

İKİ BAĞIMLI ÖRNEK İÇİN TESTLER

BÖLÜM 7

1

İki Bağımlı Örnek İçin Testler

- İşaret Testi
- Wilcoxon İşaretli Sıra Sayıları Testi
- McNemar Testi

2

İşaret Testi

Varsayımlar:

a. Veri (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), …,(X_n, Y_n) gibi n sayıda gözlem çiftinden oluşur. Bu gözlemler (ölçümler) ya aynı birimden alınmıştır ya da etkisi arındırılan dışsal değişken bakımından aynı değerli olan iki birimden alınmıştır.
b. İlgilenilen değişkenin ölçme düzeyi en az sıralamadır.
c. İlgilenilen değişken süreklidir.

H_0: D_i farklar yığınının medyanı sıfırdır

3

İşaret Testi

$$D_i = X_i - Y_i \,, i = 1,2, \dots, n$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & D_i > 0 \\ 0, & D_i < 0 \end{cases}$$

$$k = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$$

$$f(k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}, \quad k = 0,1, \dots, n$$
$$= \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

4

İşaret Testi

H_0: D_i farklar yığınının medyanı sıfırdır

H_1	Karar kuralı	
D_i farklar yığınının medyanı sıfırdan küçüktür	$k_h \leq k_\alpha$	ise H_0 reddedilir
D_i farklar yığınının medyanı sıfırdan büyüktür	$k_h \geq k'_\alpha$	ise H_0 reddedilir
D_i farklar yığınının medyanı sıfırdan farklıdır	$k_h \leq k_{\alpha/2}$ veya $k_h \geq k'_{\alpha/2}$	ise H_0 reddedilir

5

Örnek

Bayan no	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_i (kg)	82	81	80	68	70	71	68	67	66	61
Y_i (kg)	80	82	80	63	65	66	62	60	59	59

H_0: D_i farklar yığınının medyanı sıfırdır

H_1: D_i farklar yığınının medyanı sıfırdan büyüktür

6

Örnek

No	X_i	Y_i	$D_i = X_i - Y_i$	δ_i
1	82	80	2	1
2	81	82	–1	0
3	80	80	0	İşlem dışı
4	68	63	5	1
5	70	65	5	1
6	71	66	5	1
7	68	62	6	1
8	67	60	7	1
9	66	59	7	1
10	61	59	2	1
				8

$k = \sum \delta_i$ ile $k_h = 8$ bulunur.

$D_3 = 0$ olduğundan ilgili birim veriden atılmıştır.

7

Örnek

$n = 9$ iken

$$P(k = 9) = \binom{9}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{512}$$

$$P(k = 8) = \binom{9}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{9}{512}$$

$$P(k = 7) = \binom{9}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{36}{512}$$

$$P(k \geq 8) = \frac{1}{512} + \frac{9}{512} = \frac{10}{512} = 0.0195 \cong 0.02$$

$$P(k \geq 7) = \frac{1}{512} + \frac{9}{512} + \frac{36}{512} = \frac{46}{512} = 0.0898 \cong 0.09$$

olarak hesaplanır. $P(k \geq k'_\alpha) = \alpha$ ve $\alpha = 0.05$ bilgisi ile $k'_\alpha = 8$ bulunur. $k_h \geq k'_\alpha$ eşitsizliği doğru olduğundan H_0 reddedilir. Uygulanan rejim etkili olmuştur.

8

Örnek

Bu problem için *p-değeri*,

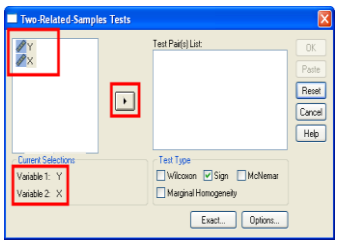
$$\begin{aligned} p\text{-değeri} &= P(k \geq k_h) \\ &= P(k \geq 8) \\ &= 0.02 \end{aligned}$$

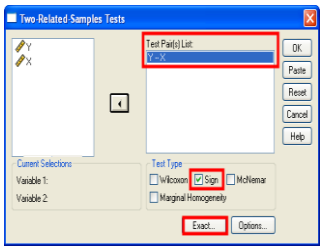
olarak bulunur. *p-değeri*$<\alpha$ olduğundan H_0 hipotezi reddedilir.

9

SPSS Uygulama

	Y	X
1	80	82
2	82	81
3	80	80
4	63	68
5	65	70
6	66	71
7	62	68
8	60	67
9	59	66
10	59	61
11		





Frequencies

		N
X - Y	Negative Differences[a]	1
	Positive Differences[b]	8
	Ties[c]	1
	Total	10

a. X < Y
b. X > Y
c. X = Y

Test Statistics[b]

	X - Y
Exact Sig. (2-tailed)	,039[a]
Exact Sig. (1-tailed)	,020
Point Probability	,018

a. Binomial distribution used.
b. Sign Test

10

Örnek

Birim no	1	2	3	4	5	6	7
X_i (1. yöntem)	14	15	10	9	8	7	5
Y_i (2. yöntem)	18	14	16	12	9	10	12

H_0: D_i farklar yığınının medyanı sıfırdır
H_1: D_i farklar yığınının medyanı sıfırdan küçüktür

No	X_i	Y_i	$D_i = X_i - Y_i$	δ_i
1	14	18	–4	0
2	15	14	1	1
3	10	16	–6	0
4	9	12	–3	0
5	8	9	–1	0
6	7	10	–3	0
7	5	12	–7	0
				1

11

Örnek

Yukarıdaki işlemlere göre $k_h = 1$ bulunur. $n = 7$ iken

$$P(k = 0) = \binom{7}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}$$

$$P(k = 1) = \binom{7}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{7}{128}$$

$$P(k = 2) = \binom{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{21}{512}$$

$$P(k \leq 1) = \frac{8}{128} = 0.0625$$

$$P(k \leq 2) = \frac{29}{128} = 0.2265$$

olarak hesaplanır.

12

Örnek

$P(k \leq k_\alpha) = \alpha$ ve $\alpha = 0.10$ bilgisi ile $k_\alpha = 1$ bulunur. Bu sonuçlara göre $k_h \leq k_\alpha$ eşitsizliği doğru olduğu için H_0 reddedilir. 1. yöntemin daha iyi olduğu söylenebilir. Bu problem için *p-değeri*,

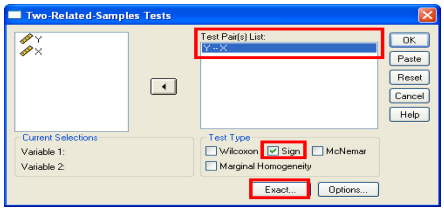
$$p\text{-değeri} = P(k \leq 1) = 0.0625$$

olur. *p-değeri* α değerinden küçük olduğundan H_0 hipotezinin reddedileceği açıktır.

13

SPSS Uygulama

	Y	X
1	18	14
2	14	15
3	16	10
4	12	9
5	9	8
6	10	7
7	12	5
8		



Frequencies

		N
X - Y	Negative Differences[a]	6
	Positive Differences[b]	1
	Ties[c]	0
	Total	7

a. X < Y
b. X > Y
c. X = Y

Test Statistics[b]

	X - Y
Exact Sig. (2-tailed)	,125[a]
Exact Sig. (1-tailed)	,063
Point Probability	,055

a. Binomial distribution used.
b. Sign Test

14

Örnek

Birim no	1	2	3	4	5	6	7	8
X_i (1. grup)	30	30	26	26	25	24	20	19
Y_i (2. grup)	28	26	26	25	22	21	16	12

H_0:D_i farklar yığınının medyanı sıfırdır
H_1:D_i farklar yığınının medyanı sıfır değildir

Birim No	X_i	Y_i	$D_i = X_i - Y_i$	δ_i
1	30	28	2	1
2	30	26	4	1
3	26	26	0	İşlem dışı
4	26	25	1	1
5	25	22	3	1
6	24	21	3	1
7	20	16	4	1
8	19	12	7	1
				7

15

Örnek

$n = 7$ iken,

$$P(k = 7) = \binom{7}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}, \qquad P(k = 0) = \binom{7}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}$$

$$P(k = 6) = \binom{7}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{7}{128}, \qquad P(k = 1) = \binom{7}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{7}{128}$$

$$P(k \geq 7) = \frac{1}{128} = 0.0078, \qquad P(k \leq 0) = \frac{1}{128} = 0.0078$$

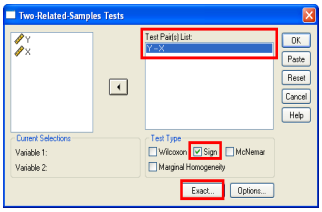
$$P(k \geq 6) = \frac{8}{128} = 0.0625, \qquad P(k \leq 1) = \frac{8}{128} = 0.0625$$

bulunur. $P(k \leq k_{\alpha/2}) = \alpha/2$, $P(k \geq k'_{\alpha/2}) = \alpha/2$ ve $\alpha = 0.10$ bilgisi ile $k_{\alpha/2} = 1$ ve $k'_{\alpha/2} = 6$ hesaplanır. $k_h \geq k'_{\alpha/2}$ olduğundan H_0 hipotezi reddedilir. Yemlerin etkileri farklı bulunmuştur.

16

SPSS Uygulama

	Y	X
1	28	30
2	26	30
3	26	26
4	25	26
5	22	25
6	21	24
7	16	20
8	12	19
9		



Frequencies

		N
X - Y	Negative Differences[a]	0
	Positive Differences[b]	7
	Ties[c]	1
	Total	8

a. X < Y
b. X > Y
c. X = Y

Test Statistics[b]

	X - Y
Exact Sig. (2-tailed)	,016[a]
Exact Sig. (1-tailed)	,008
Point Probability	,008

a. Binomial distribution used.
b. Sign Test

17

Wilcoxon İşaretli Sıra Sayıları Testi

Varsayımlar:

a. Veri $D_i = X_i - Y_i,\ i = 1,2,\dots,n$ olmak üzere n sayıda farktan oluşur.
b. Farklar sürekli bir rastgele değişkendir.
c. Farklar yığınının dağılımı simetriktir.
d. Ölçme düzeyi en az eşit aralıklıdır.

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & D_i > 0 \\ 0, & D_i < 0 \end{cases}$$

$$T^+ = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \, r(|D_i|)$$

18

Wilcoxon İşaretli Sıra Sayıları Testi

H_0:D_i farklar yığınının medyanı sıfırdır

H_1	Karar kuralı	
D_i farklar yığınının medyanı sıfırdan küçüktür	$T_h^+ \leq d_\alpha$	ise H_0 reddedilir
D_i farklar yığınının medyanı sıfırdan büyüktür	$T_h^+ \geq d'_\alpha$	ise H_0 reddedilir
D_i farklar yığınının medyanı sıfırdan farklıdır	$T_h^+ \leq d_{\alpha/2}$ veya $T_h^+ \geq d'_{\alpha/2}$	ise H_0 reddedilir ise H_0 reddedilir

19

Wilcoxon İşaretli Sıra Sayıları Testi

$P(T^+ \leq d_\alpha) = \alpha$ ve $P(T^+ \leq d_{\alpha/2}) = \alpha/2$ olmak üzere, eklerdeki T10'dan bulunur.

Bu değerler kullanılarak da

$$d'_\alpha = \frac{n(n+1)}{2} - d_\alpha$$

$$d'_{\alpha/2} = \frac{n(n+1)}{2} - d_{\alpha/2}$$

elde edilir.

20

Örnek

İsim	Işıl	Ayşe	Aynur	Emel	Zehra	Fatma	Banu	Berna
X_i (kg)	84	83	80	75	70	72	70	64
Y_i (kg)	75	84	75	75	62	60	61	60

H_0:D_i farklar yığınının medyanı sıfırdır
H_1:D_i farklar yığınının medyanı sıfırdan büyüktür

No	X_i	Y_i	$D_i = X_i - Y_i$	δ_i	$\lvert D_i \rvert$	$r(\lvert D_i \rvert)$
1	84	75	9	1	9	5.5
2	83	84	–1	0	1	1
3	80	75	5	1	5	3
4	75	75	0	İşlem dışı	-	-
5	70	62	8	1	8	4
6	72	60	12	1	12	7
7	70	61	9	1	9	5.5
8	64	60	4	1	4	2

21

Örnek

Bu işlemlere göre $T_h^+ = 27$ olarak elde edilir. $n = 7$ ve $\alpha = 0.05$ iken d_α değeri T10'dan 4 olarak bulunur. $d_\alpha = 4$ ve $n = 7$ bilgisi ile

$$d'_\alpha = \frac{n(n+1)}{2} - d_\alpha$$
$$d'_\alpha = \frac{7(7+1)}{2} - 4 = 24$$

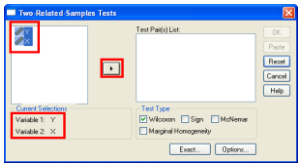
elde edilir.

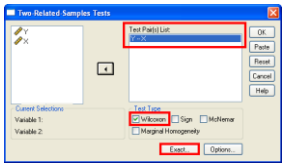
Bu sonuçlara göre, $T_h^+ > d'_\alpha$, yani $27 > 24$ olduğundan H_0 hipotezi reddedilir ve zayıflama rejiminin etkili olduğu iddiası %95 güvenle doğrulanır.

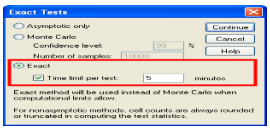
22

SPSS Uygulama

	X	Y
1	84	75
2	83	84
3	80	75
4	75	75
5	70	62
6	72	60
7	70	61
8	64	60
9		







Ranks

		N	Mean Rank	Sum of Ranks
X - Y	Negative Ranks	1[a]	1,00	1,00
	Positive Ranks	6[b]	4,50	27,00
	Ties	1[c]		
	Total	8		

a. X < Y
b. X > Y
c. X = Y

Test Statistics[b]

	X - Y
Z	-2,201[a]
Asymp. Sig. (2-tailed)	,028
Exact Sig. (2-tailed)	,031
Exact Sig. (1-tailed)	,016
Point Probability	,008

a. Based on negative ranks.
b. Wilcoxon Signed Ranks Test

Örnek

Eş no	1	2	3	4	5	6	7	8
X_i (1. grup)	31	34	26	21	18	17	19	15
Y_i (2. grup)	36	32	30	26	28	27	23	20

H_0: D_i farklar yığınının medyanı sıfırdır
H_1: D_i farklar yığınının medyanı sıfırdan küçüktür

Örnek

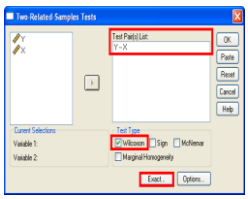
No	X_i	Y_i	$D_i = X_i - Y_i$	δ_i	$\lvert D_i \rvert$	$r(\lvert D_i \rvert)$
1	31	36	–5	0	5	5
2	34	32	2	1	2	1
3	26	30	–4	0	4	2.5
4	21	26	–5	0	5	5
5	18	28	–10	0	10	7.5
6	17	27	–10	0	10	7.5
7	19	23	–4	0	4	2.5
8	15	20	–5	0	5	5

$$T_h^+ = 1$$

25

SPSS Uygulama

	Y	X
1	36	31
2	32	34
3	30	26
4	26	21
5	28	18
6	27	17
7	23	19
8	20	15
9		



Ranks

		N	Mean Rank	Sum of Ranks
X - Y	Negative Ranks	7[a]	5,00	35,00
	Positive Ranks	1[b]	1,00	1,00
	Ties	0[c]		
	Total	8		

a. X < Y
b. X > Y
c. X = Y

Test Statistics[b]

	X - Y
Z	-2,398[a]
Asymp. Sig. (2-tailed)	,016
Exact Sig. (2-tailed)	,016
Exact Sig. (1-tailed)	,008
Point Probability	,004

a. Based on positive ranks.
b. Wilcoxon Signed Ranks Test

26

McNemar Testi

a. Tahlil sonucunun pozitif ya da negatif olmasına göre sınıflandırılması,
b. Tedavi sonucunda yaşamlarını sürdürüp sürdürmeme durumuna göre sınıflandırılması,
c. Üretimde hedeflenen kaliteyi sağlayıp sağlayamama durumuna göre sınıflandırılması

$$H_0: \pi_1 = \pi_2$$

27

McNemar Testi

		İşlem grubu		Toplam
		Negatif	Pozitif	
Kontrol grubu	Negatif	A	C	$A + C$
	Pozitif	B	D	$B + D$
	Toplam	$A + B$	$C + D$	n

28

McNemar Testi

		Tedavi sonrası		Toplam
		ND içinde	ND dışında	
Tedavi öncesi	ND içinde	A	C	$A + C$
	ND dışında	B	D	$B + D$
	Toplam	$A + B$	$C + D$	n

(ND: Normal değerler)

29

McNemar Testi

$H_0: \pi_1 = \pi_2$ $\quad \frac{C - B}{\sqrt{C + B}} = Z$

H_1	Karar kuralı	
$\pi_1 > \pi_2$	$Z_h > Z_\alpha$	ise H_0 reddedilir
$\pi_1 < \pi_2$	$Z_h < -Z_\alpha$	ise H_0 reddedilir
$\pi_1 \neq \pi_2$	$Z_h > Z_{\alpha/2}$	ise H_0 reddedilir
	veya	
	$Z_h < -Z_{\alpha/2}$	ise H_0 reddedilir

30

Örnek

		Tedavi sonrası		Toplam
		ND üzerinde değil	ND üzerinde	
Tedavi öncesi	ND üzerinde değil	4	2	6
	ND üzerinde	12	2	14
	Toplam	16	4	20

(ND: Normal değerler)

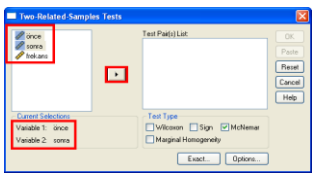
$$H_0: \pi_1 = \pi_2$$
$$H_1: \pi_1 < \pi_2$$

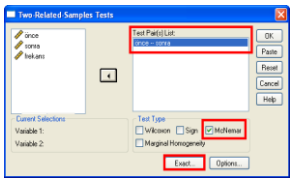
$$Z_h = \frac{2 - 12}{\sqrt{2 + 12}} = -2.67$$

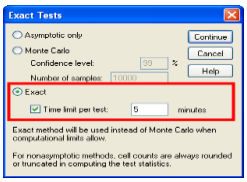
31

SPSS Uygulama

	önce	sonra	frekans
1	1	1	4
2	1	2	2
3	2	1	12
4	2	2	2







önce & sonra

önce	sonra 1	sonra 2
1	4	2
2	12	2

Test Statistics[b]

	önce & sonra
N	20
Exact Sig. (2-tailed)	,013[a]
Exact Sig. (1-tailed)	,006
Point Probability	,006

a. Binomial distribution used.
b. McNemar Test

32

Örnek

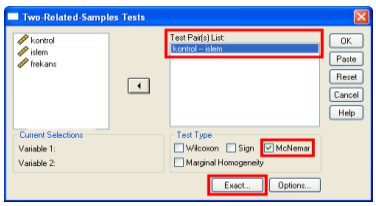
		İşlem grubu		Toplam
		Pozitif	Negatif	
Kontrol grubu	Pozitif	4	3	7
	Negatif	6	3	9
	Toplam	10	6	16

$$Z_h = \frac{3-6}{\sqrt{3+6}} = -1.00$$

33

SPSS Uygulama

	kontrol	islem	frekans
1	1	1	4
2	1	2	3
3	2	1	6
4	2	2	3
5			



kontrol & islem

kontrol	islem 1	islem 2
1	4	3
2	6	3

Test Statistics[b]

	kontrol & islem
N	16
Exact Sig. (2-tailed)	,508[a]
Exact Sig. (1-tailed)	,254
Point Probability	,164

a. Binomial distribution used.
b. McNemar Test

34