel dönüşümleri sırasıyla $F_\alpha(k)$, $G_\alpha(k)$ ve $H_\alpha(k)$ olmak üzere;

(a) $f(x) = g(x) \pm h(x)$ ise, $F_\alpha(k) = G_\alpha(k) \pm H_\alpha(k)$ dır.

(b) $f(x) = ag(x)$ ise, $F_\alpha(k) = aG_\alpha(k)$ dır. Burada a sabittir.

(c) $f(x) = g(x)h(x)$ ise, $F_\alpha(k) = \sum_{l=0}^{k} G_\alpha(l)H_\alpha(k-l)$ dir.

(d) $f(x) = (x-x_0)^\gamma$ ise, $\gamma = n\alpha$, $n \in Z$ ve $F_\alpha(k) = \delta(k-\gamma/\alpha)$ olur, burada;

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \text{ olduğunda,} \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

(e) $f(x) = D^{\alpha}_{x_0} g(x)$ ise $m-1 < \alpha \leq m$ olmak üzere;

$$F_{\alpha}(k) = \frac{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)}{\Gamma(\alpha k + 1)} G_{\alpha}(k+1) \tag{4.3}$$

biçimde tanımlanır.

4.2. Bagley-Torvik Denklemi

Bagley ve Torvik tarafından 1984 senesinde sıvı içine yerleştirilmiş plakaların hareketini incelerken $\alpha = \frac{3}{2}$ mertebeden kesirli diferensiyel denklemi ortaya çıkmıştır [20, 25].

Bu denklem en genel haliyle aşağıdaki gibi tanımlanmıştır;

$$Ay^{''}(t) + BD^{3/2}_{*} y(t) + Cy(t) = f(t) \tag{4.4}$$

burada $A \neq 0$ ve $B, C \in \Re$ dir. Bagley-Torvik denkleminde D^{α}_{*} terimi; Caputo tanımında, $\alpha \notin N$ olmak üzere α. mertebeden kesirli diferensiyel denklemi ifade eder.

Bagley-Torvik denklemi üzerine şimdiye kadar değişik çözüm metotları uygulanmış, diğer çözüm metotlarıyla karşılaştırmalar yapılmıştır.

Yapılan bu çalışmalarda kesirli olmayan mertebeden Bagley-Torvik diferensiyel denklemini 1. mertebeden bir diferensiyel denklem sistemi haline getirerek sayısal çözümler elde edilmiştir [26].

4.3. Özel Tipte Bagley-Torvik Denklemlerinin DTM ile Yaklaşık Çözümleri

Bu bölümde kesirli mertebeden Bagley-Torvik denkleminin Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi ile yaklaşık çözümlerine değinilecektir.

4.1. *Örnek*

Öncelikle aşağıda verilen Bagley-Torvik denkleminin özel çözümünü ele alalım.

$$y''(x) - D^{\alpha} y(x) = -1 - e^{x-1} \tag{4.5}$$

ve problemin sınır şartlarının $y(0) = 0, y(1) = 0$ olarak tanımlandığını kabul edelim.

Denklemin sağ tarafına DTM uygulandığında;

$$\begin{aligned}
y'' - D^{\alpha}y(x) &= T(-1 - e^{x-1}) \\
&= T(-1 - e^{x}e^{-1}) \\
&= T(-1 - (1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + ...)) \\
&= T(-1) + T(-1) - T(x-1) - T\Big(\frac{x^2 - 2x + 1}{2!}\Big) \\
&= T(-1) + T(-1) - (T(x) - T(1)) - T\Big(\frac{x^2}{2!}\Big) + T(x) - T(\frac{1}{2}) \\
&= T(-1) + T(-1) - T(x) + T(1) - T\Big(\frac{x^2}{2!}\Big) + T(x) - T(\frac{1}{2}) \\
&= -\delta(k) - \delta(k) - \delta(k-1) + \delta(k) - \frac{1}{2}\delta(k-2) + \delta(k-1) - \frac{1}{2}\delta(k) \\
&= -\frac{3}{2}\delta(k) - \frac{1}{2}\delta(k-2)
\end{aligned}$$

elde edilir ve diğer tarafı ise;

$$\begin{aligned}
-\frac{3}{2}\delta(k) - \frac{1}{2}\delta(k-2) &= y''(x) - D^{\alpha}y(x) \\
&= T(y''(x) - D^{\alpha}y(x)) \\
&= (k+1)(k+2)Y(k+2) - (\alpha + k/q)Y(\alpha + k/q)
\end{aligned}$$

olur ve burada $\alpha = 1$, $q = 1$ alınmıştır. Böylece, $Y(k+2)$ katsayıları için rekürans formülü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Y(k+2) = \frac{(k+1)Y(k+1) - \frac{3}{2}\delta(k) - \frac{1}{2}\delta(k-2)}{(k+1)(k+2)}, \qquad k = 0, 1, 2, 3...N \tag{4.6}$$

N bir tamsayı olup istenilen yaklaşım hatası ile serinin açılımında üst sınırı göstermektedir.

$$y(0) = 0, y(1) = 0 \tag{4.7}$$

sınır şartlarından $Y(0) = 0$ dır. $Y(1) = c$ alınarak katsayılar c sabit sayısı cinsinden elde edilir.

$k = 0$ için Eş. 4.15 den, $2Y(2) - Y(1) = \frac{-3}{2}$ olmak üzere, $Y(2) = \frac{(2c-3)}{4}$ olur.
$k = 1$ için; $6Y(3) - 2Y(2) = \frac{-3}{2}$ olmak üzere, $Y(3) = \frac{(2c-3)}{12}$ olur.
$k = 2$ için; $12Y(3) - 3Y(2) = \frac{-4}{2}$ olmak üzere,$Y(3) = 4Y(4) + \frac{2}{4}$, c sabit değeri cinsinden, $Y(4) = \frac{(2c-5)}{48}$ olur.
.
.
$k = N$ için seri kesilir. Burada $N = 7$ alınmıştır.

Sonuç olarak, Bagley-Torvik denkleminin özel çözümü;

$$y(x) = \sum_{k=0}^{N} Y(k)x^k \tag{4.8}$$

burada $Y(k)$ katsayı değerlerini yerine yazdığımızda;

$$y(x) = 0 + cx + \frac{(2c-3)}{4}x^2 + \frac{(2c-3)}{12}x^3 + \frac{(2c-5)}{48}x^4 + ... \tag{4.9}$$

olarak elde edilmiş olur. Son olarak Eş. 4.9 çözümünde $y(1) = 0$ şartı kullanılarak c sabit değeri hesaplanabilir.

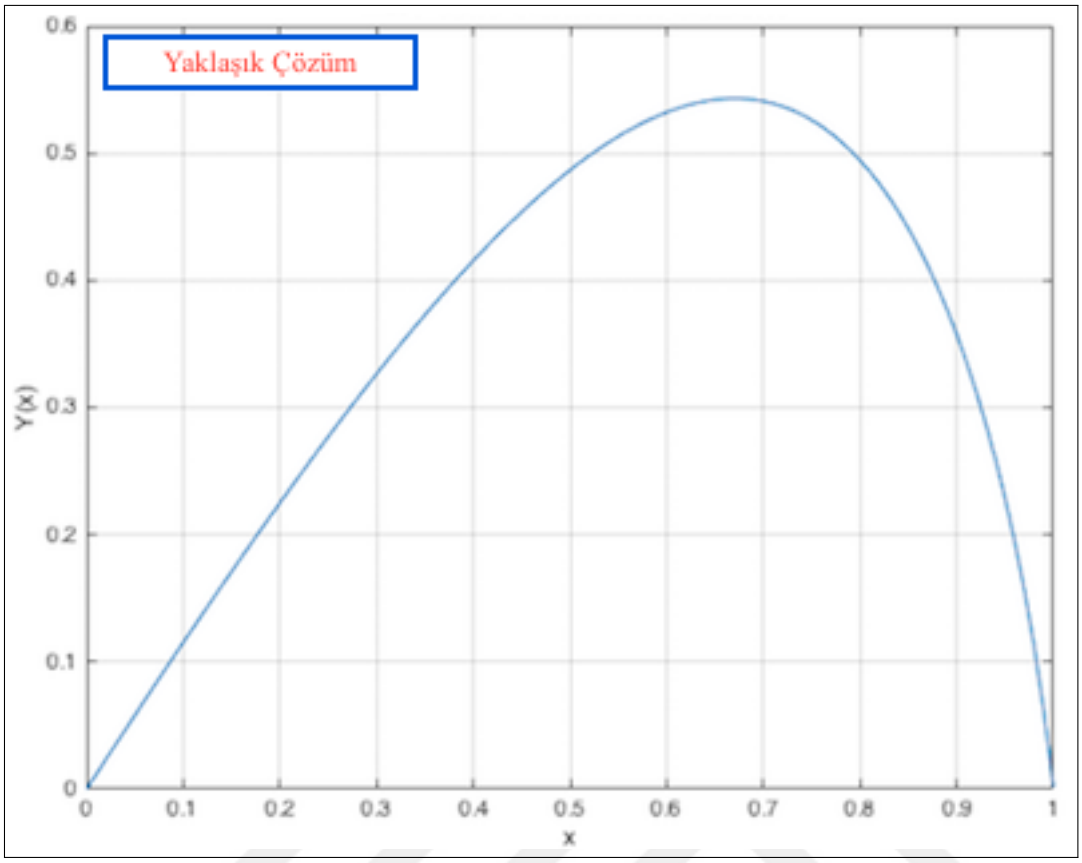
$$y(1) = 0 + c + \frac{(2c-3)}{4} + \frac{(2c-3)}{12} + \frac{(2c-5)}{48} + \ldots = 0 \tag{4.10}$$

Buradan $c = 0,6571$ olarak bulunur. Şimdi de tüm katsayılarda yerine yazıp tekrar hesaplandığında;
$Y(0) = 0$
$Y(1) = 0,6571$
$Y(2) = -0,4215$
$Y(3) = -0,1405$
$Y(4) = -0,0768$
.
.
$Y(N)$ değerleri sayısal olarak elde edilir. Bu katsayı değerlerini yaklaşık çözümde yerine yazarak;

$$y(x) = 0 + 0,6571x - 0,4215x^2 - 0,1405x^3 - 0,0768x^4 + ... \tag{4.11}$$

bulunur.

MATLAB (R2015b) programı ile elde edilen yaklaşık çözümün grafiği aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.1. Bagley-Torvik denkleminin $\alpha = 1$ ve $q = 1$ olmak üzere yaklaşık çözümü

Denklemin değişen kesirli mertebeden türevlerini $0 < \alpha < 1$ arasında alarak diferensiyel denklemi çözelim.

4.2. *Örnek*

$$y'' - D^{\alpha}y(x) = -1 - e^{x-1} \tag{4.12}$$

Sayısal çözümü elde edebilmek için denkleme dönüşüm uygulandığında;

$$\begin{aligned} y'' - D^{\alpha}y(x) &= T(-1 - e^{x-1}) \\ &= -\frac{3}{2}\delta(k) - \frac{1}{2}\delta(k-2) \end{aligned}$$

olur ve denklemin diğer tarafı ise;

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2}\delta(k) - \frac{1}{2}\delta(k-2) &= y'' - D^{\alpha}y(x) \\ &= T(y'' - D^{\alpha}y(x)) \\ &= (k+1)(k+2)Y(k+2) - \frac{\Gamma(\alpha+1+k/1)}{\Gamma(1+k/1)}Y(k+1) \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak yaklaşık çözüm şöyledir;

$$(k+1)(k+2)Y(k+2) - \frac{\Gamma(\alpha+1+k/1)}{\Gamma(1+k/1)}Y(k+1) = -\frac{3}{2}\delta(k) - \frac{1}{2}\delta(k-2), k = 0, 1, ..\infty \tag{4.13}$$

olur. Sınır değerleri;

$$y(0) = 0, y(1) = 0 \tag{4.14}$$

olmak üzere $0 < \alpha < 1$ arasında mertebe değerleri alınmıştır. Böylece, $Y(k+2)$ katsayıları için rekürans formülü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Y(k+2) = \frac{\frac{\Gamma(\alpha+1+k/1)}{\Gamma(1+k/1)}Y(k+1) - \frac{3}{2}\delta(k) - \frac{1}{2}\delta(k-2)}{(k+1)(k+2)}, \qquad k = 0, 1, 2, 3...N \tag{4.15}$$

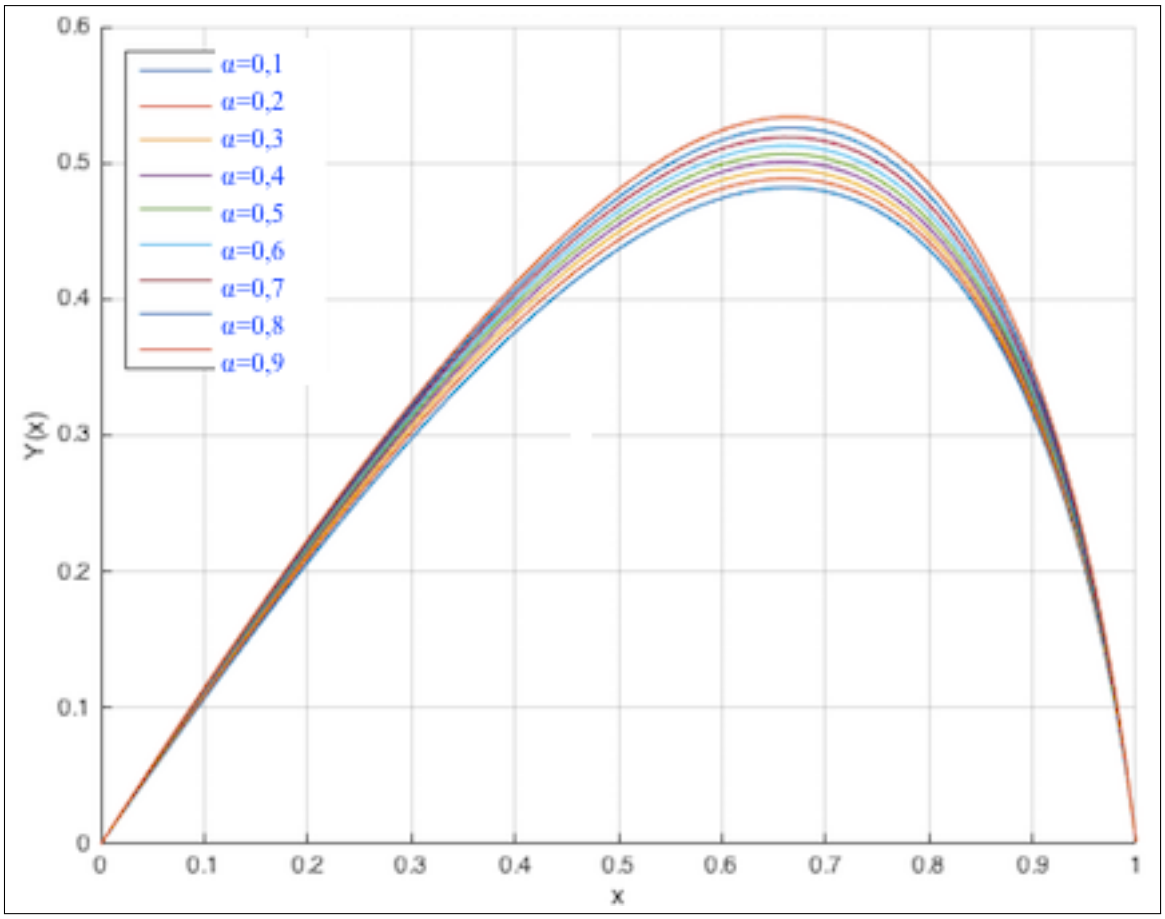
Burada N bir tamsayı olup istenilen yaklaşım hatası ile serinin açılımında üst sınırı göstermektedir.
$k = 0$ ve $\alpha = 0, 1$ için;
$2Y(2) - \frac{\Gamma(0,1+1+0)}{\Gamma(1+0)}Y(1) = \frac{-3}{2}$ olmak üzere,
$Y(1) = (2Y(2) + \frac{3}{2})\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1,1)}$, burada $Y(1) = c$ sabit bir değer olarak alınıp,
$Y(2) = \frac{0,95c-1,5}{2}$ olur.
.
.
$k = N$ iterasyon sonlandırılır. Burada $N = 7$ alınmıştır. Sonuç olarak, Bagley-Torvik denkleminin dönüşümü alınarak yaklaşık çözüm;

$$y(x) = \sum_{k=0}^{N} Y(k)x^k \tag{4.16}$$

burada $Y(k)$ katsayı değerlerini yerine yazarak $y(1) = 0$ şartı seri çözümünde yazılırsa, $c = 0, 5985$ olarak hesaplanır. Şimdi de tüm katsayılarda yerine yazıp tekrar hesapladığımızda;
$Y(0) = 0$
$Y(1) = 0, 5985$
$Y(2) = -0, 4653$
$Y(3) = -0, 0812$
$Y(4) = -0, 0491$
.
.
$Y(N)$ değerleri sayısal olarak elde edilir. Bu katsayı değerlerini yaklaşık çözümde yerine yazarak;

$$y(x) = 0 + 0, 5985x - 0, 4653x^2 - 0, 0812x^3 - 0, 0491x^4 + ... \tag{4.17}$$

bulunur. Bu işlem benzer şekilde α nun $\alpha = 0,2$; $\alpha = 0,3$; $\alpha = 0,4$; ... ; $\alpha = 0,9$ mertebe değerleri için tekrar edilir. MATLAB (R2015b) programı ile elde edilen yaklaşık çözümün grafiği aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.2. Değişken mertebeden Bagley-Torvik denklemin yaklaşık çözümü

Oluşturulan algoritma ve MATLAB (R2015b) program kodu EK-5 te sunulmuştur.

4.3. *Örnek*

$$y''(t) + y^{(\alpha)}(t) + y(t) = t + 1 \tag{4.18}$$

Bagley-Torvik denklemini ele alalım. Problemin sınır şartları;

$$y(0) = 0, \qquad y(1) = 0 \tag{4.19}$$

tanımlandığını kabul edelim. $t_0 = 0$, $\alpha = 1$ ve $q = 1$ alınıp, denkleme diferensiyel dönüşüm yöntemi uygulandığında;

$$T(t+1) = \delta(k - \alpha) + \delta(k) \tag{4.20}$$

$$T(y''(t)+y'(t)+y(t)) = (k+1)(k+2)Y(k+2)+\frac{\Gamma(\alpha+1+k/1)}{\Gamma(1+k/1)}Y(k+1)+Y(k) \quad (4.21)$$

$$(k+1)(k+2)Y(k+2)+\frac{\Gamma(\alpha+1+k/1)}{\Gamma(1+k/1)}Y(k+1)+Y(k) = \delta(k-\alpha)+\delta(k) \quad (4.22)$$

biçimini alır, burada $\alpha = 1$, $Y(0) = 0$ ve $Y(1) = 0$ dir. Eş. 4.22 de tekrar eden özelliğini ve başlangıç koşulundan yola çıkarak basit bir sadeleştirmeyle $k = 0, 1, 2, 3...$ için rekürans formülü;

$$Y(k+1) = \frac{[\delta(k-\alpha)+\delta(k)-Y(k)-(k+1)(k+2)Y(k+2)]\Gamma(1+k)}{\Gamma(\alpha+1+k)} \quad (4.23)$$

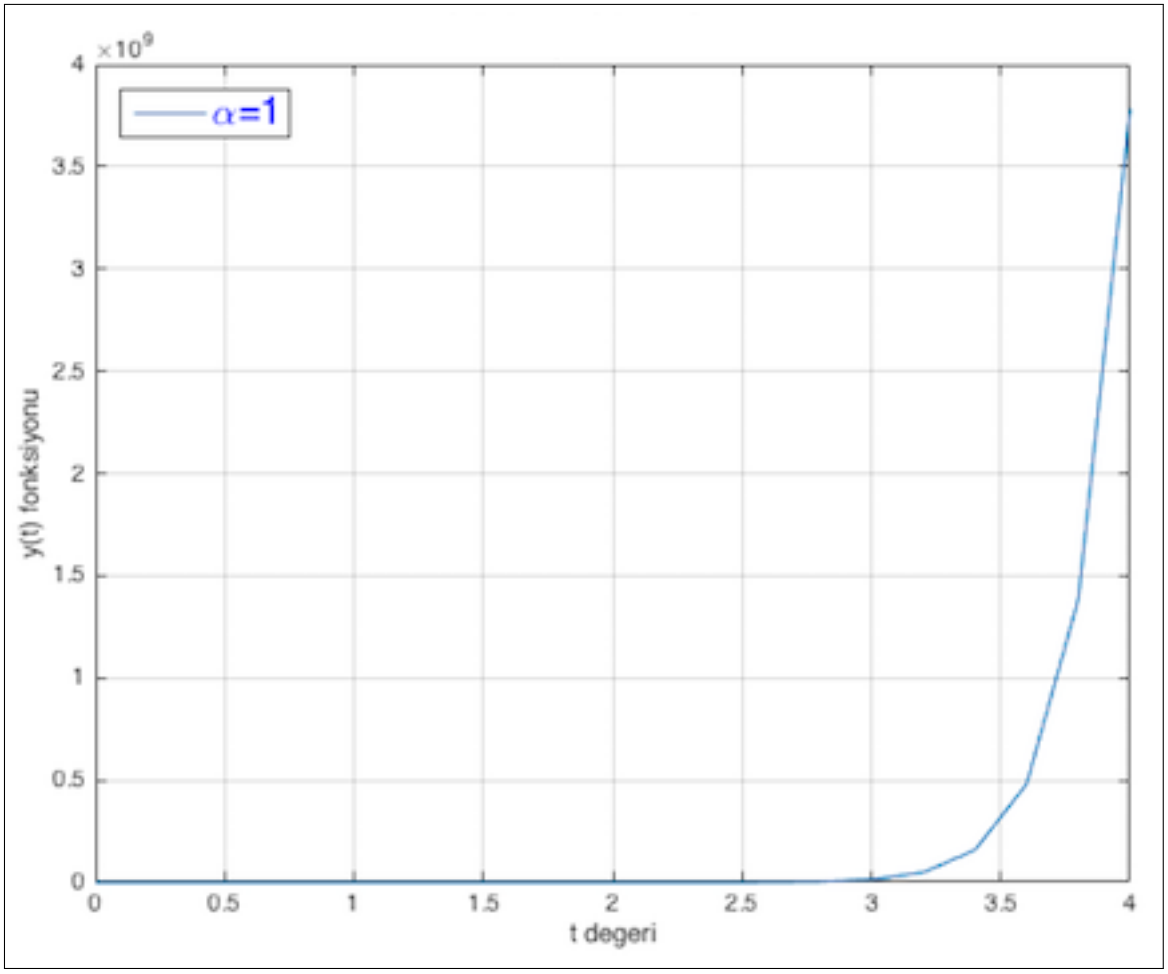
elde edilir. Bu denklem yardımıyla tüm k değerleri için $Y(k)$ katsayılarını hesaplayabiliriz.
$k = 0$ için $Y(0) = 0$
$k = 1$ için $Y(1) = 0$
$k = 2$ için $Y(2) = 0,5$
$k = 3$ için $Y(3) = 0,166$
$k = 4$ için $Y(4) = 0$
$k = 5$ için $Y(5) = 0,0416$
$k = 6$ için $Y(6) = 0,02638$
$k = 7$ için $Y(7) = 0,01904$
$k = 8$ için $Y(8) = 0,015$
$k = 9$ için $Y(9) = 0,01195$
$k = 10$ için $Y(10) = 0,00974$
.
.
$k = N$ için seri kesilir. Burada $N = 10$ alınmıştır. Sonuç olarak, $Y(k)$ serisinin ters diferensiyel dönüşümü alınarak yaklaşık çözüm;

$$y(t) = \sum_{k=0}^{N} Y(k)t^k \quad (4.24)$$

burada $Y(k)$ katsayı değerleri yerine yazdığımızda;

$$\begin{aligned} y(t) =& 0,5t^2 + 0,166t^3 + 0,0416t^5 + 0,02638t^6 + 0,01904t^7 \\ &+0,015t^8 + 0,01195t^9 + 0,00974t^{10} + ... \end{aligned} \quad (4.25)$$

olarak elde edilmiş olur. MATLAB (R2015b) programı ile $0 < t \leq 4$ alınarak yaklaşık çözümün grafiği aşağıda verilmiştir. $\alpha = 1$ esas alınarak oluşturulan algoritma ve MATLAB (R2015b) program kodu EK-6 da sunulmuştur.



Şekil 4.3. Çok terimli kesirli mertebeden diferensiyel denklemin $\alpha = 1$ için diferensiyel dönüşüm yöntemi ile yaklaşık çözümü

Şimdi de değişken kesirli mertebeden çok terimli diferensiyel denkleme DTM uygulayarak bir örnek verelim.

4.4. *Örnek*

$$y''(t) + y^{(\alpha)}(t) + y(t) = t + 1 \tag{4.26}$$

Örneğini ele alalım. Kesirli diferensiyel denklemin mertebesi; $i = 0, 1, 2, 3...9$ olmak üzere $\alpha_i = 1 + ih$ ve $h = 0, 1$ olduğunda,
$i = 0$ için $\alpha_0 = 1$
$i = 1$ için $\alpha_1 = 1, 1$
$i = 2$ için $\alpha_2 = 1, 2$
.
.
.
$i = 9$ için $\alpha_9 = 1, 9$ olur.

Burada $q = 1$, $1 < \alpha_i < 2$, $0 \leq t < 1$ ve $t_0 = 0$ olarak alınmıştır. Sınır şartlarından;

$$y(0) = 0, \qquad y(1) = 0 \tag{4.27}$$

olmak üzere $Y(0) = 0$ ve $Y(1) = 0$ dır. Denkleme diferensiyel dönüşüm yöntemi uygulandığında;

$$(k+1)(k+2)Y(k+2) + \frac{\Gamma(\alpha_i + 1 + k)}{\Gamma(1+k)}Y(k+1) + Y(k) = \delta(k - \alpha_i) + \delta(k) \tag{4.28}$$

biçimini alır, burada $Y(0) = 0$ ve $Y(1) = 0$ dır. Eş. 4.28 de tekrar eden özelliğini ve başlangıç koşulundan yola çıkarak basit bir sadeleştirmeyle $k = 0, 1, 2, 3...$ için rekürans formülü aşağıdaki gibi elde edilir;

$$Y(k+2) = \frac{[\delta(k - \alpha_i) + \delta(k) - Y(k) - \frac{\Gamma(\alpha_i+1+k)}{\Gamma(1+k)}Y(k+1)]}{(k+1)(k+2)} \tag{4.29}$$

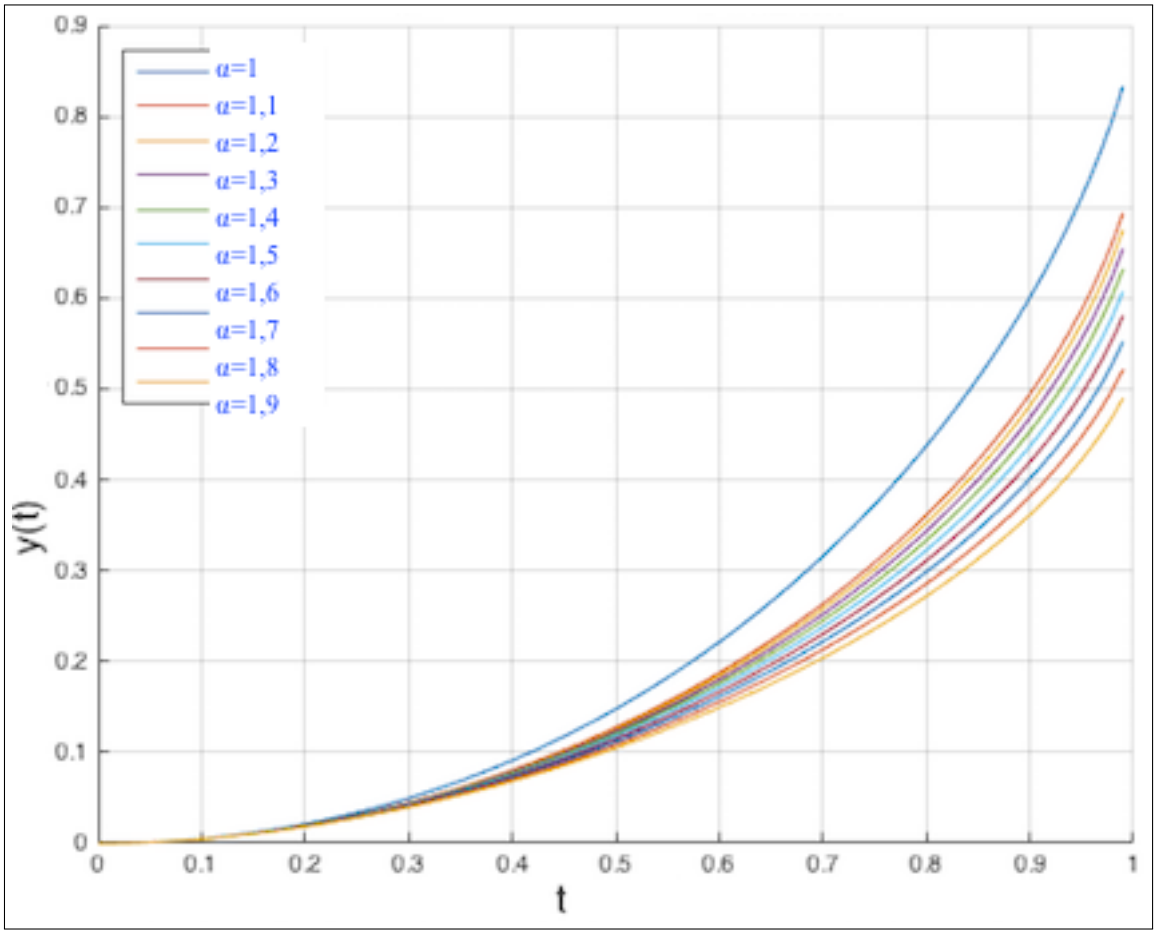
Bu denklem yardımıyla tüm α_i mertebeleri için k değerlerine istinaden $Y(k)$ katsayılarını hesaplayabiliriz.
$\alpha_0 = 1$ mertebesinde;
$k = 0$ için $Y(0) = 0$
$k = 1$ için $Y(1) = 0$
$k = 2$ için $Y(2) = 0,5$
$k = 3$ için $Y(3) = 0,166$
$k = 4$ için $Y(4) = 0$
$k = 5$ için $Y(5) = 0,042$
$k = 6$ için $Y(6) = 0,026$
$k = 7$ için $Y(7) = 0,019$
$k = 8$ için $Y(8) = 0,015$
.
$k = N$ için seri kesilir. Burada $N = 8$ alınmıştır. Sonuç olarak, $Y(k)$ serisinin ters diferensiyel dönüşümü alınarak yaklaşık çözüm;

$$y(t) = \sum_{k=0}^{N} Y(k)t^k \tag{4.30}$$

burada $Y(k)$ katsayı değerleri yerine yazıldığında;

$$y(t) = 0,5t^2 + 0,166t^3 + 0,042t^5 + 0,026t^6 + 0,019t^7 + 0,015t^8 + ... \tag{4.31}$$

olarak elde edilmiş olur. Bu işlem benzer şekilde α_1, α_2,α_3,...α_9 mertebe değeri için tekrar edilir. MATLAB (R2015b) programı ile elde edilen yaklaşık çözümün grafiği aşağıda sunulmuştur. $1 < \alpha_i < 2$ ve $q = 1$ esas alınarak oluşturulan algoritma ve MATLAB (R2015b) program kodu EK-7 de sunulmuştur.



Şekil 4.4. Değişken mertebeden diferensiyel denklemin $1 < \alpha_i < 2$, $0 \leq t < 1$ ve $q = 1$ için diferensiyel dönüşüm yöntemi ile yaklaşık çözümü

5. KESİRLİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Kesirli diferensiyel denklemlerin, lineer olmaması veya lineer olup da değişken katsayılı olması durumlarında çoğu zaman analitik çözümler elde edilememektedir. Dolayısıyla yaklaşık veya sayısal çözümlere gerek duyulur [19].

Son yıllarda farklı iteratif yöntemler ve Adomian ayrışma metodu gibi yaklaşık yöntemler de bunlardan bazılarıdır. Bu bölümde; lineer olmayan kesirli mertebeden denklemler için bir önceki bölümde kullanılan diferensiyel dönüşüm yöntemi (DTM) kullanılacaktır. Aşağıda,

$$D^{\alpha}y(t) = P(t)y^2(t) + Q(t)y(t) + R(t), t > 0, 0 < \alpha \leq 1, m-1 < \alpha \leq m \tag{5.1}$$

$$y(0) = B \tag{5.2}$$

şeklinde verilen başlangıç değer problemi göz önüne alınmıştır. Burada $P(t)$, $Q(t)$ ve $R(t)$ bilinen fonksiyonlar ve $(D_a^{\alpha})^k y(t) \in C[a,b]$ olmak üzere $k = 0, 1, 2, 3, ..., n+1$, $0 < \alpha \leq 1$ dir. Diferensiyel denklemin, Eş.5.1, iki yanına da diferensiyel dönüşüm yöntemi uygulanıp, Eş.4.3 de verilen özellik kullanıldığında, gerekli işlemler yapılırsa;

$$\frac{\Gamma(qk+\alpha+1)}{\Gamma(qk+1)} Y_q(k+\alpha/q) = \sum_{k=0}^{h}\sum_{l=0}^{k} P_q(l)Y_q(k-l)Y_q(h-k) + \sum_{l=0}^{k} Q_q(l)Y_q(k-l) + R_q(k) \tag{5.3}$$

$$Y_q(k+\alpha/q) = \frac{\Gamma(qk+1)}{\Gamma(qk+\alpha+1)}\left[\sum_{k=0}^{h}\sum_{l=0}^{k} P_q(l)Y_q(k-l)Y_q(h-k) + \sum_{l=0}^{k} Q_q(l)Y_q(k-l) + R_q(k)\right] \tag{5.4}$$

burada $Y_q(k)$, $y(t)$ nin diferensiyel dönüşüm fonksiyonudur ve buradan $Y_q(k)$ çekilirse,

$$Y_q(k) = \frac{1}{\Gamma(1+qk)}[(D_{t_0}^{\alpha})^k y(t)]_{t=t_0}, \qquad k = 0, 1, 2, .., \tag{5.5}$$

elde edilir. Örnek olarak Eş. 5.1 denkleminin özel bir durumu olarak verilen aşağıdaki denklemi göz önüne alalım.

$$D_0^{\alpha}y(t) = y^2(t) + 1, \qquad m-1 < \alpha \leq m, \qquad 0 \leq t \tag{5.6}$$

burada $P(t) = 1$, $Q(t) = 0$ ve $R(t) = 1$ olur. Başlangıç değer problemi;

$$y^{(i)}(0) = 0, \qquad i = 0, 1, ..., m-1 \tag{5.7}$$

olmak üzere burada m pozitif bir tamsayı değeridir [19]. Başlangıç koşuluna göre $c_0 = 0$ olmak üzere diğer katsayı değerleri;

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^{n\alpha} \tag{5.8}$$

elde edilir [19]. Sayısal çözümü elde edebilmek için α.mertebeden diferensiyel denkleme, Eş.5.4 deki gibi dönüşüm metodu uygulandığında;

$$D_0^{\alpha k}(D_0^{\alpha} y(t) - y^2(t) - 1) = 0, \qquad k = 0, 1, 2, ... \tag{5.9}$$

olur. Buradan Eş.5.8, Eş.5.9 de yerine yazıldığında;

$$D_0^{\alpha(k+1)}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} c_n t^{n\alpha}\Big) - D_0^{\alpha k}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} c_n t^{n\alpha}\Big)^2 - D_0^{\alpha k}(1) = 0, \qquad k = 0, 1, 2, ... \tag{5.10}$$

elde edilir. Bu denklemde;

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} c_n \frac{\Gamma(n\alpha+1)}{\Gamma((n-k-1)\alpha+1)} t^{(n-k-1)\alpha} - \sum_{n=k}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{n} c_j c_{n-j}\Big) \times \frac{\Gamma(n\alpha+1)}{\Gamma((n-k)\alpha+1)} t^{(n-k)\alpha} \tag{5.11}$$

sabit olan 1 terimini denklemin sağ tarafa geçirirsek $t^{n\alpha}$ değerleri için c_n katsayıları;

$c_0 = 0$, $c_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}$ ve $c_{k+1} = \frac{\Gamma(k\alpha+1)}{\Gamma((1+k)\alpha+1)} \sum_{j=0}^{k} c_j c_{k-j}$

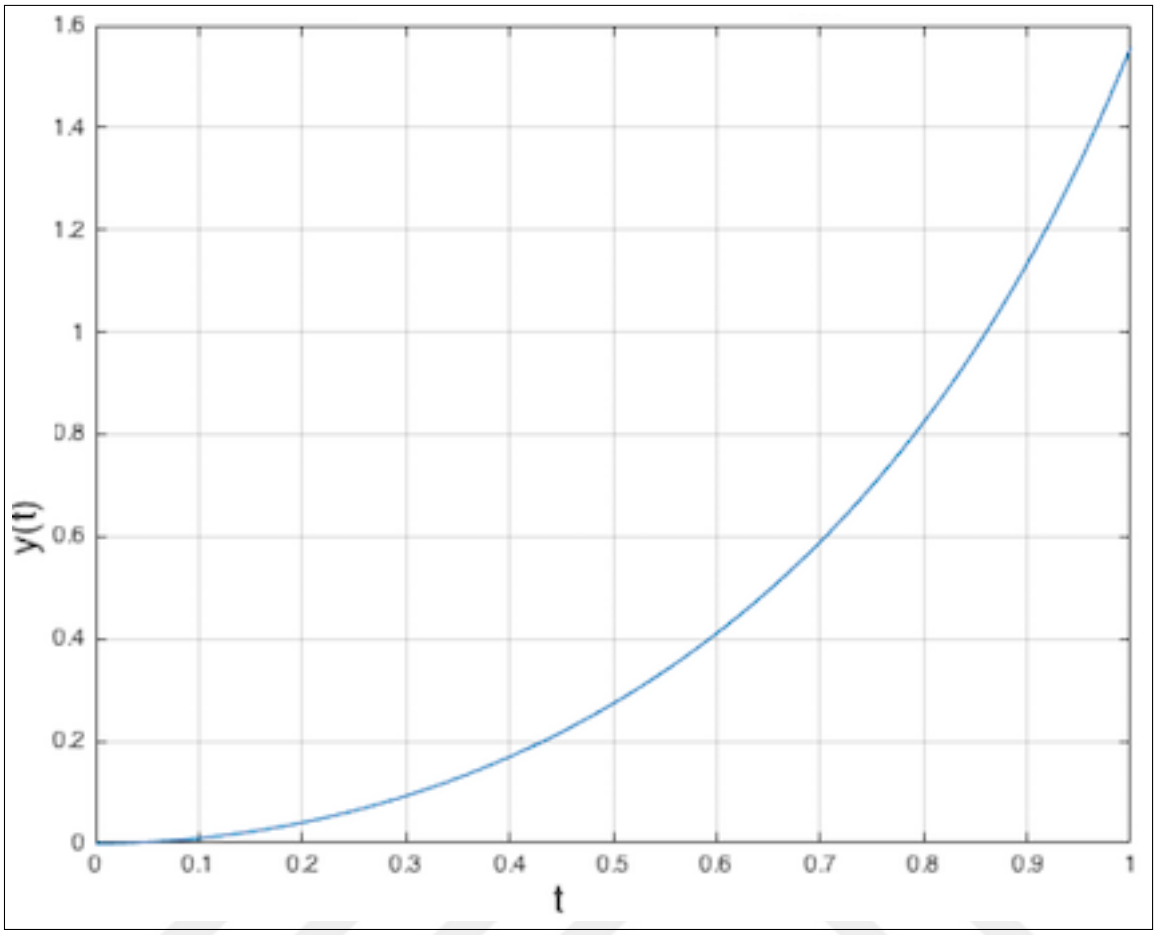
olarak ifade edilir. Daha sonra bu katsayılar, Eş.5.8 de yerine yazıldığında;

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha} + \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(3\alpha+1)} t^{3\alpha} + 2\frac{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)^3\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(5\alpha+1)} t^{5\alpha} + ... \tag{5.12}$$

elde edilir. Bu denklemde $\alpha = 1$ olarak belirlendiğinde;

$$y(t) = t + \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{15} + \frac{17t^7}{315} + \frac{62t^9}{2835} + ... = tant \tag{5.13}$$

yaklaşık çözüm bulunur [19]. Oluşturulan algoritma ve MATLAB (R2015b) program kodu EK-8 de, program ile elde edilen yaklaşık çözümün grafiği aşağıda sunulmuştur.



Şekil 5.1. Lineer olmayan diferensiyel denklemin $\alpha = 1$ için yaklaşık çözümü

Çizelge 5.1. Lineer olmayan diferensiyel denklemin farklı α değerleri için çözümü

t	$\alpha = 1$	$\alpha = 1,5$	$\alpha = 2$	$\alpha = 2,5$
0	0	0	0	0
0,2	0,0405	0,0060	0,0008	0,0235
0,4	0,1691	0,0487	0,0128	0,0235
0,6	0,4094	0,1686	0,0655	0,0235
0,8	0,8115	0,4215	0,2121	0,0999
1	1,4667	0,9032	0,5458	0,3136

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Kesirli mertebeden denklemlerin çözümleri için genel bir yöntemin olmaması nedeniyle var olan yöntemler uyarlanmış ve yeni yaklaşık yada sayısal yöntemler oluşturulmuştur. Bu konuda çalışmalar mevcut olup sayısal yöntemler geliştirilmiştir. Ancak bu yöntemlerin çoğu tek terim içeren denklemler ve yakınsaklık mertebesi 1 olanlar içindir. Çoğu zaman kesirli türev de $(0, 1]$ aralığından seçilmektedir. Bu tezin 3. bölümünde 2. mertebeden yaklaşık bir metot ve genel denkleme ilave terimler ekleyerek var olan yöntem çok terim içeren bir denklem sınıfı için uyarlanmıştır ve elde edilen veriler, metodun değişen kesirli mertebeden daha genel bir diferensiyel denklem yapısına uygulanabilirliliğini göstermiştir.

Kesirli mertebeden Bagley-Torvik denklemi için diferensiyel dönüşüm yöntemi (DTM) dördüncü bölümde incelenmiş olup elde edilen sonuçlar literatürde varolan sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Beşinci bölümde ise lineer olmayan kesirli mertebeden bir denklem sınıfı için yine diferensiyel dönüşüm yöntemi (DTM) kullanılmış ve çözümlerin gerçek değerlerle örtüştüğü gözlemlenmiştir.

Bu tezin amacı, değişen kesirli mertebeden diferensiyel denklemler için duyarlılığı daha yüksek olan yaklaşık yada sayısal çözümler elde etmektir. Bunun için iki farklı yöntem göz önüne alınmıştır. Birinci yöntem, Riemann Liouville türevine Hadamard sonlu parçalar integrali ile yaklaşma yöntemidir. İkinci yöntem ise Taylor seri yöntemini temel alan ve katsayıların ardışık olarak cebirsel hesaplandığı diferensiyel dönüşüm yöntemidir. Her iki yöntem de farklı denklem sınıflarına uygulanmış ve iyi sonuçlar elde edilmiştir. Bundan sonraki çalışmalar ise daha genel sınıftan kesirli değişen mertebeden denklemlerin çözümlerini içermeyi hedefleyecektir.

KAYNAKLAR

1. Newton, I. (1687). *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Third Edition). Los Angeles: University of California Press, 17-22.

2. L'Hôpital, G. (1696). *Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes* (Fifth Edition). France: University of Paris Press, 23-45.

3. Oldham, K. B., Spanier, J. (1974). *The Fractional Calculus Mathematics in Science and Engineering* (Volume 111). London:Academic Press.

4. Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. New York: Academic Press.

5. Weilbeer, M. (2005). *Efficient Numerical Methods for Fractional Differential Equations and their Analytical Background*, PHD Thesis, Technische Universität Braunschweig, Germany, 35-63.

6. Er, Fatma N. (2015). *Kısmi Türevli Kesirli Mertebeden Lineer Schrodinger Denklemlerinin Sayısal Çözümleri*, Doktora Tezi, İstanbul Kültür Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 14-63.

7. Cansız, M. (2010). *Kesirli Diferensiyel Denklemler ve Uygulaması*, Yüksek Lisans Tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir, 16-33.

8. Görgülü, O. (2017). *Kesirli Mertebeden Diferensiyel Denklemler için Sayısal ve Yaklaşık Yöntemler*, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 13-43.

9. Diethelm, K. (1997). An algorithm for the numerical solution for differential equations of fractional order. *Electronic Transaction Numerical Analysis*, 12(2), 1-6.

10. Diethelm, K., Walz, G. (1997). Numerical solution of fractional order differential equations by extrapolation. *Journal of Numerical Algorithms*, 16(2), 231-253.

11. Diethelm, K., Ford, N. (2002). Analysis of Fractional Differential Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 265(3), 229-248.

12. Diethelm, K. (1997). Generalized compound quadrature formulae for finite-part integrals, *IMA Journal of Numerical Analysis*, 479-493.

13. Diethelm, K. (2004). *The Analysis of Fractional Differential Equations*. Germany: Springer Publisher, 85-185.

14. Duan, B., Zheng, Z., Cao, W., (2016). Spectral approximation methods and error estimates for Caputo fractional derivative with applications to initial-value problems. *Journal of Computational Physics*, 45-55.

15. Caoa, J., Qiu, Y. (2016). A high order numerical scheme for variable order fractional ordinary differential equation. *Applied Mathematics Letters*, 88-94.

16. Blank, L. (1996). *Numerical treatment of differential equations of fractional order, Numerical Analysis Report 287*. Manchester, Centre for Computational Mathematics.

17. Das, S. (2008). *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls*. Berlin:Springer.

18. Elliott, D. (1993). An asymptotic analysis of two algorithms for certain Hadamard finite-part integrals. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 13(2), 445-462.

19. El-Ajou, A., Abu Arqub, O., Al Zhour, Z., Momani, S. (2013). New results on fractional power series: theories and applications. *Entropy*, 15(3), 5305 -5323.

20. Gaul, L., Klein, P., Kempfle, S. (1991). Damping description involving fractional operators. *Mechanical Systems Signal Processing*, 5(2), 81-88.

21. Miller, K.S., Ross, B. (1993). *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. New York: John Wiley and Sons,Inc.

22. Rahimy, M. (2010). Applications of Fractional Differential Equations. *Applied Mathematical Sciences*, 4(50), 2453-2461.

23. Zhou, JK. (1986). *Differential Transformation and its Applications for Electrical Circuits*. Wuhan, China: Huazhong University Press.

24. Erturk, V.S., Momani, S., Odibat, Z. (2008). Application of Generalized Differential Transform Method to Multi-order Fractional Differential Equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*,13 (8), 1642-1654.

25. Diethelm, K., Ford, N.J. (2002). *Numerical Solution of The Bagley-Torvik Equation*. Swets Zeitlinger Publisher, 42(3), 490-507.

26. Çenesiz Y. (2007). *Bagley-Torvik Denkleminin Kesirli Diferensiyel Dönüşüm Metodu ile Çözüm ve Diğer Yöntemlerle Karşılaştırılması*, Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya, 10-29.

EKLER

EK-1. $\alpha(t) = 0,5t$ için MATLAB (R2015b) program kodu

```
format long;
T = 1;                  %sabit değer
M = -1;                 %sabit değer
for N = [4,8,16,32,64]%given integer number
   to = (T/N);          %time step
   y = zeros(1, N+1);  %sayısal değer
   r = zeros(1, N+1);  %gerçek değer
   E = zeros(1, N+1); %Maximum norm error
   y(1) = 0;            %sayısal başlangıç değeri
   r(1) = 0;            %gerçek başlangıç değeri
   w = zeros(1, N+1);
   g = zeros(1, N+1);
   for k = 1:N
      tk = k * to;
      r(k+1) = 3*tk+(tk*tk);
      alphak = (1/2) * tk;
      f = ((3 * (tk^(1-alphak)))/gamma(2-alphak)) + ((2 * (tk^(2-alphak)))/gamma(3-
alphak));
      for j = 0:k
         if j == 0
         g(1) = (M^(j))*gamma(alphak+1)/(gamma(j+1)*gamma(alphak-j+1));
           w(1) = ((2+alphak)/2)*g(1);
         else
         g(j+1) = (M^(j))*gamma(alphak+1)/(gamma(j+1)*gamma(alphak-j+1));
           w(j+1) = (((2+alphak)/2)*g(j+1))-((alphak/2)*g(j));
         end
      end
      if k == 1
         y(k+1) = f/((to^-alphak)*w(1));
      else
         F = f/(to^-alphak);
          for n = 1:k
             F = F-(w(n+1)*y(k-n+1));
          end
          y(k+1)= F/w(1);
      end
   end
E=abs(r-y); %Mutlak hata değeri
fprintf('\nZaman Adimi: ');  fprintf(' %1.4f ', to) ;
fprintf('\nMutlak Hata: ['); fprintf(' %e ', max(E)) ;
fprintf(']'); fprintf('\nNumerik değer: [');
fprintf(' %2.12f ', y);
fprintf(']\n');
fprintf('gerçek değer: [');
fprintf(' %2.12f ', r);
fprintf(']\n');
end
```

EK-2. $\alpha(t) = \sin t$ için MATLAB (R2015b) program kodu

```
format long;
T = 1;                  %sabit değer
M = -1;                 %sabit değer
for N = [4,8,16,32,64] %given integer number
   to = (T/N);          %time step
   y = zeros(1, N+1);  %sayısal değer
   r = zeros(1, N+1);  %gerçek değer
   E = zeros(1, N+1); %Maximum norm error
   y(1) = 0;            %sayısal başlangıç değeri
   r(1) = 0;            %gerçek başlangıç değeri
   w = zeros(1, N+1);
   g = zeros(1, N+1);
   for k = 1:N
      tk = k * to;
      r(k+1) = 3*tk+(tk*tk);
      alphak = sin(tk);
      f = ((3 * (tk^(1-alphak)))/gamma(2-alphak)) + ((2 * (tk^(2-alphak)))/gamma(3-
alphak));
      for j = 0:k
         if j == 0
         g(1) = (M^(j))*gamma(alphak+1)/(gamma(j+1)*gamma(alphak-j+1));
           w(1) = ((2+alphak)/2)*g(1);
         else
         g(j+1) = (M^(j))*gamma(alphak+1)/(gamma(j+1)*gamma(alphak-j+1));
           w(j+1) = (((2+alphak)/2)*g(j+1))-((alphak/2)*g(j));
         end
      end
      if k == 1
         y(k+1) = f/((to^-alphak)*w(1));
      else
         F = f/(to^-alphak);
          for n = 1:k
             F = F-(w(n+1)*y(k-n+1));
          end
          y(k+1)= F/w(1);
      end
   end
   E=abs(r-y); %Mutlak hata değeri
 fprintf('\nZaman Adimi: ') ; fprintf(' %1.4f ', to) ;
 fprintf('\nMutlak Hata: [') ; fprintf(' %e ', max(E)) ;
 fprintf(']') ; fprintf('\nNumerik değer: [') ;
 fprintf(' %2.12f ', y) ; fprintf(']\n') ;
 fprintf('gerçek değer: [') ; fprintf(' %2.12f ', r) ;
 fprintf(']\n') ;
end
```

EK-3. Eklenen $y(t_k)$ terimi için MATLAB (R2015b) program kodu

```
format long;
T = 1;  M = -1;                 %sabit değer
for N = [4,8,16,32,64]          %given integer number
   to = (T/N);                   %time step
   y = zeros(1, N+1);            %sayısal değer
   r = zeros(1, N+1);            %gerçek değer
   E = zeros(1, N+1);            %Maximum norm error
   alpha = zeros(1, N);
   y(1) = 0; r(1) = 0;           % başlangıç değeri
   w = zeros(1, N+1);
   g = zeros(1, N+1);
   for k = 1:N
     tk = k * to;
     r(k+1) = (tk^2);
     alpha(k) = 1/2;
     f = (tk^2) + (2/gamma(5/2))*(tk^(3/2));
     for j = 0:k
      if j == 0
      g(1) = (M^(j))*gamma(alpha(k)+1)/(gamma(j+1)*gamma(alpha(k)-j+1));
      w(1) = ((2+alpha(k))/2)*g(1);
     else
      g(j+1) = (M^(j))*gamma(alpha(k)+1)/(gamma(j+1)*gamma(alpha(k)-j+1));
      w(j+1) = (((2+alpha(k))/2)*g(j+1))-((alpha(k)/2)*g(j));
     end
    end
    if k == 1
        y(k+1) = (f)/((to^-alpha(k))*(w(1)+(1/(to^-alpha(k)))));
     else
        F = (f)/(to^-alpha(k));
          for n = 1:k
             F = F-(w(n+1)*y(k-n+1));
          end
          y(k+1)= F/(w(1)+(1/(to^-alpha(k))));
     end
  end
  E=abs(r-y); fprintf('\nZaman Adimi: ') ;
  fprintf(' %1.4f ', to) ; fprintf('\nMutlak Hata: [') ;
  fprintf('%e', max(E)) ; fprintf(']'); fprintf('\nNumerik Deger: [');
  fprintf(' %2.9f ', y(2:N+1)); fprintf(']\n');
  fprintf('Gercek Deger: ['); fprintf(' %2.9f ', r(2:N+1));
  fprintf(']\n');
  fprintf('Alpha: [');
  fprintf(' %2.9f ', alpha);
  fprintf(']\n');
end
```

EK-4. $N = 10$ ve $\alpha = 0,5$ MATLAB (R2015b) program kodu

```
format long;
T = 1; M = -1;          %sabit deger
F = 0;                  %ara deger
N = 10;                 %given integer number
to = (T/N); h = to;
y = zeros(1, N+1);      %numerik deger
v = zeros(1, N+1);      %numerik deger
r = zeros(1, N+1);      %gercek deger
E = zeros(1, N+1);      %Maximum norm error
w = zeros(1, N+1);
g = zeros(1, N+1);
alpha = 1/2;
y(1) = 0;
y(2) = 0.01;
y(3) = 0.04;%numerik baslangic degeri
v(1) = 0;
v(2) = 0;
v(3) = 0.0004;
r(1) = 0;%numerik ara hesaplama degeri
for k = 1:N     %gercek baslangic degeri
   tk = k * to;
   r(k+1) = (tk^2);
end
for k = 3:N
       tk = (k-1) * to;
       f = (tk^2)-2 + (2/gamma(3-alpha))*(tk^(2-alpha))
       for j = 0:k-1
         if j == 0
           g(1) = (M^(j))*gamma(alpha+1)/(gamma(j+1)*gamma(alpha-j+1));
           w(1) = ((2+alpha)/2)*g(1);
         else
           g(j+1) = (M^(j))*gamma(alpha+1)/(gamma(j+1)*gamma(alpha-j+1));
           w(j+1) = (((2+alpha)/2)*g(j+1))-((alpha/2)*g(j));
         end  end
       for n = 1:k F = F+(w(n)*v(k-n+1)); end
       y(k+1) = ((h^2)*(to^-alpha)*(F))+2*y(k)-y(k-1)+(h^2)*y(k)-(h^2)*f;
       v(k+1) = y(k+1); F = 0; %ara deger sifirlama
end
E=abs(r-y); fprintf('\nZaman Adimi: ') ;
fprintf(' %1.2f ', to) ; fprintf('\nMutlak Hata: ') ;
fprintf('%e', max(E)) ; fprintf('\nNumerik Deger Gercek Deger Fark\n');
for k = 1:N+1
   fprintf(' %2.9f ', y(k));  fprintf(' %2.9f ', r(k));  fprintf(' %2.9f ', E(k));  fprintf('\n');
end
fprintf('Alpha:');
fprintf(' %1.1f ', alpha);
```

EK-5. $0 < \alpha < 1$ ve $q = 1$ Değişken mertebeden Bagley-Torvik denklemi

```
clear figure
clear all
alfa = 1; q = zeros(1,9); h=0.1;
for i = 1:9
   q(i) = i*h;
end
x = [0:0.01:1];
deger = zeros(1, 101);
Sonuc = zeros(1, 101);
figure
grid on
hold on
for i = 1:10
  Y = sym('Y', [1 101]); syms c Y(1)=0; Y(2)=c;
for k = 1:109
   if (k-3) == 0
      sigma1 = 1;
   else
      sigma1 = 0;
   end
   if (k-1) == 0
      sigma = 1;
   else
      sigma = 0;
   end
 Y(k+2)=((gamma(q+1+k-1)/gamma(1+k-1))*Y(k+1)-(3/2)*sigma-(1/2)...
  *(sigma1))/((k+1-1)*(k+2-1));
end
eqn=sum(Y)==0;
c=solve(eqn,c);
c=double(c);
Y=subs(Y);
Y=double(Y);
for t = 1:101
   for k = 1:101
   deger (k) = Y(k) * x(t)^(k-1);
   end
   Sonuc(t) = sum(deger);
end
plot(x,Sonuç,'-','MarkerSize',15)
title(['\fontsize{16} \alpha=1 icin yaklaşık cozum'])
xlabel('x')                % x-axis label
ylabel('Y(x)')             % y-axis label
legend({'q = 0.1','q = 0.2','q = 0.3','q = 0.4','q = 0.5','q = 0.6','q = 0.7','q = 0.8','q =
0.9'},'Location','northwest', 'FontSize',13,'TextColor','blue')
end
hold off
```

EK-6. $\alpha = 1$ ve $q = 1$ için MATLAB (R2015b) program kodu

```
clc
clear figure
clear all
format long;
q = 1;
alfa = 1;
t = [0:0.2:4];
Y = zeros(1, 21);
deger = zeros(1, 21);
Sonuc = zeros(1, 21);
Y(1) = 0;
Y(2) = 0;
for k = 1:19
   if (k-q*alfa-1) == 0
      sigma = 1;
   else
      sigma = 0;
   end
   if (k-1) == 0
      sigma1 = 1;
   else
      sigma 1= 0;
   end
    Y(k+2)=(sigma+sigma1-Y(k)-(Y(k+1)*(gamma(k-1+q+1)/...
    gamma(k-1+1)))) / ((k+1-1)*(k+2-1));
end
 for x = 1:21
   for k = 1:21
   deger (k) = Y(k) * t(x)^((k-1)/alfa);
   end
   Sonuc(x) = sum(deger);
 end
figure
plot(t,Sonuc,'-','MarkerSize',15)
legend({'{\alpha}=1'},'Location','northwest', 'FontSize',16,'TextColor','blue')
title(['\fontsize{16} {\alpha}=1 için yaklaşık çözüm'])
xlabel('t değeri')                  % x-axis label
ylabel('y(t) fonksiyonu')           % y-axis label
grid on
```

EK-7. $1 < \alpha_i < 2$ ve $q = 1$ Değişken mertebeden kesirli diferensiyel denklemi

```
clc
clear figure
clear all
format long;
h = 0.1;
q = zeros(1,10);
for i = 1:10
   q(i) = 1+ (i-1)*h;
end
alfa = 1;
t = [0:0.01:0.99];
Y = zeros(1, 100);
deger = zeros(1, 100);
Sonuc = zeros(1, 100);
Y(1) = 0; Y(2) = 0;
figure grid on hold on
for i = 1:10
   for k = 1:98
      if (k-q(i)*alfa-1) == 0
         sigma = 1;
      else
         sigma = 0;
      end
      if (k-1) == 0
         sigma1 = 1;
      else
         sigma1 = 0;
      end
      Y(k+2)=(sigma+sigma1-Y(k)-(Y(k+1)*(gamma(k-1+q(i)+1)/...
      gamma(k-1+1))))/((k+1-1)*(k+2-1));
   end
   for x = 1:100
      for k = 1:100
         değer (k) = Y(k) * t(x)^((k-1)/alfa);
      end
      Sonuc(x) = sum(deger);
   end
plot(t,Sonuc,'-','MarkerSize',20);
legend({'q = 1','q = 1.1','q = 1.2','q = 1.3','q = 1.4','q = 1.5','q = 1.6','q = 1.7','q = 1.8','q =
1.9'},'Location','northwest', 'FontSize',13,'TextColor','blue');
title(['\fontsize{16} {\alpha}=1 için yaklaşık çözüm'])
xlabel('\fontsize{16} t değeri')                    % x-axis label
ylabel('\fontsize{16} y(t) fonksiyonu')             % y-axis label
end
hold off
```

EK-8. Lineer olmayan diferensiyel denklemin $\alpha = 1$ yaklaşık çözümü

```
clc
clear figure
clear all
alfa = 1;
format long;
t = [0:0.01:1];
N = length(t);
c = zeros(1, N);
deger = zeros(1, N);
Sonuc = zeros(1, N);
c(1)=0;
c(2)=1/(gamma(alfa+1));
for k = 2:N
    ara = 0;
   for j = 1:k
       ara=ara+ c(j)*c(k-j+1);
   end
   c(k+1) = (gamma(k*alfa+1-1)/ gamma((1+k-1)*alfa+1)) * ara;
end
for m = 1:N
   for k = 1:N
   deger (k) = c(k) * t(m)^(k*alfa);
   end
   Sonuc(m) = sum(deger);
end
plot(t,Sonuç,'-','MarkerSize',20);
title(['\fontsize{16} {\alpha}=1 icin yaklaşık çözüm'])
xlabel('\fontsize{16} t degeri')                    % x-axis label
ylabel('\fontsize{16} y(t) fonksiyonu')             % y-axis label
grid on"
```

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : BEKTAŞ GÜNER, İrem
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 02.07.1993, Samsun
Medeni hali : Evli
Telefon : 0 (216) 222 36 28
Faks : 0 (216) 272 35 10
e-mail : irembektas93@gmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik Böl.	2018
Lisans	Çanakkale 18 Mart Üni./Matematik Böl.	2015
Lisans	AÖF/İktisat Böl.	2016
Lise	Paşabahce Ahmet Ferit İnal Lisesi	2011

İş Deneyimi

-

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

3. AYAZ, F., BEKTAŞ, İ. (2017, April). *A Numerical Approach for Solving Multi Term Fractional Order Differential Equations*. Paper presented at the International Workshop on Mathematical Methods in Engineering, Cankaya University, Ankara.

4. AYAZ, F., BEKTAŞ, İ. (2017, May). *An Approximate Technique for Variable Order Fractional Equations.* Paper presented at the International Conference on Mathematics and Mathematics Education, Harran University, Şanlıurfa.

Hobiler

Yüzme, Gitar, Dans



GAZİ GELECEKTİR...