
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

GRAD-DİV KARARLILAŞTIRILMIŞ BDF-2 ZAMAN ADIMLI LERAY-α MODELİNİN SAYISAL ANALİZİ

Pınar DOĞRU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARALIK 2022

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Pınar DOĞRU
27/12/2022

GRAD-DİV KARARLILAŞTIRILMIŞ BDF-2 ZAMAN ADIMLI LERAY-α MODELİNİN SAYISAL ANALİZİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Pınar DOĞRU

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Aralık 2022

ÖZET

Bu çalışmada, sık kullanılan bir türbülans modeli olan Leray-α modeli için grad-div kararlılaştırması incelenmiştir. Oluşturulan şema, sıkıştırılamaz zamana bağlı NSD'nin doğrusallaştırılmış ikinci mertebeden geri doğru fark (BDF2) formülüne dayalıdır ve uzayda sonlu eleman ile ayrıklaştırılmış bir Navier-Stokes sistemi üzerinde uygulanmaktadır. Ayrıca oluşturulan şemaya, kütle korunumunu iyileştirdiği ve basıncın hız hatası üzerindeki etkisini azalttığı için γ parametreli bir grad-div stabilizasyon terimi dâhil edilmiştir. Çalışmada, BDF2 zaman ayrıklaştırması ile elde edilen tamamen ayrık yaklaşımın çözümünün kararlı ve yakınsak olduğu gösterilmiştir. Son olarak da teorik yakınsama oranlarını doğrulamak için önerilen algoritmanın etkinliğini gösteren sayısal testler sunulmuştur.

Bilim Kodu	:	20406
Anahtar Kelimeler	:	Doğrusal olmayan filtreleme, Leray-α türbülans modeli, Navier-Stokes denklemleri, Sonlu elemanlar yöntemi
Sayfa Adedi	:	49
Danışman	:	Doç. Dr. Aytekin Bayram ÇIBIK

NUMERICAL ANALYSIS OF A LERAY-α MODEL WITH GRAD-DIV STABILIZATION AND BDF-2 TIME STEPPING

(M. Sc. Thesis)

Pınar DOĞRU

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

December 2022

ABSTRACT

In this study, we examine a Leray-α model, which is a well-known turbulence model with grad-div stabilization. The scheme we consider is based on a finite element discretized Navier-Stokes system in space, and linearized second order backward difference (BDF2) formula in time for incompressible time dependent NSD. In addition, a grad-div stabilization term with γ parameter is added in the scheme, as it improves mass coNSDrvation and reduces the effect of pressure on velocity error. In the study, it has been shown that the solution of the fully discrete scheme obtained by BDF2 time discretization is stable and convergent. Finally, numerical tests showing the effectiveness of the proposed algorithm are presented to verify the theoretical convergence rates.

Science Code	:	20406
Key Words	:	Nonlinear filtering, Leray-α turbulence model, Navier-Stokes equations, Finite element method
Page Number	:	49
Supervisor	:	Assoc. Prof. Dr. Aytekin Bayram ÇIBIK

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında bana destek olan, bilgi ve tecrübesi ile lisansüstü öğrenim hayatımın tüm zorlu aşamalarında maddi manevi her yönden yardımcı olan, tecrübeleri ile beni aydınlatan ve desteğini hiç eksik etmeyen, kendisini tanımaktan büyük onur duyduğum danışman hocam Sayın Doç. Dr. Aytekin Bayram ÇIBIK' a, çalışmalarım sırasında manevi desteğini her zaman hissettiğim değerli arkadaşım Gülnur HAÇAT 'a, öğrenim hayatım boyunca beni maddi ve manevi olarak destekleyen ve hep yanımda olan aileme ve sevgili eşim Yusuf'a yürekten teşekkür ederim. Son olarak 119F345 numaralı 1001 projesi ile burs desteği sağlayan TÜBİTAK' a teşekkürlerimi sunuyorum.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

ÇİZELGELERİN LİSTESİ viii

SİMGELER VE KISALTMALAR ix

1. GİRİŞ 1

2. GÖSTERİMLER VE MATEMATİKSEL ÖN HAZIRLIKLAR 7

3. LERAY-α MODELİ 17

3.1. Leray-α Modelinin Sürekli Hali 17

3.2. NSD'nin Galerkin Sonlu Eleman Formülasyonu 19

3.3. Diferensiyel Filtre 20

3.4. Kesikli Diferensiyel Filtre 22

4. GRAD-DİV KARARLILAŞTIRILMIŞ BDF-2 ZAMAN ADIMLI LERAY-$\boldsymbol{\alpha}$ MODELİNİN SAYISAL ANALİZİ 27

4.1. Kararlılık 28

4.2. Hata Analizi 30

5. SAYISAL TEST 43

6. SONUÇ 45

KAYNAKLAR 47

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

Çizelge 1. $\Delta t = 0{,}00625,\ \gamma = 1, \alpha =$ □ ve $\nu = 1$ için bulunan hız hataları ve oranları 39

Çizelge 2. $\gamma = 1, \alpha =$ □ ve $\nu = 1$ için bulunan hız hataları ve oranları..... 40

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{L^2(\Omega)}$	$\{p: \Omega \to R: \int_\Omega \lvert p\rvert^2 dx < \infty\}$
$\lVert \boldsymbol{v} \rVert$	v vektörünün $L^2(\Omega)$ normu
$(.,.)$	$L^2(\Omega)$ uzayında tanımlı iç çarpım
$\boldsymbol{H^k(\Omega)}$	Sobolev uzayı
$\boldsymbol{\nu}$	Viskozite
$\mathbf{V}$	Test uzayı
$\bar{\mathbf{u}}$	u nun diferensiyel filtresi
$\boldsymbol{X^h \subset X}$ **ve** $\boldsymbol{Q^h \subset Q}$	Hız ve basınç sonlu eleman altuzayları
$(\boldsymbol{u^h, p^h}) \in (\boldsymbol{X^h, Q^h})$	Hız ve basınç yaklaşık çözümleri

Kısaltmalar	**Açıklamalar**
KDD	Kısmi Diferensiyel Denklem
NSD	Navier Stokes Denklemleri
BDF2	Backward Diferensiyel Formül 2 Metodu
FEM	Sonlu Elemanlar Metodu
Re	Reynolds Sayısı
LES	Büyük Girdap Simülasyonu

1. GİRİŞ

Türbülans, doğadaki birçok akışın davranışını tanımlarken kullanılan bir kavramdır. Mühendislik uygulamalarında akışkan hareketinin en karmaşık türü çalkantılı ya da türbülanslı akışlar olarak bilinmektedir. Akışkanlar dinamiğinde oldukça yaygın uygulama alanına sahip olan bu akış hareketine günlük hayatımızın her yerinde rastlamak mümkündür. Doğada karşılaşılan akışlar ve endüstriyel ve teknolojik uygulamalarda karşılaşılan akışların çoğu türbülanslı akışlardır. Örneğin uçakla seyahat ederken hava akışında türbülansa maruz kalınır veya akışın hareketini araştırırken türbülanslı su akışları ile karşılaşılır. Kısacası, gaz ve su akışlarının çoğu türbülanslıdır. Türbülanslı akışlar, yüksek oranda enerji tüketen, düzensiz, difüzyonlu ve rotasyonel akışlardır. Türbülansın bu özelliklerinden dolayı türbülanslı akışlarla ilgili hesaplar her zaman zorlayıcı olmuştur. Türbülans problemlerinin zorluğuna rağmen, çağlar boyunca birçok bilim insanı bunlara çözüm bulmaya çalışmıştır. Bununla birlikte, türbülans hakkında hala anlaşılamayan kavramlar vardır ve bu durumdan dolayı birçok bilim insanı, özellikle de mühendisler, hekimler ve matematikçiler bu alanda pek çok çalışma yapmışlardır. Problem yalnızca bilimsel anlamda değil, aynı zamanda pratik anlamda da zorluklar barındırır. Bu nedenle, bu problemler için çözüm geliştirmek, insan yaşamını kolaylaştırarak çeşitli avantajlar sağlar. Türbülanslı akışlar Navier-Stokes denklemleri (NSD) ile modellenmiştir.

NSD, su, yağ, hava gibi viskoz akışkan maddelerin hareketini tanımlayan kısmi diferensiyel denklemlerdir (KDD). Denklem, kütlenin korunumu ve lineer momentumun korunumu olan sürekli ortam mekaniğinin genel yasalarını temsil eder [1]. Bu denklemler birçok alanda karşımıza çıkan denklemlerdir. Bunlardan bazıları; hava akımları ve okyanus akıntıları, boru içindeki su akışı, galaksideki yıldız hareketleri, uçak kanadı etrafındaki hava akımlarının modellenmesi ve hesaplanmasıdır. Bu akışlar uygulamada çokça karşımıza çıktığı için oldukça önemlidir. Bahsedilen NSD'nin en genel hali aşağıdaki gibidir:

$$u_t - \nu\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f, \qquad (1.1)$$
$$\nabla \cdot u = 0.$$

Burada u akışkanın hızını, p basıncını, f dış kuvvetleri ve $\nu > 0$ kinematik viskoziteyi temsil eder.

Boyut analizi, model teorisi ve deneysel fizikte önemli bir araçtır. Amaç, bu sayıları karşılaştırmanın aynı model tarafından yönetilen farklı süreçlerin ne ölçüde benzer olduğunu değerlendirmemize izin vermesi anlamında modelin özünü yakalayan boyutsuz bir sayıyı modelden çıkarmaktır. Örnek olarak, belirli bir uzayda bir nesnenin yanından geçen akış incelenmek istenirse, akışın türü, nesnenin şekli, akışın hızı ve kinematik viskozite $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ tarafından belirlenecektir. Burada η dinamik viskoziteyi, ρ ise yoğunluğu temsil eder. Bir küre alınırsa, şekli tamamen yarıçap tarafından belirlenir ve bu sayının birimi uzunluktur $(L).u$ ve ν birimleri sırasıyla $\frac{L}{T}$ ve $\frac{L^2}{T}$'dir. Burada T, zaman birimini temsil eder. O halde bu niceliklerden oluşturulabilecek tek boyutsuz sayı şudur:

$$Re = \frac{uL}{\nu}$$

Bu sayı Reynolds sayısıdır. Re oranı atalet kuvvetlerinin viskoz kuvvetlere oranı olarak da yorumlanabilir:

$$Re = \frac{uL}{\nu} = \frac{\rho uL}{\eta} = \frac{eylemsizlik\ kuvvetleri}{viskoz\ kuvvet}.$$

Bu oran, Reynolds sayısının bir akıştaki türbülansı ölçtüğünü göstermektedir. Reynolds sayısı ne kadar yüksek olursa, akışın o kadar türbülanslı karaktere bürünme ihtimali yüksektir. Burada özellikle iki durum dikkat çeker, bunlar $Re \to 0$ ve $Re \to \infty$'dir. $Re \to 0$ için Navier-Stokes denklemlerindeki doğrusal olmayan terim ihmal edilebilir ve Stokes problemine indirgenebilir. Diğer durumda, akış türbülanslı davranış sergiler ve bu bizim ilgilendiğimiz davranış şeklidir. Bir akışın türbülanslı olup olmadığı, her türlü akış için model olan Navier-Stokes denklemlerinden doğrudan görülemeyebilir. Türbülans matematiksel olarak tanımlanmış bir terim değildir. Bu nedenle türbülansı laminer akışın karşıtı olarak düşünebiliriz. O zaman türbülanslı olmayan akış, katmanlarının temelde karışmadığı anlamına gelen laminer olan bir akışın davranışı olacaktır. Her akışta, öyle bir Re sayısı vardır ki, bunun üstündeki sayılarda akış türbülanslı kabul edilirken altındaki sayılarda akış laminer olarak düşünülür. Akışları bu şekilde ayırt etmek Osborne Reynolds'a kadar gider, bkz. [25]. Genel olarak yüksek Reynolds sayısına sahip düzensiz bir biçimde hareket eden üç boyutlu dönel akışlar türbülanslı akışlardır.

Bu akışların anlaşılması ve modellenmesi bilim insanları için önemli problemlerden birisi olmuştur.

NSD, çözümlerinin varlığı, tekliği ve kararlılığı açısından çok karmaşık denklemlerdir. Pratikte, analitik olarak çözmek çok zordur. NSD' nin analitik çözümleri olmadığı için sayısal çözümlere ihtiyaç duyulmuştur. Bu süreçte türbülanslı akışlardaki ölçek zenginliği, hesaplamanın önündeki en büyük engel olmuştur. Ölçek aralığı genişledikçe (Reynolds sayısına göre) hesaplama maliyeti artmıştır. Bu nedenle, bazı türbülans modellerinden yararlanılmıştır.

Küçük ölçekleri temsil etmeden küçük ölçeklerin büyük ölçekler üzerindeki etkisini fiziksel değerlendirmelere dayalı olarak modelleme yöntemine Büyük Girdap Simülasyonu (LES) denilmiştir. LES'nin ana fikri, NSD'nin düşük geçişli filtrelemesiyle hesaplanması en pahalı olan en küçük uzunluk ölçeğini göz ardı ederek hesaplama maliyetini düşürmektir. Zaman ve uzaysal ortalama olarak görülebilen bu tür düşük geçişli bir filtreleme, küçük ölçekli bilgileri sayısal çözümden kaldırır. İyi bir LES modeli iyi bir filtre yöntemine ve iyi bir alt ızgara modeline bağlıdır. Bu yöntem türbülanslı akışların yalnızca büyük ölçeklerini dikkate aldığı için akışın sınırlı bir alanda verilmesi durumunda önemli sorunlara yol açmaktadır. Bu sebepten dolayı, Leray-α modeli olarak adlandırılan, istenen matematiksel ve fiziksel özelliklere sahip NSD'nin düzgünleştirilmiş formu olarak bir türbülans modeli inşa edilmiştir [2]. Leray [2], NSD'nin doğrusal olmayan teriminde konveksiyon alanının düzenli bir hız alanı ile değiştirilmesiyle NSD'nin zayıf bir çözümünün varlığını ispatlamıştır. Yani $(u \cdot \nabla)u$ terimi yerine $(\bar{u} \cdot \nabla)u$ kullanılmıştır. Bu düzenlileştirme, filtre fonksiyonuna sahip bir konvolusyon(kıvrım) tarafından tanımlanmıştır. NSD sisteminin düzenlenmesi ile oluşturulan denklem sistemi aşağıdaki gibidir:

$$
\begin{aligned}
&{u_t}^{\alpha} - \nu\Delta u^{\alpha} + (\bar{u}^{\alpha} \cdot \nabla)u^{\alpha} + \nabla p^{\alpha} = f, \\
&\nabla \cdot u^{\alpha} = 0, \\
&\bar{u}^{\alpha} = \phi_{\alpha} * u^{\alpha}.
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

Burada ϕ_{α}, bir yumuşatma çekirdeğidir, öyle ki $\bar{u}^{\alpha} \to u^{\alpha}$ dır. Ayrıca $\alpha \to 0^{+}$ ise (1.2), (1.1)'e yakınsar. [3] deki Leray-α modeli, Leray (1934)'ın [2] deki modeline daha hesaplanabilir bir alternatif olarak önerilmiş ve özel bir yumuşatma çekirdeği(mollification) düşünülmüştür:

$$\bar{u}^{\alpha} - \alpha^2\Delta\bar{u}^{\alpha} = u^{\alpha}.$$

Buna göre (1.2) deki α bağımlılığı düşürülerek aşağıdaki Leray-α modeli elde edilmiştir:

$u_t - \nu\Delta u + (\bar{u} \cdot \nabla)u + \nabla p = f,$

$\nabla \cdot u = 0,$

$(0,T] \times \Omega \quad da, \qquad u = \bar{u} - \alpha^2 \Delta \bar{u},$

$\bar{u}, (0,T] \times \Gamma$ da periyodiktir.

Burada $\alpha > 0$, bir uzunluk ölçeğidir (sabit). Ayrıca $\Omega = [0, 2\pi L]^n, n = (2,3), \Gamma$ Lipschitz sınırı ile sınırlan bir bölgedir. Bu model, doğruluğu ve fiziksel uygunluğu korurken, daha hızlı ve daha ucuz algoritmalar geliştirmek için yol gösterici olmuştur.

Bu çalışmada, ayrık bir filtre kullanılmış olan Leray-a modeli incelenmiştir. Oluşturulan şema, sıkıştırılamaz zamana bağlı NSD'nin doğrusallaştırılmış ikinci mertebeden geri doğru fark (BDF2) formülüne dayalı ve uzayda sonlu eleman ile ayrıklaştırılmış bir Navier-Stokes sistemi üzerinde uygulanmaktadır.

Sonlu elemanlar metodu (FEM) bir bölge üzerinde tanımlı bir problemin nümerik çözümünü veren bir yöntemdir. Bu yöntem, belirlenen bölgeyi alır ve özel tipte parçalara ayırır. Ardından, düğüm denilen köşe noktalarıyla parçaları birbirine bağlar ve bu işlem bölgenin tamamına uygulanarak bir interpolasyon ile çözüm hesaplanır [24]. Sonlu elemanlar yönteminin sonlu farklar yöntemine göre avantajı, problemin sınır koşullarıyla ilgili yapılan bir kolaylıktır. Çoğu fiziksel problem, türevler ve düzensiz sınırlar içeren sınır koşullarına sahiptir. Türev içeren sınır koşullarına ağ (mesh) noktalarında bir fark oranı ile yaklaşılması gerektiğinden ve sınır şeklinin ağ yapısını zorlaştırmasından dolayı bu tür sınır koşullarını sonlu farklar yöntemi kullanarak halletmek zordur. Sonlu elemanlar yöntemi sınır koşullarını, minimize edilecek bir fonksiyoneldeki integraller olarak ele aldığından yapılandırma işlemi problemin özel sınır koşullarından bağımsızdır. Sonlu eleman ayrıklaştırma, kısmi diferensiyel denklemleri sayısal olarak çözmek için çok etkili bir araç olmasına rağmen, bu formülasyon Navier-Stokes denklemlerinin çözümünde bazı kararsızlıklara yol açabilir. Reynolds sayısının yüksek olması durumunda akış, konveksiyon baskın hale gelir ve türbülanslı bir rejime girebilir. İnf-sup

koşulunun ihlali, özellikle basınç alanında salınımlara neden olan kararsızlığın bir başka nedenidir. Bu koşulu sağlayan uygun sonlu eleman uzaylarını otomatik olarak seçerek bunun üstesinden gelinebilir. SUPG, PSGS ve VMS, ilk tür kararsızlığı çözmek için en popüler stabilizasyon yöntemleri olsa da, bu tez, ilk olarak [16]'da tanıtılan, $\gamma(\nabla \cdot u_h, \nabla \cdot v_h)$ terimiyle birlikte zayıf formülleştirmeye fazladan bir terim ekleyerek çalışır ve kütlenin korunumu eksikliğinden kaynaklanan hız hatası üzerindeki basıncın etkisini kontrol etmeye yardımcı olur. [17]'de zaman bağımsız Stokes denklemleri ve [18]'de zaman bağımsız Navier-Stokes denklemleri incelenmiştir. [19] da, geriye doğru Euler yöntemi, BDF2 ve Crank-Nicolson şemalarının tam ayrık ve sürekli-zaman durumlarıyla grad-div stabilize zamana bağlı Oseen problemi küçük viskozite için incelenmiştir. [20]'de, zamana bağlı Navier-Stokes denklemlerinin inf-sup kararlı sonlu eleman ayrıklaştırmalarını analiz etmek için grad-div stabilize edilmiş tamamen ayrık örtük Euler yöntemi kullanılmıştır. Grad-div parametresi γ' nın seçimi açık bir problemdir; [21, 22]'de, $O(1)$ penaltı parametresi seçiminin genel olarak iyi bir seçim olduğu gözlemlenmiştir. [23]'de, grad-div çözümlerinin limiti stabilize edilmiştir. Taylor-Hood elemanları ile Navier-Stokes denklemleri, Scott-Vogelius elemanları ile Navier Stokes denklemlerinin çözümlerine yakınsar ve stabilizasyon parametresi $\gamma \to \infty$'ye giderken iyi bir performans elde edildiği görülmüştür. Bu, büyük γ parametre değerlerinin seçilmesinin çözümlere zarar vermeyeceği anlamına gelir. Çalışmada, BDF2 zaman ayrıklaştırması ile elde edilen tamamen ayrık yaklaşımın çözümünün kararlı ve yakınsak olduğu gösterilmiştir. Aşağıda sonraki bölümlerde nasıl bir yol izlendiği ifade edilmiştir.

Bölüm 2: Tez boyunca sıklıkla kullanılan bazı tanımlar, teoremler, lemmalar ve açıklamalar sunulmuştur.

Bölüm 3**:** Bu bölümde, tezin ana konusu olan sayısal yönteme zemin hazırlaması için NSD'nin Galerkin sonlu eleman formülasyonu ve Leray-α modelinin sayısal analizi verilmiştir.

Bölüm 4: Bu bölümde ilk önce kullanılacak olan şema sonlu eleman uzayı boyutunda verilmiştir ve önerilen modelin ayrık yaklaşımının çözümünün kararlı olduğu gösterilmiştir. Kararlılık özelliğinin bir sonucu olarak çözümlerin varlık ve tekliğinden bahsedilip çalışmanın temel teoremi olan yakınsaklık sonucu ortaya konulmuştur.

Bölüm 5**:** Bu bölümde teorik sonuçları doğrulamak için sayısal bir simülasyon sunulmuştur.

Bölüm 6: Bu bölümde tezde genel olarak yapılan işler özetlenmiş ve ileride yapılması muhtemel çalışmalar hakkında öneriler sunulmuştu

2. GÖSTERİMLER VE MATEMATİKSEL ÖN HAZIRLIKLAR

Tanım 2.1. (Lebesgue Uzayı $L^p(\Omega)$): $\Omega \subset R^d$ ve p pozitif bir reel sayı olsun. Tüm ölçülebilir fonksiyonların sınıfı şu şekilde tanımlanır:

$$L^p(\Omega) := \left\{ u : \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

Burada $u, 1 \leq p < \infty$ için Ω üzerinde tanımlanan ölçülebilir bir fonksiyondur. $L^p(\Omega)$ uzayın da ki norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Açıklama 2.1**.** Bu tezde aşağıdaki gibi tanımlanan $L^2(\Omega)$ uzayı sıklıkla kullanılacaktır.

$$L^2(\Omega) := \left\{ u : \int_\Omega |u(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

Daha sonra $L^2(\Omega)$ normu şu şekilde gösterilecektir:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

ve $L^2(\Omega)$ uzayında iç çarpım

$$(u, v) = \int_\Omega u(x) v(x) dx$$

şeklinde olur.

Tanım 2.2. ($L^{\infty}(\Omega)$ Uzayı): $L^{\infty}(\Omega)$ uzayı, hemen hemen tüm $x \in \Omega$ için sınırlı olan tüm fonksiyonların uzayıdır ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$L^{\infty} := \{u: |u(x)| < \infty \ \ hemen\ hemen\ her\ x \in \Omega\ için\}$,

$L^{\infty}(\Omega)$ uzayının normu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$\|u\|_{\infty} \coloneqq ess \sup_{x\in\Omega} |u(x)|$.

Tanım 2.3. (Sobolev Uzayı $W^{k,p}(\Omega)$): k, pozitif bir tam sayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Sobolev uzayı $W^{k,p}(\Omega)$, tüm integrallenebilir $u : \Omega \to R$ fonksiyonlardan oluşur $u : \Omega \to R$ öyle ki her çoklu $\alpha \ ile\ |\alpha| \leq k$ indeksi için, $D^{\alpha}u$ türevi zayıf anlamda mevcuttur ve $L^{p}(\Omega)$'ye aittir.

$W^{k,p}(\Omega) \coloneqq \{u \in L^{p}(\Omega): D^{\alpha}u \in L^{p}(\Omega)\ for\ |\alpha| \leq k\}$.
$W^{k,p}(\Omega)$ normu

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}u\|^{p}_{L^{p}(\Omega)} \right)^{1/p} & , p \in [1,\infty)\ için \\ \sum_{|\alpha| \leq k} ess \sup_{x\in\Omega} |u(x)| & , p = \infty\ için \end{cases}$$

olur.

Açıklama 2.2.

• Sobolev uzayında $W^{k,p}(\Omega)$ 'de $k = 0$ ise, o zaman $L^{p}(\Omega) = W^{0,p}(\Omega)$ olur.

• $p = 2$ için Sobolev uzayları Hilbert uzaylarıdır. Bu, sonlu elemanlar analizinde en sık kullanılan uzaylardan birisidir.

$W^{k,2}(\Omega) = H^{k}(\Omega)$.

Tanım 2.4. (Uzay-Zaman Fonksiyonlarının Uzayları): $(0,T)$ zaman aralığında tanımlanan $u(x,t)$ fonksiyonları için, uzay-zaman fonksiyonunun uzayı şu şekilde tanımlanır:

$$L^p\,(0,T;\,H^k\,)\;=\;\{\,u(x,t):\int_0^T\|u(\cdot,t)\|_k^p\;\;dt\;<\;\infty\,\},\qquad p\;\in\;[1,\infty)$$

normu ise

$$\|u\|_{p,k}=\left(u(x,t):\int_0^T\|u(.,t)\|_k^p dt<\infty\right)^{1/p},\qquad p\;\in\;[1,\infty)$$

şeklindedir. Ayrıca, p sonsuz olduğunda, norm şu şekilde gösterilir:

$$\|u\|_{\infty,k}\coloneqq ess\sup_{t\in[0,T]}\|u(.,t)\|_k\,.$$

Teorem 2.1. (Divergens Teoremi): $\Omega\subset R^d$ ve $\partial\Omega$, Ω bölgesinin sınırı olsun. $\partial\Omega$ bir Lipschitz fonksiyonunun grafiği olacak kadar düzgüNSD, $\hat{n}$ dış birimi normaldir ve u yeterince düzgündür, o zaman

$$\int_\Omega\nabla\cdot u\,dx=\int_{\partial\Omega}u\cdot\hat{n}\,ds$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 2.5. (Dual Norm): $f\in L^2(\Omega)$ ve H^{-1} de tanımlanmış normu

$$\|f\|_{-1}\coloneqq\sup_{v\in H_0^1(\Omega)}\frac{(f,v)}{\|\nabla v\|}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.2. (Hölder Eşitsizliği): $u \in L^p(\Omega)\ ve\ v \in L^q(\Omega)$ ile $p, q \in [1, \infty]$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Öyleyse $u, v \in L^1(\Omega)$ ve aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)|dx \leq \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} |v(x)|^q \right)^{1/q}$$

Teorem de $p = q = 2$ alınırsa, çok iyi bilinen Cauchy-Schwarz'a eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.3. (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği): $u, v \in L^2(\Omega)$ ise

$$|(u, v)| \leq \|u\|\|v\|$$

olur.

Teorem 2.4. (Young Eşitsizliği): $a, b \geq 0\ ,\ p, q \leq 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Öyleyse

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

olur. Ayrıca, Young eşitsizliğinin en sık kullanılan durumu şudur:

$$ab \leq \frac{1}{2\varepsilon} a^2 + \frac{\varepsilon}{2} b^2\ , \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Teorem 2.5. (Poincaré Eşitsizliği): $u \in H_0^1$ ise,

$$\|u\| \leq C(\Omega)\|\nabla u\|$$

şeklinde olur.

Teorem 2.6. (Lax-Milgram Teoremi): $a(\cdot,\cdot): X \times X \to \mathbb{R}$ olsun. Burada $X = H_0^1$ dir. $c_1,\ c_2$ pozitif sabitler olmak üzere $a(\cdot,\cdot)$ bilineer formu

$a(u,v) \leq c_1 \|u\|_X \|v\|_X , \quad \forall u,v \in X$

$a\ (u,u) \geq c_2 \|u\|_X^2 \quad , \quad \forall u \in X$

özellikleri c_1, c_2 gibi pozitif sabitlerle sağlansın.

$F: X \to R$ bir lineer fonksiyonel olsun ve $F(v) \leq C \|v\|_X , \quad \forall v \in X$

sağlansın . O zaman, tek bir $u \in X$ vardır. Öyle ki

$a(u,v) = F(v), \forall v \in X$

eşitliği sağlanır.

Ayrık uzaylar için özellikler:

$$\| |v| \|_{p,k} := \left(\sum_{n=0}^{M} \Delta t \|v_n\|_k^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve

$$\| |v| \|_{\infty,k} := \sup_{0<n\leq M} \| v_n \|_k$$

şeklinde verilebilir.

Yukarıdakiler gibi sonlu eleman uzaylarının aşağıdaki yaklaşım özellikleri tekrar kullanılır.

Lemma 2.1.

$$\inf_{v\in X_h} \|u-v\| \le Ch^{k+1}|u|_{k+1} \quad , \qquad u \in H^{k+1}(\Omega)\,,$$

$$\inf_{v\in X_h} \|\nabla(u-v)\| \le Ch^{k}|u|_{k+1} \quad , \qquad u \in H^{k+1}(\Omega)\,,$$

$$\inf_{v\in Q_h} \|p-r\| \le Ch^{s+1}|p|_{s+1} \quad , \qquad p \in H^{s+1}(\Omega)\,,$$

İspat:

Bu, Bramble-Hilbert lemmasının doğal bir sonucudur [8].

Lemma 2.2. (Ayrık Gronwall Eşitsizliği): $\Delta t, H, a_n,\ b_n,\ c_n, d_n > 0$ olsun öyle ki

$$a_l + \Delta t \sum_{n=0}^{l} b_n \le \Delta t \sum_{n=0}^{l} d_n a_n + \Delta t \sum_{n=0}^{l} c_n + H,$$

ve $\forall n\ için\ \ \Delta t d_n < 1$ varsayalım.

$$a_l + \Delta t \sum_{n=0}^{l} b_n \le exp(\Delta t \sum_{n=0}^{l} \frac{d_n}{1-\Delta t d_n}) \left(\Delta t \sum_{n=0}^{l} c_n + H \right)$$

olur. [11]

Lemma 2.3. (Zamansal Türevlerin Ayrıklaştırılması için Tutarlılık Hataları):

$\partial_{tt} v \in L^2(t_n, t_{n+1}; L^2(\Omega))$ olsun.

$$\left\| \partial_t v_{n+1} - \frac{v_{n+1}-v_n}{\Delta t} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \le \Delta t \|\partial_{tt} v\|^2_{L^2(t_n,t_{n+1};L^2(\Omega))}$$

eşitsizliği sağlanır. Ek olarak ise $\partial_{ttt} v \in L^2(t_n, t_{n+1}; L^2(\Omega))$ olsun. Sonra;

$$\left\| \partial_t v_{n+1/2} - \frac{v_{n+1}-v_n}{\Delta t} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \le \Delta t^3 \|\partial_{ttt} v\|^2_{L^2(t_n,t_{n+1};L^2(\Omega))}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Taylor'ın kalanlı integral formülü veya benzer şekilde parçalara göre entegrasyonu

$$v_n = v_{n+1} - \Delta t \partial_t v_{n+1} + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_n) \partial_{tt} v dt,$$

$$\partial_t v_{n+1} - \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_n) \partial_{tt} v dt$$

eşitliklerini verir. Sonra, Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanır, ortaya çıkan faktörlerden birinin uzaya bağlı olmadığını gözlemleyerek Fubini Teoremi uygulanılırsa

$$\left\| \partial_t v_{n+1} - \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\Delta t^2} \left\| \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_n)^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} (\partial_{tt} v)^2 dt \right)^{1/2} \right\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$= \frac{1}{\Delta t^2} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_n)^2 dt \right) \left(\int_{\Omega} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\partial_{tt} v)^2 dt dx \right)$$

$$= \frac{1}{\Delta t^2} \frac{\Delta t^3}{3} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} (\partial_{tt} v)^2 dx dt$$

$$= \Delta t \| \partial_{tt} v \|^2_{L^2(t_n, t_{n+1}; L^2(\Omega))}$$

elde edilir. Basitlik adına, $\frac{1}{3}$ faktörü 1 olarak alınmıştır. Diğer eşitsizliğin ispatı da aynı şekilde ilerlemiştir. [14]

Tanım 2.5. Skew-simetrik trilinear form $b : X \times X \times X \to R$ şu şekilde tanımlanır:

$$b(u, v, w) := \frac{1}{2}\big((u.\nabla)v, w\big) - \frac{1}{2}\big((u.\nabla)w, v\big) \tag{2.1}$$

$v, w \in X$ ve $u \in V$ için

$b\ (u,v,w) = ((u.\nabla)v,w)$

Ve

$b\ (u,v,v) = 0 \quad \forall u,v\ \in\ X$

şeklindedir. Aşağıda b 'nin daha sonra kullanılacak bazı özellikleri verilmiştir.

Lemma2.4. $u,v,w\ \in\ X$ ve $v,\nabla v\ \in\ L^{\infty}(\Omega)$ için trilinear terim b aşağıdaki gibi sınırlandırılabilir:

$$|b\ (u,v,w)| \leq \frac{1}{2}(\|u\|\|\nabla v\|_{\infty}\|w\| + \|u\|\|\nabla w\|\|v\|_{\infty}), \tag{2.2}$$

$$|b\ (u,v,w)| \leq C_0(\Omega)\|\nabla u\|\|\nabla v\|\ \|\nabla w\|, \tag{2.3}$$

$$|b\ (u,v,w)| \leq C_0(\Omega)\|u\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla v\|\ \|\nabla w\|. \tag{2.4}$$

İspat: Üç fonksiyon için genelleştirilmiş Hölder eşitsizliğinden yararlanılır:

$$\int_{\Omega} |u||v||w| \leq \|u\|_{L^q}\|v\|_{L^p}\|w\|_{L^r}\ , \qquad \frac{1}{q}+\frac{1}{p}+\frac{1}{r} = 1\ \ ,1 \leq p,q,r \leq \infty.$$

İlk eşitsizlik için üçgen eşitsizliği ve $v,\nabla v\ \in L^{\infty}$varsayımları kullanılarak elde edilir.

$$\begin{aligned} |b\ (u,v,w)| &\leq \frac{1}{2}(\int_{\Omega} |u||\nabla v||w| + \int_{\Omega} |u||\nabla w||v| \\ &\leq \frac{1}{2}(\|\nabla v\|_{\infty}\int_{\Omega} |u||w| + \|v\|_{\infty}\int_{\Omega} |u||\nabla w| \\ &\leq \frac{1}{2}(\|\nabla v\|_{\infty}\|\nabla u\|\ \|\mathrm{w}\|\ + \|v\|_{\infty}\|\nabla u\|\ \|\nabla \mathrm{w}\|). \end{aligned}$$

İkinci eşitsizlik için $q\ =\ 2$ ve $p\ =\ r\ =\ 4$ olan genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği kullanılır.

$q = 4, p = \frac{1}{2}$ ve dolayısıyla $m = \frac{3}{4}$ ile Sobolev gömme teoremini ve ardından $s_1 = 0$,

$s_2 = 1$ ve $\Theta = \frac{1}{4}$ ile enterpolasyon eşitsizliği kullanılarak, L^4 −normları için bir tahmin elde edilir:

$$\|u\|_{L^4} \leq C\|u\|_{H^{\frac{3}{4}}} \leq C\|u\|_{L^2}^{\frac{1}{4}}\|u\|_{H^1}^{\frac{3}{4}}.$$

Poincaré eşitsizliği nedeniyle, H^1 normu ve $\|\nabla v\|_{L^2}$, H_0^1'da eşdeğerdir. Değerleri yerleştirilirse;

$$\begin{aligned}|b(u,v,w)| &\leq \|u\|_{L^4}\|\nabla v\|_{L^2}\|w\|_{L^4} + \|u\|_{L^4}\|\nabla w\|_{L^2}\|v\|_{L^4} \\ &\leq C\|u\|^{\frac{1}{4}}\|\nabla u\|^{\frac{3}{4}}\|\nabla v\|\|w\|^{\frac{1}{4}}\|\nabla w\|^{\frac{3}{4}} + \|u\|^{\frac{1}{4}}\|\nabla u\|^{\frac{3}{4}}\|\nabla w\|\|v\|^{\frac{1}{4}}\|\nabla v\|^{\frac{3}{4}}\end{aligned}$$

olur.

Poincaré eşitsizliğinin gradyan içermeyen terimlere bir kez daha uygulanması, istenen sonucu vermiştir. Son eşitsizlik için genelleştirilmiş Hölder Eşitsizliği kullanılır ve $p = 3, q = 2$

ve $r = 6$ olarak alınır. $q = 3, p = 2$ ve dolayısıyla $m = \frac{1}{2}$ ile Sobolev gömme teoremini ve ardından $s_1 = 0$, $s_2 = 1$ ve $\Theta = \frac{1}{2}$ ile enterpolasyon eşitsizliği kullanarak, L^3 − normu için

$$\|u\|_{L^3} \leq C\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}} \leq C\|u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|u\|_{H^1}^{\frac{1}{2}}$$

ve $q = 6$, $p = 2$ ve dolayısıyla $m = 1$ olan Sobolev gömme teoremini kullanarak L^6-normu için

$$\|u\|_{L^6} \leq C\|u\|_{H^1}$$

elde edilir.

Yine yukarıda belirtilen normların denkliğini kullanarak,

$$|b\ (u,v,w)| \leq \|u\|_{L^3}\|\nabla v\|_{L^2}\|w\|_{L^6} + \|u\|_{L^3}\|\nabla w\|_{L^2}\|v\|_{L^6}$$
$$\leq C\ (\Omega)\|u\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla v\|\ \|\nabla w\|$$

eşitsizliği elde edilir.

3. LERAY-α MODELİ

3.1 Leray-α Modelinin Sürekli Hali

Leray-α modelinin birçok farklı varsayım ve notasyonu olduğu bilinmekle beraber bu çalışma da daha çok Layton [8] tarafından kullanılan notasyon ele alınacaktır. Literatürde genelde periyodik uzaylar için analiz ve tanımlar yapılıyor olsa da buna denk olan bir periyodik olmayan durum ele alınacaktır. Periyodik olmayan durumda kullanılan uzaylar tanımlanırsa,

$\Omega \subset R^d, d \in (2,3)$, sınırlı bir bölge olsun.

$\mathrm{Q} = L_0^2(\Omega), \qquad X = H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), \qquad v = 0 \quad \partial\Omega\}.$

Zayıf diverjanssız fonksiyonların uzayı:

$V = \{v \in X, (\nabla . v, q) = 0 \ , \forall q \in Q\}$

şeklinde tanımlanır.

τ^h, maksimum eleman çapı h olan düzenli bir ağ olsun. X_h ve Q_h sonlu eleman uzaylarının uyumlu olduğu, yani $X_h \subset X$ ve $Q_h \subset Q$ olduğu ve LBB^h koşulunu sağladığı varsayılır. X_h'nin ayrık sapmadan bağımsız V_h alt kümesi,

$V_h = \{v_h \in X_h, \qquad (\nabla . v_h , q_h) = 0 \ , \forall q_h \in Q^h\}$

şeklinde olur. $H^k = W^{k,2}$ 'de norm $\|\cdot\|_k$ ile, yarı-norm $|\cdot|_k$ ile gösterilir. Bu uzaylar $L^p((0,T);\ H^k)$ uzayları ile tanımlanan sonlu normlara sahip olarak tanımlanır.

$$\| v \|_{p,k} := \left(\int_0^T \| v(t,.) \|_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad , \ 1 \le p < \infty, \tag{3.1}$$

ve

$$\| v \|_{\infty,k} := ess \sup_{0<t<T} \| v(t,.) \|_k \quad , \qquad p = \infty \tag{3.2}$$

$\Omega \epsilon R^d$, $d \in (2,3)$ Lipschitz sınırı Γ ile sınırlı bir bölge olsun ve $\alpha > 0$ bir sabit olsun. Daha sonra, hız için homojen sınır koşullarına sahip Leray-α modeli şu şekilde verilir:

$$\begin{aligned} u_t - v\Delta u + (\bar{u}.\nabla)u + \nabla p &= f, \quad (0,T] \times \Omega \\ \nabla . u &= 0\,, \quad (0,T] \times \Omega, \\ u &= 0 \\ u(0,.) &= u_0\,, \qquad \Omega \\ -\alpha^2 \Delta \bar{u} + \bar{u} &= u \quad , \ (0,T] \times \Omega \\ \bar{u} &= 0 \ , \quad (0,T] \in \Gamma \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\int_{\Omega} p \, dx = 0, \qquad (0,T]$$

Düzleştirilmiş veya düzenli hız alanı, üç skaler Helmholtz denkleminin (diferensiyel filtre) çözümüyle elde edilir.

Daha sonra (2.1) için Leray-α modeli

$$\left.\begin{aligned} u_t - v\Delta u + \bar{u}\nabla u + \nabla p &= f, \\ \nabla . u = 0 \qquad \Omega x(0,T), \\ + \text{Başlangıç koşulu ve sınır koşulu,} \end{aligned}\right\}$$

şeklindedir ve $-\alpha^2 \Delta \bar{u} + \bar{u} = u$ da α → 0 iken ū → u olur ve sistem Navier Stokes' a yakınsar.

Zayıf formülasyonunda da

$$\left.\begin{aligned} (u_t, v) + b\,(\bar{u}, u, v) + v(\nabla u, \nabla u) + (p, \nabla . v) &= (f, v) \\ (\nabla . u, q) = 0 \qquad \forall q \in Q, \\ + \text{Başlangıç koşulu} \end{aligned}\right\}$$

olur.

3.2. NSD'nin Galerkin Sonlu Eleman Formülasyonu

NSD'nin Galerkin sonlu eleman formülasyonunun ilk adımı, uygun sonlu eleman uzaylarının seçilmesidir. Inf-sup koşulunu [4], [9] karşılaması gereken hız için $X_h \subset X$ ve basınç için $Q_h \subset Q$ almamız gerekmektedir. Bu durum inf-sup koşulu

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{v_h \in X_h} \frac{(q,\nabla.v)}{\|\nabla v\|\|q\|} \geq \beta > 0 \tag{3.4}$$

ile verilir.

Daha sonra, NSD'nin değişken formülasyona göre

$(u,p) \in (X,Q)$ için

$$(u_t,v) + b\,(u,u,v) + v(\nabla u,\nabla u) + (p,\nabla.v) = (f,v) \tag{3.5}$$
$$(\nabla.u,q) = 0 \qquad \forall q \in Q$$

$\forall x \in X$ ve $\forall q \in Q$ için varyasyonel halini elde etmiş oluruz.

Tanım 3.2.1. $u \in L^2(\Omega)$ ve $\alpha > 0$ için u üzerindeki filtreleme işlemi $\bar{u}$'dir. Burada $\bar{u}$ tek çözüm olup aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$-\alpha^2\Delta\bar{u} + \bar{u} = u$$

$\bar{u}$, sürekli diferensiyel filtre olarak adlandırılır. $F := (-\alpha^2\Delta + I)$ ile gösterilir ve $F^{-1}u = \bar{u}$ elde edilir.

Tanım 3.2.2. L^2 projeksiyonu $\Pi^h: L^2 \to X_h$ olsun. O zaman,

$$\left(\Pi^h u - u, v\right) = 0 \quad \forall v \in X_h$$

dir. Ayrık Laplacian operatörü $\Delta_h: X \to X^h$ olsun. O zaman,

$$(\Delta_h u, v) = -(\nabla u, \nabla v) \quad \forall v \in X_h$$

dir. Bu eşitliklere göre de $F_h = -\alpha^2\Delta_h + \Pi^h$eşitliğini elde edilir [12]. Buna göre bu filtrenin ayrık versiyonu aşağıdaki tanımda verilmiştir.

3.3. Diferensiyel Filtre

Tanım 3.3.1: $u \in L^2(\Omega)$ ve $\alpha > 0$ için u üzerindeki ayrık filtreleme işlemi $\overline{u}$'dir. O zaman,

$$\alpha^2(\nabla\overline{u}, \nabla v) + (\overline{u}, v) = (u, v) \quad , \quad \forall v \in V . \tag{3.6}$$

denkleminin X deki tek çözümü $\overline{u}$ dir. Buradan da $u = F\overline{u}$ elde edilir. Buradaki filtreleme mantığı ayrık yerine sürekli değişkenler içinde aynı şekilde geçerli olacaktır.

Lemma 3.3.1. (Diferensiyel Filtrenin Kararlılığı): $u \in X$ için

$$\|\overline{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.7}$$

$$\|\nabla\overline{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.8}$$

İspat: Diferensiyel filtrenin (3.6) tanımında $v = \overline{u}$ alınsın. Daha sonra, Cauchy-Schwarz ve Young eşitsizliğini kullanarak $p = q = \frac{1}{2}$ alınırsa

$$\alpha^2(\nabla\overline{u}, \nabla\overline{u}) + (\overline{u}, \overline{u}) = (u, \overline{u})$$
$$\alpha^2\|\nabla\overline{u}\|^2 + \|\overline{u}\|^2 \leq \|u\|\|\overline{u}\|$$
$$\alpha^2\|\nabla\overline{u}\|^2 + \|\overline{u}\|^2 \leq \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\|\overline{u}\|^2$$

elde edilir. Burada $\alpha^2\|\nabla\overline{u}\|^2 > 0$ olduğundan;

$\|\overline{u}\|^2 \leq \|u\|^2$ yazılır ve $\|\overline{u}\|^2 > 0$, $\|u\|^2 > 0$ olduğundan,

$$\|\overline{u}\| \leq \|u\|$$

olur.

(3.6) da $v = \nabla\overline{u}$ alınırsa;

$\|\nabla\overline{u}\| \leq \|\nabla u\|$

olur.

Lemma 3.3.2. (u Cinsinden Ayrık Diferensiyel Filtre için Hata Tahmini): $u \in X$,$\Delta u \in L^2(\Omega)$

$$\alpha^2\|\nabla(u-\overline{u_h})\|^2 + \|u-\overline{u_h}\|^2 \leq C\,(\inf_{v^h\in V^h}(\alpha^2\|\nabla(u-v_h)\|^2 + \|u-v_h\|^2) + \alpha^4\|\Delta u\|^2) \quad (3.9)$$

$$\|\nabla(u-\overline{u_h})\| \leq \frac{C}{\alpha}\,((\alpha + h)\|\nabla(u)\| + \alpha^2\|\Delta u\|) \quad (3.10)$$

$$\|u-\overline{u_h}\| \leq C\,((\alpha + h)\|\nabla(u)\| + \alpha^2\|\Delta u\|) \quad (3.11)$$

İspat:

$$\alpha^2(\nabla u, \nabla v_h) + (u, v_h) = -\alpha^2(\Delta u, \nabla v_h) + (u, v_h) \quad , \forall v_h \in V^h \quad (3.12)$$

olup (3.12) denkleminden (3.6) denklemi çıkartılıp $e = u - \overline{u_h}$ yazılırsa

$\alpha^2(\nabla e, \nabla v_h) + (e, v_h) = -\alpha^2(\Delta u, \nabla v_h)$, $\forall v_h \in V^h$ olup,

$e = (u - I^h U) - (\overline{u_h} - I^h U) = \eta - \varphi^h$, $I^h U \in V^h$

alınır. $v_h = \varphi^h$ seçilir.

$$\alpha^2(\nabla\varphi^h, \nabla\varphi^h) + (\varphi^h, \varphi^h) = \alpha^2(\nabla\eta, \nabla\varphi^h) + (\eta, \varphi^h) + \alpha^2(\Delta u, \varphi^h) \quad (3.13)$$

olur.

(3.13) eşitliğinde Cauchy–Schwarz ve Young eşitsizliği uygulanırsa

$$\alpha^2\|\nabla\varphi^h\|^2 + \|\varphi^h\|^2 \leq \alpha^2\|\nabla\eta\|\|\nabla\varphi^h\| + \|\eta\|\|\varphi^h\| + \alpha^2(\Delta u, \varphi^h)$$
$$\leq \frac{\alpha^2}{2}\|\nabla\eta\|^2 + \frac{\alpha^2}{2}\|\nabla\varphi^h\|^2 + \|\eta\|^2 + \frac{1}{4}\|\varphi^h\|^2 + \alpha^4\|\Delta u\|^2 + \frac{1}{4}\|\varphi^h\|^2$$

elde edilir ve ilgili terimleri sol tarafa atılıp 2 ile çarpılırsa;

$\alpha^2\|\nabla e\|^2 + \|e\|^2 \leq 2(\alpha^2\|\nabla\eta\|^2 + \alpha^2\|\nabla\varphi^h\|^2 + \|\eta\|^2 + \|\varphi^h\|^2)$
$\|e\| = \|\eta\| + \|\varphi^h\|$ ve $\varphi^h \leq C\eta$ olup;
$\|e\| \leq \|\eta\| + C\|\eta\|$
$\|e\| \leq C\|\eta\|$
$\|e\| \leq Cinf\|u - I^h U\|$ olur. Buradan

$$\|u - \overline{u_h}\| \leq C[\,((\alpha + h)\|\nabla(u)\| + \alpha^2\|\Delta u\|\,) \tag{3.14}$$

yazılır. Aynı şekilde Δu nun hatası

$$\|\nabla(u - \overline{u_h})\| \leq \frac{C}{\alpha}\,((\alpha + h)\|\nabla(u)\| + \alpha^2\|\Delta u\|\,) \tag{3.15}$$

şeklinde yazılır.

3.4. Kesikli Diferensiyel Filtre

Tanım 3.4.1. (Kesikli Diferensiyel Filtre): $\Omega \subset R^d$, sınırlı ve Γ Lipschitz sınırına sahip olsun.

$\alpha > 0$ için $u \in H_0^1(\Omega)$ $(H_0^1(\Omega) = X\,)$ için u nun diferensiyel filtresi $\overline{u_h} \in X_h$;

$$\alpha^2(\nabla\overline{u_h}, \nabla v_h) + (\overline{u_h}, v_h) = (u_h, v_h) \quad , \quad \forall v_h \in V_h. \tag{3.16}$$

denkleminin çözümüdür. f kuvveti, u_h^0, u_h^{-1} başlangıç değerleri ve $\alpha \leq O(h)$ verilsin.

$n = 0,1, \ldots, N-1$ ve Δt zaman adımı için $\overline{U_h^n} \in X_h$ bulunuz. Öyle ki;

$$\alpha^2\left(\nabla\overline{U_h^n},\nabla v_h\right)+\left(\overline{U_h^n},v_h\right)=(2u_h^n-u_h^{n-1},v_h)\quad,\quad\forall v_h\in V^h. \tag{3.17}$$

Burada $\overline{U_h^n}=\overline{2u_h^n-u_h^{n-1}}$ dir.

Lemma 3.4.1. (U Diferensiyel Filtrenin Kararlılığı): (3.17)denkleminde v_h yerine $\overline{U_h^n}$ alıp Cauchy-Schwarz ve Young eşitsizlikleri kullanılırsa;

$$\alpha^2\left(\nabla\overline{U_h^n},\nabla\overline{U_h^n}\right)+\left(\overline{U_h^n},\overline{U_h^n}\right)=\left(2u_h^n-u_h^{n-1},\overline{U_h^n}\right)$$

$$\alpha^2\left\|\nabla\overline{U_h^n}\right\|^2+\left\|\overline{U_h^n}\right\|^2\le\|2u_h^n-u_h^{n-1}\|\left\|\overline{U_h^n}\right\|$$

$$\alpha^2\left\|\nabla\overline{U_h^n}\right\|^2+\left\|\overline{U_h^n}\right\|^2\le\frac{1}{2}\|2u_h^n-u_h^{n-1}\|^2+\frac{1}{2}\left\|\overline{U_h^n}\right\|^2$$

$$\alpha^2\left\|\nabla\overline{U_h^n}\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|\overline{U_h^n}\right\|^2\le\frac{1}{2}\|2u_h^n-u_h^{n-1}\|^2$$

Burada $\alpha^2\left\|\nabla\overline{U_h^n}\right\|^2>0$ olduğundan; $\left\|\overline{U_h^n}\right\|^2\le\|2u_h^n-u_h^{n-1}\|^2$ yazılır ve $\left\|\overline{U_h^n}\right\|^2>0$, $\|2u_h^n-u_h^{n-1}\|^2>0$ olduğundan,

$$\left\|\overline{U_h^n}\right\|\le\|2u_h^n-u_h^{n-1}\| \tag{3.18}$$

olur. (3.17) de $v_h=\nabla\overline{U_h^n}$ alınırsa;

$$\left\|\nabla\overline{U_h^n}\right\|\le\|\nabla(2u_h^n-u_h^{n-1})\|\ . \tag{3.19}$$

olur.

Lemma 3.4.2. (U Diferensiyel Filtresindeki Hata): $U^n\in X$,$\Delta U^n\in L^2(\Omega)$ olsun.

$$\alpha^2\left\|\nabla\left(U_h^n-\overline{U_h^n}\right)\right\|^2+\left\|U_h^n-\overline{U_h^n}\right\|^2$$

$$\le C\inf_{v^h\in\mathcal{X}^h}(\alpha^2\|\nabla(U_h^n-v_h)\|^2+\|U_h^n-v_h\|^2)+\alpha^4\|\Delta U_h^n\|^2) \tag{3.20}$$

olur. Burada C, α ve h a bağlı değidir. O halde;

$$\left\|\nabla\left(U_h^n - \overline{U_h^n}\right)\right\| \leq \frac{C}{\alpha}\left((\alpha + h)\|\nabla(U_h^n)\| + \alpha^2\|\Delta U_h^n\|\right) \quad (3.21)$$

$$\left\|U_h^n - \overline{U_h^n}\right\| \leq C\left((\alpha + h)\|\nabla(U_h^n)\| + \alpha^2\|\Delta U_h^n\|\right) \quad (3.22)$$

olur.

İspat:

$$\alpha^2(\nabla U_h^n, \nabla v_h) + (U_h^n, v_h) = -\alpha^2(\Delta U_h^n, \nabla v_h) + (U_h^n, v_h) \quad , \forall v_h \in V^h \quad (3.23)$$

(3.23) denkleminden (3.18)denklemi çıkartılıp $e = U_h^n - \overline{U_h^n}$ yazılırsa

$$\alpha^2(\nabla e, \nabla v_h) + (e, v_h) = -\alpha^2(\Delta U_h^n, \nabla v_h) \qquad , \forall v_h \in V_h$$

olup,

$$e = (U_h^n - I^h U) - \left(\overline{U_h^n} - I^h U\right) = \eta - \varphi^h \qquad , I^h U \in V_h$$

alınır. $v_h = \varphi^h$ seçilir.

$$\alpha^2(\nabla\varphi^h, \nabla\varphi^h) + (\varphi^h, \varphi^h) = \alpha^2(\nabla\eta, \nabla\varphi^h) + (\eta, \varphi^h) + \alpha^2(\Delta U_h^n, \varphi^h) \quad (3.24)$$

olur.

(3.24) eşitliğinde Cauchy–Schwarz ve Young eşitsiliği uygulanırsa

$$\alpha^2\|\nabla\varphi^h\|^2 + \|\varphi^h\|^2 \leq \alpha^2\|\nabla\eta\|\|\nabla\varphi^h\| + \|\eta\|\|\varphi^h\| + \alpha^2(\Delta U_h^n, \varphi^h)$$

$$\leq \frac{\alpha^2}{2}\|\nabla\eta\|^2 + \frac{\alpha^2}{2}\|\nabla\varphi^h\|^2 + \|\eta\|^2 + \frac{1}{4}\|\varphi^h\|^2 + \alpha^4\|\Delta U_h^n\|^2 + \frac{1}{4}\|\varphi^h\|^2$$

olup ilgili terimleri sol tarafa atılıp 2 ile çarpılırsa;

$$\alpha^2\|\nabla e\|^2 + \|e\|^2 \leq 2(\alpha^2\|\nabla\eta\|^2 + \alpha^2\|\nabla\varphi^h\|^2 + \|\eta\|^2 + \|\varphi^h\|^2)$$

$\|e\| = \|\eta\| + \|\varphi^h\|$ ve $\varphi^h \leq C\eta$ olup;

$\|e\| \leq \|\eta\| + C\|\eta\|$

$\|e\| \leq C\|\eta\|$

$\|e\| \leq Cinf\|U_h^n - I^h U\|$ olur. Buradan

$$\left\|U_h^n - \overline{U_h^n}\right\| \leq C[\,((\alpha + h)\|\nabla(U_h^n)\| + \alpha^2\|\Delta U_h^n\|\,) \tag{3.25}$$

yazılır. Aynı şekilde ΔU_h^n nun hatası

$$\left\|\nabla\left(U_h^n - \overline{U_h^n}\right)\right\| \leq \frac{C}{\alpha}\,((\alpha + h)\|\nabla(U_h^n)\| + \alpha^2\|\Delta U_h^n\|\,) \tag{3.26}$$

şeklinde yazılır.

4. GRAD-DİV KARARLILAŞTIRILMIŞ BDF-2 ZAMAN ADIMLI LERAY-α MODELİNİN SAYISAL ANALİZİ

Bu bölümde ilk önce kullanılacak olan şema sonlu eleman uzayı boyutunda verilecek ve önerilen modelin ayrık yaklaşımının çözümünün kararlı olduğu gösterilecektir. Kararlılık özelliğinin bir sonucu olarak çözümlerin varlık ve tekliğinden bahsedilip çalışmanın temel teoremi olan yakınsaklık sonucu ortaya konulacaktır.

Öncelikle yaklaşıma uygun asimptotik hata tahminlerini oluşturmak için (u,p) çözümün düzenli olduğunu varsaymamız gerekir:

$$u \in L^{\infty}\Big(0,T;H^{k+1}\cap V\cap H^{3}(\Omega)\Big),\quad u_{tt}\in L^{2}\big(0,T;H^{1}(\Omega)\big),\quad u_{ttt}\in L^{2}\big(0,T;L^{2}(\Omega)\big),$$

$$p \in L^{\infty}\Big(0,T;H^{k}(\Omega)\Big).$$

Kullanılacak olan algoritma aşağıda verilmiştir:

Algoritma : Dış kuvvet f, başlangıç koşulları u_h^0, u_h^{-1}, filtre yarıçapı $\alpha \le O(h)$ verilsin. Δt zaman adımı olsun. Öyleyse $n = 0,1,\dots,N-1$ zamanlarında ve $(u_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in (X_h, Q_h)$ çözümlerini bulunuz.

$$\frac{1}{2\Delta t}(3u_h^{n+1}-4u_h^{n}+u_h^{n-1},X_h)+b\big(\overline{U_h^{n}},u_h^{n+1},X_h\big)+\nu(\nabla u_h^{n+1},\nabla X_h)$$

$$-(p_h^{n+1},\nabla.X_h)+\gamma(\nabla.u_h^{n+1},\nabla.X_h)=(f^{n+1},X_h) \qquad (4.1)$$

$$(\nabla.u_h^{n+1},p_h^{n+1})=0$$

Verilen modeldeki $\overline{U_h^n}$ terimi vasıtasıyla şema bir dışkestirim şeklinde lineerleştirilmiş olup kodlama yapılırken bunun dışında bir Newton ya da sabit nokta gibi bir yönteme ihtiyaç duyulmamaktadır. Bu şekilde her bir zaman adımında sadece bir tane lineer denklem sistemi çözülecek olup hesap zamanı ve sistem karmaşası anlamında avantaj sağlanmıştır.

4.1. Kararlılık

Teorem 4.1.1: $f \in L^{\infty}(0,T;H^{-1}(\Omega))$ ve başlangıç şartları $u_h^0, u_h^{-1} \in V_h$ olsun. Filtreleme yarıçapı $\alpha \leq O(h)$ ve bulunan çözüm $u_h^{n+1} \in X^h$, $p_h^{n+1} \in Q^h, n = 0,1,\dots,N-1$ aşağıdaki denklemi sağlar. Öyle ki $v_h \in X_h, q_h \in Q_h, \forall \Delta t > 0$ için,

$$\|u_h^N\|^2 + \|2u_h^N - u_h^{N-1}\|^2 + 2\Delta t\nu \sum_{n=0}^{N-1} \|\nabla u_h^{n+1}\|^2 + 4\Delta t\gamma \sum_{n=0}^{N-1} \|\nabla . u_h^{n+1}\|^2 \tag{4.2}$$
$$\leq \left\|u_h^0\right\|^2 + \left\|2u_h^0 - u_h^{-1}\right\|^2 + 4\Delta t C\nu^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} \|f^{n+1}\|_{-1}^2$$

sağlanır.

İspat:

$v_h = u_h^{n+1}$ seçilir ve V_h uzayınının tanımından ve LBB^h koşulunu sağladığından;

$$\frac{1}{2\Delta t}(3u_h^{n+1} - 4u_h^n + u_h^{n-1}, u_h^{n+1}) + b\left(\overline{U_h^n}, u_h^{n+1}, u_h^{n+1}\right) + \nu(\nabla u_h^{n+1}, \nabla u_h^{n+1})$$
$$- (p_h^{n+1}, \nabla . u_h^{n+1}) + \gamma(\nabla . u_h^{n+1}, \nabla . u_h^{n+1}) = (f^{n+1}, u_h^{n+1})$$

$b\left(\overline{U_h^n}, u_h^{n+1}, u_h^{n+1}\right) = 0$ (skew simetri) ve $(p_h^{n+1}, \nabla . u_h^{n+1}) = 0$ (V_h uzayı tanımından),

$$\frac{1}{2\Delta t}(3u_h^{n+1} - 4u_h^n + u_h^{n-1}, u_h^{n+1}) + \nu(\nabla u_h^{n+1}, \nabla u_h^{n+1}) + \gamma(\nabla . u_h^{n+1}, \nabla . u_h^{n+1}) =$$
$$(f^{n+1}, u_h^{n+1}) \tag{4.3}$$

olur.

Not: Herhangi a, b, c sayısı için,

$$(3a - 4b + c, a) = \frac{a^2 + (2a-b)^2}{2} - \frac{b^2 + (2b-c)^2}{2} + \frac{(a-2b+c)^2}{2} \tag{4.4}$$

olduğu bilinmektedir. $u_h^{n+1} = a\ , u_h^n = b, u_h^{n-1} = c$ olsun. O halde (4.4), (4.3) de uygulanılırsa;

$$(3u_h^{n+1} - 4u_h^n + u_h^{n-1}, u_h^{n+1}\ )$$

$$= \frac{\|u_h^{n+1}\|^2 + \|2u_h^{n+1} - u_h^n\|^2}{2} - \frac{\|u_h^n\|^2 + \|2u_h^n - u_h^{n-1}\|^2}{2} + \frac{\|u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}\|^2}{2}$$

olur. Denklem düzenlenildiğinde,

$$\frac{1}{4\Delta t}[\|u_h^{n+1}\|^2 - \|u_h^n\|^2 + \|2u_h^{n+1} - u_h^n\|^2 - \|2u_h^n - u_h^{n-1}\|^2 +$$

$$\|u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}\|^2] + \nu\|\nabla u_h^{n+1}\|^2 + \gamma\|\nabla . u_h^{n+1}\|^2 = (f^{n+1}, u_h^{n+1}\ ) \qquad (4.5)$$

olur.

Sağ taraf:

$$(f^{n+1}, u_h^{n+1}\ ) \le \sup \frac{(f^{n+1}, u_h^{n+1}\ )}{\|\nabla u_h^{n+1}\|} \|\nabla u_h^{n+1}\| \le \|f^{n+1}\|_{-1} \|\nabla u_h^{n+1}\|$$

Young eşitsizliğinden

$$(f^{n+1}, u_h^{n+1}\ ) \le C\nu^{-1}\|f^{n+1}\|_{-1}^{2} + \frac{\nu}{2}\|\nabla u_h^{n+1}\|^2 \qquad (4.6)$$

olur. (4.5) ve (4.6) toparlanıldığında,

$$\frac{1}{4\Delta t}[\|u_h^{n+1}\|^2 - \|u_h^n\|^2 + \|2u_h^{n+1} - u_h^n\|^2 - \|2u_h^n - u_h^{n-1}\|^2$$

$$+ \|u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}\|^2] + \nu\|\nabla u_h^{n+1}\|^2 + \gamma\|\nabla . u_h^{n+1}\|^2 \le C\nu^{-1}\|f^{n+1}\|_{-1}^{2} + \frac{\nu}{2}\|\nabla u_h^{n+1}\|^2$$

olur ve $4\Delta t$ ile çarpıp düzenlenilirse,

$$\|u_h^{n+1}\|^2 - \|u_h^n\|^2 + \|2u_h^{n+1} - u_h^n\|^2 - \|2u_h^n - u_h^{n-1}\|^2$$

$$+\|u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}\|^2 + 2\Delta t\nu \, \|\nabla u_h^{n+1}\|^2 + 4\Delta t\gamma \|\nabla . u_h^{n+1}\|^2 \leq 4\Delta t C\nu^{-1} \|f^{n+1}\|_{-1}^2$$

olur. $\|u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}\|^2 \geq 0$ olduğundan

$$\|u_h^{n+1}\|^2 - \|u_h^n\|^2 + \|2u_h^{n+1} - u_h^n\|^2 - \|2u_h^n - u_h^{n-1}\|^2$$

$$+2\Delta t \ \nu \, \|\nabla u_h^{n+1}\|^2 + 4\Delta t\gamma \|\nabla . u_h^{n+1}\|^2 \leq 4\Delta t C\nu^{-1} \|f^{n+1}\|_{-1}^2 \qquad (4.7)$$

elde edilir. (4.7) de $n = 0,1, \dots, N-1$ e kadar toplam alınırsa,

$$\|u_h^N\|^2 + \|2u_h^N - u_h^{N-1}\|^2 + 2\Delta t\nu \sum_{n=0}^{N-1} \|\nabla u_h^{n+1}\|^2 + 4\Delta t\gamma \sum_{n=0}^{N-1} \|\nabla . u_h^{n+1}\|^2$$

$$\leq \left\|u_h^0\right\|^2 + \left\|2u_h^0 - u_h^{-1}\right\|^2 + 4\Delta t C\nu^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} \|f^{n+1}\|_{-1}^2 \qquad (4.8)$$

elde edilir.

4.2. Hata Analizi

Burada doğrusal olarak ekstrapolasyonlu BDF2 zaman ayrıklaştırması ile elde edilen tamamen ayrık yaklaşımın çözümünün yakınsak olduğunu gösterilmiştir.

Teorem 4.2.1. $(u_h^{n+1}, p_h^{n+1}), [0,T]$ zaman aralığında $n = 0, \cdots, N-1$, Algoritma 4.1 in çözümü olsun ve düzenlilik varsayımları geçerli olsun. Denklemin hatası $e^{n+1} = u^{n+1} - u_h^{n+1}$ şeklinde tanımlansın. C; h ağ genişliğinden ve Δt den bağımsız bir pozitif sabittir. Öyle ki (P_k, P_{k-1}) biçimindeki sonlu eleman seçimleriyle hata

$$\|e^N\|^2 + \|2e^N - e^{N-1}\|^2 + \sum_{n=1}^{N-1}\Big\{\|e^{n+1} - 2e^n + e^{n-1}\|^2 + \Delta t\nu \ \|\nabla e^{n+1}\|^2 + \Delta t\gamma\|\nabla . e^{n+1}\|^2\Big\}$$

$$\leq C(\Delta t^4 + \alpha^2 h^{2k} + \gamma h^{2k} + h^{2k} + \alpha^4)$$

eşitsizliğini sağlar. Burada $C\ \alpha, H$ ve Δt den bağımsız bir sabittir.

İspat:

$$\frac{1}{2\Delta t}(3u_h^{n+1} - 4u_h^n + u_h^{n-1}, v_h) + b\left(\overline{U_h^n}, u_h^{n+1}, v_h\right) + \nu\ (\nabla u_h^{n+1}, \nabla v_h)$$
$$-(p_h^{n+1}, \nabla . v_h) + \gamma(\nabla . u_h^{n+1}, \nabla . v_h) = (f^{n+1}, v_h) \qquad (4.9)$$

$$(u_t, v_h) + b(u^{n+1}, u^{n+1}, v_h) + \nu\ (\nabla u^{n+1}, \nabla v_h) \quad - (p^{n+1}, \nabla . v_h) + \gamma(\nabla . u^{n+1}, \nabla . v_h) + \frac{1}{2\Delta t}(3u^{n+1} - 4u^n + u^{n-1}, v_h)$$
$$= (f^{n+1}, v_h) + \gamma(\nabla . u^{n+1}, \nabla . v_h) + \frac{1}{2\Delta t}(3u^{n+1} - 4u^n + u^{n-1}, v_h) \qquad (4.10)$$

(4.10) eşitliğinden (4.9) eşitliği çıkarılırsa ve $e^{n+1} = u^{n+1} - u_h^{n+1}$ olsun.

$$\frac{1}{2\Delta t}(3e^{n+1} - 4e^n + e^{n-1}, v_h) + b(u^{n+1}, u^{n+1}, v_h) - b\left(\overline{U_h^n}, u_h^{n+1}, v_h\right) + \nu\ (\nabla e^{n+1}, \nabla v_h)$$
$$- (p^{n+1} - q^h, \nabla . v_h) + \gamma(\nabla . e^{n+1}, \nabla . v_h)$$
$$= \left(\frac{3u^{n+1} - 4u^n + u^{n-1}}{2\Delta t} - u_t, v_h\right) \qquad (4.11)$$

olur. Hata $\mathrm{I}_h(u^{n+1}) \in V_h$ interpolasyonu ile ayrıştırılır ise,

$$e^{n+1} = u^{n+1} - u_h^{n+1} = \left(u^{n+1} - I_h(u^{n+1})\right) - \left(u_h^{n+1} - I_h(u^{n+1})\right) = \zeta^{n+1} - \phi_h^{n+1} \qquad (4.12)$$

eşitliği elde edilir. Hata denkleminde $v_h = \phi_h^{n+1}$ seçilirse;

$$\frac{1}{2\Delta t}(3\phi_h^{n+1}-4\phi_h^{n}+\phi_h^{n-1},\phi_h^{n+1})+\nu\,(\nabla\phi_h^{n+1},\nabla\phi_h^{n+1})+\gamma(\nabla.\phi_h^{n+1},\nabla.\phi_h^{n+1})$$
$$=\left(\frac{3\zeta^{n+1}-4\zeta^{n}+\zeta^{n-1}}{2\Delta t},\phi_h^{n+1}\right)+\left(\frac{3u^{n+1}-4u^{n}+u^{n-1}}{2\Delta t}-u_t,\phi_h^{n+1}\right)$$
$$+\nu\,(\nabla\zeta^{n+1},\nabla\phi_h^{n+1})+\gamma(\nabla.\zeta^{n+1},\nabla.\phi_h^{n+1})-(p^{n+1}-q^{h},\nabla.\phi_h^{n+1})$$
$$+\gamma(\nabla.u^{n+1},\nabla.\phi_h^{n+1})+b(u^{n+1},u^{n+1},v_h)-b\left(\overline{U_h^{n}},u_h^{n+1},v_h\right) \qquad (4.13)$$

elde edilir. Daha sonra doğrusal olmayan terimlere $b\left(\overline{e^{n+1}},u^{n+1},\phi_h^{n+1}\right)$ ve $b\left(\overline{U_h^{n+1}},u^{n+1},\phi_h^{n+1}\right)$ terimlerinin eklenip çıkarılması ile de denklem,

$$(\ \overline{u^{n+1}}=\overline{u^{n+1}}-\overline{u_h^{n+1}}+\overline{u_h^{n+1}}=\overline{\zeta^{n+1}-\phi_h^{n+1}+u_h^{n+1}}\ )$$

halini alır.

$$b(u^{n+1},u^{n+1},\phi_h^{n+1})-b\left(\overline{U_h^{n}},u_h^{n+1},\phi_h^{n+1}\right)$$
$$=b\left(u^{n+1}-\overline{u^{n+1}},u^{n+1},\phi_h^{n+1}\right)+b\left(\overline{u^{n+1}},u^{n+1},\phi_h^{n+1}\right)-b\left(\overline{U_h^{n}},u_h^{n+1},\phi_h^{n+1}\right)$$
$$=b\left(u^{n+1}-\overline{u^{n+1}},u^{n+1},\phi_h^{n+1}\right)+b\left(\overline{\zeta^{n+1}},u^{n+1},\phi_h^{n+1}\right)-b\left(\overline{\phi_h^{n+1}},u^{n+1},\phi_h^{n+1}\right)$$
$$+b\left(\overline{u_h^{n+1}},u^{n+1},\phi_h^{n+1}\right)-b\left(\overline{U_h^{n}},u_h^{n+1},\phi_h^{n+1}\right)+b\left(\overline{U_h^{n}},u^{n+1},\phi_h^{n+1}\right)$$
$$-b\left(\overline{U_h^{n}},u^{n+1},\phi_h^{n+1}\right)$$
$$=b\left(u^{n+1}-\overline{u^{n+1}},u^{n+1},\phi_h^{n+1}\right)+b\left(\overline{\zeta^{n+1}},u^{n+1},\phi_h^{n+1}\right)-b\left(\overline{\phi_h^{n+1}},u^{n+1},\phi_h^{n+1}\right)$$
$$+b\left(\overline{u_h^{n+1}},u^{n+1},\phi_h^{n+1}\right)+b\left(\overline{U_h^{n}},\zeta^{n+1}-\phi_h^{n+1},\phi_h^{n+1}\right)-b\left(\overline{U_h^{n}},u^{n+1},\phi_h^{n+1}\right)$$
$$=b\left(u^{n+1}-\overline{u^{n+1}},u^{n+1},\phi_h^{n+1}\right)+b\left(\overline{\zeta^{n+1}},u^{n+1},\phi_h^{n+1}\right)-b\left(\overline{\phi_h^{n+1}},u^{n+1},\phi_h^{n+1}\right)$$
$$+b\left(\overline{u_h^{n+1}},u^{n+1},\phi_h^{n+1}\right)+b\left(\overline{U_h^{n}},\zeta^{n+1},\phi_h^{n+1}\right)-b\left(\overline{U_h^{n}},u^{n+1},\phi_h^{n+1}\right)$$

olur. Buna göre (4.13) denklemi yeniden düzenlenilirse;

$$\frac{1}{2\Delta t}(3\phi_h^{n+1}-4\phi_h^{n}+\phi_h^{n-1},\phi_h^{n+1})+\nu(\nabla\phi_h^{n+1},\nabla\phi_h^{n+1})+\gamma(\nabla.\phi_h^{n+1},\nabla.\phi_h^{n+1})$$
$$=\left(\frac{3\zeta^{n+1}-4\zeta^{n}+\zeta^{n-1}}{2\Delta t},\phi_h^{n+1}\right)+\left(\frac{3u^{n+1}-4u^{n}+u^{n-1}}{2\Delta t}-u_t,\phi_h^{n+1}\right)$$
$$+\nu\,(\nabla\zeta^{n+1},\nabla\phi_h^{n+1})+\gamma(\nabla.\zeta^{n+1},\nabla.\phi_h^{n+1})-(p^{n+1}-q^{h},\nabla.\phi_h^{n+1})$$
$$+\gamma(\nabla.u^{n+1},\nabla.\phi_h^{n+1})+b\big(u^{n+1}-\overline{u^{n+1}},u^{n+1},\phi_h^{n+1}\big)+b\big(\overline{\zeta^{n+1}},u^{n+1},\phi_h^{n+1}\big)$$
$$-b\big(\overline{\phi_h^{n+1}},u^{n+1},\phi_h^{n+1}\big)+b\big(\overline{u_h^{n+1}},u^{n+1},\phi_h^{n+1}\big)+b\big(\overline{U_h^{n}},\zeta^{n+1},\phi_h^{n+1}\big)$$
$$-b\big(\overline{U_h^{n}},u^{n+1},\phi_h^{n+1}\big) \qquad (4.14)$$

olur.

Sol Taraf:

1. Terim: 4.4'ü uygulanırsa,

$$\frac{1}{2\Delta t}(3\phi_h^{n+1}-4\phi_h^{n}+\phi_h^{n-1},\phi_h^{n+1}\ )$$
$$=\frac{1}{4\Delta t}[\|\phi_h^{n+1}\|^2+\|2\phi_h^{n+1}-\phi_h^{n}\|^2-\|\phi_h^{n}\|^2-\|2\phi_h^{n}-\phi_h^{n-1}\|^2$$
$$+\|\phi_h^{n+1}-\ 2\phi_h^{n}+\phi_h^{n-1}\|^2] \qquad (4.15)$$

2. Terim:

$$\nu\,(\nabla\phi_h^{n+1},\nabla\phi_h^{n+1})=\nu\,\|\nabla\phi_h^{n+1}\|^2 \qquad (4.16)$$

3. Terim

$$\gamma(\nabla.\phi_h^{n+1},\nabla.\phi_h^{n+1})=\gamma\|\nabla.\phi_h^{n+1}\|^2 \qquad (4.17)$$

Sol taraf düzenlenirse,

$$\frac{1}{2\Delta t}(3\phi_h^{n+1}-4\phi_h^n+\phi_h^{n-1},\phi_h^{n+1})+\nu\,(\nabla\phi_h^{n+1},\nabla\phi_h^{n+1})+\gamma(\nabla.\phi_h^{n+1},\nabla.\phi_h^{n+1})$$
$$=\frac{1}{4\Delta t}[\|\phi_h^{n+1}\|^2+\|2\phi_h^{n+1}-\phi_h^n\|^2-\|\phi_h^n\|^2-\|2\phi_h^n-\phi_h^{n-1}\|^2$$
$$+\|\phi_h^{n+1}-2\phi_h^n+\phi_h^{n-1}\|^2]+\nu\,\|\nabla\phi_h^{n+1}\|^2+\gamma\|\nabla.\phi_h^{n+1}\|^2 \qquad (4.18)$$

olur.

Sağ Taraf:

1. Terim: Poincare-Friedrichs, Cauchy-Schwarz eşitsizlikleri uygulanırsa,

$$\left(\frac{3\zeta^{n+1}-4\zeta^n+\zeta^{n-1}}{2\Delta t},\phi_h^{n+1}\right)\le\left\|\frac{3\zeta^{n+1}-4\zeta^n+\zeta^{n-1}}{2\Delta t}\right\|\|\phi_h^{n+1}\|$$
$$\le C\left\|\frac{(\zeta^{n+1}-\zeta^{n-1})+2(\zeta^{n+1}-\zeta^n)-2(\zeta^n-\zeta^{n-1})}{2\Delta t}\right\|\|\nabla\phi_h^{n+1}\|$$
$$\le\frac{C}{\Delta t}\left\|\frac{1}{2}\int_{t^{n-1}}^{t^{n+1}}\zeta_t dt-\int_{t^{n+1}}^{t^n}\zeta_t dt+\int_{t^n}^{t^{n-1}}\zeta_t dt\right\|\|\nabla\phi_h^{n+1}\|$$
$$\le\frac{3\nu}{40}\|\nabla\phi_h^{n+1}\|^2+\frac{C}{\Delta t^2\nu}\left\|\int_{t^{n-1}}^{t^{n+1}}|\zeta_t|dt\right\|^2$$
$$\le\frac{3\nu}{40}\|\nabla\phi_h^{n+1}\|^2+\frac{C}{\nu\Delta t}\int_{t^{n-1}}^{t^{n+1}}\|\zeta_t\|^2 dt \qquad (4.19)$$

elde edilir.

2. Terim: Cauchy-Schwarz, Poincare-Friedrichs, Kalanlı Taylor Yaklaşımı ve Young eşitsizlikleri uygulanırsa,

$$\left(\frac{3u^{n+1}-4u^{n}+u^{n-1}}{2\Delta t}-u_t,\phi_h^{n+1}\right)\le C\left\|\frac{3u^{n+1}-4u^{n}+u^{n-1}}{2\Delta t}-u_t\right\|\|\nabla\phi_h^{n+1}\|$$

$$\le\frac{3\nu}{40}\|\nabla\phi_h^{n+1}\|^2+\frac{C\nu^{-1}}{2}\left\|\frac{3u^{n+1}-4u^{n}+u^{n-1}}{2\Delta t}-u_t\right\|^2$$

$$\le\frac{3\nu}{40}\|\nabla\phi_h^{n+1}\|^2+\frac{C\nu^{-1}}{\Delta t^2}\left\|\left(\int_{t^{n+1}}^{t^{n}}(t^n-t)^4dt\right)^{1/2}\left(\int_{t^{n+1}}^{t^{n}}u_{ttt}^2dt\right)^{1/2}-\left(\int_{t^{n-1}}^{t^{n+1}}(t^{n-1}-t)^4dt\right)^{1/2}\left(\int_{t^{n-1}}^{t^{n+1}}u_{ttt}^2dt\right)^{1/2}\right\|^2$$

$$\le\frac{3\nu}{40}\|\nabla\phi_h^{n+1}\|^2+\frac{C\nu^{-1}}{\Delta t^2}\left[\left(\int_{t^{n+1}}^{t^{n}}(t^n-t)^4dt\right)\left(\int_{\Omega}\int_{t^{n+1}}^{t^{n}}(u_{ttt})^2dtdx\right)-\left(\int_{t^{n-1}}^{t^{n+1}}(t^{n-1}-t)^4dt\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega}\int_{t^{n-1}}^{t^{n+1}}(u_{ttt})^2dtdx\right)\right]$$

$$\le\frac{3\nu}{40}\|\nabla\phi_h^{n+1}\|^2+\frac{C\Delta t^3}{\nu}\left(\int_{\Omega}\int_{t^{n-1}}^{t^{n+1}}(u_{ttt})^2dtdx\right)$$

$$\le\frac{3\nu}{40}\|\nabla\phi_h^{n+1}\|^2+\frac{C\nu^{-1}\Delta t^3}{\nu}\left(\int_{t^{n-1}}^{t^{n+1}}\|u_{ttt}\|^2dt\right)\qquad(4.20)$$

3. Terim**:** Cauchy-Schwarz, Young eşitsizlikleri uygulanırsa ;

$$\nu\,(\nabla\zeta^{n+1},\nabla\phi_h^{n+1})\le\nu\,\|\nabla\zeta^{n+1}\|\|\nabla\phi_h^{n+1}\|$$

$$\le\frac{3\nu}{40}\|\nabla\phi_h^{n+1}\|^2+C\nu\,\|\nabla\zeta^{n+1}\|^2\qquad(4.21)$$

4. Terim: Cauchy-Schwarz , Young eşitsizlikleri uygulanırsa

$$\gamma(\nabla.\zeta^{n+1},\nabla.\phi_h^{n+1}) \le \gamma\|\nabla.\zeta^{n+1}\|\|\nabla.\phi_h^{n+1}\|$$
$$\le \gamma\|\nabla\zeta^{n+1}\|\|\nabla.\phi_h^{n+1}\|$$
$$\le \frac{3\gamma}{4}\|\nabla.\phi_h^{n+1}\|^2 + \frac{2\gamma}{3}\|\nabla\zeta^{n+1}\|^2 \qquad (4.22)$$

5. Terim: Cauchy-Schwarz, Young eşitsizlikleri uygulanırsa;

$$(p^{n+1}-q^h,\nabla.\phi_h^{n+1}) \le \|p^{n+1}-q^h\|\|\nabla.\phi_h^{n+1}\|$$
$$\le \|p^{n+1}-q^h\|\|\nabla\phi_h^{n+1}\|$$
$$\le \frac{3\nu}{40}\|\nabla\phi_h^{n+1}\|^2 + C\nu^{-1}\|p^{n+1}-q^h\|^2 \qquad (4.23)$$

6. Terim: V_h uzayının tanımından

$$\gamma(\nabla.u^{n+1},\nabla.\phi_h^{n+1}) = 0 \qquad (4.24)$$

7. Terim: (2.2) , Young eşitsizlikleri ve Lemma (2.1) uygulanırsa ;

$$b\left(u^{n+1}-\overline{u^{n+1}},u^{n+1},\phi_h^{n+1}\right) \le \frac{1}{2}\left\|u^{n+1}-\overline{u^{n+1}}\right\|\|\nabla u^{n+1}\|_\infty\|\phi_h^{n+1}\|$$
$$+\frac{1}{2}\left\|u^{n+1}-\overline{u^{n+1}}\right\|\|u^{n+1}\|_\infty\|\nabla\phi_h^{n+1}\|$$
$$\le C\left\|u^{n+1}-\overline{u^{n+1}}\right\|\|\nabla\phi_h^{n+1}\|$$
$$\le \frac{3\nu}{40}\|\nabla\phi_h^{n+1}\|^2 + C\nu^{-1}\left\|u^{n+1}-\overline{u^{n+1}}\right\|^2$$
$$\le \frac{3\nu}{40}\|\nabla\phi_h^{n+1}\|^2 + C\nu^{-1}(\alpha^2h^{2k}+h^{2k+2}|\bar{u}|_{k+1}^2) + C\alpha^4\nu^{-1}\|\Delta u\|^2 \qquad (4.25)$$

elde edilir.

8. Terim: (2.4) ve Young eşitsizlikleri uygulanırsa

$$b\left(\overline{\zeta^{n+1}}, u^{n+1}, \phi_h^{n+1}\right) \leq \left\|\overline{\zeta^{n+1}}\right\|^{1/2} \left\|\nabla\overline{\zeta^{n+1}}\right\|^{1/2} \|\nabla u^{n+1}\| \|\nabla\phi_h^{n+1}\|$$

$$\leq \frac{3\nu}{40} \|\nabla\phi_h^{n+1}\|^2 + C\nu^{-1} \left\|\overline{\zeta^{n+1}}\right\| \left\|\nabla\overline{\zeta^{n+1}}\right\| \|\nabla u^{n+1}\|^2$$

$$\leq \frac{3\nu}{40} \|\nabla\phi_h^{n+1}\|^2 + C\nu^{-1} \|\zeta^{n+1}\| \|\nabla\zeta^{n+1}\| \|\nabla u^{n+1}\|^2 \qquad (4.26)$$

elde edilir

9. Terim: (2.4) ve Young eşitsizlikleri uygulanırsa

$$b\left(\overline{\phi_h^{n+1}}, u^{n+1}, \phi_h^{n+1}\right) \leq C\left\|\overline{\phi_h^{n+1}}\right\|^{1/2} \|\nabla\phi_h^{n+1}\|^{1/2} \|\nabla u^{n+1}\| \|\nabla\phi_h^{n+1}\|$$

$$\leq C\left\|\overline{\phi_h^{n+1}}\right\|^{1/2} \|\nabla\phi_h^{n+1}\|^{3/2} \|\nabla u^{n+1}\|$$

$$\leq C\|\phi_h^{n+1}\|^{1/2} \|\nabla\phi_h^{n+1}\|^{3/2} \|\nabla u^{n+1}\|$$

p $= \frac{4}{3}$, $q = 4$ alınırsa:

$$\leq \frac{3\nu}{40} \|\nabla\phi_h^{n+1}\|^2 + C\nu^{-3} \|\phi_h^{n+1}\|^2 \|\nabla u^{n+1}\|^4 \qquad (4.27)$$

elde edilir.

10. Terim: (2.4) ve Young eşitsizlikleri uygulanırsa

$$b\left(\overline{u_h^{n+1}}, u^{n+1}, \phi_h^{n+1}\right) \leq C\left\|\overline{u_h^{n+1}}\right\|^{1/2} \left\|\overline{\nabla u_h^{n+1}}\right\|^{1/2} \|\nabla u^{n+1}\| \|\nabla\phi_h^{n+1}\|$$

$$\leq C\|u_h^{n+1}\|^{1/2} \|\nabla u_h^{n+1}\|^{1/2} \|\nabla\phi_h^{n+1}\| \|\nabla u^{n+1}\|$$

$$\leq \frac{3\nu}{40} \|\nabla\phi_h^{n+1}\|^2 + C\nu^{-1} \|u_h^{n+1}\| \|\nabla u_h^{n+1}\| \|\nabla u^{n+1}\|^2 \qquad (4.28)$$

elde edilir

11. Terim: (2.4) ve Young eşitsizlikleri uygulanırsa ;

$$b\left(\overline{U_h^n}, \zeta^{n+1}, \phi_h^{n+1}\right) \leq C\left\|\overline{U_h^n}\right\|^{1/2}\left\|\nabla\overline{U_h^n}\right\|^{1/2}\|\nabla\zeta^{n+1}\|\|\nabla\phi_h^{n+1}\|$$
$$\leq C\|U_h^n\|^{1/2}\|\nabla U_h^n\|^{1/2}\|\nabla\zeta^{n+1}\|\|\nabla\phi_h^{n+1}\|$$
$$\leq \frac{3\nu}{40}\|\nabla\phi_h^{n+1}\|^2 + C\nu^{-1}\|U_h^n\|\,\|\nabla U_h^n\|\,\|\nabla\zeta^{n+1}\|^2 \qquad (4.29)$$

elde edilir

12. Terim: (2.4) ve Young eşitsizlikleri uygulanırsa;

$$b\left(\overline{U_h^n}, u^{n+1}, \phi_h^{n+1}\right) \leq C\left\|\overline{U_h^n}\right\|^{1/2}\left\|\nabla\overline{U_h^n}\right\|^{1/2}\|\nabla u^{n+1}\|\|\nabla\phi_h^{n+1}\|$$
$$\leq C\|U_h^n\|^{1/2}\|\nabla U_h^n\|^{1/2}\|\nabla u^{n+1}\|\|\nabla\phi_h^{n+1}\|$$
$$\leq \frac{3\nu}{40}\|\nabla\phi_h^{n+1}\|^2 + C\nu^{-1}\|U_h^n\|\,\|\nabla U_h^n\|\,\|\nabla u^{n+1}\|^2 \qquad (4.30)$$

elde edilir.

Bütün terimler düzenlenildiğinde;

$$\frac{1}{4\Delta t}[\|\varphi_h^{n+1}\|^2 - \|2\varphi_h^{n+1} - \varphi_h^n\|^2 - \|\varphi_h^n\|^2 + \|2\varphi_h^n - \varphi_h^{n-1}\|^2$$

$$+ \|\varphi_h^{n+1} - 2\varphi_h^n + \varphi_h^{n-1}\|^2] + \nu\,\|\nabla\varphi_h^{n+1}\|^2 + \gamma\|\nabla.\varphi_h^{n+1}\|^2$$

$$\leq \frac{C}{\nu\Delta t}\int_{t^{n-1}}^{t^{n+1}} \|\zeta_t\|^2 dt\; + \frac{3\nu}{40}\|\nabla\varphi_h^{n+1}\|^2 + \frac{3\nu}{40}\|\nabla\varphi_h^{n+1}\|^2$$

$$+ C\nu^{-1}\Delta t^3\left(\int_{t^{n-1}}^{t^{n+1}} \|u_{ttt}\|^2 dt\right) + \frac{3\nu}{40}\|\nabla\varphi_h^{n+1}\|^2 + C\nu\,\|\nabla\zeta^{n+1}\|^2$$

$$+ \frac{3\gamma}{4}\|\nabla.\varphi_h^{n+1}\|^2 + \frac{2\gamma}{3}\|\nabla\zeta^{n+1}\|^2 + \frac{3\nu}{40}\|\nabla\varphi_h^{n+1}\|^2 + C\nu^{-1}\|p^{n+1} - q^h\|^2$$

$$+ \frac{3\nu}{40}\|\nabla\phi_h^{n+1}\|^2 + C\nu^{-1}(\alpha^2 h^{2k} + h^{2k+2}|\bar{u}|_{k+1}^2)\; + C\alpha^4\nu^{-1}\|\Delta u\,\|^2$$

$$+ \frac{3\nu}{40}\|\nabla\phi_h^{n+1}\|^2 + C\nu^{-1}\|\zeta^{n+1}\|\,\|\nabla\zeta^{n+1}\|\,\|\nabla u^{n+1}\|^2 + \frac{3\nu}{40}\|\nabla\phi_h^{n+1}\|^2$$

$$+ C\nu^{-3}\|\phi_h^{n+1}\|^2\|\nabla u^{n+1}\|^4 + \frac{3\nu}{40}\|\nabla\phi_h^{n+1}\|^2$$

$$+ C\nu^{-1}\|u_h^{n+1}\|\,\|\nabla u_h^{n+1}\|\;\|\nabla u^{n+1}\|^2 + \frac{3\nu}{40}\|\nabla\phi_h^{n+1}\|^2$$

$$+ C\nu^{-1}\|U_h^n\|\,\|\nabla U_h^n\|\,\|\nabla\zeta^{n+1}\|^2\; + \frac{3\nu}{40}\|\nabla\phi_h^{n+1}\|^2$$

$$+ C\nu^{-1}\|U_h^n\|\,\|\nabla U_h^n\|\,\|\nabla u^{n+1}\|^2$$

ve eşitsizliğin sağ kısmı düzenlenilirse,

$$\frac{1}{4\Delta t}[\|\varphi_h^{n+1}\|^2 - \|2\varphi_h^{n+1} - \varphi_h^n\|^2 - \|\varphi_h^n\|^2 + \|2\varphi_h^n - \varphi_h^{n-1}\|^2$$
$$+ \|\varphi_h^{n+1} - 2\varphi_h^n + \varphi_h^{n-1}\|^2] + \nu\,\|\nabla\varphi_h^{n+1}\|^2 + \gamma\|\nabla.\,\varphi_h^{n+1}\|^2$$
$$\leq \frac{30\nu}{40}\|\nabla\varphi_h^{n+1}\|^2 + \frac{3\gamma}{4}\|\nabla.\,\varphi_h^{n+1}\|^2 + \frac{C\nu^{-1}}{\Delta t}\int_{t^{n-1}}^{t^{n+1}}\|\zeta_t\|^2 dt$$
$$+ C\nu^{-1}\Delta t^3\left(\int_{t^{n-1}}^{t^{n+1}}\|u_{ttt}\|^2 dt\right) + C\nu\,\|\nabla\zeta^{n+1}\|^2 + \frac{\gamma}{3}\|\nabla\zeta^{n+1}\|^2$$
$$+ C\nu^{-1}\|p^{n+1} - q^h\|^2 + C\nu^{-1}(\alpha^2h^{2k} + h^{2k+2}|\bar{u}|_{k+1}^2) + C\alpha^4\nu^{-1}\|\Delta u\|^2$$
$$+ C\nu^{-1}\|\zeta^{n+1}\|\,\|\nabla\zeta^{n+1}\|\,\|\nabla u^{n+1}\|^2 + C\nu^{-3}\|\varphi_h^{n+1}\|^2\|\nabla u^{n+1}\|^4$$
$$+ C\nu^{-1}\|u_h^{n+1}\|\,\|\nabla u_h^{n+1}\|\,\|\nabla u^{n+1}\|^2 + C\nu^{-1}\|U_h^n\|\,\|\nabla U_h^n\|\,\|\nabla\zeta^{n+1}\|^2$$
$$+ C\nu^{-1}\|U_h^n\|\,\|\nabla U_h^n\|\,\|\nabla u^{n+1}\|^2$$

elde edilir. Daha sonra $4\Delta t$ ile çarpılır ve $n = 0, \ldots, N-1$ e kadar toplam alınırsa;

$$\|\phi_h^N\|^2 + \|2\phi_h^N - \phi_h^{N-1}\|^2 + \sum_{n=0}^{N-1}\{\,\|\phi_h^{n+1} - 2\phi_h^n + \phi_h^{n-1}\|^2 + \Delta t\nu\,\|\nabla\phi_h^{n+1}\|^2$$
$$+ \Delta t\gamma\|\nabla.\,\phi_h^{n+1}\|^2\}$$
$$\leq \|\phi_h^0\|^2 + \|2\phi_h^0 - \phi_h^{-1}\|^2$$
$$+ \Delta t\sum_{n=0}^{N-1} C\nu^{-3}\|\varphi_h^{n+1}\|^2\|\nabla u^{n+1}\|^4 + \sum_{n=0}^{N-1} C\left\{\nu^{-1}\int_{t^{n-1}}^{t^{n+1}}\|\zeta_t\|^2 dt\right.$$
$$+ \nu^{-1}\Delta t^4\left(\int_{t^{n-1}}^{t^{n+1}}\|u_{ttt}\|^2 dt\right) + \Delta t\nu\,\|\nabla\zeta^{n+1}\|^2 + \Delta t\gamma\,\|\nabla\zeta^{n+1}\|^2 + \Delta t\nu^{-1}\|p^{n+1} - q^h\|^2$$
$$+ \Delta t\nu^{-1}(\alpha^2h^{2k} + h^{2k+2}|\bar{u}|_{k+1}^2) + \Delta t\alpha^4\nu^{-1}\|\Delta u\|^2 + \Delta t\nu^{-1}\|\zeta^{n+1}\|\,\|\nabla\zeta^{n+1}\|\,\|\nabla u^{n+1}\|^2$$
$$+ \Delta t\nu^{-1}\|u_h^{n+1}\|\,\|\nabla u_h^{n+1}\|\,\|\nabla u^{n+1}\|^2 + \Delta t\nu^{-1}\|U_h^n\|\,\|\nabla U_h^n\|\,\|\nabla\zeta^{n+1}\|^2$$
$$\left.+ \Delta t\nu^{-1}\|U_h^n\|\,\|\nabla U_h^n\|\,\|\nabla u^{n+1}\|^2\right\} \qquad (4.31)$$

Lemma 2.1 de tanımlanan normları ve yaklaşım özellikleri uygulanırsa

$$\|\phi_h^N\|^2 + \|2\phi_h^N - \phi_h^{N-1}\|^2 + \sum_{n=1}^{N-1}\{ \|\phi_h^{n+1} - 2\phi_h^n + \phi_h^{n-1}\|^2 + \Delta t\nu \ \|\nabla\phi_h^{n+1}\|^2 + \Delta t\gamma\|\nabla.\phi_h^{n+1}\|^2\}$$

$$\leq \|\phi_h^0\|^2 + \|2\phi_h^0 - \phi_h^{-1}\|^2 + \Delta t\sum_{n=0}^{N-1} C\nu^{-3}\|\varphi_h^{n+1}\|^2\|\nabla u^{n+1}\|^4$$

$$+C\Big\{\nu^{-1}h^{2k+2}\| |u_t| \|_{2,k+1}^2 + \nu^{-1}\Delta t^4\| |u_{ttt}| \|_{2,0}^2 + (\nu + \gamma)h^{2k}\| |u| \|_{2,k+1}^2$$

$$+ \nu^{-1}h^{2s+2}\| |p| \|_{2,s+1}^2 + \nu^{-1}(\alpha^2h^{2k} + h^{2k+2})\| |\bar{u}| \|_{2,k+1}^2 + \alpha^4\| |\Delta u| \|_{2,0}^2$$

$$+ \nu^{-1}h^{2k+1}\big(\| |u| \|_{4,k+1}^4 + \| |\nabla u| \|_{4,k+1}^4\big)$$

$$+ \nu^{-1}\| |\nabla u| \|_{2,0}^2\left(\left\|u_h^0\right\|^2 + \left\|2u_h^0 - u_h^{-1}\right\|^2 + \Delta tC\nu^{-1}\sum_{n=0}^{N-1}\|f^{n+1}\|_{-1}^2\right)$$

$$+ \nu^{-1}h^{2k}\left(\left\|u_h^0\right\|^2 + \left\|2u_h^0 - u_h^{-1}\right\|^2 + \Delta tC\nu^{-1}\sum_{n=0}^{N-1}\|f^{n+1}\|_{-1}^2\right)$$

$$+ \nu^{-1}\left(\left\|u_h^0\right\|^2 + \left\|2u_h^0 - u_h^{-1}\right\|^2 + \Delta tC\nu^{-1}\sum_{n=0}^{N-1}\|f^{n+1}\|_{-1}^2\right)\Big\}$$

elde edilir.

Burada sürekli çözüm olan u ve U nun düzenlilik özelliği ve $u_h$ve U_h de kararlılık özelllikleri kullanılmış ve buradan oluşan terimleri C^* olarak gösterilmiştir. Elde edilen denklemin son haline Gronwall lemması uygulanırsa,

$d_n = C(\nu^{-3}\|\nabla u^{n+1}\|^4)$ ve $c_n = 0$ olduğu görülmektedir.

$\| |\nabla u| \|_{\infty,0}^4 < \infty$ ve $\Delta t < C(\nu^{-3}\| |\nabla u| \|_{\infty,0}^4)^{-1}$, ardından tüm n. zamanlar için $\Delta t d_n < 1$ dir.

Ayrıca

$$\Delta t \sum_{n=1}^{N-1} \frac{d_n}{1-\Delta t d_n} \leq \tilde{C}\nu^{-3} \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t = \tilde{C}\nu^{-3}T,$$

olsun. O halde

$$\begin{aligned}
\|\phi_h^N\|^2 + \|2\phi_h^N - \phi_h^{N-1}\|^2 \; + \sum_{n=1}^{N-1} \{ \; & \|\phi_h^{n+1} - 2\phi_h^n + \phi_h^{n-1}\|^2 + \Delta t\nu \; \|\nabla\phi_h^{n+1}\|^2 \\
& + \Delta t\gamma \|\nabla . \phi_h^{n+1}\|^2 \} \\
& \leq \|\phi_h^0\|^2 + \|2\phi_h^0 - \phi_h^{-1}\|^2 + Cexp(\tilde{C}\nu^{-3}T) \\
& + \Big\{ \nu^{-1}h^{2k+2} \| \, |u_t| \, \|_{2,k+1}^2 \; + \nu^{-1}\Delta t^4 \| \, |u_{ttt}| \, \|_{2,0}^2 \; + (\nu \; + \gamma \,) h^{2k} \| \, |u| \, \|_{2,k+1}^2 \\
& + \nu^{-1}h^{2s+2} \| \, |p| \, \|_{2,s+1}^2 + \nu^{-1}(\alpha^2 h^{2k} + h^{2k+2}) \, \| \, |\bar{u}| \, \|_{2,k+1}^2 + \alpha^4 \| \, |\Delta u| \, \|_{2,0}^2 \\
& + \nu^{-1}h^{2k+1} \Big(\| \, |u| \, \|_{4,k+1}^4 + \| \, |\nabla u| \, \|_{4,0}^4 \Big) + \nu^{-1} \| \, |\nabla u| \, \|_{2,0}^2 C^*(\nu^{-1}, f, u_0, u_{-1}) \\
& + \nu^{-1}h^{2k} C^*(\nu^{-1}, f, u_0, u_{-1}) + \nu^{-1} C^*(\nu^{-1}, f, u_0, u_{-1}) \Big\}
\end{aligned}$$

olur. Son olarak da yaklaşım özellikleri kullanılıp $\|e^{n+1}\| \leq \|\zeta^{n+1} - \phi_h^{n+1}\| \leq \|\zeta^{n+1}\| + \|\phi_h^{n+1}\|$ üçgen eşitsizliği hata terimlerine uygulanırsa Teorem 4.2.2. deki ifade elde edilmiş olur:

$$\begin{aligned}
\|e^N\|^2 + \|2e^N - e^{N-1}\|^2 \; + \sum_{n=1}^{N-1} \Big\{ & \|e^{n+1} - 2e^n + e^{n-1}\|^2 + \Delta t\nu \; \|\nabla e^{n+1}\|^2 \\
& + \Delta t\gamma \|\nabla . e^{n+1}\|^2 \Big\} \; \leq C(\Delta t^4 + \alpha^2 h^{2k} + \gamma h^{2k} + h^{2k} + \alpha^4).
\end{aligned}$$

Sonuç 4.1. Teorem 4.2.2. de elde edilen hata yaklaşımı optimal bir hata yaklaşımıdır. Örneğin Taylor-Hood sonlu eleman çifti seçilecek olursa ($k = 2, s = 1$), (P^2, P^1) polinom seçimlerine göre hatanın mertebesi 2 olur ki bu da beklenen mertebedir. Ayrıca $h, \Delta t, \alpha \to 0$ iken $u \to u_h$ olduğu da teorem ifadesinden açıktır.

5.SAYISAL TEST

Bu bölümde teorik sonuçları doğrulamak için sayısal bir simülasyon sunulmuştur. Hesaplamalarda, herkese açık lisanslı bir sonlu eleman yazılım paketi olan FreeFem++ kullanılmıştır [15]. Bu sayısal test, ele aldığımız (3.17)-(4.1) deki şemanın yakınsama davranışını ortaya çıkarmak ve Teorem 4.2'de elde edilen sonucu doğrulamak amacıyla yapılmıştır.

İlk önce uzaysal hatanın mertebesi incelenmiştir. Burada Sonuç 4.1. de bahsedilen Taylor-Hood sonlu eleman çifti düşünülmüş olduğundan hata için beklenen mertebe 2 dir. Model problem hesaplama bölgesi $\Omega = (0,1)^2$ dir. Hesap bölgesi, çeşitli kaba ağ çözünürlüğü ile üçgenlenmiş olup ağ genişliği $h = 2^{-1}$ den $h = 2^{-6}$ ya kadar alınmıştır. Bu seçimler, yakınsama oranlarını doğrulamak ve modeller arasındaki hataları karşılaştırmak için yeterli olmuştur. Yakınsayan çözüm [0, 1] zaman aralığında hesaplanmıştır. Uzaysal hatanın etkisini en aza indirmek ve hata üzerindeki zamansal etkiyi tam olarak ortaya çıkarmak için $\Delta t = 0.00625$ alınmıştır. $\nu = \gamma = 1$ ve $\alpha = h$ için hatanın H_1 normları değerlendirilmiştir. Bu test problemi için gerçek hız ve basınç değişkenleri aşağıdaki gibi ele alınmıştır:

$$u = \begin{bmatrix} e^t cos(y) \\ e^t sin(x) \end{bmatrix}, p = (x - y)(1 + \ t).$$

Bu değerler (1.1)'de yerine yazılarak f fonksiyonu elde edilmiştir. Sayısal çözümün sonuçları farklı h değerleri için Çizelge 1'de verilmiştir. Bu çizelgeden de görüldüğü üzere, uzaysal anlamda yakınsama derecesi 2'dir ve beklenen optimal yakınsama derecesidir.

Çizelge 1. $\Delta t = 0.00625,\ \gamma = 1, \alpha =$ ⍰ *ve* $\nu = 1$ için bulunan hız hataları ve oranları

h	$\|\nabla(u - u^h)\|$	Oran
2^{-1}	0.00216	--
2^{-2}	0.0005	2.07
2^{-3}	0.0001	2.32
2^{-4}	3.5×10^{-5}	1.73
2^{-5}	8.9×10^{-6}	1.95
2^{-6}	2.2×10^{-6}	2.03

Benzer şekilde zamansal hatanın derecesini bulmak için aynı bölgede aynı özel çözüm fonksiyonları ve sağ taraf kullanılarak bu kez sabit bir $h = 2^{-6}$ ağ kalınlığı alınmış ve $[0,2]$ zaman aralığında değişen Δt değerlerine göre hatalar kıyaslanarak zamansal hata ayırt edilmiştir. Elde edilen sonuçlar Çizelge 2'de sunulmuştur. Görüldüğü üzere zamansal boyutta da optimal hata derecesi olan 2 ye yaklaşık olarak ulaşılmıştır.

Çizelge 2. $\gamma = 1, \alpha =$ □ $ve\ \nu = 1$ için bulunan hız hataları ve oranları

Δt	$\left\|\nabla(u - u^h)\right\|$	Oran
2^0	0.10	--
2^{-1}	0.034	1.55
2^{-2}	0.009	1.91
2^{-3}	0.002	2.16
2^{-4}	0.0007	1.53
2^{-5}	0.0002	1.80

Verilen çizelgelerden de görüldüğü üzere Teorem 4.2. de elde edilen teorik yakınsama oranları model bir problem üzerinde de doğrulanmış olup, çalışmada tanımlanan algoritmanın doğruluğu ve etkinliği sayısal olarak göz önüne konulmuştur.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Navier-Stokes denklemleri için bir türbülans modeli olarak kullanılan Leray–α modelinin grad-div kararlılaştırması ele alınmıştır. Oluşturulan sonlu elemanlar algoritmasında BDF2 zaman şeması uygulanmış ve lineer olmayan terim 2. Mertebeden bir dış kestirim açılımıyla lineerleştirilmiştir. Oluşturulan tamamen ayrık şemanın kararlılık ve yakınsaklık özellikleri gösterilerek sayısal çözümün varlık ve teklik durumu ele alınmıştır. Ayrıca teorik yakınsama oranlarını doğrulamak için önerilen algoritmanın etkinliğini gösteren sayısal yakınsama testleri de sunulmuştur.

Bu çalışmadan yola çıkarak, NSD için diğer türbülans modelleri NS-alfa ve NS-Omega gibi modellere grad-div kararlılaştırmasının etkisi incelenebilir. Ayrıca yapılan çalışmaya benzer nitelikteki modeller iç içe girmiş Navier-Stokes sistemleri olan doğal konveksiyon ve Darcy Brinkman denklemleri içinde incelenebilir. Bu çalışmada incelenen modellerin optimal kontrol problemleri de potansiyel gelecek çalışmalar olarak düşünülebilir.

KAYNAKLAR

1. Foias, C., Manley, O., Rosa, R., Temam, R., & Meng, J. (2002). Navier-Stokes Equations and Turbulence. *Encyclopedia of Math and its Applications*, Vol. 83. Applied Mechanics Reviews, 55(3), B57.

2. Leray, J. (1934). Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Actamathematica*, 63(1), 193-248.

3. Cheskidov, A., Holm, D. D., Olson, E., & Titi, E. S. (2005). On a Leray–α model of turbulence. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 461(2055), 629-649.

4. Hill, R. (2010). Benchmark Testing the α-models of Turbulence. *A project presented to the Graduate School of Clemson University*.

5. Bowers, A. L., Rebholz, L. G. (2013). Numerical study of a regularization model for incompressible flow with deconvolution-based adaptive nonlinear filtering. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 258, 1-12.

6. Busa, A. (2014). The Leray-α model of turbulence. Tech. report, MS Thesis, *Free University of Berlin*.

7. Akbaş, M., Bowers, A. (2021). Improving accuracy in the Leray model for incompressible nonisothermal flows via adaptive deconvolution-based nonlinear filtering. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 44(8), 6679-6699.

8. Layton W.(2008.) Introduction to the Numerical Analysis of Incompressible Viscous Flows. *SIAM*.

9. Brenner S, Scott LR. (1994) The Mathematical Theory of Finite Element Methods: *Springer-Verlag*.

10. Zhang S.(2005). A new family of stable mixed finite elements for the 3d Stokes equations. *Math Comp*;74(250):543-554.

11. Heywood J, Rannacher R.(1990). Finite element approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem. *Part IV: Error analysis for the second-order time discretization. SIAM J Numer Anal*;27(2):353-384.

12. Layton, W., Manica, C. C., Neda, M., & Rebholz, L. G. (2008). Numerical analysis and computational testing of a high accuracy Leray-deconvolution model of turbulence. *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*, 24(2), 555-582.

13. Rebholz, L. G. (2007). Helicity and physical fidelity in turbulence modeling *(Doctoral dissertation, University of Pittsburgh)*.

14. John, V., Linke, A.., Merdon, C., Neilan, M., & Rebholz, L. G. (2017). On the divergence constraint in mixed finite element methods for incompressible flows. *SIAM review*, 59(3), 492-544

15. Hecht, F. (2012). New development in FreeFem++. *Journal of numerical mathematics*, 20(3-4), 251-266.

16. Franca, L. P., Hughes,T.J.R. (1988). Two classes of mixed finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 69(1):89–129.

17. Jenkins, E.W., John,V., Linke,A., Rebholz ,L.G. On the parameter choice in grad-div stabilization for the Stokes equations. Adv. *Comput. Math*., 40, 491–5.

18. Olshanskii, M.A.(2002). A low order Galerkin finite element method for the Navier Stokes equations of steady incompressible flow: a stabilization issue and iterative methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*. 191, 5515–5536.

19. Frutos, J.D., García-Archilla B., John V., Novo, J.(2016). Grad-div stabilization for the evolutionary Oseen problem with inf-sup stable finite elements. *Journal of Scientific Computing*, 66(3): 991-1024.

20. Frutos, J.D., García-Archilla B., John V., Novo J.(2017). Analysis of the Grad-Div Stabilization for the Time-Dependent Navier–Stokes Equations with Inf-Sup Stable Finite Elements. *Advances in Computational Mathematics*, 44(1): 195–225.

21. Layton,W., Carolina, C.M. , Monika, N., Olshanskii ,M., Rebholz ,L.G.(2009). On the accuracy of rotation form in simulations. *Journal of Computational Physics*, 128(9): 3433-3447.

22. Galvin ,K. J., Linke, A., Rebholz ,L.G., Wilson ,N.E.(2012). Stabilizing poor mass coNSDrvation in incompressible flow problems with large irrotational forcing and application to thermal convection. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 237-240:166-176.

23. Case ,M.A., Ervin ,V.J., Linke ,A., Rebholz ,L.G. (2011).A Connection Between Scott–Vogelius and Grad-Div Stabilized Taylor–Hood FE Approximations of the Navier–Stokes Equations. *SIAM J. Numer. Anal*., 49(4), 1461–1481.

24. Köseoğlu, A. (2011) The Navier-Stokes Voight Model and Convergence to Equilibrium and Statistical Equilibrium, MS thesis, *Department of Mathematics, University of Pittsburgh, Pittsburgh*.

25. Stephen B. Pope. (2000). *Turbulent flows*. Cambridge University Press, Cambridge.

26. Doğru, P., Çıbık, A.B. (2021). Grad-Div Kararlılaştırılmış BDF-2 Zaman Adımlı Leray-$\boldsymbol{\alpha}$ Modelinin Sayısal Analizi. *Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Dergisi*, 2.Cilt(2).

27. Kökten, İ.T. (2019). Mathematıcal Modellıng Of Blood Flow Through Arterıes And Investıgatıon Of Some Pathologıcal Cases In Cardıovascular System Usıng Grad-Dıv Stabılızatıon. *Middle East Technical University*.(33-34)



Gazili olmak ayrıcalıktır