
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

CHARLIER- SZÀSZ- DURRMEYER TİPİ POZİTİF LİNEER OPERATÖRLER

Melike TEKE

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ 2023

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Melike TEKE
19/07/2023

CHARLIER- SZÀSZ- DURRMEYER TİPİ POZİTİF LİNEER OPERATÖRLER

(Yüksek Lisans Tezi)

Melike TEKE

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2023

ÖZET

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde Charlier- Szàsz- Durrmeyer tipi operatörlerin Korovkin teoremi yardımıyla yaklaşımı incelenmiştir. Daha sonra Voronovskaja tip teorem yardımıyla asimptotik formül verilmiştir. Ayrıca süreklilik modülü ve Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla bu operatörler için yakınsama hızı elde edilmiştir. Dördüncü bölümde Charlier- Szàsz- Durrmeyer tipi operatörlerin King tipi genellemesi verilerek yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Beşinci bölümde Charlier- Szàsz- Durrmeyer tipi operatörlerin ağırlıklı uzaylarda yaklaşımı ve ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla yakınsama hızı elde edilmiştir. Son bölümde ise Charlier- Szàsz- Durrmeyer tipi operatörlerin istatistiksel yakınsaklığı incelenmiştir.

Bilim Kodu : 20406

Anahtar Kelimeler :Charlier- Szàsz- Durrmeyer operatörü, ikinci süreklilik modülü, Peetre-K fonksiyoneli, Voronovskaja teoremi, ağırlıklı süreklilik modülü, istatistiksel yakınsaklık, A-İstatistiksel yakınsaklık

Sayfa Adedi : 59

Danışman : Prof. Dr. Hatice Gül İNCE İLARSLAN

CHARLIER- SZÀSZ- DURRMEYER TYPE POSITIVE LINEAR OPERATORS

(M. Sc. Thesis)

Melike TEKE

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2023

ABSTRACT

This thesis consists of six sections. The first section includes the introduction section. In the second section, basic definitions and theorems are given. In the third section, the approach of Charlier- Szàsz- Durrmeyer type operators is examined with the help of Korovkin's theorem. Then, the asymptotic formula is presented with the help of Voronovskaja type theorem. In addition, the rate of convergence has been obtained for these operators with the help of the modulus of continuity and Peetre's-K functional. In the fourth section, King type generalization orienting approximation properties of Charlier- Szàsz- Durrmeyer type operators are examined. In the fifth section, the approximation of Charlier- Szàsz- Durrmeyer type operators is obtained in weighted spaces and the rate of convergence of these operators by means of the weighted modulus of continuity. In the last section, statistical convergence of Charlier- Szàsz- Durrmeyer type operators is examined.

Science Code : 20406
Key Words : Charlier- Szàsz- Durrmeyer operators, the second modulus of continuity, Peetre's-K functional, Voronovskaja theorem, statistical approximation, A-Statistical approximation
Page Number : 59
Supervisor : Prof. Dr. Hatice Gül İNCE İLARSLAN

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında bana destek olan, bilgi ve tecrübesi ile lisansüstü öğrenim hayatımın tüm zorlu aşamalarında maddi manevi her yönden yardımcı olan, tecrübeleri ile beni aydınlatan ve desteğini hiç eksik etmeyen, kendisini tanımaktan büyük onur duyduğum danışman hocam sayın Prof. Dr. Hatice Gül İNCE İLARSLAN'a, çalışmalarım sırasında manevi desteğini her zaman hissettiğim ve öğrenim hayatım boyunca hep yanımda olan aileme yürekten teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

SİMGELER VE KISALTMALAR viii

1. GİRİŞ 1

2.TEMEL TANIM VE TEOREMLER 5

3. CHARLIER- SZÀSZ- DURRMEYER (CSD) TİPİ POZİTİF LİNEER OPERATÖRLER 11

4. CSD OPERATÖRLERİNİN KİNG TİPİ MODİFİKASYONU 33

5. CSD OPERATÖRLERİNİN AĞIRLIKLI UZAYLARDA YAKLAŞIMI 39

5.1. CSD Operatörlerinin Ağırlıklı Süreklilik Modülü Yardımıyla Yaklaşım Hızı 43

6. CSD OPERATÖRLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI 47

6.1. CSD Operatörlerinin A-istatistiksel yakınsaklığı 51

7. SONUÇ VE ÖNERİLER 55

KAYNAKLAR 57

ÖZGEÇMİŞ 59

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu tezde kullanılan simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile aşağıda verilmiştir.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{B_{x^2}[0,\infty)}$	$\{f: \lvert f(x)\rvert \leq M_f(1+x^2)\}$
$\boldsymbol{\widetilde{C}_B[0,\infty)}$	$\{f$: f, [0,∞) aralığında sınırlı ve düzgün sürekli$\}$
$\boldsymbol{\widetilde{C}_B^2[0,\infty)}$	$\{f: f, f', f'' \in \tilde{C}_B[0,\infty)\}$
$\boldsymbol{C_{x^2}[0,\infty)}$	$\{f \in C_{x^2}[0,\infty): C_{x^2}[0,\infty) \subset B_{x^2}[0,\infty), f$ sürekli $\}$
$\boldsymbol{C^*_{x^2}[0,\infty)}$	$\left\{f \in C_{x^2}[0,\infty): lim_{\lvert x\rvert\to\infty} \frac{f(x)}{1+x^2}\ sınırlı\ ve\ sürekli\right\}$
$\boldsymbol{f_n(x)}$	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir fonksiyon dizisi.
$\boldsymbol{f_n(x) \rightrightarrows f(x)}$	$\{f_n(x)\}$ dizisinin f'e düzgün yakınsaması.
$\boldsymbol{\mathcal{K}(f;\delta)}$	Peetre-K fonksiyoneli.
$\boldsymbol{K_2(f;\delta)}$	$C_B[0,\infty)$ uzayındaki Peetre-K fonksiyoneli.
$\boldsymbol{L_n(f;x)}$	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir operatör dizisi.
$\boldsymbol{\omega(f;x)}$	f fonksiyonunun süreklilik modülü.
$\boldsymbol{\omega_2(f;x)}$	f fonksiyonunun ikinci süreklilik modülü.
$\boldsymbol{\Omega(f;\delta)}$	f fonksiyonunun ağırlıklı süreklilik modülü.
$\boldsymbol{\rho(x)}$	Ağırlık fonksiyonu.

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisi, geçmişten günümüze matematiğe ve mühendislik, fizik, temel bilimler başta olmak üzere birçok farklı bilimsel alana katkıda bulunan önemli alanlardan biridir. Bilgisayar destekli bir konu olması sebebiyle önemi ilk kullanılma tarihinden bugüne daha da artmıştır.

Yaklaşım teorisinin ana prensibi, herhangi bir fonksiyonun, daha iyi bilinen ve basit farklı fonksiyonlar cinsinden yazılabilmesidir. Bu ise bir fonksiyonu incelerken ispatlanması zor ve uzun bilgisayar hesaplamaları gerektiren durumlarla karşılaşıldığında araştırmacılara kolaylık sağlar. Sözü edilen bu fonksiyonlar genellikle iyi bilinen polinomlardır.

Yaklaşım teorisinde önemli adımlardan birisi 1885 yılında Weierstrass tarafından atılmıştır. Bu teoreme göre "kompakt bir aralıkta sürekli bir fonksiyona yakınsayan cebirsel veya trigonometrik polinom dizileri vardır " [1].

Bernstein 1912 yılında $f \in C[0,1]$ için

$$B_n(f;\zeta) = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} \zeta^s (1-\zeta)^{n-s} f\left(\frac{s}{n}\right)$$

şeklinde kendi adıyla anılan polinom dizileri yardımıyla Weierstrass yaklaşım teoreminin ilk ispatını vermiştir [2]. Daha sonra Bernstein polinomları yerine lineer pozitif operatör dizilerinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Lineer pozitif operatör dizileri ile ilgili ilk çalışma Popoviciu [3] tarafından yapılmış olmasına rağmen lineer pozitif operatörlerin yaklaşımında önemli bir yere sahip olan Korovkin teoremi, birbirlerinden bağımsız olarak Bohman [4] ve Korovkin [5, 6] tarafından da verilmiştir. Bu teoreme göre "Bir fonksiyon uzayında bir $\{F_n\}$ lineer pozitif operatör dizisinin birim operatöre düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart kompakt bir küme üzerinde $e_\nu(t) = t^\nu$ olmak üzere $\{P_n(e_\nu)\}$ dizisinin e_ν fonksiyonuna $\nu = 0,1,2$ için düzgün yakınsamasıdır''. Buradaki yakınsama kuvvetli yakınsamadır. Kuvvetli yakınsak olmayan lineer pozitif operatör dizilerinin yaklaşımında Korovkin tip teorem uygulanamaz.

Bu problem Gadjiev ve Orhan tarafından 2002 yılında kuvvetli yakınsaklık yerine istatistiksel yakınsaklık alınarak çalışılmıştır [7].

Diğer yandan yaklaşım teorisinde sadece kompakt aralıkta tanımlanan lineer pozitif operatörlerin yaklaşımı incelenmemiş, sınırsız aralıklarda tanımlanan operatörlerin yaklaşım özellikleri de incelenmiştir.

1950 yılında Szàsz, kendi adıyla bilinen operatörünü $f \in C[0,\infty)$ için aşağıdaki şekilde tanımlamıştır [8]:

$$S_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-nx} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad x \in [0,\infty).$$

1969'da ise Jakimovski ve Leviatan, Favard- Szàsz tipli operatörleri Appell polinomları yardımıyla tanıttılar [9]. Daha sonra Ciupa [10], bu operatörlerin aşağıdaki Durrmeyer tipli integral modifikasyonunu inceledi:

$$P_n(f;x) = \frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)} \frac{e^{-nx}}{g(1)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \int_0^{\infty} e^{-nt} t^{\lambda+k} f(t)dt, \qquad x \in [0,\infty).$$

Burada $p(x) \geq 0$ dır. Ayrıca

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n z^n$$

polinomu $|z| < Z$ $(Z > 1)$ diskindeki bir analitik fonksiyon ve $g(1) \neq 0$ olmak üzere

$$g(u)e^{ux} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x)u^k$$

serisindeki u^k'ların katsayısı olan $p_k(x)$'ler Appell polinomları olarak tanımlanır.

İsmail [11], $C_k(u;a)$ Poisson- Charlier polinomlarının üreteç fonksiyonunu

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k(u;a)\frac{t^k}{k!} = e^t(1-\frac{t}{a})^u, |t| < a \qquad (1.1.)$$

şeklinde tanımladı, burada

$$C_k(u;a) = \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}(-u)_r\left(\frac{1}{a}\right)^r$$

ve $(\alpha)_k$,

$$(\alpha)_0 = 1, (\alpha)_k = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1), k = 1,2,\dots$$

şeklinde tanımlanan Poschammer sembolüdür ve burada Γ, Gamma fonksiyonunu göstermektedir. Poisson- Charlier polinomları $a > 0$ ve $u \leq a$ için pozitiftir.

Varma ve Taşdelen [12] ise Szàsz operatörlerinin genelleştirmesi olan, ayrık ortogonal polinomlardan biri olan Charlier polinomlarını içeren pozitif lineer operatörleri tanıttı:

$$L_n(f;x,a) = e^{-1}(1-\frac{1}{a})^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}f\left(\frac{k}{n}\right), a > 1. \qquad (1.2.)$$

ve klasik süreklilik modülünü kullanarak yaklaşımın derecesi ile ilgili bazı sonuçlar elde ettiler.Bu çalışmalardan hareketle 2018 yılında Deo ve Dhamija [13], $f \in C[0,\infty)$ için

$$V_n(f;x,a) = e^{-1}(1-\frac{1}{a})^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}$$
$$\times\int_0^{\infty} e^{-nt}t^{\lambda+k}f(t)dt \qquad (1.3.)$$

şeklinde Charlier- Szàsz- Durrmeyer pozitif lineer operatörlerini ve King tipi genellemesini tanımladılar ve yaklaşım özelliklerini incelediler, burada $a > 1,\ \lambda \geq 0,\ x \in [0, \infty)$ dur. $a \to \infty$ ve $\lambda = 0$ için Mazhar ve Totik [14] tarafından verilen aşağıdaki Szàsz- Durrmeyer operatörünü elde ederiz:

$$L_n(f;x) = n\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty} f(t)p_{n,k}(t)dt)p_{n,k}(x).$$

Bu tezde Deo ve Dhamija tarafından (1.3) ile verilen Charlier- Szàsz- Durrmeyer tipi operatörleri ve King tipi genellemesinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bu operatörlerin sırasıyla ağırlıklı uzaylarda yakınsaklığı ve istatistiksel yakınsaklığı çalışılmıştır.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1. F ve G iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer F'den alınan herhangi bir f fonksiyonuna G uzayında bir g fonksiyonu karşılık getiren+ bir $\mathcal{L}$ kuralı varsa buna F üzerinde bir operatördür denir ve her $f \in F$ için

$$\mathcal{L}(f;x) = g(x)$$

şeklinde gösterilir. Burada F uzayına $\mathcal{L}$ operatörünün tanım bölgesi denir ve $F = D(\mathcal{L})$ ile gösterilir. $\mathcal{L}$ operatörü f fonksiyonuna G'de bir g fonksiyonunu karşılık getirir ki bu şekildeki g fonksiyonlarının kümesine $\mathcal{L}$ operatörünün değer kümesi denir ve bu küme $R(\mathcal{L})$ ile gösterilir. $\mathcal{L}(f;x) = g(x)$ olmak üzere, $\mathcal{L}$ operatörü t değişkenine bağlı olan f fonksiyonunu x değişkenine bağlı olan g fonksiyonuna götürür [15].

Tanım 2.2. (Lineer Operatör) F ve G iki fonksiyon uzayı olmak üzere $\mathcal{L}: F \to G$ şeklindeki operatör tanımlansın. f ve g fonksiyonları F uzayındaki herhangi iki fonksiyon ve λ_1 ve λ_2 keyfi iki reel sayı olmak üzere,

$$\mathcal{L}(\lambda_1 f + \lambda_2 g;x) = \lambda_1 \mathcal{L}(f;x) + \lambda_2 \mathcal{L}(g;x)$$

koşulu sağlandığı taktirde $\mathcal{L}$ operatörüne lineer operatör denir [15].

Tanım 2.3. (Pozitif Operatör) F^+ ve G^+ ile sırasıyla X' ve Y' uzayından alınan pozitif değerli fonksiyonların uzayı gösterilsin. Yani

$$F^+ = \{f \in F: f(t) \geq 0\}$$
$$G^+ = \{g \in G: g(t) \geq 0\}$$

olsun. Eğer F uzayında tanımlanmış $\mathcal{L}$ operatörü F^+ uzayından alınan her bir f fonksiyonunu G^+ uzayından alınan bir g fonksiyonuna dönüştürüyorsa yani, $\forall t \in D(f)$ için $f(t) \geq 0$ olduğunda $\mathcal{L}(f;x) \geq 0$ oluyorsa bu taktirde $\mathcal{L}$ operatörüne pozitif operatör denir [15]. Lineerlik şartıyla birlikte pozitiflik şartını da sağlayan operatörlere lineer pozitif operatör denir.

Tanım 2.4. F ve G fonksiyon uzayları olmak üzere $\mathcal{L}: F \to G$ şeklindeki $\mathcal{L}$ operatörü ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{L}_n(f;x)$'e bir operatör dizisi denir ve $(\mathcal{L}_n)$ ile gösterilir. $\mathcal{L}_n(f;x)$, $\mathcal{L}_n$ operatörünün f'e uygulandığını ve sonucun x'e bağlı olduğunu gösterir [15].

Teorem 2.1. $\mathcal{L}: F \to G$ bir lineer pozitif operatör olsun. $\mathcal{L}$ operatörü monotonluk özelliğini sağlar. Yani her t için $f(t) \leq g(t)$ olduğunda $\mathcal{L}(f;x) \leq \mathcal{L}(g;x)$ eşitsizliği sağlanır [15].

İspat: F ve G fonksiyon uzayları olmak üzere $\mathcal{L}: F \to G$ operatörünü göz önüne alalım. Kabul edelim ki $f, g \in F$ ve her t için $f(t) \leq g(t)$ olsun. Bu durumda $g - f \geq 0$ olacağından ve $\mathcal{L}$ operatörü pozitif olduğundan $\mathcal{L}(g-f;x) \geq 0$ elde edilir. Diğer taraftan $\mathcal{L}$ operatörü lineer olduğundan $\mathcal{L}(g-f;x) = \mathcal{L}(g;x) - \mathcal{L}(f;x) \geq 0$ elde edilir. Böylece

$$\mathcal{L}(f;x) - \mathcal{L}(g;x) \leq 0$$

olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.2. $\mathcal{L}$ lineer pozitif operatör olmak üzere,
$|\mathcal{L}(f;x)| \leq \mathcal{L}(|f|;x)$
eşitsizliği sağlanır [15].

Tanım 2.5. Kapalı bir $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı, sürekli ve reel değerli fonksiyonların oluşturduğu küme $C[a,b]$ ile gösterilir yani

$$C[a,b] = \{f \mid f: [a,b] \to \mathbb{R}\ sürekli\}$$

dir.

$C[a,b]$,

$$\|f\|_{C[a,b]} = max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

normu ile bir normlu uzaydır.

Tanım 2.6. (f_n) fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna $C[a,b]$ normuna göre yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $x \in [a,b]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$$

ya da daha açık olarak,

$$\lim_{n\to\infty} max_{a\le x\le b} |f_n(x) - f(x)|_{C[a,b]} = 0$$

olmasıdır. Düzgün yakınsama $f_n(x) \rightrightarrows fx)$ şeklinde gösterilir. $C[a,b]$ normundaki yakınsaklık klasik anlamdaki düzgün yakınsaklığa denktir.

Teorem 2.3. $\mathcal{L}_n: C[a,b] \to C[a,b]$ lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun.
$e_i = t^i, i = 0,1,2$ için $[a,b]$ üzerinde

$$\mathcal{L}_n(e_i; x) \rightrightarrows e_i, \quad i = 0,1,2$$

koşulları sağlanıyorsa bu durumda her $f \in C[a,b]$ için $[a,b]$ aralığında

$$\mathcal{L}_n(f; x) \rightrightarrows f(x)$$

sağlanır [6].

Tanım 2.7. f, $[a,b]$ aralığında tanımlı, sürekli ve reel değerli bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun süreklilik modülü $\omega(f;\delta)$ ile gösterilir ve

$$\omega(f;\delta) = sup_{\substack{x,y\in[a,b] \\ |x-y|\le\delta}} |f(x) - f(y)|$$

şeklinde tanımlanır. ω, δ nın bir fonksiyonudur [16].

Tanım 2.8. (Süreklilik Modülünün Özellikleri)

i) $\omega(f;\delta) \geq 0$

ii) $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(f;\delta_1) \leq \omega(f;\delta_2)$

iii) $\omega(f+g;\delta) \leq \omega(f;\delta) + \omega(g;\delta)$

iv) $m \in \mathbb{N}$ için $\omega(f;m\delta) \leq m\omega(f;\delta)$

v) $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(f;\lambda\delta) \leq (\lambda+1)\omega(f;\delta)$

vi) $|f(t)-f(x)| \leq \omega(f;|t-x|)$

vii) $|f(t)-f(x)| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta}+1\right)\omega(f;\delta)$

viii) $lim_{\delta\to 0}\omega(f;\delta) = 0$

[18].

Tanım 2.9. $f \in \tilde{C}_B[0,\infty)$ ve $\delta > 0$ olmak üzere,

$$\mathcal{K}(f;\delta) = inf_{g\in\tilde{C}_B^2[0,\infty)}\left\{\|f-g\|_{\tilde{C}_B[0,\infty)} + \delta\|g\|_{\tilde{C}_B^2[0,\infty)}\right\}$$

ifadesine Peetre's-K fonksiyoneli denir, burada

$$C[0,\infty) = \{f: f:[0,\infty) \to \mathbb{R}\ sürekli\}$$

$$\tilde{C}[0,\infty) = \{f \in C[0,\infty): f,[0,\infty)\ aralığında\ düzgün\ sürekli\}$$

$$\tilde{C}_B[0,\infty) = \left\{f \in \tilde{C}[0,\infty): f,[0,\infty)\ aralığında\ sınırlı\right\}$$

$$\tilde{C}_B^2[0,\infty) = \left\{f: f, f', f'' \in \tilde{C}_B[0,\infty)\right\}$$

olup

$C[0,\infty)$ ve $\tilde{C}_B[0,\infty)$,

$\|f\|_\infty = sup_{x\in[0,\infty)}|f(x)|$ normu ile,

$\tilde{C}_B^2[0,\infty)$ uzayı ise

$\|f\|_{\tilde{C}_B^2} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|f''\|_\infty$

normu ile birer normlu uzaydır [17].

Tanım 2.10. $f \in \tilde{C}_B[0,\infty)$ ve $\delta > 0$ olsun. f fonksiyonunun ikinci süreklilik modülü

$\omega_2(f;\delta) = sup_{0<t\leq\delta}\|f(x+2t) - 2f(x+t) + f(x)\|_\infty$

şeklinde tanımlanır [15] ve aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$\mathcal{K}(f;\delta) \leq M\{\omega_2(f,\sqrt{\delta}) + \min(1,\delta)\,\|f\|_{\tilde{C}_B}\}.$

3. CHARLIER- SZÁSZ- DURRMEYER TİPİ (CSD) POZİTİF LİNEER OPERATÖRLER

Lemma 3.1. (1.2.) ile verilen L_n operatörü için

$i)$ $L_n(1;x,a)=1,$

ii) $L_n(t;x,a)=x+\frac{1}{n}$

iii) $L_n(t^2;x,a)=x^2+\frac{x}{n}\left(3+\frac{1}{a-1}\right)+\frac{2}{n^2}$

iv) $L_n(t^3;x,a)=x^3+\frac{x^2}{n}\left(6+\frac{3}{a-1}\right)+\frac{x}{n^2}\left(10+\frac{6}{a-1}+\frac{2}{(a-1)^2}\right)+\frac{5}{n^3}$

dir.

İspat:

$i)$ $t=1$ olsun. $u=-(a-1)nx$ için (1.1.)'den

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}=e\left(1-\frac{1}{a}\right)^{-(a-1)nx}$$

olup (1.2.)'de $f(t)=1$ alınırsa

$$L_n(1;x,a)=e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}e\left(1-\frac{1}{a}\right)^{-(a-1)nx}$$

$$=1$$

bulunur.

ii) (1.1.) ile verilen eşitliğin her iki yanının t'ye göre türevini alalım.

$$e^t\left(1-\frac{t}{a}\right)^u + ue^t\left(1-\frac{t}{a}\right)^{u-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{kC_k(u;a)}{k!}t^{k-1} \qquad (3.1.)$$

olup burada $t=1, u=-(a-1)nx$ için,

$$e\left(1-\frac{1}{a}\right)^{-(a-1)nx} + (-(a-1)nx)e\left(-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{a}\right)^{-(a-1)nx-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{kC_k(u;a)}{k!}$$

$$e\left(1-\frac{1}{a}\right)^{-(a-1)nx}\left[1+\left(-\frac{1}{a}\right)\left(-(a-1)nx+\frac{a}{n-1}\right)\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{kC_k(u;a)}{k!}$$

$$e\left(1-\frac{1}{a}\right)^{-(a-1)nx}[1+nx] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}k$$

$$1+nx = e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}k$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafı $\frac{1}{n}$ ile çarpılarak (1.2.)'de $f(t)=t$ alınırsa

$$L_n(t;x,a) = e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\frac{k}{n} = x+\frac{1}{n}$$

elde edilir.

iii) (3.1.1.) eşitliğinin her iki tarafının t'ye göre türevini alırsak,

$$e^t\left(1-\frac{t}{a}\right)^u + 2e^t u\left(-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{a}\right)^{u-1}$$

$$+e^t\left(-\frac{1}{a}\right)u(u-1)\left(-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{t}{a}\right)^{u-2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(u;a)}{k!}k(k-1)t^{k-2}$$

bulunur. $t=1, u=-(a-1)nx$ alınarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{-(a-1)nx}+2e(-(a-1)nx)\left(-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{a}\right)^{-(a-1)nx-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}k(k-1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}k^2=e\left(1-\frac{1}{a}\right)^{-(a-1)nx}\left[n^2x^2+nx\left(3+\frac{1}{a-1}\right)+2\right]$$

$$L_n(t^2;x,a)=e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\left(\frac{k}{n}\right)^2$$

$$=x^2+\frac{x}{n}\left(3+\frac{1}{a-1}\right)+\frac{2}{n^2}$$

elde edilir.

iv) İstenilen ifadenin ispatı da benzer şekilde yapılabilir.

Lemma 3.2. (1.3.) ile verilen V_n operatörü için

$i)$ $V_n(1;x,a)=1,$

$ii)$ $V_n(t;x,a)=x+\frac{\lambda+2}{n},$

$iii)$ $V_n(t^2;x,a)=x^2+\frac{x}{n}\left(\frac{1}{a-1}+2(\lambda+3)\right)+\frac{1}{n^2}(\lambda^2+5\lambda+7)$

$iv)$ $V_n(t^3;x,a)=x^3+\frac{x^2}{n}\left(3(\lambda+1)+\frac{3}{a-1}\right)$

$$+\frac{x}{n^2}\left(3\lambda^2+21\lambda+39+\frac{3\lambda+12}{a-1}+\frac{2}{(a-1)^2}\right)$$

$$+\frac{1}{n^3}(\lambda^3+9\lambda^2+28\lambda+34)$$

v) $V_n(t^4;x,a)=x^4+\frac{x^3}{n}\left(4\lambda+20+\frac{6}{a-1}\right)+\frac{x^2}{n^2}\left(54\lambda+127+\frac{12\lambda+60}{a-1}+\frac{11}{(a-1)^2}\right)$

$$+\frac{x}{n^3}\left(4\lambda^3+10\lambda^2+200\lambda+292+\frac{54\lambda+127}{a-1}+\frac{8\lambda+40}{(a-1)^2}+\frac{6}{(a-1)^3}\right)$$

$$+\frac{1}{n^4}(4\lambda^3+10\lambda^2+150\lambda+185)$$

İspat: Öncelikle V_n operatörünün lineerliğini ve pozitifliğini gösterelim.

$\forall\alpha,\beta\in R$ ve $\forall f_1,f_2\in C[0,\infty)$ için,

$$V_n((\alpha f_1(t)+\beta f_2(t));x,a)=e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}$$
$$\times\int_0^{\infty}e^{-nt}t^{\lambda+k}(\alpha f_1(t)+\beta f_2(t))dt$$

$$=\alpha e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}\int_0^{\infty}e^{-nt}t^{\lambda+k}f_1(t)dt$$

$$+\beta e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}\int_0^{\infty}e^{-nt}t^{\lambda+k}f_2(t)dt$$

$$=\alpha V_n(f_1(t);x,a)+\beta V_n(f_2(t);x,a)$$

olduğundan V_n lineer bir operatördür.

$k = 0,1,2 \ldots \in \mathbb{N}$ ve $a > 1$ için Charlier-Poisson polinomu olan $C_k(-(a-1)nx; a)$ pozitiftir. Aynı zamanda $a > 1,\ \lambda \geq 0$ ve $x \in [0, \infty)$ için $f \geq 0$ ise $V_n(f; x, a) \geq 0$ dır. O halde V_n pozitif bir operatördür.

$i)$ V_n operatöründe Gamma fonksiyonunun özellikleri kullanılarak,

$$V_n(1; x, a) = e^{-1}\left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx} e\left(1 - \frac{1}{a}\right)^{-(a-1)nx} \frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda + k + 1)} \int_0^\infty e^{-nt} t^{\lambda+k} dt$$

$$= \frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda + k + 1)} \int_0^\infty e^{-nt} t^{\lambda+k} dt$$

elde edilir. İntegralde $t = \frac{u}{n}$ dönüşümü yapılırsa

$$\int_0^\infty e^{-nt} t^{\lambda+k} dt = \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{n}\right)^{\lambda+k} \frac{du}{n}$$

$$= \int_0^\infty e^{-u} \frac{u^{\lambda+k}}{n^{\lambda+k+1}} du$$

$$= \frac{1}{n^{\lambda+k+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^{\lambda+k} du$$

olur. Böylece

$$V_n(1; x, a) = \frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda + k + 1)} \frac{\Gamma(\lambda + k + 1)}{n^{\lambda+k+1}} = 1$$

bulunur.

$$ii)\ V_n(t; x, a) = e^{-1}\left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k(-(a-1)nx; a)}{k!} \frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda + k + 1)} \int_0^\infty e^{-nt} t^{\lambda+k} t dt$$

$$= e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}$$

$$\times\int_0^{\infty} e^{-nt}t^{\lambda+k+1}dt$$

Diğer yandan $\int_0^{\infty} e^{-u}\left(\frac{u}{n}\right)^{\lambda+k+1}\frac{du}{n} = \frac{1}{n^{\lambda+k+2}}\int_0^{\infty} e^{-u}u^{\lambda+k+1}du$

$$= \frac{1}{n^{\lambda+k+2}}\Gamma(\lambda+k+2)$$

olup

$$V_n(t;x,a) = e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}\frac{1}{n^{\lambda+k+2}}\Gamma(\lambda+k+2)$$

$$= e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\frac{(\lambda+k+1)!}{(\lambda+k)!\,n}$$

$$= e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\frac{\lambda+k+1}{n}$$

$$= \left(e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\frac{\lambda}{n}\right)$$

$$+\left(e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\frac{k}{n}\right)$$

$$+\left(e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\frac{1}{n}\right)$$

bulunur. Lemma 3.1. özelliklerinden

$$= \frac{\lambda}{n} L_n(1;x,a) + L_n(t;x,a) + \frac{1}{n} L_n(1;x,a)$$

$$= \frac{\lambda}{n} + x + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$$

$$= x + \frac{\lambda+2}{n}$$

elde edilir.

$$iii)\ V_n(t^2;x,a) = e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!} \frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)} \times \int_0^{\infty} e^{-nt} t^{\lambda+k} t^2 dt$$

$$= e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!} \frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)} \times \int_0^{\infty} e^{-nt} t^{\lambda+k+2} dt$$

Benzer şekilde $\frac{1}{n^{\lambda+k+3}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\lambda+k+2} du = \frac{1}{n^{\lambda+k+3}} \Gamma(\lambda+k+3)$ olup

$$V_n(t^2;x,a) = e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!} \frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)} \frac{\Gamma(\lambda+k+3)}{n^{\lambda+k+3}}$$

$$= e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!} \frac{(\lambda+k+2)!}{(\lambda+k)!} \frac{1}{n^2}$$

$$= e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!} \frac{(\lambda+k+2)(\lambda+k+1)}{n^2}$$

$$= e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\left\{\frac{\lambda^2+3\lambda+2}{n^2}+\frac{2\lambda k}{n^2}+\frac{k^2+3k}{n^2}\right\}$$

$$= \left\{\frac{\lambda^2+3\lambda+2}{n^2}+\frac{2\lambda}{n}\left(x+\frac{1}{n}\right)+x^2+\frac{x}{n}\left(3+\frac{1}{a-1}\right)+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n}\left(x+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

bulunur. Lemma 3.1. özelliklerinden

$$= \frac{\lambda^2+3\lambda+2}{n^2}L_n(1;x,a)+\frac{2\lambda}{n}L_n(t;x,a)+L_n(t^2;x,a)+\frac{3}{n}L_n(t;x,a)$$

$$= x^2+\frac{x}{n}\left(\frac{1}{a-1}+2(\lambda+3)\right)+\frac{1}{n^2}(\lambda^2+5\lambda+3)$$

elde edilir.

$$iv)\ V_n(t^3;x,a) = e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}$$
$$\times\int_0^{\infty}e^{-nt}t^{\lambda+k}t^3dt$$

$$= e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}$$
$$\times\int_0^{\infty}e^{-nt}t^{\lambda+k+3}dt \qquad (3.2.1)$$

dır. Burada

$$\int_0^{\infty}e^{-nt}t^{\lambda+k+3}dt = \frac{1}{n^{\lambda+k+4}}\Gamma(\lambda+k+4)$$

olup

$$V_n(t^3;x,a)=e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}\frac{1}{n^{\lambda+k+4}}\Gamma(\lambda+k+4)$$

$$=e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\frac{(\lambda+k+3)!}{(\lambda+k)!}\frac{1}{n^3}$$

$$=e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\frac{(\lambda+k+3)(\lambda+k+2)(\lambda+k+1)}{n^3}$$

$$=\left(\frac{\lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6}{n^3}\right)e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}$$

$$+\left(\frac{3\lambda^2+12\lambda+11}{n^2}\right)e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$+\left(\frac{3\lambda+6}{n}\right)e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\left(\frac{k}{n}\right)^2$$

$$+e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\left(\frac{k}{n}\right)^3$$

bulunur. Böylece Lemma 3.1. özelliklerinden

$$=\frac{\lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6}{n^3}L_n(1;x,a)+\frac{3\lambda^2+12\lambda+11}{n^2}L_n(t;x,a)+\frac{3\lambda+6}{n}L_n(t^2;x,a)$$

$$+L_n(t^3;x,a)$$

$$=x^3+\frac{x^2}{n}\left(3(\lambda+1)+\frac{3}{a-1}\right)+\frac{x}{n^2}\left(3\lambda^2+21\lambda+39+\frac{3\lambda+12}{a-1}+\frac{2}{(a-1)^2}\right)$$

$$+\frac{1}{n^3}(\lambda^3+9\lambda^2+28\lambda+34)$$

elde edilir.

v) Benzer şekilde gösterilir.

Lemma 3.3. (1.3) ile verilen V_n operatörü için aşağıdaki eşitlikler gerçeklenir:

i) $V_n(t-x;x,a)=\frac{\lambda+2}{n}$

ii) $V_n((t-x)^2;x,a)=\frac{x}{n}\left(\frac{2a-1}{a-1}\right)+\frac{1}{n^2}(\lambda^2+5\lambda+7)$

iii) $V_n((t-x)^3;x,a)=\frac{x}{n^2}\left(6\lambda+18+\frac{3\lambda+12}{a-1}+\frac{2}{(a-1)^2}\right)+\frac{1}{n^3}(\lambda^3+9\lambda^2+28\lambda+34)$

iv) $V_n((t-x)^4;x,a)=\frac{x^3}{n}\left(\frac{15}{a-1}\right)+\frac{x^2}{n^2}\left(-12\lambda^2-30\lambda-29+\frac{12}{a-1}+\frac{3}{(a-1)^2}\right)$

$$+\frac{x}{n^3}\left(-26\lambda^2+88\lambda+156+\frac{54\lambda+127}{a-1}\right)$$

$$+\frac{x}{n^3}\left(\frac{8\lambda+40}{(a-1)^2}+\frac{6}{(a-1)^3}\right)$$

$$+\frac{x}{n^2}(6\lambda^2+30\lambda+42)$$

$$+\frac{1}{n^4}(4\lambda^3+10\lambda^2+150\lambda+185)$$

İspat:

$$i)\ V_n((t-x;x,a)=e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}$$

$$\times\int_0^{\infty}e^{-nt}t^{\lambda+k}(t-x)dt$$

$$= e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}$$

$$\times\int_0^{\infty} e^{-nt}t^{\lambda+k}tdt$$

$$-xe^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}$$

$$\times\int_0^{\infty} e^{-nt}t^{\lambda+k}tdt$$

$$= V_n(t;x,a) - xV_n(1;x,a)$$

$$= x+\frac{\lambda+2}{n}-x$$

$$=\frac{\lambda+2}{n}$$

elde edilir.

$$ii)\ V_n((t-x)^2;x,a) = e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}$$

$$\times\int_0^{\infty} e^{-nt}t^{\lambda+k}(t-x)^2dt$$

$$= e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}\int_0^{\infty} e^{-nt}t^{\lambda+k}t^2dt$$

$$-2xe^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}\int_0^{\infty} e^{-nt}t^{\lambda+k}tdt$$

$$+x^2e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}\int_0^{\infty}e^{-nt}t^{\lambda+k}dt$$

$$=V_n(t^2;x,a)-2xV_n(t;x,a)+x^2V_n(1;x,a)$$

$$=x^2+\frac{x}{n}\left(\frac{1}{a-1}+2(\lambda+3)\right)+\frac{1}{n^2}(\lambda^2+5\lambda+7)-2x\left(x+\frac{\lambda+2}{n}\right)+x^2$$

$$=\frac{x}{n}\left(\frac{2a-1}{a-1}\right)+\frac{1}{n^2}(\lambda^2+5\lambda+7)$$

elde edilir.

$$iii)\ V_n((t-x)^3;x,a)=e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}$$
$$\times\int_0^{\infty}e^{-nt}t^{\lambda+k}(t-x)^3dt$$

$$=V_n(t^3;x,a)-3xV_n(t^2;x,a)+3x^2V_n(t;x,a)$$
$$-x^3V_n(1;x,a)$$

$$=x^3+\frac{x^2}{n}\left(3(\lambda+1)+\frac{3}{a-1}\right)$$
$$+\frac{x}{n^2}\left(3\lambda^2+21\lambda+39+\frac{3\lambda+12}{a-1}+\frac{2}{(a-1)^2}\right)$$
$$+\frac{1}{n^3}(\lambda^3+9\lambda^2+28\lambda+34)$$
$$-3x\left[x^2+\frac{x}{n}\left(\frac{1}{a-1}+2(\lambda+3)\right)+\frac{1}{n^2}(\lambda^2+5\lambda+7)\right]$$

$$+3x^2\left(x+\frac{\lambda+2}{n}\right)-x^3$$

$$=\frac{x}{n^2}\left(6\lambda+18+\frac{3\lambda+12}{a-1}+\frac{2}{(a-1)^2}\right)$$

$$+\frac{1}{n^3}(\lambda^3+9\lambda^2+28\lambda+34)$$

elde edilir.

$$iv)\ V_n((t-x)^4;x,a)=e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}$$

$$\times\int_0^{\infty}e^{-nt}t^{\lambda+k}(t-x)^4dt$$

$$=V_n(t^4;x,a)-4xV_n(t^3;x,a)+6x^2V_n(t^2;x,a)$$

$$-4x^3V_n(t;x,a)+x^4V_n(1;x,a)$$

$$=x^4+\frac{x^3}{n}\left(4\lambda+20+\frac{6}{a-1}\right)$$

$$+\frac{x^2}{n^2}\left(54\lambda+127+\frac{12\lambda+60}{a-1}+\frac{11}{(a-1)^2}\right)$$

$$+\frac{x}{n^3}\left(4\lambda^3+10\lambda^2+200\lambda+292+\frac{54\lambda+127}{a-1}\right)$$

$$+\frac{x}{n^3}\left(\frac{8\lambda+40}{(a-1)^2}+\frac{6}{(a-1)^3}\right)$$

$$+\frac{1}{n^4}(4\lambda^3+10\lambda^2+150\lambda+185)-4x^4$$

$$+\frac{x^3}{n}\left(-12\lambda-12+\frac{3}{a-1}\right)$$

$$+\frac{x^2}{n^2}\left(-12\lambda^2-84\lambda-156-\frac{12\lambda+48}{a-1}-\frac{8}{(a-1)^2}\right)$$

$$+\frac{x}{n^3}(-4\lambda^3-36\lambda^2-112\lambda-136)$$

$$+6x^4+\frac{x^3}{n}\left(\frac{6}{a-1}+12\lambda+36\right)+\frac{x}{n^2}(6\lambda^2+30\lambda+42)-4x^4$$

$$+\frac{x^3}{n}(-4\lambda-8)+x^4$$

$$=\frac{x^3}{n}\left(\frac{15}{a-1}\right)+\frac{x^2}{n^2}\left(-12\lambda^2-30\lambda-29+\frac{12}{a-1}+\frac{3}{(a-1)^2}\right)$$

$$+\frac{x}{n^3}\left(-26\lambda^2+88\lambda+156+\frac{54\lambda+127}{a-1}+\frac{8\lambda+40}{(a-1)^2}+\frac{6}{(a-1)^3}\right)$$

$$+\frac{x}{n^2}(6\lambda^2+30\lambda+42)+\frac{1}{n^4}(4\lambda^3+10\lambda^2+150\lambda+185)$$

elde edilir.

Teorem 3.1. $f\in C[0,\infty)\cap H$ olsun. Bu durumda $[0,\infty)$ aralığının her kompakt alt kümesi üzerinde düzgün olarak,

$$\lim_{n\to\infty} V_n(f;x,a)=f(x)$$

dir, burada

$$H:=\{f:\ \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{1+x^2}\ mevcut\}$$

dir.

İspat: $K \subset [0,\infty)$ kompakt bir küme ve $supK = k$ olsun.

$i = 0$ için Lemma 3.2'den

$$\lim_{n\to\infty} \| V_n(1;x,a) - 1 \|_\infty = \lim_{n\to\infty} sup_{x\in K} |V_n(1;x,a) - 1|$$

$$= \lim_{n\to\infty} sup_{x\in K} |1 - 1|$$

$$= 0$$

olur.

$i = 1$ için Lemma 3.2'den

$$\lim_{n\to\infty} \| V_n(t;x,a) - x \|_\infty = \lim_{n\to\infty} sup_{x\in K} |V_n(t;x,a) - x|$$

$$= \lim_{n\to\infty} sup_{x\in K} \left| x + \frac{\lambda+2}{n} - x \right|$$

$$= 0$$

bulunur. $i = 2$ için Lemma 3.2.'den

$$\lim_{n\to\infty} \| V_n(t^2;x,a) - x^2 \|_\infty = \lim_{n\to\infty} sup_{x\in K} |V_n(t^2;x,a) - x^2|$$

$$= \lim_{n\to\infty} sup_{x\in K} |x^2 + \frac{x}{n}\left(\frac{1}{a-1} + 2(\lambda+3)\right)$$

$$+ \frac{1}{n^2}(\lambda^2 + 5\lambda + 7) - x^2|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} sup_{x\in K}\left|\frac{x}{n}\left(\frac{1}{a-1}+2(\lambda+3)\right)\right|$$

$$+\lim_{n\to\infty} sup_{x\in K}\left|\frac{1}{n^2}(\lambda^2+5\lambda+7)\right|$$

$$=0$$

olup K üzerinde

$$\lim_{n\to\infty} \| V_n(t^i;x,a)-x^i \|_\infty = 0 \ , i=0,1,2$$

bulunur. Böylece V_n operatörü Korovkin Teoremi'nin şartlarını sağladığından $K \subset [0,\infty)$ kompakt alt kümesi üzerinde düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} V_n(f;x,a) = f(x)$$

gerçeklenir.

Şimdi, V_n operatörünün asimptotik yaklaşımını Voronovskaja Teoremi yardımıyla inceleyelim.

Teorem 3.2. $f,[0,\infty)$ aralığında sınırlı ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Ayrıca f, belirli bir $x\in[0,\infty)$ noktasında birinci ve ikinci mertebeden türevlere sahip bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\lim_{n\to\infty} n\big(V_n(f;x,a)-f(x)\big) = (\lambda+2)f'(x)+\frac{1}{2}x\left(\frac{2a-1}{a-1}\right)f''(x)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: f fonksiyonu için Taylor açılımından

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{1}{2}f''(x)(t-x)^2 + \varepsilon(t,x)(t-x)^2$$

yazılır, burada $\varepsilon(t,x) \coloneqq \varepsilon(t-x)$ sınırlı bir fonksiyon ve $lim_{t\to x}\varepsilon(t,x) = 0$ dır. Eşitliğin her iki tarafına V_n operatörü uygulanır ve V_n'nin lineerliği göz önüne alınırsa

$$V_n(f(t);x,a) = f(x)V_n(1;x,a) + f'(x)V_n(t-x;x,a) + \frac{1}{2}f''(x)V_n((t-x)^2;x,a)$$

$$+V_n(\varepsilon(t,x)(t-x)^2)$$

olur. Lemma 3.2. ve Lemma 3.3.'ten

$$n\big(V_n(f(t);x,a) - f(x)\big) = (\lambda+2)f'(x) + \frac{1}{2}x\left(\frac{2a-1}{a-1}\right)f''(x)$$

$$+n\big(V_n(\varepsilon(t,x)(t-x)^2;x,a)\big) \qquad (3.2.)$$

elde edilir. Son terime Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$V_n(\varepsilon(t,x)(t-x)^2;x,a) \le (V_n(\varepsilon^2(t,x);x,a)^{\frac{1}{2}} + (V_n((t-x)^4;x,a)^{\frac{1}{2}} \qquad (3.3.)$$

bulunur. $\varepsilon^2(x,x) = 0$ ve $\varepsilon^2(\cdot,x) \in C[0,\infty) \cap H$ olup Teorem 3.4'ten

$$lim_{n\to\infty}V_n(\varepsilon^2(t,x);x,a) = \varepsilon^2(x,x) = 0 \qquad (3.4.)$$

elde edilir.

Lemma 3.2.'nin özellikleri kullanılarak

$$V_n((t-x)^4;x,a) = V_n(t^4;x,a) - 4xV_n(t^3;x,a) + 6x^2V_n(t^2;x,a) - 4x^3V_n(t;x,a)$$

$$+x^4V_n(1;x,a)$$

$$= \frac{x^2}{n^2}\left(-6\lambda^2 + 13 + \frac{12}{a-1} + \frac{3}{(a-1)^2}\right)$$

$$+ \frac{x}{n^3}\left(-26\lambda^2 + 88\lambda + 156 + \frac{54\lambda + 127}{a-1} + \frac{8\lambda + 46}{(a-1)^2}\right)$$

$$+ \frac{1}{n^4}(4\lambda^3 + 10\lambda^2 + 150\lambda + 185)$$

olur. Bu durumda belirli bir $x \in [0, \infty)$ için

$$\lim_{n\to\infty} n(V_n((t-x)^4; x, a)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x^2}{n^2}\left(-6\lambda^2 + 13 + \frac{12}{a-1} + \frac{3}{(a-1)^2}\right) + \frac{x}{n^3}\left(\begin{matrix}-26\lambda^2 + 88\lambda + \\ 156 + \frac{54\lambda+127}{a-1} + \frac{8\lambda+46}{(a-1)^2}\end{matrix}\right) + \frac{1}{n^4}(4\lambda^3 + \right.$$

$$\left. 10\lambda^2 + 150\lambda + 185)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$< \infty \qquad (3.5.)$$

bulunur. O halde (3.4.) ve (3.5.) ifadeleri (3.3.)'te dikkate alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} n(V_n(\varepsilon(t,x)(t-x)^2; x, a))^{\frac{1}{2}} = 0$$

olup (3.2.1.)'den

$$\lim_{n\to\infty} n\big(V_n(f; x, a) - f(x)\big) = (\lambda + 2)f'(x) + \frac{1}{2}x\left(\frac{2a-1}{a-1}\right)f''(x)$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.3. $f \in \tilde{C}[0, \infty) \cap H$ olmak üzere,

$$|V_n(f(;x,a)-f(x)| \leq 2\omega\left(f;\sqrt{\gamma_n(x)}\right)$$

eşitsizliği sağlanır, burada

$$\gamma_n(x) = V_n((t-x)^2;x,a) = \frac{x}{n}\left(\frac{2a-1}{a-1}\right)+\frac{1}{n^2}(\lambda^2+5\lambda+7) \qquad (3.6.)$$

dır.

İspat: Lemma 3.1., Lemma 3.2. ve süreklilik modülünün özelliklerinden,

$$|V_n(f;x,a)-f(x)| \leq e^{-1}(1-\frac{1}{a})^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}$$
$$\times\int_0^{\infty} e^{-nt}t^{\lambda+k}|f(t)-f(x)|dt$$

$$\leq\left\{1+\frac{1}{\delta}e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}\right.$$
$$\left.\times\int_0^{\infty} e^{-nt}t^{\lambda+k}|t-x|dt\right\}\omega(f;\delta)$$

dir. Önce sağ taraftaki integrale, sonra toplama Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa Lemma 3.2.'den

$$|V_n(f;x,a)-f(x)| \leq 1+\frac{1}{\delta}$$
$$\times\left\{e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}\right.$$
$$\left.\times\left(\int_0^{\infty} e^{-nt}t^{\lambda+k}dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\infty} e^{-nt}t^{\lambda+k}(t-x)^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\omega(f;\delta)$$

$$\leq\left\{1+\tfrac{1}{\delta}\left(V_n(1;x,a)\right)^{\frac{1}{2}}(V_n((t-x)^2;x,a))^{\frac{1}{2}}\right\}\omega(f;\delta)$$

elde edilir.

$\delta = \sqrt{\gamma_n(x)} = V_n((t-x)^2; x, a)$ seçilirse

$$|V_n(f(;x,a) - f(x)| \leq 2\omega\left(f; \sqrt{\gamma_n(x)}\right)$$

bulunur.

Teorem 3.4. $f \in \tilde{C}_B^2[0,\infty)$ olmak üzere,

$$|V_n(f;x,a) - f(x)| \leq \frac{1}{n}\mu(x)\|f\|_{\tilde{C}_B^2}$$

eşitsizliği sağlanır, burada

$$\mu(x) = \frac{2a-1}{2(a-1)}x + \frac{1}{2}(\lambda^2 + 7\lambda + 11) \qquad (3.7.)$$

dır.

İspat: Taylor formülünden,

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + f''(\eta)\frac{(t-x)^2}{2}, \eta \in (x,t)$$

dir.

V_n operatörünün lineerliği ve Lemma 3.3.'ten,

$$|V_n(f;x,a) - f(x)| = \left|f'(x)V_n(t-x;x,a) + \frac{f''(\eta)}{2}V_n((t-x)^2;x,a)\right|$$

$$\leq \left(\frac{\lambda+2}{n}\right)\|f'\|_{\tilde{C}_B} + \frac{1}{2}\left[\frac{x}{n}\left(\frac{2a-1}{a-1}\right) + \frac{1}{n^2}(\lambda^2+5\lambda+7)\right]\|f''\|_{\tilde{C}_B}$$

$$\leq \frac{1}{n}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2a-1}{a-1}\right)x + (\lambda^2 + 7\lambda + 11)\right] \|f\|_{\tilde{C}_B^2}$$

$$= \frac{1}{n}\mu(x)\|f\|_{\tilde{C}_B^2}$$

elde edilir.

Şimdi ise V_n operatörünün Peetre-K fonksiyoneli ve ikinci süreklilik modülü yardımıyla yaklaşımını incelediğimiz teoremi verelim.

Teorem 3.5. $f \in \tilde{C}_B[0,\infty)$ olmak üzere,

$$|V_n(f;x,a) - f(x)| \leq 2M\left\{\omega_2(f,h) + \min(1,h^2)\,\|f\|_{\tilde{C}_B^2}\right\}$$

eşitsizliği sağlanır, burada

$$h = \sqrt{\frac{\mu(x)}{2n}}$$

dir.

İspat: $b \in \tilde{C}_B^2[0,\infty)$ olsun. Bu durumda Lemma 3.2. ve Teorem 3.4.'ten

$$|V_n(f;x,a) - f(x)| = |V_n(f;x,a) - V_n(b;x,a) + V_n(b;x,a) - b(x) + b(x) - f(x)|$$

$$\leq |V_n(f;x,a) - V_n(b;x,a)| + |V_n(b;x,a) - b(x)| + |b(x) - f(x)|$$

$$= |V_n(f-b;x,a)| + |V_n(b;x,a) - b(x)| + |b(x) - f(x)|$$

$$\leq |V_n(f-b;x,a)| + |V_n(b;x,a) - b(x)| + \|f-b\|_\infty$$

$$\leq \|f-b\|_\infty V_n(1;x,a) + |V_n(b;x,a) - b(x)| + \|f-b\|_\infty$$

$$\leq 2\left[\|f-b\|_{\infty}+\frac{\mu(x)}{2n}\|b\|_{\infty}\right]$$

bulunur. Eşitsizliğin her iki yanının $b \in \tilde{C}_B^2[0,\infty)$ üzerinden infimumu alınır ve

$$h=\sqrt{\frac{\mu(x)}{2n}}$$

seçilirse

$$|V_n(f;x,a)-f(x)| \leq 2\mathcal{K}\left(f;\frac{\mu(x)}{2n}\right)$$

elde edilir. Peetre-K fonksiyoneli ve ikinci süreklilik modülü arasındaki ilişkiden

$$|V_n(f;x,a)-f(x)| \leq 2M\left\{\omega_2(f,h)+\min(1,h^2)\,\|f\|_{\tilde{C}_B}\right\}$$

ifadesi yazılabilir.

4. CSD OPERATÖRLERİNİN KİNG TİPİ MODİFİKASYONU

Bu bölümde (1.3.) ile verilen CSD operatörlerinden daha iyi yaklaşım hızına sahip King tipi genelleştirmeleri incelenecektir.

King, klasik Bernstein operatörlerinin e_0 ve e_1 fonksiyonlarını koruyan bir operatör dizisini, $f \in C[0,1]$ için

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r_n^k(x)\left(1 - r_n(x)\right)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right), \qquad x \in [0,1]$$

şeklinde tanımlamıştır, burada $\{r_n(x)\}$, $0 \le r_n \le 1$ olacak şekilde $[0,1]$ üzerinde sürekli fonksiyonlar dizisidir [19]. $n \in N$ için $r_n(x) = x$ alınırsa B_n operatörü klasik Bernstein operatörüne dönüşür.

Deo ve Dhamija, King'in bu tanımından yararlanarak CSD operatörlerinin aşağıdaki şekilde King tipi bir genellemesini tanımladılar:

$$\hat{V}_n(f;x,a) = e^{-1}\left(1 - \frac{1}{a}\right)^{(a-1)ns_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k(-(a-1)ns_n(x);a)}{k!} \frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)} \times \int_0^{\infty} e^{-nt} t^{\lambda+k} f(t)\,dt \qquad (4.1.)$$

burada

$s_n(x) = \frac{nx-\lambda-2}{n}, a > 1$ ve $x \ge 0$

dır. $\{s_n(x)\}$ dizisi, $[0,\infty)$ üzerinde sürekli fonksiyonların bir dizisidir. $\hat{V}_n$ operatörü, V_n operatöründe x yerine $s_n(x)$ alınarak elde edilen lineer pozitif operatördür.

Lemma 4.1. (4.1.) ile verilen $\hat{V}_n$ operatörü için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:
i) $\hat{V}_n(1;x,a) = 1$,

ii) $\hat{V}_n(t;x,a) = x,$

iii) $\hat{V}_n(t^2;x,a) = x^2 + \frac{x}{n}\left(\frac{2a-1}{a-1}\right) - \frac{1}{n^2}\left(\frac{(4a-3)\lambda + a + 1}{a-1}\right)$

iv) $\hat{V}_n(t^3;x,a) = x^3 + \frac{x^2}{n}\left(6\lambda + 18 + \frac{3}{a-1}\right)$

$$+\frac{x}{n^2}\left(6\lambda^2 + 33\lambda + 50 + \frac{(2a-1)(3\lambda+6) + 3\lambda + 12}{a-1} + \frac{2}{(a-1)^2}\right)$$

$$+\frac{1}{n^3}\left(2\lambda^3 + 15\lambda^2 + 39\lambda + 40 - \left[\frac{\big((4a-3)\lambda + a + 1\big)(3\lambda+6)}{a-1}\right]\right)$$

$v)$ $\hat{V}_n(t^4;x,a) = x^4 + \frac{x^2}{n^2}\left(24\lambda^3 + 60\lambda^2 + 126\lambda + 307 + \frac{24\lambda+90}{a-1} + \frac{11}{(a-1)^2}\right)$

$$+\frac{x^2}{n^5}(30\lambda + 35) + \frac{x}{n^3}(28\lambda^3 + 202\lambda^2 + 730\lambda + 792)$$

$$+\frac{x}{n^3}\left(\frac{(2a-1)(36\lambda^3 + 316\lambda^2 + 858\lambda + 755}{a-1} + \frac{16\lambda+60}{(a-1)^2} + \frac{6}{(a-1)^3}\right)$$

$$+\frac{x}{n^4}\left(\frac{(2a-1)2\lambda^3 + 15\lambda^2 + 39\lambda + 40}{a-1} - \frac{(2a-1)[(4a-3)\lambda + a + 1](3\lambda+6)}{(a-1)^2}\right)$$

$$+\frac{1}{n^3}\left(2\lambda^3 + 15\lambda^2 + 39\lambda + 40 - \frac{[(4a-3)\lambda + a + 1](2\lambda^3 + 15\lambda^2 + 39\lambda + 40)}{a-1}\right)$$

$$+\frac{1}{n^4}(\lambda^4 + 14\lambda^3 + 46\lambda^2 + 200\lambda + 309)$$

$$+\frac{1}{n^5}\left(\frac{[(4a-3)\lambda + a + 1](3\lambda+7)}{(a-1)^2} - \frac{[(4a-3)\lambda + a + 1](2\lambda^3 + 15\lambda^2 + 39\lambda + 40)}{a-1}\right)$$

İspat: Lemma 3.2.'nin ispatında izlenen yolda x yerine $s_n(x)$ alınırsa ispat kolayca elde edilir.

Lemma 4.2. (4.1.) ile verilen $\hat{V}_n$ operatörü için
i) $\hat{V}_n(t-x;x,a)=0,$

ii) $\hat{V}_n((t-x)^2;x,a)=\frac{x}{n}\left(\frac{2a-1}{a-1}\right)-\frac{1}{n^2}\left(\frac{(4a-3)\lambda+a+1}{a-1}\right)$

İspat: Lemma 4.1 ve $\hat{V}_n$ operatörünün lineerliğinden açıktır.

Teorem 4.1. $f\in C[0,\infty)\cap H$ olsun. Bu durumda $[0,\infty)$ aralığının her bir kompakt alt kümesi üzerinde düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty}\hat{V}_n(f;x,a)=f(x)$$

dir.

İspat: Lemma 4.1. ve Korovkin Teoremi'nden ispat açıktır.

Aşağıda ispatsız vereceğimiz Teorem 4.2., 4.3., 4.4. ve 4.5., sırasıyla Teorem 3.2., Teorem 3.3., Teorem 3.4. ve Teorem 3.5.'in $\hat{V}_n$ operatörüne genellemesidir. Dolayısıyla ispatlar benzerdir.

Teorem 4.2. $f,[0,\infty)$ aralığında sınırlı ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Ayrıca f, belirli bir $x\in[0,\infty)$ için birinci ve ikinci mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Bu bağlamda,

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\hat{V}_n(f;x,a)-f(x)\right)=\frac{1}{2}x\left(\frac{2a-1}{a-1}\right)f''(x)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 4.3. $f \in C[0,\infty) \cap H$ olmak üzere $\hat{V}_n$ operatörü için

$$|\hat{V}_n(f(;x,a) - f(x)| \leq 2\omega\left(f;\sqrt{\alpha_n(x)}\right)$$

eşitsizliği gerçeklenir, burada

$$\alpha_n(x) = \hat{V}_n((t-x)^2;x,a) = \frac{x}{n}\left(\frac{2a-1}{a-1}\right) - \frac{1}{n^2}\left\{\frac{(4a-3)\lambda+a+1}{a-1}\right\} \qquad (4.2.)$$

dir.

Teorem 4.4. $f \in \tilde{C}_B^2[0,\infty)$ olmak üzere,

$$\left|\hat{V}_n(f;x,a) - f(x)\right| \leq \frac{1}{n}\beta(x)\|f\|_{\tilde{C}_B^2}$$

eşitsizliği sağlanır, burada

$$\beta(x) = \frac{2a-1}{2(a-1)}x + \frac{1}{2}\left[\frac{(4a-3)\lambda+a+1}{a-1}\right]$$

tir.

Teorem 4.5. $f \in \tilde{C}_B[0,\infty)$ için,

$$\left|\hat{V}_n(f;x,a) - f(x)\right| \leq 2M(\omega_2(f,h) + \min(1,h^2))\|f\|_{\tilde{C}_B}$$

eşitsizliği sağlanır, burada

$$h = \sqrt{\frac{\beta(x)}{2n}}$$

dir.

Belirtmeliyiz ki (4.2.) ile verilen King tipli modifikasyondaki yaklaşım hızının (3.6.) ile verilen V_n operatörünün yaklaşım hızından daha iyi olduğu kolayca görülür. Gerçekten de $\lambda \geq 0, a > 1$ olmak üzere

$$\alpha_n(x) = \frac{x}{n}\left(\frac{2a-1}{a-1}\right) - \frac{1}{n^2}\left\{\frac{(4a-3)\lambda + a + 1}{a-1}\right\}$$

$$\leq \frac{x}{n}\left(\frac{2a-1}{a-1}\right) + \frac{1}{n^2}(\lambda^2 + 5\lambda + 7)$$

$$= \gamma_n(x)$$

dır.

5. CSD OPERATÖRLERİNİN AĞIRLIKLI UZAYLARDA YAKLAŞIMI

Tanım 5.1. $\rho: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu için

i) ρ monoton artan

ii) Her $x \in \mathbb{R}$ için $\rho(x) \geq 1$

iii) $lim_{|x|\to\infty}\rho(x) = \infty$

özellikleri gerçeklenirse ρ fonksiyonuna bir *ağırlık fonksiyonu* denir.

M_f, f fonksiyonuna bağlı bir sabit olmak üzere

$$|f(x)| \leq M_f \rho(x)$$

koşulunu sağlayan $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının sınıfı $B_\rho[0,\infty)$ ile gösterilir. Buna göre

$$C_\rho[0,\infty) := \{ f \in C[0,\infty): |f(x)| \leq M_f \rho(x) \}$$

$$C_\rho^*[0,\infty) := \left\{ f \in C_\rho[0,\infty): \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} < \infty \right\}$$

ve

$$C_\rho^*[0,\infty) \subset C_\rho[0,\infty) \subset B_\rho[0,\infty)$$

olup bu uzaylar $\|f\|_\rho = sup_{x\in[0,\infty)} \frac{f(x)}{\rho(x)}$ ile birer normlu uzaydır.

Bu bölümde, ağırlık fonksiyonu olarak $\rho(x) = 1 + x^2$ alacağız ve $B_\rho[0,\infty)$, $C_\rho[0,\infty)$ ve $C_\rho^*[0,\infty)$ uzayları sırasıyla $B_{x^2}[0,\infty)$, $C_{x^2}[0,\infty)$ ve $C_{x^2}^*[0,\infty)$ ile gösterilecektir.

Aşağıdaki teorem Korovkin tip teoremin Gadjiev tarafından verilen ağırlıklı uzaylardaki karşılığıdır.

Teorem 5.1. $R_n: C_{x^2}[0,\infty) \to B_{x^2}[0,\infty)$ lineer pozitif operatörler dizisi

$$\lim_{n\to\infty} \|R(e^{\nu}) - e^{\nu}\|_{x^2} = 0\,, \qquad \nu = 0{,}1{,}2$$

şartlarını sağlıyorsa bu durumda her $f \in C_{\rho}^{*}[0,\infty)$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|R_n(f) - f\|_{x^2} = 0$$

olur [20].

Tanım 5.2. $f \in C_{x^2}^{*}[0,\infty)$ olsun. Herhangi bir $\delta > 0$ için

$$\Omega(f;\delta) = sup_{\substack{x\in[0,\infty)\\ 0<h<\delta}} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{(1+h^2)(1+x^2)}$$

şeklinde tanımlı olan Ω(f; δ) fonksiyonuna *f* fonksiyonunun ağırlıklı süreklilik modülü denir [21].

Lemma 5.1. $f \in C_{x^2}^{*}[0,\infty)$ için ağırlıklı süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri sağlar:

i) $\Omega(f;\delta) \geq 0$

ii) $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\Omega(f;\delta_1) \leq \Omega(f;\delta_2)$

iii) $lim_{\delta\to 0^+}\Omega(f;\delta) = 0$

iv) $m \in \mathbb{N}$ için $\Omega(f;m\delta) \leq 2m(1+\delta^2)\Omega(f;\delta)$

v) Herhangi bir $\lambda > 0$ için $\Omega(f;\lambda\delta) \leq 2(1+\lambda)(1+\delta^2)\Omega(f;\delta)$

vi) $|f(t) - f(x)| \leq (1+x^2)(1+(t-x)^2)\Omega(f;|t-x|)$

vii) $|f(t) - f(x)| \leq 2(1+\delta^2)(1+x^2)\left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right)(1+(t-x)^2)\Omega(f;\delta)$.

Lemma 5.2. $\|R_n(\rho\|_{\rho} \leq M_{\rho}$ olacak şekilde bir M_{ρ} pozitif sabiti vardır gerek ve yeter şart $R_n: C_{\rho}[0,\infty) \to B_{\rho}[0,\infty)$ [22].

Lemma 5.3. $\rho(x) = 1 + x^2$ ağırlıklı fonksiyonu olsun. Eğer $f \in C_{x^2}[0,\infty)$ ise M pozitif bir reel sayı olmak üzere

$\|V_n(\rho;a)\|_{x^2} \leq 1 + M$

dir.

İspat: $\rho(x) = 1 + x^2$ olsun. V_n operatörünün lineerliği ve Lemma 3.2.'den

$$V_n(p; x, a) = V_n(1 + t^2; x, a)$$

$$= V_n(1; x, a) + V_n(t^2; x, a)$$

$$= 1 + x^2 + \frac{x}{n}\left(\frac{1}{a-1} + 2(\lambda + 3)\right) + \frac{1}{n^2}(\lambda^2 + 5\lambda + 7)$$

yazılabilir. Bu bağlamda

$$\|V_n(\rho; a)\|_{x^2} = sup_{x\in[0,\infty)}\left(\frac{1 + x^2 + \frac{x}{n}\left(\frac{1}{a-1} + 2(\lambda + 3)\right) + \frac{1}{n^2}(\lambda^2 + 5\lambda + 7)}{1 + x^2}\right)$$

$$= sup_{x\in[0,\infty)}\left(\frac{1 + x^2}{1 + x^2} + \frac{\frac{x}{n}\left(\frac{1}{a-1} + 2(\lambda + 3)\right) + \frac{1}{n^2}(\lambda^2 + 5\lambda + 7)}{1 + x^2}\right)$$

$$\leq 1 + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a-1} + 2(\lambda + 3)\right) + \frac{1}{n^2}(\lambda^2 + 5\lambda + 7)$$

yazılabilir. $a > 1, \lambda \geq 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a-1} + 2(\lambda + 3)\right) + \frac{1}{n^2}(\lambda^2 + 5\lambda + 7) \leq M$$

olacak şekilde $M > 0$ seçilirse

$$\|V_n(\rho; a)\|_{x^2} \leq 1 + M$$

olur. Bu durumda Lemma 5.2'den V_n operatörü $C_\rho[0, \infty)$'dan $B_\rho[0, \infty)$'a giden bir operatördür.

Teorem 5.2. Her $f \in C_{x^2}^*[0,\infty)$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|V_n(f;a) - f\|_{x^2} = 0$$

dır.

İspat: Teorem 5.1. gereğince,

$v = 0,1,2$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|V_n(e_v;a) - e_v\|_{x^2} = 0$$

olduğunu göstermeliyiz.

$i)$ $v = 0$ için,

$V_n(1;x,a) = 1$ olduğundan $lim_{n\to\infty}\|V_n(1;x,a) - 1\|_{x^2} = 0$ eşitliği kolayca görülür.

$ii)$ $v = 1$ için,

$$\|V_n(e_1;x,a) - e_1(x)\|_{x^2} = sup_{x\in[0,\infty)} \left|\frac{x}{1+x^2} + \frac{\lambda+2}{n(1+x^2)} - \frac{x}{1+x^2}\right|$$

$$\leq \frac{\lambda+2}{n}$$

olduğundan,

$$lim_{n\to\infty}\|V_n(e_1;x,a) - e_1(x)\|_{x^2} = 0$$

elde edilir.

iii) $v = 2$ için,

$$\|V_n(e_2;x,a)-e_2(x)\|_{x^2}=sup_{x\in[0,\infty)}\left|\begin{matrix}\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x}{n(1+x^2)}\left(\frac{1}{a-1}+2(\lambda+2)\right)\\+\frac{1}{n^2(1+x^2)}(\lambda^2+5\lambda+7)-\frac{x^2}{1+x^2}\end{matrix}\right|$$

$$\leq\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a-1}+2(\lambda+2)\right)+\frac{1}{n^2}(\lambda^2+5\lambda+7)$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty}\|V_n(e_2;x,a)-e_2(x)\|_{x^2}=0$$

elde edilir. Böylece (i), (ii), (iii) ve Teorem 5.1.'den ispat tamamlanmış olur.

5.1. CSD Operatörlerinin Ağırlıklı Süreklilik Modülü Yardımıyla Yaklaşım Hızı

Teorem 5.1. $f\in C^*_{x^2}[0,\infty)$ve M, n'ye bağlı olmayan bir sabit olmak üzere,

$$sup_{x\geq0}\frac{|V_n(f;x,a)-f(x)|}{(1+x^2)^3}\leq M\Omega\left(f;n^{-\frac{1}{4}}\right)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat:

$$|V_n(f;x,a)-f(x)|=e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}\frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)}$$

$$\times\int_0^{\infty}e^{-nt}t^{\lambda+k}|f(t)-f(x)|dt$$

olur. Lemma 5.4.'ten

$$|V_n(f;x,a)-f(x)|\leq2(1+x^2)(1+\delta^2)\Omega(\mathrm{f};\delta)e^{-1}\left(1-\tfrac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}$$

$$\times \frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)} \int_0^{\infty} e^{-nt} t^{\lambda+k} \left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right)(1+(t-x)^2)dt \qquad (5.1.)$$

dir.

Burada

$$S(x) = \left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right)(1+(t-x)^2)$$

olarak alınırsa

$$S(x) = \begin{cases} 2(1+\delta^2) & ,|t-x| \le \delta \\ 2(1+\delta^2)\dfrac{|t-x|^4}{\delta^4} & ,|t-x| \ge \delta \end{cases}$$

yazılabilir. Dolayısıyla her $x \in [0,\infty)$ için

$$S(x) \le 2(1+\delta^2)\left\{1+\frac{|t-x|^4}{\delta^4}\right\} \qquad (5.2.)$$

elde edilir. (5.2.) eşitsizliği (5.1.)'de dikkate alınırsa

$$|V_n(f;x,a)-f(x)| \le 16(1+x^2)\Omega(\mathrm{f};\delta)\{1+\frac{1}{\delta^4}e^{-1}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(-(a-1)nx;a)}{k!}$$

$$\times \frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)} \int_0^{\infty} e^{-nt} t^{\lambda+k}(t-x)^4 dt \qquad (5.3.)$$

eşitsizliği elde edilir. Lemma 3.3.'ten

$$V_n((t-x)^4;x,a) = A^3x^3 + A^2x^2 + A^1x^1 + A^0x^0 \qquad (5.4.)$$

yazılabilir. Burada,

$$A^3 = \frac{15}{n(a-1)}$$

$$A^2 = \frac{-12\lambda^2 - 30\lambda - 29}{n^2} + \frac{12}{n^2(a-1)} + \frac{3}{n^2(a-1)^2}$$

$$A^1 = \frac{-26\lambda^2 + 88\lambda + 156}{n^3} + \frac{54\lambda + 127}{n^3(a-1)} + \frac{8\lambda + 40}{n^3(a-1)^2} + \frac{6}{n^3(a-1)^3} + \frac{6\lambda^2 + 30\lambda + 42}{n^2}$$

$$A^0 = \frac{4\lambda^3 + 10\lambda^2 + 150\lambda + 185}{n^4}$$

dır.

$$A^j = O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad j = 0,1,2,3$$

olarak alınır ve A^3, A^2, A^1 ifadeleri (5.3)'te yerine yazılırsa

$$|V_n(f;x,a) - f(x)| \leq 16(1+x^2)\Omega(\mathrm{f};\delta)\left\{1 + \frac{1}{\delta^4} O\left(\frac{1}{n}\right)(x^3 + x^2 + x)\right\}$$

olur. $\delta = n^{-1/4}$ seçilirse

$$|V_n(f;x,a) - f(x)| \leq 16(1+x^2)\Omega(\mathrm{f};\delta)\{1 + x^3 + x^2 + x\}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

6. CSD OPERATÖRLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde (1.3.) ile verilen CSD operatörlerinin A-istatistiksel yakınsaklığı incelenecektir. Amacımız için önce istatistiksel sonra A-istatistiksel yakınsaklık tanımları ve özellikleri verilecektir.

Tanım 6.1. Herhangi bir T kümesinin eleman sayısı, bu kümenin kardinalitesiyle belirlenir ve $|T|$ ile gösterilir.

Tanım 6.2. $T \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\delta(T) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{t \leq n: t \in \mathbb{N}\}|$$

limiti mevcut ise bu limite T kümesinin yoğunluğu denir [23].

Tanım 6.3. $x = (x_k)$ reel ya da kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa bu durumda x dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - limx = L$ ile gösterilir [24].

Örnek 6.1. $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x = (x_k)$ dizisinin genel terimi,

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$0 \leq |\{k \leq n: |x_k| \geq \varepsilon| \leq |\{k \leq n: x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{ k \leq n: |x_k| \geq \varepsilon| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

bulunur. Böylece $st - limx = 0$ olur.

Yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır, ancak yukarıdaki örnekte de görüldüğü gibi tersi doğru değildir.

Tanım 6.4. $A = (a_{nk})$, $n, k = 1,2, \ldots$ sonsuz bir matris ve $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer her bir n için $(Ax)_n := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ serisi yakınsak ise $Ax := \{(Ax)_n\}$ dönüşüm dizisi mevcuttur denir.

Eğer bir x dizisi için Ax dönüşüm dizisi mevcut ve bir L sayısına yakınsak yani $lim_{n\to\infty}(Ax)_n = L$ ise x dizisi L sayısına A-toplanabilirdir denir ve $A - limx = L$ şeklinde gösterilir.

Eğer $lim_{n\to\infty}(Ax)_n = lim_{n\to\infty} x_n = L$ ise A matrisine regülerdir denir.

Teorem 6.1. Bir $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart
i) $\|A\| = sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$
ii) Her sabit k için $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$
iii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$
koşullarının gerçeklenmesidir [25].

Örnek 6.2. $n, k = 1,2, \ldots$ için

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & 1 \leq k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

olmak üzere Cesaro matrisi olarak bilinen $C_1 = (c_{nk})$ matrisi regülerdir.

Tanım 6.5. $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. Ayrıca $D \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere χ_D, D kümesinin karakteristik fonksiyonu yani

$$\chi_D = \begin{cases} 1, & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases}$$

olsun. Eğer

$$\delta_A(D) \coloneqq \lim_{n\to\infty} (A\chi_D)_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in D} a_{nk}$$

limiti mevcut ise $\delta_A(D)$ sayısına *D* kümesinin *A-yoğunluğu* denir [26].

$\delta_A(D)$ veya $\delta_A(\mathbb{N}\backslash D)$ yoğunluklarından herhangi biri mevcut olsun. Bu durumda

$$\delta_A(\mathbb{N}\backslash D) = 1 - \delta_A(D)$$

olur. Ayrıca *D* sonlu elemanlı ise $\delta_A(D)$=0 dır.

Örnek 6.3. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$a_{nk} = \begin{cases} 1, & k = n^2 \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $A = (a_{nk})$ matrisi göz önüne alındığında $D_1 = \{k \neq n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ için $\delta_A(D_1) = 0$ dır. Dolayısıyla $D_2 = \{k = n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $\delta_A(D_2) = 1$ olur.

Teorem 6.2. D_1 ve D_2 iki küme olmak üzere $D_1 \subseteq D_2$ ise $\delta_A(D_1) \leq \delta_A(D_2)$ dir.

Tanım 6.6. $x = (x_k)$ reel terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$D \coloneqq D(\varepsilon) = \{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$$

olmak üzere

$$\delta_A(D) = \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\,\chi_D = \lim_n \sum_{k:|x_k - L| \geq \varepsilon} a_{nk} = 0$$

olacak biçimde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L sayısına $A - istatistiksel$ yakınsaktır denir ve $st_A - limx = L$ ile gösterilir [27].

Buradan anlaşılıyor ki A-istatistiksel yakınsaklık tanımında A matrisi yerine C_1 Cesaro matrisi alınırsa istatistiksel yakınsaklık, A matrisi yerine I birim matrisi alınırsa klasik anlamda yakınsaklık elde edilir.

Teorem 6.3. $st_A - limx = L$ olması için gerek ve yeter şart $\delta_A\{n_k : k \in \mathbb{N}\} = 1$ ve $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = L$ olacak şekilde $x = (x_n)$ dizisinin en az bir (x_{n_k}) alt dizisinin bulunmasıdır [28].

Örnek 6.4. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$a_{nk} = \begin{cases} 1, & k = n^2 \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler matrisi verilsin. $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} \dfrac{1}{5}, & k = n^2 \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Her $\varepsilon > 0$ için

$$D = \left\{k \in \mathbb{N}: \left|x_k - \frac{1}{5}\right| \geq \varepsilon\right\}$$

için

$$\delta_A(D) = \lim_{n\to\infty} (A\chi_D)_n = 0$$

olduğundan $st_A - limx = \frac{1}{5}$ olur.

6.1. CSD Operatörlerinin A-istatistiksel Yakınsaklığı

Duman, Khan ve Orhan A-istatistiksel yakınsaklığı kullanarak Korovkin tip teoremin bir genellemesini aşağıdaki şekilde verdiler.

Teorem 6.1. Her $n \in \mathbb{N}$ için $D_n: C[a,b] \to C[a,b]$ şeklinde tanımlı (D_n) lineer pozitif operatör dizisi verilsin. Eğer $e_j(x) = x^j, j = 0,1,2$ için

$$st_A - \lim_n \left\| D_n(e_j) - e_j \right\|_\infty = 0$$

ise bu durumda her $f \in C[a,b]$ için

$$st_A - \lim_n \| D_n(f) - f \|_\infty = 0$$

gerçeklenir [29].

Şimdi Teorem (6.1.) yardımıyla $\{V_n\}$ lineer pozitif operatör dizisinin A-istatistiksel yakınsaklığını inceleyelim.

Teorem 6.2. $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. Bu durumda $[0,\infty)$ aralığının her kompakt alt kümesi üzerinde

$$st_A - \lim_n \| V_n(f;a) - f \|_\infty = 0$$

dir.

İspat: Teorem 6.1.'den

$$st_A - \lim_{n\to\infty} \left\| V_n(e_j;a) - e_j \right\|_\infty = 0, \quad j = 0,1,2$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$K \subset [0,\infty)$ kompakt bir küme ve $supK = l$ olsun. Lemma 3.2. den

$i)$ $\|V_n(e_0;a) - e_0\|_\infty = sup_{x\geq 0}|1-1| = 0$ olup

$st_A - \lim_n \|V_n(e_0) - e_0\|_\infty = 0$ dır.

$ii)$ $\|V_n(e_1;x,a) - e_1(x)\|_\infty = sup_{x\geq 0}\left|x + \frac{\lambda+2}{n} - x\right| = \frac{\lambda+2}{n}$

Şimdi $\varepsilon > 0$ olmak üzere U kümesini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$U \coloneqq \{n: \|V_n(e_1;a) - e_1\| \geq \varepsilon\}$

$U_1 \coloneqq \left\{n: \frac{\lambda+2}{n} \geq \varepsilon\right\}$

$U = U_1$ olduğu açıktır.

Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k\in U} a_{nk} = \sum_{k\in U_1} a_{nk}$$

olduğunu söyleyebiliriz. O halde, $n \to \infty$ için limit alınırsa

$st_A - \lim_n \|V_n(e_1) - e_1\|_\infty = 0$

eşitliği sağlanır.

$$iii)\ \|V_n(e_2) - e_2\|_\infty = sup_{x\geq 0}\left|\begin{matrix} x^2 + \frac{x}{n}\left(\frac{1}{a-1} + 2(\lambda+2)\right) \\ + \frac{1}{n^2}(\lambda^2 + 5\lambda + 7) - x^2 \end{matrix}\right|$$

$$\leq sup_{x\geq 0}\left|\frac{x}{n}\left(\frac{1}{a-1}+2(\lambda+2)\right)\right|$$

$$+sup_{x\geq 0}\left|\frac{1}{n^2}(\lambda^2+5\lambda+7)\right|$$

$$=\frac{l}{n}\left(\frac{1}{a-1}+2(\lambda+2)\right)+\frac{1}{n^2}(\lambda^2+5\lambda+7)$$

Şimdi $\varepsilon>0$ olmak üzere U kümesini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$U:=\{n:\|V_n(e_2;a)-e_2\|\geq\varepsilon\}$$

$$U_1:=\left\{n:\frac{l}{n}\left(\frac{1}{a-1}+2(\lambda+2)\right)\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

$$U_2:=\left\{n:\frac{1}{n^2}(\lambda^2+5\lambda+7)\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

olsun. $U\subseteq U_1+U_2$ olduğu açıktır. Buradan her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\sum_{k\in U}a_{nk}\ \leq\ \sum_{k\in U_1}a_{nk}+\sum_{k\in U_2}a_{nk}$$

olduğunu söyleyebiliriz. O halde, $n\to\infty$ için limit alınırsa

$$st_A-\lim_n\|V_n(e_2;x,a)-e_2(x)\|_\infty=0$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Tanım 6.1. $A=(a_{nk})$, negatif olmayan bir regüler matris ve (b_n), pozitif artmayan bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon>0$

$$\lim_n\frac{1}{b_n}\sum_{|x_k-L|\geq\varepsilon}a_{nk}<\infty$$

ise $x = (x_k)$ dizisi $o(b_n)$ yakınsama oranı ile L sayısına A-istatistiksel yakınsaktır denir ve $x_n - L = st_A - o(b_n)$ şeklinde gösterilir [28].

Teorem 6.3. $A = (a_{nk})$negatif olmayan regüler bir matris ve $(b_n(x))$ artmayan bir dizi olsun. Eğer

$$\omega(f;\ \delta_{n,x}) = st_A - o(b_n(x))$$

ise bu durumda (1.3.) ile verilen V_n operatörü için

$$|V_n(f;x,a) - f(x)| = st_A - o(b_n(x))$$

gerçeklenir, burada

$$\delta_{n,x} = \sqrt{V_n((t-x)^2\ ;x,a)}$$

dır.

İspat: Lemma (3.2.)'den $V_n(e_0;x,a) = e_0(x)$ olup Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$|V_n(f;x,a) - f(x)| \leq \left[V_n(e_0;x,a) + \frac{1}{\delta_{n,x}}\left(V_n((e_1-x)^2\ ;x,a)\right)^{1/2}\right]\omega(f;\ \delta_{n,x})$$

yazabiliriz, burada $\delta_{n,x} = \sqrt{V_n((e_1-x)^2\ ;x,a)}$ seçilirse

$$|V_n(f;x,a) - f(x)| \leq 2\omega(f;\ \delta_{n,x})$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikten

$$\frac{1}{b_n(x)} \sum_{k:\ |V_n(f;x,a)-f(x)|\geq\varepsilon} a_{nk} \leq \frac{1}{b_n(x)} \sum_{k:\ 2\omega(f;\ \delta_{n,x})\geq\frac{\varepsilon}{2}} a_{nk}$$

olup hipotezden ispat tamamlanır.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Charlier- Szàsz- Durrmeyer tipi lineer pozitif operatörlerin farklı yaklaşım özellikleri, Korovkin tip teorem, süreklilik modülü, ikinci süreklilik modülü ve Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla incelenmiştir. Bu operatörler için Voronovskaja teoremi yardımıyla asimptotik formül elde edilmiştir. Ayrıca ağırlıklı uzaylarda yaklaşım ve istatistiksel yakınsaklık incelenmiştir. Operatörün King tipli modifikasyonu da verilerek aynı yaklaşımlar bu modifikasyonda da incelenip King tipli modifikasyondaki yaklaşım hızı ve operatörün kendi hızı karşılaştırılmıştır. Yaklaşım teorisinde lineer pozitif operatörlerin önemi üzerinde durulmuş, bu teoriye katkı sağlayacak bir çalışma olması amaçlanmıştır.

KAYNAKLAR

1. Weiestrass, K. (1885). Überdie analytische Darstellbarkeit sogennanter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 633-639, 789-805.

2. Bernstein, S.N. (1912). Démanstration du théoréme de Weierstrass fondée sur la calcul des probabilites. *Communications de la Sociéte Mathématique de, Charkowsérie*, 2 (13), 1- 2.

3. Popoviciu, T. (1950). Asupra demonstratiei teoremei lui Weierstrass cu ajutorul polinoamelor de interpolare, *Lucrarile Sesuinii Ştiintifice Academia Romane din*,1-4.

4. Bohman, H. (1952). On approximation of continuous and analytic functions. *Arkiv för Matematik* 2, 43-56.

5. Korovkin, P.P. (1953). On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 90, 961-964.

6. Korovkin, P.P. (1960). Linear operators and approximation theory, *Hindustan Publishing Corporation,* Delhi, 1-63.

7. Gadjiev, A.D, Ç. Orhan (2002). İstatistiksel Yakınsama Yoluyla Bazı Yaklaşım Teoremleri. *Rocky Mountain Journal of Mathematics,* 32(1) 129-138.

8. Szâsz, O. (1950). Generalization of S. Bernstein polynomials to the infinite intervals. *J. Research Nati Bur. Standarts* 45, 239-245.

9. Jakimovski, A., Leviatan, D. (1969). Generalized Szâsz operators for the approximation in the infinite interval. *Mathematica (Cluj)* 34, 97-103.

10. Ciupa, A. (1996). On the approximation by Favard- Szâsz type operators. *Revue d'Analyse Numerique et de Theorie de l'Approximation,* 25, 57-61.

11. Ismail, M.E.H. (2005). Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable. *Cambridge University Press, Cambridge,* 30(1), 54-60.

12. Varma. S., Taşdelen, F. (2012). Szâsz type operators involving Charlier polynomials. *Mathematical and Computar Modeling*, 56, 118-122.

13. Deo N., Dhamija M. (2018). Charlier- Szâsz-Durrmeyer type linear positive operators. *African Mathematical Union and Springer-Verlag, Deuchland,* 29, 223-232.

14. Mazhar. S.M., Totik, V. (1985). Approximation by modified Szâsz operators. *Acta Scientarium Mathematicarum (Szeged),* 49, 1-4, 257-269.

15. Hacıyev, A., Hacısalihoğlu, H.H. (1995). Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı. *Ankara Üniversitesi Yayınları,* 100s, Ankara.

16. Ditzian, Z., Totik, V. (1987). *Modulio of smoothness.* (9. Baskı). New York: Springer-

Verlag, 227.

17. Stancu, D. D., Coman, Gh., Agratini, O., Trimbitas, R. (2001). *Analiza Numerica şi Teoria Aproximarii volume 1.* 1. Cluj – Napoca: Presa Universitara Clujeana. 118.

18. Gal, S.G., Anastassiou, G. A. (2000). *Approximation Theory: Moduli of continuity and global smoothness preservation.* 1. New York: Springer Science & Business Media, 525.

19. King, J.P. (2003). Positive linear operators which preserve x^2. *Acta Mathematica Hungary.* 99, 203-208.

20. Gadjiev, A.D. (2009). The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets, and theorems analogous to that of P.P. Korovkin. *Soviet Mathematical Computer.* 29, 401-415.

21. İspir, N. (2001). On modified Baskakov operators on weighted spaces, *Turkish Journal of Mathematics.* 26(3), 355-365.

22. Gadijev, A.D. (1976). Theorems of the type of P.P. Korovkin's theorems. *Matematicheskie Zametki,* 20, 781-786.

23. Niven, I., Zuckerman, H. S. (1980). *An introduction to the theory of numbers.* (5). New York: John Walley and Sons, 541.

24. Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique. *Colloqium Mathematicum,* 241-244.

25. Maddox, I. J. (1970). *Elements of functional analysis.* (2). İngiltere: Cambridge University Press. 256.

26. Freedman, A. R., Sember, J.J. (1981). Densities and summability. *Pacific Journal of Mathematics*, 293-305.

27. Connor, J.S. (1989). On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence. *Canadian Mathematical Bulledin,* 194-198.

28. Kolk, E. (1993). Matrix summability of statistically convergent sequences. *Analysis*, 13, 77-83.

29. Duman O., Khan M.K., Orhan C. (2003). A-statistical convergence of approximating operators, *Mathematical Inequalities Application,* 6(4), 689-699.



Gazili olmak ayrıcalıktır