
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

BRENKE POLİNOMLARININ BİR GENELLEMESİNİ İÇEREN STANCU-KANTOROVICH TİPLİ BİR OPERATÖR

Shamsullah ZALAND

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NİSAN 2024

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Shamsullah ZALAND

26/04/2024

BRENKE POLİNOMLARININ BİR GENELLEMESİNİ İÇEREN

STANCU-KANTOROVICH TİPLİ BİR OPERATÖR

(Yüksek Lisans Tezi)

Shamsullah ZALAND

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Nisan 2024

ÖZET

Bu tezde dört kısım bulunmaktadır. Birinci kısımda giriş bölümü verilmiştir. İkinci kısımda yaklaşım teorisinde yer alan bazı temel tanımlara, kavramlara ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü kısımda Brenke polinomlarının bir genellemesini içeren Stancu-Kantorovich tipli bir operatör verilmiştir. Dördüncü kısım sonuç bölümüne ayrılmıştır.

Bilim Kodu	:	20406
Anahtar Kelimeler	:	Stancu tipi operatörler, Kantorovich tipi operatörler, Kantorovich Stancu tipi lineer pozitif operatörler
Sayfa Adedi	:	43
Danışman	:	Prof. Dr. Gürhan İÇÖZ

KANTOROVICH STANCU TYPE OPERATOR INCLUDING GENERALIZED BRENKE POLYNOMIALS

(M. Sc. Thesis)

Shamsullah ZALAND

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

April 2024

ABSTRACT

There are four parts in this thesis. In the first part, the introduction is given. The second part includes some basic definitions, concepts and theorems in the approximation theory. Kantorovich Stancu type operator including generalized Brenke polynomials is given in the third part.The fourth part is specified to the conclusion.

Science Code	:	20406
Keywords	:	Stancu-type operators, Kantorovich type operators, Kantorovich Stancu type linear positive operators
Number of pages	:	43
Supervisor	:	Prof. Dr. Gürhan İÇÖZ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim boyunca ders seçimlerim, tez konumum belirlenmesi, veri toplama ve tezin hazırlanması sürecinde benden zamanını, desteğini esirgemeyen her koşulda yanımda olan ve değerli vaktini bana ayıran ve hayatımın manevi açıdan gelişimine önemli katkı sağlayan saygı değer bilim insanı danışmanım Prof. Dr. Gürhan İÇÖZ'e çok teşekkür ederim ve sayın danışmanıma Allah'tan uzun ve mutlu bir ömür diliyorum.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR..... vi

İÇİNDEKİLER vii

SİMGELER..... ix

1. GİRİŞ 1

2. TANIMLAR VE TEOREMLER 3

2.1. Lineer pozitif operatörler ile ilgili temel tanımlar 3

2.1.1. Lineer uzay 3

2.1.2. Operatör 5

2.1.3. Lineer operatör 5

2.1.4. Lineer pozitif operatör 6

2.2. Korovkin teoremi 7

2.3. Süreklilik modülü ve özellikleri 11

2.4. Önemli formüller, tanımlar ve eşitsizlikler 14

2.4.1. Fonksiyonel 15

2.4.2. Peetre K–fonksiyoneli 16

2.4.3. Ikinci dereceden süreklilik modülü 16

2.4.4. Kantorovich operatörü 16

2.4.5. Lipschitz sınıfından fonksiyonlar 17

3. BRENKE POLİNOMLARININ BİR GENELLEMESİN İÇEREN STANCU-KANTOROVICH TİPLİ BİR OPERATÖR 19

3.1. $L_m^{*(v_1,v_2)}$ Operatörlerinin bazı sonuçları 23

Sayfa

3.2. $L_m^{*(v_1,v_2)}$ Operatörlerinin yaklaşım özellikleri 32

KAYNAKLAR 41

ÖZGEÇMİŞ 43

SİMGELER

Bu çalışmada kullanılan simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\mathbf{C}[\mathbf{0},\infty)$	$[0,\infty)$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyon uzayı
$\mathbf{C_B}[\mathbf{0},\infty)$	$[0,\infty)$ aralığında tüm sınırlı ve sürekli fonksiyon uzayı
$\mathbf{C_B^2}[\mathbf{0},\infty)$	iki kez türevi sürekli ve sınırlı olan fonksiyon uzayı
$\mathbf{D_n}\aleph(\mathbf{z})$	Kantorovich operatörü
$\mathbf{F_n}(\mathbf{f};\mathbf{x})$	Cheney ve Sharma operatörü
$\mathbf{K}(\mathbf{f};.)$	Peetre K-fonksiyoneli
$\mathbf{Lip_M^\alpha}$	Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar
$\mathbf{L_m^{*(v_1,v_2)}}(\mathbf{f};\mathbf{x})$	Kantorovich Stancu tipli operatör
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbf{P_n}(\mathbf{f};\mathbf{x})$	Jakimovski ve Leviatan operatörü
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbf{S_n}(\mathbf{f};\mathbf{x})$	Szász Mirakjan Operatörü
$\|\|\alpha\|\|$	$[0,\infty)$ için α'nın supremum normu
$\|\|\alpha\|\|_{\mathbf{C_B^2}[\mathbf{0},\infty)}$	$C_B^2[0,\infty)$ için α'nın normu
$\omega(\mathbf{f};\delta)$	süreklilik modülü
$\omega_\mathbf{2}(\mathbf{f};\delta)$	İkinci dereceden süreklilik modülü
$\pounds_\mathbf{n}(\mathbf{f};\mathbf{x})$	Varma ve arkadaşları tarafından tanımlanan operatör

1. GİRİŞ

Lineer pozitif operatörler, fonksiyonların uzayları ve bunlar üzerinde gerçekleştirilebilecek işlemlerle ilgilenen matematiğin fonksiyonel analiz adlı bir dalında önemli bir kavramdır. Bu operatörler matematik, diferensiyel denklemler, kuantum mekaniği, sinyal işleme, matematiksel fizik, istatistiksel mekanik, optimizasyon ve diğer bir çok alanın temelini oluştururlar ve daha pek çok alanda ve uygulamada kilit bir rol oynarlar. Lineer pozitif operatörlerin yaklaşım teorisinde önemli bir yeri vardır. Bu yüksek lisans tezinde Brenke polinomlarının bir genellemesini içeren Stancu-Kantorovich tipli bir operatör tanımlanmaktadır.

Bu tez, dört kısımdan oluşmaktadır.

Birinci kısım olan giriş bölümü tez içindeki ana başlıkları ifade etmek amacıyla hazırlanmıştır.

İkinci kısım, tezde sıklıkla karşılaşılacak olan tanımlara, teoremlere ve ispatlarına ayrılmıştır.

Üçüncü kısımda, Brenke polinomlarının bir genellemesini içeren Stancu-Kantorovich tipli bir operatör ifade edilmiştir ve $L_m^{*(\nu_1,\nu_2)}$ ile gösterilmiştir Ayrıca $L_m^{*(\nu_1,\nu_2)}$ operatörlerinin bazı sonuçlarına ve $L_m^{*(\nu_1,\nu_2)}$ operatörleri yardımıyla fonksiyonların yaklaşımına yer verilmiştir.

Dördüncü kısım sonuç bölümüne ayrılmıştır.

2. TANIMLAR VE TEOREMLER

Burada, ihtiyaç duyulan bilgiler ve teoremler verilecektir.

2.1. Lineer Pozitif Operatörler İle İlgili Temel Tanımlar

2.1.1. Tanım (Lineer Uzay)

Z, boştan farklı bir küme ve F, reel veya kompleks sayılar kümesi olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa Z ye F üzerinde lineer uzay veya vektör uzayı denir [1].

(i) $Z,+$ işlemine göre değişmeli gruptur. Yani

(a) $\forall \eta,\gamma \in Z$ için $\eta+\gamma \in Z$ dir.
(b) $\forall \eta,\gamma,\rho \in Z$ için $\eta+(\gamma+\rho)=(\eta+\gamma)+\rho \in Z$ dir.
(c) $\forall \eta \in Z$ için $\eta+\iota=\iota+\eta=\eta$ olacak şekilde $\iota \in Z$ vardır.
(d) $\forall \eta \in Z$ için $\eta+(-\eta)=(-\eta)+\eta=\iota$ olacak şekilde $-\eta \in Z$ vardır.
(e) $\forall \eta,\gamma \in Z$ için $\eta+\gamma=\gamma+\eta \in Z$ dir.

(ii) $\eta,\gamma \in Z$, ve $\alpha,\delta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

(a) $\alpha\eta \in Z$ dir.
(b) $\alpha(\eta+\gamma)=\alpha\eta+\alpha\gamma$ dir.
(c) $(\alpha+\delta)\eta=\alpha\eta+\delta\eta$ dir.
(d) $1\cdot\eta=\eta\cdot 1=\eta$ dir. Burada 1, F'nin birim elemanıdır.

2.1.2. Tanım ($C[0,\infty)$ Uzayı)

$[0,\infty)$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli olan fonksiyonlar uzayı $C[0,\infty)$ ile gösterilmektedir [2].

2.1.3. Tanım ($C_B[0,\infty)$ Uzayı)

$[0,\infty)$ aralığı üzerinde tanımlı tüm sınırlı ve sürekli olan fonksiyonlar uzayı $C_B[0,\infty)$ ile gösterilmektedir [3].

2.1.4. Tanım ($C_B^2[0,\infty)$ Uzayı)

$[0,\infty)$ aralığı üzerinde iki kez türevli, sürekli ve sınırlı olan fonksiyonlar uzayı $C_B^2[0,\infty)$ ile gösterilmektedir ayrıca (2.1)eşitliği ile verilmektedir [3].

$$C_B^2[0,\infty) = \left\{\theta \in C_B[0,\infty) : \theta', \theta'' \in C_B[0,\infty)\right\} \tag{2.1}$$

2.1.5. Tanım (Norm)

Z, bir lineer uzay olsun. $||\ ||: Z \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\varkappa$' deki degeri $||\varkappa||$ ile gösterilsin. Bu fonksiyon aşağıdaki şartları sağlıyorsa $||\ ||$ fonksiyonuna Z üzerinde norm denir.

i) $||\varkappa|| \geq 0$
ii) $||\varkappa|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
iii) $||\alpha\varkappa|| = |\alpha|||\varkappa||$
vi) $||\varkappa + e|| \leq ||\varkappa|| + ||e||$

Bir lineer uzay üzerinde norm tanımlanmışsa bu uzaya normlu uzay denir [4].

2.1.6. Tanım ($||\alpha||_{C_B[0,\infty)}$ Norm)

$C_B[0,\infty)$ uzayı için α fonksiyonunun normu $||\alpha||_{C_B[0,\infty)}$ ile gösterilmektedir [5]. Bu norm supremum normu olarak ifade edilir

$$||\alpha||_{C_B[0,\infty)} = \sup_{\varkappa\in[0,\infty)} |\alpha(\varkappa)| \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlıdır.

2.1.7. Tanım ($||\alpha||_{C_B^2[0,\infty)}$ Norm)

$C_B^2[0,\infty)$ uzayı için α fonksiyonunun normu $||\alpha||_{C_B^2[0,\infty)}$ ile gösterilmektedir [5]. Bu norm

$$||\alpha||_{C_B^2[0,\infty)} = ||\alpha||_{C_B[0,\infty)} + ||\alpha'||_{C_B[0,\infty)} + ||\alpha''||_{C_B[0,\infty)} \tag{2.3}$$

şeklindeki eşitliğe sahiptir.

2.1.8. Tanım (Operatör)

U ve V aynı S cismi üzerinde reel değerli fonksiyon uzayları olsun. $M : U \longrightarrow V$ şeklinde tanımlanan dönüşümlere operatör denir.

Örnek

$T \neq 0$ bir küme, $P = \{h|h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ve h' mevcut$\}$ ve $B = \{h|h : T \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ olmak üzere

$$D = \frac{d}{dx} : P \longrightarrow B$$

$$h \longrightarrow \frac{d}{dx}(h) = h'$$

ile verilen $D = \frac{d}{dx}$ türev dönüşümü P uzayı üzerinde bir operatördür.

2.1.9. Tanım (Lineer Operatör)

X ve Y aynı M cismi üzerinde iki lineer uzay ve f operatörü $f : X \longrightarrow Y$ şeklinde tanımlı olsun. $\forall \eta, \gamma \in X$ ve $\forall \beta \in M$ için

(i) $f(\eta + \gamma) = f(\eta) + f(\gamma)$,
(ii) $f(\beta\eta) = \beta f(\eta)$,

şartları sağlanıyorsa f operatörüne X den Y'ye bir lineer operatör denir .

2.1.10. Tanım (Pozitif Operatör)

X ve Y iki lineer uzay ve $f : X \longrightarrow Y$ lineer operatör olsun. f operatörünün x noktasındaki değeri $f_n(h;x)$ olarak gösterilir. X uzayından alınan $\forall h \geq 0$ fonksiyonu için $f_n(h;x) \geq 0$ ise f operatörüne pozitif operatör denir.

2.1.11. Tanım (Lineer Pozitif Operatör)

Lineer operatörler kümesi içinde bir alt sınıf olan pozitif operatörler vardır. $X^+ = \{\gamma \in X, \gamma(x) \geq 0\}$ ve $Y^+ = \{\varphi \in Y, \varphi(y) \geq 0\}$ olsun. Eğer X uzayında tanımlanmış f lineer operatörü X^+ kümesindeki herhangi bir pozitif γ fonksiyonunu başka bir pozitif fonksiyona dönüştürüyor ise f operatörüne lineer pozitif operatör denir [4].

2.1.12. Tanım (Sınırlı Operatör)

$S : X \longrightarrow Y$ bir operatör olsun, eğer $M > 0$ reel sayısı mevcut ise öyle ki her $f \in X$ için $||S(f)||_y \leq M||f||_x$ oluyorsa, bu taktirde, S operatörüne X uzayında sınırlı operatör denir.

2.1.1. Lemma

$f : P \longrightarrow Q$ lineer pozitif operatör olsun. $\varkappa, y \in P$ olmak üzere her u için $\varkappa(u) \leq y(u)$ iken $f(\varkappa(u);x) \leq f(y(u);x)$ eşitsizliği sağlanıyorsa f lineer operatörü monotondur denir. Ayrca f'nin monotonluk özelliğinden $|f(\varkappa;x)| \leq f(|\varkappa|;x)$ eşitsizliği sağlanır [1].

2.1.13. Tanım (Lineer Pozitif Operatörlerde Sınırlılık)

$(X, ||.||_1)$ ve $(Y, ||.||_2)$ normlu uzaylar, $A(f) \subset X$ olmak üzere $f : A(f) \longrightarrow Y$ lineer bir operatör olsun. Her $x \in A(f)$ için $||f_x||_2 \leq C||x||_1$ olacak şekilde bir $C \geq 0$ sayısı mevcutsa f operatörüne sınırlı lineer operatör denir [2].

2.1.14. Tanım (Lineer Pozitif Operatörlerde Süreklilik)

X ve Y normlu uzaylar $A(f) \subset X$ olmak üzere $f : A(f) \longrightarrow Y$ lineer bir operatör olsun. Bu durumda f sürekli olması için gerek ve yeter şart sınırlı olmasıdır [2].

2.1.15. Tanım

$W \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $h : W \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her bir $s \in W$ için $|h(s)| \leq K$ olacak şekilde $K > 0$ sayısı bulunabiliyorsa h fonksiyonuna sınırlı fonksiyon denir.

2.2. Korovkin Teoremi

$C[a,b]$ uzayı üzerinde tanımlanan bir $(f_n)_{n\geq 1}$ lineer pozitif operatör dizisinin bir yaklaşım süreci, yani, $[a,b]$ aralığı üzerinde her $\xi \in C[a,b]$ için $(f_n)(\xi) \rightrightarrows \xi$ yakınsamasının $[a,b]$ üzerinde düzgün olup olmadığını gösteren teoremdir.

2.2.1. Teorem

$\xi \in C[a,b]$ ve reel eksenin tamamında sınırlı $|\xi(s)| < M_\xi$ olsun. Eğer $f_n(\xi;s)$ pozitif ve lineer bir operatör dizisi $[a,b]$ aralığındaki her s için

(a) $f_n(1;s) \rightrightarrows 1$
(b) $f_n(r;s) \rightrightarrows s$
(c) $f_n(r^2;s) \rightrightarrows s^2$

şartlarını sağlıyorsa, $[a,b]$ kapalı aralığında $f_n(\xi;x)$, operatörü ξ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

İspat

$\xi \in C[a,b]$ olsun. Süreklilik tanımından

$$|r-s| < \delta \Longrightarrow |\xi(r) - \xi(s)| < \varepsilon$$

olur. Üçgen eşitsizliğinden

$$|\xi(r)-\xi(s)| \leq |\xi(r)|+|\xi(s)| \leq 2N_\xi$$

gerçeklenir. Diğer yandan

$$|r-s| \geq \delta \Longrightarrow \frac{|r-s|}{\delta} \geq 1$$

olacağından $\frac{(r-s)^2}{\delta^2} \geq \frac{|r-s|}{\delta} \geq 1$ olur. Ayrıca, sürekli fonksiyon aynı zamanda sınırlı olduğundan

$$|\xi(r)-\xi(s)| \leq 2N_\xi \leq 2N_\xi \frac{(r-s)^2}{\delta^2}$$

yazılabilir. O halde

$$|r-s| < \delta \Rightarrow |\xi(r)-\xi(s)| \leq \varepsilon$$

ve

$$|r-s| \geq \delta \Rightarrow |\xi(r)-\xi(s)| \leq 2N_\xi \frac{(r-s)^2}{\delta^2}$$

dir. Böylece her $k,r,s \in [a,b]$ için

$$|\xi(r)-\xi(s)| \leq \varepsilon + 2N_\xi \frac{(r-s)^2}{\delta^2}$$

yazlabilir. $|r-s| > \delta$ ise $2N_\xi \frac{(r-s)^2}{\delta^2} > 0$ olduğundan yukarıdaki eşitsizlik yine sağlanır. Eğer, $(a),(b)$ ve (c) şartlarını sağlayan (f_n) operatör dizisinin

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n(\xi(r);x)-\xi(s)||_{C[a,b]} = 0$$

eşitliğini de sağladığı gösterilirse ispat tamamlanır.

Lineerlikten

$$|f_n(\xi(r);s)-\xi(s)| = |f_n(\xi(r);s)+f_n(\xi(s);x)-f_n(\xi(s);x)-\xi(x)|$$
$$= |f_n((\xi(r)-\xi(r));x)+\xi(s)(f_n(1;s)-1)|$$

dir. Üçgen eşitsizliği uygulandığında

$$|f_n(\xi(r);s)-\xi(s)| \leq |f_n((\xi(r)-\xi(s);s))|+|\xi(s)||f_n(1;s)-1|$$

olur. Diğer yandan lineer pozitif operatörlerin monoton artan özelliğinden

$$\xi(s)-\xi(s) \leq |\xi(s)-\xi(s)|$$

dolayı

$$|f_n(\xi(r)-\xi(s);s)| \leq |f_n(|\xi(s)-\xi(s)|;s)|$$

bulunur. Operatörün pozitif olmasından ve $|\xi(r)-\xi(s)| \geq 0$ eşitsizliğinden dolayı

$$|f_n(|\xi(k)-\xi(s)|;s)| = f_n(|\xi(k)-\xi(s)|;s)$$

dir. O halde

$$|f_n(\xi(r);s)-\xi(s)| \leq f_n(|\xi(r)-\xi(s)|;s)+|\xi(s)||f_n(1;s)-1|$$

olduğu ifade edilebilir ve

$$|f_n(\xi(r);s)-\xi(s)| \leq f_n(|\xi(r)-\xi(s)|;s)+N_\xi|f_n(1;s)-1|$$

yazılabilir. (f_n) operatörünün monoton artanlığından

$$|f_n(\xi(r);s)-\xi(s)| \leq f_n\left(\varepsilon+2N_\xi\tfrac{(r-s)^2}{\delta^2}\right)+N_\xi|f_n(1;s)-1|$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
f_n\left(\varepsilon+\frac{2N_\xi}{\delta^2}(r-s)^2;s\right) &= f_n(\varepsilon;s)+f_n\left(\frac{2N_\xi}{\delta^2}(r-s)^2;s\right)\\
&= \varepsilon f_n(1;s)+\frac{2N_\xi}{\delta^2}f_n(r^2-2sr+s^2;s)\\
&= \varepsilon(f_n(1;s)-1)+\varepsilon+\frac{2N_\xi}{\delta^2}\left[(f_n(r^2;s)-s^2)\right.\\
&+ \left.2s^2-2sf_n(r;s)+s^2f_n(1;s)-s^2\right]\\
&= \varepsilon(f_n(1;s)-1)+\varepsilon\\
&+ \frac{2N_\xi}{\delta^2}\left[(f_n(r^2;s)-s^2)-2s(f_n(r;s)-s)+s^2(f_n(1;s)-1)\right]
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
|f_n(\xi(r;s)-\xi(s))| &\leq \varepsilon(f_n(1;s)-1)+\varepsilon+N_\xi|(f_n(1;s)-1)|\\
&+ \frac{2N_\xi}{\delta^2}\left[f_n(r^2;s)-2s(f_n(r;s)-s)+s^2(f_n(1;s)-1)\right]
\end{aligned}$$

bulunur. $(i),(ii)$ ve (iii) şartlarının kullanılmasıyla $|f_n(\xi(r);s)-\xi(s)| \leq \varepsilon$ olur. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty}\max_{a\leq s\leq b}|f_n(\xi(r);s)-\xi(s)|=0$$

olur ve istenilen bulunur. Verilen operatörün sadece $1, r$ ve r^2 ifadelerinin $1, s$ ve s^2 ye düzgün yakınsaması, sonlu aralıkta sürekli olan bütün fonksiyonların bu operatör yardımıyla yakınsamasını söylememiz için yeterlidir.

Korovkin teoreminde $\xi_i(r) = r^i, i = 0,1,2$ fonksiyonları Korovkin test fonksiyonları olarak ifade edilir.

2.3. Süreklilik Modülü ve Özellikleri

Yaklaşım teorisinde, lineer pozitif operatörün sürekli bir fonksiyona yakınsaması kadar önemli olan bir diğer husussa yakınsama hızıdır. Yakınsama hızını bulmak için kullanılan önemli bir metod da süreklilik modülüdür.

2.3.16. Tanım (Süreklilik Modülü)

$f \in C[a,b]$ olsun. $\delta \in [0, b-a]$ ve $\eta, \varkappa \in [a,b]$ için

$$\omega(f;\delta) = \sup_{|\eta-\varkappa|\leq\delta} |f(\eta) - f(\varkappa)|$$

şeklinde tanımlanan $\omega(f;\delta)$ ifadesine f fonksiyonunun süreklilik modülü adı verilir. Tanımdan da görüldüğü gibi süreklilik modülü f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki maksimum değişimini verir [20].

Süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri gerçekler:

1. $\omega(f;\delta) \geq 0$.
2. $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(f;\delta_1) \leq \omega(f;\delta_2)$.
3. $\lim_{\delta\to 0} \omega(f;\delta) = 0$.
4. $m \in \mathbb{N}$ için $\omega(f;m\delta) \leq m\omega(f;\delta)$.
5. $\beta \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(f;\beta\delta) \leq (\beta+1)\omega(f;\delta)$.
6. $|f(\eta) - f(\varkappa)| \leq \omega(f;|\eta-\varkappa|)$.

7. $|f(r)-f(s)| \leq \left(\frac{|r-s|}{\delta}+1\right)\omega(f;\delta)$.

İspat

1. Süreklilik modülü, tanımı gereğince bir mutlak değerin supremumu olduğundan ispat açıktır.

2. $\delta_1 \leq \delta_2$ için $|r-s| \leq \delta_2$ bölgesinin $|r-s| \leq \delta_1$ bölgesinden daha büyük olduğu açktır. Bölge büyüdükçe alınan supremum da büyüyeceğinden ispat açıktır.

3. $|r-s| \leq \delta$ eşitsizliğindeki δ nın sıfıra yaklaşması $r \to s$ olması demektir. f fonksiyonu sürekli olduğundan, sürekliliğin tanımından dolayı $r \longrightarrow s$ için $|f(r)-f(s)| \to 0$ olur.

4. Süreklilik modülünün tanımından dolayı,

$$\omega(f;m\delta) = \sup_{|r-s|\leq m\delta} |f(r)-f(s)|$$

yazılabilir.

$$|r-s| \leq m\delta \Rightarrow s-m\delta \leq r \leq s+m\delta$$

olup, $r = s+mh$ seçimi ile $|h| \leq \delta$ için

$$\omega(f;m\delta) = \sup_{|h|\leq\delta} |f(s+mh)-f(s)|$$

yazılabilir. Diğer yandan,

$$\sup_{|h|\leq\delta} |f(s+mh)-f(s)| = \sup_{|h|\leq\delta} \left| \sum_{k=0}^{m-1} [f(s+(k+1)h)-f(s+kh)] \right|$$

olup eşitliğin sağ tarafına üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}\sup_{|h|\leq\delta}|f(s+mh)-f(s)| &= \sup_{|h|\leq\delta}\sum_{k=0}^{m-1}\left|f(s+(k+1)h)-f(s+kh)\right| \\ &\leq \omega(f;\delta)+\ldots+\omega(f;\delta) \\ &= m\omega(f;\delta)\end{aligned}$$

sağlanacaktır.

5. $\beta\in\mathbb{R}^+$ sayısının tam kısmı $[|\beta|]$ ile gösterilirse tam değer fonksiyonunun tanımı gereği

$$[|\beta|]\leq\beta\leq[|\beta|]+1$$

eşitsizlikleri sağlanacaktır. Şimdi, bu eşitsizlikler ve (2) özelliğinde ispat edilen $\omega(f;\delta)$ nın azalmayan fonksiyon olduğu gözönünde bulundurulursa,

$$\omega(f;\beta\delta)\leq\omega(f;([|\beta|]+1)\delta) \tag{2.3}$$

eşitsizliği elde edilir. $[|\beta|]$ pozitif bir tamsayı olduğundan üstteki eşitsizliğin sağ tarafına (4) özelliği uygulanırsa

$$\omega(f;[|\beta|]+1)\leq([|\beta|]+1)\omega(f;\delta)$$

eşitsizliği elde edilir. Bunun yanında her $\beta\in\mathbb{R}^+$ için

$$[|\beta|]+1\leq\beta+1$$

olduğundan

$$\omega(f;([|\beta|]+1)\delta)\leq(\beta+1)\omega(f;\delta)$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan (2.3) eşitsizliği yardımıyla

$$\omega(f;\beta\delta)\leq(\beta+1)\omega(f;\delta)$$

yazılabilir ki, bu da ispatı tamamlar.

6. $\omega(f;\delta)$ ifadesinde $\delta = |\eta - \varkappa|$ seçimiyle

$$\omega(f;|\eta-\varkappa|) = \sup_{\eta,\varkappa\in[a,b]} |f(\eta)-f(\varkappa)|$$

elde edilir. Bu durumda $|f(\eta)-f(\varkappa)|$ farkının supremumu $\omega(f;|\eta-\varkappa|)$ olacağından ispat açıktır.

7. (6) dan

$$|f(r)-f(s)| \leq \left(f;\frac{|r-s|}{\delta}\delta\right)$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte (5) özelliği kullanılırsa

$$|f(r)-f(s)|\left(\frac{|r-s|}{\delta}+1\right)\omega(f;\delta)$$

olacağından ispat tamamlanır.

2.4. Önemli Formüller, Tanımlar ve Eşitsizlikler

2.4.1. Teorem (Hölder Eşitsizliği)

$p,q>0$ reel sayıları $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $(a_i)=(a_1,a_2,a_3,\ldots)$ ve $(b_i)=(b_1,b_2,b_3,\ldots)$ şeklinde diziler olsun. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^{\infty}|a_ib_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine Hölder Eşitsizliği denir [6].

2.4.2. Teorem (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)

(a_i) ve (b_i) için

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliğine Cauchy-Schwarz eşitsizliği denir [2].

2.4.3. Teorem (Taylor Formülü)

f fonksiyonu s_0 noktasını kapsayan bir aralıkta $(n+1)$-inci mertebeden sürekli türevlere sahip olsun. Bu aralıkta her s için Taylor Formülü,

$$f(s) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(s_0)}{k!} (s - s_0)^k$$

olur. Eğer $H_n(x)$ ifadesine kalan terim, fark veya hata denirse o halde

$$H_n(s) = \frac{1}{n!} \int_{s_0}^{s} (s - v)^n f^{(n+1)}(v) dv$$

olmak üzere

$$f(s) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(s_0)}{k!} (s - s_0)^k + H_n(s)$$

yazılabilir. Bu ifadeye kalan terimli Taylor Formülü adı verilir [6].

2.4.17. Tanım (Fonksiyonel)

Y elemanları fonksiyonlar olan $\mathbb{R}$ cismi üzerinde normlu vektör uzayı olsun. Buna göre

$M : Y \longrightarrow \mathbb{R}$

$h \longrightarrow M(h) = M_h$

ile verilen M dönüşümüne Y üzerinde bir fonksiyonel denir. Bir başka deyişle, bir fonksiyonel, bir vektör uzayından aldığı bir fonksiyonu reel bir sayıya dönüştüren bir dönüşümdür [26].

2.4.18. Tanım (Peetre K-Fonksiyoneli)

$f \in C_B[0,\infty)$ fonksiyonu için Peetre K-fonksiyoneli

$$K(f;\delta) = \inf_{h \in C_B^2[0,\infty)} \left\{ ||f-h||_{C_B[0,\infty)} + \delta ||h||_{C_B^2[0,\infty)} \right\} \tag{2.4}$$

gibi tanımlanmaktadır.

2.4.19. Tanım (İkinci Dereceden Süreklilik Modülü)

$f \in C_B[0,\infty)$ fonksiyonu için ikinci dereceden süreklilik modülü

$$\omega_2(f;\delta) := \sup_{0<t\leq\delta} ||f(.+2t) - 2f(.+t) + f(.)||_{C_B[0,\infty)} \tag{2.5}$$

ifadesi ile tanımlanmaktadır. Burada bir $C > 0$ sabiti vardır [6], öyle ki,

$$K(f;\delta) \leq C\omega_2(f;\sqrt{\delta}) \tag{2.6}$$

eşitsizliği sağlanır.

2.4.20. Tanım (Kantorovich Operatörü)

Bernstein operatörlerinin Kantorovich tipli integral genellemesi, 1930 yılında Kantorovich

tarafından verilmiştir. $L_1([0,1])$ için bu genelleme, $x \in [0,1],\ n > n_0$ ve $n, n_0 \in \mathbb{N}$ için

$$D_n \aleph(z) = (n+1) \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} \aleph(v) dv.$$

olarak tanımlanmıştır [7, 21].

2.4.21. Tanım (Lipschitz Sınıfından Fonksiyonlar)

f fonksiyonu bir $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. $\forall x,t \in I$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq M|t-x|^{\alpha} \tag{2.7}$$

olacak şekilde α ve M pozitif sayıları varsa f ye Lipschitz sınıfındandır denir ve $f \in Lip_M(\alpha)$ şeklinde gösterilir.

3. BRENKE POLİNOMLARININ BİR GENELLEMESİNİ İÇEREN STANCU-KANTOROVICH TİPLİ BİR OPERATÖR

Fonksiyonlara polinomlarla yaklaşma fikri sadece matematiksel analizin temel bir yönü değil, aynı zamanda çeşitli pratik alanlar için değerli matematiksel araçlar da sunar. Weierstrass teoremi, $[a,b]$ aralığında sürekli olan herhangi bir f fonksiyonunun, $[a,b]$ üzerinde düzgün yakınsak olan bir polinom serisi kullanılarak ifade edilebileceğini ileri sürer. Weierstrass teoremine göre tüm polinomlar kümesi $C[a,b]$ üzerinde yoğundur. Bernstein, olasılıksal bir yapı kullanarak Weierstrass yaklaşım teorisinin kesin kanıtını sağlamıştır.

1950 yılında, aşağıdaki S_n operatörleri Szász tarafından tanıtılmış, araştırılmıştır ve Szász-Mirakjan operatörleri olarak bilinmektedir [8, 16, 17, 19].

$$S_n(f;x) := e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right). \tag{3.1}$$

Burada $n \in \mathbb{N},\ x \geq 0$ ve $f \in C[0,\infty)$ dır ve yukarıda bahsedilen seri yakınsaktır. Bu operatörler Bernstein polinomlarının sonsuz aralığa genellemeleridir. Bir çok matematikçi, S_n operatörlerinin bazı yaklaşım özelliklerini araştırmış ve tartışmıştır [22, 23].

Cheney ve Sharma [9], ortogonal polinomlar da dahil olmak üzere operatörleri aşağıdaki şekilde vermiştir:

$$F_n(f;x) = (1-x)^{n+1} exp\left(\frac{tx}{1-x}\right) \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{k+n}\right) L_k^{(n)}(t) x^k.$$

Burada $t \leq 0$ için $L_k^{(n)}(t)$, Laguerre polinomlarını temsil eder. Bu yapıdan sonra pozitif yaklaşım prosedürlerinde ortogonal polinom kavramı ortaya çıkmıştır. $x \in [0,\infty)$ için $p_k(x) \geq 0$ varsayımı altında, lineer pozitif operatörler $P_n(f;x)$ Jakimovski ve Leviatan tarafından tanıtılmıştır [18]:

$$P_n(f;x) := \frac{e^{-nx}}{g(1)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) f\left(\frac{k}{n}\right). \tag{3.2}$$

Burada $p_k(x)$ Appell polinomlarıdır ve $n \in \mathbb{N}$ için Szász operatörleri yardımıyla bu operatörlerin yaklaşım özellikleri verilmiştir. Brenke tipi polinomlarının doğurucu fonksiyonları aşağıdaki gibidir [11, 25]:

$$A(t)B(xt) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x)t^k,$$

$p_k(x)$ Brenke polinomlarıdır, A ve B analitik fonksiyonlardır ve

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \,, \quad a_0 \neq 0,$$

$$B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \,, \quad b_0 \neq 0,$$

şeklinde tanımlanır. Aşağıdaki Brenke tipi polinomları içeren lineer pozitif operatörler Varma ve arkadaşları tarafından tanıtılmıştır [12, 24]:

$$£_n(f;x) := \frac{1}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) f\left(\frac{k}{n}\right), \tag{3.3}$$

burada $x \geq 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ dir. Bu durumda $\{z : |z| < R, R > 1\}$ için

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad , \ (a_0 \neq 0)$$

analitik fonksiyondur ve $h(1) \neq 0$ dir. Eğer π_k polinomları

$$h(u)e^{ux} = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k(x)u^k,$$

eşitliğini sağlıyorsa, $\pi_k(x)$ polinomlarına Appell polinomları denir [13, 25]. Daha önce bahsedilen polinomlar, özel fonksiyonlar olarak önemli bir öneme sahiptir ve mühendislik ile matematiksel analizde çeşitli uygulamaları bulnur.

Eğer $\pi_k(x)$ aşağıdaki bağıntıyı sağlıyorsa

$$R_1(h(t))R_2(xh(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k(x)t^k, \tag{3.4}$$

bu durumda $\pi_k(x)$ polinomlarına genelleştirilmiş Brenke polinomları [14] adı verilir. Burada R_1, R_2 ve h, aşağıdaki kümede analitik fonksiyonlardır:

$$\{t : |t| < R, \quad R > 1\},$$

öyle ki

$$\begin{aligned} R_1(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} r_{1,k}t^k, \quad (r_{1,0} \neq 0), \\ R_2(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} r_{2,k}t^k, \quad (r_{2,0} \neq 0), \\ h(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} h_k t^k, \quad (h_1 \neq 0), \end{aligned} \tag{3.5}$$

aşağıdaki varsayımlar altında

(i) $R(1) \neq 0, \frac{a_{k-\tau}b_\tau}{R(1)} \geq 0, \quad 0 \leq \tau \leq k, \quad k = 0,1,2,...,$

(ii) $B : [0,\infty) \longrightarrow (0,\infty),$

(iii) Burada aşağıdaki (3.6) *ve* (3.7) serileri, $|t| < G, (G > 1)$ için yakınsaktır .

$$R(t)=\sum_{\tau=0}^{\infty} r_{\tau}t^{\tau}\ ,\ r_0\neq 0, \tag{3.6}$$

$$B(t)=\sum_{\tau=0}^{\infty} b_{\tau}t^{\tau}\ ,\ b_{\tau}\neq 0\ (\tau\geq 0), \tag{3.7}$$

analitik fonksiyonlardır ve yukarıdaki varsayımlar altında Kantorovich tipli operatörler [15] aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$K_n(f;x):=\frac{n}{R(1)B(nx)}\sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt.$$

Burada $n\in\mathbb{N},\ x\geq 0,\ f\in C[0,\infty)$ ve $p_k(x)$ Brenke tipli polinomlardır. Sucu [14] tarafından $\left\{L_n^{(v_1,v_2)}\right\}_{n\geq 1},\ v_1,v_2\geq 0$ operatör dizisi aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$L_n^{(v_1,v_2)}(f;x):=\frac{1}{R_1(h(1))R_2(nxh(1))}\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k(nx)f\left(\frac{k+v_1}{n+v_2}\right). \tag{3.8}$$

Burada $\pi_k(x)$ polinomları (3.4) ile tanımlanır. h fonksiyonu ve $\pi_k(x)$ polinomları $h'(1)=1$ ve $\pi_k(x)\geq 0$ özelliklerine sahiptir.

Yukarıda bahsedilen çalışmaları temel alarak, Stancu-Kantorovich tipli lineer pozitif operatörler aşağıdaki gibi ele alınacaktır:

$$L_m^{*(v_1,v_2)}(f;x):=\frac{m+v_2}{R_1(h(1))R_2(mxh(1))}\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k(mx)\int_{\frac{k+v_1}{m+v_2}}^{\frac{k+v_1+1}{m+v_2}} f(\varphi)d\varphi. \tag{3.9}$$

Burada $f\in C[0,\infty), x\in[0,\infty)$ ve $v_1,v_2\geq 0$ dir.
Kabul edelim ki

(i) $R_1,R_2:\mathbb{R}\longrightarrow(0,\infty)$,
(ii) $|t|<G,(G>1)$ için (3.4) ve (3.5) yakınsaktır,

koşulları sağlansın.

3.1. $L_m^{*(v_1,v_2)}$ Operatörlerinin Bazı Sonuçları

Öncelikle, Korovkin teoremini operatör dizisine uygulamak için $\left\{L_m^{*(v_1,v_2)}\right\}_{m\geq 1}$ operatörünün bazı önemli lemmalarına ihtiyaç vardır.

3.1.1. Lemma

Eğer π_k polinomları (3.4) bağıntısını sağlıyorsa bu durumda aşğıdaki ifadeler gerçeklenir:

$$(i)\quad \sum_{k=0}^{\infty}\pi_k(mx)=R_1(h(1))R_2(mxh(1)),$$

$$(ii)\quad \sum_{k=0}^{\infty}k\pi_k(mx)=A_1'(h(1))A_2(mxh(1))+mxA_1(h(1))A_2'(mxh(1)),$$

$$\begin{aligned}(iii)\quad \sum_{k=0}^{\infty}k^2\pi_k(mx)&=\left[\left(h''(x)+1\right)R_1'(h(1))+R_1''(h(1))\right]R_2(mxh(1))\\&\quad+\left[2R_1'(h(1))+(h''(x)+1)R_1(h(1))\right]R_2'(mxh(1))mx\\&\quad+R_1(h(1))R_2''(mxh(1))(mx)^2.\end{aligned}$$

İspat.

(3.4) ile verilen eşitliği kullanarak aşağıdaki sonuç elde edilir:

$t=1$ için

$$R_1(h(1))R_2(mxh(1))=\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k(mx).$$

$\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k(mx)t^k=R_1(h(t))R_2(mxh(t))$ eşitliğinden, eşitliğin her iki tarafın t ye göre türevi alınırsa

$$\sum_{k=0}^{\infty}k\pi_k(mx)t^{k-1}=h'(t)R_1'(h(t))R_2(mxh(t))+mxh'(t)R_1(h(t))R_2'(mxh(t))$$

elde edilir. Eğer $h'(1)=1$ ve $t=1$ alınırsa

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\pi_k(mx) = R_1'(h(1))R_2(mxh(1)) + mxR_1(h(1))R_2'(mxh(1))$$

olur. Bilindiği gibi

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\pi_k(mx)t^{k-1} = h'(t)R_1'(h(t))R_2(mxh(t)) + mxh'(t)R_1(h(t))R_2'(mxh(t))$$

eşitliği gerçeklenir. O halde

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\pi_k(mx)t^{k-2} &= R_1''(h(t))h'(t)h'(t)R_2(mxh(t)) + R_1'(h(t))h''(t)R_2(mxh(t)) \\ &+ R_1'(h(t))h'(t)mxh'(t)R_2'(mxh(t)) + mxh''(t)R_1(h(t))R_2'(mxh(t)) \\ &+ mxh'(t)h'(t)R_1'(h(t))R_2'(mxh(t)) \\ &+ (mx)^2h'(t)R_1(h(t))h'(t)R_2''(mxh(t))\end{aligned}$$

eşitliği yazılır. Eğer $h'(1)=1$ ve $t=1$ yazılır ise, o halde

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} k^2\pi_k(mx) - \sum_{k=0}^{\infty} k\pi_k(mx) &= R_1''(h(1))R_2(mxh(1)) + R_1'(h(1))h''(1)R_2(mxh(1)) \\ &+ R_1'(h(1))mxR_2'(mxh(1)) + mxh''(1)R_1(h(1))R_2'(mxh(1)) \\ &+ mxR_1'(h(1))R_2'(mxh(1)) + (mx)^2R_1(h(1))R_2''(mxh(1))\end{aligned}$$

eşitliği ve buradan da

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2\pi_k(mx) = R_1''(h(1))R_2(mxh(1)) + R_1'(h(1))h''(1)R_2(mxh(1))$$
$$+ mxR_1'(h(1))R_2'(mxh(1)) + mxh''(1)R_1(h(1))R_2'(mxh(1))$$
$$+ mxR_1'(h(1))R_2'(mxh(1)) + (mx)^2R_1(h(1))R_2''(mxh(1)) + \sum_{k=0}^{\infty} k\pi_k(mx)$$
$$= R_1''(h(1))R_2(mxh(1)) + R_1'(h(1))h''(1)R_2(mxh(1))$$
$$+ mxR_1'(h(1))R_2'(mxh(1)) + mxh''(1)R_1(h(1))R_2'(mxh(1))$$
$$+ mxR_1'(h(1))R_2'(mxh(1)) + (mx)^2R_1(h(1))R_2''(mxh(1))$$
$$+ R_1'(h(1))R_2(mxh(1)) + mxR_1(h(1))R_2'(mxh(1))$$
$$= \Big[(h''(1)+1)R_1'(h(1)) + R_1''(h(1))\Big]R_2(mxh(1))$$
$$+ \Big[2R_1'(h(1)) + (h''(1)+1)R_1(h(1))\Big]R_2'(mxh(1))mx$$
$$+ R_1(h(1))R_2''(mxh(1))(mx)^2$$

bulunur.

3.1.2. Lemma

$m \geq 1$ için aşağıdaki denklemler elde edilir:

(i) $L_m^{*(v_1,v_2)}(1;x) = 1,$

(ii) $L_m^{*(v_1,v_2)}(s;x) = \dfrac{1}{m+v_2}\left(\dfrac{mR_2'(mxh(1))}{R_2(mxh(1))}x + \dfrac{R_1'(h(1))}{R_1(h(1))} + \dfrac{2v_1+1}{2}\right),$

(iii) $L_m^{*(v_1,v_2)}(s^2;x) = \dfrac{1}{(m+v_2)^2}\left\{\dfrac{m^2R_2''(mxh(1))}{R_2(mxh(1))}x^2\right.$
$$+ \left(\frac{m[R_1'(h(1)) + (h''(1)+1)R_1(h(1))]R_2''(mxh(1))}{R_1(h(1))R_2(mxh(1))} + \frac{m(2v_1+1)R_2'(mxh(1))}{R_2(mxh(1))}\right)x$$
$$\left. + \frac{(h''(1)+1)R_1'(h(1)) + R_1''(h(1)) + (2v_1+1)R_1'(h(1))}{R_1(h(1))} + \frac{3v_1^2+3v_1+1}{3}\right\}.$$

İspat.

(3.9) ile verilen operatör kullanılırsa

$$\begin{aligned} L_m^{*(v_1,v_2)}(1;x) &= \frac{m+v_2}{R_1(h(1))R_2(mxh(1))}\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k(mx)\int_{\frac{k+v_1}{m+v_2}}^{\frac{k+v_1+1}{m+v_2}} d\varphi \\ &= \frac{m+v_2}{R_1(h(1))R_2(mxh(1))}\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k(mx)\left(\varphi\Big|_{\frac{k+v_1}{m+v_2}}^{\frac{k+v_1+1}{m+v_2}}\right) \\ &= \frac{m+v_2}{R_1(h(1))R_2(mxh(1))}\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k(mx)\frac{1}{m+v_2} \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 3.1.1.'den bilindiği gibi

$$R_1(h(1))R_2(mxh(1)) = \sum_{k=0}^{\infty}\pi_k(mx),$$

eşitliği yazılır. Bu durumda

$$L_m^{*(v_1,v_2)}(1;x) = 1$$

eşitliği bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} L_m^{*(v_1,v_2)}(s;x) &= \frac{m+v_2}{R_1(h(1))R_2(mxh(1))}\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k(mx)\int_{\frac{k+v_1}{m+v_2}}^{\frac{k+v_1+1}{m+v_2}} \varphi d\varphi \\ &= \frac{m+v_2}{R_1(h(1))R_2(mxh(1))}\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k(mx)\frac{1}{2}\left(\varphi^2\Big|_{\frac{k+v_1}{m+v_2}}^{\frac{k+v_1+1}{m+v_2}}\right) \\ &= \frac{m+v_2}{R_1(h(1))R_2(mxh(1))}\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k(mx)\left\{\frac{k}{(m+v_2)^2}+\frac{2v_1+1}{2(m+v_2)^2}\right\} \\ &= \frac{m+v_2}{R_1(h(1))R_2(mxh(1))}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k(mx)\frac{k}{(m+v_2)^2}+\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k(mx)\frac{2v_1+1}{2(m+v_2)^2}\right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{m+v_2}{R_1(h(1))R_2(mxh(1))}\left\{\frac{1}{(m+v_2)^2}\sum_{k=0}^{\infty}k\pi_k(mx)+\frac{2v_1+1}{2(m+v_2)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k(mx)\right\}$$
$$= \frac{m+v_2}{R_1(h(1))R_2(mxh(1))}\left\{\frac{1}{m+v_2}\left(R_1'(h(1))R_2(mxh(1))+mxR_1(h(1))R_2'(mxh(1))\right)\right.$$
$$\left.+\frac{2v_1+1}{m+v_2}\left(R_1(h(1))R_2(mxh(1))\right)\right\}$$
$$= \frac{R_1'(h(1))}{R_1(h(1))(m+v_2)}+\frac{mR_2'(mxh(1))}{R_2(mxh(1))(m+v_2)}x+\frac{2v_1+1}{(m+v_2)}$$
$$= \frac{1}{m+v_2}\left(\frac{mR_2'(mxh(1))}{R_2(mxh(1))}x+\frac{R_1'(h(1))}{R_1(h(1))}+\frac{2v_1+1}{2}\right)$$

yazılır. (3.9) eşitliğinden

$$L_m^{*(v_1,v_2)}(s^2;x) = \frac{m+v_2}{R_1(h(1))R_2(mxh(1))}\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k(mx)\int_{\frac{k+v_1}{m+v_2}}^{\frac{k+v_1+1}{m+v_2}}\varphi^2 d\varphi$$
$$= \frac{m+v_2}{R_1(h(1))R_2(mxh(1))}\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k(mx)\frac{1}{3}\left(\varphi^3\Big|_{\frac{k+v_1}{m+v_2}}^{\frac{k+v_1+1}{m+v_2}}\right)$$
$$= \frac{m+v_2}{R_1(h(1))R_2(mxh(1))}\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k(mx)\left\{\frac{k^2}{(m+v_2)^3}+\frac{k(2v_1+1)}{(m+v_2)^3}+\frac{3v_1^2+3v_1+1}{3(m+v_2)^3}\right\}$$
$$= \frac{m+v_2}{R_1(h(1))R_2(mxh(1))}\left\{\frac{1}{(m+v_2)^2}\sum_{k=0}^{\infty}k^2\pi_k(mx)+\frac{2v_1+1}{(m+v_2)^2}\sum_{k=0}^{\infty}k\pi_k(mx)\right.$$
$$\left.+\frac{3v_1^2+3v_1+1}{3(m+v_2)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k(mx)\right\}$$

sonucuna ulaşılır.

$\sum_{k=0}^{\infty}k^2\pi_k(mx)$, $\sum_{k=0}^{\infty}k\pi_k(mx)$ ve $\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k(mx)$ ifadeleri kullanılırsa, Lemma 3.1.1. den istenilen elde edilir. Daha sonra da

$$L_m^{*(v_1,v_2)}(s^2;x) = \frac{1}{(m+v_2)^2}\left\{\frac{m^2A_2''(mxh(1))}{R_2(mxh(1))}x^2\right.$$
$$+\left(\frac{m[R_1'(h(1))+(h''(1)+1)R_1(h(1))]R_2''(mxh(1))}{R_1(h(1))R_2(mxh(1))}+\frac{m(2v_1+1)R_2'(mxh(1))}{R_2(mxh(1))}\right)x$$
$$\left.+\frac{(h''(1)+1)R_1'(h(1))+R_1''(h(1))+(2v_1+1)R_1'(h(1))}{R_1(h(1))}+\frac{3v_1^2+3v_1+1}{3}\right\}$$

eşitliği elde edilir.

3.1.3. Lemma

(3.9) ile tanımlanan $L_m^{*(v_1,v_2)}$ operatörü kullanılarak

$$(i) \qquad L_m^{*(v_1,v_2)}(s-x;x) = \frac{1}{m+v_2}\left\{\left(\frac{mR_2'(mxh(1))}{R_2(mxh(1))} - (m+v_2)\right)x + \frac{R_1'(h(1))}{R_1(h(1))} + \frac{2v_1+1}{2}\right\},$$

$$\begin{aligned}(ii) \qquad L_m^{*(v_1,v_2)}((s-x)^2;x) &= \left(\frac{m^2R_2''(mxh(1))}{R_2(m+v_2)^2} - \frac{2mR_2'(mxh(1))}{R_2(m+v_2)} + 1\right)x^2 \\ &+ \left(\frac{m[A_1'(h(1)) + (h''(1)+1)]R_2''(mxh(1))}{R_1(h(1))R_2(mxh(1))(m+v_2)^2}\right. \\ &+ \frac{m(2v_1+1)R_2'(mxh(1))}{(m+v_2)^2R_2(mxh(1))} \\ &\left. - \frac{2R_1'(h(1))}{(m+v_2)R_1(h(1))} - \frac{2v_1+1}{m+v_2}\right)x \\ &+ \frac{(h''(1)+1)R_1(h(1)) + R_1''(h(1)) + (2v_1+1)R_1'(h(1))}{(m+v_2)^2R_1(h(1))} \\ &+ \frac{3v_1^2+3v_1+1}{3(m+v_2)^2}\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

İspat.

$L_m^{*(v_1,v_2)}$ operatörünün lineerlik özelliğinden ve Lemma 3.1.2 den

$$\begin{aligned}L_m^{*(v_1,v_2)}(s-x;x) &= L_m^{*(v_1,v_2)}(s;x) - L_m^{*(v_1,v_2)}(x;x) = L_m^{*(v_1,v_2)}(s;x) - xL_m^{*(v_1,v_2)}(1;x) \\ &= \left(\frac{mR_2'(mxh(1))}{R_2(mxh(1))}x + \frac{R_1'(h(1))}{R_1(h(1))} + \frac{2v_1+1}{2}\right)\frac{1}{m+v_2} - x \\ &= \left(\frac{mR_2'(mxh(1))}{R_2(mxh(1))(m+v_2)} - 1\right)x + \frac{1}{m+v_2}\left(\frac{R_1'(h(1))}{R_1(h(1))} + \frac{2v_1+1}{2}\right)\end{aligned}$$

bulunur ve bunun yanında

$$
\begin{aligned}
L_m^{*(v_1,v_2)}((s-x)^2;x) &= L_m^{*(v_1,v_2)}((s^2-2sx+x^2);x) \\
&= L_m^{*(v_1,v_2)}(s^2;x) - 2xL_m^{*(v_1,v_2)}(s;x) + x^2 L_m^{*(v_1,v_2)}(1;x) \\
&= \frac{1}{(m+v_2)^2}\left\{\frac{m^2R_2''(mxh(1))}{R_2(mxh(1))}x^2\right. \\
&+ \left(\frac{m[R_1'(h(1))+(h''(1)+1)R_1(h(1))]R_2''(mxh(1))}{R_1(h(1))R_2(mxh(1))}\right. \\
&\left.\left.+\frac{m(2v_1+1)R_2'(mxh(1))}{R_2(mxh(1))}\right)x\right. \\
&\left.+\frac{(h''(1)+1)R_1'(h(1))+R_1''(h(1))+(2v_1+1)R_1'(h(1))}{R_1(h(1))}+\frac{3v_1^2+3v_1+1}{3}\right\} \\
&- \frac{2}{m+v_2}\left(\frac{mR_2'(mxh(1))}{R_2(mxh(1))}x^2+\frac{R_1'(h(1))}{R_1(h(1))}x+\frac{2v_1+1}{2}x\right)+x^2 \\
&= \left(\frac{m^2R_2''(mxh(1))}{R_2(m+v_2)^2}-\frac{2mR_2'(mxh(1))}{R_2(m+v_2)}+1\right)x^2 \\
&+ \left(\frac{m[R_1'(h(1))+(h''(1)+1)]R_2''(mxh(1))}{R_1(h(1))R_2(mxh(1))m+v_2)^2}+\frac{m(2v_1+1)R_2'(mxh(1))}{(m+v_2)^2R_2(mxh(1))}\right. \\
&\left.- \frac{2R_1'(h(1))}{(m+v_2)R_1(h(1))}-\frac{2v_1+1}{m+v_2}\right)x \\
&+ \frac{(h''(1)+1)R_1(h(1))+R_1''(h(1))+(2v_1+1)R_1'(h(1))}{(m+v_2)^2R_1(h(1))}+\frac{3v_1^2+3v_1+1}{3(m+v_2)^2}
\end{aligned}
$$

eşitliği de bulunur.

Şimdi:

$$
\begin{aligned}
&M_{1,m}^{(v_1,v_2)}(x) := L_m^{*(v_1,v_2)}(s-x;x), \\
&M_{2,m}^{(v_1,v_2)}(x) := L_m^{*(v_1,v_2)}((s-x)^2;x), \\
&E = \left\{f : x\to\infty \text{ için } \frac{f(x)}{1+x^2} \text{ yakınsaktır}\right\},
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

şeklinde tanımlansın.

3.1.4. Teorem

$f:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ ve f, E sınıfına ait sürekli bir fonksiyon olsun.

$$\lim_{y\to\infty}\frac{R_2'(y)}{R_2(y)}=1 \quad \text{ve} \quad \lim_{y\to\infty}\frac{R_2''(y)}{R_2(y)}=1 \tag{3.11}$$

koşulları sağlansın. Bu durumda $[0,\infty)$ un kompakt her alt kümesinde

$$L_m^{*(v_1,v_2)}(f;x)\longrightarrow f(x)$$

gerçeklenir.

İspat.

(3.11) varsayımı altında ve Lemma 2.2 kullanılarak. $i=0,1,2$, için

$$L_m^{*(v_1,v_2)}(s^i;x)\longrightarrow x^i.$$

eşitliği elde edilir.

$i=0$ için

$$L_m^{*(v_1,v_2)}(s^i;x)=L_m^{*(v_1,v_2)}(1;x)=1$$

dir. Böylece

$$\lim_{m\to\infty}\left\{L_m^{*(v_1,v_2)}(1;x)\right\}=\lim_{m\to\infty}(1)=1$$

olur. $i=1$ için

$$L_m^{*(v_1,v_2)}(s;x)=\frac{1}{m+v_2}\left(\frac{mR_2'(mxh(1))}{R_2(mxh(1))}x+\frac{R_1'(h(1))}{R_1(h(1))}+\frac{2v_1+1}{2}\right),$$

olur. Her iki tarafın limiti alınarak

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\left\{L_m^{*(v_1,v_2)}(s;x)\right\}&=\lim_{m\to\infty}\left\{\frac{1}{m+v_2}\left(\frac{mR_2'(mxh(1))}{R_2(mxh(1))}x+\frac{R_1'(h(1))}{R_1(h(1))}+\frac{2v_1+1}{2}\right)\right\}\\&=\lim_{m\to\infty}\frac{R_2'(mxh(1))}{R_2(mxh(1))}x\\&=x\lim_{y\to\infty}\frac{R_2'(y)}{R_2(y)}=x\end{aligned}$$

elde edilir.

Son olarak, $i=2$ için

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\left\{L_m^{*(v_1,v_2)}(s^2;x)\right\}&=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{(m+v_2)^2}\left\{\frac{m^2R_2''(mxh(1))}{R_2(mxh(1))}x^2\right.\\&+\left(\frac{m[R_1'(h(1))+(h''(1)+1)R_1(h(1))]R_2''(mxh(1))}{R_1(h(1))R_2(mxh(1))}\right.\\&\left.\left.+\frac{m(2v_1+1)R_2'(mxh(1))}{R_2(mxh(1))}\right)x\right.\\&\left.+\frac{3v_1^2+3v_1+1}{3}\right\}\\&=\lim_{m\to\infty}\frac{R_2''(mxh(1))}{R_2(mxh(1))}x^2\\&=x^2\lim_{y\to\infty}\frac{R_2''(y)}{R_2(y)}=x^2\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak

$$L_m^{*(v_1,v_2)}(s^i;x)\longrightarrow x^i\quad,\quad i=0,1,2$$

sağlandığı görülür.

3.2. $L_m^{*(v_1,v_2)}$ Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri

3.2.1. Teorem

$f \in C[0,\infty) \cap E$ sınıfına ait bir fonksiyon olsun, bu durumda

$$|L_m^{*(v_1,v_2)}(f;x) - f(x)| \leq 2\omega(f;\delta_m(x)),$$

eşitsizliği gerçeklenir. Burada, $\delta_m(x) = \sqrt{M_{2,m}^{(v_1,v_2)}(x)}$ ve $\omega(f;.)$, f fonksiyonunun süreklilik modülüdür.

İspat.

(3.9) operatörünü kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}|L_m^{*(v_1,v_2)}(f;x) - f(x)| &= \left| \frac{m+v_2}{R_1(h(1))R_2(mxh(1))} \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k(mx) \int_{\frac{k+v_1}{m+v_2}}^{\frac{k+v_1+1}{m+v_2}} (f(\varphi) - f(x)) d\varphi \right| \\ &\leq \frac{m+v_2}{R_1(h(1))R_2(mxh(1))} \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k(mx) \int_{\frac{k+v_1}{m+v_2}}^{\frac{k+v_1+1}{m+v_2}} |f(\varphi) - f(x)| d\varphi\end{aligned}$$

elde edilir. Süreklilik modülünün özellkleri kullanılarak

$$\begin{aligned}|L_m^{*(v_1,v_2)}(f;x) - f(x)| &\leq \frac{m+v_2}{R_1(h(1))R_2(mxh(1))} \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k(mx) \int_{\frac{k+v_1}{m+v_2}}^{\frac{k+v_1+1}{m+v_2}} (1 + \frac{1}{\delta}|\varphi - x|)\omega(f;\delta) d\varphi \\ &= \frac{(m+v_2)\omega(f;\delta)}{R_1(h(1))R_2(mxh(1))} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k(mx) \int_{\frac{k+v_1}{m+v_2}}^{\frac{k+v_1+1}{m+v_2}} d\varphi \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k(mx) \frac{1}{\delta} \int_{\frac{k+v_1}{m+v_2}}^{\frac{k+v_1+1}{m+v_2}} |\varphi - x| d\varphi \right)\end{aligned}$$

$$= \left(L_m^{*(v_1,v_2)}(1;x) + \frac{1}{\delta} L_m^{*(v_1,v_2)}(|s-x|;x) \right) \omega(f;\delta)$$
$$= \left(1 + \frac{1}{\delta} L_m^{*(v_1,v_2)}(|s-x|;x) \right) \omega(f;\delta)$$
$$= \left(1 + \frac{1}{\delta}\delta \right) \omega(f;\delta) = 2\omega(f;\delta_m(x))$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$|L_m^{*(v_1,v_2)}(f;x) - f(x)| \leq 2\omega(f;\delta_m(x))$$

olur.

3.2.2. Teorem

f, $Lip_M(\alpha)$ kümesinin bir fonksiyonu olsun. O halde $x \geq 0$ için

$$|L_m^{*(v_1,v_2)}(f;x) - f(x)| \leq M\delta_m^{\alpha}(x)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\delta_m(x) = \sqrt{M_{2,m}^{(v_1,v_2)}(x)}$ şeklindedir.

İspat

(3.9) operatörü kullanılarak,

$$|L_m^{*(v_1,v_2)}(f;x) - f(x)| = |L_m^{*(v_1,v_2)}(f(s) - f(x);x)|$$
$$= \left| \frac{m+v_2}{R_1(h(1))R_2(mxh(1))} \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k(mx) \int_{\frac{k+v_1}{m+v_2}}^{\frac{k+v_1+1}{m+v_2}} (f(\varphi) - f(x)) d\varphi \right|$$
$$\leq \frac{m+v_2}{R_1(h(1))R_2(mxh(1))} \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k(mx) \int_{\frac{k+v_1}{m+v_2}}^{\frac{k+v_1+1}{m+v_2}} |(f(\varphi) - f(x))| d\varphi.$$

ifadesi elde edilir. $f \in Lip_M(\alpha)$ olduğundan

$$|L_m^{*(v_1,v_2)}(f;x)-f(x)| \leq \frac{m+v_2}{R_1(h(1))R_2(mxh(1))}\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k(mx)\int_{\frac{k+v_1}{m+v_2}}^{\frac{k+v_1+1}{m+v_2}} M|\varphi-x|^{\alpha}d\varphi$$

eşitsizliği sağlanır. Hölder eşitsizliğinin uygulanmasıyla

$$\begin{aligned}
|L_m^{*(v_1,v_2)}(f;x)-f(x)| &\leq M\left\{\frac{m+v_2}{R_1(h(1))R_2(mxh(1))}\sum_{k=0}^{\infty}(\pi_k(mx))^{\frac{2-\alpha}{2}}(\pi_k(mx))^{\frac{\alpha}{2}}\int_{\frac{k+v_1}{m+v_2}}^{\frac{k+v_1+1}{m+v_2}}|\varphi-x|^{\alpha}d\varphi\right\}\\
&\leq M\left\{\frac{1}{R_1(h(1))R_2(mxh(1))}\left[R_1(h(1))R_2(mxh(1))\right]^{\frac{2-\alpha}{2}}\right.\\
&\times\left[\frac{m+v_2}{R_1(h(1))R_2(mxh(1))}\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k(mx)\right]^{\frac{2-\alpha}{2}}\left[R_1(h(1))R_2(mxh(1))\right]^{\frac{\alpha}{2}}\\
&\times\frac{1}{R_1(h(1))R_2(mxh(1))}\\
&\left.\times\left[\frac{m+v_2}{R_1(h(1))R_2(mxh(1))}\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k(mx)\int_{\frac{k+v_1}{m+v_2}}^{\frac{k+v_1+1}{m+v_2}}|\varphi-x|^2d\varphi\right]^{\frac{\alpha}{2}}\right\}\\
&\leq M\left\{L_m^{*(v_1,v_2)}(1;x)\right\}^{\frac{2-\alpha}{2}}\left\{L_m^{*(v_1,v_2)}((s-x)^2;x)\right\}^{\frac{\alpha}{2}}\\
&= M\left(\sqrt{M_{2,m}^{(v_1,v_2)}}\right)^{\alpha}
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$|L_m^{*(v_1,v_2)}(f;x)-f(x)| \leq M\delta_m^{\alpha}(x)$$

eşitsizliği bulunur.

3.2.3. Teorem

$f \in C_B[0,\infty)$ ve $x \in [0,\infty)$ için

$$|L_m^{*(v_1,v_2)}(f;x)-f(x)| \leq 2K(f;\lambda_m(x))$$

sağlanır. Burada

$$\lambda_m(x) = \frac{1}{2}\left[M_{1,m}^{(v_1,v_2)}(x) + M_{2,m}^{(v_1,v_2)}(x)\right]$$

şeklindedir ve $K(f;.)$, f fonksiyonunun Peetre K-fonksiyonelidir.

İspat.

$\psi \in C_B^2[0,\infty)$ olduğu düşünülür ve Taylor teoremi kullanılırsa $\eta \in (x,s)$ için

$$\psi(s) = \psi(x) + (s-x)\psi'(x) + \frac{\psi''(\eta)}{2}(s-x)^2$$

eşitliğinden

$$L_m^{*(v_1,v_2)}(\psi;x) - \psi(x) = \psi'(x)M_{1,m}^{(v_1,v_2)}(x) + \frac{\psi''(\eta)}{2}M_{2,m}^{(v_1,v_2)}(x)$$

elde edilir. Bu durumda, üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |L_m^{*(v_1,v_2)}(\psi;x) - \psi(x)| &\leq |\psi'(x)|M_{1,m}^{(v_1,v_2)}(x) + \frac{|\psi''(\eta)|}{2}M_{2,m}^{(v_1,v_2)}(x) \\ &\leq \left[M_{1,m}^{(v_1,v_2)}(x) + M_{2,m}^{(v_1,v_2)}(x)\right] ||\psi||_{C_B^2[0,\infty)} \end{aligned} \tag{3.12}$$

olur.

Lemma 3.1.2 ve (3.12) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \left|L_m^{*(v_1,v_2)}(f;x) - f(x)\right| &= \left|L_m^{*(v_1,v_2)}(f;x) - L_m^{*(v_1,v_2)}(\psi;x) + L_m^{*(v_1,v_2)}(\psi;x) - \psi(x) - f(x) + \psi(x)\right| \\ &\leq \left|L_m^{*(v_1,v_2)}(f-\psi;x)\right| + \left|L_m^{*(v_1,v_2)}(\psi;x) - \psi(x)\right| + \left|f(x) - \psi(x)\right| \\ &\leq 2||f-\psi||_{C_B[0,\infty)} + \left|L_m^{*(v_1,v_2)}(\psi;x) - \psi(x)\right| \\ &\leq 2||f-\psi||_{C_B[0,\infty)} + 2\lambda_m(x)||\psi||_{C_B^2[0,\infty)} \end{aligned}$$

$$= 2\Big(||f-\psi||_{C_B[0,\infty)} + \lambda_m(x)||\psi||_{C_B^2[0,\infty)}\Big)$$

bulunur. Her $\psi \in C_B^2[0,\infty)$ üzerinden infimum alınırsa, $K(f;.)$ yardımıyla son eşitsizlik

$$\left|L_m^{*(v_1,v_2)}(f;x) - f(x)\right| \leq 2K(f;\lambda_m(x))$$

sonucunu verir.

3.2.4. Teorem

Her $f \in C_B[0,\infty)$ için

$$\left|L_m^{*(v_1,v_2)}(f;x) - f(x)\right| \leq C\omega_2\Big(f;\sqrt{\mu_m(x)}\Big) + \omega\Big(f;M_{1,m}^{(v_1,v_2)}(x)\Big)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada C pozitif bir sabittir,

$$\mu_m(x) = \frac{1}{8}\left\{M_{2,m}^{(v_1,v_2)}(x) + \left[M_{1,m}^{(v_1,v_2)}(x)\right]^2\right\}$$

ve $\omega_2(f;.)$, f fonksiyonunun ikinci dereceden süreklilik modülüdür.

İspat.

Öncelikle, $F_m^{(v_1,v_2)}$ ile verilen

$$F_m^{(v_1,v_2)}(f;x) = L_m^{*(v_1,v_2)}(f;x) - f\Big(L_m^{*(v_1,v_2)}(s;x)\Big) + f(x) \tag{3.13}$$

operatörü tanımlansın. Ayrıca, Lemma 3.1.2. den

$$F_m^{(v_1,v_2)}(s-x;x)=0 \tag{3.14}$$

eşitliği elde edilir. $\psi \in C_B^2[0,\infty)$ için Taylor formülü

$$\psi(s)=\psi(x)+(s-x)\psi'(x)+\int_x^s (s-u)\psi''(u)du$$

şeklinde tanımlıdır. (3.13) ile tanımlanan $F_m^{(v_1,v_2)}$ operatörü ve (3.14) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left|F_m^{(v_1,v_2)}(\psi;x)-\psi(x)\right| &= \left|F_m^{(v_1,v_2)}\left(\int_x^s (s-u)\psi''(u)du;x\right)\right| \\ &= \left|L_m^{*(v_1,v_2)}\left(\int_x^s (s-u)\psi''(u)du;x\right)\right. \\ &\quad \left.-\int_x^{L_m^{*(v_1,v_2)}(s;x)}\left(L_m^{*(v_1,v_2)}(s;x)-u\right)\psi''(u)du+\int_x^s (s-u)\psi''(u)du\right| \\ &\leq \left|L_m^{*(v_1,v_2)}\left(\int_x^s (s-u)\psi''(u)du;x\right)\right| \\ &\quad +\left|\int_x^{L_m^{*(v_1,v_2)}(s;x)}\left(L_m^{*(v_1,v_2)}(s;x)-u\right)\psi''(u)du\right|\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer (3.10) ile verilen eşitlikler kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left|F_m^{(v_1,v_2)}(\psi;x)-\psi(x)\right| &\leq \frac{1}{2}\left\{M_{2,m}^{(v_1,v_2)}(x)+\left[M_{1,m}^{(v_1,v_2)}(x)\right]^2\right\}||\psi''||_{C_B[0,\infty)} \\ &\leq 4\mu_m(x)||\psi||_{C_B^2[0,\infty)}\end{aligned} \tag{3.15}$$

olur. $F_n^{(v_1,v_2)}$ operatörü tanımı, Lemma 3.1.2 ve (3.15) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left|L_m^{*(v_1,v_2)}(f;x)-f(x)\right| &= \left|F_m^{(v_1,v_2)}(f-\psi;x)-(f-\psi)(x)+F_m^{(v_1,v_2)}(\psi;x)-\psi(x)\right. \\ &\quad \left.+f\left(L_m^{*(v_1,v_2)}(s;x)\right)-f(x)\right|\end{aligned}$$

yazılabilir. Üçgen eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}\left|L_m^{*(v_1,v_2)}(f;x)-f(x)\right| &\leq \left|F_m^{(v_1,v_2)}(f-\psi;x)-(f-\psi)(x)\right|+\left|F_m^{(v_1,v_2)}(\psi;x)-\psi(x)\right| \\ &\quad+\left|f\left(L_m^{*(v_1,v_2)}(s;x)\right)-f(x)\right| \\ &\leq 4||f-\psi||_{C_B[0,\infty)}+4\mu_m(x)||\psi||_{C_B^2[0,\infty)}+\omega\left(f;L_m^{*(v_1,v_2)}(s-x;x)\right) \\ &\leq 4||f-\psi||_{C_B[0,\infty)}+4\mu_m(x)||\psi||_{C_B^2[0,\infty)}+\omega\left(f;M_{1,m}^{(v_1,v_2)}(x)\right)\end{aligned}$$

bulunur. $K(f;.)$ ve $\omega_2(f;.),$ arasındaki (2.6) ile verilen ilişki dikkate alınırsa, o zaman

$$\begin{aligned}\left|L_m^{*(v_1,v_2)}(f;x)-f(x)\right| &\leq 4K\left(f;\mu_m(x)\right)+\omega\left(f;M_{1,m}^{(v_1,v_2)}(x)\right) \\ &\leq C\omega_2\left(f;\sqrt{\mu_m(x)}\right)+\omega\left(f;M_{1,m}^{(v_1,v_2)}(x)\right)\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Bu ise ispatı tamamlar.

4. SONUÇ

Bu tezde ilk olarak Szász-Mirakjan operatörü kısaca tanıtılmıştır. Szász-Mirakjan operatörünün bazı yaklaşım özelliklerinin araştırılması ve tartışılması sonucunda ve bu operatörün motivasyonuyla diğer operatörler oluşturulmuştur. Bu operatörlerden biri, Cheney ve Sharma operatörüdür ve onun sonucunda ortogonal polinomlar kavramı ortaya çıkmıştır. Daha sonra Jakimovski ve Leviatan tarafından Appell polinomlarını içeren bir operatör tanıtılmıştır. Ardından Varma ve arkadaşları tarafından Brenke polinomlarını içeren bir operatör tanıtılmıştır. Sonra, bazı varsayımlar ve analitik fonksiyonlar altında Brenke polinomlarını içeren Kantorovich operatörü tanıtılmıştır. Son olarak, Sucu tarafından genelleştirilmiş Brenke polinomlarını içeren bir operatör de verilmiştir ve $L_m^{*(\nu_1,\nu_2)}$ şeklinde gösterilmiştir Brenke polinomlarının bir genellemesini içeren Stancu-Kantorovich tipli bir operatör adında yeni bir operatör tanıtılmıştır. Ayrıca, fonksiyonlara yaklaşım özellikleri de tartışılmıştır. Bu yeni operatörün motivasyonuyla benzer başka operatörler de tanıtılabilir. Bahsedilen bu yeni tanımlanan operatörler, okuyuculara motivasyon kaynağı olacaktır.

KAYNAKLAR

1. Mursaleen, M., Rahman, S., and Alotaibi, A. (2016). Dunkl generalization of q-Szász-Mirakjan Kantorovich operators which preserve some test functions. *Journal of Inequalities and Applications*, (1), 1-18.

2. Ben Cheikh, Y., and Gaied, M. (2007). Dunkl-Appell d-orthogonal polynomials. *Integral Transforms and Special Functions*, 18(8), 581-597.

3. Bernstein, S. N. (1912). Demonstration of the Weierstrass theorem based on the calculation of probabilities. *Common Society. Math. Charkow*. 2t, 13, 1-2.

4. Lorentz, G. G.,B. (1953). *Polynomials*, Toronto: University of Toronto Press.

5. Gadjiev, A. (1976). Theorems of the type of P. P. Korovkins theorems. *Matematicheskie Zametki*, 20(5), 781-786.

6. Kurtoğlu, H. (2016). *Modifiye Gamma Operatörlerinin Yaklaşm özellikleri*, Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Kırıkkale.

7. Kanat, K., and Sofyaloglu, M. (2018). Approximation by (p,q)-Lupaş-Schurer-Kantorovich operators. *Journal of inequalities and Applications*, (1), 263.

8. Szász, O. (1950). Generalization of S. Bernstein polynomials to the infinite interval. *Journal of Research of the National Bureau Standards*, (45) 239-245.

9. Cheney, E. W., and Sharma, A. (1964). Bernstein power series. *Canadian Journal of Mathematics*, 16, 241-252.

10. Jakimovski, A., and Leviatan, D. (1969). Generalized Szász operator for the approximation in the infinite interval. *Mathematica(Cluj)*, 11(34), 97-103.

11. Chihara, T. S. (1978). *An Introduction to Orthogonal Polynomials,* New York: Gordon and Breach.

12. Varma, S., Sucu, S., and İçöz, G. (2012). Generalization of Szász operators involving Brenke type polynomials. *Computers and Mathematics with Applications*, 64(2), 121-127.

13. Sucu, S. (2022). Stancu type operators including generalized Brenke polynomials. *Filomat*, 36(07), 2381-2389.

14. Simith, R.C.T. (1956). Generating functions of Appell form for the classical orthogonal polynomials. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 7 (4), 636-636.

15. Aktaş, R., Çekim, B., and Taşdelen, F. (2013). A Kantorovich-Stancu Type Generalization of Szász Operators including Brenke Type Polynomials. *Journal of Function Spaces and Applications*, Article ID 935430, 9.

16. İçöz, G., Varma, S., and Sucu, S. (2016). Approximation by operators including Generalized Appell polynomials. *Filomat*, 30(2), 429-440.

17. İçöz, G., and Çekim, B. (2015). Dunkl generalization of Szász operators via q-calculus. *Journal of Inequality and Application*, 284(11), 1-11.

18. Sucu, S., İçöz, G., and Varma, S. (2012). On some extensions of Szász operators including Boas-Buck-type polynomials. *Hindawi*, Article ID 680340.

19. Srivastava, H. M., İçöz, G., and Çekim, B. (2019). Approximation properties of on extended family of the Szász Mirakjan Beta type operators. *Axioms*, 8(4), 1-13.

20. İçöz, G., and Çekim, B. (2016). Stancu type generalization of the Chan-Chyan-Srivastava operators. *Filomat*, 30(14), 3733-3742.

21. Atakut, Ç. and Büyükyazıcı, İ. (2016). Approximation by Kantorovich-Szász type operators based on Brenke type polynomials. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 37(12), 1488-1502.

22. Sucu, S., and Varma, S. (2019). Approximation by sequence of operators involving analytic functions. *Mathematics*, 7(2), 1-10.

23. İçöz, G. and Eryğit, H. (2020). Beta generalization of Stancu-Durrmeyer operators involving a generalization of Boas-Buck type polynomials. *Gazi University Journal of Science*, 33(3), 715-724.

24. Agrawal, P. N., Baxhaku, B., and Chauhan, R. (2018). Quantitative Voronovskaya and Grüss-Voronovskaya type theorems by the blending variant of Szász operators including Brenke-type polynomials. *Turkish Journal of Mathematics*, 42(4), 1610-1629.

25. Varma, S. (2013). On a generalization of Szász operators by multiple Appell polynomials. *Studia Universitatis Babes-Bolyai Mathematica*, 58(3), 361-369.

26. Soydan, Y. (2012). *Fonksiyonel analiz.* Ankara: Nobel Yaynlar, 1-184.



Gazili olmak ayrıcalıktır