



ÜÇ DEĞİŞKENLİ HERMİTE TABANLI APPELL POLİNOMUNUN YENİ  
BİR GENELLEŞTİRMESİ VE BAZI ÖZELLİKLERİ

Gizem GÜNGÖREN

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ 2024

## ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Gizem GÜNGÖREN

25/07/2024

# ÜÇ DEĞİŞKENLİ HERMITE TABANLI APPELL POLİNOMUNUN YENİ BİR GENELLEŞTİRMESİ VE BAZI ÖZELLİKLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Gizem GÜNGÖREN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2024

## ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm Hermite ve Appell polinomlarının tarihçesine ayrılmıştır. İkinci bölümde temel kavramlar olarak bazı Appell polinom aileleri tanıtılmış ve özelliklerinden bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde iki kez yinelenen üç değişkenli Hermite tabanlı Appell polinomları tanıtılmış olup bu polinom aileleri için rekürans bağıntısı, arttıran ve azaltan operatörleri ve diferensiyel denklemleri elde edilmiştir. Dördüncü bölümde iki kez yinelenen üç değişkenli Hermite tabanlı Appell polinomları için bazı örneklere yer verilmiştir.

Bilim Kodu : 20406

Anahtar Kelimeler : Doğurucu fonksiyon, Hermite polinomları, Appell polinomları, rekürans bağıntısı, Hermite tabanlı Appell polinomları, diferensiyel denklemler

Sayfa Adedi : 69

Danışman : Prof. Dr. Bayram ÇEKİM

A NEW GENERALIZATION OF THE THREE-VARIABLE HERMITE-BASED  
APPELL POLYNOMIAL AND SOME PROPERTIES

(M. Sc. Thesis)

Gizem GÜNGÖREN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

JULY 2024

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the history of Hermite and Appell polynomials. In the second chapter, some families of Appell polynomials are introduced as basic concepts and their properties are discussed. In the third chapter, twice iterated three-variable Hermite-based Appell polynomials are introduced and recurrence relations, raising and lowering operators and differential equations are obtained for these polynomial families. The fourth chapter presents some examples for twice iterated three-variable Hermite-based Appell polynomials.

Science Code : 20406

Key Words : Generating function, Hermite polynomials, Appell polynomials, recurrence relation, Hermite-based Appell polynomials, differential equations.

Page Number : 69

Supervisor : Prof. Dr. Bayram ÇEKİM

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimimin her aşamasında bana bilgi ve tecrübeleriyle yol gösteren ve desteğini hiç esirgemeyen, tez danışmanım sayın Prof. Dr. Bayram ÇEKİM'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Bu süreçte hem maddi hem manevi desteklerini hiç esirgemeyen sevgili aileme ve değerli arkadaşım Emirhan GEZEKÇİOĞLU'na çok teşekkür ederim. Yüksek lisans yaptığım süre boyunca verdiği burs ile beni destekleyen TÜBİTAK'a ve Ahmet ESKİYAPAN VAKFI'na teşekkürlerimi sunarım.



## İÇİNDEKİLER

|                                                                                                         | Sayfa |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| ÖZET .....                                                                                              | iv    |
| ABSTRACT.....                                                                                           | v     |
| TEŞEKKÜR.....                                                                                           | vi    |
| İÇİNDEKİLER .....                                                                                       | vii   |
| SİMGELER VE KISALTMALAR.....                                                                            | ix    |
| 1. GİRİŞ.....                                                                                           | 1     |
| 2. TEMEL KAVRAMLAR.....                                                                                 | 5     |
| 2.1. Ön Bilgiler.....                                                                                   | 5     |
| 2.2. Tek Değişkenli Hermite Polinomları .....                                                           | 6     |
| 2.3. Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler, Apostol-Genocchi Polinomları .....                               | 7     |
| 2.4. Çok Değişkenli Hermite Polinomları.....                                                            | 8     |
| 2.5. İki Değişkenli Hermite Tabanlı Bernoulli ve Hermite Tabanlı<br>Apostol-Bernoulli Polinomları ..... | 10    |
| 2.6. Üç Değişkenli Hermite Tabanlı Appell Polinomları.....                                              | 11    |
| 2.7. Genelleştirilmiş Hermite Tabanlı Apostol Polinomları İçin<br>Kapalı Formüller.....                 | 26    |
| 3. İKİ KEZ YİNELENEN ÜÇ DEĞİŞKENLİ HERMITE TABANLI<br>APPELL POLİNOMLARININ BAZI ÖZELLİKLERİ.....       | 33    |
| 3.1. İki Kez Yinelenen Appell Polinom Ailesinin Tanımı ve Özellikleri .....                             | 33    |
| 3.2. İki Kez Yinelenen Üç Değişkenli Hermite Tabanlı Appell Polinomları .....                           | 36    |
| 4. İKİ KEZ YİNELENEN ÜÇ DEĞİŞKENLİ HERMITE TABANLI<br>APPELL POLİNOMLARI İÇİN ÖRNEKLER .....            | 55    |
| 4.1. İki Kez Yinelenen Üç Değişkenli Hermite Tabanlı Euler Polinomları .....                            | 55    |

**Sayfa**

|                                                                                          |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.2. İki Kez Yinelenen Üç Değişkenli Hermite Tabanlı Bernoulli<br>Polinomları.....       | 57 |
| 4.3. İki Kez Yinelenen Üç Değişkenli Hermite Tabanlı Bernoulli-Euler<br>Polinomları..... | 59 |
| 5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....                                                                | 63 |
| KAYNAKLAR .....                                                                          | 65 |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                                                           | 69 |



## SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

| Simgeler                     | Açıklamalar                                          |
|------------------------------|------------------------------------------------------|
| $\mathbb{N}$                 | Doğal sayılar kümesi                                 |
| $\mathbb{Z}$                 | Tam sayılar kümesi                                   |
| $\mathbb{C}$                 | Kompleks sayılar kümesi                              |
| $B_n(x)$                     | Bernoulli polinomları                                |
| $B_n^{(\alpha)}(x, \lambda)$ | $\alpha$ . mertebeden Apostol-Bernoulli polinomları  |
| ${}_HB_n(x, y)$              | İki değişkenli Hermite tabanlı Bernoulli polinomları |
| ${}_HB_n(x, y, z; \lambda)$  | Hermite tabanlı Apostol-Bernoulli polinomları        |
| $E_n(x)$                     | Euler polinomları                                    |
| $E_n^{(\alpha)}(x, \lambda)$ | $\alpha$ . mertebeden Apostol-Euler polinomları      |
| ${}_HE_n(x, y)$              | İki değişkenli Hermite tabanlı Euler polinomları     |
| ${}_HE_n(x, y, z; \lambda)$  | Hermite tabanlı Apostol-Euler polinomları            |
| $G_n(x)$                     | Genocchi polinomları                                 |
| $G_n^{(\alpha)}(x, \lambda)$ | $\alpha$ . mertebeden Apostol-Genocchi polinomları   |
| ${}_HG_n(x, y, z; \lambda)$  | Hermite tabanlı Apostol-Genocchi polinomları         |
| $H_n(x)$                     | Tek değişkenli Hermite polinomları                   |
| $H_n(x, y)$                  | İki değişkenli Hermite polinomları                   |
| $H_n(x, y, z)$               | Üç değişkenli Hermite polinomları                    |

## 1. GİRİŞ

Charles Hermite, 19. yüzyılın önemli matematikçilerinden biridir. Çalışmalarında sayılar teorisi, ikinci dereceden formlar, değişmezlik teorisi, ortogonal polinomlar, eliptik fonksiyonlar ve cebir alanlarında yoğunlaşmıştır. Hermite, matematik dünyasına en önemli katkılarından biri olan Hermite polinomlarını tanımlamasıyla bilinir. Bu polinomlar, diferensiyel denklemlerin çözümlerinde, integral hesaplamalarında ve olasılık teorisinde önemli bir rol oynar. Ayrıca karmaşık sayılar teorisi ve Diyofantus denklemleri üzerine yaptığı çalışmalar da matematik literatüründe önemli bir yer tutar. Hermite polinomları, Hermite interpolasyonu ve Hermite operatörleri gibi kavramlar onun adını taşımaktadır. Matematik dünyasında, özellikle Abel fonksiyonları, eliptik fonksiyonlar ve sayılar teorisi alanlarında yaptığı önemli katkılarla tanınır. Bunun yanı sıra 1858'de beşinci dereceden denklemin eliptik fonksiyonlar kullanılarak çözümünü bulmuş ve 1873'te doğal logaritma tabanı  $e$ 'nin irrasyonel bir sayı olduğunu kanıtlamıştır. Hermite'in bu çalışmaları, matematiksel analizin çeşitli alanlarında ve uygulamalı matematikte halen etkisini sürdürmektedir [1].

Matematiğin ve fiziğin en önemli denklemlerinden olan

$$y''(x) - 2y'(x) + 2\lambda y(x) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{N}$$

diferensiyel denklemini sağlayan polinomlara Hermite polinomları denir [2]. Hermite polinomları aynı zamanda bir Appell polinom ailesidir.

Hermite polinomlarının doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} = e^{2xt-t^2}$$

ifadesiyle verilmektedir [2].

Diğer taraftan  $n$ . mertebeden verilen

$\{A_n(x)\}, n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  polinomlar dizisi

$$\frac{d}{dx} A_n(x) = n A_{n-1}(x), n \in \mathbb{N}$$

veya  $a_0 \neq 0$  olmak üzere

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

kuvvet serisi için

$$A(t) \exp(xt) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

eşitliğini gerçeklerse  $\{A_n(x)\}$  dizisine Appell polinomlar dizisi denir. Buradaki  $A(t)$  fonksiyonu  $\{A_n(x)\}$  dizisini belirleyen fonksiyondur [3, 4].

Hermite polinomları, olasılık teorisi ve kuantum mekaniği gibi alanlarda kullanılırken, Appell polinomları diferensiyel denklemlerin çözümlerinde ve matematiksel fizik problemlerinde önemli bir rol oynar.

Appell polinomları,  $A(t)$  için farklı temel fonksiyonlar kullanılarak elde edilen genelleştirilmiş polinomlar ailesidir.

Örneğin, klasik Bernoulli polinomları için kullanılan temel fonksiyon

$$A(t) = \frac{t}{e^t - 1}$$

iken, klasik Euler ve Genocchi polinomları için sırasıyla

$$A(t) = \frac{2}{e^t + 1}$$

ve

$$A(t) = \frac{2t}{e^t + 1}$$

seçilmiştir [5, 6]. Bu polinomlar genelleştirilerek daha kapsamlı bir sınıf elde edilmiştir.

Örneğin,  $\alpha$ . mertebeden genelleştirilmiş Bernoulli polinomları,

$$A(t) = \left( \frac{t}{e^t - 1} \right)^\alpha$$

seçilerek tanımlanmıştır [5, 6].

Benzer şekilde,  $\alpha$ . mertebeden genelleştirilmiş Euler ve Genocchi polinomları da bu şekilde elde edilmiştir [5, 6].  $\alpha$ . mertebeden Apostol-Bernoulli ve  $\alpha$ . mertebeden Apostol-Euler polinomları ise farklı bir parametre olan  $\lambda$ 'ya bağlı olarak tanımlanmıştır [5, 6].

Hermite ve Appell polinomlarının daha genel durumları ikinci bölümde tanıtılacaktır.



## 2. TEMEL KAVRAMLAR

### 2.1. Ön Bilgiler

#### 2.1.1. Tanım

$B_n(x)$  Bernoulli polinomları,  $E_n(x)$  Euler polinomları ve  $G_n(x)$  Genocchi polinomları

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t - 1} e^{xt}, \quad |t| < 2\pi, \quad (2.1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{2}{e^t + 1} e^{xt}, \quad |t| < \pi, \quad (2.2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{2t}{e^t + 1} e^{xt}, \quad |t| < \pi \quad (2.3)$$

ile tanımlanır [6, 7].

$x = 0$  seçilerek Bernoulli, Euler ve Genocchi sayıları elde edilir. Bu sayıların doğurucu fonksiyonları sırasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t - 1}, \quad |t| < 2\pi, \quad (2.4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{t^n}{n!} = \frac{2}{e^t + 1}, \quad |t| < \pi, \quad (2.5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{t^n}{n!} = \frac{2t}{e^t + 1}, \quad |t| < \pi \quad (2.6)$$

ile verilir [6, 7].

## 2.2. Tek Değişkenli Hermite Polinomları

### 2.2.1. Tanım

Tek değişkenli Hermite polinomu  $H_n(x)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} = \exp(2xt - t^2)$$

ifadesiyle [2] ve

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{n!}{k! (n-2k)!} (2x)^{n-2k} \quad (2.7)$$

eşitliği ile tanımlanır [2, 8]. Burada " $\lfloor \cdot \rfloor$ " işareti tam değer anlamındadır.

Bu tanımlara denk olan *Rodrigues* formülü

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \{\exp(-x^2)\} \quad (2.8)$$

eşitliği ile verilebilir [8]. Eş. 2.7'den bu polinomların birkaçı

$$H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2, H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12, H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120$$

$$H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120,$$

$$H_7(x) = 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x$$

dir [8]. Hermite polinomları

$$2xH_n(x) = 2nH_{n-1}(x) + H_{n+1}(x),$$

$$xH'_n(x) = nH'_{n-1}(x) + nH'_n(x),$$

$$H'_n(x) = 2xH'_n(x) - H_{n+1}(x)$$

rekürans bağıntılarını ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{m,n}$$

ortogonallik özelliğini gerçekler [8]. Burada  $\delta_{m,n}$  kroneker deltasıdır ve  $e^{-x^2}$  fonksiyonuna  $H_n(x)$  Hermite polinomlarının ağırlık fonksiyonu denir.

### 2.3. Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler, Apostol-Genocchi Polinomları

$\alpha$ . mertebeden klasik Bernoulli, Euler, Genocchi polinomları sırasıyla

$$\left(\frac{t}{e^t - 1}\right)^\alpha e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < 2\pi, \quad 1^\alpha = 1, \quad (2.9)$$

$$\left(\frac{2}{e^t + 1}\right)^\alpha e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < \pi, \quad 1^\alpha = 1, \quad (2.10)$$

ve

$$\left(\frac{2t}{e^t + 1}\right)^\alpha e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < \pi, \quad 1^\alpha = 1 \quad (2.11)$$

doğurucu fonksiyonları ile verilir [9]. Burada  $\alpha$  gerçel ya da karmaşık sayıdır.  $\alpha = 1$  durumunda klasik Bernoulli, Euler ve Genocchi polinomları elde edilir [9].

#### 2.3.1. Tanım

$\alpha$ . mertebeden Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler ve Apostol-Genocchi polinomları sırasıyla

$$\left(\frac{t}{\lambda e^t - 1}\right)^\alpha e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\alpha)}(x; \lambda) \frac{t^n}{n!}, \quad (2.12)$$

$\lambda = 1$  ise  $|t| < 2\pi$ ,  $\lambda \neq 1$  ise  $|t| < |\ln \lambda|$ ,

$$\left(\frac{2}{\lambda e^t + 1}\right)^\alpha e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(\alpha)}(x; \lambda) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < |\ln(-\lambda)|, \quad (2.13)$$

$$\left(\frac{2t}{\lambda e^t + 1}\right)^\alpha e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(\alpha)}(x; \lambda) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < |\ln(-\lambda)| \quad (2.14)$$

doğurucu fonksiyonları ile tanımlanır [9-13].

## 2.4. Çok Değişkenli Hermite Polinomları

### 2.4.1. Tanım

İki değişkenli klasik Hermite polinomu

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x, y) \frac{t^n}{n!} = \exp(2xt - yt^2) \quad (2.15)$$

ifadesiyle ya da bu eşitliğe denk olan

$$H_n(x, y) = n! \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-y)^m (2x)^{n-2m}}{m! (n-2m)!} \quad (2.16)$$

toplamsal formülü ile de tanımlanır [14].

Eş. 2.15'ten iki değişkenli Hermite polinomu ile tek değişkenli  $H_n(x)$  polinomu arasında

$$H_n(x, y) = n! \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} H_{n-2m}(x) \frac{(1-y)^m}{m! (n-2m)!} \quad (2.17)$$

bağıntısı vardır [15].

### 2.4.2. Tanım

İki değişkenli genelleştirilmiş Hermite polinomu

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}^{(2)}H_n(x, y) \frac{t^n}{n!} = \exp(2xt - t^2 + 2yt^2 - t^4) \quad (2.18)$$

şeklinde tanımlanmıştır [15]. Bu polinomların seri gösterimi

$${}^{(2)}H_n(x, y) = n! \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{H_{n-2r}(x) H_r(y)}{r! (n-2r)!}$$

ile verilmiştir [15].

### 2.4.3. Tanım

Üç değişkenli Hermite polinomu

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}^{(3,2)}H_n(x, y, z) \frac{t^n}{n!} = \exp(2xt - t^2 + 2yt^2 - t^4 + 2zt^3 - t^6) \quad (2.19)$$

ve seri gösterimi de

$${}^{(3,2)}H_n(x, y, z) = n! \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor} \frac{{}^{(2)}H_{n-3r}(x, y) H_r(z)}{r! (n-3r)!}$$

eşitliği ile verilmiştir [15].

## 2.5. İki Değişkenli Hermite Tabanlı Bernoulli ve Hermite Tabanlı Apostol-Bernoulli Polinomları

Burada iki değişkenli Hermite tabanlı polinomlar verilecektir. Bu polinomların temel özellikleri incelenecektir.

### 2.5.1. Tanım

İki değişkenli Hermite tabanlı Bernoulli polinomu

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_HB_n(x, y) \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t - 1} e^{xt+yt^2} \quad (2.20)$$

ifadesiyle verilmiştir [16].

Eş. 2.20'den

$${}_HB_n(x, y) = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} B_{n-s} H_s(x, y)$$

eşitliği kolayca elde edilir [16].

### 2.5.2. Tanım

İki değişkenli Hermite tabanlı  $\alpha$ . mertebeden Apostol-Bernoulli polinomu

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_HB_n^{(\alpha)}(x, y; \lambda) \frac{t^n}{n!} = \left( \frac{t}{\lambda e^t - 1} \right)^{\alpha} e^{xt+yt^2}, \alpha \in \mathbb{C} \quad (2.21)$$

doğurucu fonksiyonu ile verilmiştir [17].

İki değişkenli Hermite tabanlı  $\alpha$ . mertebeden Apostol-Bernoulli polinomlarının gerçeklediği rekürans bağıntılarından bazıları

$${}_HB_n^{(\alpha)}(x, y; \lambda) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} B_{n-m}^{(\alpha)}(\lambda) H_m(x, y),$$

$${}_HB_n^{(\alpha)}(x, y; \lambda) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} B_{n-m}^{(\alpha-1)}(\lambda) {}_HB_m^{(\alpha)}(x, y; \lambda)$$

şeklindedir [17]. Burada  $B_n^{(\alpha)}(\lambda)$ ,  $\alpha$ . mertebeden Apostol-Bernoulli sayılarıdır.

## 2.6. Üç Değişkenli Hermite Tabanlı Appell Polinomları

### 2.6.1. Tanım

Üç değişkenli Hermite polinomları

$$\exp(xt + yt^2 + zt^3) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x, y, z) \frac{t^n}{n!} \quad (2.22)$$

doğurucu fonksiyonu ile tanımlanmıştır [18].

### 2.6.2. Tanım

Üç değişkenli Hermite tabanlı Appell polinomları  ${}_HA_n(x, y, z)$  nin doğurucu fonksiyonu

$$G(x, y, z; t) = A(t) \exp(xt + yt^2 + zt^3) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_HA_n(x, y, z) \frac{t^n}{n!} \quad (2.23)$$

eşitliği ile ifade edilmiştir [19].

Burada

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, a_0 \neq 0 \quad (2.24)$$

şeklinde seçilmiştir [19].

$$A(t) = \frac{t}{e^t - 1}$$

şeklinde seçilerek üç değişkenli Hermite tabanlı Bernoulli polinomları  ${}_HB_n(x, y, z)$

$$\frac{t}{e^t - 1} \exp(xt + yt^2 + zt^3) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_HB_n(x, y, z) \frac{t^n}{n!}, |t| < 2\pi \quad (2.25)$$

eşitliğindeki gibi tanımlanmıştır [19].

$$A(t) = \frac{2}{e^t + 1}$$

şeklinde seçilerek üç değişkenli Hermite tabanlı Euler polinomları  ${}_HE_n(x, y, z)$

$$\frac{2}{e^t + 1} \exp(xt + yt^2 + zt^3) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_HE_n(x, y, z) \frac{t^n}{n!}, |t| < \pi \quad (2.26)$$

ve

$$A(t) = \frac{2t}{e^t + 1}$$

şeklinde seçilerek üç değişkenli Hermite tabanlı Genocchi polinomları  ${}_HG_n(x, y, z)$

$$\frac{2t}{e^t + 1} \exp(xt + yt^2 + zt^3) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_HG_n(x, y, z) \frac{t^n}{n!}, |t| < \pi \quad (2.27)$$

olarak elde edilmiştir [19, 20].

### 2.6.3. Tanım

$\alpha \in \mathbb{N}_0$ ,  $\lambda$  keyfi (reel ya da kompleks) bir parametre ve  $x, y, z \in \mathbb{R}$  olsun. Hermite tabanlı Apostol-Bernoulli polinomlarının bir genelleştirilmesi

$$\left(\frac{t}{\lambda e^t - 1}\right)^\alpha \exp(xt + yt^2 + zt^3) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_HB_n^{(\alpha)}(x, y, z; \lambda) \frac{t^n}{n!} \quad (2.28)$$

$(|t| < 2\pi, \alpha \in \mathbb{C}; \lambda = 1; |t| < |\log(\lambda)|; \alpha \in \mathbb{N}_0, \lambda \neq 1; x, y, z \in \mathbb{R}; 1^\alpha := 1)$

ile tanımlanmıştır [21].

Buradan açıktır ki

$${}_HP_{n,\lambda}^{(\alpha)}(x, y, z; 1, 1, 1) = {}_HB_n^{(\alpha)}(x, y, z; \lambda) \quad (2.29)$$

şeklindedir [21].

(2.28) ile verilen polinomların bazı özel durumları aşağıdaki gibi verilmiştir:

- $\alpha = 1$  için

${}_HB_n^{(1)}(x, y, z; \lambda) := {}_HB_n(x, y, z; \lambda)$  Hermite tabanlı Apostol-Bernoulli polinomları [21],

- $\alpha = \lambda = 1$  için

${}_HB_n(x, y, z; 1) := {}_HB_n(x, y, z)$  Hermite-Bernoulli polinomları [21],

- $\alpha = 1, y = z = 0$  için

${}_HB_n(x, 0, 0; \lambda) := B_n(x; \lambda)$  Apostol-Bernoulli polinomlarıdır [21].

Burada  $\lambda = 1$  seçildiğinde klasik Bernoulli polinomları elde edilir [13, 21-23].

Ayrıca klasik Bernoulli polinomlarında  $x = 0$  için Apostol-Bernoulli sayıları

$$B_n(0; \lambda) := B_n(\lambda)$$

elde edilir [21].

Burada  $\lambda = 1$  seçildiğinde klasik Bernoulli sayıları elde edilir [21].

## 2.6.4. Tanım

$\alpha$  ve  $\lambda (\neq -1)$  keyfi (reel ya da kompleks) parametreler ve  $x, y, z \in \mathbb{R}$  olsun. Hermite tabanlı Apostol-Euler polinomlarının bir genelleştirilmesi

$$\left(\frac{2}{\lambda e^t + 1}\right)^\alpha \exp(xt + yt^2 + zt^3) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H\mathcal{E}_n^{(\alpha)}(x, y, z; \lambda) \frac{t^n}{n!}, \quad (2.30)$$

$$(|t| < \pi, \lambda = 1; |t| < |\log(-\lambda)|, \lambda \neq 1; x, y, z \in \mathbb{R}; \alpha \in \mathbb{C}; 1^\alpha := 1)$$

ile tanımlanmıştır [21].

Buradan açıktır ki

$${}_HP_{n,\lambda}^{(\alpha)}(x, y, z; 0, -1, 1) = {}_H\mathcal{E}_n^{(\alpha)}(x, y, z; \lambda) \quad (2.31)$$

eşitliği mevcuttur [21].

(2.30) ile verilen polinomların bazı özel durumları aşağıdaki gibi verilmiştir:

- $\alpha = 1$  için

$${}_H\mathcal{E}_n^{(1)}(x, y, z; \lambda) := {}_H\mathcal{E}_n(x, y, z; \lambda) \text{ Hermite tabanlı Apostol-Euler polinomları [21],}$$

- $\alpha = \lambda = 1$  için

$${}_H\mathcal{E}_n(x, y, z; 1) = {}_HE_n(x, y, z) \text{ Hermite- Euler polinomları [21],}$$

- $\alpha = 1, y = z = 0$  için

$${}_H\mathcal{E}_n(x, 0, 0; \lambda) = \mathcal{E}_n(x; \lambda) \text{ Apostol-Euler polinomlarıdır [21].}$$

Burada  $\lambda = 1$  için klasik Euler *polinomları* elde edilir [11, 21].

Ayrıca klasik Euler polinomlarında  $x = 0$  için Apostol-Euler sayıları

$$2^n \varepsilon_n \left( \frac{1}{2}; \lambda \right) := \varepsilon_n(\lambda)$$

elde edilir [21].

Burada  $\lambda = 1$  seçildiğinde klasik Euler sayıları elde edilir [21].

#### 2.6.5. Tanım

$\alpha \in \mathbb{N}_0, \lambda$  keyfi (reel ya da kompleks) bir parametre ve  $x, y, z \in \mathbb{R}$  olsun. Hermite tabanlı Apostol-Genocchi polinomlarının bir genelleştirilmesi

$$\left( \frac{2t}{\lambda e^t + 1} \right)^\alpha \exp(xt + yt^2 + zt^3) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H\mathcal{G}_n^{(\alpha)}(x, y, z; \lambda) \frac{t^n}{n!} \quad (2.32)$$

$$(|t| < \pi, \alpha \in \mathbb{N}_0; \lambda = 1; |t| < |\log(-\lambda)|; \alpha \in \mathbb{N}_0, \lambda \neq 1; x, y, z \in \mathbb{R}; 1^\alpha := 1)$$

ile tanımlanmıştır [21].

(2.32) ile verilen polinomların bazı özel durumları aşağıdaki gibi verilmiştir:

- $\alpha = 1$  için

$${}_H\mathcal{G}_n^{(1)}(x, y, z; \lambda) := {}_H\mathcal{G}_n(x, y, z; \lambda) \text{ Hermite tabanlı Apostol-Genocchi polinomları [21],}$$

- $\alpha = \lambda = 1$  için

$${}_H\mathcal{G}_n(x, y, z; 1) = {}_HG_n(x, y, z) \text{ Hermite-Genocchi polinomları [21],}$$

- $\alpha = 1, y = z = 0$  için

$${}_H\mathcal{G}_n(x, 0, 0; \lambda) := \mathcal{G}_n(x; \lambda) \text{ Apostol-Genocchi polinomlarıdır [21, 24, 25].}$$

Burada  $\lambda = 1$  için klasik Genocchi polinomları elde edilir [21, 24, 25].

Ayrıca klasik Genocchi polinomlarında  $x = 0$  için Apostol-Bernoulli sayıları

$$\mathcal{G}_n(0; \lambda) := \mathcal{G}_n(\lambda)$$

elde edilir [21]. Burada  $\lambda = 1$  için klasik Genocchi sayıları elde edilir [21, 24, 25].

Daha sonra daha genel bir aile tanımlamak için Apostol Bernoulli, Euler ve Genocchi polinomlarının bir birleşimi olarak  $P_{n,\beta}^{(\alpha)}(x; k, a, b)$  polinomları

$$f_{a,b}^{(\alpha)}(x; t; k, \beta) := \left( \frac{2^{1-k} t^k}{\beta^b e^t - a^b} \right)^\alpha e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,\beta}^{(\alpha)}(x; k, a, b) \frac{t^n}{n!}, \quad (2.33)$$

$$(k \in \mathbb{N}_0; \alpha, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \alpha, \beta \in \mathbb{C})$$

eşitliği ile verilmiştir [26].

(2.33) tanımından yararlanarak aşağıdaki geniş aile tanımlanmıştır.

#### 2.6.6. Tanım

Genelleştirilmiş Hermite tabanlı Apostol-Bernoulli, Euler ve Genocchi polinomlarının bir birleşimi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [21]:

$$f_{a,b}^{(\alpha)}(x, y, z; t; k, \beta) := \left( \frac{2^{1-k} t^k}{\beta^b e^t - a^b} \right)^\alpha e^{xt+yt^2+zt^3} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H P_{n,\beta}^{(\alpha)}(x, y, z; k, a, b) \frac{t^n}{n!}$$

$$(k \in \mathbb{N}_0; \alpha, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \alpha, \beta \in \mathbb{C}). \quad (2.34)$$

(2.34) eşitliğinde  $\alpha = 1$  için

$$f_{a,b}^{(1)}(x; t; k, \beta) := \left( \frac{2^{1-k} t^k}{\beta^b e^t - a^b} \right) e^{xt+yt^2+zt^3} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H P_{n,\beta}(x, y, z; k, a, b) \frac{t^n}{n!} \quad (2.35)$$

$$(k \in \mathbb{N}_0; \alpha, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \beta \in \mathbb{C})$$

dir. Buradan açıktır ki

$${}_HP_{n,\lambda}(x, y, z; k, a, b) = {}_H P_{n,\lambda}^{(1)}(x, y, z; k, a, b) \quad (2.36)$$

şeklindedir [21].

(2.34) ile verilen polinomların bazı özel durumları aşağıdaki gibi verilmiştir:

- $\alpha = k = a = b = 1$  ve  $\beta = \lambda$  için

$${}_HP_{n,\lambda}(x, y, z; 1, 1, 1) = {}_H B_n(x, y, z; \lambda) \text{ Hermite tabanlı Apostol-Bernoulli polinomları [21],}$$

- $\alpha = 1, k = 0, a = -1, b = 1$  ve  $\beta = \lambda$  için

$${}_HP_{n,\lambda}(x, y, z; 0, -1, 1) = {}_H \mathcal{E}_n(x, y, z; \lambda) \text{ Hermite tabanlı Apostol-Euler polinomları [21],}$$

- $\alpha = k = b = 1, a = \frac{-1}{2}$  ve  $\beta = \frac{\lambda}{2}$  için

$${}_HP_{n,\frac{\lambda}{2}}\left(x, y, z; 1, \frac{-1}{2}, 1\right) = {}_H \mathcal{G}_n(x, y, z; \lambda) \text{ Hermite tabanlı Apostol-Genocchi polinomlarıdır [21].}$$

Açılımların varlığı için aşağıdaki durumlar gereklidir:

$\alpha, k \in \mathbb{N}_0; a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \beta \in \mathbb{C}$  olmak üzere

$$\left\{ \begin{array}{l} |t| < 2\pi; \alpha \in \mathbb{C}, k = 1 \text{ ve } \left(\frac{\beta}{a}\right)^b = 1; \quad |t| < 2\pi, \alpha \in \mathbb{N}_0, k = 2, 3, \dots \text{ ve } \left(\frac{\beta}{a}\right)^b = 1; \\ |t| < \left| b \log \left( \frac{\beta}{a} \right) \right|, \alpha \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N} \text{ ve } \left(\frac{\beta}{a}\right)^b \neq 1; x, y, z \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C}, a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; 1^\alpha = 1, \\ |t| < \pi; \alpha \in \mathbb{N}_0 \text{ ve } \left(\frac{\beta}{a}\right)^b = -1; x, y, z \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{C}, a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; 1^\alpha = 1; \\ |t| < \left| b \log \left( \frac{\beta}{a} \right) \right|, \alpha \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N} \text{ ve } \left(\frac{\beta}{a}\right)^b \neq -1; x, y, z \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C}, a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; 1^\alpha = 1 \end{array} \right.$$

burada  $w = |w|e^{i\theta}$ ,  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  ve  $\log(w) = \log(|w|) + i\theta$  dır [21]. (2.37)

### 2.6.1. Teorem

(2.34) ile verilen polinom ailesi (2.37) koşullarının tamamını sağlasın

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} {}_HP_{n-k,\beta}^{(\alpha)}(x, y, z; k, a, b) {}_HP_{k,\beta}^{(\gamma)}(u, v, w; k, a, b) \\ &= {}_HP_{n,\beta}^{(\alpha+\gamma)}(x+u, y+v, z+w; k, a, b) \end{aligned} \quad (2.38)$$

özelliğini sağlar [21].

*İspat*

(2.34) de  $\alpha$  yerine  $\alpha + \gamma$ ,  $x$  yerine  $x + u$ ,  $y$  yerine  $y + v$ ,  $z$  yerine  $z + w$  yazılırsa ve  $n$  yerine  $n - k$  alınırsa

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} {}_HP_{n,\beta}^{(\alpha+\gamma)}(x+u, y+v, z+w; k, a, b) \frac{t^n}{n!} \\ &= \left( \frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b} \right)^{\alpha+\gamma} e^{(x+u)t+(y+v)t^2+(z+w)t^3} \\ &= \left( \frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b} \right)^{\alpha} e^{xt+yt^2+zt^3} \left( \frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b} \right)^{\gamma} e^{ut+vt^2+wt^3} \\ &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} {}_HP_{n,\beta}^{(\alpha)}(x, y, z; k, a, b) \frac{t^n}{n!} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} {}_HP_{k,\beta}^{(\gamma)}(u, v, w; k, a, b) \frac{t^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} {}_HP_{n-k,\beta}^{(\alpha)}(x, y, z; k, a, b) {}_HP_{k,\beta}^{(\gamma)}(u, v, w; k, a, b) \frac{t^n}{n!} \end{aligned} \quad (2.39)$$

elde edilir.  $\frac{t^n}{n!}$  katsayıları eşitlenirse istenilen sonuca ulaşılır [21].

### 2.6.1. Sonuç

Her  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere Hermite tabanlı Apostol-Bernoulli polinomlarının bir genelleştirmesi için

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} {}_H B_{n-k}^{(\alpha)}(x, y, z; \lambda) {}_H B_k^{(\beta)}(u, v, w; \lambda) = {}_H B_n^{(\alpha+\beta)}(x+u, y+v, z+w; \lambda) \quad (2.40)$$

özellği sağlanır [21].

### 2.6.2. Sonuç

Her  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere Hermite tabanlı Apostol-Euler polinomlarının bir genelleştirmesi için

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} {}_H \mathcal{E}_{n-k}^{(\alpha)}(x, y, z; \lambda) {}_H \mathcal{E}_k^{(\beta)}(u, v, w; \lambda) = {}_H \mathcal{E}_n^{(\alpha+\beta)}(x+u, y+v, z+w; \lambda) \quad (2.41)$$

özellği sağlanır [21].

### 2.6.3. Sonuç

Her  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere Hermite tabanlı Apostol-Genocchi polinomlarının bir genelleştirmesi için

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} {}_H \mathcal{G}_{n-k}^{(\alpha)}(x, y, z; \lambda) {}_H \mathcal{G}_k^{(\beta)}(u, v, w; \lambda) = {}_H \mathcal{G}_n^{(\alpha+\beta)}(x+u, y+v, z+w; \lambda) \quad (2.42)$$

özellği sağlanır [21].

### 2.6.2. Teorem

Her  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere Hermite tabanlı Apostol-Bernoulli ve Apostol-Euler polinomlarının genelleştirme arasında

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} {}_HB_{n-k}^{(\alpha)}(x, y, z; \lambda) {}_H\mathcal{E}_k^{(\alpha)}(u, v, w; \lambda) \\
&= 2^n {}_HB_n^{(\alpha)}\left(\frac{x+u}{2}, \frac{y+v}{4}, \frac{z+w}{8}; \lambda^2\right)
\end{aligned} \tag{2.43}$$

özellği sağlanır [21].

*İspat*

(2.28) de  $x$  yerine  $\frac{x+u}{2}$ ,  $y$  yerine  $\frac{y+v}{4}$ ,  $z$  yerine  $\frac{z+w}{8}$ ,  $\lambda$  yerine  $\lambda^2$ ,  $t$  yerine  $2t$  alınıp, (2.28) ve (2.30) eşitlikleri kullanılırsa ve  $n$  yerine  $n - k$  alınırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} {}_HB_n^{(\alpha)}\left(\frac{x+u}{2}, \frac{y+v}{4}, \frac{z+w}{8}; \lambda^2\right) \frac{(2t)^n}{n!} \\
&= \left(\frac{2t}{\lambda^2 e^{2t} - 1}\right)^{\alpha} \exp\left[\left(\frac{x+u}{2}\right)2t + \left(\frac{y+v}{4}\right)(2t)^2 + \left(\frac{z+w}{8}\right)(2t)^3\right] \\
&= \left(\frac{t}{\lambda e^t - 1}\right)^{\alpha} \exp(xt + yt^2 + zt^3) \left(\frac{2}{\lambda e^t + 1}\right)^{\alpha} \exp(ut + vt^2 + wt^3) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}_HB_n^{(\alpha)}(x, y, z; \lambda) \frac{t^n}{n!}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} {}_H\mathcal{E}_k^{(\alpha)}(u, v, w; \lambda) \frac{t^k}{k!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} {}_HB_{n-k}^{(\alpha)}(x, y, z; \lambda) {}_H\mathcal{E}_k^{(\alpha)}(u, v, w; \lambda) \frac{t^n}{n!}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

elde edilir. Son olarak  $\frac{t^n}{n!}$  katsayıları eşitlenerek ispat tamamlanmış olur [21].

### 2.6.7. Tanım

Her  $k \in \mathbb{N}_0$  için

$$\mathcal{S}_k(n) = \sum_{i=0}^n i^k \quad (2.45)$$

kuvvet toplamı olarak bilinir ve doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{S}_k(n) \frac{t^k}{k!} = 1 + e^t + e^{2t} + \dots + e^{nt} = \frac{e^{(n+1)t} - 1}{e^t - 1} \quad (2.46)$$

olarak verilmiştir [21, 27].

### 2.6.8. Tanım

Keyfi gerçekte ya da kompleks  $\lambda$  için  $\mathcal{S}_k(n, \lambda)$  ifadesi tam sayı kuvvetlerinin genelleştirilmiş toplamı olarak bilinir ve doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{S}_k(n, \lambda) \frac{t^k}{k!} = \frac{\lambda e^{(n+1)t} - 1}{\lambda e^t - 1} \quad (2.47)$$

eşitliği ile verilmiştir ve  $\lambda = 1$  için  $\mathcal{S}_k(n, 1) = \mathcal{S}_k(n)$  dir [21, 27].

### 2.6.9. Tanım

Her  $k \in \mathbb{N}_0$  için

$$\mathcal{M}_k(n) = \sum_{i=0}^n (-1)^k i^k \quad (2.48)$$

kuvvet toplamı olarak bilinir ve doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{M}_k(n) \frac{t^k}{k!} = 1 - e^t + e^{2t} - \dots + (-1)^n e^{nt} = \frac{1 - (-e^t)^{(n+1)}}{e^t + 1} \quad (2.49)$$

olarak verilmiştir [21, 27].

### 2.6.10. Tanım

Keyfi gerçekte ya da kompleks  $\lambda$  için  $\mathcal{M}_k(n, \lambda)$  ifadesi tam sayı kuvvetlerinin genelleştirilmiş toplamı olarak bilinir ve doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{M}_k(n, \lambda) \frac{t^k}{k!} = \frac{1 - \lambda(-e^t)^{(n+1)}}{\lambda e^t + 1} \quad (2.50)$$

olarak verilmiştir ve  $\lambda = 1$  için  $\mathcal{M}_k(n, 1) = \mathcal{M}_k(n)$  dir [21]. Diğer bir yandan eğer  $n$  çift ise o zaman

$$\mathcal{S}_k(n, -\lambda) = \mathcal{M}_k(n, \lambda) \quad (2.51)$$

eşitliği geçerlidir [21, 27].

### 2.6.3. Teorem

$c, d, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0$  olsun ve (2.37) koşullarını sağlasın.

$t$  parametresi yerine  $ct$  ve  $dt$  kullanılarak aşağıdaki simetrik özellik

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} c^{n-r} d^{r+k} {}_H P_{n-r, \beta}^{(m)}(dx, d^2y, d^3z; k, a, b) \\ & \times \sum_{l=0}^r \binom{r}{l} \mathcal{S}_l \left( c - 1; \left( \frac{\beta}{a} \right)^b \right) {}_H P_{n-r, \beta}^{(m-1)}(c\mathcal{X}, c^2\mathcal{Y}, c^3\mathcal{Z}; k, a, b) \\ & = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} d^{n-r} c^{r+k} {}_H P_{n-r, \beta}^{(m)}(cx, c^2y, c^3z; k, a, b) \end{aligned}$$

$$\times \sum_{l=0}^r \binom{r}{l} \mathcal{S}_l \left( d-1; \left( \frac{\beta}{a} \right)^b \right) {}_H P_{r-l, \beta}^{(m-1)}(d\mathcal{X}, d^2\mathcal{Y}, d^3\mathcal{Z}; k, a, b). \quad (2.52)$$

elde edilmiştir [21].

*İspat*

$$G(t) := \frac{2^{(1-k)(2m-1)} t^{2km-k} e^{cdxt+y(cdt)^2+z(cdt)^3} (\beta^b e^{cdt} - a^b)}{(\beta^b e^{ct} - a^b)^m} \times \frac{e^{cd\mathcal{X}t+y(cdt)^2+z(cdt)^3}}{(\beta^b e^{dt} - a^b)^m} \quad (2.53)$$

olsun.  $G(t)$  fonksiyonu

$$G(t) = \frac{1}{c^{km} d^{k(m-1)}} \left( \frac{2^{1-k} c^k t^k}{\beta^b e^{ct} - a^b} \right)^m e^{cdxt+y(cdt)^2+z(cdt)^3} \frac{(\beta^b e^{cdt} - a^b)}{(\beta^b e^{dt} - a^b)} \times \left( \frac{2^{1-k} d^k t^k}{\beta^b e^{dt} - a^b} \right)^{m-1} e^{cd\mathcal{X}t+y(cdt)^2+z(cdt)^3} \quad (2.54)$$

aşağıdaki gibi yazılabilir. Burada Tanım 2.6.6 ve (2.47) eşitlikleri kullanılırsa

$$G(t) = \frac{1}{c^{km} d^{k(m-1)}} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} {}_H P_{n, \beta}^{(m)}(dx, d^2y, d^3z; k, a, b) \frac{(ct)^n}{n!} \right] \times \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{S}_l \left( c-1; \left( \frac{\beta}{a} \right)^b \right) \frac{(dt)^l}{l!} \right] \left[ \sum_{r=0}^{\infty} {}_H P_{r, \beta}^{(m-1)}(c\mathcal{X}, c^2\mathcal{Y}, c^3\mathcal{Z}; k, a, b) \frac{(dt)^r}{r!} \right] \quad (2.55)$$

elde edilir. [28] deki *Sonuç 2* kullanılırsa

$$G(t) = \frac{1}{c^{km} d^{km}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} c^{n-r} d^{r+k} {}_H P_{n-r, \beta}^{(m)}(dx, d^2y, d^3z; k, a, b) \right]$$

$$\times \sum_{l=0}^r \binom{r}{l} \mathcal{S}_l \left( c-1; \left( \frac{\beta}{a} \right)^b \right) {}_H P_{r-l, \beta}^{(m-1)}(c\mathcal{X}, c^2\mathcal{Y}, c^3\mathcal{Z}; k, a, b) \left] \frac{t^n}{n!} \right. \quad (2.56)$$

elde edilir.

Benzer bir şekilde

$$\begin{aligned} G(t) &= \frac{1}{d^{km} c^{k(m-1)}} \left( \frac{2^{1-k} d^k t^k}{\beta^b e^{ct} - a^b} \right)^m e^{cdxt+y(cdt)^2+z(cdt)^3} \frac{(\beta^b e^{cdt} - a^b)}{(\beta^b e^{dt} - a^b)} \\ &\times \left( \frac{2^{1-k} c^k t^k}{\beta^b e^{dt} - a^b} \right)^{m-1} e^{cd\mathcal{X}t+y(cdt)^2+z(cdt)^3} \\ &= \frac{1}{c^{km} d^{km}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} d^{n-r} c^{r+k} {}_H P_{n-r, \beta}^{(m)}(c\mathcal{X}, c^2\mathcal{Y}, c^3\mathcal{Z}; k, a, b) \right. \\ &\times \sum_{l=0}^r \binom{r}{l} \mathcal{S}_l \left( d-1; \left( \frac{\beta}{a} \right)^b \right) {}_H P_{r-l, \beta}^{(m-1)}(d\mathcal{X}, d^2\mathcal{Y}, d^3\mathcal{Z}; k, a, b) \left. \right] \frac{t^n}{n!} \quad (2.57) \end{aligned}$$

olup, Eş. 2.56 ve Eş. 2.57'den ispat tamamlanmış olur [21].

Burada  $k = a = b = 1$  ve  $\beta = \lambda$  alınırsa *Sonuç 2.6.4* elde edilir.

#### 2.6.4. Sonuç

Her  $c, d, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \mathbb{C}$  olmak üzere Hermite tabanlı Apostol-Bernoulli polinomları için

$$\begin{aligned} &\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} c^{n-r} d^{r+1} {}_H B_{n-r}^{(m)}(d\mathcal{X}, d^2\mathcal{Y}, d^3\mathcal{Z}, \lambda) \\ &\times \sum_{l=0}^r \binom{r}{l} \mathcal{S}_l(c-1; \lambda) {}_H B_{r-l}^{(m-1)}(c\mathcal{X}, c^2\mathcal{Y}, c^3\mathcal{Z}, \lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} d^{n-r} c^{r+1} {}_H B_{n-r}^{(m)}(cx, c^2 y, c^3 z, \lambda) \\
&\times \sum_{l=0}^r \binom{r}{l} \mathcal{S}_l(d-1; \lambda) {}_H B_{r-l}^{(m-1)}(d\mathcal{X}, d^2 \mathcal{Y}, d^3 \mathcal{Z}, \lambda)
\end{aligned} \tag{2.58}$$

simetrik eşitliği sağlanır [21].

$k+1 = -a = b = 1$ ,  $\beta = \lambda$  ve Eş. 2.51 dikkate alınarak *Sonuç* 2.6.5 elde edilir.

#### 2.6.5. Sonuç

Her  $c, d, m \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  olsun. Her bir pozitif çift tamsayı çifti  $c$  ve  $d$  için ya da her bir pozitif tek tamsayı çifti  $c$  ve  $d$  için

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} c^{n-r} d^{r+1} {}_H \mathcal{E}_{n-r}^{(m)}(dx, d^2 y, d^3 z, \lambda) \\
&\times \sum_{l=0}^r \binom{r}{l} \mathcal{M}_l(c-1; \lambda) {}_H \mathcal{E}_{r-l}^{(m-1)}(c\mathcal{X}, c^2 \mathcal{Y}, c^3 \mathcal{Z}, \lambda) \\
&= \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} d^{n-r} c^{r+1} {}_H \mathcal{E}_{n-r}^{(m)}(cx, c^2 y, c^3 z, \lambda) \\
&\times \sum_{l=0}^r \binom{r}{l} \mathcal{M}_l(d-1; \lambda) {}_H \mathcal{E}_{r-l}^{(m-1)}(d\mathcal{X}, d^2 \mathcal{Y}, d^3 \mathcal{Z}, \lambda).
\end{aligned} \tag{2.59}$$

simetrik eşitliği elde edilir [21].

$k = -2a = b = 1$  ve  $2\beta = \lambda$  kabul edilerek ve Eş. 2.51 dikkate alınarak *Sonuç* 2.6.6 elde edilir.

### 2.6.6. Sonuç

Her  $c, d, m \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  olsun. Her bir pozitif çift tamsayı çifti  $c$  ve  $d$  için ya da her bir pozitif tek tamsayı çifti  $c$  ve  $d$  için

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} c^{n-r} d^{r+1} {}_H\mathcal{G}_{n-r}^{(m)}(dx, d^2y, d^3z, \lambda) \\
& \times \sum_{l=0}^r \binom{r}{l} \mathcal{M}_l(c-1; \lambda) {}_H\mathcal{G}_{r-l}^{(m-1)}(cx, c^2y, c^3z, \lambda) \\
& = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} d^{n-r} c^{r+1} {}_H\mathcal{G}_{n-r}^{(m)}(cx, c^2y, c^3z, \lambda) \\
& \times \sum_{l=0}^r \binom{r}{l} \mathcal{M}_l(d-1; \lambda) {}_H\mathcal{G}_{r-l}^{(m-1)}(dx, d^2y, d^3z, \lambda) \tag{2.60}
\end{aligned}$$

simetrik eşitliği elde edilir [21].

## 2.7. Genelleştirilmiş Hermite Tabanlı Apostol Polinomları İçin Kapalı Formüller

Bu bölümde

$$f_{a,b}^{(\alpha)}(x, y, z; t; k, \beta) := \left( \frac{2^{1-k} t^k}{\beta^b e^t - a^b} \right)^\alpha e^{xt+yt^2+zt^3} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H P_{n,\beta}^{(\alpha)}(x, y, z; k, a, b) \frac{t^n}{n!},$$

$$f_{a,b}^{(1)}(x, y, z; t; k, \beta) := \left( \frac{2^{1-k} t^k}{\beta^b e^t - a^b} \right) e^{xt+yt^2+zt^3} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H P_{n,\beta}(x, y, z; k, a, b) \frac{t^n}{n!}$$

eşitlikleri dikkate alınacaktır [21]. Burada

$$\left[ f_{a,b}^{(1)}\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha}, \frac{z}{\alpha}; t; k, \beta\right) \right]^\alpha = f_{a,b}^{(\alpha)}(x, y, z; t; k, \beta) \tag{2.61}$$

dır [21].

### 2.7.1. Teorem

(2.37) koşulları sağlansın. Bu durumda

$$\sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \left[ {}_H P_{n-l+1, \beta}^{(\alpha)}(x, y, z; k, a, b) {}_H P_{l, \beta} \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha}, \frac{z}{\alpha}; k; a, b \right) - \alpha {}_H P_{n-l, \beta}^{(\alpha)}(x, y, z; k, a, b) {}_H P_{l+1, \beta} \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha}, \frac{z}{\alpha}; k; a, b \right) \right] = 0 \quad (2.62)$$

eşitliği elde edilmiştir [21].

*İspat*

Eş. 2.61'in her iki tarafının logaritması alındıktan sonra  $t$ 'ye göre türev alınarak,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_{a,b}^{(\alpha)}(x, y, z; t; k, \beta)}{\partial t} f_{a,b}^{(1)} \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha}, \frac{z}{\alpha}; t; k, \beta \right) \\ &= \alpha f_{a,b}^{(\alpha)}(x, y, z; t; k, \beta) \frac{\partial f_{a,b}^{(1)} \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha}, \frac{z}{\alpha}; t; k, \beta \right)}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.63)$$

elde edilmiştir. Bu eşitlikte doğurucu fonksiyonlar yerine yazılarak

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{n=1}^{\infty} n {}_H P_{n, \beta}^{(\alpha)}(x, y, z; k, a, b) \frac{t^{n-1}}{n!} \right) \left( \sum_{l=0}^{\infty} {}_H P_{l, \beta} \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha}, \frac{z}{\alpha}; k; a, b \right) \frac{t^l}{l!} \right) \\ &= \left( \alpha \sum_{n=0}^{\infty} {}_H P_{n, \beta}^{(\alpha)}(x, y, z; k, a, b) \frac{t^n}{n!} \right) \left( \sum_{l=0}^{\infty} l {}_H P_{l, \beta} \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha}, \frac{z}{\alpha}; k; a, b \right) \frac{t^{l-1}}{l!} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemelerle

$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{n=0}^{\infty} {}_H P_{n+1, \beta}^{(\alpha)}(x, y, z; k, a, b) \frac{t^n}{n!} \right) \left( \sum_{l=0}^{\infty} {}_H P_{l, \beta} \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha}, \frac{z}{\alpha}; k; a, b \right) \frac{t^l}{l!} \right) \\
&= \left( \alpha \sum_{n=0}^{\infty} {}_H P_{n, \beta}^{(\alpha)}(x, y, z; k, a, b) \frac{t^n}{n!} \right) \left( \sum_{l=0}^{\infty} {}_H P_{l+1, \beta} \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha}, \frac{z}{\alpha}; k; a, b \right) \frac{t^l}{l!} \right) \quad (2.64)
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Burada  $n$  yerine  $n - l$  alınarak

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} {}_H P_{n-l+1, \beta}^{(\alpha)}(x, y, z; k, a, b) {}_H P_{l, \beta} \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha}, \frac{z}{\alpha}; k; a, b \right) \right] \frac{t^n}{n!} \\
&= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} {}_H P_{n-l, \beta}^{(\alpha)}(x, y, z; k, a, b) {}_H P_{l+1, \beta} \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha}, \frac{z}{\alpha}; k; a, b \right) \right] \frac{t^n}{n!} \quad (2.65)
\end{aligned}$$

ispat tamamlanmıştır [21].

### 2.7.1. Sonuç

$k = a = b = 1$  ve  $\beta = \lambda$  olsun. Her  $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \mathbb{C}$  olmak üzere genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli polinomları için

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \left[ {}_H B_{n-k+1}^{(\alpha)}(x, y, z; \lambda) {}_H B_k \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha}, \frac{z}{\alpha}; \lambda \right) \right. \\
& \left. - \alpha {}_H B_{n-k}^{(\alpha)}(x, y, z; \lambda) {}_H B_{k+1} \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha}, \frac{z}{\alpha}; \lambda \right) \right] = 0 \quad (2.66)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilmiştir [21].  $\lambda = 1$  özel durumu [29] da elde edilmiştir.

### 2.7.2. Sonuç

$k + 1 = -a = b = 1$  ve  $\beta = \lambda$  olsun. Her  $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \mathbb{C}$  olmak üzere genelleştirilmiş Apostol-Euler polinomları için

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \left[ {}_H\mathcal{E}_{n-k+1}^{(\alpha)}(x, y, z; \lambda) {}_H\mathcal{E}_k\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha}, \frac{z}{\alpha}; \lambda\right) \right. \\
& \left. - \alpha {}_H\mathcal{E}_{n-k}^{(\alpha)}(x, y, z; \lambda) {}_H\mathcal{E}_{k+1}\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha}, \frac{z}{\alpha}; \lambda\right) \right] = 0
\end{aligned} \tag{2.67}$$

eşitliği elde edilmiştir [21].  $\lambda = 1$  özel durumu [29] da elde edilmiştir.

### 2.7.3. Sonuç

$k = -2a = b = 1$  ve  $2\beta = \lambda$  olsun. Her  $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \mathbb{C}$  olmak üzere genelleştirilmiş Apostol-Genocchi polinomları için

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \left[ {}_H\mathcal{G}_{n-k+1}^{(\alpha)}(x, y, z; \lambda) {}_H\mathcal{G}_k\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha}, \frac{z}{\alpha}; \lambda\right) \right. \\
& \left. - \alpha {}_H\mathcal{G}_{n-k}^{(\alpha)}(x, y, z; \lambda) {}_H\mathcal{G}_{k+1}\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha}, \frac{z}{\alpha}; \lambda\right) \right] = 0
\end{aligned} \tag{2.68}$$

eşitliği elde edilmiştir [21].  $\lambda = 0$  özel durumu [29] da elde edilmiştir.

### 2.7.2. Teorem

(2.37) özellikleri sağlansın. Hermite tabanlı Apostol polinomları ile üç değişkenli Hermite polinomları arasında

$$\begin{aligned}
& {}_HP_{n+m,\beta}^{(\alpha)}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}; k, a, b) \\
& = \sum_{r,l=0}^{n,m} \binom{n}{r} \binom{m}{l} H_{r+l}^{(3)}(\mathcal{X} - x, \mathcal{Y} - y, \mathcal{Z} - z) {}_HP_{n+m-r-l}^{(\alpha)}(x, y, z; k, a, b).
\end{aligned} \tag{2.69}$$

özelligi sağlanır [21].  $\lambda = 1$  özel durumu [29] da elde edilmiştir.

*İspat*

Eş. 2.34 kullanılarak

$$\begin{aligned} \left( \frac{2^{1-k}(t+w)^k}{\beta^b e^{(t+w)} - a^b} \right) e^{x(t+w)+y(t+w)^2+z(t+w)^3} &= \sum_{n=0}^{\infty} {}_H P_{n,\beta}^{(\alpha)}(x, y, z; k, a, b) \frac{(t+w)^n}{n!} \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} {}_H P_{n+m,\beta}^{(\alpha)}(x, y, z; k, a, b) \frac{t^n}{n!} \frac{w^m}{m!} \end{aligned} \quad (2.70)$$

eşitliği yazılmıştır. Buradan

$$\begin{aligned} \left( \frac{2^{1-k}(t+w)^k}{\beta^b e^{(t+w)} - a^b} \right) &= \left( e^{-x(t+w)-y(t+w)^2-z(t+w)^3} \right) \\ &\times \sum_{n,m=0}^{\infty} {}_H P_{n+m,\beta}^{(\alpha)}(x, y, z; k, a, b) \frac{t^n}{n!} \frac{w^m}{m!} \end{aligned} \quad (2.71)$$

elde edilmiştir.

Her iki taraf  $(e^{x(t+w)+y(t+w)^2+z(t+w)^3})$  ile çarpılarak,

$$\begin{aligned} \left( \frac{2^{1-k}(t+w)^k}{\beta^b e^{(t+w)} - a^b} \right) (e^{x(t+w)+y(t+w)^2+z(t+w)^3}) \\ = (e^{(X-x)(t+w)+(Y-y)(t+w)^2+(Z-z)(t+w)^3}) \sum_{n,m=0}^{\infty} {}_H P_{n+m,\beta}^{(\alpha)}(x, y, z; k, a, b) \frac{t^n}{n!} \frac{w^m}{m!} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilmiştir.

Eşitliğin sağ tarafına Eş. 2.22 ve Eş. 2.71 dikkate alınarak,  $n$  yerine  $n - r$  ve  $m$  yerine  $m - l$  yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{n,m=0}^{\infty} {}_H P_{n+m,\beta}^{(\alpha)}(X, Y, Z; k, a, b) \frac{t^n}{n!} \frac{w^m}{m!} \\
&= \left( \sum_{n,m=0}^{\infty} {}_H P_{n+m,\beta}^{(\alpha)}(x, y, z; k, a, b) \frac{t^n}{n!} \frac{w^m}{m!} \right) \left( \sum_{r,l=0}^{\infty} H_{r+l}^{(3)}(X-x, Y-y, Z-z) \frac{t^r}{r!} \frac{w^l}{l!} \right) \\
&= \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{r,l=0}^{n,m} \binom{n}{r} \binom{m}{l} H_{r+l}^{(3)}(X-x, Y-y, Z-z) \\
&\quad \times {}_H P_{n+m-r-l}^{(\alpha)}(x, y, z; k, a, b) \frac{t^n}{n!} \frac{w^m}{m!} \tag{2.72}
\end{aligned}$$

olup,  $\frac{t^n}{n!}, \frac{w^m}{m!}$  'in katsayılarının eşitlenmesiyle ispat tamamlanmıştır [21].

#### 2.7.4. Sonuç

$k = a = b = 1$  ve  $\beta = \lambda$  olsun. Her  $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \mathbb{C}$  olmak üzere genelleştirilmiş Hermite tabanlı Apostol-Bernoulli polinomları ve üç değişkenli Hermite polinomları arasında

$${}_H B_{n+m}^{(\alpha)}(X, Y, Z; \lambda) = \sum_{k,l=0}^{n,m} \binom{n}{k} \binom{m}{l} H_{k+l}^{(3)}(X-x, Y-y, Z-z) {}_H B_{n+m-k-l}^{(\alpha)}(x, y, z; \lambda)$$

özellği vardır [21].  $\lambda = 1$  özel durumu [29] da elde edilmiştir.

#### 2.7.5. Sonuç

$k+1 = -a = b = 1$  ve  $\beta = \lambda$  olsun. Her  $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \mathbb{C}$  olmak üzere genelleştirilmiş Hermite tabanlı Apostol-Euler polinomları ve üç değişkenli Hermite polinomları arasında

$${}_H \mathcal{E}_{n+m}^{(\alpha)}(X, Y, Z; \lambda) = \sum_{k,l=0}^{n,m} \binom{n}{k} \binom{m}{l} H_{k+l}^{(3)}(X-x, Y-y, Z-z) {}_H \mathcal{E}_{n+m-k-l}^{(\alpha)}(x, y, z; \lambda)$$

özelliği bulunmaktadır [21].  $\lambda = 1$  özel durumu [29] da elde edilmiştir.

#### 2.7.6. Sonuç

$k = -2a = b = 1$  ve  $2\beta = \lambda$  olsun. Her  $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \mathbb{C}$  olmak üzere genelleştirilmiş Hermite tabanlı Apostol-Genocchi polinomları ve üç değişkenli Hermite polinomları arasında

$${}_H\mathcal{G}_{n+m}^{(\alpha)}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}; \lambda) = \sum_{k,l=0}^{n,m} \binom{n}{k} \binom{m}{l} H_{k+l}^{(3)}(\mathcal{X} - x, \mathcal{Y} - y, \mathcal{Z} - z) {}_H\mathcal{G}_{n+m-k-l}^{(\alpha)}(x, y, z; \lambda)$$

özelliği gerçekleşir [21].  $\lambda = 1$  özel durumu [29] da elde edilmiştir.

Yukarıdaki bilgiler ışığında yeni bir polinom ailesi olan iki kez yinelenen üç değişkenli Hermite tabanlı Appell polinomlarını ve bu polinom sınıfı için doğurucu fonksiyonu, rekürans bağıntılarını, arttıran ve azaltan operatörleri, kısmi-integro-arttıran, kısmi-integro-azaltan operatörlerini ve son olarak da diferensiyel denklemleri elde edilecektir. Ve ayrıca bu polinom ailesi için özel durumlara örnekler verilerek, elde edilen yeni alt aileler için özellikler elde edilecektir.

### 3. İKİ KEZ YİNELLENEN ÜÇ DEĞİŞKENLİ HERMITE TABANLI APPELL POLİNOMLARININ BAZI ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde ilk olarak iki kez yinelenen Appell polinomlarının tanımından bahsedilecektir [30]. Daha sonra ise iki kez yinelenen Hermite tabanlı Appell polinomları doğurucu fonksiyon ile tanımlanacaktır. Ardından bu polinom ailesinin rekürans bağıntısı, determinant gösterimi, arttıran ve azalan operatörleri, diferensiyel denklemi verilecektir. Bu bölümde verilen iki kez yinelenen üç değişkenli Hermite tabanlı Appell polinomları ve bazı özellikleri Güngören ve Çekim [31] tarafından sunulmuştur. Bu tanımlanan polinom ailesinde  $a_2(t) = 1$  durumunda bazı özellikler [20] ile verilen çalışmada incelenmiştir.

#### 3.1. İki Kez Yinelenen Appell Polinom Ailesinin Tanımı ve Özellikleri

İki kez yinelenen Appell polinomlarının doğurucu fonksiyonu

$$a_2(t)a_1(t)e^{xt} = \sum_{k=0}^{\infty} R_k^{[2]}(x) \frac{t^k}{k!} \quad (3.1)$$

olup, burada

$$a_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{t^k}{k!}, \alpha_0 \neq 0 \quad (3.2)$$

ve

$$a_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \frac{t^k}{k!}, \beta_0 \neq 0 \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanmıştır [30].

Benzer bir düşünce ile üç değişkenli Hermite Appell polinom ailesinin genel bir ailesini tanımlamak için ilk önce üç değişkenli Hermite polinomlarının tanımı verilecektir.

## 3.1.1. Tanım

Üç değişkenli Hermite polinomlarının doğurucu fonksiyonu

$$e^{xt+yt^2+zt^3} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x, y, z) \frac{t^n}{n!} \quad (3.4)$$

şeklinde [19]. Buradan bu polinom ailesinin açık gösterimini bulmak için

$e^{xt}$ ,  $e^{yt^2}$ ,  $e^{zt^3}$ , ün Taylor seri açılımları kullanılıp, sırasıyla  $n$  yerine  $n - 2m$ ,

$n$  yerine  $n - 3r$  alınırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x, y, z) \frac{t^n}{n!} &= e^{xt+yt^2+zt^3} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{n!} \right) \left( \sum_{m=0}^{\infty} y^m \frac{t^{2m}}{m!} \right) \left( \sum_{r=0}^{\infty} z^r \frac{t^{3r}}{r!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{x^{n-2m} y^m t^{n-2m} t^{2m}}{(n-2m)! m!} \left( \sum_{r=0}^{\infty} z^r \frac{t^{3r}}{r!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{x^{n-2m} y^m t^n}{(n-2m)! m! n!} \left( \sum_{r=0}^{\infty} z^r \frac{t^{3r}}{r!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-3r}{2} \rfloor} \frac{x^{n-3r-2m} y^m t^{n-3r} (n-3r)! z^r t^{3r}}{(n-3r-2m)! n! (n-3r)! r!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-3r}{2} \rfloor} \frac{x^{n-3r-2m} y^m t^{n-3r} (n-3r)! z^r t^{3r} (2m)! n! (3r)!}{(n-3r-2m)! n! (n-3r)! r! (2m)! n! (3r)!} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x, y, z) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor} \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{n-3r}{2} \right\rfloor} \binom{n-3r}{2m} \binom{n}{3r} x^{n-3r-2m} y^m z^r \frac{(2m)!}{m!} \frac{(3r)!}{r!} \frac{t^n}{n!} \quad (3.5)$$

olup,  $\frac{t^n}{n!}$  in katsayılarının eşitlenmesiyle üç değişkenli Hermite polinomlarının açık gösterimi

$$H_n(x, y, z) = \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor} \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{n-3r}{2} \right\rfloor} \binom{n-3r}{2m} \binom{n}{3r} x^{n-3r-2m} y^m z^r \frac{(2m)!}{m!} \frac{(3r)!}{r!} \quad (3.6)$$

şeklinde elde edilmiş olur.

### 3.1.2. Tanım

Üç değişkenli Hermite tabanlı Appell polinomlarının doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_H A_n(x, y, z) \frac{t^n}{n!} = A(t) e^{xt+yt^2+zt^3}$$

şeklindedir [19].

Burada

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}, a_0 \neq 0$$

dır. Buradan bu polinom ailesinin açık gösterimini bulmak için (3.6) kullanılarak ve eşitliğin sağ tarafında  $n$  yerine  $n - k$  yazılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_H A_n(x, y, z) \frac{t^n}{n!} = A(t) e^{xt+yt^2+zt^3}$$

$$= \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} H_k(x, y, z) \frac{t^k}{k!} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_{n-k} H_k(x, y, z) \frac{t^{n-k} t^k}{(n-k)! k! n!} n! \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_{n-k} H_k(x, y, z) \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_{n-k} \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor} \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{k-3r}{2} \right\rfloor} \binom{k-3r}{2m} \binom{k}{3r} x^{k-3r-2m} y^m z^r \frac{(2m)!}{m!} \frac{(3r)!}{r!} \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

olup, burada  $\frac{t^n}{n!}$ ' in katsayılarının eşitlenmesiyle

$$\begin{aligned}
&{}_H A_n(x, y, z) \\
&= \sum_{k=0}^n \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor} \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{k-3r}{2} \right\rfloor} \binom{n}{k} \binom{k-3r}{2m} \binom{k}{3r} a_{n-k} x^{k-3r-2m} y^m z^r \frac{(2m)!}{m!} \frac{(3r)!}{r!}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilir. Bu polinomlar [29] da da çalışılmıştır.

Bu polinomların daha genel hali olan  $n$  değişkenli Hermite tabanlı Milne-Thomson polinomları [32] de tanımlanmış ve özellikleri bulunmuştur.

Şimdi iki kez yinelenen üç değişkenli Hermite tabanlı Appell polinomları tanıtılacaktır.

### 3.2. İki Kez Yinelenen Üç Değişkenli Hermite Tabanlı Appell Polinomları

Bu kısımda iki kez yinelenen üç değişkenli Hermite tabanlı Appell polinomlarının bir dizisini  ${}_H A_n^{[2]}(x, y, z) := {}_H A_n^{[2]}$  şeklinde gösterilecektir.

$Q_n(x, y, z)$  Hermite tabanlı Appell polinomlarının bir dizisi

$$Q_n(x, y, z) = \sum_{k=0}^n \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor} \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{k-3r}{2} \right\rfloor} \binom{n}{k} \binom{k-3r}{2m} \binom{k}{3r} q_{n-k} x^{k-3r-2m} y^m z^r \frac{(2m)!}{m!} \frac{(3r)!}{r!} \tag{3.8}$$

olarak verilsin. Burada

$$a_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k \frac{t^k}{k!}, \quad q_0 \neq 0 \quad (3.9)$$

dir.

### 3.2.1. Tanım

$Q_k(x, y, z)$ , (3.7) de tanımlanan üç değişkenli Hermite tabanlı Appell polinomlarının bir dizisi ve  $P_n(x, y, z)$  ise  $a(n, k)$  katsayılı

$$P_n(x, y, z) = \sum_{k=0}^n \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor} \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{k-3r}{2} \right\rfloor} a(n, k) \binom{k-3r}{2m} \binom{k}{3r} x^{k-3r-2m} y^m z^r \frac{(2m)!}{m!} \frac{(3r)!}{r!} \quad (3.10)$$

ile verilen herhangi bir polinom olsun. Eğer

$$D_{xH} A_n^{[2]}(x, y, z) = n {}_H A_{n-1}^{[2]}(x, y, z), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

özellliği sağlanıyorsa

$${}_H A_n^{[2]}(x, y, z) = \sum_{k=0}^n a(n, k) Q_k(x, y, z), \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.12)$$

ile verilen aile iki kez yinelenen üç değişkenli Hermite Appell polinomları olarak adlandırılır [31].

### 3.2.1. Teorem

Aşağıdaki ifadeler birbirine eşdeğerdir;

- (i) İki kez yinelenen üç değişkenli Hermite tabanlı Appell polinomlarının bir dizisi  $\{{}_H A_n^{[2]}(x, y, z)\}$ 'dir.

(ii)  $\{P_n(x, y, z)\}_{n \in \mathbb{N}}$  Hermite tabanlı Appell polinomlarının bir dizisidir ve

$$a_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{k!} \quad (3.13)$$

olmak üzere

$$a(n, k) = \binom{n}{k} a_{n-k}$$

dir.

(iii) İki kez yinelenen üç değişkenli Hermite tabanlı Appell polinomlarının  $\{ {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \}$  açık gösterimi

$${}_H A_n^{[2]}(x, y, z)$$

$$= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{l}{3} \right\rfloor} \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{l-3r}{2} \right\rfloor} \binom{n}{k} \binom{k}{l} \binom{l-3r}{2m} \binom{l}{3r} \\ \times (a_{n-k} q_{k-l} x^{l-3r-2m} y^m z^r) \frac{(2m)!}{m!} \frac{(3r)!}{r!} \quad (3.14)$$

dir.

(iv)  $\{ {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin doğurucu fonksiyonu ise

$$a_2(t) a_1(t) e^{xt+yt^2+zt^3} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \frac{t^n}{n!} \quad (3.15)$$

dir [31].

*İspat*

(i)  $\Leftrightarrow$  (ii) İki kez yinelenen üç değişkenli Hermite tabanlı Appell polinomlarının bir dizisi

$\{ {}_H A_n^{[2]} \}_{n \in \mathbb{N}}$  olmak üzere (3.11) den dolayı

$$n {}_H A_{n-1}^{[2]} = \sum_{k=1}^n a(n, k) k Q_{k-1}(x, y, z) = \sum_{k=0}^{n-1} a(n, k+1) (k+1) Q_k(x, y, z) \quad (3.16)$$

dir. Böylece

$${}_H A_{n-1}^{[2]}(x, y, z) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a(n, k+1) (k+1) Q_k(x, y, z) \quad (3.17)$$

ya da

$${}_H A_n^{[2]}(x, y, z) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a(n+1, k+1) (k+1) Q_k(x, y, z) \quad (3.18)$$

eşitlikleri elde edilir.

Eş. 3.12 ve Eş. 3.18 'i karşılaştırarak

$$a(n, k) = \frac{k+1}{n+1} a(n+1, k+1)$$

olarak elde edilir.

Son denklem  $k$  kez yineleyerek

$$\begin{aligned} a(n+1, k+1) &= \frac{(n+1)n \dots (n-k+1)}{(k+1)k \dots 1} a(n-k, 0) \\ &= \frac{(n+1)n \dots (n-k+1)(n-k)!}{(k+1)k \dots 1(n-k)!} a(n-k, 0) \\ &= \binom{n+1}{k+1} a(n-k, 0) \end{aligned} \quad (3.19)$$

olarak bulunur.

Buradan da  $a(n, k)$  ifadesi

$$a(n, k) = \binom{n}{k} a_{n-k} \quad (3.20)$$

dır. Eş. 3.18 ifadesi Eş 3.10'da yerine yazılırsa

$$P_n(x, y, z) = \sum_{k=0}^n \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor} \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{k-3r}{2} \right\rfloor} \binom{n}{k} a_{n-k} \binom{k-3r}{2m} \binom{k}{3r} x^{k-3r-2m} y^m z^r \frac{(2m)!}{m!} \frac{(3r)!}{r!} \quad (3.21)$$

eşitliği elde edilir.

Burada  $(ii) \Leftrightarrow (i)$  özelliğinin varlığı açıktır.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$  Hermite tabanlı Appell polinomları için

$${}_H A_n^{[2]}(x, y, z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_{n-k} Q_k(x, y, z), (n \in \mathbb{N}_0) \quad (3.22)$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} & Q_k(x, y, z) \\ &= \sum_{l=0}^k \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{l}{3} \right\rfloor} \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{l-3r}{2} \right\rfloor} \binom{k}{l} \binom{l-3r}{2m} \binom{l}{3r} a_{n-k} q_{k-l} x^{l-3r-2m} y^m z^r \frac{(2m)!}{m!} \frac{(3r)!}{r!} \end{aligned} \quad (3.23)$$

şeklindedir.

İki kez yinelenen üç değişkenli Hermite tabanlı Appell polinomlarının açık gösterim

$$\begin{aligned}
 {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_{n-k} \sum_{l=0}^k \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{l}{3} \rfloor} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{l-3r}{2} \rfloor} \binom{k}{l} \binom{l-3r}{2m} \binom{l}{3r} a_{n-k} q_{k-l} x^{l-3r-2m} y^m z^r \frac{(2m)!}{m!} \frac{(3r)!}{r!} \\
 &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{l}{3} \rfloor} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{l-3r}{2} \rfloor} \binom{n}{k} \binom{k}{l} \binom{l-3r}{2m} \binom{l}{3r} a_{n-k} q_{k-l} x^{l-3r-2m} y^m z^r \frac{(2m)!}{m!} \frac{(3r)!}{r!} \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Burada (iii)  $\Leftrightarrow$  (ii) olduğu açıktır. Son olarak (iii)  $\Leftrightarrow$  (iv)  ${}_H A_n^{[2]}$  yerine yazılıp seriye Cauchy çarpımı uygulanırsa ve (3.13) ve Tanım 3.1.2 kullanılırsa istenilen elde edilir. Ve teoremin ispatı bu şekilde tamamlanmış olur.

(3.15) te  $a_2(t) = a_1(t) = a(t)$  alınırsa ve [29] da (6.1) eşitliğinde  $\alpha = 2$  alınırsa aileler birbirleriyle örtüşür.

### 3.2.2. Teorem

İki kez yinelenen üç değişkenli Hermite tabanlı Appell polinomları için determinant gösterimi

$${}_H A_n^{[2]}(x, y, z) = \frac{(-1)^n}{(\gamma_0)^{n+1}} \times \begin{vmatrix} Q_0(x, y, z) & Q_1(x, y, z) & \dots & Q_{n-1}(x, y, z) & Q_n(x, y, z) \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_{n-1} & \gamma_n \\ 0 & \gamma_0 & \dots & \binom{n-1}{1} \gamma_{n-2} & \binom{n}{1} \gamma_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & \binom{n-1}{2} \gamma_{n-3} & \binom{n}{2} \gamma_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_0 & \binom{n}{n-1} \gamma_1 \end{vmatrix} \quad (3.25)$$

dir [31].

Burada  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \dots, \gamma_n$  katsayıları  $\frac{1}{a_2(t)}$  fonksiyonun Maclaurin serisinin katsayıları ve

$$Q_n(x, y, z) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \gamma_j {}_H A_{n-j}^{[2]}(x, y, z) \quad (3.26)$$

şeklindedir [31].

*İspat*

$\frac{1}{a_2(t)}$  fonksiyonun seri gösterimi

$$[a_2(t)]^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j \frac{t^j}{j!} \quad (3.27)$$

olsun.

Buradan (3.15) kullanılırsa

$$a_1(t) e^{xt+yt^2+zt^3} = \left( \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j \frac{t^j}{j!} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \frac{t^n}{n!} \right) \quad (3.28)$$

elde edilir. Böylece Tanım 3.1.2. den

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x, y, z) \frac{t^n}{n!} = \left( \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j \frac{t^j}{j!} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \frac{t^n}{n!} \right) \quad (3.29)$$

olarak bulunur. Eşitliğin sağ tarafında  $n$  yerine  $n - j$  alınarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x, y, z) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \gamma_j {}_H A_{n-j}^{[2]}(x, y, z) \frac{t^n}{n!} \quad (3.30)$$

olup  $\frac{t^n}{n!}$  katsayıları eşitlenirse

$$Q_n(x, y, z) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \gamma_{jH} A_{n-j}^{[2]}(x, y, z), \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

elde edilir. Sırasıyla  $n = 0, n = 1, n = 2, \dots$  yazılırsa

$$Q_0(x, y, z) = \gamma_{0H} A_0^{[2]}(x, y, z)$$

$$Q_1(x, y, z) = \gamma_{0H} A_1^{[2]}(x, y, z) + \gamma_{1H} A_0^{[2]}(x, y, z)$$

$$Q_2(x, y, z) = \gamma_{0H} A_2^{[2]}(x, y, z) + \binom{2}{1} \gamma_{1H} A_1^{[2]}(x, y, z) + \gamma_{2H} A_0^{[2]}(x, y, z)$$

$\vdots$

$$Q_n(x, y, z) = \gamma_{0H} A_n^{[2]}(x, y, z) + \binom{n}{1} \gamma_{1H} A_{n-1}^{[2]}(x, y, z) + \dots + \gamma_{nH} A_0^{[2]}(x, y, z) \quad (3.31)$$

olup, bu eşitliklere Cramer kuralı uygulanırsa

$${}_H A_n^{[2]}(x, y, z) = \frac{\begin{vmatrix} \gamma_0 & 0 & \dots & 0 & Q_0(x, y, z) \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \dots & 0 & Q_1(x, y, z) \\ \gamma_2 & \binom{2}{1} \gamma_1 & \dots & 0 & Q_2(x, y, z) \\ \gamma_3 & \binom{3}{2} \gamma_2 & \dots & 0 & Q_3(x, y, z) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \binom{n-1}{1} \gamma_{n-2} & \dots & \gamma_0 & Q_{n-1}(x, y, z) \\ \gamma_n & \binom{n}{1} \gamma_{n-1} & \dots & \binom{n}{n-1} \gamma_1 & Q_n(x, y, z) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \gamma_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \dots & 0 & 0 \\ \gamma_2 & \binom{2}{1} \gamma_1 & \dots & 0 & 0 \\ \gamma_3 & \binom{3}{2} \gamma_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \binom{n-1}{1} \gamma_{n-2} & \dots & \gamma_0 & 0 \\ \gamma_n & \binom{n}{1} \gamma_{n-1} & \dots & \binom{n}{n-1} \gamma_1 & \gamma_0 \end{vmatrix}} \quad (3.32)$$

ile verilen Eş. 3.32 elde edilir. Daha sonra da transpozu alınırsa

$${}_H A_n^{[2]}(x, y, z) = \frac{1}{(\gamma_0)^{n+1}} \times \begin{vmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-1} & \gamma_n \\ 0 & \gamma_0 & \cdots & \binom{n-1}{1} \gamma_{n-2} & \binom{n}{1} \gamma_{n-1} \\ 0 & \binom{2}{1} \gamma_1 & \cdots & \binom{n-1}{2} \gamma_{n-3} & \binom{n}{2} \gamma_{n-2} \\ 0 & \binom{3}{2} \gamma_2 & \cdots & \binom{n-1}{3} \gamma_{n-4} & \binom{n}{3} \gamma_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_0 & \binom{n}{n-1} \gamma_1 \\ Q_0(x, y, z) & Q_1(x, y, z) & \cdots & Q_{n-1}(x, y, z) & Q_n(x, y, z) \end{vmatrix} \quad (3.33)$$

olup, elementer satır işlemleri de uygulanırsa

$${}_H A_n^{[2]}(x, y, z) = \frac{(-1)^n}{(\gamma_0)^{n+1}} \times \begin{vmatrix} Q_0(x, y, z) & Q_1(x, y, z) & \cdots & Q_{n-1}(x, y, z) & Q_n(x, y, z) \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-1} & \gamma_n \\ 0 & \gamma_0 & \cdots & \binom{n-1}{1} \gamma_{n-2} & \binom{n}{1} \gamma_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \binom{n-1}{2} \gamma_{n-3} & \binom{n}{2} \gamma_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_0 & \binom{n}{n-1} \gamma_1 \end{vmatrix} \quad (3.34)$$

ile verilen Eş. 3.34 elde edilir ve bu şekilde ispat tamamlanmış olur.

### 3.2.3. Teorem

İki kez yinelenen üç değişkenli Hermite tabanlı Appell polinomlarının rekürans bağıntısı

$$\begin{aligned} {}_H A_{n+1}^{[2]}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \theta_k {}_H A_{n-k}^{[2]}(x, y, z) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \rho_k {}_H A_{n-k}^{[2]}(x, y, z) + x A_n^{[2]}(x, y, z) \\ &+ 2y n {}_H A_{n-1}^{[2]}(x, y, z) + 3z n(n-1) {}_H A_{n-2}^{[2]}(x, y, z), n \geq 2 \end{aligned} \quad (3.35)$$

olup, burada

$$\frac{a_1'(t)}{a_1(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k \frac{t^k}{k!} \quad ve \quad \frac{a_2'(t)}{a_2(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k \frac{t^k}{k!} \quad (3.36)$$

dir [31].

*İspat*

Eş. 3.15 denkleminde her iki tarafın  $t$  değişkenine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} {}_H A_{n+1}^{[2]}(x, y, z) \frac{t^n}{n!} &= \frac{a_1'(t)}{a_1(t)} a_1(t) a_2(t) e^{xt+yt^2+zt^3} \\ &+ \frac{a_2'(t)}{a_2(t)} a_2(t) a_1(t) e^{xt+yt^2+zt^3} + x[a_1(t) a_2(t) e^{xt+yt^2+zt^3}] \\ &+ 2yt[a_1(t) a_2(t) e^{xt+yt^2+zt^3}] + 3zt^2[a_1(t) a_2(t) e^{xt+yt^2+zt^3}] \end{aligned}$$

elde edilir.

Eş. 3.10 ve Eş. 3.36'daki eşitlikler yukarıda elde edilen denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} {}_H A_{n+1}^{[2]}(x, y, z) \frac{t^n}{n!} &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k \frac{t^k}{k!} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \frac{t^n}{n!} \right) \\ &+ \left( \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k \frac{t^k}{k!} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \frac{t^n}{n!} \right) + x \left( \sum_{n=0}^{\infty} {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \frac{t^n}{n!} \right) \\ &+ 2y \left( \sum_{n=0}^{\infty} {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \frac{t^{n+1}}{n!} \right) + 3z \left( \sum_{n=0}^{\infty} {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \frac{t^{n+2}}{n!} \right) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Elde edilen toplamlara Cauchy çarpımı uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} {}_H A_{n+1}^{[2]}(x, y, z) \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \theta_k {}_H A_{n-k}^{[2]}(x, y, z) \frac{t^n}{n!} \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \rho_k {}_H A_{n-k}^{[2]}(x, y, z) \frac{t^n}{n!} + x \left( \sum_{n=0}^{\infty} {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \frac{t^n}{n!} \right) \\
&+ 2yn \left( \sum_{n=0}^{\infty} {}_H A_{n-1}^{[2]}(x, y, z) \frac{t^n}{n!} \right) + 3zn(n-1) \left( \sum_{n=0}^{\infty} {}_H A_{n-2}^{[2]}(x, y, z) \frac{t^n}{n!} \right)
\end{aligned}$$

olup, burada da  $\frac{t^n}{n!}$ , katsayıları eşitlenirse

$$\begin{aligned}
{}_H A_{n+1}^{[2]}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \theta_k {}_H A_{n-k}^{[2]}(x, y, z) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \rho_k {}_H A_{n-k}^{[2]}(x, y, z) + x \left( {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \right) \\
&+ 2yn \left( {}_H A_{n-1}^{[2]}(x, y, z) \right) + 3zn(n-1) \left( {}_H A_{n-2}^{[2]}(x, y, z) \right) \tag{3.37}
\end{aligned}$$

elde edilerek ispat tamamlanır. Burada  $n = 0$  ve  $n = 1$  durumundaki terimler açılarak birbirlerine eşit oldukları gösterilmiştir.

### 3.2.4. Teorem

İki kez yinelenen üç değişkenli Hermite tabanlı Appell polinomları için arttıran operatör, azalan operatör, kısmi-integro-arttıran ve kısmi-integro-azalan operatörler

$${}_x L_n^- := \frac{1}{n} D_x, \tag{3.38}$$

$${}_y L_n^- := \frac{1}{n} D_x^{-1} D_y, \tag{3.39}$$

$${}_z L_n^- := \frac{1}{n} D_x^{-2} D_z, \tag{3.40}$$

$${}_xL_n^+ := x + 2yD_x + 3zD_x^2 + \sum_{k=0}^n \frac{\theta_k}{k!} D_x^k + \sum_{k=0}^n \frac{\rho_k}{k!} D_x^k, \quad (3.41)$$

$${}_yL_n^+ := x + 2yD_x^{-1}D_y + 3zD_x^{-2}D_y^2 + \sum_{k=0}^n \frac{\theta_k}{k!} D_x^{-k}D_y^k + \sum_{k=0}^n \frac{\rho_k}{k!} D_x^{-k}D_y^k, \quad (3.42)$$

$${}_zL_n^+ := x + 2yD_x^{-2}D_z + 3zD_x^{-4}D_z^2 + \sum_{k=0}^n \frac{\theta_k}{k!} D_x^{-2k}D_z^k + \sum_{k=0}^n \frac{\rho_k}{k!} D_x^{-2k}D_z^k \quad (3.43)$$

olarak verilir.

Burada

$$D_x := \frac{\partial}{\partial x}, D_y := \frac{\partial}{\partial y}, D_z := \frac{\partial}{\partial z} \text{ ve } D_x^{-1} \text{ ise } D_x \text{'in tersidir [31].}$$

*İspat*

$$\frac{\partial}{\partial x} \{ {}_HA_n^{[2]}(x, y, z) \} = n {}_HA_{n-1}^{[2]}(x, y, z) \quad (3.44)$$

özellği kullanılırsa buradan açıktır ki, azalan operatör

$${}_xL_n^- := \frac{1}{n} D_x \quad (3.45)$$

olup,

$${}_xL_n^- \{ {}_HA_n^{[2]}(x, y, z) \} = {}_HA_{n-1}^{[2]}(x, y, z)$$

dir. Buradan doğurucu fonksiyonun  $y$  değişkenine göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial y} \{ {}_HA_n^{[2]}(x, y, z) \} = n(n-1) {}_HA_{n-2}^{[2]}(x, y, z) = n \frac{\partial}{\partial x} \{ {}_HA_{n-1}^{[2]}(x, y, z) \} \quad (3.46)$$

eşitliğinden

$$D_x^{-1} D_y \left\{ {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \right\} = n \left\{ {}_H A_{n-1}^{[2]}(x, y, z) \right\}$$

olup,

$${}_y L_n^- := \frac{1}{n} D_x^{-1} D_y \quad (3.47)$$

elde edilir.

Daha sonra da doğurucu fonksiyonun  $z$  değişkenine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \right\} &= n(n-1)(n-2) {}_H A_{n-3}^{[2]}(x, y, z) \\ &= n \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ {}_H A_{n-1}^{[2]}(x, y, z) \right\} \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$D_x^{-2} D_z \left\{ {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \right\} = n {}_H A_{n-1}^{[2]}(x, y, z)$$

yazılabilir. Böylece

$${}_z L_n^- := \frac{1}{n} D_x^{-2} D_z \quad (3.48)$$

elde edilir. Buradan  ${}_H A_n^{[2]}(x, y, z)$ 'ye  $k$  kere azalan operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} {}_H A_{n-k}^{[2]}(x, y, z) &= ({}_x L_{n-k+1}^- {}_x L_{n-k+2}^- \cdots {}_x L_{n-1}^- {}_x L_n^-) \left\{ {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \right\} \\ &= \left[ \frac{1}{(n-k+1)} D_x \frac{1}{(n-k+2)} D_x \cdots \frac{1}{n} D_x \right] \left\{ {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \right\} \\ &= \frac{(n-k)!}{n!} D_x^k \left\{ {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \right\} \end{aligned} \quad (3.49)$$

$${}_HA_{n-1}^{[2]}(x, y, z) = {}_xL_n^- \left\{ {}_HA_n^{[2]}(x, y, z) \right\} = \frac{1}{n} D_x \left\{ {}_HA_n^{[2]}(x, y, z) \right\},$$

$${}_HA_{n-2}^{[2]}(x, y, z) = ({}_xL_{n-1}^- {}_xL_n^-) \left\{ {}_HA_n^{[2]}(x, y, z) \right\}$$

$$= \frac{1}{n(n-1)} D_x^2 \left\{ {}_HA_n^{[2]}(x, y, z) \right\}$$

özellikleri elde edilir.

Buradan rekürans bağıntısında kullanılırsa

$${}_HA_{n+1}^{[2]}(x, y, z) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} \frac{(n-k)!}{n!} D_x^k \left\{ {}_HA_n^{[2]}(x, y, z) \right\} \theta_k$$

$$+ \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} \frac{(n-k)!}{n!} D_x^k \left\{ {}_HA_n^{[2]}(x, y, z) \right\} \rho_k$$

$$+ x \left\{ {}_HA_n^{[2]}(x, y, z) \right\} + 2yn \frac{1}{n} D_x \left\{ {}_HA_n^{[2]}(x, y, z) \right\}$$

$$+ 3zn(n-1) \frac{1}{n(n-1)} D_x^2 \left\{ {}_HA_n^{[2]}(x, y, z) \right\}$$

olup,

$${}_HA_{n+1}^{[2]}(x, y, z) = \left[ \sum_{k=0}^n \frac{\theta_k}{k!} D_x^k + \sum_{k=0}^n \frac{\rho_k}{k!} D_x^k + x + 2yD_x + 3zD_x^2 \right] \left\{ {}_HA_n^{[2]}(x, y, z) \right\} \quad (3.50)$$

${}_xL_n^+$  arttıran operatörü elde edilir.  ${}_yL_n^+$  arttıran operatörü için

$${}_HA_{n-k}^{[2]}(x, y, z) = ({}_yL_{n-k+1}^- {}_yL_{n-k+2}^- \cdots {}_yL_{n-1}^- {}_yL_n^-) \left\{ {}_HA_n^{[2]}(x, y, z) \right\}$$

$$= \frac{(n-k)!}{n!} D_x^{-k} D_y^k \left\{ {}_HA_n^{[2]}(x, y, z) \right\}$$

$$\begin{aligned}
{}_H A_{n-1}^{[2]}(x, y, z) &= {}_y L_n^- \left\{ {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \right\} \\
&= \frac{1}{n} D_x^{-1} D_y \left\{ {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \right\}
\end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned}
{}_H A_{n-2}^{[2]}(x, y, z) &= ({}_y L_{n-1}^- {}_y L_n^-) \left\{ {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \right\} \\
&= \frac{1}{n(n-1)} D_x^{-2} D_y^2 \left\{ {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Rekürans bağıntısında yukarıdaki özellik kullanılırsa

$$\begin{aligned}
{}_H A_{n+1}^{[2]}(x, y, z) &= \left( \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} \frac{(n-k)!}{n!} D_x^{-k} D_y^k \right) \left\{ {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \right\} \theta_k \\
&+ \left( \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} \frac{(n-k)!}{n!} D_x^{-k} D_y^k \right) \left\{ {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \right\} \rho_k \\
&+ x \left\{ {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \right\} + \left( 2ny \frac{1}{n} D_x^{-1} D_y \right) \left\{ {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \right\} \\
&+ \left( 3zn(n-1) \frac{1}{n(n-1)} D_x^{-2} D_y^2 \right) \left\{ {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \right\}
\end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned}
{}_y L_n^+ &= \left[ \sum_{k=0}^n \frac{\theta_k}{k!} D_x^{-k} D_y^k + \sum_{k=0}^n \frac{\rho_k}{k!} D_x^{-k} D_y^k + x + 2y D_x^{-1} D_y + 3z D_x^{-2} D_y^2 \right] \\
&+ [x + 2y D_x^{-1} D_y + 3z D_x^{-2} D_y^2]
\end{aligned} \tag{3.51}$$

ikinci arttıran operatörü elde edilir.

Ve benzer olarak

$${}_H A_{n-k}^{[2]}(x, y, z) = ({}_z L_{n-k+1}^- {}_z L_{n-k+2}^- \cdots {}_z L_{n-1}^- {}_z L_n^-) \{ {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \}$$

$$= \frac{(n-k)!}{n!} D_x^{-2k} D_y^k \{ {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \}$$

$${}_H A_{n-1}^{[2]}(x, y, z) = {}_z L_n^- \{ {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \} = \frac{1}{n} D_x^{-2} D_z \{ {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \}$$

olup,

$${}_H A_{n-2}^{[2]}(x, y, z) = ({}_z L_{n-1}^- {}_z L_n^-) \{ {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \}$$

$$= \frac{1}{n(n-1)} D_x^{-4} D_z^2 \{ {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \}$$

dir. Burada elde edilen özellikler rekürans bağıntısında yerine yazılırsa

$${}_H A_{n+1}^{[2]}(x, y, z) = \left( \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} \frac{(n-k)!}{n!} D_x^{-2k} D_z^k \right) \{ {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \} \theta_k$$

$$+ \left( \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} \frac{(n-k)!}{n!} D_x^{-2k} D_z^k \right) \{ {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \} \rho_k$$

$$+ \left( x + 2ny \frac{1}{n} D_x^{-2} D_z \right) \{ {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \}$$

$$+ \left( 3zn(n-1) \frac{1}{n(n-1)} D_x^{-4} D_z^2 \right) \{ {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \}$$

olup,  ${}_z L_n^+$  arttıran operatörü

$$\begin{aligned}
{}_H A_{n+1}^{[2]}(x, y, z) &= \left[ \sum_{k=0}^n \frac{\theta_k}{k!} D_x^{-2k} D_z^k + \sum_{k=0}^n \frac{\rho_k}{k!} D_x^{-2k} D_z^k + x + 2y D_x^{-2} D_z \right. \\
&\quad \left. + 3z D_x^{-4} D_z^2 \right] \{ {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \}
\end{aligned} \tag{3.52}$$

şeklinde elde edilir.

### 3.2.5. Teorem

İki kez yinelenen Hermite tabanlı Appell polinomları için diferensiyel denklemler

$$\begin{aligned}
&\left[ x D_x + 2y D_x^2 + 3z D_x^3 + \sum_{k=0}^n \frac{\theta_k}{k!} D_x^{k+1} + \sum_{k=0}^n \frac{\rho_k}{k!} D_x^{k+1} - n \right] \\
&\times \{ {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \} = 0,
\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}
&\left[ x D_y + 2y D_x^{-1} D_y^2 + 3z D_x^{-2} D_y^3 + \sum_{k=0}^n \frac{\theta_k}{k!} D_x^{-k} D_y^{k+1} + \sum_{k=0}^n \frac{\rho_k}{k!} D_x^{-k} D_y^{k+1} \right. \\
&\quad \left. - (n+1) D_x \right] \{ {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \} = 0,
\end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned}
&\left[ x D_z + 2y D_x^{-2} D_z^2 + 3z D_x^{-4} D_z^3 + \sum_{k=0}^n \frac{\theta_k}{k!} D_x^{-2k} D_z^{k+1} + \sum_{k=0}^n \frac{\rho_k}{k!} D_x^{-2k} D_z^{k+1} \right. \\
&\quad \left. - (n+1) D_x^2 \right] \{ {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \} = 0
\end{aligned} \tag{3.55}$$

olarak verilir [31].

*İspat*

$$({}_x L_{n+1}^- {}_x L_n^+) ({}_H A_n^{[2]}(x, y, z)) = {}_H A_n^{[2]}(x, y, z)$$

özellliği kullanılırsa

$${}_HA_n^{[2]}(x, y, z) = \frac{1}{n+1} D_x \left[ x + 2yD_x + 3zD_x^2 + \sum_{k=0}^n \frac{\theta_k}{k!} D_x^k + \sum_{k=0}^n \frac{\rho_k}{k!} D_x^k \right]$$

$$\times \{ {}_HA_n^{[2]}(x, y, z) \}$$

olup,

$$\left[ xD_x + 2yD_x^2 + 3zD_x^3 + \sum_{k=0}^n \frac{\theta_k}{k!} D_x^{k+1} + \sum_{k=0}^n \frac{\rho_k}{k!} D_x^{k+1} - n \right] {}_HA_n^{[2]}(x, y, z) = 0 \quad (3.56)$$

ile verilen ilk diferensiyel denklem elde edilir.

$$({}_yL_{n+1}^- {}_yL_n^+) ({}_HA_n^{[2]}(x, y, z)) = {}_HA_n^{[2]}(x, y, z)$$

$$\begin{aligned} {}_HA_n^{[2]}(x, y, z) &= \frac{1}{n+1} D_x^{-1} D_y \left[ x + 2yD_x^{-1} D_y + 3zD_x^{-2} D_y^2 + \sum_{k=0}^n \frac{\theta_k}{k!} D_x^{-k} D_y^k \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^n \frac{\rho_k}{k!} D_x^{-k} D_y^k \right] \{ {}_HA_n^{[2]}(x, y, z) \} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n+1} D_x^{-1} \left[ xD_y + 2yD_x^{-1} D_y^2 + 3zD_x^{-2} D_y^3 + \sum_{k=0}^n \frac{\theta_k}{k!} D_x^{-k} D_y^{k+1} \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^n \frac{\rho_k}{k!} D_x^{-k} D_y^{k+1} \right] \{ {}_HA_n^{[2]}(x, y, z) \}$$

den

$$\left[ xD_y + 2yD_x^{-1} D_y^2 + 3zD_x^{-2} D_y^3 + \sum_{k=0}^n \frac{\theta_k}{k!} D_x^{-k} D_y^{k+1} \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^n \frac{\rho_k}{k!} D_x^{-k} D_y^{k+1} - (n+1)D_x \right] \{ {}_HA_n^{[2]}(x, y, z) \} = 0 \quad (3.57)$$

ile verilen ikinci diferensiyel denklem bulunur.

$$({}_z L_{n+1}^- {}_z L_n^+) \left( {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \right) = {}_H A_n^{[2]}(x, y, z)$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) &= \frac{1}{n+1} D_x^{-2} D_z \left[ x + 2y D_x^{-2} D_z + 3z D_x^{-4} D_z^2 + \sum_{k=0}^n \frac{\theta_k}{k!} D_x^{-2k} D_z^k \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^n \frac{\rho_k}{k!} D_x^{-2k} D_z^k \right] \left\{ {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \right\} \\ &= \frac{1}{n+1} D_x^{-2} \left[ x D_z + 2y D_x^{-2} D_z^2 + 3z D_x^{-4} D_z^3 + \sum_{k=0}^n \frac{\theta_k}{k!} D_x^{-2k} D_z^{k+1} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^n \frac{\rho_k}{k!} D_x^{-2k} D_z^{k+1} \right] \left\{ {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \right\} \end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned} &\left[ x D_z + 2y D_x^{-2} D_z^2 + 3z D_x^{-4} D_z^3 + \sum_{k=0}^n \frac{\theta_k}{k!} D_x^{-2k} D_z^{k+1} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^n \frac{\rho_k}{k!} D_x^{-2k} D_z^{k+1} - (n+1) D_x^2 \right] \left\{ {}_H A_n^{[2]}(x, y, z) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.58)$$

ile verilen son diferensiyel denklem bulunur.

## 4. İKİ KEZ YİNELLENEN ÜÇ DEĞİŞKENLİ HERMITE TABANLI APPELL POLİNOMLARI İÇİN ÖRNEKLER

Bu bölümde,  $a_1(t)$  ve  $a_2(t)$ 'lerin özel seçimleriyle iki kez yinelenen üç değişkenli Hermite tabanlı Appell polinomları için örnekler verilecektir. Daha sonra da bu elde edilen polinomlar için rekürans bağıntıları, azalan ve arttıran operatörler ve diferensiyel denklemler verilecektir.

### 4.1. İki Kez Yinelenen Üç Değişkenli Hermite Tabanlı Euler Polinomları

(3.15) ile verilen doğurucu fonksiyonda

$$a_1(t) = a_2(t) = \frac{2}{e^t + 1}$$

seçilirse iki kez yinelenen üç değişkenli Hermite tabanlı Euler polinomları

$${}_H E_n^{[2]}(x, y, z) := {}_H E_n^{[2]} \text{ olmak üzere}$$

$$\left(\frac{2}{e^t + 1}\right)^2 e^{xt+yt^2+zt^3} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H E_n^{[2]}(x, y, z) \frac{t^n}{n!} \quad (4.1)$$

eşitliği ile tanımlanabilir. (2.30) da  $\alpha = 2, \lambda = 1$  durumu olup, bu polinomlar 2. mertebeden üç değişkenli Hermite Euler polinomlarıdır.

#### 4.1.1. Sonuç

İki kez yinelenen üç değişkenli Hermite tabanlı Euler polinomlarının rekürans bağıntısı

$$\begin{aligned} {}_H E_{n+1}^{[2]} = & - \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} E_{k-m} {}_H E_{n-k}^{[2]}(x, y, z) + x {}_H E_n^{[2]}(x, y, z) \\ & + 2yn {}_H E_{n-1}^{[2]}(x, y, z) + 3zn(n-1) {}_H E_{n-2}^{[2]}(x, y, z) \end{aligned}$$

dir.

## 4.1.2. Sonuç

İki kez yinelenen üç değişkenli Hermite tabanlı Euler polinomlarının arttıran operatörü, integro-arttıran operatörleri, azalan operatörü, integro-azalan operatörleri

$${}_x L_n^- := \frac{1}{n} D_x,$$

$${}_x L_n^+ := - \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \frac{E_{k-m}}{k!} D_x^k + x + 2y D_x + 3z D_x^2,$$

$${}_y L_n^- := \frac{1}{n} D_x^{-1} D_y,$$

$${}_y L_n^+ := - \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \frac{E_{k-m}}{k!} D_x^{-k} D_y^k + x + 2y D_x^{-1} D_y + 3z D_x^{-2} D_y^2,$$

$${}_z L_n^- := \frac{1}{n} D_x^{-2} D_z,$$

$${}_z L_n^+ := - \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \frac{E_{k-m}}{k!} D_x^{-2k} D_z^k + x + 2y D_x^{-2} D_z + 3z D_x^{-4} D_z^2$$

ile verilir. Diferensiyel denklem

$$\left[ x D_x + 2y D_x^2 + 3z D_x^3 - \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \frac{E_{k-m}}{k!} D_x^{k+1} - n \right] \{ {}_H E_n^{[2]}(x, y, z) \} = 0$$

ve integro-diferensiyel denklemler ise

$$\left[ x D_y + 2y D_x^{-1} D_y^2 + 3z D_x^{-2} D_y^3 - \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \frac{E_{k-m}}{k!} D_x^{-k} D_y^{k+1} \right.$$

$$\left. - (n+1) D_x \right] \{ {}_H E_n^{[2]}(x, y, z) \} = 0,$$

$$\left[ xD_z + 2yD_x^{-2}D_z^2 + 3zD_x^{-4}D_z^3 - \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \frac{E_{k-m}}{k!} D_x^{-2k} D_z^{k+1} \right. \\ \left. - (n+1)D_x^2 \right] \{ {}_H E_n^{[2]}(x, y, z) \} = 0$$

olarak bulunmuştur.

## 4.2. İki Kez Yinelenen Üç Değişkenli Hermite Tabanlı Bernoulli Polinomları

(3.15) ile verilen doğurucu fonksiyonda

$$a_1(t) = a_2(t) = \frac{t}{e^t - 1}$$

seçilirse iki kez yinelenen üç değişkenli Hermite tabanlı Bernoulli polinomları

$${}_H B_n^{[2]}(x, y, z) := {}_H B_n^{[2]} \text{ olmak üzere}$$

$$\left( \frac{t}{e^t - 1} \right)^2 e^{xt+yt^2+zt^3} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H B_n(x, y, z) \frac{t^n}{n!} \quad (4.2)$$

eşitliği ile tanımlanabilir. (2.28) de  $\alpha = 2$ ,  $\lambda = 1$  durumu olup, bu polinomlar 2. mertebeden üç değişkenli Hermite Bernoulli polinomlarıdır.

### 4.2.1. Sonuç

İki kez yinelenen üç değişkenli Hermite tabanlı Bernoulli polinomlarının rekürans bağıntısı

$${}_H B_{n+1}^{[2]} = -2 \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{k+1} \binom{n}{k} \binom{k+1}{m} \frac{B_m}{k+1} {}_H B_{n-k}^{[2]}(x, y, z) + x {}_H B_n^{[2]}(x, y, z) \\ + 2yn {}_H B_{n-1}^{[2]}(x, y, z) + 3zn(n-1) {}_H B_{n-2}^{[2]}(x, y, z)$$

dir.

## 4.2.2. Sonuç

İki kez yinelenen üç değişkenli Hermite tabanlı Bernoulli polinomlarının arttıran operatörü, integro-arttıran operatörleri, azalan operatörü, integro-azalan operatörleri

$${}_x L_n^- := \frac{1}{n} D_x,$$

$${}_x L_n^+ := -2 \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{k+1} \binom{k+1}{m} \frac{B_m}{(k+1)k!} D_x^k + x + 2yD_x + 3zD_x^2,$$

$${}_y L_n^- := \frac{1}{n} D_x^{-1} D_y,$$

$${}_y L_n^+ := -2 \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{k+1} \binom{k+1}{m} \frac{B_m}{(k+1)k!} D_x^{-k} D_y^k + x + 2yD_x^{-1} D_y + 3zD_x^{-2} D_y^2,$$

$${}_z L_n^- := \frac{1}{n} D_x^{-2} D_z,$$

$${}_z L_n^+ := -2 \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{k+1} \binom{k+1}{m} \frac{B_m}{(k+1)k!} D_x^{-2k} D_z^k + x + 2yD_x^{-2} D_z + 3zD_x^{-4} D_z^2$$

ile verilir. Diferensiyel denklem

$$\left[ xD_x + 2yD_x^2 + 3zD_x^3 - 2 \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{k+1} \binom{k+1}{m} \frac{B_m}{(k+1)k!} D_x^{k+1} - n \right] \{ {}_H B_n^{[2]}(x, y, z) \} = 0$$

ve integro-diferensiyel denklemler ise

$$[xD_y + 2yD_x^{-1} D_y^2 + 3zD_x^{-2} D_y^3$$

$$- 2 \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{k+1} \binom{k+1}{m} \frac{B_m}{(k+1)k!} D_x^{-k} D_y^{k+1} - (n+1)D_x] \{ {}_H B_n^{[2]}(x, y, z) \} = 0,$$

$$[xD_z + 2yD_x^{-2}D_z^2 + 3zD_x^{-4}D_z^3$$

$$-2 \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{k+1} \binom{k+1}{m} \frac{B_m}{(k+1)k!} D_x^{-2k} D_z^{k+1} - (n+1)D_x^2 \left] \{ {}_H B_n^{[2]}(x, y, z) \} = 0$$

olarak bulunmuştur.

### 4.3. İki Kez Yinelenen Üç Değişkenli Hermite Tabanlı Bernoulli-Euler Polinomları

(3.15) ile verilen doğurucu fonksiyonda

$$a_1(t) = \frac{2}{e^t + 1}$$

ve

$$a_2(t) = \frac{t}{e^t - 1}$$

seçilirse iki kez yinelenen üç değişkenli Hermite tabanlı Bernoulli-Euler polinomları

${}_H Be_n^{[2]}(x, y, z) := {}_H Be_n^{[2]}$  olmak üzere

$$\left( \frac{2}{e^t + 1} \right) \left( \frac{t}{e^t - 1} \right) e^{xt+yt^2+zt^3} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_H Be_n^{[2]}(x, y, z) \frac{t^n}{n!} \quad (4.3)$$

eşitliği ile tanımlanabilir.

#### 4.3.1. Sonuç

İki kez yinelenen üç değişkenli Hermite tabanlı Bernoulli-Euler polinomlarının rekürans bağıntısı

$${}_H Be_{n+1}^{[2]}(x, y, z) = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} E_{k-m} {}_H Be_{n-k}^{[2]}(x, y, z)$$

$$- \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{k+1} \binom{n}{k} \binom{k+1}{m} \frac{B_m}{k+1} {}_H Be_{n-k}^{[2]}(x, y, z) + x ({}_H Be_n^{[2]}(x, y, z))$$

$$+2yn \left( {}_HBe_{n-1}^{[2]}(x, y, z) \right) + 3zn(n-1) \left( {}_HBe_{n-2}^{[2]}(x, y, z) \right)$$

dir.

#### 4.3.2. Sonuç

İki kez yinelenen üç değişkenli Hermite tabanlı Bernoulli-Euler polinomlarının arttıran operatörü, integro-arttıran operatörleri, azalan operatörü, integro-azalan operatörleri

$${}_xL_n^- := \frac{1}{n} D_x,$$

$${}_xL_n^+ := x + 2yD_x + 3zD_x^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \frac{E_{k-m}}{k!} D_x^k - \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{k+1} \binom{k+1}{m} \frac{B_m}{(k+1)k!} D_x^k,$$

$${}_yL_n^- := \frac{1}{n} D_x^{-1} D_y,$$

$${}_yL_n^+ := x + 2yD_x^{-1} D_y + 3zD_x^{-2} D_y^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \frac{E_{k-m}}{k!} D_x^{-k} D_y^k$$

$$- \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{k+1} \binom{k+1}{m} \frac{B_m}{(k+1)k!} D_x^{-k} D_y^k,$$

$${}_zL_n^- := \frac{1}{n} D_x^{-2} D_z,$$

$${}_zL_n^+ := x + 2yD_x^{-2} D_z + 3zD_x^{-4} D_z^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \frac{E_{k-m}}{k!} D_x^{-2k} D_z^k$$

$$- \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{k+1} \binom{k+1}{m} \frac{B_m}{(k+1)k!} D_x^{-2k} D_z^k$$

ile verilir. Diferensiyel denklem

$$\left[ xD_x + 2yD_x^2 + 3zD_x^3 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \frac{E_{k-m}}{k!} D_x^{k+1} \right. \\ \left. - \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{k+1} \binom{k+1}{m} \frac{B_m}{(k+1)k!} D_x^{k+1} - n \right] \left\{ {}_H B e_n^{[2]}(x, y, z) \right\} = 0$$

ve integro-diferensiyel denklemler ise

$$\left[ xD_y + 2yD_x^{-1}D_y^2 + 3zD_x^{-2}D_y^3 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \frac{E_{k-m}}{k!} D_x^{-k} D_y^{k+1} \right. \\ \left. - \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{k+1} \binom{k+1}{m} \frac{B_m}{(k+1)k!} D_x^{-k} D_y^{k+1} - (n+1)D_x \right] \left\{ {}_H B e_n^{[2]}(x, y, z) \right\} = 0,$$

$$\left[ xD_z + 2yD_x^{-2}D_z^2 + 3zD_x^{-4}D_z^3 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \frac{E_{k-m}}{k!} D_x^{-2k} D_z^{k+1} \right. \\ \left. - \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{k+1} \binom{k+1}{m} \frac{B_m}{(k+1)k!} D_x^{-2k} D_z^{k+1} - (n+1)D_x^2 \right] \left\{ {}_H B e_n^{[2]}(x, y, z) \right\} = 0$$

olarak bulunmuştur.



## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez, öncelikli olarak Appell ve Hermite polinomlarını tanıtmakta ve bu polinomların tarihçesine ve genel özelliklerine odaklanmaktadır. Tezde Appell ve Hermite polinomlarını kapsayan kapsamlı bir literatür bulunmaktadır. Bu polinom ailelerini içeren iki değişkenli aileler doğurucu fonksiyonlar aracılığıyla tezde tanıtılmış ve özellikleri verilmiştir. Ayrıca, [19, 20] de daha geniş bir aile olan üç değişkenli bir polinom ailesi tanıtılmış ve özelliklerine değinilmiştir. Bu polinom ailelerinin ve doğurucu fonksiyonun özelliklerinden yola çıkarak, bu aileleri kapsayan üç değişkenli polinom aileleri için daha genel bir aile üzerinde çalışılmış ve bu polinom ailelerini içeren yeni özellikler ve sonuçlar elde edilmiştir.

Bu tezde tanımlanan ailede  $a_1(t)$  ve  $a_2(t)$  nin özel seçimleriyle yeni alt aileler tanımlanabilir ve bu ailelerin özellikleri de bulunabilir. Diğer taraftan  $x$  yerine  $x + iw$  alınarak cosinüs ve sinüs iki kez yinelenen üç değişkenli Hermite tabanlı Appell polinom aileleri üzerinde çalışmalar yapılabilir.



## KAYNAKLAR

1. Linehan, Paul Henry (1910). *Charles Hermite*. Herbermann, Charles (Ed.). Katolik Ansiklopedi (İngilizce). 7. New York: Robert Appleton Company.
2. Bell, W. W. (1968). *Special Functions for Scientist and Engineers*. Canada: David Van Nostrand Company, 156-157, 162-163.
3. Sheffer, I. M. (1945). Note on Appell polynomials. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 51(10), 739-744.
4. Appell, P. (1880). Sur une classe de pôlynomes. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, 9, 119-144.
5. Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. and Tricomi, F.G., (1953). *Higher Transcendental Function* (volumes I and II). New York–Toronto– London, McGraw–Hill Book Company.
6. Horadam, A. F. (1991). Genocchi polynomials. *Applications of Fibonacci Numbers*, 145-166.
7. Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (1964). *Handbook of Mathematical function with formulas, graphs and mathematical tables*. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 55, Cambridge: Government Printing Office, 803-804.
8. Rainville, E. D. (1960). *Special functions*. New York: The Macmillan Company.
9. Srivastava, H. M., Choi, J. (2012). *Zeta and q-Zeta functions and associated series and integrals*. Amsterdam, London and New York: Elsevier.
10. Apostol, T. M. (1951). On the Lerch zeta function. *Pacific Journal of Mathematics*, 1(2), 161–167.
11. Luo, Q. M. (2006). Apostol-Euler polynomials of higher order and Gaussian hypergeometric functions. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 10(4), 917-925.
12. Srivastava, H. M. and Luo, Q.-M. (2011). Some generalizations of the Apostol-Genocchi polynomials and the Stirling numbers of the second kind. *Applied Mathematics and Computation*, 217(12), 5702–5728.
13. Luo, Q.-M. and Srivastava, H. M. (2005). Some generalizations of the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 308(1), 290–302.
14. Dattoli, G., Chiccoli, C., Lorenzutta, S., Maino, G., Torre, A. (1993). Generalized Bessel functions and generalized Hermite polynomials. *Journal of mathematical analysis and applications*, 178(2), 509-516.

15. Dattoli, G., Chiccoli, C., Lorenzutta, S., Maino, G., and Torre, A. (1994). Theory of generalized Hermite polynomials. *Computers & Mathematics with Applications*, 28(4), 71-83.
16. Dattoli G., Lorenzutta S. and Cessarano C. (1999). Finite sums and generalized forms of Bernoulli polynomials. *Rendiconti di Matematica series VII*, 19, 385-391.
17. Lu, Da.-Q. (2011). Some properties of Bernoulli polynomials and their generalizations. *Applied Mathematics Letters*, 24(3), 746- 751.
18. G. Dattoli. (2000). Generalized polynomials operational identities and their applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 118, 111–123.
19. Khan, S., Yasmin, G., Khan, R. and Hassan, N. A. M. (2009). Hermite-based Appell polynomials: properties and applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 351, 756-764.
20. Srivastava, H. M., Özarslan, M. A. and Yılmaz, B. (2014). Some families of differential equations associated with the Hermite-based Appell polynomials and other classes of Hermite-based polynomials. *Filomat*, 28(4), 695-708.
21. Özarslan, M. A. (2013). Hermite-based unified Apostol-Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials. *Advances in Difference Equations*, 2013(116), 1-13.
22. Luo Q.-M. (2004). On the Apostol-Bernoulli polynomials. *Central European Journal of Mathematics*, 20, 2(4), 509–515.
23. Srivastava, H. M. (2000). Some formulas for the Bernoulli and Euler polynomials at rational arguments. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 129(1), 77–84.
24. Luo, Q.-M. (2011). Extension for the Genocchi polynomials and its Fourier expansions and integral representations. *Osaka Journal of Mathematics*.
25. Luo, Q.-M. (2009). Fourier expansions and integral representations for the Genocchi polynomials. *Journal of Integer Sequences*, 12, Article ID 09.1.4.
26. Özarslan, M. A. (2011). Unified Apostol-Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials. *Computers & Mathematics with Applications*, 62(6), 2452–2462.
27. Zhang, Z., Yang, H. (2008). Several identities for the generalized Apostol-Bernoulli polynomials. *Computers & Mathematics with Applications*, 56(12), 2993–2999.
28. Srivastava, H. M, Özarslan, M. A., Kaanoğlu, C. (2010). Some families of generating functions for a certain class of three-variable polynomials. *Integral Transforms and Special Functions*, 21(12), 885–896.
29. Soyarslan, G. (2023). *Hermite tabanlı Appell polinomları*, Yayınlanmış Yüksek Lisans tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

30. Khan, S., Raza, N. (2013). 2-Iterated Appell polynomials and related numbers. *Applied Mathematics and Computation*, 221, 781-789.
31. Güngören, G. and Çekim, B. (2023). *Generalization of Hermite-based Appell polynomials and some properties*, 7th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences, (CMES-2023), Elâzığ, Türkiye.
32. Kilar, N., Şimşek, Y. (2021). Computational formulas and identities for new classes of Hermite-based Milne–Thomson type polynomials: Analysis of generating functions with Euler's formula. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 44(2), 6731-6762.







*Gazili olmak ayrıcalıktır*