# KOMPAKT OLMAYAN YILDIZ GRAF ÜZERİNDEKİ SELFADJOİNT OLMAYAN SCHRÖDİNGER OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ANALİZİ

SPECTRAL ANALYSIS OF NON-SELFADJOINT SCHRÖDİNGER OPERATOR ON NON-COMPACT STAR GRAPH

**Gökhan MUTLU**
Araş. Gör. Dr., Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, gmutlu@gazi.edu.tr,
ORCID ID: 0000-0002-0674-2908
(Sorumlu Yazar)

## ÖZET

Son yıllarda kuantum graflar olarak bilinen metrik graflar üzerine etki eden diferensiyel operatörler hakkında çok sayıda çalışma yapılmaktadır [1-2]. Kuantum graflar matematik, fizik, kimya, mühendislik, nanoteknoloji gibi alanlardaki problemlerin modellenmesinde kullanılmaktadır. Kuantum grafların özellikle kuantum mekanik ve kuantum kaos konularındaki uygulamalarının keşfedilmesiyle birlikte bu alandaki ilgi giderek artmaktadır. Literatürde ele alınan kuantum graflarda genellikle Laplace operatörü $L := -\frac{d^2}{dx_i^2}$ incelenmiştir. Bununla birlikte Schrödinger operatörünü $H := -\frac{d^2}{dx_i^2} + q_i(x_i)$ ele alan çalışmalar da bulunmaktadır [3-5]. Diğer taraftan kuantum graflarla ilgili çalışmaların çoğunda kompakt graflar incelenmiştir. Literatürde kompakt olmayan kuantum grafların spektral özellikleriyle ilgili yeterli çalışma bulunmamaktadır.

Bu çalışmada her birinin uzunluğu sonsuz olan sonlu sayıda kenara sahip yıldız graf üzerinde etki eden Schrödinger operatörünün $H := -\frac{d^2}{dx_i^2} + q_i(x_i)$ spektral özellikleri ele alınmıştır. Burada $q_i(i = 1,2,\dots,n)$ kompleks değerli fonksiyonları $(0,\infty)$ aralığında Lebesgue ölçülebilir ve sonlu birinci momente sahip olsunlar. Ayrıca merkez köşede Neumann köşe koşulları olarak bilinen ve

$Ay(0) + By'(0) = 0$

(1)

şeklinde ifade edilebilen köşe koşullarının bulunduğunu varsayalım. Bu problem spektral analiz anlamında yarım eksende matris Schrödinger denklemi

$H_{A,B}y := -y'' + Q(x)y,\ 0 < x < \infty,$

ve $Ay(0) + By'(0) = 0$ sınır koşulları ile üretilen matris Schrödinger operatörüne eşdeğerdir. Burada $Q(x) = diag(q_1(x), q_2(x), \dots, q_n(x))$, $n \times n$ tipinde diyagonal matris ve $A$, $B$ matrisleri (1) eşitliğiyle verilen $n \times n$ tipinde matrislerdir. $q_i(i = 1,2,\dots,n)$ potansiyelleri kompleks değerli olduğundan bu şekilde elde edilen kuantum graf selfadjoint değildir. Ayrıca ele alınan kuantum graf kompakt olmayan bir graftır. Bu nedenlerle ele alınan çalışma literatürdeki diğer çalışmalardan ayrılmaktadır. Bu çalışmada selfadjoint olmayan bu operatörün özdeğerleri, spektral tekillikleri ve rezolvent operatörü elde edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Kuantum Graflar, Kompakt Olmayan Yıldız Graf, Schrödinger Operatörü, Selfadjoint Olmayan Operatörler, Özdeğerler

## KAYNAKLAR

[1] Berkolaiko, G. and Kuchment, P. (2013). Introduction to Quantum Graphs (Mathematical Surveys and Monographs vol 186), Rhode Island: American Mathematical Society.

[2] Kuchment, P. (2004). Quantum graphs: I. Some basic structures, Waves in Random Media, 14(1), 107-128.
[3] Kurasov, P. (2008) Schrödinger operators on graphs and geometry I: Essentially bounded potentials. Journal of Functional Analysis, 254(4), 934-953.
[4] Boman, J., Kurasov, P., and Suhr, R. (2018). Schrödinger operators on graphs and geometry II. Spectral estimates for L_1-potentials and an Ambartsumian Theorem. Integral Equations and Operator Theory, 90(3), 1-24.
[5] Kurasov, P. and Suhr, R. (2018). Schrödinger operators on graphs and geometry. III. General vertex conditions and counterexamples. Journal of Mathematical Physics, 59(10), 102104, 21 pp.

**ABSTRACT**
There are many studies about Schrödinger operators acting on metric graphs known as quantum graphs in recent years [1-2]. Quantum graphs are used to model problems in mathematics, physics, chemistry, engineering and nanotechnology. After the discovery of applications of quantum graphs in quantum physics and quantum chaos, the interest on quantum graphs is growing rapidly. Most of the studies on quantum graphs in the literature concern Laplace operator $L := -\frac{d^2}{dx_i^2}$. On the other hand there are also studies [3-5] considering Schrödinger operator $H := -\frac{d^2}{dx_i^2} + q_i(x_i)$. Besides most of the studies are about compact quantum graphs. There aren't enough studies regarding non-compact quantum graphs in the literature.

In this study spectral properties of Schrödinger operator $H := -\frac{d^2}{dx_i^2} + q_i(x_i)$ acting on a star graph with finite numbers of edges having infinite length are investigated. Here $q_i(i = 1,2,\dots,n)$ are complex-valued functions which are Lebesgue measurable on $(0,\infty)$ and have finite first moment. Morever Neumann vertex conditions are imposed at the central vertex which can be expressed as
$Ay(0) + By'(0) = 0.$
(1)
This problem is equivalent in terms of spectral analysis to the matrix Schrödinger operator on the half-line which is generated by matrix Schrödinger equation
$H_{A,B}y := -y'' + Q(x)y,\ 0 < x < \infty,$
and the boundary conditions $Ay(0) + By'(0) = 0.$ Here $Q(x) = diag\,(q_1(x), q_2(x), \dots, q_n(x))$, is a diagonal $n \times n$ matrix and $A$, $B$ are $n \times n$ matrices given in (1). Since the potentials $q_i(i = 1,2,\dots,n)$ are complex-valued the obtained quantum graph is non-selfadjoint. Moreover the quantum graph under study is not compact. For these reasons the present study is distinguished from previous studies in the literature. Eigenvalues, spectral singularities and resolvent operator of this non-selfadjoint quantum graph are obtained in this study.

**Keywords:** Quantum Graphs, Non-compact Star Graph, Schrödinger Operator, Non-selfadjoint Operators, Eigenvalues

**REFERENCES**
[1] Berkolaiko, G. and Kuchment, P. (2013). Introduction to Quantum Graphs (Mathematical Surveys and Monographs vol 186), Rhode Island: American Mathematical Society.

[2] Kuchment, P. (2004). Quantum graphs: I. Some basic structures, Waves in Random Media, 14(1), 107-128.
[3] Kurasov, P. (2008) Schrödinger operators on graphs and geometry I: Essentially bounded potentials. Journal of Functional Analysis, 254(4), 934-953.
[4] Boman, J., Kurasov, P., and Suhr, R. (2018). Schrödinger operators on graphs and geometry II. Spectral estimates for L_1-potentials and an Ambartsumian Theorem. Integral Equations and Operator Theory, 90(3), 1-24.
[5] Kurasov, P. and Suhr, R. (2018). Schrödinger operators on graphs and geometry. III. General vertex conditions and counterexamples. Journal of Mathematical Physics, 59(10), 102104, 21 pp.