
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

GENELLEŞTİRİLMİŞ LUCAS, PELL-LUCAS SAYILARI VE GENELLEŞTİRİLMİŞ LUCAS, PELL-LUCAS POLİNOMLARI ÜZERİNE

Zişan KUŞAKSIZ TAŞ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2022

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Zişan KUŞAKSIZ TAŞ

GENELLEŞTİRİLMİŞ LUCAS, PELL-LUCAS SAYILARI VE GENELLEŞTİRİLMİŞ LUCAS, PELL-LUCAS POLİNOMLARI ÜZERİNE

(Doktora Tezi)

Zişan KUŞAKSIZ TAŞ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak, 2022

ÖZET

Bu çalışmada Fibonacci Sayıları, Pell Sayıları, Pell-Lucas Sayıları esas alınarak Genelleştirilmiş Lucas ve Genelleştirilmiş Pell-Lucas şeklindeki yeni sayı dizileri tanımlanmıştır. Ayrıca bu sayı dizilerinin Binet formülü, toplam formülü, üreteç fonksiyonları gibi bazı özellikleri bulunmuştur. Aynı düşünce ile yukarıdaki sayı dizilerinin polinomları yani Genelleştirilmiş Lucas ve Genelleştirilmiş Pell-Lucas polinomları tanımlanmış ve bu polinomlarla da ilgili benzer formül ve özdeşlikler verilmiştir.

Bilim Kodu : 20401

Anahtar Kelimeler : Lucas Sayıları, Pell-Lucas Sayıları, Genelleştirilmiş Lucas Sayıları, Genelleştirilmiş Pell-Lucas Sayıları, Lucas Polinomları, Pell-Lucas Polinomları, Genelleştirilmiş Lucas Polinomları, Genelleştirilmiş Pell-Lucas polinomları

Sayfa Adedi : 63

Danışman : Prof. Dr. Dursun TAŞÇI

ON GENERALİZED LUCAS, PELL-LUCAS SEQUENCES AND GENERALİZED LUCAS, PELL-LUCAS POLYNOMİALS

(PH. D Thesis)

Zişan KUŞAKSIZ TAŞ

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January, 2022

ABSTRACT

In this thesis, considering Lucas sequences, Pell-Lucas sequences are defined new sequences; the generaziled Lucas sequences and the generalized Pell-Lucas sequences. Further we give Binet-like formulas, generating function, sums formulas and some important identities. Similarly we obtain generaziled Lucas polynomials and generalized the Pell-Lucas polynomials are defined and also Binet-like formulas, generating function, sums formulas, some important identities.

Science Code : 20401

Key Words : Lucas numbers, Pell-Lucas Numbers, generalized Lucas Numbers, generalized Pell-Lucas Numbers, Lucas polynomials, Pell-Lucas polynomials, generalized Lucas polynomials and generalized Pell-Lucas polynomials

Page Number : 63

Supervisor : Prof. Dr. Dursun TAŞÇI

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında çok büyük emeği olan, her türlü zorlukta maddi ve manevi desteğini yanımda hissettiğim, tecrübeleri ve bilgisiyle bana yol gösteren, beni yönlendiren, kendisinden her anlamda çok şey öğrendiğim saygıdeğer hocam Prof. Dr. Dursun TAŞÇI' ya sonsuz teşekkür ederim.

Çalışmamın gelişimine kıymetli fikirleri ile destek verip tezin titizlikle kontrollerini yapan ve kıymetli zamanlarını bana ayıran saygıdeğer hocam Prof. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE' ye teşekkür ederim.

Bilgi ve tecrübeleri ile beni aydınlatan, bana yol gösteren saygıdeğer hocam Prof. Dr. Naim TUĞLU' ya teşekkür ederim.

Tezimi şekilsel yönden titizlikle inceleyen ve değerli fikirleriyle beni yönlendiren saygıdeğer Dr. Füsun Kılçık' a teşekkür ederim.

Hayatımın her döneminde olduğu gibi bu süreçte de yanımda olan ve desteklerini esirgemeyen kıymetli aile fertlerim anneme, babama, abime; sabrı ve hoşgörüsüyle yanımda olan eşime ve varlığıyla bana en büyük motivasyonu sağlayan biricik oğlum Mert Ali TAŞ'a saygı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

ÇİZELGELERİN LİSTESİ ix

SİMGELER x

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL KAVRAMLAR 7

2.1. Temel Kavramlar 7

2.2. Bazı Tamsayı Dizileri 8

2.3. Bazı Tamsayı Polinomları 12

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ LUCAS SAYILARI 17

3.1. Genelleştirilmiş Lucas Sayıları 17

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ PELL-LUCAS SAYILARI 27

4.1. Genelleştirilmiş Pell-Lucas Sayıları 27

4.2. Genelleştirilmiş Pell-Lucas Sayılarına Dair Bazı Özel Eşitlikler ve Toplam Formülü 31

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ LUCAS POLİNOMLARI 37

5.1. Genelleştirilmiş Lucas Polinomları 37

5.2. Genelleştirilmiş Lucas Polinomlarına Dair Bazı Özel Eşitlikler ve Toplam Formülü 41

6. GENELLEŞTİRİLMİŞ PELL-LUCAS POLİNOMLARI 47

6.1. Genelleştirilmiş Pell-Lucas Polinomları 47

6.2. Genelleştirilmiş Pell-Lucas Polinomlarına Dair Bazı Özel Eşitlikler ve Toplam Formülü 51

Sayfa

7. SONUÇ VE ÖNERİLER 1

KAYNAKLAR 59

ÖZGEÇMİŞ 65

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

Çizelge 2.1. Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell-Lucas sayı dizilerinin ilk 10 terimi 11

Çizelge 2.2. Fibonacci ve Lucas polinomlarının ilk 10 polinomu..... 14

Çizelge 2.3. Pell ve Pell-Lucas polinomlarının ilk 10 polinomu..... 15

Çizelge 2.4. İndirgeme bağıntısına sahip bazı sayı dizileri ve polinom sınıfları. 16

Çizelge 3.1. Genelleştirilmiş Lucas sayı dizisinin ilk 10 terimi 18

Çizelge 4.1. Genelleştirilmiş Pell-Lucas sayı dizisinin ilk 10 terimi..... 28

Çizelge 5.1. Genelleştirilmiş Lucas polinomunun ilk 5 polinomu 38

Çizelge 6.1. Genelleştirilmiş Pell-Lucas polinomunun ilk 5 polinomu..... 48

SİMGELER

Bu çalışmada kullanılmış simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{F_n}$	n. Fibonacci sayısı
$\boldsymbol{L_n}$	n. Lucas sayısı
$\boldsymbol{P_n}$	n. Pell sayısı
$\boldsymbol{Q_n}$	n. Pell-Lucas sayısı
$\boldsymbol{q_n}$	n. Modifiye Pell-Lucas sayısı
$\boldsymbol{F_n(x)}$	n. Fibonacci Polinomu
$\boldsymbol{L_n(x)}$	n. Lucas Polinomu
$\boldsymbol{P_n(x)}$	n. Pell Polinomu
$\boldsymbol{Q_n(x)}$	n. Pell-Lucas Polinomu
$\boldsymbol{D_n(a,b)}$	n. Genelleştirilmiş Lucas Sayısı
$\boldsymbol{E_n(c,d)}$	n. Genelleştirilmiş Pell-Lucas Sayısı
$\boldsymbol{D_n(a,b)(x)}$	n. Genelleştirilmiş Lucas Polinomu
$\boldsymbol{E_n(c,d)(x)}$	n. Genelleştirilmiş Pell-Lucas Polinomu

1. GİRİŞ

Geçmişten günümüze matematikte uygulama alanı bulmuş çok önemli konulardan biri de dizilerdir. Bu dizilerin en başında ise en çok bilinen dizi olan ve kendinden önceki iki terimin toplamı ile elde edilen Fibonacci dizisi yer alır. Bu dizi Fibonacci adı ile bilinen Leonardo Pisano tarafından bulunmuştur. Fibonacci yani diğer adıyla Leonardo Pisano "Liber Abaci" adlı eserinde tanımladığı bu sayı dizisini ayrıntılı bir şekilde anlatmıştır. Leonardo Pisano bu eserinde ayrıca altın oranın özelliklerinden de bahsetmiştir [1, 2].

Fibonacci dizisinden ve bağlantılı özelliklerinden yola çıkan Fransız matematikçi Edward Lucas kendi adıyla anılan Lucas dizilerini tanımlamıştır [3].

Başlangıç şartları farklı olmasına rağmen aynı karakteristik denkleme sahip olan Fibonacci ve Lucas dizileri üzerine birçok araştırma yapılmıştır. Bu çalışmalarda Fibonacci sayı dizisinin belirli özellikleri incelenerek, elde edilen sonuçlar ve özellikler ışığında daha farklı sayı dizileri ve polinom sınıflarına ulaşılmıştır.

Bu önemli sayı dizileri farklı farklı şekillerde genelleştirilmiştir. Özellikle Fibonacci ve Lucas dizisine ait birçok genelleştirme olup bu dizilere ait birçok özellik [3]' te görülebilir.

Bazı araştırmacılar başlangıç şartlarını değiştirirken [4-6], bazıları da [7-12] indirgeme bağıntılarını değiştirerek yeni genelleştirmeler elde etmişlerdir.

Bahsedilen bu genelleştirmeler ilk kez 1878 yılında Lucas tarafından yapılmıştır [13].

Literatüre genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizileri ile genelleştirilmiş Lucas sayı dizileri şeklinde geçen bu sayılar daha sonra yapılacak diğer çalışma ve genelleştirmeler için de önemli bir kaynak olmuştur.

Miles yapılan bu çalışmalardan yola çıkarak 1960 yılında yaptığı "Generalized Fibonacci Numbers and Associated Matrices" isimli çalışmasında k. mertebeden genelleştirilmiş Fibonacci sayılarını tanımlamıştır [14].

Horadam ise 1961 ve 1963 yılında yaptıkları çalışmalarda Fibonacci sayılarından yola çıkarak terimleri kompleks sayılar olan Gauss Fibonacci sayılarını tanımlamıştır. Gauss Fibonacci sayıları için bazı formül ve eşitlikler elde etmiştir [15, 16].

Kalman matrisler yardımıyla genelleştirilmiş Fibonacci dizilerini tanımlayarak, bu diziye ait birçok özellik elde etmiştir [17].

Er, genelleştirilmiş k-Fibonacci sayılarını tanımlayarak Fibonacci sayıları için yeni bir genelleme yolu bulmuştur [18].

Bu aşamadan sonra Lee ise k. mertebeden Fibonacci ve Lucas sayıları üzerinde çalışmalar yapmıştır [19-21].

Falcon ve Plaza Fibonacci sayılarına dair yeni bir genelleştirme olan Fibonacci-k sayılarını tanımlamış ve tanımladıkları bu yeni sayı dizisine ait birçok formül ve özdeşlik vermişlerdir [22].

Stakhov "Introduction into algorithmic measurement theory" adlı kitabında Fibonacci ve Lucas sayılarına dair bir genelleştirme olan genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas p-sayılarını tanımlamıştır [23]. Stakhov ve Rozin ise çalışmalarında yine bu dizilerin binet formüllerini ve çeşitli özelliklerini elde etmişlerdir [24].

Koçer, Tuğlu ve Stakhov yaptıkları çalışmada Fibonacci ve Lucas p−sayılarının m−genişlemesini tanımlamışlardır. Tanımladıkları sayılarla ilgili çeşitli özdeşlikler elde etmişlerdir. Ayrıca p ve m' nin farklı değerleri için bu sayı dizilerini daha başka sayı dizilerine indirgemişlerdir [25].

Taşçı ve Firengiz ise çalışmalarında tamamlanmamış Fibonacci p−sayıları ile tamamlanmamış Lucas p−sayılarını tanımlamıştır. Ayrıca bu sayı dizilerine dair bazı bağlantılar da elde etmişlerdir [26].

Edson ve Yayenie çalışmalarında yeni bir genelleştirme olan iki periyotlu Fibonacci dizilerini tanımlamışlardır. Bu dizilere ait bazı formül ve özdeşlikler elde etmişlerdir [27].

Falcon Lucas sayılarına ait yeni bir genelleştirilme olan k−Lucas dizisini tanımlamıştır ve tanımlanan yeni diziye ait bazı bağıntılar elde etmiştir. Ayrıca k−Lucas dizisi ile k−Fibonacci dizisi ile arasındaki ilişkileri de incelemiştir [28].

Taşçı çalışmasında farklı bir genelleştirme olan genelleştirilmiş k-Lucas sayılarını tanımlamıştır [29].

Kılıç ise matrislerden yararlanarak genelleştirilmiş k-Pell sayılarını tanımlamıştır [30].

Taşçı ve Kılıç ayrıca genelleştirilmiş k. mertebeden Fibonacci ve Lucas sayıları üzerine çalışmış ve bu diziler arasındaki ilişkileri incelemişlerdir [31,32]. Yine Taşçı ve Kılıç "genelleştirilmiş k. mertebeden Pell sayılarına dair binet benzeri formül ve eşitliklere yer vermişlerdir [33].

Koçer ve Tuğlu Pell p-sayıları ile Pell-Lucas p-sayılarını tanımlamışlardır. Ayrıca p' ye verilen farklı değerler için bu dizilerin Binet formüllerini elde etmişlerdir [34].

Catarino yeni bir genelleştirme olan genelleştirilmiş k-Pell sayılarını tanımlamıştır [35].

Catarino ve Vasco da ayrıca çalışmalarında k. dereceden genelleştirilmiş Pell-Lucas ve genelleştirilmiş Modifiye-Pell sayılarına dair bazı eşitlikler ve üreteç formüllerini elde etmişlerdir [36, 37].

Çalışılan sayı dizilerinin yanı sıra benzer yaklaşımla tanımlanmış farklı polinom sınıfları ve bu sınıfların genelleştirilmeleri de mevcuttur.

Catalan1883 yılında Fibonacci polinomlarını tanımlamıştır [1].

Horadam ve Mahon çalışmalarında Pell ve Pell-Lucas polinomlarını tanımlamış ve bu polinomlara dair bazı bağıntılar elde etmişlerdir [38].

Bicknell Fibonacci polinomunun genelleştirerek genelleştirilmiş Finonacci polinomunu tanımlamıştır [39].

Webb ve Parberry çalışmalarında genelleştirilmiş Fibonacci polinomu ile genelleştirilmiş Lucas polinomlarını tanımlayarak bu polinomlar için yeni bir genelleştirme yolu bulmuştur [40].

Bergum ve Hoggatt ise Lucas polinomlarına ait farklı bir genelleştirme tanımlamıştır ve tanımlanan bu polinomlara dair bazı bağıntılar elde etmişlerdir [41].

Tuğlu, Koçer ve Stakhov, iki değişkenli Fibonacci ve Lucas p−polinomlarını tanımlamışlar ve bu polinomların matris temsilleri ile çeşitli özelliklerini elde etmişlerdir. Ayrıca üreteç fonksiyonlar yardımıyla genelleştirilmiş bivariate Fibonacci p−polinomları ve genelleştirilmiş bivariate Lucas p−polinomlarının bazı eşitlik ve özdeşliklerini ispatlamışlardır [42].

Bu bilgiler ışığında tez çalışmasında genelleştirilmiş Lucas ve genelleştirilmiş Pell-Lucas polinomları çalışılmıştır. Tezin bölümleri aşağıda kısaca özetlenmiştir.

Tezin ikinci bölümü olan temel kavramlar kısmında diğer bölümlerde kullanılacak temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Ayrıca bazı tamsayı dizilerinin genel özellikleri ile bu dizilerle ilgili teoremler ispatsız olarak verilmiştir.

Üçüncü bölümde daha önceki çalışmalar ışığında genelleştirilmiş Lucas sayıları tanımlanmış, bu sayı dizisinin karakteristik denklemi, binet formülü, üreteç fonksiyonu ve toplam formülü ile bazı eşitlikler verilmiştir.

Dördüncü bölümde genelleştirilmiş Pell-Lucas sayı dizisi tanımlanmış, bu sayı dizisine ait elemanlar verilmiş ve bu diziye ait karakteristik denklem, binet formülü ve diğer bağıntılar verilmiştir.

Beşinci bölümde; tanımlanan bu yeni sayı dizilerinden yola çıkılarak genelleştirilmiş Lucas polinomu tanımlanmıştır. Bu polinom sınıfına ait elemanlar verilmiştir. Genelleştirilmiş Lucas polinomları için binet formülü, toplam formülü, üreteç fonksiyonu ve bazı eşitlikler verilmiştir.

Tezin altıncı bölümünde genelleştirilmiş Pell-Lucas polinomları tanımlanmış ve bu polinom sınıfının bazı elemanları verilmiştir. Yine benzer şekilde bu polinom sınıfına ait bazı formül ve eşitlikler verilmiştir.

Tezin son bölümü olan yedinci bölümde ise sonuç ve öneriler verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezin diğer bölümlerine temel teşkil edecek bazı tanım ve teoremler ispatsız olarak verilecektir. İlk olarak Fibonacci, Lucas, Pell-Lucas, Modifiye Pell-Lucas sayılarına ilişkin gerekli tanımlar verilerek Fibonacci, Lucas ve Pell-Lucas polinomlarından bahsedilecektir. Daha sonra bu sayıların bilinen indirgeme bağıntıları göz önüne alınarak bazı formül ve özdeşlikler verilecektir.

2.1. Temel Kavramlar

2.1.1. Tanım (Rekürans bağıntısı)

Bir dizide herhangi bir terim, kendinden önceki terimlerden yararlanılarak elde ediliyorsa yararlandığımız bu bağıntıya dizinin rekürans bağıntısı denir [22, 34].

2.1.2. Tanım (Binet formülü)

Bir rekürans bağıntısını fark denklemi olarak çözerken karakteristik denklemin kökleri yardımıyla dizinin n. terimini veren kapalı forma Binet formülü denir [7, 25].

2.1.3. Tanım (Üreteç fonksiyonu)

$a_0, a_1, a_2, \ldots$ şeklindeki tamsayı dizisi için

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

kuvvet serisi açılımına bu dizinin üreteç fonksiyonu denir [1, 26].

Burada x^n teriminin katsayısı dizinin n. terimidir.

2.2. Bazı Tamsayı Dizileri

2.2.1. Tanım (Fibonacci sayı dizisi)

Her $n \geq 1$ tamsayısı için

$F_0 = 0\,, F_1 = 1$

başlangıç şartları olmak üzere;

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \tag{2.1}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{F_n\}_{n\geq 0}$ şeklindeki diziye Fibonacci sayı dizi denir ve $\{F_n\}_{n\geq 0}$ dizisinin elemanları ise "Fibonacci sayıları" olarak adlandırılır [1, 3].

Fibonacci dizisine karşılık gelen karakteristik denklem

$x^2 - x - 1 = 0$

dir. Verilen denklemin kökleri ve kökler arasındaki bağıntı ise

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ \,, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

için;

$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1, |\alpha - \beta| = \sqrt{5}$

şeklindedir.

Burada denklemin pozitif kökü olan ve Altın Oran olarak bilinen $\alpha = 1{,}61803398875\ldots$ sayısı doğada ve birçok yerde karşımıza çıkan muhteşem bir sayıdır [43].

Bu dizinin binet formülü ise α ve β' ya bağlı olarak

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

şeklinde elde edilmiştir. Fibonacci dizisine ait üreteç fonksiyonu ise

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

dir [1].

2.2.2. Tanım (Lucas sayı dizisi)

Her $n \geq 1$ tamsayısı için, başlangıç şartları

$L_0 = 2\,, L_1 = 1$

için;

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1} \tag{2.2}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{L_n\}_{n\geq 0}$ şeklindeki diziye Lucas sayı dizisi denir ve $\{L_n\}_{n\geq 0}$ dizisinin elemanları "Lucas sayıları" olarak adlandırılır [1, 3] .

Lucas sayı dizisi ile Fibonacci sayı dizisinin karakteristik denklemleri aynı olduğundan karakteristik denkleme ait kökler de aynıdır dolayısıyla

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\ \ , \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

olduğu göz önüne alınarak,

Lucas sayı dizisi için binet formülü

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

dir. Lucas sayı dizisine ait üreteç fonksiyonu ise

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} L_n x^n = \frac{2x^2 + x}{1 - x - x^2}$$

dir [1] .

2.2.3. Tanım (Pell sayı dizisi)

Her $n \geq 1$ tamsayısı için, başlangıç şartları

$P_0 = 0\,, P_1 = 1$

olan,

$$P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1} \tag{2.3}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{P_n\}_{n\geq 0}$ şeklindeki diziye Pell sayı dizisi denir ve $\{P_n\}_{n\geq 0}$ dizisinin elemanları "Pell sayıları" olarak adlandırılır [2] .

Karakteristik denklemi $x^2 - 2x - 1 = 0$ şeklinde olan Pell dizisinin kökleri

$\gamma = 1 + \sqrt{2}\ \ ,\ \theta = 1 - \sqrt{2}$

olup bu sayı dizisine ait binet formülü de

$$P_n = \frac{\gamma^n - \theta^n}{\gamma - \theta}$$

ile ifade edilir. Burada kökler arasındaki bağıntı ise,

$\gamma + \theta = 2, \qquad \gamma\theta = -1, \qquad |\gamma - \theta| = 2\sqrt{2}$

şeklindedir [2, 44].

2.2.4. Tanım (Pell-Lucas sayı dizisi)

Her $n \geq 1$ tamsayısı için, başlangıç şartları

$Q_0 = 2\,, Q_1 = 2$ olan ve

$$Q_{n+1} = 2Q_n + Q_{n-1} \tag{2.4}$$

ile tanımlanan $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ şeklindeki dizi Pell-Lucas sayı dizisidir ve yine aynı şekilde bu sayı dizisinin elemanları ise "Pell-Lucas Sayıları" olarak adlandırılır [2, 44].

Pell-Lucas sayıları için binet formülü de;

$$Q_n = \gamma^n + \theta^n$$

şeklinde ifade edilir [2, 44].

Çizelge 2.1. Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell-Lucas sayı dizilerinin ilk 10 terimi

n	F_n	L_n	P_n	Q_n
1	1	1	1	2
2	1	3	2	6
3	2	4	5	14
4	3	7	12	34
5	5	11	29	82
6	8	18	70	198
7	13	29	169	478
8	21	47	408	1154
9	34	76	985	2786
10	55	123	2378	6726

2.2.5. Tanım (Modifiye-Pell sayı dizisi)

Her $n \geq 1$ tamsayısı için, başlangıç şartları

$q_0 = 1\,, q_1 = 1$

olan ve

$$q_{n+1} = 2q_n + q_{n-1} \tag{2.5}$$

ile tanımlanan $\{q_n\}_{n\geq 0}$ şeklindeki dizi Modifiye-Pell sayı dizisidir ve $\{q_n\}_{n\geq 0}$ dizisinin elemanları "Modifiye-Pell Sayıları" olarak adlandırılır [45].

Burada Modifiye-Pell Sayıları için binet formülü;

$$q_n = \frac{\gamma^n + \theta^n}{\gamma + \theta}$$

şeklindedir. Yukarıda Eş. 2.3, Eş. 2.4, Eş. 2.5' in karakteristik denklemlerinin ve dolayısıyla köklerinin aynıdır.

2.3. Bazı Tamsayı Polinomları

Literatürde Fibonacci sayıları ve rekürans bağıntılarından hareketle farklı başlangıç koşulları ve farklı tekrarlama bağıntısına sahip birçok polinom sınıfı mevcuttur.

Bu tezde kullanılacak bazı polinom sınıfları aşağıda gösterilmiştir.

2.3.1. Tanım (Fibonacci polinomu)

Her $n \geq 3$ tamsayısı için, başlangıç şartları

$F_1(x) = 1\,,\ F_2(x)\ = x$

olan

$$F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2} \tag{2.6}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan polinoma Fibonacci polinomu denir [46, 47].

Burada Eş. 2.6 bağıntısının karakteristik denklemi

$$t^2 - xt - 1 = 0$$

dir. Bu denklemin kökleri

$$t_1 = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$
$$t_2 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

dir. Kökler arasındaki bağıntı ise;

$$t_1 + t_2 = x, t_1 t_2 = -1, |t_1 - t_2| = \sqrt{x^2 + 4}$$

ile verilir.

2.3.2. Tanım (Lucas polinomu)

Her $n \geq 2$ tamsayısı için, başlangıç şartları

$$L_0(x) = 2,\ L_1(x) = x$$

olan ve

$$L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2} \tag{2.7}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan polinoma Lucas polinomu denir [48].

Çizelge 2.2. Fibonacci ve Lucas polinomlarının ilk 10 polinomu

n	$F_n(x)$	$L_n(x)$
1	1	x
2	x	x^2+2
3	x^2+1	x^3+3x
4	x^3+2x	x^4+4x^2+2
5	x^4+3x^2+1	x^5+5x^3+5x
6	x^5+4x^3+3x	$x^6+6x^4+9x^2+2$
7	$x^6+5x^4+6x^2+1$	$x^7+7x^5+14x^3+7x$
8	$x^7+6x^5+10x^3+4x$	$x^8+8x^6+20x^4+16x^2+2$
9	$x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1$	$x^9+9x^7+27x^5+30x^3+9x$
10	$x^9+8x^7+21x^5+20x^3+5x$	$x^{10}+10x^8+35x^6+50x^4+25x^2+2$

2.3.3. Tanım (Pell polinomu)

Her $n \geq 2$ tamsayısı için, başlangıç şartları

$$P_0(x) = 0,\ P_1(x) = 1$$

olan

$$P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2} \tag{2.8}$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı ile tanımlanan polinoma Pell polinomu denir [49].

2.3.4. Tanım (Pell-Lucas polinomu)

Her $n \geq 2$ tamsayısı için, başlangıç şartları

$$Q_0(x) = 2,\ Q_1(x) = 2x$$

olan ve

$$Q_n(x) = 2xQ_{n-1}(x) + Q_{n-2} \tag{2.9}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan polinoma Pell-Lucas polinomu denir [49] .

Pell ve Pell-Lucas polinomlarına ait karakteristik denklem

$$t^2 - 2tx - 1 = 0$$

olup, verilen bu denkleme ait kökler;

$$t_3 = x + \sqrt{x^2+1}\,,\; t_4 = x - \sqrt{x^2+1}$$

şeklindedir.

Çizelge 2.3. Pell ve Pell-Lucas polinomlarının ilk 10 polinomu

n	$P_n(x)$	$Q_n(x)$
1	1	$2x$
2	$2x$	$4x^2+2$
3	$4x^2+1$	$8x^3+6x$
4	$8x^3+4$	$16x^4+16x^2+2$
5	$16x^4+12x^2+1$	$32x^5+40x^3+10x$
6	$32x^5+32x^3+6x$	$64x^6+96x^4+36x^2+2$
7	$64x^6+80x^4+24x^2+1$	$128x^7+224x^5+112x^3+14x$
8	$128x^7+192x^5+80x^3+8x$	$256x^8+512x^6+320x^4+64x^2+2$
9	$256x^8+448x^6+240x^4+40x^2+1$	$512x^9+1152x^7+864x^5+240x^3+18x$
10	$512x^9+1024x^7+672x^5+160x^3+10x$	$1024x^{10}+2560x^8+2240x^6+800x^4+100x^2+2$

Yukarıda bahsettiğimiz polinom sınıfları ile aynı isme sahip sayı dizileri arasında çok kuvvetli bir ilişki vardır. Şöyle ki,

Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell-Lucas polinomlarında x yerine 1 alındığında;

$$\mathrm{F_n}(1) = \mathrm{F_n}$$
$$\mathrm{L_n}(1) = \mathrm{L_n}$$
$$\mathrm{P_n}(1) = \mathrm{P_n}$$
$$\mathrm{Q_n}(1) = \mathrm{Q_n}$$

elde edilir [1-4].

Eş. 2.1, Eş. 2.2, Eş. 2.3, Eş. 2.4' deki tamsayı dizileri ile Eş. 2.6, Eş. 2.7, Eş. 2.8, Eş. 2.9' daki polinomların negatif alt indislerini de tanımlamak mümkündür. Bu tanımlamalar aşağıda verilmiştir [1-4].

$F_{-n}=(-1)^{n+1}F_n$, $n\geq 1$

$L_{-n}=(-1)^{n}L_n$, $n\geq 1$

$P_{-n}=(-1)^{n+1}P_n$, $n\geq 1$

$Q_{-n}=(-1)^{n}Q_n$, $n\geq 1$

$F_{-n}(x)=(-1)^{n+1}F_n(x)$, $n\geq 1$

$L_{-n}(x)=(-1)^{n}L_n(x)$, $n\geq 1$

$P_{-n}(x)=(-1)^{n+1}P_n(x)$, $n\geq 1$

$Q_{-n}(x)=(-1)^{n}Q_n(x)$, $n\geq 1$

Bu tezde, pozitif alt indisli sayı dizileri ile polinomları ele alınacaktır. Çalışmada kullanılan sayı dizileri ve polinom sınıfları Çizelge 2.4.' de gösterilmiştir.

Çizelge 2.4. İndirgeme bağıntısına sahip bazı sayı dizileri ve polinom sınıfları.

İndirgeme Bağıntısına Sahip Sayı Dizisi ya da Polinom Sınıfı	Başlangıç Koşulları	Tekrarlama Bağıntısı
Fibonacci Sayı Dizisi	$F_0 = 0 , F_1 = 1$	$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$
Lucas Sayı Dizisi	$L_0 = 2 , L_1 = 1$	$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$
Pell Sayı Dizisi	$P_0 = 0 , P_1 = 1$	$P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$
Pell-Lucas Sayı Dizisi	$Q_0 = 2 , Q_1 = 2$	$Q_{n+1} = 2Q_n + Q_{n-1}$
Modifiye Pell Sayı Dizisi	$q_0 = 1 , q_1 = 1$	$q_{n+1} = 2q_n + q_{n-1}$
Fibonacci Polinomları	$F_1(x) = 1 , F_2(x) = x$	$F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}$
Lucas Polinomları	$L_0(x) = 2 , L_1(x) = x$	$L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}$
Pell Polinomları	$P_0(x) = 0 , P_1(x) = 1$	$P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}$
Pell-Lucas Polinomları	$Q_0(x) = 2 , Q_1(x) = 2x$	$Q_n(x) = 2xQ_{n-1}(x) + Q_{n-2}$

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ LUCAS SAYILARI

Bu bölümde Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki bağıntıdan yola çıkılarak genelleştirilmiş Lucas sayıları tanımlanacaktır. Tanımlanan bu diziye ait bazı formül ve eşitlikler verilecektir.

3.1. Genelleştirilmiş Lucas Sayıları

L_n ve F_n sırasıyla n. Lucas ve Fibonacci sayılarını göstermek üzere;

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$$

olduğu göz önüne alınarak, buradan hareketle aşağıdaki tanım verilecektir.

3.1.1. Tanım (Genelleştirilmiş Lucas sayıları)

$a, b \in R$ olmak üzere,

$$D_n(a,b) = aF_{n+1} + bF_{n-1} \tag{3.1}$$

ifadesine genelleştirilmiş Lucas sayıları denir. Bu tanım göz önüne alınarak aşağıdaki lemma verilmiştir.

3.1.2. Lemma

$a, b \in R$ olmak üzere, $\forall \in \mathbb{Z}$ için,

$$D_{n+1}(a,b) = D_n(a,b) + D_{n-1}(a,b) \tag{3.2}$$

başlangıç şartları

$$D_0(a,b) = a + b,\ D_1(a,b) = b$$

olan bir indirgeme bağıntısıdır.

İspat

$$D_n(a,b) + D_{n-1}(a,b) = aF_{n+1} + bF_{n-1} + aF_n + bF_{n-2}$$
$$= a(F_{n+1} + F_n) + b(F_{n-1} + F_{n-2})$$
$$= aF_{n+2} + bF_n$$
$$= D_{n+1}(a,b)$$

yazılır. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

$D_n(a,b)$ sayı dizisinin bazı elemanları aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

Çizelge 3.1. Genelleştirilmiş Lucas sayı dizisinin ilk 10 terimi

n	$D_n(x)$
1	$a+b$
2	b
3	$a+2b$
4	$a+3b$
5	$2a+5b$
6	$3a+8b$
7	$5a+13b$
8	$8a+21b$
9	$13a+34b$
10	$21a+55b$

$D_n(a,b)$ sayı dizisinde eğer;

$a = 1, b = 1$ alınırsa $D_n(1,1) = L_n$ (Lucas sayıları)

$a = -1, b = 1$ alınırsa $D_n(-1,1) = F_n$ (Fibonacci sayıları) elde edilir.

Genelleştirilmiş Lucas sayı dizilerine karşılık gelen karakteristik denklem

$$x^2 - x - 1 = 0$$

dır. Bu denklemin kökleri de

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

dir. Kökler arasındaki bağıntı ise

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1, |\alpha - \beta| = \sqrt{5}$$

şeklindedir.

3.1.3. Teorem (Genelleştirilmiş Lucas sayıları için binet formülü)

$$D_n(a,b) = \left(\frac{b - \beta(a+b)}{\alpha - \beta}\right)\alpha^n + \left(\frac{\alpha.(a+b) - b}{\alpha - \beta}\right)\beta^n$$

dir.

İspat

Genelleştirilmiş Lucas sayılarına ait

$$D_n(a,b) = c_1\alpha^n + c_2\beta^n \qquad (3.3)$$

Eş. 3.3' deki binet denklemi göz önüne alınır ve n yerine sırasıyla 0 ve 1 değerleri verilirse;

$$D_0(a,b) = a + b = c_1 + c_2$$
$$D_1(a,b) = \ b = c_1\alpha + c_2\beta$$

şeklindeki lineer denklem sistemi elde edilir. Katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklı olan bu lineer denklem sistemi Cramer yöntemi ile çözüldüğünde,

$$c_1 = \frac{b - \beta(a+b)}{\alpha - \beta},\ c_2 = \frac{\alpha.(a+b) - b}{\alpha - \beta}$$

olarak bulunur. Bulunan bu değerler Eş. 3.3 ifadesinde yerine yazılırsa istenilen elde edilmiş olur.

3.1.4. Teorem (Genelleştirilmiş Lucas sayıları için üreteç fonksiyonu)

$$f(x) = \frac{a + b - ax}{1 - x - x^2}$$

şeklindedir.

İspat

Genelleştirilmiş Lucas sayıları için üreteç fonksiyonu;

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(a,b)x^n \tag{3.4}$$

olsun.

Bu seri sırasıyla x ve x^2 ile çarpılırsa

$$xf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(a,b)x^{n+1}$$
$$= D_0(a,b)x^1 + D_1(a,b)x^2 + D_2(a,b)x^3 + \cdots + D_{n-1}(a,b)x^n + \cdots \tag{3.5}$$
$$x^2 f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(a,b)x^{n+2}$$
$$= D_0(a,b)x^2 + D_1(a,b)x^3 + D_2(a,b)x^4 + \cdots + D_{n-2}(a,b)x^n + \cdots \tag{3.6}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada Eş. 3.4' den Eş. 3.5 ve Eş. 3.6 çıkarılırsa;

$$f(x) - xf(x) - x^2 f(x) = D_0(a,b) + \big(D_1(a,b) - D_0(a,b)\big)x^1$$
$$+\big(D_2(a,b) - D_1(a,b) - D_0(a,b)\big)x^2$$
$$+\big(D_3(a,b) - D_2(a,b) - D_1(a,b)\big)x^3 + \cdots$$

$$+\big(D_n(a,b)-D_{n-1}(a,b)-D_{n-2}(a,b)\big)x^n+\cdots$$

$$f(x)[1-x-x^2]=D_0(a,b)+\big[\big(D_1(a,b)-D_0(a,b)\big)\big]x^1$$
$$+\big[\big(D_2(a,b)-D_1(a,b)-D_0(a,b)\big)\big]x^2$$
$$+\big[\big(D_3(a,b)-D_2(a,b)-D_1(a,b)\big)\big]x^3+\cdots+$$
$$\big[\big(D_n(a,b)-D_{n-1}(a,b)-D_{n-2}(a,b)\big)\big]x^n+\cdots \qquad (3.7)$$

sonucuna ulaşılır. Genelleştirilmiş Lucas sayılarının

$$D_0(a,b)=a+b, \qquad D_1(a,b)=b$$

başlangıç şartları ve Eş. 3.2' den elde edilen

$$D_n(a,b)-D_{n-1}(a,b)-D_{n-2}(a,b)=0$$

ifadesi Eş. 3.7' de yerlerine yazılarak;

$$f(x)=\frac{a+b-ax}{1-x-x^2}$$

şeklindeki üreteç fonksiyonu bulunmuş olur.

3.1.5. Teorem (Genelleştirilmiş Lucas sayılarının ilk n teriminin toplamı)

$$\sum_{i=0}^{n} D_i(a,b)=D_{n+2}(a,b)-b$$

dir.

İspat

Genelleştirilmiş Lucas sayı dizilerinin

$$D_{n+1}(a,b)=D_n(a,b)+D_{n-1}(a,b)$$

indirgeme bağıntısı göz önüne alınıp n yerine 1' den $n+1$' e kadar olan değerler verilirse;

$$D_2(a,b) = D_1(a,b) + D_0(a,b)$$
$$D_3(a,b) = D_2(a,b) + D_1(a,b)$$
$$\vdots$$
$$D_{n-1}(a,b) = D_{n-2}(a,b) + D_{n-3}(a,b)$$
$$D_n(a,b) = D_{n-1}(a,b) + D_{n-2}(a,b)$$
$$D_{n+1}(a,b) = D_n(a,b) + D_{n-1}(a,b)$$
$$D_{n+2}(a,b) = D_{n+1}(a,b) + D_n(a,b)$$

ifadeleri elde edilir. Bu ifadeler taraf tarafa toplanırsa;

$$\sum_{i=2}^{n+2} D_i(a,b) = \sum_{i=1}^{n+1} D_i(a,b) + \sum_{i=0}^{n} D_i(a,b)$$
$$\sum_{i=2}^{n+2} D_i(a,b) - \sum_{i=1}^{n+1} D_i(a,b) = \sum_{i=0}^{n} D_i(a,b)$$

bulunur. Buradan da gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\sum_{i=0}^{n} D_i(a,b) = \sum_{i=0}^{n} D_i(a,b) - D_0(a,b) - D_1(a,b) + D_{n+1}(a,b) + D_{n+2}(a,b)$$
$$- \left[\sum_{i=0}^{n} D_i(a,b) - D_0(a,b) + D_{n+1}(a,b)\right]$$
$$\sum_{i=0}^{n} D_i(a,b) = \sum_{i=0}^{n} D_i(a,b) - D_0(a,b) - D_1(a,b) + D_{n+1}(a,b) + D_{n+2}(a,b)$$
$$- \sum_{i=0}^{n} D_i(a,b) + D_0(a,b) - D_{n+1}(a,b)$$

$$\sum_{i=0}^{n} D_i(a,b) = D_{n+2}(a,b) - D_1(a,b) \tag{3.8}$$

sonucuna ulaşılır.

$D_1(a,b) = b$

başlangıç şartı Eş. 3.8' de yerine yazılırsa;

$$\sum_{i=0}^{n} D_i(a,b) = D_{n+2}(a,b) - b$$

bulunmuş olur.

3.1.6. Teorem (Catalan eşitliği)

$r \leq n$ olmak üzere herhangi negatif olmayan n, r tamsayıları için

$$D_{n+r}(a,b)D_{n-r}(a,b) - D_{n^2}(a,b) = 5c_1c_2(-1)^{n-r}{F_r}^2$$

dir. Burada

$$c_1 = \frac{b - \beta(a+b)}{\alpha - \beta},\ c_2 = \frac{\alpha.(a+b) - b}{\alpha - \beta}$$

ve F_r; r. Fibonacci sayısıdır.

İspat

$$D_n(a,b) = c_1\alpha^n + c_2\beta^n$$

şeklindeki binet formülü göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} D_{n+r}(a,b)D_{n-r}(a,b) - D_{n^2}(a,b) &= (c_1\alpha^{n+r} + c_2\beta^{n+r})(c_1\alpha^{n-r} + c_2\beta^{n-r}) \\ &\quad -(c_1\alpha^n + c_2\beta^n)^2 \\ &= {c_1}^2\alpha^{2n} + c_1c_2\alpha^{n+r}\beta^{n-r} + c_1c_2\alpha^{n-r}\beta^{n+r} \\ &\quad +{c_2}^2\beta^{2n} - {c_1}^2\alpha^{2n} - 2c_1c_2(\alpha\beta)^n - {c_2}^2\beta^{2n} \end{aligned}$$

$$= c_1c_2\alpha^{n+r}\beta^{n-r} + c_1c_2\alpha^{n-r}\beta^{n+r} - 2c_1c_2(\alpha\beta)^n$$
$$= c_1c_2(\alpha\beta)^n\left[\frac{\alpha^r}{\beta^r} + \frac{\beta^r}{\alpha^r} - 2\right]$$
$$= c_1c_2(\alpha\beta)^{n-r}(\alpha^r - \beta^r)^2$$

elde edilir. Burada α ve β yerlerine yazılıp

$$\alpha^r - \beta^r = \sqrt{5}F_r$$

eşitliği de kullanırsa

$$D_{n+r}(a,b)D_{n-r}(a,b) - D_{n^2}(a,b) = 5c_1c_2(-1)^{n-r}{F_r}^2$$

bulunmuş olur.

3.1.7. Teorem (Cassini eşitliği)

Herhangi negatif olmayan n tamsayısı için

$$D_{n+1}(a,b)D_{n-1}(a,b) - D_{n^2}(a,b) = c_1c_2 5(-1)^{n-1}$$

dir. Burada

$$c_1 = \frac{b - \beta(a+b)}{\alpha - \beta},\ c_2 = \frac{\alpha(a+b) - b}{\alpha - \beta}$$

şeklindedir.

İspat

Cassini eşitliği, Catalan eşitliğinin $r = 1$ için özel bir hali olduğundan bir önceki ispatta

r yerine 1 alınırsa Cassini eşitliği elde edilmiş olur.

3.1.8. Teorem (d'Ocagne Eşitliği)

$m \geq n$ ve herhangi negatif olmayan m, n tamsayıları için

$$D_m(a,b)D_{n+1}(a,b) - D_n(a,b)D_{m+1}(a,b) = 5c_1c_2(-1)^{n+1}F_{m-n}$$

dir. Burada F_{m-n}, $m-n$. Fibonacci sayısı ve

$$c_1 = \frac{b-\beta(a+b)}{\alpha-\beta},\ c_2 = \frac{\alpha.(a+b)-b}{\alpha-\beta}$$

dir.

İspat

Genelleştirilmiş Lucas sayılarına ait

$$D_n(a,b) = c_1\alpha^n + c_2\beta^n$$

şeklindeki binet formülü göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned} D_m(a,b)D_{n+1}(a,b) - D_n(a,b)D_{m+1}(a,b) &= (c_1\alpha^m + c_2\beta^m)(c_1\alpha^{n+1} + c_2\beta^{n+1}) \\ &\quad -(c_1\alpha^n + c_2\beta^n)(c_1\alpha^{m+1} + c_2\beta^{m+1}) \\ &= {c_1}^2\alpha^{m+n+1} + c_1c_2\alpha^m\beta^{n+1} + c_1c_2\alpha^{n+1}\beta^m \\ &\quad +{c_2}^2\beta^{m+n+1} - ({c_1}^2\alpha^{m+n+1} + c_1c_2\alpha^n\beta^{m+1} \\ &\quad +c_1c_2\alpha^{m+1}\beta^n + {c_2}^2\beta^{m+n+1}) \\ &= c_1c_2\alpha^m\beta^{n+1} + c_1c_2\alpha^{n+1}\beta^m \\ &\quad -c_1c_2\alpha^n\beta^{m+1} - c_1c_2\alpha^{m+1}\beta^n \\ &= c_1c_2\alpha^n\beta^m(\alpha-\beta) - c_1c_2\alpha^m\beta^n(\alpha-\beta) \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılarak

$$D_m(a,b)D_{n+1}(a,b) - D_n(a,b)D_{m+1}(a,b) = -c_1c_2(\alpha-\beta)\alpha^n\beta^n(\alpha^{m-n} - \beta^{m-n})$$

ifadesine ulaşılır. Burada α ve β yerlerine yazılır.

$$\alpha^{m-n} - \beta^{m-n} = \sqrt{5}F_{m-n}$$

eşitliği de kullanırsa

$$D_m(a,b)D_{n+1}(a,b) - D_n(a,b)D_{m+1}(a,b) = 5c_1c_2(-1)^{n+1}F_{m-n}$$

bulunmuş olur.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ PELL-LUCAS SAYILARI

Bu bölümde Pell ve Pell-Lucas sayıları arasındaki bağıntıdan yola çıkılarak genelleştirilmiş Pell-Lucas sayıları tanımlanacaktır. Tanımlanan bu diziye ait bazı formül ve eşitlikler verilecektir.

4.1. Genelleştirilmiş Pell-Lucas Sayıları

Q_n ve P_n sırasıyla n. Pell-Lucas ve Pell sayılarını göstermek üzere;

$$Q_n = P_{n+1} + P_{n-1}$$

olduğu göz önüne alınarak [49], buradan hareketle aşağıdaki tanım verilecektir.

4.1.1. Tanım (Genelleştirilmiş Pell-Lucas sayıları)

$c, d \in R$ olmak üzere;

$$E_n(c,d) = cP_{n+1} + dP_{n-1} \tag{4.1}$$

ifadesine genelleştirilmiş Pell-Lucas sayıları denir. Bu tanım göz önüne alınarak aşağıdaki Lemma verilmiştir.

4.1.2. Lemma

$c, d \in R$ olmak üzere, $\forall n \in \mathbb{Z}$ için;

$$E_{n+1}(c,d) = 2E_n(c,d) + E_{n-1}(c,d) \tag{4.2}$$

başlangıç şartları;

$$E_0(c,d) = c + d, E_1(c,d) = 2d$$

olan bir indirgeme bağıntısıdır.

İspat

$$2E_n(c,d) + E_{n-1}(c,d) = 2(cP_{n+1} + dP_{n-1}) + cP_n + dP_{n-2}$$
$$= c(2P_{n+1} + P_n) + d(2P_{n-1} + P_{n-2})$$
$$= cP_{n+2} + dP_n$$
$$= E_{n+1}(c,d)$$

yazılır. Böylece teorem ispatlanmış olur.

$E_n(c,d)$ dizisinin bazı elemanları aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

Çizelge 4.1. Genelleştirilmiş Pell-Lucas sayı dizisinin ilk 10 terimi

n	$E_n(x)$
1	$c+d$
2	$2d$
3	$c+5d$
4	$2c+12d$
5	$5c+29d$
6	$12c+70d$
7	$29c+169d$
8	$70c+408d$
9	$169c+985d$
10	$408c+2318d$

Genelleştirilmiş Pell-Lucas sayı dizisinde eğer;

$c=1,\ d=1$ alınırsa $E_n(1,1) = Q_n$ (Pell-Lucas sayıları)

$c=\frac{-1}{2}, d=\frac{1}{2}$ alınırsa $E_n\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right) = P_n$ (Pell Sayıları)

$c=\frac{1}{2}, d=\frac{1}{2}$ alınırsa $E_n\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = q_n$ (Modifiye Pell-Lucas Sayıları)

elde edilir.

Karakteristik denklemi $x^2 - 2x - 1 = 0$ şeklinde olan genelleştirilmiş Pell-Lucas sayı dizisinin kökleri

$\gamma = 1 + \sqrt{2}$, $\theta = 1 - \sqrt{2}$

dir. Kökler arasındaki bağıntı ise,

$\gamma + \theta = 2, \qquad \gamma\theta = -1, \qquad |\gamma - \theta| = 2\sqrt{2}$

şeklindedir.

4.1.3. Teorem (Genelleştirilmiş Pell-Lucas sayıları için binet formülü)

$$E_n(c,d) = \left(\frac{2d - (c+d)\theta}{\gamma - \theta}\right)\gamma^n + \left(\frac{(c+d)\gamma - 2d}{\gamma - \theta}\right)\theta^n$$

dir.

İspat

Genelleştirilmiş Pell-Lucas sayılarına ait

$$E_n(c,d) = a_1\gamma^n + a_2\theta^n \tag{4.3}$$

şeklindeki binet denklemi göz önüne alınır ve n yerine sırasıyla 0 ve 1 değerleri verilirse;

$E_0(c,d) = c + d = a_1 + a_2$
$E_1(c,d) = 2d = a_1\gamma + a_2\theta$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistem Cramer yöntemi ile çözüldüğünde;

$$a_1 = \frac{2d-(c+d)\theta}{\gamma-\theta},\ a_2 = \frac{(c+d)\gamma-2d}{\gamma-\theta}$$

şeklindeki katsayılar bulunur. Bulunan bu değerler Eş. 4.3' de yerine yazılırsa istenilen elde edilmiş olur. Burada

$$\gamma = 1+\sqrt{2}, \theta = 1-\sqrt{2}$$

dir.

4.1.4. Teorem (Genelleştirilmiş Pell-Lucas Sayıları için üreteç fonksiyonu)

$$g(x) = \frac{c+d-2cx}{1-2x-x^2}$$

şeklindedir.

İspat

Genelleştirilmiş Pell-Lucas sayıları için üreteç fonksiyonu;

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(c,d)x^n \tag{4.4}$$

olsun. Bu seri sırasıyla $2x$ ve x^2 ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} 2xg(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} 2E_n(c,d)x^{n+1} \\ &= 2E_0(c,d)x^1 + 2E_1(c,d)x^2 + 2E_2(c,d)x^3 + 2E_{n-1}(c,d)x^n + \cdots \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} x^2g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} E_n(c,d)x^{n+2} \\ &= E_0(c,d)x^2 + E_1(c,d)x^3 + E_2(c,d)x^4 + \cdots + E_{n-2}(c,d)x^n + \cdots \end{aligned} \tag{4.6}$$

ifadeleri elde edilir. Eş. 4.4' ten, Eş. 4.5 ve Eş. 4.6 çıkarılırsa;

$$
\begin{aligned}
g(x) - 2xg(x) - x^2 g(x) = {} & E_0(c,d) + \left[\left(E_1(c,d) - 2E_0(c,d)\right)\right]x^1 \\
& + \left[\left(E_2(c,d) - 2E_1(c,d) - E_0(c,d)\right)\right]x^2 \\
& + \left[\left(E_3(c,d) - 2E_2(c,d) - E_1(c,d)\right)\right]x^3 + \cdots \\
& + \left[\left(E_n(c,d) - 2E_{n-1}(c,d) - E_{n-2}(c,d)\right)\right]x^n + \cdots \\
g(x)[1 - 2x - x^2] = {} & E_0(c,d) + \left[\left(E_1(c,d) - 2E_0(c,d)\right)\right]x^1 \\
& + \left[\left(E_2(c,d) - 2E_1(c,d) - E_0(c,d)\right)\right]x^2 \\
& + \left[\left(E_3(c,d) - 2E_2(c,d) - E_1(c,d)\right)\right]x^3 + \cdots \\
& + \left[\left(E_n(c,d) - 2E_{n-1}(c,d) - E_{n-2}(c,d)\right)\right]x^n + \cdots \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır. Eş. 4.7' de

$E_0(c,d) = c + d, E_1(c,d) = 2d$

başlangıç şartları ve

$E_n(c,d) - 2E_{n-1}(c,d) - E_{n-2}(c,d) = 0$

ifadesi yerlerine yazılarak;

$$g(x) = \frac{c + d - 2cx}{1 - 2x - x^2}$$

fonksiyonu elde edilir.

4.2. Genelleştirilmiş Pell-Lucas Sayılarına Dair Bazı Özel Eşitlikler ve Toplam Formülü

4.2.1. Teorem (Genelleştirilmiş Pell-Lucas sayılarının ilk n teriminin toplamı)

$$\sum_{i=0}^{n} E_i(c,d) = \frac{c - d + E_{n+2} - E_{n+1}}{2}$$

dir.

İspat

Genelleştirilmiş Pell-Lucas sayı dizilerinin Eş. 4.2' deki indirgeme bağıntısı göz önüne alınarak; n yerine 1' den başlayıp $n+1$' e kadar olan değerler verilirse;

$$E_2(c,d) = 2E_1(c,d) + E_0(c,d)$$
$$E_3(c,d) = 2E_2(c,d) + E_1(c,d)$$
$$\vdots$$
$$E_{n-1}(c,d) = 2E_{n-2}(c,d) + E_{n-3}(c,d)$$
$$E_n(c,d) = 2E_{n-1}(c,d) + E_{n-2}(c,d)$$
$$E_{n+1}(c,d) = 2E_n(c,d) + E_{n-1}(c,d)$$
$$E_{n+2}(c,d) = 2E_{n+1}(c,d) + E_n(c,d)$$

ifadeleri elde edilir. Bu ifadeler taraf tarafa toplanırsa;

$$\sum_{i=2}^{n+2} E_i(c,d) = 2\sum_{i=1}^{n+1} E_i(c,d) + \sum_{i=0}^{n} E_i(c,d)$$

sonucuna ulaşılır. Burada

$$\sum_{i=2}^{n+2} E_i(c,d) - 2\sum_{i=1}^{n+1} E_i(c,d) = \sum_{i=0}^{n} E_i(c,d)$$

olup, gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\sum_{i=0}^{n} E_i(c,d) = \sum_{i=0}^{n} E_i(c,d) - E_0(c,d) - E_1(c,d) + E_{n+1}(c,d) + E_{n+2}(c,d)$$
$$-2\left[\sum_{i=0}^{n} E_i(c,d) - E_0(c,d) + E_{n+1}(c,d)\right]$$

elde edilir. Son ifadede,

$$E_0(c,d) = c + d\,, E_1(c,d) = 2d$$

başlangıç şartları yerlerine yazılırsa

$$\sum_{i=0}^{n} E_i(c,d) = \frac{c-d+E_{n+2}-E_{n+1}}{2}$$

bulunmuş olur.

4.2.2. Teorem (Catalan eşitliği)

$r \leq n$ olmak üzere herhangi negatif olmayan n , r tamsayıları için;

$$E_{n+r}(c,d)E_{n-r}(c,d) - E_{n^2}(c,d) = a_1 a_2 (-1)^{n-r}[Q_r^2 - 4(-1)^r]$$

dir. Burada Q_r; r. Pell- Lucas sayısı ve

$$a_1 = \frac{2d-(c+d)\theta}{\gamma-\theta},\ a_2 = \frac{(c+d)\gamma-2d}{\gamma-\theta}$$

dır.

İspat

Genelleştirilmiş Pell-Lucas sayılarına ait

$$E_n(c,d) = a_1\gamma^n + a_2\theta^n$$

şeklindeki binet formülü göz önüne alınarak;

$$\begin{aligned} E_{n+r}(c,d)E_{n-r}(c,d) - E_{n^2}(c,d) &= (a_1\gamma^{n+r} + a_2\theta^{n+r})(a_1\gamma^{n-r} + a_2\theta^{n-r}) \\ &\quad -(a_1\gamma^n + a_2\theta^n)^2 \\ &= {a_1}^2\gamma^{2n} + a_1a_2\gamma^{n+r}\theta^{n-r} + a_1a_2\gamma^{n-r}\theta^{n+r} \\ &\quad +{a_2}^2\theta^{2n} - {a_1}^2\gamma^{2n} - 2a_1a_2(\gamma\theta)^n - {a_2}^2\theta^{2n} \end{aligned}$$

$$= a_1 a_2 \gamma^{n+r} \theta^{n-r} + a_1 a_2 \gamma^{n-r} \theta^{n+r} - 2 a_1 a_2 (\gamma\theta)^n$$
$$= a_1 a_2 (\gamma\theta)^n \left[\frac{\gamma^r}{\theta^r} + \frac{\theta^r}{\gamma^r} - 2\right]$$
$$= a_1 a_2 (\gamma\theta)^{n-r} (\gamma^r - \theta^r)^2 \qquad (4.8)$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılır ve

$(\gamma^r - \theta^r)^2 = [Q_r^2 - 4(-1)^r]$, $\gamma\theta = -1$

eşitlikleri de yerlerine yazılırsa;

$E_{n+r}(c,d) E_{n-r}(c,d) - E_{n^2}(c,d) = a_1 a_2 (-1)^{n-r} [Q_r^2 - 4(-1)^r]$

bulunmuş olur.

4.2.3. Teorem (Cassini eşitliği)

Herhangi negatif olmayan n tamsayısı için

$E_{n+1}(c,d) E_{n-1}(c,d) - E_{n^2}(c,d) = 8 a_1 a_2 (-1)^{n-1}$

dir. Burada;

$$a_1 = \frac{2d - (c+d)\theta}{\gamma - \theta},\ a_2 = \frac{(c+d)\gamma - 2d}{\gamma - \theta}$$

şeklindedir.

İspat

Genelleştirilmiş Pell-Lucas sayıları için verilen Catalan eşitliğinde $r = 1$ alınırsa istenilen gösterilmiş olur.

4.2.4. Teorem (d'Ocagne eşitliği)

$m \geq n$ ve herhangi negatif olmayan m, n tamsayıları için

$$E_m(c,d)E_{n+1}(c,d) - E_n(c,d)E_{m+r}(c,d) = 2\sqrt{2}a_1a_2(-1)^{n+1}\sqrt{{Q_{m-n}}^2 - 4(-1)^{m-n}}$$

dir. Burada Q_{m-n} ile ifade edilen $m-n$. Pell-Lucas sayısı olup

$$a_1 = \frac{2d-(c+d)\theta}{\gamma-\theta},\ a_2 = \frac{(c+d)\gamma-2d}{\gamma-\theta}$$

şeklindedir.

İspat

Eş. 4.3 göz önüne alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}
E_m(c,d)E_{n+1}(c,d) - E_n(c,d)E_{m+1}(c,d) &= (a_1\gamma^m + a_2\theta^m)(a_1\gamma^{n+1} + a_2\theta^{n+1}) \\
&\quad -(a_1\gamma^n + a_2\theta^n)(a_1\gamma^{m+1} + a_2\theta^{m+1}) \\
&= {a_1}^2\gamma^{m+n+1} + a_1a_2\gamma^m\theta^{n+1} + a_1a_2\gamma^{n+1}\theta^m \\
&\quad +{a_2}^2\theta^{m+n+1} - ({a_1}^2\gamma^{m+n+1} + a_1a_2\gamma^n\theta^{m+1} \\
&\quad +a_1a_2\gamma^{m+1}\theta^n + {a_2}^2\theta^{m+n+1}) \\
&= a_1a_2\gamma^m\theta^{n+1} + a_1a_2\gamma^{n+1}\theta^m \\
&\quad -a_1a_2\gamma^n\theta^{m+1} - a_1a_2\gamma^{m+1}\theta^n \\
&= a_1a_2\gamma^n\theta^m(\gamma-\theta) - a_1a_2\gamma^m\theta^n(\gamma-\theta) \\
&= -2\sqrt{2}a_1a_2(\gamma\theta)^n(\gamma^{m-n} - \theta^{m-n}) \\
&= 2\sqrt{2}a_1a_2(-1)^{n+1}\sqrt{{Q_{m-n}}^2 - 4(-1)^{m-n}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ LUCAS POLİNOMLARI

Bu bölümde; 3. bölümde verilen genelleştirilmiş Lucas dizilerinin polinomları tanımlanarak bunlarla ilgili bazı özellikler verilecektir.

5.1. Genelleştirilmiş Lucas Polinomları

5.1.1. Tanım

Genelleştirilmiş Lucas polinomları $\forall n \geq 2$ için başlangıç koşulları

$$D_0(a,b)(x) = a + b,\ D_1(a,b)(x) = bx$$

olmak üzere

$$D_n(a,b)(x) = xD_{n-1}(a,b)(x) + D_{n-2}(a,b)(x) \tag{5.1}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Burada $D_n(a,b)(x)$' ye genelleştirilmiş Lucas polinomu denir. Bu polinom sınıfına ait karakteristik denklem

$$t^2 - xt - 1 = 0$$

dir. Karakteristik denkleminin kökleri;

$$\alpha(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}, \beta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2+4}}{2}$$

şeklindedir.

$D_n(a,b)(x)$ polinomunun ilk 5 polinomu aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

Çizelge 5.1. Genelleştirilmiş Lucas polinomunun ilk 5 polinomu

n	$D_n(x)(a,b)$
0	$a+b$
1	bx
2	$a+b+bx^2$
3	$ax+2bx+bx^3$
4	$bx^4+3bx^3+ax+a+b$

Genelleştirilmiş Lucas polinomlarında eğer;

$a=1, b=1$ alınırsa $D_n(1,1)(x)=L_n(x)$ (Lucas polinomları)

$a=-1, b=1$ alınırsa $D_n(-1,1)(x)=F_n\ (x)$ (Fibonacci polinomları)

elde edilir.

5.1.2. Teorem (Genelleştirilmiş Lucas polinomları için binet formülü)

$$D_n(a,b)(x)=\left(\frac{bx-\beta(x)(a+b)}{\alpha(x)-\beta(x)}\right)\alpha^n(x)+\left(\frac{\alpha(x).(a+b)-bx}{\alpha(x)-\beta(x)}\right)\beta^n(x)$$

dir.

İspat

Genelleştirilmiş Lucas polinomlarına ait

$$D_n(a,b)(x)=k_1\alpha^n(x)+k_2\beta^n(x) \qquad (5.2)$$

Binet denklemi göz önüne alınır, n yerine sırasıyla 0 ve 1 değerleri verilirse;

$$D_0(a,b)(x)=a+b=k_1+k_2$$
$$D_1(a,b)(x)=b\,x=k_1\alpha(x)+k_2\beta(x)$$

şeklindeki lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözüldüğünde ise;

$$k_1 = \frac{bx - \beta(x)(a+b)}{\alpha(x) - \beta(x)},\ k_2 = \frac{\alpha(x)(a+b) - bx}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

olarak bulunur. Bulunan bu değerler Eş. 5.2 ifadesinde yerine yazılırsa istenilen elde edilmiş olur.

5.1.3. Teorem (Genelleştirilmiş Lucas polinomları için üreteç fonksiyonu)

$$f(x,t) = \frac{a + b - axt}{1 - tx - t^2}$$

şeklindedir.

İspat

Genelleştirilmiş Lucas polinomları için üreteç fonksiyonu;

$$f(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(a,b)(x,t)t^n \tag{5.3}$$

olsun. Bu seri sırasıyla tx ve t^2ile çarpılırsa;

$$\begin{aligned} txf(x,t) &= tx\sum_{n=0}^{\infty} D_n(a,b)(x,t)t^n \\ &= D_0(a,b)(x,t)tx + D_1(a,b)(x,t)t^2x + D_2(a,b)(x,t)t^3x \\ &\quad + \cdots + D_{n-1}(a,b)(x,t)t^nx + \cdots \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} t^2f(x,t) &= t^2\sum_{n=0}^{\infty} D_n(a,b)(x,t)t^n \\ &= D_0(a,b)(x,t)t^2 + D_1(a,b)(x,t)t^3 + D_2(a,b)(x,t)t^4 \\ &\quad + \cdots + D_{n-2}(a,b)(x,t)t^n + \cdots \end{aligned} \tag{5.5}$$

serileri elde edilir. Eş. 5.3' den Eş. 5.4 ve Eş. 5.5 çıkarılırsa;

$$f(x,t) - xtf(x,t) - t^2 f(x,t) = D_0(a,b)(x,t) + \big(D_1(a,b)(x,t) - D_0 x(a,b)(x,t)\big)t^1$$
$$+\big(D_2(a,b)(x,t) - D_1 x(a,b)(x,t) - D_0(a,b)(x,t)\big)t^2$$
$$+\big(D_3(a,b)(x,t) - D_2 x(a,b)(x,t) - D_1(a,b)(x,t)\big)t^3$$
$$+\cdots + (D_n(a,b)(x,t) - D_{n-1}x(a,b)(x,t)$$
$$-D_{n-2}(a,b)(x,t))t^n + \cdots$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$f(x,t)[1 - tx - t^2] = D_0(a,b)(x,t) + \big[\big(D_1(a,b)(x,t) - D_0 x(a,b)(x,t)\big)\big]t^1 +$$
$$\big[\big(D_2(a,b)(x,t) - D_1 x(a,b)(x,t) - D_0(a,b)(x,t)\big)\big]t^2 +$$
$$\big[\big(D_3(a,b)(x,t) - D_2 x(a,b)(x,t) - D_1(a,b)(x,t)\big)\big]t^3$$
$$\big[\big(D_n(a,b)(x,t) - D_{n-1}x(a,b)(x,t) - D_{n-2}(a,b)(x,t)\big)\big]t^n$$
$$+\cdots \qquad (5.6)$$

elde edilir. Burada

$D_0(a,b)(x,t) = a + b, D_1(a,b)(x,t) = bx$

başlangıç şartları ve

$D_n(a,b)(x,t) - D_{n-1}x(a,b)(x,t) - D_{n-2}(a,b)(x,t) = 0$

ifadesi, Eş. 5.6' da yerlerine yazılırsa;

$$f(x,t) = \frac{a + b - axt}{1 - tx - t^2}$$

fonksiyonu bulunur.

5.2. Genelleştirilmiş Lucas Polinomlarına Dair Bazı Özel Eşitlikler ve Toplam Formülü

5.2.1. Teorem (Genelleştirilmiş Lucas polinomların ilk n teriminin toplamı)

$$\sum_{i=0}^{n} D_i(a,b)(x) = \frac{(1-x)D_{n+1}(a,b)(x) + D_{n+2}(a,b)(x) + a + b - ax - 2bx}{x}$$

dir.

İspat

Genelleştirilmiş Lucas polinomlarının

$$D_n(a,b)(x) = xD_{n-1}(a,b)(x) + D_{n-2}(a,b)(x)$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı göz önüne alınarak; sırasıyla n yerine 2' den $n+2$' ye kadar olan değerler verilirse;

$$D_2(a,b)(x) = xD_1(a,b)(x) + D_0(a,b)(x)$$
$$D_3(a,b)(x) = xD_2(a,b)(x) + D_1(a,b)(x)$$
$$D_4(a,b)(x) = xD_3(a,b)(x) + D_2(a,b)(x)$$
$$\vdots$$
$$D_{n-1}(a,b)(x) = xD_{n-2}(a,b)(x) + D_{n-3}(a,b)(x)$$
$$D_n(a,b)(x) = xD_{n-1}(a,b)(x) + D_{n-2}(a,b)(x)$$
$$D_{n+1}(a,b)(x) = xD_n(a,b)(x) + D_{n-1}(a,b)(x)$$
$$D_{n+2}(a,b)(x) = xD_{n+1}(a,b)(x) + D_n(a,b)(x)$$

İfadelerine ulaşılır. Bu ifadeleri taraf tarafa toplarsak;

$$\sum_{i=2}^{n+2} D_i(a,b)(x) = x\sum_{i=1}^{n+1} D_i(a,b)(x) + \sum_{i=0}^{n} D_i(a,b)(x)$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{i=0}^{n} D_i(a,b)(x) = \sum_{i=2}^{n+2} D_i(a,b)(x) - x\sum_{i=1}^{n+1} D_i(a,b)(x)$$

yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} D_i(a,b)(x) &= \sum_{i=0}^{n} D_i(a,b)(x) - D_0(a,b)(x) - D_1(a,b)(x) + D_{n+1}(a,b)(x)\\ &\quad + D_{n+2}(a,b)(x)\\ &\quad - x\left[\sum_{i=0}^{n} D_i(a,b)(x) - D_0(a,b)(x) + D_{n+1}(a,b)(x)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} D_i(a,b)(x) &= \sum_{i=0}^{n} D_i(a,b)(x) - D_0(a,b)(x) - D_1(a,b)(x)\\ &\quad + D_{n+1}(a,b)(x) + D_{n+2}(a,b)(x)\\ &\quad - x\sum_{i=0}^{n} D_i(a,b) + xD_0(a,b)(x) - xD_{n+1}(a,b)(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x\sum_{i=0}^{n} D_i(a,b)(x) &= D_{n+2}(a,b) + D_{n+1}(a,b)(x) - xD_{n+1}(a,b)(x)\\ &\quad - D_0(a,b)(x) - D_1(a,b)(x) + xD_0(a,b)(x)\end{aligned} \tag{5.7}$$

sonucuna ulaşılır.

$D_1(a,b)(x) = bx$, $D_0(a,b)(x) = a + b$

başlangıç şartları Eş. 5.7' de yerine yazılıp her iki taraf x ile bölünürse

$$\sum_{i=0}^{n} D_i(a,b)(x) = \frac{(1-x)D_{n+1}(a,b)(x) + D_{n+2}(a,b)(x) + a + b - ax - 2bx}{x}$$

bulunmuş olur.

5.2.2. Teorem (Catalan eşitliği)

$r \leq n$ ve herhangi negatif olmayan n, r tamsayıları için

$$D_{n+r}(a,b)(x)D_{n-r}(a,b)(x) - D_{n^2}(a,b)(x) = (x^2+4)k_1k_2(-1)^{n-r}F_r(x)^2$$

dir. Burada $F_r(x)$ ifadesi; r. Fibonacci polinomudur ve

$$k_1 = \frac{bx - \beta(x)(a+b)}{\alpha(x)-\beta(x)},\ k_2 = \frac{\alpha(x)(a+b) - bx}{\alpha(x)-\beta(x)}$$

şeklindedir.

İspat

Eş. 5.2' deki binet formülü göz önüne alınırsa ve

$$D_{n+r}(a,b)(x)D_{n-r}(a,b)(x) - D_{n^2}(a,b)(x)$$

ifadesine uygun şekilde düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
&D_{n+r}(a,b)(x)D_{n-r}(a,b)(x) - D_{n^2}(a,b)(x)\\
&= (k_1\alpha^{n+r}(x) + k_2\beta^{n+r}(x))(k_1\alpha^{n-r}(x) + k_2\beta^{n-r}(x)) - (k_1\alpha^n(x) + k_2\beta^n(x))^2\\
&= {k_1}^2\alpha^{2n}(x) + k_1k_2\alpha^{n+r}(x)\beta^{n-r}(x) + k_1k_2\alpha^{n-r}(x)\beta^{n+r}(x) + {k_2}^2\beta^{2n}(x)\\
&\quad -{k_1}^2\alpha^{2n}(x) - 2k_1k_2(\alpha\beta)^n(x) - {k_2}^2\beta^{2n}(x)\\
&= k_1k_2\alpha^{n+r}(x)\beta^{n-r}(x) + k_1k_2\alpha^{n-r}(x)\beta^{n+r}(x) - 2k_1k_2(\alpha\beta)^n(x)\\
&= k_1k_2(\alpha\beta)^n(x)\left[\frac{\alpha^r(x)}{\beta^r(x)} + \frac{\beta^r(x)}{\alpha^r(x)} - 2\right]\\
&= k_1k_2(\alpha\beta)^{n-r}(x)(\alpha^r(x) - \beta^r(x))^2 \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

$$\alpha\beta(x) = -1,\ \alpha^r(x) - \beta^r(x) = \sqrt{x^2+4}F_r(x)$$

eşitlikleri, Eş. 5.8' de yerlerine yazılırsa;

$$D_{n+r}(a,b)(x)D_{n-r}(a,b)(x) - D_{n^2}(a,b)(x) = (x^2+4)k_1k_2(-1)^{n-r}F_r(x)^2$$

ispat tamamlanmış olur.

5.2.3. Teorem (Cassini eşitliği)

Herhangi negatif olmayan n tamsayısı için;

$$D_{n+1}(a,b)(x)D_{n-1}(a,b)(x) - D_{n^2}(a,b)(x) = k_1k_2(-1)^{n-1}(x^2+4)$$

dir. Burada;

$$k_1 = \frac{bx - \beta(x)(a+b)}{\alpha(x)-\beta(x)},\ k_2 = \frac{\alpha(x)(a+b) - bx}{\alpha(x)-\beta(x)}$$

şeklindedir.

İspat

Genelleştirilmiş Lucas polinomlarına ait

$$D_n(a,b)(x) = k_1\alpha^n(x) + k_2\beta^n(x)$$

şeklindeki binet formülü göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}
&D_{n+1}(a,b)(x)D_{n-1}(a,b)(x) - D_{n^2}(a,b)(x)\\
&= \left(k_1\alpha^{n+1}(x) + k_2\beta^{n+1}(x)\right)\left(k_1\alpha^{n-1}(x) + k_2\beta^{n-1}(x)\right) - (k_1\alpha^n(x) + k_2\beta^n(x))^2
\end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\begin{aligned}
&= {k_1}^2\alpha^{2n}(x) + k_1k_2\alpha^{n+1}(x)\beta^{n-1}(x) + k_1k_2\alpha^{n-1}(x)\beta^{n+1}(x) + {k_2}^2\beta^{2n}(x)\\
&\quad -{k_1}^2\alpha^{2n}(x) - 2k_1k_2(\alpha\beta)^n(x) - {k_2}^2\beta^{2n}(x)\\
&= k_1k_2\alpha^{n+1}(x)\beta^{n-1}(x) + k_1k_2\alpha^{n-1}(x)\beta^{n+1}(x) - 2k_1k_2(\alpha\beta)^n(x)\\
&= k_1k_2(\alpha\beta)^n(x)\left[\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} + \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} - 2\right]
\end{aligned}$$

$$= k_1 k_2 (\alpha\beta)^{n-1}(x)(\alpha(x) - \beta(x))^2 \quad (5.9)$$

sonucuna ulaşılır. Eş. 5.9' da

$$\alpha(x),\ \beta(x), \alpha\beta(x) = -1$$

eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$D_{n+1}(a,b)(x)D_{n-1}(a,b)(x) - D_{n^2}(a,b)(x) = k_1 k_2 (-1)^{n-1}(x^2 + 4)$$

elde edilmiş olur.

5.2.4. Teorem (d'Ocagne eşitliği)

$m \geq n$ ve herhangi negatif olmayan m, n tamsayıları için;

$$D_m(a,b)(x)D_{n+1}(a,b)(x) - D_n(a,b)(x)D_{m+1}(a,b)(x)$$
$$= k_1 k_2 (-1)^{n+1}\sqrt{x^2 + 4}F_{m-n}(x)$$

dir. Burada $F_{m-n}(x)$ ifadesi; $m - n$. Fibonacci polinomudur ve

$$k_1 = \frac{bx - \beta(x)(a+b)}{\alpha(x) - \beta(x)},\ k_2 = \frac{\alpha(x)(a+b) - bx}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

dir.

İspat

Eş. 5.2' de verilen

$$D_n(a,b)(x) = k_1\alpha^n(x) + k_2\beta^n(x)$$

şeklindeki binet denklemi göz önüne alınarak ve gerekli düzenlemeler yapılarak,

$$
\begin{aligned}
&D_m(a,b)(x)D_{n+1}(a,b)(x) - D_n(a,b)(x)D_{m+1}(a,b)(x)\\
&= \left(k_1\alpha^m(x) + k_2\beta^m(x)\right)\ \left(k_1\alpha^{n+1}(x) + k_2\beta^{n+1}(x)\right)\\
&\quad -(k_1\alpha^n(x) + k_2\beta^n(x))(k_1\alpha^{m+1}(x) + k_2\beta^{m+1}(x))\\
&= {k_1}^2\alpha^{m+n+1}(x) + k_1k_2\alpha^m(x)\beta^{n+1}(x) + k_1k_2\alpha^{n+1}(x)\beta^m(x)\\
&\quad +{k_2}^2\beta^{m+n+1}(x) - ({k_1}^2\alpha^{m+n+1}(x) + k_1k_2\alpha^n\beta^{m+1}(x)\\
&\quad +k_1k_2\alpha^{m+1}(x)\beta^n(x) + {k_2}^2\beta^{m+n+1}(x)\\
&= k_1k_2\alpha^m(x)\beta^{n+1}(x) + k_1k_2\alpha^{n+1}(x)\beta^m(x)\\
&\quad -k_1k_2\alpha^n(x)\beta^{m+1}(x) - k_1k_2\alpha^{m+1}(x)\beta^n(x)\\
&= k_1k_2\alpha^n(x)\beta^m(x)(\alpha-\beta) - k_1k_2\alpha^m(x)\beta^n(x)(\alpha-\beta) \qquad (5.10)
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır. Eş. 5.10’ da

$$\alpha\beta(x) = -1,\ \alpha^{m-n}(x) - \beta^{m-n}(x) = \sqrt{x^2+4}F_{m-n}(x)$$

ifadeleri yerlerine yazılırsa;

$$
\begin{aligned}
&D_m(a,b)(x)D_{n+1}(a,b)(x) - D_n(a,b)(x)D_{m+1}(a,b)(x)\\
&= k_1k_2(-1)^{n+1}\sqrt{x^2+4}F_{m-n}(x)
\end{aligned}
$$

bulunmuş olur.

6. GENELLEŞTİRİLMİŞ PELL-LUCAS POLİNOMLARI

Bu bölümde; 4.bölümde verilen genelleştirilmiş Pell-Lucas dizilerinin polinomları tanımlanıp bunlarla ilgili bazı özellikler verilecektir.

6.1. Genelleştirilmiş Pell-Lucas Polinomları

6.1.1. Tanım

Genelleştirilmiş Pell-Lucas polinomları $c, d \in R$ ve $\forall n \geq 2$ için başlangıç koşulları

$$E_0(c,d)(x) = c + d, \qquad E_1(c,d)(x) = 2dx$$

olan ve

$$E_n(c,d)(x) = 2xE_{n-1}(c,d)(x) + E_{n-2}(c,d)(x) \tag{6.1}$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı ile tanımlanan polinoma genelleştirilmiş Pell-Lucas polinomu denir. Burada $E_n(c,d)$, n. genelleştirilmiş Pell-Lucas polinomudur. Verilen indirgeme bağıntısına ait karakteristik denklem,

$$t^2 - 2xt - 1 = 0$$

şeklindedir. kökleri ise

$$\gamma(x) = x + \sqrt{x^2+1}\,,\ \theta(x) = x - \sqrt{x^2+1}$$

dir.

$E_n(c,d)(x)$ polinomunun ilk 5 polinomu aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

Çizelge 6.1. Genelleştirilmiş Pell-Lucas polinomunun ilk 5 polinomu

n	$D_n(x)(a,b)$
0	$a+b$
1	bx
2	$a+b+bx^2$
3	$ax+2bx+bx^3$
4	$bx^4+3bx^3+ax+a+b$

Genelleştirilmiş Pell-Lucas polinomlarında eğer;

$c=1, d=1$ alınırsa $E_n(1,1)(x)=Q_n(x)$ (Pell-Lucas polinomları)

$c=\frac{-1}{2}, d=\frac{1}{2}$ alınırsa$E_n\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right)(x)=P_n(x)$ (Pell polinomları)

$c=\frac{1}{2}, d=\frac{1}{2}$ alınırsa $E_n\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)(x)=q_n(x)$ (Modifiye Pell-Lucas polinomları)

elde edilir.

6.1.2. Teorem (Genelleştirilmiş Pell-Lucas polinomları için binet formülü)

$$E_n(c,d)(x)=\left(\frac{2dx-(c+d)\theta(x)}{\gamma(x)-\theta(x)}\right)\gamma^n(x)+\left(\frac{(c+d)\gamma(x)-2dx}{\gamma(x)-\theta(x)}\right)\theta^n(x)$$

dir.

İspat

Genelleştirilmiş Pell-Lucas polinomlarına ait

$$E_n(c,d)(x)=m_1\gamma^n(x)+m_2\theta^n(x) \tag{6.2}$$

şeklindeki binet denklemi göz önüne alınır ve n yerine sırasıyla 0 ve 1 verilirse

$E_0(c,d)(x) = c + d = m_1 + m_2$
$E_1(c,d)(x) = 2d\ x = m_1\gamma(x) + m_2\theta(x)$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistem Cramer metodu ile çözüldüğünde;

$$m_1 = \frac{2dx - (c+d)\theta(x)}{\gamma(x) - \theta(x)},\ m_2 = \frac{(c+d)\gamma(x) - 2dx}{\gamma(x) - \theta(x)}$$

şeklinde katsayılar bulunur.

Bulunan bu değerler Eş. 6.2 ifadesinde yerine yazılırsa istenilen elde edilmiş olur. Burada;

$$\gamma(x) = x + \sqrt{x^2+1}, \theta(x) = x - \sqrt{x^2+1}$$

dır.

6.1.3. Teorem (Genelleştirilmiş Pell-Lucas polinomları için üreteç fonksiyonu)

$$g(x,t) = \frac{c + d - 2cxt}{1 - 2tx - t^2}$$

şeklindedir.

İspat

Genelleştirilmiş Pell-Lucas polinomları için üreteç fonksiyonu

$$g(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(c,d)(x)t^n \qquad (6.3)$$

olsun. Bu seri sırasıyla $2t$ ve t^2 ile çarpılırsa,

$$2txg(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} 2xE_n(c,d)(x)t^{n+1}$$

$$= 2xE_0(c,d)(x)t^1 + 2xE_1(c,d)(x)t^2 + 2xE_2(c,d)(x)t^3 + \cdots + 2xE_{n-1}(c,d)(x)t^n + \cdots \quad (6.4)$$

$$t^2 g(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(c,d)(x)t^{n+2}$$

$$= E_0(c,d)(x)t^2 + E_1(c,d)(x)t^3 + E_2(c,d)(x)t^4 + \cdots + E_{n-2}(c,d)(x)t^n + \cdots \quad (6.5)$$

serileri elde edilir. Eş. 6.3' den sırasıyla Eş. 6.4 ve Eş. 6.5 çıkarılırsa;

$$g(x,t) - 2txg(x,t) - t^2 g(x,t) = E_0(c,d)(x) + [(E_1(c,d)(x) - 2xE_0(c,d)(x))]t^1 + [(E_2(c,d)(x) - 2xE_1(c,d)(x) - E_0(c,d)(x))]t^2 + [(E_3(c,d)(x) - 2xE_2(c,d)(x) - E_1(c,d)(x))]t^3 + \cdots + [(E_n(c,d)(x) - 2xE_{n-1}(c,d)(x) - E_{n-2}(c,d)(x))]t^n + \cdots$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılarak ifade

$$g(x,t)[1 - 2tx - t^2] = E_0(c,d)(x) + [(E_1(c,d)(x) - 2xE_0(c,d)(x))]t^1 + [(E_2(c,d)(x) - 2xE_1(c,d)(x) - E_0(c,d)(x))]t^2 + [(E_3(c,d)(x) - 2xE_2(c,d)(x) - E_1(c,d)(x))]t^3 + \cdots + [(E_n(c,d)(x) - 2xE_{n-1}(c,d)(x) - E_{n-2}(c,d)(x))]t^n + \cdots \quad (6.6)$$

haline getirilir. Eş. 6.6' da

$E_0(c,d)(x) = c + d, E_1(c,d)(x) = 2dx$

başlangıç şartları ve

$E_n(c,d)(x) - 2E_{n-1}(c,d)(x) - E_{n-2}(c,d)(x) = 0$

eşitliği yerlerine yazılırsa

$$g(x,t) = \frac{c + d - 2cxt}{1 - 2tx - t^2}$$

fonksiyonuna ulaşılır.

6.2. Genelleştirilmiş Pell-Lucas Polinomlarına Dair Bazı Özel Eşitlikler ve Toplam Formülü

6.2.1. Teorem (Genelleştirilmiş Pell-Lucas polinomlarının ilk n teriminin toplamı)

$$\sum_{i=0}^{n} E_i(c,d)(x) = \frac{E_{n+2}(c,d)(x) + (1-2x)E_{n+1}(c,d)(x) + 2cx - c - d}{2x}$$

dir.

İspat

Genelleştirilmiş Pell Lucas polinomlarına ait

$$E_{n+2}(c,d)(x) = 2xE_{n+1}(c,d)(x) + E_n(c,d)(x)$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı göz önüne alınıp n yerine 0' dan n' ye kadar olan değerler verilirse;

$$E_2(c,d)(x) = 2xE_1(c,d)(x) + E_0(c,d)(x)$$
$$E_3(c,d)(x) = 2xE_2(c,d)(x) + E_1(c,d)(x)$$
$$E_4(c,d)(x) = 2xE_3(c,d)(x) + E_2(c,d)(x)$$
$$\vdots$$
$$E_{n-1}(c,d)(x) = 2xE_{n-2}(c,d)(x) + E_{n-3}(c,d)(x)$$
$$E_n(c,d)(x) = 2xE_{n-1}(c,d)(x) + E_{n-2}(c,d)(x)$$
$$E_{n+1}(c,d)(x) = 2xE_n(c,d)(x) + E_{n-1}(c,d)(x)$$
$$E_{n+2}(c,d)(x) = 2xE_{n+1}(c,d)(x) + E_n(c,d)(x)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa;

$$\sum_{i=2}^{n+2} E_i(c,d)(x) = 2x\sum_{i=1}^{n+1} E_i(c,d)(x) + \sum_{i=0}^{n} E_i(c,d)(x)$$

sonucuna ulaşılır. Burada

$$\sum_{i=0}^{n} E_i(c,d)(x) = \sum_{i=2}^{n+2} E_i(c,d)(x) - 2x\sum_{i=1}^{n+1} E_i(c,d)(x)$$

olup, bu ifade

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} E_i(c,d)\,(x) = &\sum_{i=0}^{n} E_i(c,d)(x) - E_0(c,d)(x) - E_1(c,d)(x)\\ &+E_{n+1}(c,d)(x) + E_{n+2}(c,d)(x)\\ &-2x\left[\sum_{i=0}^{n} E_i(c,d)(x) - E_0(c,d)(x) + E_{n+1}(c,d)(x)\right]\end{aligned} \tag{6.7}$$

şeklinde düzenlenir ve Eş. 6.7’ de

$$E_0(c,d)(x) = c + d, E_1(c,d)(x) = 2dx$$

başlangıç şartları yerlerine yazılırsa

$$\sum_{i=0}^{n} E_i(c,d)(x) = \frac{E_{n+2}(c,d)(x) + (1-2x)E_{n+1}(c,d)(x) + 2cx - c - d}{2x}$$

bulunur.

6.2.2. Teorem (Catalan eşitliği)

$r \le n$ ve herhangi negatif olmayan n, r tamsayıları için;

$$E_{n+r}(c,d)(x)E_{n-r}(c,d)(x) - E_{n^2}(c,d)(x) = m_1 m_2(-1)^{n-r}[Q_r^2(x) - 4(-1)^r]$$

dir. Burada $Q_r(x)$ ile ifade edilen r. Pell- Lucas polinomudur ve katsayılar

$$m_1 = \frac{2dx - (c+d)\theta(x)}{\gamma(x) - \theta(x)},\ m_2 = \frac{(c+d)\gamma(x) - 2dx}{\gamma(x) - \theta(x)}$$

şeklindedir.

İspat

Eş. 6.2' deki binet formülü göz önüne alınarak;

$$E_{n+r}(c,d)(x)E_{n-r}(c,d)(x) - E_{n^2}(c,d)(x)$$
$$= \left(m_1\gamma^{n+r(x)} + m_2\theta^{n+r}(x)\right)\left(m_1\gamma^{n-r}(x) + m_2\theta^{n-r}(x)\right) - (m_1\gamma^n(x) + m_2\theta^n(x))^2$$

yazılabilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$E_{n+r}(c,d)(x)E_{n-r}(c,d)(x) - E_{n^2}(c,d)(x)$$
$$= {m_1}^2\gamma^{2n}(x) + m_1m_2\gamma^{n+r}(x)\theta^{n-r}(x) + m_1m_2\gamma^{n-r}(x)\theta^{n+r}(x) + {m_2}^2\theta^{2n}(x)$$
$$\quad -{m_1}^2\gamma^{2n}(x) - 2m_1m_2(\gamma\theta)^n(x) - {m_2}^2\theta^{2n}(x)$$
$$= m_1m_2\gamma^{n+r}(x)\theta^{n-r}(x) + m_1m_2\gamma^{n-r}(x)\theta^{n+r}(x) - 2m_1m_2(\gamma\theta)^n(x)$$
$$= m_1m_2(\gamma\theta)^n(x)\left[\frac{\gamma^r(x)}{\theta^r(x)} + \frac{\theta^r(x)}{\gamma^r(x)} - 2\right]$$
$$= m_1m_2(\gamma\theta)^{n-r}(x)(\gamma^r(x) - \theta^r(x))^2$$
$$= m_1m_2(-1)^{n-r}[Q_r^2(x) - 4(-1)^r]$$

sonucuna ulaşılır.

6.2.3. Teorem (Cassini eşitliği)

Herhangi negatif olmayan n tamsayısı için;

$$E_{n+1}(c,d)(x)E_{n-1}(c,d)(x) - E_{n^2}(c,d)(x) = m_1m_2(-1)^{n-1}(x^2+1)$$

dir.

Burada;

$$m_1 = \frac{2dx - (c+d)\theta(x)}{\gamma(x) - \theta(x)},\ m_2 = \frac{(c+d)\gamma(x) - 2dx}{\gamma(x) - \theta(x)}$$

şeklindedir.

İspat

Genelleştirilmiş Pell-Lucas polinomunun binet formülü göz önüne alınarak;

$$E_{n+1}(c,d)(x)E_{n-1}(c,d)(x) - E_{n^2}(c,d)(x)$$
$$= \left(m_1\gamma^{n+1}(x) + m_2\theta^{n+1}(x)\right)\left(m_1\gamma^{n-1}(x) + m_2\theta^{n-1}(x)\right) - (m_1\gamma^n(x) + m_2\theta^n(x))^2$$

yazılabilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılarak;

$$E_{n+1}(c,d)(x)E_{n-1}(c,d)(x) - E_{n^2}(c,d)(x)$$
$$= {m_1}^2\gamma^{2n}(x) + m_1m_2\gamma^{n+1}(x)\theta^{n-1}(x) + m_1m_2\gamma^{n-1}(x)\theta^{n+1}(x) + {m_2}^2\theta^{2n}(x)$$
$$\quad -{m_1}^2\gamma^{2n}(x) - 2m_1m_2(\gamma\theta)^n(x) - {m_2}^2\theta^{2n}(x)$$
$$= m_1m_2\gamma^{n+1}(x)\theta^{n-1}(x) + m_1m_2\gamma^{n-1}(x)\theta^{n+1}(x) - 2m_1m_2(\gamma\theta)^n(x)$$
$$= m_1m_2(\gamma\theta)^n(x)\left[\frac{\gamma(x)}{\theta(x)} + \frac{\theta(x)}{\gamma(x)} - 2\right]$$
$$= m_1m_2(\gamma\theta)^{n-1}(x)(\gamma(x) - \theta(x))^2 \qquad (6.8)$$

sonucuna ulaşılır. Eş. 6.8’ de, $\gamma(x)$, $\theta(x)$ ifadeleri ve

$$\gamma\theta(x) = -1$$

eşitliği yerlerine yazılırsa;

$$E_{n+1}(c,d)(x)E_{n-1}(c,d)(x) - E_{n^2}(c,d)(x) = m_1m_2(-1)^{n-1}(x^2+1)$$

ifadesi elde edilmiş olur.

6.2.4. Teorem (d'Ocagne eşitliği)

$m \geq n$ ve herhangi negatif olmayan m, n tamsayıları için;

$$E_m(c,d)(x)E_{n+1}(c,d)(x) - E_n(c,d)(x)E_{m+r}(c,d)(x)$$
$$= 2\sqrt{(x^2+1)}m_1m_2(-1)^{n+1}\sqrt{Q_{m-n}(x)^2 - 4(-1)^n}$$

dir. Burada $Q_{m-n}(x)$ ile ifade edilen $m-n$. Pell-Lucas polinomudur ve

$$m_1 = \frac{2dx - (c+d)\theta(x)}{\gamma(x) - \theta(x)},\ m_2 = \frac{(c+d)\gamma(x) - 2dx}{\gamma(x) - \theta(x)}$$

şeklindedir.

İspat

Eş. 6.2 göz önüne alınarak;

$$E_m(c,d)(x)E_{n+1}(c,d)(x) - E_n(c,d)(x)E_{m+1}(c,d)(x)$$
$$= \left(m_1\gamma^m(x) + m_2\theta^m(x)\right)\left(m_1\gamma^{n+1}(x) + m_2\theta^{n+1}(x)\right)$$
$$-(m_1\gamma^n(x) + m_2\theta^n(x))(m_1\gamma^{m+1}(x) + m_2\theta^{m+1}(x))$$

yazılabilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılarak

$$E_m(c,d)(x)E_{n+1}(c,d)(x) - E_n(c,d)(x)E_{m+1}(c,d)(x)$$
$$= {m_1}^2\gamma^{m+n+1}(x) + m_1m_2\gamma^m\theta^{n+1}(x) + m_1m_2\gamma^{n+1}(x)\theta^m(x) + {m_2}^2\theta^{m+n+1}(x)$$
$$-[{m_1}^2\gamma^{m+n+1}(x) + m_1m_2\gamma^n(x)\theta^{m+1}(x) + m_1m_2\gamma^{m+1}(x)\theta^n(x) + {m_2}^2\theta^{m+n+1}(x)]$$
$$= m_1m_2\gamma^m(x)\theta^{n+1}(x) + m_1m_2\gamma^{n+1}(x)\theta^m(x) - m_1m_2\gamma^n(x)\theta^{m+1}(x)$$
$$-m_1m_2\gamma^{m+1}(x)\theta^n(x)$$
$$= m_1m_2\gamma^n(x)\theta^m(x)(\gamma(x) - \theta(x)) - m_1m_2\gamma^m(x)\theta^n(x)(\gamma(x) - \theta(x))$$
$$= 2\sqrt{(x^2+1)}m_1m_2(\gamma\theta)^n(x)(\gamma^{m-n}(x) - \theta^{m-n}(x)) \qquad (6.9)$$

sonucuna ulaşılır. Eş. 6.9’ da, $\gamma(x)$, $\theta(x)$ ifadeleri ve

$$\gamma\theta(x) = -1$$

yerlerine yazılırsa;

$$E_m(c,d)(x)E_{n+1}(c,d)(x) - E_n(c,d)(x)E_{m+r}(c,d)(x)$$
$$= 2\sqrt{(x^2+1)}m_1m_2(-1)^{n+1}\sqrt{Q_{m-n}(x)^2 - 4(-1)^n}$$

elde edilmiş olur.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Lucas, Pell-Lucas sayılarından ve Lucas polinomları ile Pell-Lucas polinomlarından yola çıkılarak, bu sayı ve polinomların genelleştirilmiş halleri elde edilmiş, başlangıç değerlerine farklı değerler verilerek önemli bilinen diğer sayı ve polinomlara ulaşılmıştır. Ayrıca genelleştirilmiş sayı ve polinomların binet formülleri, toplam formülleri, üreteç formülleri ile cassini, catalan, d'Ocagne gibi eşitlikleri bulunmuştur.

Yukarıda özetlenen sonuçların daha genel halleri bulunarak kayda değer bağıntılar ve sonuçların elde edilebileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

1. Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas numbers with Applications*. (first edition). Hoboken: A Wiley-Interscience Publication, 752.

2. Bicknell, M. (1975). A primer on the Pell Sequence and Related Sequences. *The Fibonacci Quarterly*, 13(4), 345-349.

3. Hoggatt Jr.,V. E. (1969). *Fibonacci and Lucas numbers*. Boston: Houghton Mifflin Company, 7-9.

4. Horadam, A.F. (1961). A Generalized Fibonacci Sequence. *The American Mathematical Monthly*, vol.68, 455–459.

5. Klein, S.T. (1991). Combinatorial Representation of Generalized Fibonacci Numbers. *The Fibonacci Quarterly*, vol.29, 124–131.

6. Pond, J.C. (1968). Generalized Fibonacci Summations. *The Fibonacci Quarterly*, vol.6, 97–108.

7. Edson, M. and Yayenie, O. (2009). A New Generalization of Fibonacci Sequences and Extended Binet's Formula. *Integers*, vol.9, 2-12.

8. Falcon, S. and Plaza, A. (2007). The k-Fibonacci Sequence and the Pascal 2-Triangle. *Chaos, Solitons and Fractals*, vol.33, 38-49.

9. Krassimir, A.T., Liliya, A.C. and Dimitar, S.D. (1985). A New Perspective to the Generalization of the Fibonacci Sequence. *The Fibonacci Quarterly*, 23(1), 21–28.

10. Lee, G.Y., Kim, J.S. and Shin, H.K. (2001). The Binet Formula and Representations of k Generalized Fibonacci Numbers. *The Fibonacci Quarterly*, 39(2), 158–164.

11. Sburlati, G. (2002). Generalized Fibonacci Sequence and Linear Congruences. *The Fibonacci Quarterly*, vol.40, 446–452.

12. Zai, L.J. and Sheng, L.J. (1987). Some Properties of the Generalization of the Fibonacci Sequence. *The Fibonacci Quarterly*, 25(2) ,111–117.

13. Lucas, E. (1978). *Theories des Fonctions Numeriques Simplement Periodiques*. (first edition). Western Hemisphere: American Journal of Mathematics, 189-240.

14. Miles, E.P. (1960). Generalized Fibonacci Numbers and Associated Matrices. *The American Mathematical Monthly*, vol.67, 745-752.

15. Horadam, A.F. (1961). A generalized Fibonacci sequence. *The American Mathematical Monthly*, 68(5), 455–459.

16. Horadam, A.F. (1965). Generating functions for powers of a certain generalized sequences of numbers. *Duke Mathematical Journal*, 32(3), 437–446.

17. Kalman, D. (1982). Generalized Fibonacci numbers by matrix methods. *The Fibonacci Quarterly*, 20(1), 73-76.

18. Er, M.C. (1984). Sums of Fibonacci numbers by matrix method. *The Fibonacci Quarterly,* 22(3), 204-207.

19. Lee, G-Y. and Lee, S-G. (1995). A note on generalized Fibonacci numbers. *The Fibonacci Quarterly*, vol.33, 8-273.

20. Lee, G-Y. (2000). k-Lucas numbers and associated bipartite graphs. *Linear Algebra and its Application,* 320(1), 51-61.

21. Lee, G-Y., Lee, S-G., Kim, J-S. and Shin, H-K. (2001). The Binet Formula and Representations of k-Generalized Fibonacci Numbers. *The Fibonacci Quarterly*, 39(2), 158-164.

22. Falcon, S. and Plaza, A. (2007). On the Fibonacci k−numbers. *Chaos, Solitons & Fractals*, 32(5), 1615–1624.

23. Stakhov, A.P. (1977). *Introduction into algorithmic measurement theory*. (first edition). Moscow: Soviet Radio Publishing House, 288.

24. Stakhov, A. and Rozin, B. (2006). Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas p−numbers. *Chaos, Solitons & Fractals*, 27(5), 1162–1177.

25. Kocer, E. G., Tuglu, N. and Stakhov, A. (2009). On the m−extension of the Fibonacci and Lucas p−numbers. *Chaos, Solitons & Fractals*, 40(4), 1890–1906.

26. Tasci, D. and Firengiz, M. C. (2010). Incomplete Fibonacci and Lucas p−numbers. *Mathematical and Computer Modelling*, 52(9), 1763–1770.

27. Edson, M., Yayenie, O. (2009). A New Generalization of Fibonacci Sequence & Extended Binet's Formula. *Integers,* 9(6), 639–654.

28. Falcon, S. (2011). On the k−Lucas numbers. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences,* 6(21), 1039–1050.

29. Tasci, D. and Kilic, E. (2004). On the order-k generalized Lucas numbers. *Applied Mathematics and Computation*, 155(3), 637-641.

30. Kılıç, E. (2007). The generalized order-k Fibonacci-Pell sequence by matrix methods. *Applied Mathematics and Computation*, 209(2), 133-145.

31. Kilic, E. and Tasci, D. (2006). On the generalized order-k Fibonacci and Lucas numbers. *Rocky Mountain Journal of Mathematics,* 36(6), 1915-1926.

32. Kılıç, E. and Tascı, D. (2004). On the order-k generalized Lucas numbers. *Applied Mathematics and Computation*, vol.155, 637-641.

33. Kılıc, E. and Tascı, D. (2006). The generalized Binet formula, representation and sums of the generalized order-k Pell numbers, *Taiwanese Journal of Math*ematics, vol.10, 1662-1670.

34. Kocer, E. G. and Tuglu, N. (2007). The Binet Formulas for the Pell and Pell-Lucas p−Numbers. *Ars Combinatoria,* vol.85, 3–17.

35. Catarino, P. (2013). On some identities and generating functions for k-Pell numbers. *International Journal Mathematical Analysis*, 7(38), 1877-1884.

36. Catarino, P. and Vasco, P. (2013). On Some Identities and Generating Functions for k-Pell-Lucas Sequence. *Applied Mathematical Sciences*, 7(98), 4867-4873.

37. Catarino, P. and Vasco, P. (2013). Modified k-Pell Sequence: Some Identities and Ordinary Generating Function. *Applied Mathematical Sciences*, vol.7(121), 6031-6037.

38. Horadam, A. F. and Mahon, J. M. (1985). Pell and Pell-Lucas Polynomials. *The Fibonacci Quarterly*, 23(1), 7-20.

39. Bicknell, M. (1973). Generalized Fibonacci Polynomials. *The Fibonacci Quarterly*, 11(5), 457-465.

40. Webb, W. A. and Parberry, E. A. (1969). Divisibility Properties of Fibonacci Polynomials. *The Fibonacci Quarterly*, 7(5), 457-463.

41. Bergum, G. E. and Hoggatt Jr., V. E. (1974). Irreducibility of Lucas and generalized Lucas polynomials. *The Fibonacci Quarterly*, vol.12, 95–100.

42. Tuglu, N., Kocer, E. G. and Stakhov, A. (2011). Bivariate Fibonacci like p−polynomials. *Applied Mathematics and Computation*, 217(24), 10239–10246.

43. Vajda, S. (1989). *Fibonacci & Lucas numbers, and the golden section. Theory and applications.* New York: John Wiley & Sons, 24-61.

44. Koshy, T. (2014). *Pell and Pell-Lucas numbers with Applications*. (first edition). Berlin: *Springer*, 431.

45. Horadam, A. F. (1994). Applications of Modified Pell Numbers to Representations, *Ulam Quarterly*, 3(1), 34-53.

46. Hoggatt Jr., V. E. and Bicknell, M. (1973). Roots of Fibonacci polynomials. *The Fibonacci Quarterly*, 11(3), 271-274.

47. Hoggatt Jr., V. E. and Lind, D. A. (1968). Symbolic Substitutions in to Fibonacci Polynomials. *The Fibonacci Quarterly*, 6(5), 55-74.

48. Bicknell, M. (1970). A primer for the Fibonacci numbers part VII. *The Fibonacci Quarterly*, vol.8, 407–420.

49. Horadam, A. F. (1971). Pell Identities. *The Fibonacci Quarterly*, vol.9, 245- 252.



GAZİ GELECEKTİR...