
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

GENELLEŞTİRİLMİŞ PELL VE GENELLEŞTİRİLMİŞ PELL-LUCAS SAYILARI ÜZERİNE

Hişyar ATSIZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2024

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Hişyar ATSIZ

11/06/2024

GENELLEŞTİRİLMİŞ PELL VE GENELLEŞTİRİLMİŞ PELL-LUCAS SAYILARI ÜZERİNE

(Yüksek Lisans Tezi)

Hişyar ATSIZ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2024

ÖZET

Bu çalışmada, Pell ve Pell-Lucas sayılarının mevcut olan genelleştirmelerinden farklı bir genelleştirme elde edilmiştir. Yeni bu Genelleştirilmiş Pell ve Genelleştirilmiş Pell-Lucas sayı dizileri tanımlanmış, bu diziler için Binet formülleri, Üretici fonksiyonları, açık toplam formülü, ilk n terimler toplamı, tek indisli ilk n terimler toplamı, çift indisli ilk n terimler toplamı, alternatif toplam, Cassini özdeşliği, Catalan özdeşliği ve d'Ocagne özdeşliği verilmiştir. Ayrıca Genelleştirilmiş Pell ve Genelleştirilmiş Pell-Lucas sayılar için determinant özdeşliğinin bazı eşitlikleri verilmiştir.

Bilim Kodu : 20401

Anahtar Kelimeler : Pell sayıları, Pell-Lucas sayıları, Genelleştirilmiş Pell sayıları, Genelleştirilmiş Pell-Lucas sayılları

Sayfa Adedi : 75

Danışman : Prof. Dr. Dursun TAŞCI

ON GENERALIZED PELL AND PELL-LUCAS NUMBERS

(M. Sc. Thesis)

Hişyar ATSIZ

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2024

ABSTRACT

In this study, a generalization different from the existing generalizations of Pell and Pell-Lucas numbers has been obtained. These new Generalized Pell and Generalized Pell-Lucas number sequences have been defined and Binet's formulas for these sequences, Generator functions, explicit sum formula, sum of first n terms, sum of first n terms with odd index, sum of first n terms with double index, alternative sum, Cassini identity, Catalan identity and d'Ocagne identity are given. Additionally, some equations of determinant identity for Generalized Pell and Generalized Pell-Lucas numbers are given.

Science Code : 20401

Key Words : Pell numbers, Pell-Lucas numbers, generalized Pell numbers, generalized Pell-Lucas numbers

Page Number : 75

Supervisor : Prof. Dr. Dursun TAŞCI

TEŞEKKÜR

Akademik çalışmalarım boyunca her zaman yol gösterici olan, tecrübesinden fazlasıyla istifade ettiğim, yaşadığım her zorlukta yardımlarını, desteklerini, bilgi birikimini esirgemeyen değerli hocam Sayın Prof. Dr. Dursun TAŞCI' ya sonsuz teşekkür ederim. Bilgi ve tecrübeleriyle çalışmalarımda desteklerini esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Naim TUĞLU' ya çok teşekkür ederim. Eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen, her zaman yanımda olan kıymetli annem Sariye ATSIZ, kıymetli babam Sabri ATSIZ ve sevgili kardeşlerime çok teşekkür ederim. Ayrıca yüksek lisans eğitimimi destekleyen TÜBİTAK BİDEB'e teşekkürlerimi borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

ÇİZELGELERİN LİSTESİ viii

SİMGELER VE KISALTMALAR iix

1. GİRİŞ 1

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ PELL DİZİSİ 5

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ PELL-LUCAS DİZİSİ 37

4. SONUÇ 71

KAYNAKLAR 73

ÖZGEÇMİŞ 75

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

Çizelge 2.1. r-Toplam pell sayıları 6

Çizelge 3.1 r-toplam Pell-Lucas sayıları..... 38

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
F_n	n. Fibonacci Sayısı
L_n	n. Lucas Sayısı
$P_r(t)$	r-Toplam Pell Sayılar İçin Üreteç Fonksiyonu
$Q_{n,r}$	n.r-Toplam Pell-Lucas Sayısı
Q_n	n. Pell-Lucas Sayısı
$Q_r(t)$	r-Toplam Pell-Lucas Sayılar İçin Üreteç Fonksiyonu
$\lfloor n \rfloor$	n sayısının taban fonksiyonu
$p_{n,r}$	n. r-Toplam Pell sayısı
p_n	n. Pell Sayısı
$\{F_n\}$	Fibonacci Dizisi
$\{L_n\}$	Lucas Dizisi
$\{P_{n,r}\}$	r-Toplam Pell Dizisi
$\{Q_{n,r}\}$	r-Toplam Pell-Lucas Dizisi
$\{Q_n\}$	Pell-Lucas Dizisi
$\{p_n\}$	Pell Dizisi

1. GİRİŞ

Bu bölümde Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell-Lucas sayılarının tanımı ve bazı özellikleri üzerinde durulmuştur.

1.1. Tanım (Fibonacci Dizisi)

$F_1 = 0, F_2 = 1$ ve $n \geq 3$ için $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, indirgenme bağıntısı ile verilen $\{F_n\}_{n\geq 1}$ şeklindeki tamsayı dizisine Fibonacci dizisi denir. Fibonacci dizisinde, tüm n doğal sayısına karşılık gelen değere n inci Fibonacci sayısı denir.

Fibonacci sayıları için Binet formülü; $n \geq 1$, için

$$F_n = \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \tag{1.1}$$

olup, burada $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ dir.

Fibanacci sayıları için toplam formülü,

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1, \tag{1.2}$$

olarak verilir [1].

1.2. Tanım (Lucas Dizisi)

$L_1 = 2, L_2 = 1$ ve $n \geq 3$ için $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ indirgenme bağıntısı ile verilen $\{L_n\}_{n\geq 1}$ şeklinde tam sayı dizisine Lucas dizisi denir. Lucas dizisinde, tüm n doğal sayısına karşılık gelen değere n inci Lucas sayısı denir.

Lucas sayıları için Binet formülü; $n \geq 1$, için

$$L_n = \alpha^{n-1} + \beta^{n-1} \tag{1.3}$$

olup, burada $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ dir.

Lucas sayıları için toplam formülü;

$$\sum_{i=1}^{n} L_i = L_{n+2} - 3, \tag{1.4}$$

olarak verilir [1].

1.3. Tanım (Pell Dizisi)

$p_1 = 0, p_2 = 1$ ve $n \geq 3$ için $p_n = 2p_{n-1} + p_{n-2}$ indirgenme bağıntısı ile verilen $\{p_n\}_{n\geq 1}$ şeklinde tam sayı dizisine Pell dizisi denir. Pell dizisinde, tüm n doğal sayısına karşılık gelen değere n inci Pell sayısı denir.

Pell sayıları için Binet formülü; $n \geq 1$ için

$$p_n = \frac{\gamma^{n-1} - \mu^{n-1}}{\gamma - \mu} \tag{1.5}$$

olup, burada $\gamma = 1 + \sqrt{2}$ ve $\mu = 1 - \sqrt{2}$ dir.

Pell sayıları için toplam formülü;

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{1}{2}(p_{n+1} + p_n - 1), \tag{1.6}$$

olarak verilir [2].

1.4. Teorem

$n, m \in Z^+,\ n \geq 1$ ve $n \geq m$ için

$$p_{n+m} = p_{n-1}p_m + p_n p_{m+1} \tag{1.7}$$

dır [2].

1.5. Tanım (Pell-Lucas Dizisi)

$Q_1 = 2\,, Q_2 = 2$ ve $n \geq 3$ için $Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$ indirgenme bağıntısı ile verilen $\{Q_n\}_{n\geq 1}$ şeklinde tam sayı dizisine Pell-Lucas dizisi denir. Pell-Lucas dizisinde, tüm n doğal sayısına karşılık gelen değere n inci Pell-Lucas sayısı denir.

Pell-Lucas sayıları için Binet formülü; $n \geq 1$ için

$$Q_n = \gamma^{n-1} + \mu^{n-1} \tag{1.8}$$

olup, burada $\gamma = 1 + \sqrt{2}\ ve\ \mu = 1 - \sqrt{2}$ dir.

Pell-Lucas sayısının ilk n terimler toplamı;

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i = \frac{1}{2}(Q_{n+1} + Q_n - 2) \tag{1.9}$$

dır [2].

1.6. Teorem

$n, m \in Z^+$ ve $n, m \geq 1$ için

$$Q_{n+m} = Q_n p_{m+1} + Q_{n-1}p_m \tag{1.10}$$

dir [3].

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ PELL DİZİSİ

Bu bölümde r-toplam Pell sayısının tanımı, özellikleri, Binet formülü, Üreteç fonksiyonu ve determinant özdeşliği verilecektir.

2.1. Tanım

r-toplam Pell dizisinin n inci terimi $p_{n,r}$ olmak üzere,

$$p_{n,r} = p_n + p_{n+1} + p_{n+2} + \cdots + p_{n+r-1} \tag{2.1}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.1' den ilk terim

$$p_{1,r} = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_r = \frac{1}{2}(p_{r+1} + p_r - 1)$$

ve ikinci terim

$$p_{2,r} = p_2 + p_3 + p_4 + \cdots + p_{r+1} = \frac{1}{2}(p_{r+2} + p_{r+1} - 1)$$

Pell dizisi gibi r-toplam Pell dizisi indirgenme bağıntısını sağlar.

$p_{1,r} = \frac{1}{2}(p_{r+1} + p_r - 1), p_{2,r} = \frac{1}{2}(p_{r+2} + p_{r+1} - 1)$ başlangıç koşulları ile $n \geq 3$ için

$$p_{n,r} = 2p_{n-1,r} + p_{n-2,r} \tag{2.2}$$

indirgenme bağıntısı ile verilen $\{P_{n,r}\}_{n,r\geq 1}$ şeklindeki tamsayı dizisine r-toplam Pell dizisi denir. Bu dizide, her n, r pozitif tamsayılarına karşılık gelen değere r-toplam Pell sayısı denir. $p_{n,r}$'nin birkaç değeri çizelgede verilmiştir.

Çizelge 2.1. r-Toplam pell sayıları

r	$p_{1,r}$	$p_{2,r}$	$p_{3,r}$	$p_{4,r}$	$p_{5,r}$	$p_{6,r}$	$p_{7,r}$	$p_{8,r}$	$p_{9,r}$
1	0	1	2	5	12	29	70	169	408
2	1	3	7	17	41	99	239	577	1393
3	3	8	19	46	111	268	647	1562	3771
4	8	20	48	116	280	676	1632	3940	9512
5	20	49	118	285	688	1661	4010	9681	23372
6	49	119	287	693	1673	4039	9751	23541	56833

2.2. Teorem

$n \in Z^+$ için $p_{n,3} = 2p_{n,2} + p_{n+1}$

dir.

İspat

(2.1) 'den

$$\begin{aligned} p_{n,3} &= p_n + p_{n+1} + p_{n+2} \\ &= p_n + p_{n+1} + 2p_{n+1} + p_n \\ &= 2p_n + 3p_{n+1} \\ &= 2p_n + 2p_{n+1} + p_{n+1} \\ &= 2(p_n + p_{n+1}) + p_{n+1} \\ &= 2p_{n,2} + p_{n+1} \end{aligned}$$

dir.

2.3. Teorem

r-toplam Pell sayıların n inci terimi $p_{n,r}$ ve $r \geq 1$ için

$$p_{n,r} = \frac{1}{2}(p_{n+r} + p_{n+r-1}) - \frac{1}{2}(p_n + p_{n-1}) \qquad (2.3)$$

dir.

İspat

İndirgenme bağıntısı (2.2) ve (2.1) denkleminden;

$$\begin{aligned} p_{n,r} &= 2p_{n-1,r} + p_{n-2,r} \\ &= 2(p_{n-1} + p_n + \cdots + p_{n+r-2}) + (p_{n-2} + p_{n-1} + \cdots + p_{n+r-3}) \\ &= 2(p_1 + \mathrm{p}_2 + \cdots + \mathrm{p}_{\mathrm{n+r-2}}) - 2(\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2 + \cdots + \mathrm{p}_{\mathrm{n-2}}) \\ &\quad +(\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2 + \cdots + \mathrm{p}_{\mathrm{n+r-3}}) - (\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2 + \cdots + \mathrm{p}_{\mathrm{n-3}}) \end{aligned}$$

(1.6) denkleminden;

$$\begin{aligned} p_{n,r} &= 2\frac{1}{2}(\mathrm{p}_{\mathrm{n+r-1}} + \mathrm{p}_{\mathrm{n+r-2}} - 1) - 2\frac{1}{2}(\mathrm{p}_{\mathrm{n-1}} + \mathrm{p}_{\mathrm{n-2}} - 1) + \frac{1}{2}(\mathrm{p}_{\mathrm{n+r-2}} + \mathrm{p}_{\mathrm{n+r-3}} - 1) \\ &\quad - \frac{1}{2}(\mathrm{p}_{\mathrm{n-2}} + \mathrm{p}_{\mathrm{n-3}} - 1) \\ &= \mathrm{p}_{\mathrm{n+r-1}} + \mathrm{p}_{\mathrm{n+r-2}} - \mathrm{p}_{\mathrm{n-1}} - \mathrm{p}_{\mathrm{n-2}} + \frac{1}{2}\mathrm{p}_{\mathrm{n+r-2}} + \frac{1}{2}\mathrm{p}_{\mathrm{n+r-3}} - \frac{1}{2}\mathrm{p}_{\mathrm{n-2}} - \frac{1}{2}\mathrm{p}_{\mathrm{n-3}} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{p}_{\mathrm{n+r}} + \frac{1}{2}\,\mathrm{p}_{\mathrm{n+r-1}} - \frac{1}{2}\mathrm{p}_{\mathrm{n}} - \frac{1}{2}\mathrm{p}_{\mathrm{n-1}} \\ &= \frac{1}{2}(\mathrm{p}_{\mathrm{n+r}} + \mathrm{p}_{\mathrm{n+r-1}}) - \frac{1}{2}(\mathrm{p}_{\mathrm{n}} + \mathrm{p}_{\mathrm{n-1}}) \end{aligned}$$

2.4. Teorem

Aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\mathrm{p}_{\mathrm{n,r}} = \mathrm{p}_{\mathrm{n}} \sum_{i=1}^{r} \mathrm{p}_{\mathrm{i}} + \mathrm{p}_{\mathrm{n-1}} \sum_{i=1}^{r-1} \mathrm{p}_{\mathrm{i}}$$

İspat

Teorem 2.3’ ten;

$$\mathrm{p}_{\mathrm{n,r}} = \frac{1}{2}(\mathrm{p}_{\mathrm{n+r}} + \mathrm{p}_{n+r-1}) - \frac{1}{2}(\mathrm{p}_{\mathrm{n}} + \mathrm{p}_{\mathrm{n-1}})$$

ve (1.7)'den;

$$\begin{aligned} \mathrm{p_{n,r}} &= \frac{1}{2}(p_{n-1}p_r + p_n p_{r+1} + p_{n-1}p_{r-1} + p_n p_r) - \frac{1}{2}(p_n + p_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2}[(p_n p_{r+1} + p_n p_r - p_n) + (p_{n-1}p_r + p_{n-1}p_{r-1} - p_{n-1})] \\ &= \frac{1}{2}[p_n(p_{r+1} + p_r - 1) + p_{n-1}(p_r + p_{r-1} - 1)] \\ &= p_n \frac{1}{2}(p_{r+1} + p_r - 1) + p_{n-1}\frac{1}{2}(p_r + p_{r-1} - 1) \end{aligned}$$

(1.6) denkleminden;

$$p_{n,r} = p_n \sum_{i=1}^{r} p_i + p_{n-1} \sum_{i=1}^{r-1} p_i$$

dir.

2.5. Teorem

Aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$p_{n,r} + p_{n+1,r} + p_{n+3,r} = 3p_{n+2,r}$$

İspat

$$\begin{aligned} p_{n,r} + p_{n+1,r} + p_{n+3,r} &= p_{n,r} + p_{n+1,r} + \left(p_{n+1,r} + 2p_{n+2,r}\right) \\ &= \left(p_{n,r} + 2p_{n+1,r}\right) + 2p_{n+2,r} \\ &= p_{n+2,r} + 2p_{n+2,r} \\ &= 3p_{n+2,r} \end{aligned}$$

dir.

2.6. Teorem

Aşağıdaki eşitlik $n \in Z^+$ ve $n \geq 2$ için sağlanır.

$$\sum_{k=2}^{n} p_{k,r}^2 = \frac{1}{2}\left(p_{n,r}p_{n+1,r} - p_{1,r}p_{2,r}\right)$$

İspat

$p_{n,r} = \frac{1}{2}p_{n+1,r} - \frac{1}{2}p_{n-1,r}$ olduğundan;
$p_{n,r}^2 = \frac{1}{2}p_{n,r}p_{n+1,r} - \frac{1}{2}p_{n,r}p_{n-1,r}$ dir.

Buradan;

$$p_{2,r}^2 = \frac{1}{2}p_{3,r}p_{2,r} - \frac{1}{2}p_{2,r}p_{1,r}$$
$$p_{3,r}^2 = \frac{1}{2}p_{4,r}p_{3,r} - \frac{1}{2}p_{3,r}p_{2,r}$$
$$p_{4,r}^2 = \frac{1}{2}p_{5,r}p_{4,r} - \frac{1}{2}p_{4,r}p_{3,r}$$
$$p_{n,r}^2 = \frac{1}{2}p_{n+1,r}p_{n,r} - \frac{1}{2}p_{n,r}p_{n-1,r}$$

Taraf tarafa toplarsak;

$$p_{2,r}^2 + p_{3,r}^2 + p_{4,r}^2 + \cdots + p_{n,r}^2 = \frac{1}{2}p_{n+1,r}p_{n,r} - \frac{1}{2}p_{1,r}p_{2,r}$$

elde edilir.

2.7. Teorem

$n \in Z^+$ ve $n \geq 2$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$p_{n,r}^2 - 4p_{n-1,r}^2 = \mathrm{p_{n-2,r}}\left(\mathrm{p_{n,r}} + 2\mathrm{p_{n-1,r}}\right)$

İspat

$2\mathrm{p_{n-1,r}} = \mathrm{p_{n,r}} - \mathrm{p_{n-2,r}}$ olduğundan;

$$4\mathrm{p}_{\mathrm{n-1,r}}^2 = 2\mathrm{p_{n,r}p_{n-1,r}} - 2\mathrm{p_{n-2,r}p_{n-1,r}}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{\mathrm{n,r}}^2 - 4\mathrm{p}_{\mathrm{n-1,r}}^2 &= \mathrm{p}_{\mathrm{n,r}}^2 - 2\mathrm{p_{n,r}p_{n-1,r}} + 2\mathrm{p_{n-2,r}p_{n-1,r}} \\ &= \mathrm{p_{n,r}}\left(\mathrm{p_{n,r}} - 2\mathrm{p_{n-1,r}}\right) + 2\mathrm{p_{n-2,r}p_{n-1,r}} \\ &= \mathrm{p_{n,r}p_{n-2,r}} + 2\mathrm{p_{n-2,r}p_{n-1,r}} \\ &= \mathrm{p_{n-2,r}}\left(\mathrm{p_{n,r}} + 2\mathrm{p_{n-1,r}}\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

2.8. Teorem (Binet Formülü)

r-toplam Pell dizisinin n inci terimi $\mathrm{p_{n,r}}$ olmak üzere,

$$\mathrm{p_{n,r}} = \frac{1}{\gamma - \mu}\left[\left(\mathrm{p_{2,r}} - \mu\mathrm{p_{1,r}}\right)\gamma^{n-1} - \left(\mathrm{p_{2,r}} - \gamma\mathrm{p_{1,r}}\right)\mu^{n-1}\right] \qquad (2.4)$$

olup, burada $\gamma = 1 + \sqrt{2}$ ve $\mu = 1 - \sqrt{2}$ dir.

İspat

$n \geq 2$ olsun. r-toplam Pell sayıların indirgenme bağıntısı olarak tanımlanır.

$p_{1,r} = \frac{1}{2}(p_{r+1} + p_r - 1)$ ve $p_{2,r} = \frac{1}{2}(p_{r+2} + p_{r+1} - 1)$ başlangıç koşulları ile

$r > 0$ için $p_{n,r} = 2p_{n-1,r} + p_{n-2,r}$ indirgenme bağıntısının karakteristik denklemi $\delta^2 - 2\delta - 1 = 0$ dir. Bu denklemin kökleri;

$\gamma = 1 + \sqrt{2}$ ve $\mu = 1 - \sqrt{2}$

olup bu kökler reel ve farklıdır. Dolaysıyla indirgenme bağıntısının çözümü şu şekildedir.

$$p_{n,r} = A\gamma^n + B\mu^n \qquad (2.5)$$

Burada A ve B sabittir.

(2.5)' te $n = 1$ ve $n = 2$ yazılırsa;

$$A\gamma + B\mu = p_{1,r}$$
$$A\gamma^2 + B\mu^2 = p_{2,r}$$

Sırasıyla A ve B katsayıları aşağıdaki şekilde bulunur.

$$A = \frac{p_{2,r} - \mu p_{1,r}}{\gamma(\gamma - \mu)}$$

ve

$$B = \frac{\gamma p_{1,r} - p_{2,r}}{\mu(\gamma - \mu)}$$

2.9. Sonuç

r-toplam Pell dizisinin n inci terimi, $p_{n,r} = p_{2,r}p_n + p_{1,r}p_{n-1}$ eşitliğini sağlar.

İspat

Binet formülü (2.4)'den;

$p_{n,r} = \frac{1}{\gamma-\mu}\left[p_{2,r}(\gamma^{n-1} - \mu^{n-1}) - p_{1,r}(\gamma\mu)(\gamma^{n-2} - \mu^{n-2})\right]$ dir.

Burada $\gamma = 1 + \sqrt{2}$, $\mu = 1 - \sqrt{2}$ ve $\gamma\mu = -1$ olduğundan;

$$p_{n,r} = \frac{1}{\gamma - \mu}\left[p_{2,r}(\gamma^{n-1} - \mu^{n-1}) + p_{1,r}(\gamma^{n-2} - \mu^{n-2})\right]$$
$$= p_{2,r}p_n + p_{1,r}p_{n-1}$$

2.10. Sonuç (Binet formülü)

n inci Pell sayısı p_n açıkça verilir.

$p_n = \frac{1}{\gamma-\mu}(\gamma^{n-1} - \mu^{n-1})$ dir.

Burada $\gamma = 1 + \sqrt{2}$ ve $\mu = 1 - \sqrt{2}$

2.11. Sonuç

Ardışık r-toplam Pell sayılarının oranının dizisi, $\frac{p_{n+1,r}}{p_{n,r}}, 1 + \sqrt{2}$ 'ye yakınsar, yani;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1,r}}{p_{n,r}} = \gamma = 1 + \sqrt{2}$$

dir.

İspat

Binet formülü (2.4)'den;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1,r}}{p_{n,r}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\gamma-\mu}\left[(\mathrm{p}_{2,\mathrm{r}} - \mu\mathrm{p}_{1,\mathrm{r}})\gamma^n - (\mathrm{p}_{2,\mathrm{r}} - \gamma\mathrm{p}_{1,\mathrm{r}})\mu^n\right]}{\frac{1}{\gamma-\mu}\left[(\mathrm{p}_{2,\mathrm{r}} - \mu\mathrm{p}_{1,\mathrm{r}})\gamma^{n-1} - (\mathrm{p}_{2,\mathrm{r}} - \gamma\mathrm{p}_{1,\mathrm{r}})\mu^{n-1}\right]}$$

burada $\gamma = 1 + \sqrt{2}$ ve $\mu = 1 - \sqrt{2}$ dir.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1,r}}{p_{n,r}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[(\mathrm{p}_{2,\mathrm{r}} - \mu\mathrm{p}_{1,\mathrm{r}})\gamma^n - (\mathrm{p}_{2,\mathrm{r}} - \gamma\mathrm{p}_{1,\mathrm{r}})\mu^n\right]}{\left[(\mathrm{p}_{2,\mathrm{r}} - \mu\mathrm{p}_{1,\mathrm{r}})\gamma^{n-1} - (\mathrm{p}_{2,\mathrm{r}} - \gamma\mathrm{p}_{1,\mathrm{r}})\mu^{n-1}\right]}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\gamma^{n-1}\left[\left(\mathrm{p}_{2,\mathrm{r}} - \mu\mathrm{p}_{1,\mathrm{r}}\right)\gamma - \left(\mathrm{p}_{2,\mathrm{r}} - \gamma\mathrm{p}_{1,\mathrm{r}}\right)\mu^{n}\gamma^{-(n-1)}\right]}{\gamma^{n-1}\left[\left(\mathrm{p}_{2,\mathrm{r}} - \mu\mathrm{p}_{1,\mathrm{r}}\right) - \left(\mathrm{p}_{2,\mathrm{r}} - \gamma\mathrm{p}_{1,\mathrm{r}}\right)\mu^{n-1}\gamma^{-(n-1)}\right]}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\mathrm{p}_{2,\mathrm{r}} - \mu\mathrm{p}_{1,\mathrm{r}}\right)\gamma - \left(\mathrm{p}_{2,\mathrm{r}} - \gamma\mathrm{p}_{1,\mathrm{r}}\right)\left(\frac{\mu}{\gamma}\right)^{n-1}\mu}{\left(\mathrm{p}_{2,\mathrm{r}} - \mu\mathrm{p}_{1,\mathrm{r}}\right) - \left(\mathrm{p}_{2,\mathrm{r}} - \gamma\mathrm{p}_{1,\mathrm{r}}\right)\left(\frac{\mu}{\gamma}\right)^{n-1}}$$

$\left|\frac{\mu}{\gamma}\right| < 1$ olduğundan $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\mu}{\gamma}\right)^{n-1} = 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1,r}}{p_{n,r}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\mathrm{p}_{2,\mathrm{r}} - \mu\mathrm{p}_{1,\mathrm{r}}\right)\gamma}{\left(\mathrm{p}_{2,\mathrm{r}} - \mu\mathrm{p}_{1,\mathrm{r}}\right)} = \gamma = 1 + \sqrt{2}$$

2.12. Teorem (Üreteç fonksiyonu)

r-toplam Pell sayılar için üreteç fonksiyonu $P_r(t)$ olmak üzere

$$P_r(t) = \frac{p_{1,r}t + t^2\left(p_{2,r} - 2p_{1,r}\right)}{1 - 2t - t^2} \tag{2.6}$$

dir.

İspat

r-toplam üretici Pell sayılar için üreteç fonksiyon $P_r(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{n,r}t^n$ olsun.

$$p_{n,r} = 2p_{n-1,r} + p_{n-2,r}$$

olduğunu biliyoruz.

$$\sum_{n\geq 3} p_{n,r}t^n = \sum_{n\geq 3} 2p_{n-1,r}t^n + \sum_{n\geq 3} p_{n-2,r}\,t^n$$

$$\sum_{n\geq 1} p_{n,r}t^n - p_{2,r}t^2 - p_{1,r}t = 2t\sum_{n\geq 2} p_{n,r}t^n + t^2\sum_{n\geq 1} p_{n,r}t^n$$

$$\sum_{n\geq 1} p_{n,r}t^n - p_{2,r}t^2 - p_{1,r}t = 2t\left(\sum_{n\geq 1} p_{n,r}t^n - p_{1,r}t\right) + t^2\sum_{n\geq 1} p_{n,r}t^n$$

$P_r(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{n,r}t^n$ yerine yazılırsa;

$$P_r(t) - p_{2,r}t^2 - p_{1,r}t = 2t\big(P_r(t) - p_{1,r}t\big) + t^2P_r(t)$$

$P_r(t)$, yalnız bırakılırsa;

$$P_r(t) = \frac{p_{1,r}t + t^2\big(p_{2,r} - 2p_{1,r}\big)}{1 - 2t - t^2}$$

elde edilir.

2.13. Teorem

$n \in Z^+$ ve $n \geq 1$ olmak üzere;

a) r-toplam Pell sayılarının ilk n terimler toplamı;

$$\sum_{k=1}^{n} p_{k,r} = -\frac{1}{2}\left(p_{n+1,r} - p_{n+2,r} + p_{2,r} - p_{1,r}\right)$$

dir.

b) r-toplam Pell sayıların tek indisli ilk n terimleri toplam;

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_{2k+1,r} = \frac{1}{2}\big(p_{2n,r} - p_{2,r} + 2p_{1,r}\big)$$

dir.

c) r-toplam Pell sayıların çift indisli ilk n terimlerin toplamı;

$$\sum_{k=1}^{n} p_{2k,r} = \frac{1}{2}\left(p_{2n+1,r} - p_{1,r}\right)$$

dir.

d) $n \in Z^+$ ve $n \geq 1$ için

$$p_{1,r} + p_{4,r} + p_{7,r} + \cdots + p_{3n-2,r} = \frac{1}{14}\left[5\mathrm{p}_{3\mathrm{n,r}} - p_{3n+1,r} + 11p_{1,r} - 5p_{2,r}\right]$$

dir.

e) $n \in Z^+$ ve $n \geq 1$ için

$$p_{2,r} + p_{5,r} + p_{8,r} + \cdots + p_{3n-1,r} = \frac{1}{14}\left(-p_{3n+2,r} + 5p_{3n+1,r} + p_{2,r} - 5p_{1,r}\right)$$

dir.

f) $n \in Z^+$ ve $n \geq 1$ için

$$p_{3,r} + p_{6,r} + p_{9,r} + \cdots + p_{3n,r} = \frac{1}{14}\left[-\mathrm{p}_{3\mathrm{n+3,r}} + 5p_{3n+2,r} + p_{3,r} - 5p_{2,r}\right]$$

dir.

İspat

a) Binet formülü (2.4)'den;

$$\sum_{k=1}^{n} p_{k,r} = \frac{1}{\gamma-\mu}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\gamma^0 - \left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\mu^0 + \left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\gamma^1 \right.$$
$$\left. - \left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\mu^1 + \cdots + \left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\gamma^{n-1} \right.$$
$$\left. - \left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\mu^{n-1}\right]$$
$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)(1+\gamma+\cdots+\gamma^{n-1}) - \left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)(1+\mu+\cdots+\mu^{n-1})\right]$$
$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\frac{\gamma^n-1}{\gamma-1} - \left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\frac{\mu^n-1}{\mu-1}\right]$$

$\gamma-1 = 1-\mu$ ve $\mu-1 = 1-\gamma$ olduğundan;

$$\sum_{k=1}^{n} p_{k,r} = \frac{1}{\gamma-\mu}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\frac{\gamma^n-1}{1-\mu} - \left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\frac{\mu^n-1}{1-\gamma}\right]$$
$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\left[\frac{\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)(\gamma^n-1)(1-\gamma) - \left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)(\mu^n-1)(1-\mu)}{1-\gamma-\mu-\gamma\mu}\right]$$

$\gamma\mu = -1$ olduğundan;

$$\sum_{k=1}^{n} p_{k,r} = -\frac{1}{2(\gamma-\mu)}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)(\gamma^n-\gamma^{n+1}+\gamma-1) \right.$$
$$\left. - \left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)(\mu-\mu^{n+1}+\mu-1)\right]$$
$$= -\frac{1}{2(\gamma-\mu)}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\gamma^n - \left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\mu^n \right.$$
$$\left. - \left(\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\gamma^{n+1} - \left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\mu^{n+1}\right) \right.$$
$$\left. + \left(\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\gamma - \left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\mu\right) \right.$$
$$\left. - \left(\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right) - \left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\right)\right]$$
$$= -\frac{1}{2}\left(p_{n+1,r} - p_{n+2,r} + p_{2,r} - p_{1,r}\right)$$

elde edilir.

b) Binet formülü (2.4)'den;

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_{2k+1,r} = \frac{1}{\gamma-\mu}[(p_{2,r}-\mu p_{1,r})\gamma^0 - (p_{2,r}-\gamma p_{1,r})\mu^0 + (p_{2,r}-\mu p_{1,r})\gamma^2$$
$$-(p_{2,r}-\gamma p_{1,r})\mu^2 + \cdots + (p_{2,r}-\mu p_{1,r})\gamma^{2n-2} - (p_{2,r}-\gamma p_{1,r})\,\mu^{2n-2}]$$
$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\left[(p_{2,r}-\mu p_{1,r})\frac{\gamma^{2n}-1}{\gamma^2-1} - (p_{2,r}-\gamma p_{1,r})\frac{\mu^{2n}-1}{\mu^2-1}\right]$$

$\gamma^2-1=2\gamma$ ve $\mu^2-1=2\mu$ olduğundan;

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_{2k+1,r} = \frac{1}{\gamma-\mu}\left[(p_{2,r}-\mu p_{1,r})\frac{\gamma^{2n}-1}{2\gamma} - (p_{2,r}-\gamma p_{1,r})\frac{\mu^{2n}-1}{2\mu}\right]$$
$$= \frac{1}{2(\gamma-\mu)}[(p_{2,r}-\mu p_{1,r})\gamma^{2n-1} - (p_{2,r}-\gamma p_{1,r})\mu^{2n-1}]$$
$$-\frac{1}{2(\gamma-\mu)}[(p_{2,r}-\mu p_{1,r}) - (p_{2,r}-\gamma p_{1,r})]$$
$$= \frac{1}{2}(p_{2n,r}-p_{0,r})$$
$$= \frac{1}{2}(p_{2n,r}-p_{2,r}+2p_{1,r})$$

elde edilir.

c) Binet formülü (2.4)'den;

$$\sum_{k=1}^{n} p_{2k,r} = \frac{1}{\gamma-\mu}[(p_{2,r}-\mu p_{1,r})\gamma - (p_{2,r}-\gamma p_{1,r})\,\mu + (p_{2,r}-\mu p_{1,r})\gamma^3$$
$$-(p_{2,r}-\gamma p_{1,r})\mu^3 + \cdots + (p_{2,r}-\mu p_{1,r})\gamma^{2n-1} - (p_{2,r}-\gamma p_{1,r})\mu^{2n-1}]$$
$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\left[(p_{2,r}-\mu p_{1,r})\frac{\gamma(\gamma^{2n}-1)}{\gamma^2-1} - (p_{2,r}-\gamma p_{1,r})\frac{\mu(\mu^{2n}-1)}{\mu^2-1}\right]$$

$\gamma^2-1=2\gamma$ ve $\mu^2-1=2\mu$ olduğundan;

$$\sum_{k=1}^{n} p_{2k,r} = \frac{1}{\gamma-\mu}\left[(p_{2,r}-\mu p_{1,r})\frac{\gamma(\gamma^{2n}-1)}{2\gamma} - (p_{2,r}-\gamma p_{1,r})\frac{\mu(\mu^{2n}-1)}{2\mu}\right]$$

$$= \frac{1}{2(\gamma-\mu)}\left[(p_{2,r}-\mu p_{1,r})(\gamma^{2n}-1) - (p_{2,r}-\gamma p_{1,r})(\mu^{2n}-1)\right]$$

$$= \frac{1}{2(\gamma-\mu)}\left[(p_{2,r}-\mu p_{1,r})\gamma^{2n} - (p_{2,r}-\gamma p_{1,r})\mu^{2n}\right]$$

$$- \frac{1}{2(\gamma-\mu)}\left[(p_{2,r}-\mu p_{1,r}) - (p_{2,r}-\gamma p_{1,r})\right]$$

$$= \frac{1}{2}(p_{2n+1,r}-p_{1,r})$$

elde edilir.

d) Binet formülü (2.4)'den;

$$\sum_{k=1}^{n} p_{3k-2,r} = \frac{1}{\gamma-\mu}[\,(p_{2,r}-\mu p_{1,r}) - (p_{2,r}-\gamma p_{1,r}) + (p_{2,r}-\mu p_{1,r})\gamma^{3}$$

$$- (p_{2,r}-\gamma p_{1,r})\mu^{3} + \cdots + (p_{2,r}-\mu p_{1,r})\gamma^{3n-3} - (p_{2,r}-\gamma p_{1,r})\mu^{3n-3}]$$

$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\left[(p_{2,r}-\mu p_{1,r})(1+\gamma^{3}+\cdots+\gamma^{3n-3}) - (p_{2,r}-\gamma p_{1,r})(1+\mu^{3}+\cdots+\mu^{3n-3})\right]$$

$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\left[(p_{2,r}-\mu p_{1,r})\frac{\gamma^{3n}-1}{\gamma^{3}-1} - (p_{2,r}-\gamma p_{1,r})\frac{\mu^{3n}-1}{\mu^{3}-1}\right]$$

$\gamma^{3}-1 = 1+5\gamma$ ve $\mu^{3}-1 = 1+5\mu$ olduğundan;

$$\sum_{k=1}^{n} p_{3n-2,r} = \frac{1}{\gamma-\mu}\left[(p_{2,r}-\mu p_{1,r})\frac{\gamma^{3n}-1}{1+5\gamma} - (p_{2,r}-\gamma p_{1,r})\frac{\mu^{3n}-1}{1+5\mu}\right]$$

$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\left[\frac{(p_{2,r}-\mu p_{1,r})(\gamma^{3n}-1)(1+5\mu) - (p_{2,r}-\gamma p_{1,r})(\mu^{3n}-1)(1+5\gamma)}{(1+5\gamma)(1+5\mu)}\right]$$

$$= \frac{1}{-14(\gamma-\mu)}\left[(p_{2,r}-\mu p_{1,r})(\gamma^{3n}+5\gamma^{3n}\mu-1-5\mu)\right.$$

$$\left. - (p_{2,r}-\gamma p_{1,r})(\mu^{3n}+5\mu^{3n}\gamma-1-5\gamma)\right]$$

$$= -\frac{1}{14(\gamma-\mu)}\left[(p_{2,r}-\mu p_{1,r})\gamma^{3n} - (p_{2,r}-\gamma p_{1,r})\mu^{3n}\right]$$

$$+ \frac{5}{14(\gamma-\mu)}\left[(p_{2,r}-\mu p_{1,r})\gamma^{3n-1} - (p_{2,r}-\gamma p_{1,r})\mu^{3n-1}\right]$$

$$+\frac{1}{14(\gamma-\mu)}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)-\left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\right]$$

$$+\frac{5}{14(\gamma-\mu)}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\mu-\left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\gamma\right]$$

$$=-\frac{1}{14}p_{3n+1,r}+\frac{5}{14}p_{3n,r}+\frac{1}{14}p_{1,r}+\frac{5}{14}\left(p_{1,r}\frac{(\gamma^2-\mu^2)}{\gamma-\mu}-p_{2,r}\frac{\gamma-\mu}{\gamma-\mu}\right)$$

$$=\frac{1}{14}\left(-p_{3n+1,r}+5p_{3n,r}+11p_{1,r}-5p_{2,r}\right)$$

elde edilir.

e) Binet formülü (2.4)'den;

$$\sum_{k=1}^{n}p_{3k-1,r}=\frac{1}{\gamma-\mu}[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\gamma-\left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\mu+\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\gamma^4$$

$$-\left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\mu^4+\cdots+\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\gamma^{3n-2}-\left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\mu^{3n-2}]$$

$$=\frac{1}{\gamma-\mu}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)(\gamma+\gamma^4+\cdots+\gamma^{3n-2})-\left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)(\mu+\mu^4+\cdots+\mu^{3n-2})\right]$$

$$=\frac{1}{\gamma-\mu}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\frac{\gamma(\gamma^{3n}-1)}{\gamma^3-1}-\left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\frac{\mu(\mu^{3n}-1)}{\mu^3-1}\right]$$

$\gamma^3-1=1+5\gamma$ ve $\mu^3-1=1+5\mu$ olduğundan;

$$\sum_{k=1}^{n}p_{3n-1,r}=\frac{1}{\gamma-\mu}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\frac{\gamma^{3n+1}-\gamma}{1+5\gamma}-\left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\frac{\mu^{3n+1}-\mu}{1+5\mu}\right]$$

$$=\frac{1}{\gamma-\mu}\left[\frac{\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)(\gamma^{3n+1}-\gamma)(1+5\mu)-\left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)(\mu^{3n+1}-\mu)(1+5\gamma)}{(1+5\gamma)(1+5\mu)}\right]$$

$$=\frac{1}{-14(\gamma-\mu)}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)(\gamma^{3n+1}+5\gamma^{3n+1}\mu-\gamma-5\gamma\mu)\right.$$

$$\left.-\left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)(\mu^{3n+1}+5\mu^{3n+1}\gamma-\mu-5\gamma\mu)\right]$$

$$=-\frac{1}{14(\gamma-\mu)}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\gamma^{3n+1}-\left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\mu^{3n+1}\right]$$

$$+\frac{5}{14(\gamma-\mu)}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\gamma^{3n}-\left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\mu^{3n}\right]$$

$$+\frac{1}{14(\gamma-\mu)}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\gamma-\left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\mu\right]$$

$$-\frac{5}{14(\gamma-\mu)}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)-\left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{14}p_{3n+2,r}+\frac{5}{14}p_{3n+1,r}+\frac{1}{14}p_{2,r}-\frac{5}{14}p_{1,r}$$

$$=\frac{1}{14}\left(-p_{3n+2,r}+5p_{3n+1,r}+p_{2,r}-5p_{1,r}\right)$$

elde edilir.

f) Binet formülü (2.4)'den;

$$\sum_{k=1}^{n}p_{3k,r}=\frac{1}{\gamma-\mu}[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\gamma^2-\left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\mu^2+\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\gamma^5$$

$$-\left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\mu^5+\cdots+\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\gamma^{3n-1}-\left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\mu^{3n-1}]$$

$$=\frac{1}{\gamma-\mu}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)(\gamma^2+\gamma^5+\cdots+\gamma^{3n-1})-\left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)(\mu^2+\mu^5+\cdots+\mu^{3n-1})\right]$$

$$=\frac{1}{\gamma-\mu}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\frac{\gamma^2(\gamma^{3n}-1)}{\gamma^3-1}-\left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\frac{\mu^2(\mu^{3n}-1)}{\mu^3-1}\right]$$

$\gamma^3-1=1+5\gamma$ ve $\mu^3-1=1+5\mu$ olduğundan;

$$\sum_{k=1}^{n}p_{3n-1,r}=\frac{1}{\gamma-\mu}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\frac{\gamma^{3n+2}-\gamma^2}{1+5\gamma}-\left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\frac{\mu^{3n+2}-\mu^2}{1+5\mu}\right]$$

$$=\frac{1}{\gamma-\mu}\left[\frac{\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)(\gamma^{3n+2}-\gamma^2)(1+5\mu)-\left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)(\mu^{3n+2}-\mu^2)(1+5\gamma)}{(1+5\gamma)(1+5\mu)}\right]$$

$$=\frac{1}{-14(\gamma-\mu)}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)(\gamma^{3n+2}+5\gamma^{3n+2}\mu-\gamma^2-5\gamma^2\mu)\right.$$

$$\left.-\left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)(\mu^{3n+2}+5\mu^{3n+2}\gamma-\mu^2-5\gamma\mu^2)\right]$$

$$=-\frac{1}{14(\gamma-\mu)}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\gamma^{3n+2}-\left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\mu^{3n+2}\right]$$

$$+\frac{5}{14(\gamma-\mu)}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\gamma^{3n+1}-\left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\mu^{3n+1}\right]$$

$$+\frac{1}{14(\gamma-\mu)}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\gamma^2-\left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\mu^2\right]$$

$$-\frac{5}{14(\gamma-\mu)}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\gamma-\left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\mu\right]$$

$$=-\frac{1}{14}p_{3n+3,r}+\frac{5}{14}p_{3n+2,r}+\frac{1}{14}p_{3,r}-\frac{5}{14}p_{2,r}$$

$$= \frac{1}{14}\left(-p_{3n+3,r} + 5p_{3n+2,r} + p_{3,r} - 5p_{2,r}\right)$$

elde edilir.

2.14. Teorem

$n \in Z^+$ ve $n \geq 1$ için

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}p_{k,r} = \frac{(-1)^{n-1}}{2}\left(p_{n+1,r} - p_{n,r}\right) + \frac{3}{2}p_{1,r} - \frac{1}{2}p_{2,r}$$

dir.

İspat

Binet formülü (2.4)'den;

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}p_{k,r}$$

$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\Big[\left(p_{2,r} - \mu p_{1,r}\right) - \left(p_{2,r} - \gamma p_{1,r}\right)$$
$$- \Big(\left(p_{2,r} - \mu p_{1,r}\right)\gamma - \left(p_{2,r} - \gamma p_{1,r}\right)\mu\Big) + \cdots$$
$$+ (-1)^{n+1}\Big(\left(p_{2,r} - \mu p_{1,r}\right)\gamma^{n-1} - \left(p_{2,r} - \gamma p_{1,r}\right)\mu^{n-1}\Big)\Big]$$

$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\Big[\left(p_{2,r} - \mu p_{1,r}\right)\left(1 - \gamma^1 + \cdots + (-1)^{n+1}\gamma^{n-1}\right)$$
$$- \left(p_{2,r} - \gamma p_{1,r}\right)\left(1 - \mu^1 + \cdots + (-1)^{n+1}\mu^{n-1}\right)\Big]$$

$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\left[\left(p_{2,r} - \mu p_{1,r}\right)\frac{(-\gamma)^n - 1}{-\gamma - 1} - \left(p_{2,r} - \gamma p_{1,r}\right)\frac{(-\mu)^n - 1}{-\mu - 1}\right]$$

$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\left[\left(p_{2,r} - \mu p_{1,r}\right)\frac{(-1)^n\gamma^n - 1}{-\gamma - 1} - \left(p_{2,r} - \gamma p_{1,r}\right)\frac{(-1)^n\mu^n - 1}{-\mu - 1}\right]$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{\gamma-\mu}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\frac{\gamma^n}{\gamma+1}-\left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\frac{\mu^n}{\mu+1}\right]$$

$$+\frac{1}{\gamma-\mu}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\frac{1}{\gamma+1}-\left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\frac{1}{\mu+1}\right]$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{\gamma-\mu}\left[\frac{\left(\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)(\gamma^n\mu+\gamma^n)-\left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)(\mu^n\gamma+\mu^n)\right)}{\gamma\mu+\gamma+\mu+1}\right]$$

$$+\frac{1}{\gamma-\mu}\left[\frac{\left(\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)(\mu+1)-\left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)(\gamma+1)\right)}{\gamma\mu+\gamma+\mu+1}\right]$$

$\gamma = 1+\sqrt{2}$ ve $\mu = 1-\sqrt{2}$ olduğundan $\gamma\mu = -1$ ve $\gamma+\mu = 2$ dir.

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}p_{k,r} = \frac{(-1)^{n-1}}{2(\gamma-\mu)}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\gamma^n-\left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\mu^n\right]$$

$$-\frac{(-1)^{n-1}}{2(\gamma-\mu)}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\gamma^{n-1}-\left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\mu^{n-1}\right]$$

$$+\frac{1}{2(\gamma-\mu)}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)-\left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2(\gamma-\mu)}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\mu-\left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\gamma\right]$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{2}\left(p_{n+1,r}-p_{n,r}\right)+\frac{1}{2}p_{1,r}+\frac{1}{2}\left[p_{1,r}\frac{(\gamma^2-\mu^2)}{\gamma-\mu}-p_{2,r}\frac{(\gamma-\mu)}{\gamma-\mu}\right]$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{2}\left(p_{n+1,r}-p_{n,r}\right)+\frac{1}{2}p_{1,r}+\frac{2}{2}p_{1,r}-\frac{1}{2}p_{2,r}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}p_{k,r} = \frac{(-1)^{n-1}}{2}\left(p_{n+1,r}-p_{n,r}\right)+\frac{3}{2}p_{1,r}-\frac{1}{2}p_{2,r}$$

dir.

2.15. Teorem

$n \in Z^+$ ve $n \geq 1$ için

$$p_{2n,r} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k p_{k,r}$$

dir.

İspat

Binet formülü (2.4)'den;

$$p_{2nr} = \frac{1}{\gamma-\mu}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\gamma^{2n-1} - \left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\mu^{2n-1}\right]$$
$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\frac{\gamma^{2n}}{\gamma} - \left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\frac{\mu^{2n}}{\mu}\right]$$

$\gamma^2 = 1+2\gamma$ ve $\mu^2 = 1+2\mu$ olduğundan;

$$p_{2n,r} = \frac{1}{\gamma-\mu}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\frac{(1+2\gamma)^n}{\gamma} - \left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\frac{(1+2\mu)^n}{\mu}\right]$$

$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ olduğundan;

$$p_{2n,r} = \frac{1}{\gamma-\mu}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2\gamma)^k\gamma^{-1} - \left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2\mu)^k\mu^{-1}\right]$$
$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\gamma^{k-1} - \left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\mu^{k-1}\right]$$
$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\gamma^{k-1} - \left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\mu^{k-1}\right]$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\frac{1}{\gamma-\mu}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\gamma^{k-1} - \left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\mu^{k-1}\right]$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k p_{k,r}$$

dir.

2.16. Teorem (Açık Toplam Formülü)

$n \in Z^+$ ve $n \geq 1$ için

$$p_{n,r} = p_{1,r} \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-k-1}{k} 2^{n-2k-1} + (p_{2,r} - 2p_{1,r}) \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor} \binom{n-k-2}{k} 2^{n-2k-2} \qquad (2.7)$$

dir.

Burada $\lfloor n \rfloor$, n'ye eşit ya da n'den küçük en büyük tamsayı

İspat

Üreteç fonksiyonu (2.6)'dan;

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{n,r} = \frac{p_{1,r}t + t^2(p_{2,r} - 2p_{1,r})}{1 - 2t - t^2}$$

$$= t\left[p_{1,r}t + t^2(p_{2,r} - 2p_{1,r})\right](1 - 2t - t^2)^{-1}$$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ olduğundan;

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{n,r}t^n = t\left[p_{1,r} + t(p_{2,r} - 2p_{1,r})\right] \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}(2+t)^{n-1}$$

$$= \left[p_{1,r} + t(p_{2,r} - 2p_{1,r})\right] \sum_{n=1}^{\infty} t^n 2^{n-1} \left(1 + \frac{t}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \left[p_{1,r} + t(p_{2,r} - 2p_{1,r})\right] \sum_{n=1}^{\infty} t^n 2^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{t}{2}\right)^k$$

$$= \left[p_{1,r} + t(p_{2,r} - 2p_{1,r})\right] \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 2^{n-k-1} t^{n+k}$$

$$= \left[p_{1,r} + t(p_{2,r} - 2p_{1,r})\right] \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} 2^{n-k-1} t^{n+k}$$

n yerine n+k+1 yazılırsa;

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{n,r}t^n = \left[p_{1,r} + t\left(p_{2,r} - 2p_{1,r}\right)\right] \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!\,n!} 2^n t^{n+2k+1}$$

n yerine n-2k-1 yazılırsa;

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{n,r}t^n = \left[p_{1,r} + t\left(p_{2,r} - 2p_{1,r}\right)\right] \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n-k-1)!}{k!\,(n-2k-1)!} 2^{n-2k-1} t^n$$

$$= p_{1,r} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1}{k} 2^{n-2k-1} \right] t^n + \left(p_{2,r} - 2p_{1,r}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1}{k} 2^{n-2k-1} \right] t^{n+1}$$

$$= p_{1,r} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1}{k} 2^{n-2k-1} \right] t^n + \left(p_{2,r} - 2p_{1,r}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor} \binom{n-2}{k} 2^{n-2k-2} \right] t^n$$

t^n ‘nin katsayıları eşitlenirse;

$$p_{n,r} = p_{1,r} \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1}{k} 2^{n-2k-1} + \left(p_{2,r} - 2p_{1,r}\right) \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor} \binom{n-2}{k} 2^{n-2k-2}$$

bulunur.

2.17. Teorem

$n \in Z^+$ ve $n \geq 1$ için

$$p_{-n,r} = (-1)^n \left(p_{2,r}p_{n+2} - p_{1,r}p_{n+3}\right)$$

dir

İspat

Binet formülü (2.4)'den;

$$p_{-n,r} = \frac{1}{\gamma-\mu}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\gamma^{-n-1} - \left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\mu^{-n-1}\right]$$
$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\frac{1}{\gamma^{n+1}} - \left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\frac{1}{\mu^{n+1}}\right]$$

$\frac{1}{\gamma} = -\mu$ ve $\frac{1}{\mu} = -\gamma$ olduğundan;

$$p_{-n,r} = \frac{1}{\gamma-\mu}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)(-\mu)^{n+1} - \left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)(-\gamma)^{n+1}\right]$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma-\mu}\left[\left(p_{2,r}-\mu p_{1,r}\right)\mu^{n+1} - \left(p_{2,r}-\gamma p_{1,r}\right)\gamma^{n+1}\right]$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma-\mu}\left[p_{2,r}\mu^{n+1} - p_{1,r}\mu^{n+2} - p_{2,r}\gamma^{n+1} + p_{1,r}\gamma^{n+2}\right]$$
$$= \frac{(-1)^{n+2}}{\gamma-\mu}\left[p_{2,r}(\gamma^{n+1}-\mu^{n+1}) - p_{1,r}(\gamma^{n+2}-\mu^{n+2})\right]$$
$$= (-1)^{n}\left(p_{2,r}p_{n+2} - p_{1,r}p_{n+3}\right)$$

elde edilir.

2.18. Teorem

Tüm $m \geq 0$ ve $n > 0$ için

$p_{n+m,r} = p_{n-1,r}p_m + p_{n,r}p_{m+1}$,

dir.

İspat

Sonuç 2.9'dan;

$p_{n+m,r} = p_{2,r}p_{n+m} + p_{1,r}p_{n+m-1}$

şeklinde yazılır. (1.7)'den;

$$p_{n+m,r} = p_{2,r}(p_{n-1}p_m + p_n p_{m+1}) + p_{1,r}(p_{n-2}p_m + p_{n-1}p_{m+1})$$
$$= p_m(p_{2,r}p_{n-1} + p_{1,r}p_{n-2}) + p_{m+1}(p_{2,r}p_n + p_{1,r}p_{n-1})$$

Sonuç 2.9 tekrar uygulanırsa;

$p_{n+m,r} = p_m p_{n-1,r} + p_{m+1}p_{n,r}$

bulunur.

2.19. Sonuç

Aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

1. $p_{2n,r} = p_{n-1,r}p_n + p_{n,r}p_{n+1}$
2. $p_{2n-1,r} = p_{n-1,r}p_{n-1} + p_{n,r}p_n$
3. $p_{2n-2,r} = p_{n-1,r}p_{n-2} + p_{n,r}p_{n-1}$
4. $p_{2n-k,r} = p_{n-1,r}p_{n-k} + p_{n,r}p_{n-k+1}$

İspat

Teorem 2.18'de m yerine m=n, m=n-1, m=n-2 ve m=n-k+1 yazılırsa sonuçları verir.

2.20. Teorem

$n \in Z^+$ ve $n \geq 2$ için

$$p_{2,r}p_{3,r} + p_{3,r}p_{4,r} + p_{4,r}p_{5,r} + \cdots + p_{2n-1,r}p_{2n,r} = \frac{1}{2}(p_{2n,r}^2 - p_{2,r}^2)$$

dir.

İspat

$n = 2$ için sol taraf;

$$p_{2,r}p_{3,r} + p_{3,r}p_{4,r} = p_{3,r}(p_{2,r} + p_{4,r})$$

Sağ taraf;

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(p_{4,r}^2 - p_{2,r}^2) &= \frac{1}{2}(p_{4,r} - p_{2,r})(p_{4,r} + p_{2,r}) \\ &= \frac{1}{2}2p_{3,r}(p_{4,r} + p_{2,r}) \\ &= p_{3,r}(p_{4,r} + p_{2,r})\end{aligned}$$

n=2 için sağ ve sol taraf eşit, tümevarım adımları içim farz edelim ki n için doğru olsun, n+1 için doğru olduğuna bakalım. Tümevarım hipotezine göre;

$$p_{2,r}p_{3,r} + p_{3,r}p_{4,r} + \cdots + p_{2n-1,r}p_{2n,r} = \frac{1}{2}(p_{2n,r}^2 - p_{2,r}^2)$$

$$\begin{aligned}&p_{2,r}p_{3,r} + p_{3,r}p_{4,r} + \cdots + p_{2n-1,r}p_{2n,r} + p_{2n,r}p_{2n+1,r} + p_{2n+1,r}p_{2n+2,r} \\ &= \frac{1}{2}(p_{2n,r}^2 - p_{2,r}^2) + p_{2n,r}p_{2n+1,r} + p_{2n+1,r}p_{2n+2,r} \\ &= \frac{1}{2}p_{2n,r}^2 - \frac{1}{2}p_{2,r}^2 + p_{2n,r}p_{2n+1,r} + p_{2n+1,r}p_{2n+2,r} \\ &= \frac{1}{2}p_{2n,r}^2 + p_{2n,r}p_{2n+1,r} + p_{2n+1,r}p_{2n+2,r} - \frac{1}{2}p_{2,r}^2 \\ &= p_{2n,r}\left(\frac{1}{2}p_{2n,r} + p_{2n+1,r}\right) + p_{2n+1,r}p_{2n+2,r} - \frac{1}{2}p_{2,r}^2 \\ &= \frac{1}{2}p_{2n,r}p_{2n+2,r} + p_{2n+1,r}p_{2n+2,r} - \frac{1}{2}p_{2,r}^2 \\ &= p_{2n+2,r}\left(\frac{1}{2}p_{2n,r} + p_{2n+1,r}\right) - \frac{1}{2}p_{2,r}^2 \\ &= \frac{1}{2}p_{2n+2,r}^2 - \frac{1}{2}p_{2,r}^2 \\ &= \frac{1}{2}(p_{2n+2,r}^2 - p_{2,r}^2)\end{aligned}$$

dir.

2.21. Lemma

n inci Pell sayısı p_n olarak verilsin.

$$p_n = \frac{p_{2,r}p_{n,r} - p_{1,r}p_{n+1,r}}{p_{2,r}^2 - p_{1,r}p_{3,r}}$$

dir.

İspat

Binet formülü (2.4)'den;

$$p_{2,r}p_{n,r} - p_{1,r}p_{n+1,r} = p_{2,r}\left[\frac{(p_{2,r} - \mu p_{1,r})\gamma^{n-1}}{\gamma - \mu} - \frac{(p_{2,r} - \gamma p_{1,r})\mu^{n-1}}{\gamma - \mu}\right]$$
$$-p_{1,r}\left[\frac{(p_{2,r} - \mu p_{1,r})\gamma^{n}}{\gamma - \mu} - \frac{(p_{2,r} - \gamma p_{1,r})\mu^{n}}{\gamma - \mu}\right]$$
$$= p_{2,r}\left[p_{2,r}\frac{(\gamma^{n-1} - \mu^{n-1})}{\gamma - \mu} + p_{1,r}\frac{(\gamma^{n-2} - \mu^{n-2})}{\gamma - \mu}\right]$$
$$- p_{1,r}\left[p_{2,r}\frac{(\gamma^{n} - \mu^{n})}{\gamma - \mu} + p_{1,r}\frac{(\gamma^{n-1} - \mu^{n-1})}{\gamma - \mu}\right]$$
$$= \frac{\gamma^{n-1} - \mu^{n-1}}{\gamma - \mu}[p_{2,r}^2 - p_{1,r}^2] + \frac{p_{1,r}p_{2,r}}{\gamma - \mu}[\gamma^{n-2} - \mu^{n-2} - \gamma^{n} + \mu^{n}]$$
$$= \frac{\gamma^{n-1} - \mu^{n-1}}{\gamma - \mu}[p_{2,r}^2 - p_{1,r}^2] - 2p_{1,r}p_{2,r}\frac{\gamma^{n-1} - \mu^{n-1}}{\gamma - \mu}$$
$$= \frac{\gamma^{n-1} - \mu^{n-1}}{\gamma - \mu}[p_{2,r}^2 - p_{1,r}^2 - 2p_{1,r}p_{2,r}]$$
$$= \frac{\gamma^{n-1} - \mu^{n-1}}{\gamma - \mu}[p_{2,r}^2 - p_{1,r}p_{3,r}]$$

$$p_n = \frac{\gamma^{n-1} - \mu^{n-1}}{\gamma - \mu} = \frac{p_{2,r}p_{n,r} - p_{1,r}p_{n+1,r}}{p_{2,r}^2 - p_{1,r}p_{3,r}}$$

dir.

2.22. Teorem

r-toplam Pell dizisinin n inci terimi $p_{n,r}$ olmak üzere;

$$p_{m,r}p_{n,r} - p_{m-k,r}p_{n+k,r}$$
$$= (-1)^{\mathrm{m-k-1}}\left[\frac{\left(p_{2,r}p_{k+1,r} - p_{1,r}p_{k+2,r}\right)\left(p_{2,r}p_{n-m+k+1,r} - p_{1,r}p_{n-m+k+2,r}\right)}{p_{2,r}^2 - p_{1,r}p_{3,r}}\right] \qquad (2.8)$$

olup burada $n \geq m$ ve $k \geq 1$, dir.

İspat

Binet formülü (2.4)'den;

$$p_{n,r} = A\gamma^{n-1} + B\mu^{n-1}$$

olup burada $A = \frac{p_{2,r}-\mu p_{1,r}}{\gamma-\mu}$, $B = \frac{\gamma p_{1,r}-p_{2,r}}{\gamma-\mu}$, $\gamma = 1+\sqrt{2}$ ve $\mu = 1-\sqrt{2}$;

$$\begin{aligned}
p_{m,r}p_{n,r} - p_{m-k,r}p_{n+k,r} &= (A\gamma^{m-1} + B\mu^{m-1})(A\gamma^{n-1} + B\mu^{n-1}) \\
&\quad - (A\gamma^{m-k-1} + B\mu^{m-k-1})(A\gamma^{n+k-1} + B\mu^{n+k-1}) \\
&= AB\,(\gamma^{m-1}\mu^{n-1} + \gamma^{n-1}\mu^{m-1} - \gamma^{m-k-1}\mu^{n+k-1} - \gamma^{n+k-1}\mu^{m-k-1}) \\
&= AB[\gamma^{m-1}\mu^{n-1}(1-\gamma^{-k}\mu^{k}) + \gamma^{n-1}\mu^{m-1}(1-\gamma^{k}\mu^{-k})] \\
&= AB\left[\gamma^{m-1}\mu^{n-1}\frac{(\gamma^k-\mu^k)}{\gamma^k} + \gamma^{n-1}\mu^{m-1}\frac{(\mu^k-\gamma^k)}{\mu^k}\right] \\
&= AB(\gamma^k-\mu^k)\left[\frac{\gamma^{m-1}\mu^{n-1}}{\gamma^k} - \frac{\gamma^{n-1}\mu^{m-1}}{\mu^k}\right] \\
&= AB(-1)^{-k}(\gamma^k-\mu^k)(\gamma^{m-1}\mu^{n+k-1} - \gamma^{n+k-1}\mu^{m-1}) \\
&= AB(-1)^{-k}(\gamma^k-\mu^k)(\gamma^{m-1}\mu^{m-1})(\mu^{n-m+k} - \gamma^{n-m+k}) \\
&= -AB(-1)^{m-k-1}(\gamma^k-\mu^k)(\gamma^{n-m+k} - \mu^{n-m+k})
\end{aligned}$$

$-AB = \frac{p_{2,r}^2-p_{1,r}p_{3,r}}{(\gamma-\mu)^2}$ olduğundan;

$$p_{m,r}p_{n,r} - p_{m-k,r}p_{n+k,r} = (-1)^{m-k-1}\frac{p_{2,r}^2 - p_{1,r}p_{3,r}}{(\gamma-\mu)^2}[(\gamma^k-\mu^k)(\gamma^{n-m+k}-\mu^{n-m+k})]$$

$$= (-1)^{m-k-1}\left(p_{2,r}^2 - p_{1,r}p_{3,r}\right)\left[\frac{(\gamma^k-\mu^k)}{(\gamma-\mu)}\frac{(\gamma^{n-m+k}-\mu^{n-m+k})}{(\gamma-\mu)}\right]$$

elde edilir. Lemma 2.21'den;

$$p_{k+1} = \frac{\gamma^k-\mu^k}{\gamma-\mu} = \frac{p_{2,r}p_{k+1,r} - p_{1,r}p_{k+2,r}}{p_{2,r}^2 - p_{1,r}p_{3,r}},$$

ve

$$p_{n-m+k+1} = \frac{\gamma^{n-m+k}-\mu^{n-m+k}}{\gamma-\mu} = \frac{p_{2,r}p_{n-m+k+1,r} - p_{1,r}p_{n-m+k+2,r}}{p_{2,r}^2 - p_{1,r}p_{3,r}}$$

dir. Böylece;

$$p_{m,r}p_{n,r} - p_{m-k,r}p_{n+k,r}$$
$$= (-1)^{m-k-1}\left[\frac{\left(p_{2,r}p_{k+1,r} - p_{1,r}p_{k+2,r}\right)\left(p_{2,r}p_{n-m+k+1,r} - p_{1,r}p_{n-m+k+2,r}\right)}{p_{2,r}^2 - p_{1,r}p_{3,r}}\right]$$

elde edilir.

2.23. Sonuç

1) (Catalan özdeşliği). Eğer Teorem 2.22 de, m=n yazılırsa, tüm $n > k \geq 1$ için;

$$p_{n,r}^2 - p_{n-k,r}p_{n+k,r} = \frac{(-1)^{n-k-1}}{p_{2,r}^2 - p_{1,r}p_{3,r}}\left(p_{2,r}p_{k+1,r} - p_{1,r}p_{k+2,r}\right)^2$$

dir.

2) (Cassini özdeşliği). Eğer Teorem 2.22 de, m=n ve k=1 alınırsak, tüm $n \geq 1$ için;

$$p_{n,r}^2 - p_{n-1,r}p_{n+1,r} = (-1)^{n-2}\left(p_{2,r}^2 - p_{1,r}p_{3,r}\right)$$

dir.

3) (d'Ocagne özdeşliği). Eğer Teorem 2.22 de, n=m, m=n+1 ve k=1 alırsak;

$$p_{n+1,r}p_{m,r} - p_{n,r}p_{m+1,r} = (-1)^{n-1}\left[p_{2,r}p_{m-n+1,r} - p_{1,r}p_{m-n+2,r}\right],$$

burada $m > n \geq 0$ dir.

Aşağıdaki teoremde r-toplam Pell sayılarının determinant içeren diğer özelliklerini inceleyeceğiz.

2.24. Teorem (Determinant Özdeşlikleri)

a) $n \in Z^+$ ve $n \geq 1$ için

$$\begin{vmatrix} p_{n+1,r} & 2p_{n+2,r} & p_{n+3,r} \\ p_{n+4,r} & 2p_{n+5,r} & p_{n+6,r} \\ p_{n+7,r} & 2p_{n+8,r} & p_{n+9,r} \end{vmatrix} = 0$$

dır.

İspat

Birinci ve ikinci kolonlar toplanıp birinci kolonda yerine yazılırsa;

$$\begin{vmatrix} p_{n+1,r} & 2p_{n+2,r} & p_{n+3,r} \\ p_{n+4,r} & 2p_{n+5,r} & p_{n+6,r} \\ p_{n+7,r} & 2p_{n+8,r} & p_{n+9,r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{n+1,r} + 2p_{n+2,r} & 2p_{n+2,r} & p_{n+3,r} \\ p_{n+4,r} + 2p_{n+5,r} & 2p_{n+5,r} & p_{n+6,r} \\ p_{n+7,r} + 2p_{n+8,r} & 2p_{n+8,r} & p_{n+9,r} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} p_{n+3,r} & 2p_{n+2,r} & p_{n+3,r} \\ p_{n+6,r} & 2p_{n+5,r} & p_{n+6,r} \\ p_{n+9,r} & 2p_{n+8,r} & p_{n+9,r} \end{vmatrix}$$

Determinant özelliğinden iki satır(sütun) eşit ise determinant sonucu sıfırdır.

b) $n \in Z^+$ ve $n \geq 1$ için

$$\begin{vmatrix} p_{n,r} + 2p_{n+1,r} & 2p_{n+1,r} + p_{n+2,r} & p_{n,r} + p_{n+2,r} \\ p_{n+2,r} & p_{n,r} & 2p_{n+1,r} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

dır.

İspat

Birinci satırı ve ikinci satır toplanıp birinci satıra yazılırsa;

$$\begin{vmatrix} p_{n,r} + 2p_{n+1,r} & 2p_{n+1,r} + p_{n+2,r} & p_{n,r} + p_{n+2,r} \\ p_{n+2,r} & p_{n,r} & 2p_{n+1,r} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2p_{n+2,r} & 2p_{n+2,r} & 2p_{n+2,r} \\ p_{n+2,r} & p_{n,r} & 2p_{n+1,r} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2p_{n+2,r} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_{n+2,r} & p_{n,r} & 2p_{n+1,r} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

elde edilir.

c) $n \in Z^+$ ve $n \geq 1$ için

$$\begin{vmatrix} p_{n,r} & p_n & 1 \\ 2p_{n+1,r} & 2p_{n+1} & 1 \\ p_{n+2,r} & p_{n+2} & 1 \end{vmatrix} = 2\left(p_n p_{n+1,r} - p_{n+1} p_{n,r}\right)$$

dir.

İspat

$R_1 \to R_2 - R_1$ ve $R_2 \to R_3 - R_2$ satır işlemleri uygulanırsa;

$$\begin{vmatrix} p_{n,r} & p_n & 1 \\ 2p_{n+1,r} & 2p_{n+1} & 1 \\ p_{n+2,r} & p_{n+2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2p_{n+1,r} - p_{n,r} & 2p_{n+1} - p_n & 0 \\ p_{n+2,r} - 2p_{n+1,r} & p_{n+2} - 2p_{n+1} & 0 \\ p_{n+2,r} & p_{n+2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2p_{n+1,r} - p_{n,r} & 2p_{n+1} - p_n & 0 \\ p_{n,r} & p_n & 0 \\ p_{n+2,r} & p_{n+2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2p_n p_{n+1,r} - p_n p_{n,r} - 2p_{n+1} p_{n,r} + p_n p_{n,r}$$

$$= 2\left(p_n p_{n+1,r} - p_{n+1} p_{n,r}\right)$$

elde edilir.

d) $n \in Z^+$ ve $n \geq 1$ için

$$\begin{vmatrix} p_{n,r} & L_n & 1 \\ 2p_{n+1,r} & L_{n+1} & 1 \\ p_{n+2,r} & L_{n+2} & 1 \end{vmatrix} = 2L_n p_{n+1,r} - L_{n+1} p_{n,r}$$

dir.

İspat

$R_1 \to R_2 - R_1$ ve $R_2 \to R_3 - R_2$ satır işlemleri uygulanırsa;

$$\begin{vmatrix} p_{n,r} & L_n & 1 \\ 2p_{n+1,r} & L_{n+1} & 1 \\ p_{n+2,r} & L_{n+2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2p_{n+1,r} - p_{n,r} & L_{n+1} - L_n & 0 \\ p_{n+2,r} - 2p_{n+1,r} & L_{n+2} - L_{n+1} & 0 \\ p_{n+2,r} & L_{n+2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2p_{n+1,r} - p_{n,r} & L_{n+1} - L_n & 0 \\ p_{n,r} & L_n & 0 \\ p_{n+2,r} & L_{n+2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2L_n p_{n+1,r} - L_n p_{n,r} - L_{n+1} p_{n,r} + L_n p_{n,r}$$

$$= 2L_n p_{n+1,r} - L_{n+1} p_{n,r}$$

elde edilir.

e) $n \in Z^+$ ve $n \geq 1$ için

$$\begin{vmatrix} 1+p_{n,r} & p_{n+1,r} & \cdots & p_{n+k,r} \\ p_{n,r} & 1+p_{n+1,r} & \cdots & p_{n+k,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,r} & p_{n+1,r} & \cdots & 1+p_{n+k,r} \end{vmatrix} = 1 + p_{n,r} + p_{n+1,r} + \cdots + p_{n+k,r}$$

dir.

İspat

İspatı n üzerinde tümevarım ve kolon indirgemesi kullanılarak yapılır.

f) $n \in Z^+$ ve $n \geq 1$, için

$$\begin{vmatrix} 2p_{n,r} & p_{n+1,r} & p_{n+2,r} \\ p_{n+2,r} & 2p_{n,r} & p_{n+1,r} \\ p_{n+1,r} & p_{n+2,r} & 2p_{n,r} \end{vmatrix} = 9\left(p_{n,r}^3 + p_{n+1,r}^3\right)$$

dir.

İspat

$$\begin{vmatrix} 2p_{n,r} & p_{n+1,r} & p_{n+2,r} \\ p_{n+2,r} & 2p_{n,r} & p_{n+1,r} \\ p_{n+1,r} & p_{n+2,r} & 2p_{n,r} \end{vmatrix}$$

$$= 2p_{n,r}\left(4p_{n,r}^2 - p_{n+1,r}p_{n+2,r}\right) + p_{n+1,r}\left(p_{n+1,r}^2 - 2p_{n,r}p_{n+2,r}\right)$$

$$+ p_{n+2,r}\left(p_{n+2,r}^2 - 2p_{n,r}p_{n+1,r}\right)$$

$$= 8p_{n,r}^3 + p_{n+1,r}^3 + p_{n+2,r}^3 - 6p_{n,r}p_{n+1,r}p_{n+2,r}$$

$p_{n+2,r} = 2p_{n+1,r} + p_{n,r}$, olduğundan;

$$\begin{vmatrix} 2p_{n,r} & p_{n+1,r} & p_{n+2,r} \\ p_{n+2,r} & 2p_{n,r} & p_{n+1,r} \\ p_{n+1,r} & p_{n+2,r} & 2p_{n,r} \end{vmatrix}$$

$$= 8p_{n,r}^3 + p_{n+1,r}^3 + \left(2p_{n+1,r} + p_{n,r}\right)^3 - 6p_{n,r}p_{n+1,r}\left(2p_{n+1,r} + p_{n,r}\right)$$

$$= 8p_{n,r}^3 + p_{n+1,r}^3 + 8p_{n+1,r}^3 + 12p_{n+1,r}^2 p_{n,r} + 6p_{n+1,r}p_{n,r}^2 + p_{n,r}^3 - 12p_{n,r}p_{n+1,r}^2 - 6p_{n,r}^2 p_{n+1,r}$$

$$= 9\left(p_{n,r}^3 + p_{n+1,r}^3\right)$$

elde edilir.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ PELL-LUCAS DİZİSİ

Bu bölümde r-toplam Pell-Lucas sayısının tanımı, özellikleri, Binet formülü, Üreteç fonksiyonu ve determinant özdeşlikleri verilecektir.

3.1. Tanım

r-toplam Pell-Lucas dizisinin n inci terimi $Q_{n,r}$ olsun.

$$Q_{n,r} = Q_n + Q_{n+1} + \cdots + Q_{n+r-1} \tag{3.1}$$

ile tanımlanır.

Tanım 3.1 den ilk terim

$$Q_{1,r} = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_r = \frac{1}{2}(Q_{r+1} + Q_r - 2)$$

ve ikinci terim

$$Q_{2,r} = Q_2 + Q_3 + \cdots + Q_{r+1} = \frac{1}{2}(Q_{r+2} + Q_{r+1} - 2)$$

Pell-Lucas dizisi gibi r-toplam Pell-Lucas dizisi indirgenme bağıntısını sağlar.

$Q_{1,r} = \frac{1}{2}(Q_{r+1} + Q_r - 2),\ Q_{2,r} = \frac{1}{2}(Q_{r+2} + Q_{r+1} - 2)$ başlangıç koşulları ile $n \geq 3$ için

$$Q_{n,r} = 2Q_{n-1,r} + Q_{n-2,r} \tag{3.2}$$

indirgenme bağıntısı ile verilen $\{Q_{n,r}\}_{n,r\geq 1}$ şeklindeki tamsayı dizisine r-toplam Pell-Lucas dizisi denir. Bu dizide, her n, r pozitif tamsayılarına karşılık gelen değere r-toplam Pell-Lucas sayısı denir.

$Q_{n,r}$ nin birkaç değeri aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 3.1 r-toplam Pell-Lucas sayıları

r	$Q_{1,r}$	$Q_{2,r}$	$Q_{3,r}$	$Q_{4,r}$	$Q_{5,r}$	$Q_{6,r}$	$Q_{7,r}$	$Q_{8,r}$	$Q_{9,r}$
1	1	3	7	17	41	99	239	577	1393
2	3	9	21	51	123	297	717	1731	4179
3	9	23	55	133	321	775	1871	3819	9509
4	23	57	137	331	799	1929	4657	11243	27143
5	57	139	335	809	1953	4715	11385	27481	66345
6	139	337	813	1963	4715	11441	27597	66635	160867

3.2. Teorem

$n \in Z^+$ ve $n \geq 1$, için $Q_{n,3} = 2Q_{n,2} + Q_{n+1}$

dir.

İspat

(3.1)' den;

$$\begin{aligned} Q_{n,3} &= Q_n + Q_{n+1} + Q_{n+2} \\ &= Q_n + Q_{n+1} + 2Q_{n+1} + Q_n \\ &= 2Q_n + 2Q_{n+1} + Q_{n+1} \\ &= 2Q_{n,2} + Q_{n+1} \end{aligned}$$

elde edilir.

3.3. Teorem

$n \in Z^+$ için $Q_{n,r} + Q_{n+1,r} + Q_{n+3,r} = 3Q_{n+2,r}$

dir.

İspat

$$\begin{aligned} Q_{n,r} + Q_{n+1,r} + Q_{n+3,r} &= Q_{n,r} + Q_{n+1,r} + \left(Q_{n+1,r} + 2Q_{n+2,r}\right) \\ &= (Q_{n,r} + 2Q_{n+1,r}) + 2Q_{n+2,r} \\ &= Q_{n+2,r} + 2Q_{n+2,r} \\ &= 3Q_{n+2,r} \end{aligned}$$

dir.

3.4. Teorem

r-toplam Pell-Lucas sayısının n inci terimi $Q_{n,r}$, $n \in Z^+$ ve $n \geq 1$ için

$$Q_{n,r} = \frac{1}{2}(Q_{n+r} + Q_{n+r-1}) - \frac{1}{2}(Q_n + Q_{n-1})$$

dir.

İspat

İndirgenme bağıntısı (3.2) ve (3.1) denkleminden;

$$\begin{aligned} Q_{n,r} &= 2Q_{n-1,r} + Q_{n-2,r} \\ &= 2(Q_{n-1} + Q_n + \cdots + Q_{n+r-2}) + (Q_{n-2} + Q_{n-1} + \cdots + Q_{n+r-3}) \\ &= 2(Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_{n+r-2}) - 2(Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_{n-2}) + (Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_{n+r-3}) \\ &\qquad - (Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_{n-3}) \\ &= 2\frac{1}{2}(Q_{n+r-1} + Q_{n+r-2} - 2) - 2\frac{1}{2}(Q_{n-1} + Q_{n-2} - 2) + \frac{1}{2}(Q_{n+r-2} + Q_{n+r-3} - 2) \\ &\qquad - \frac{1}{2}(Q_{n-2} + Q_{n-3} - 2) \\ &= Q_{n+r-1} + Q_{n+r-2} - Q_{n-1} - Q_{n-2} + \frac{1}{2}Q_{n+r-2} + \frac{1}{2}Q_{n+r-3} - \frac{1}{2}Q_{n-2} - \frac{1}{2}Q_{n-3} \\ &= \frac{1}{2}Q_{n+r} + \frac{1}{2}Q_{n+r-1} - \frac{1}{2}Q_n - \frac{1}{2}Q_{n-1} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}(Q_{n+r} + Q_{n+r-1}) - \frac{1}{2}(Q_n + Q_{n-1})$$

dir.

3.5. Teorem

Aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$Q_{n,r} = Q_n \sum_{i=1}^{r} p_i + Q_{n-1} \sum_{i=1}^{r-1} p_i$$

İspat

Teorem 3.4'ten;

$$Q_{n,r} = \frac{1}{2}(Q_{n+r} + Q_{n+r-1}) - \frac{1}{2}(Q_n + Q_{n-1}) \qquad (3.3)$$

(1.10)'dan;

$$Q_{n,r} = \frac{1}{2}(Q_n p_{r+1} + Q_{n-1} p_r + Q_n p_r + Q_{n-1} p_{r-1} - Q_n - Q_{n-1})$$
$$= \frac{1}{2} Q_n (p_{r+1} + p_r - 1) + \frac{1}{2} Q_{n-1} (p_{r+1} + p_r - 1)$$

(1.6) denkleminden;

$$Q_{n,r} = Q_n \sum_{i=1}^{r} p_i + Q_{n-1} \sum_{i=1}^{r-1} p_i$$

dir.

3.6. Teorem

$n \in Z^+$ ve $n \geq 2$ aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\sum_{k=2}^{n} Q_{k,r}^2 = \frac{1}{2}\left(Q_{n,r}Q_{n+1,r} - Q_{1,r}Q_{2,r}\right)$$

İspat

$Q_{n,r} = \frac{1}{2}\left(Q_{n+1,r} - Q_{n-1,r}\right)$, olduğundan;
$Q_{n,r}^2 = \frac{1}{2}\left(Q_{n+1,r}Q_{n,r} - Q_{n-1,r}Q_{n,r}\right)$ dir.

Buradan;

$Q_{2,r}^2 = \frac{1}{2}\left(Q_{3,r}Q_{2,r} - Q_{1,r}Q_{2,r}\right)$
$Q_{3,r}^2 = \frac{1}{2}\left(Q_{4,r}Q_{3,r} - Q_{2,r}Q_{3,r}\right)$

$Q_{n,r}^2 = \frac{1}{2}\left(Q_{n+1,r}Q_{n,r} - Q_{n-1,r}Q_{n,r}\right)$

Taraf tarafa toplarsak

$$Q_{2,r}^2 + Q_{3,r}^2 + Q_{4,r}^2 + \cdots + Q_{n,r}^2 = \frac{1}{2}\left(Q_{n,r}Q_{n+1,r} - Q_{1,r}Q_{2,r}\right)$$

elde edilir.

3.7. Teorem

$n \in Z^+$ ve $n \geq 2$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$Q_{n,r}^2 - 4Q_{n-1,r}^2 = Q_{n-2,r}\left(Q_{n,r} + 2Q_{n-1,r}\right)$$

İspat

$2Q_{n-1,r} = Q_{n,r} - Q_{n-2,r}$ olduğundan;

$$4Q_{n-1,r}^2 = 2Q_{n-1,r}Q_{n,r} - 2Q_{n-1,r}Q_{n-2,r}$$

$$\begin{aligned} Q_{n,r}^2 - 4Q_{n-1,r}^2 &= Q_{n,r}^2 - 2Q_{n-1,r}Q_{n,r} + 2Q_{n-1,r}Q_{n-2,r} \\ &= Q_{n,r}\left(Q_{n,r} - 2Q_{n-1,r}\right) + 2Q_{n-1,r}Q_{n-2,r} \\ &= Q_{n,r}Q_{n-2,r} + 2Q_{n-1,r}Q_{n-2,r} \\ &= Q_{n-2,r}(Q_{n,r} + 2Q_{n-1,r}) \end{aligned}$$

elde edilir.

3.8. Teorem (Binet formülü)

r-toplam Pell-Lucas dizisinin n inci terimi $Q_{n,r}$ olmak üzere

$$Q_{n,r} = \frac{1}{\gamma - \mu}\left[\left(Q_{2,r} - \mu Q_{1,r}\right)\gamma^{n-1} + \left(\gamma Q_{1,r} - Q_{2,r}\right)\mu^{n-1}\right] \tag{3.4}$$

olup, burada $\gamma = 1 + \sqrt{2}\ ve\ \mu = 1 - \sqrt{2}$, dir.

İspat

$n \geq 2$ olsun. r-toplam Pell sayıların indirgenme bağıntısı olarak tanımlanır. Tüm $Q_{1,r} = \frac{1}{2}(Q_{r+1} + Q_r - 2)$ ve $Q_{2,r} = \frac{1}{2}(Q_{r+2} + Q_{r+1} - 2)$ başlangıç koşulları ile tüm $r > 0$ için $Q_{n,r} = 2Q_{n-1,r} + Q_{n-2,r}$ indirgenme bağıntısının karakteristik denklemi $\delta^2 - 2\delta - 1 = 0$ dir. Bu denklemin kökleri;

$\gamma = 1 + \sqrt{2}\ ve\ \mu = 1 + \sqrt{2}$ dir.

Denklemin kökleri reel ve birbirinden farklıdır ve bu yüzden indirgenme bağıntısının çözümü;

$$Q_{n,r} = A\gamma^n + B\mu^n \tag{3.5}$$

olup, burada A ve B sabittir.

(3.5)' te n=1 ve n=2 yazılırsa;

$$A\gamma + B\mu = Q_{1,r}$$
$$A\gamma^2 + B\mu^2 = Q_{2,r}$$

Sırasıyla bu denklemlerde A ve B katsayıları aşağıdaki şekilde bulunur.

$$A = \frac{Q_{2,r} - \mu Q_{1,r}}{\gamma(\gamma - \mu)}$$

ve

$$B = \frac{\gamma Q_{1,r} - Q_{2,r}}{\mu(\gamma - \mu)}.$$

3.9. Sonuç

r-toplam Pell-Lucas sayısının n inci terimi $Q_{n,r} = Q_{2,r}p_n + Q_{1,r}p_{n-1}$ denklemi ile verilir.

İspat

Binet formülü (3.4)'den;

$$Q_{n,r} = \frac{1}{\gamma - \mu}\left[\left(Q_{2,r} - \mu Q_{1,r}\right)\gamma^{n-1} + \left(\gamma Q_{1,r} - Q_{2,r}\right)\mu^{n-1}\right]$$

Burada $\gamma = 1 + \sqrt{2}$, $\mu = 1 - \sqrt{2}$ ve $\gamma\mu = -1$ olduğundan;

$$Q_{n,r} = \frac{1}{\gamma - \mu}\left[Q_{2,r}(\gamma^{n-1} - \mu^{n-1}) + Q_{1,r}(\gamma^{n-2} - \mu^{n-2})\right]$$
$$= Q_{2,r}\frac{(\gamma^{n-1} - \mu^{n-1})}{\gamma - \mu} + Q_{1,r}\frac{(\gamma^{n-2} - \mu^{n-2})}{\gamma - \mu}$$

$$= Q_{2,r}p_n + Q_{1,r}p_{n-1}$$

dir.

3.10. Sonuç

Ardışık r-toplam Pell-Lucas sayılarının oranının dizisi $\frac{Q_{n+1,r}}{Q_{n,r}}$, n sonsuza giderken $1+\sqrt{2}$ ye yakınsar. Yani;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_{n+1,r}}{Q_{n,r}} = \gamma = 1+\sqrt{2}$$

dir.

İspat

Binet formülü (3.4)'den;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_{n+1,r}}{Q_{n,r}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\gamma-\mu}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma^n + (\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\mu^n\right]}{\frac{1}{\gamma-\mu}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma^{n-1} + (\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\mu^{n-1}\right]}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\gamma-\mu}\gamma^{n-1}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma + (\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\mu^n\gamma^{-(n-1)}\right]}{\frac{1}{\gamma-\mu}\gamma^{n-1}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r}) + (\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\mu^{n-1}\gamma^{-(n-1)}\right]}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma + (\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\left(\frac{\mu}{\gamma}\right)^{n-1}\mu\right]}{\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r}) + (\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\left(\frac{\mu}{\gamma}\right)^{n-1}\right]}$$

$\left|\frac{\mu}{\gamma}\right| < 1$ oluğundan $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\mu}{\gamma}\right)^{n-1} = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_{n+1,r}}{Q_{n,r}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma}{(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})} = \gamma = 1+\sqrt{2}$$

elde edilir.

3.11. Teorem (Üreteç Fonksiyonu)

r-toplam Pell-Lucas dizisi için üreteç fonksiyonu $Q_r(t)$ olmak üzere.

$$Q_r(t) = \frac{Q_{1,r}t + t^2\left(Q_{2,r} - Q_{1,r}\right)}{1 - 2t - t^2} \tag{3.6}$$

dir.

İspat

r-toplam Pell-Lucas sayılar için üreteç fonksiyon, $Q_r(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_{n,r}t^n$, olsun.

$Q_{n,r} = 2Q_{n-1,r} + Q_{n-2,r}$, olduğundan;

$$\sum_{n\geq 3} Q_{n,r}t^n = \sum_{n\geq 3} 2Q_{n-1,r}t^n + \sum_{n\geq 3} Q_{n-2,r}t^n$$

$$\sum_{n\geq 1} Q_{n,r}t^n - Q_{1,r}t - Q_{2,r}t^2 = 2t\sum_{n\geq 2} Q_{n,r}t^n + t^2\sum_{n\geq 1} Q_{n,r}t^n$$

$$\sum_{n\geq 1} Q_{n,r}t^n - Q_{1,r}t - Q_{2,r}t^2 = 2t\left(\sum_{n\geq 1} Q_{n,r}t^n - Q_{1,r}t\right) + t^2\sum_{n\geq 1} Q_{n,r}t^n$$

$$\sum_{n\geq 1} Q_{n,r}t^n - Q_{1,r}t - Q_{2,r}t^2 = 2t\sum_{n\geq 1} Q_{n,r}t^n - 2Q_{1,r}t^2 + t^2\sum_{n\geq 1} Q_{n,r}t^n$$

$Q_r(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_{n,r}t^n$ yerine yazılırsa;

$$Q_r(t) - Q_{1,r}t - Q_{2,r}t^2 = 2tQ_r(t) - 2Q_{1,r}t^2 + t^2Q_r(t)$$

$Q_r(t)$ yalnız bırakılırsa;

$$Q_r(t) = \frac{Q_{1,r}t + t^2\left(Q_{2,r} - 2Q_{1,r}\right)}{1 - 2t - t^2}$$

elde edilir.

3.12. Teorem

$n \in Z^+$ ve $n \geq 1$ olmak üzere;

a) r-toplam Pell-Lucas sayılarının ilk n terimlerin toplamı;

$$\sum_{k=1}^{n} Q_{k,r} = \frac{1}{2}\left(-Q_{n+1,r} + Q_{n+2,r} - Q_{1,r} + Q_{2,r}\right)$$

dir.

b) r-toplam Pell-Lucas sayılarının tek indisli ilk n terimler toplamı;

$$\sum_{k=0}^{n-1} Q_{2k+1,r} = \frac{1}{2}\left(Q_{2n,r} - Q_{2,r} + 2Q_{1,r}\right)$$

dir.

c) r-toplam Pell-Lucas sayılarının çift indisli ilk n terimleri toplamı;

$$\sum_{k=1}^{n} Q_{2k,r} = \frac{1}{2}\left(Q_{2n+1,r} - Q_{1,r}\right)$$

dir.

d) $n \in Z^+$ ve $n \geq 1$ için;

$$Q_{1,r} + Q_{4,\mathrm{r}} + Q_{7,r} + \cdots + Q_{3n-2,r} = \frac{1}{14}\left(-Q_{3n+1,r} + 5Q_{3n,r} + 11Q_{1,r} - 5Q_{2,r}\right)$$

dir.

e) $n \in Z^+$ ve $n \geq 1$ için;

$$Q_{2,r} + Q_{5,\mathrm{r}} + Q_{8,r} + \cdots + Q_{3n-1,r} = \frac{1}{14}\left(-Q_{3n+2,r} + 5Q_{3n+1,r} + Q_{2,r} - 5Q_{1,r}\right)$$

dir.

f) $n \in Z^+$ ve $n \geq 1$ için;

$$Q_{3,r} + Q_{6,\mathrm{r}} + Q_{9,r} + \cdots + Q_{3n,r} = \frac{1}{14}\left(-Q_{3n+3,r} + 5Q_{3n+2,r} + Q_{3,r} - 5Q_{2,r}\right)$$

dir.

İspat

a) Binet formülü (3.4)'den;

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} Q_{k,r} =& \frac{1}{\gamma-\mu}\left[\left(Q_{2,r} - \mu Q_{1,r}\right)\gamma^0 + \left(\gamma Q_{1,r} - Q_{2,r}\right)\mu^0 + \left(Q_{2,r} - \mu Q_{1,r}\right)\gamma^1\right.\\ &\left. + \left(\gamma Q_{1,r} - Q_{2,r}\right)\mu^1 + \cdots + \left(Q_{2,r} - \mu Q_{1,r}\right)\gamma^{n-1} + \left(\gamma Q_{1,r} - Q_{2,r}\right)\mu^{n-1}\right]\\ =& \frac{1}{\gamma-\mu}\left[\left(Q_{2,r} - \mu Q_{1,r}\right)\left(1 + \gamma^1 + \cdots + \gamma^{n-1}\right) + \left(\gamma Q_{1,r} - Q_{2,r}\right)\left(1 + \mu^1 + \cdots + \mu^{n-1}\right)\right]\\ =& \frac{1}{\gamma-\mu}\left[\left(Q_{2,r} - \mu Q_{1,r}\right)\frac{\gamma^n - 1}{\gamma - 1} + \left(\gamma Q_{1,r} - Q_{2,r}\right)\frac{\mu^n - 1}{\mu - 1}\right]\end{aligned}$$

$\gamma - 1 = 1 - \mu$ ve $\mu - 1 = 1 - \gamma$ olduğundan;

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} Q_{k,r} =& \frac{1}{\gamma-\mu}\left[\left(Q_{2,r} - \mu Q_{1,r}\right)\frac{\gamma^n - 1}{1 - \mu} + \left(\gamma Q_{1,r} - Q_{2,r}\right)\frac{\mu^n - 1}{1 - \gamma}\right]\\ =& \frac{1}{\gamma-\mu}\left[\frac{\left(Q_{2,r} - \mu Q_{1,r}\right)(\gamma^n - 1)(1-\gamma) + \left(\gamma Q_{1,r} - Q_{2,r}\right)(\mu^n - 1)(1-\mu)}{1 - \gamma - \mu + \gamma\mu}\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{-2(\gamma-\mu)}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})(\gamma^n-\gamma^{n+1}-1+\gamma)\right.$$
$$\left.+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})(\mu^n-\mu^{n+1}-1+\mu)\right]$$
$$= \frac{1}{-2(\gamma-\mu)}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma^n+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\mu^n\right]$$
$$+\frac{1}{2(\gamma-\mu)}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma^{n+1}+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\mu^{n+1}\right]$$
$$+\frac{1}{2(\gamma-\mu)}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\right]$$
$$-\frac{1}{2(\gamma-\mu)}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\mu\right]$$
$$= -\frac{1}{2}Q_{n+1,r}+\frac{1}{2}Q_{n+2,r}+\frac{1}{2}Q_{1,r}-\frac{1}{2}Q_{2,r}$$
$$= \frac{1}{2}(-Q_{n+1,r}+Q_{n+2,r}+Q_{1,r}-Q_{2,r})$$

elde edilir.

b) Binet formülü (3.4)'den;

$$\sum_{k=0}^{n-1} Q_{2k+1,r} = \frac{1}{\gamma-\mu}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma^0+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\mu^0+(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma^2\right.$$
$$\left.+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\mu^2+\cdots+(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma^{2n-2}+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\mu^{2n-2}\right]$$
$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})(1+\gamma^2+\cdots+\gamma^{2n-2})+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})(1+\mu^2+\cdots+\mu^{2n-2})\right]$$
$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\frac{\gamma^{2n}-1}{\gamma^2-1}+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\frac{\mu^{2n}-1}{\mu^2-1}\right]$$

$\gamma^2-1=2\gamma$ ve $\mu^2-1=2\mu$ olduğundan;

$$\sum_{k=0}^{n-1} Q_{2k+1,r} = \frac{1}{\gamma-\mu}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\frac{\gamma^{2n}-1}{2\gamma}+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\frac{\mu^{2n}-1}{2\mu}\right]$$
$$= \frac{1}{2(\gamma-\mu)}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\frac{\gamma^{2n}-1}{\gamma}+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\frac{\mu^{2n}-1}{\mu}\right]$$

$$= \frac{1}{2(\gamma-\mu)}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma^{2n-1}+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\mu^{2n-1}\right]$$
$$-\frac{1}{2(\gamma-\mu)}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma^{-1}+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\mu^{-1}\right]$$
$$= \frac{1}{2}Q_{2n,r}-\frac{1}{2}Q_{0,r}$$
$$= \frac{1}{2}Q_{2n,r}-\frac{1}{2}Q_{2,r}+Q_{1,r}$$

elde edilir.

c) Binet formülü (3.4)'den;

$$\sum_{k=1}^{n} Q_{2k,r} = \frac{1}{\gamma-\mu}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma^{1}+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\mu^{1}+(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma^{3}\right.$$
$$+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\mu^{3}+\cdots+(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma^{2n-1}$$
$$\left.+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\mu^{2n-1}\right]$$
$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma(1+\gamma^{2}+\cdots+\gamma^{2n-2})\right.$$
$$\left.+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\mu(1+\mu^{2}+\cdots+\mu^{2n-2})\right]$$
$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\frac{\gamma^{2n+1}-\gamma}{\gamma^{2}-1}+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\frac{\mu^{2n+1}-\mu}{\mu^{2}-1}\right]$$

$\gamma^2-1=2\gamma$ ve $\mu^2-1=2\mu$ olduğundan;

$$\sum_{k=1}^{n} Q_{2k,r} = \frac{1}{\gamma-\mu}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\frac{\gamma^{2n+1}-\gamma}{2\gamma}+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\frac{\mu^{2n+1}-\mu}{2\mu}\right]$$
$$= \frac{1}{2(\gamma-\mu)}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\frac{\gamma^{2n+1}-\gamma}{\gamma}+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\frac{\mu^{2n+1}-\mu}{\mu}\right]$$
$$= \frac{1}{2(\gamma-\mu)}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma^{2n}+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\mu^{2n}\right]$$
$$-\frac{1}{2(\gamma-\mu)}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\right]$$
$$= \frac{1}{2}Q_{2n+1,r}-\frac{1}{2}Q_{1,r}$$

elde edilir.

d) Binet formülü (3.4)'den;

$$\sum_{k=1}^{n} Q_{3k-2,r} = \frac{1}{\gamma-\mu}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma^0 + (\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\mu^0 + (Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma^3 + (\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\mu^3 + \cdots + (Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma^{3n-3} + (\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\mu^{3n-3}\right]$$

$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})(1+\gamma^3+\cdots+\gamma^{3n-3}) + (\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})(1+\mu^3+\cdots+\mu^{3n-3})\right]$$

$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\frac{\gamma^{3n}-1}{\gamma^3-1} + (\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\frac{\mu^{3n}-1}{\mu^3-1}\right]$$

$\gamma^3-1 = 1+5\gamma$ ve $\mu^3-1 = 1+5\mu$, olduğundan;

$$\sum_{k=1}^{n} Q_{3k-2,r} = \frac{1}{\gamma-\mu}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\frac{\gamma^{3n}-1}{1+5\gamma} + (\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\frac{\mu^{3n}-1}{1+5\mu}\right]$$

$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\left[\frac{(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})(\gamma^{3n}-1)(1+5\mu) + (\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})(\mu^{3n}-1)(1+5\gamma)}{1+5\gamma+5\mu+25\gamma\mu}\right]$$

$\gamma = 1+\sqrt{2}$, $\mu = 1-\sqrt{2}$ ve $\gamma\mu = -1$ olduğundan;

$$\sum_{k=1}^{n} Q_{3k-2,r}$$

$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\left[\frac{(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})(\gamma^{3n}-1)(1+5\mu) + (\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})(\mu^{3n}-1)(1+5\gamma)}{1+5.2-25}\right]$$

$$= \frac{1}{-14(\gamma-\mu)}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})(\gamma^{3n}-1)(1+5\mu) + (\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})(\mu^{3n}-1)(1+5\gamma)\right]$$

$$= \frac{1}{-14(\gamma-\mu)}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})(\gamma^{3n}+5\gamma^{3n}\mu-5\mu-1) + (\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})(\mu^{3n}+5\gamma\mu^{3n}-5\gamma-1)\right]$$

$$= \frac{1}{-14(\gamma-\mu)}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma^{3n} + (\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\mu^{3n}\right] + \frac{5}{14(\gamma-\mu)}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma^{3n-1} + (\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\mu^{3n-1}\right] + \frac{1}{14(\gamma-\mu)}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r}) + (\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\right]$$

$$+\frac{5}{14(\gamma-\mu)}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\mu+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\gamma\right]$$

$$=-\frac{1}{14}Q_{3n+1,r}+\frac{5}{14}Q_{3n,r}+\frac{1}{14}Q_{1,r}+\frac{5}{14}Q_{1,r}\left(\frac{\gamma^2-\mu^2}{\gamma-\mu}\right)-\frac{5}{14}Q_{2,r}\left(\frac{\gamma-\mu}{\gamma-\mu}\right)$$

$$=-\frac{1}{14}Q_{3n+1,r}+\frac{5}{14}Q_{3n,r}+\frac{1}{14}Q_{1,r}+\frac{10}{14}Q_{1,r}-\frac{5}{14}Q_{2,r}$$

$$=-\frac{1}{14}Q_{3n+1,r}+\frac{5}{14}Q_{3n,r}+\frac{11}{14}Q_{1,r}-\frac{5}{14}Q_{2,r}$$

elde edilir.

e) Binet formülü (3.4)' den;

$$\sum_{k=1}^{n}Q_{3k-1,r}=\frac{1}{\gamma-\mu}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma^1+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\mu^1+(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma^4\right.$$
$$\left.+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\mu^4+\cdots+(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma^{3n-2}+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\mu^{3n-2}\right]$$
$$=\frac{1}{\gamma-\mu}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma(1+\gamma^3+\cdots+\gamma^{3n-3})\right.$$
$$\left.+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\mu(1+\mu^3+\cdots+\mu^{3n-3})\right]$$
$$=\frac{1}{\gamma-\mu}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\frac{\gamma^{3n+1}-\gamma}{\gamma^3-1}+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\frac{\mu^{3n+1}-\mu}{\mu^3-1}\right]$$

$\gamma^3-1=1+5\gamma$ ve $\mu^3-1=1+5\mu$ olduğundan;

$$\sum_{k=1}^{n}Q_{3k-1,r}=\frac{1}{\gamma-\mu}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\frac{\gamma^{3n+1}-\gamma}{1+5\gamma}+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\frac{\mu^{3n+1}-\mu}{1+5\mu}\right]$$
$$=\frac{1}{\gamma-\mu}\left[\frac{(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})(\gamma^{3n+1}-\gamma)(1+5\mu)+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})(\mu^{3n+1}-\mu)(1+5\gamma)}{1+5\gamma+5\mu+25\gamma\mu}\right]$$

$\gamma=1+\sqrt{2}$, $\mu=1-\sqrt{2}$ ve $\gamma\mu=-1$ olduğundan;

$$\sum_{k=1}^{n}Q_{3k-1,r}$$
$$=\frac{1}{\gamma-\mu}\left[\frac{(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})(\gamma^{3n+1}-\gamma)(1+5\mu)+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})(\mu^{3n+1}-\mu)(1+5\gamma)}{1+5.2-25}\right]$$

$$= \frac{1}{-14(\gamma-\mu)}\left[\left(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r}\right)\left(\gamma^{3n+1}-\gamma\right)(1+5\mu)\right.$$
$$\left.+\left(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r}\right)\left(\mu^{3n+1}-\mu\right)(1+5\gamma)\right]$$
$$= \frac{1}{-14(\gamma-\mu)}\left[\left(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r}\right)\left(\gamma^{3n+1}+5\gamma^{3n+1}\mu-5\gamma\mu-\gamma\right)\right.$$
$$\left.+\left(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r}\right)\left(\mu^{3n+1}+5\gamma\mu^{3n+1}-5\gamma\mu-\mu\right)\right]$$
$$= \frac{1}{-14(\gamma-\mu)}\left[\left(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r}\right)\gamma^{3n+1}+\left(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r}\right)\mu^{3n+1}\right]$$
$$+\frac{5}{14(\gamma-\mu)}\left[\left(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r}\right)\gamma^{3n}+\left(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r}\right)\mu^{3n}\right]$$
$$-\frac{5}{14(\gamma-\mu)}\left[\left(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r}\right)+\left(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r}\right)\right]$$
$$+\frac{1}{14(\gamma-\mu)}\left[\left(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r}\right)\gamma+\left(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r}\right)\mu\right]$$
$$= \frac{1}{14}\left(-Q_{3n+2,r}+5Q_{3n+1,r}+Q_{2,r}-5Q_{1,r}\right)$$

f) Binet formülü (3.4)'den

$$\sum_{k=1}^{n} Q_{3k,r} = \frac{1}{\gamma-\mu}\left[\left(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r}\right)\gamma^{2}+\left(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r}\right)\mu^{2}+\left(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r}\right)\gamma^{5}\right.$$
$$\left.+\left(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r}\right)\mu^{5}+\cdots+\left(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r}\right)\gamma^{3n-1}+\left(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r}\right)\mu^{3n-1}\right]$$
$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\left[\left(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r}\right)\gamma^{2}\left(1+\gamma^{3}+\cdots+\gamma^{3n-3}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r}\right)\mu^{2}\left(1+\mu^{3}+\cdots+\mu^{3n-3}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\left[\left(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r}\right)\frac{\gamma^{3n+2}-\gamma^{2}}{\gamma^{3}-1}+\left(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r}\right)\frac{\mu^{3n+2}-\mu^{2}}{\mu^{3}-1}\right]$$

$\gamma^3-1=1+5\gamma$ ve $\mu^3-1=1+5\mu$ olduğundan;

$$\sum_{k=1}^{n} Q_{3k,r} = \frac{1}{\gamma-\mu}\left[\left(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r}\right)\frac{\gamma^{3n+2}-\gamma^{2}}{1+5\gamma}+\left(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r}\right)\frac{\mu^{3n+2}-\mu^{2}}{1+5\mu}\right]$$
$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\left[\frac{\left(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r}\right)\left(\gamma^{3n+2}-\gamma^{2}\right)(1+5\mu)+\left(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r}\right)\left(\mu^{3n+2}-\mu^{2}\right)(1+5\gamma)}{1+5\gamma+5\mu+25\gamma\mu}\right]$$

$\gamma = 1+\sqrt{2}\,, \mu = 1-\sqrt{2}$ ve $\gamma\mu = -1$ olduğundan;

$$\sum_{k=1}^{n} Q_{3k,r}$$

$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\left[\frac{(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})(\gamma^{3n+2}-\gamma^2)(1+5\mu)+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})(\mu^{3n+2}-\mu^2)(1+5\gamma)}{1+5.2-25}\right]$$

$$= \frac{1}{-14(\gamma-\mu)}\big[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})(\gamma^{3n+2}-\gamma^2)(1+5\mu)$$

$$+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})(\mu^{3n+2}-\mu^2)(1+5\gamma)\big]$$

$$= \frac{1}{-14(\gamma-\mu)}\big[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})(\gamma^{3n+2}+5\gamma^{3n+2}\mu-5\gamma^2\mu-\gamma^2)$$

$$+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})(\mu^{3n+2}+5\gamma\mu^{3n+2}-5\gamma\mu^2-\mu^2)\big]$$

$$= \frac{1}{-14(\gamma-\mu)}\big[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma^{3n+2}+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\mu^{3n+2}\big]$$

$$+\frac{5}{14(\gamma-\mu)}\big[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma^{3n+1}+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\mu^{3n+1}\big]$$

$$-\frac{5}{14(\gamma-\mu)}\big[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\mu\big]$$

$$+\frac{1}{14(\gamma-\mu)}\big[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma^2+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\mu^2\big]$$

$$= \frac{1}{14}\left(-Q_{3n+3,r}+5Q_{3n+2,r}+Q_{3,r}-5Q_{2,r}\right)$$

elde edilir.

3.13. Teorem

$n \in Z^+$ için

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}Q_{k,r} = \frac{(-1)^{n-1}}{2}\left(Q_{n+1,r}-Q_{n,r}\right)-\frac{1}{2}Q_{2,r}+\frac{3}{2}Q_{1,r}$$

dir.

İspat

Binet formülü (3.4)'den;

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}Q_{k,r}$$

$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\Big[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma^0+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\mu^0$$
$$-\Big((Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma^1+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\mu^1\Big)+\cdots$$
$$+(-1)^{n+1}\Big((Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma^{n-1}+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\mu^{n-1}\Big)\Big]$$

$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\big[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})(1-\gamma^1+\cdots+(-1)^{n+1}\gamma^{n-1})$$
$$+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})(1-\mu^1+\cdots+(-1)^{n+1}\mu^{n-1})\big]$$

$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\frac{((-\gamma)^n-1)}{-\gamma-1}+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\frac{((-\mu)^n-1)}{-\mu-1}\right]$$

$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\frac{(-1)^n\gamma^n-1}{-\gamma-1}+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\frac{(-1)^n\mu^n-1}{-\mu-1}\right]$$

$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\frac{(-1)^{n-1}\gamma^n}{\gamma+1}+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\frac{(-1)^{n-1}\mu^n}{\mu+1}\right]$$
$$+\frac{1}{\gamma-\mu}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\frac{1}{\gamma+1}+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\frac{1}{\mu+1}\right]$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{\gamma-\mu}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\frac{\gamma^n}{\gamma+1}+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\frac{\mu^n}{\mu+1}\right]$$
$$+\frac{1}{\gamma-\mu}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\frac{1}{\gamma+1}+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\frac{1}{\mu+1}\right]$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{\gamma-\mu}\left[\frac{(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})(\gamma^n\mu+\gamma^n)+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})(\mu^n\gamma+\mu^n)}{1+\gamma+\mu+\gamma\mu}\right]$$
$$+\frac{1}{\gamma-\mu}\left[\frac{(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})(\mu+1)+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})(\gamma+1)}{1+\gamma+\mu+\gamma\mu}\right]$$

$\gamma = 1+\sqrt{2}$, $\mu = 1-\sqrt{2}$ ve $\gamma\mu = -1$ olduğundan;

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}Q_{k,r} = \frac{(-1)^{n-1}}{\gamma-\mu}\left[\frac{(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})(\gamma^n\mu+\gamma^n)+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})(\mu^n\gamma+\mu^n)}{1+1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}-1}\right]$$

$$+\frac{1}{\gamma-\mu}\left[\frac{(\mathrm{Q}_{2,\mathrm{r}}-\mu\mathrm{Q}_{1,\mathrm{r}})(\mu+1)+(\gamma\mathrm{Q}_{1,\mathrm{r}}-\mathrm{Q}_{2,\mathrm{r}})(\gamma+1)}{1+1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}-1}\right]$$

$$=-\frac{(-1)^{\mathrm{n}-1}}{2(\gamma-\mu)}[(\mathrm{Q}_{2,\mathrm{r}}-\mu\mathrm{Q}_{1,\mathrm{r}})\gamma^{n-1}+(\gamma\mathrm{Q}_{1,\mathrm{r}}-\mathrm{Q}_{2,\mathrm{r}})\mu^{n-1})]$$

$$+\frac{(-1)^{\mathrm{n}-1}}{2(\gamma-\mu)}[(\mathrm{Q}_{2,\mathrm{r}}-\mu\mathrm{Q}_{1,\mathrm{r}})\gamma^{n}+(\gamma\mathrm{Q}_{1,\mathrm{r}}-\mathrm{Q}_{2,\mathrm{r}})\mu^{n}]$$

$$+\frac{1}{2(\gamma-\mu)}[(\mathrm{Q}_{2,\mathrm{r}}-\mu\mathrm{Q}_{1,\mathrm{r}})+(\gamma\mathrm{Q}_{1,\mathrm{r}}-\mathrm{Q}_{2,\mathrm{r}})]$$

$$+\frac{1}{2(\gamma-\mu)}[(\mathrm{Q}_{2,\mathrm{r}}-\mu\mathrm{Q}_{1,\mathrm{r}})\mu+(\gamma\mathrm{Q}_{1,\mathrm{r}}-\mathrm{Q}_{2,\mathrm{r}})\gamma]$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{2}(-Q_{n,r}+Q_{n+1,r})+\frac{1}{2}Q_{1,r}-\frac{1}{2}\left(Q_{2,r}\frac{\gamma-\mu}{\gamma-\mu}\right)+\frac{1}{2}\left(Q_{1,r}\frac{\gamma^2-\mu^2}{\gamma-\mu}\right)$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{2}(-Q_{n,r}+Q_{n+1,r})+\frac{3}{2}Q_{1,r}+\frac{1}{2}Q_{2,r}$$

dir.

3.14. Teorem

$n \in Z^+$ ve $n \geq 1$ için

$$Q_{2n,r}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k Q_{k,r}$$

dir.

İspat

Binet formülü (3.4)' den;

$$Q_{2n,r}=\frac{1}{\gamma-\mu}[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma^{2n-1}+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\mu^{2n-1}]$$

$$=\frac{1}{\gamma-\mu}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\frac{\gamma^{2n}}{\gamma}+(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r})\frac{\mu^{2n}}{\mu}\right]$$

$\gamma^2=1+2\gamma$ ve $\mu^2=1+2\mu$ olduğundan;

$$Q_{2n,r} = \frac{1}{\gamma-\mu}\left[\left(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r}\right)\frac{(1+2\gamma)^n}{\gamma} + \left(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r}\right)\frac{(1+2\mu)^n}{\mu}\right]$$

$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ olduğundan;

$$Q_{2n,r} = \frac{1}{\gamma-\mu}\left[\left(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r}\right)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2\gamma)^k\gamma^{-1} + \left(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r}\right)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2\mu)^k\mu^{-1}\right]$$

$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\left[\left(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r}\right)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\gamma^{k-1} + \left(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r}\right)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\mu^{k-1}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\frac{1}{\gamma-\mu}\left[\left(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r}\right)\gamma^{k-1} + \left(\gamma Q_{1,r}-Q_{2,r}\right)\mu^{k-1}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\,Q_{k,r}$$

elde edilir.

3.15. Teorem (Açık Toplam Formülü)

$n \in Z^+$ ve $n \geq 1$ için

$$Q_{n,r} = Q_{1,r}\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n-k-1}{k}2^{n-2k-1} + \left(Q_{2,r}-2Q_{1,r}\right)\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor}\binom{n-k-2}{k}2^{n-2k-2} \qquad (3.7)$$

dir.

Burada $\lfloor n \rfloor$, n ye eşit ya da n den küçük en büyük tamsayı.

İspat

Üreteç fonksiyonu (3.6)' dan;

$$\sum_{n=1}^{\infty}Q_{n,r}t^n = \frac{Q_{1,r}t + t^2\left(Q_{2,r}-2Q_{1,r}\right)}{1-2t-t^2}$$

$$= t\left(Q_{1,r} + t\left(Q_{2,r} - 2Q_{1,r}\right)\right)(1 - 2t - t^2)^{-1}$$

$$= t\left(Q_{1,r} + t\left(Q_{2,r} - 2Q_{1,r}\right)\right)\left(1 - (2t + t^2)\right)^{-1}$$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ olduğundan;

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_{n,r}t^n = t\left(Q_{1,r} + t\left(Q_{2,r} - 2Q_{1,r}\right)\right)\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}(2 + t)^{n-1}$$

$$= \left(Q_{1,r} + t\left(Q_{2,r} - 2Q_{1,r}\right)\right)\sum_{n=1}^{\infty} t^n\left(1 + \frac{t}{2}\right)^{n-1} 2^{n-1}$$

$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^n$ olduğundan;

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_{n,r}t^n = \left(Q_{1,r} + t\left(Q_{2,r} - 2Q_{1,r}\right)\right)\sum_{n=1}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{t}{2}\right)^k 2^{n-1}$$

$$= \left(Q_{1,r} + t\left(Q_{2,r} - 2Q_{1,r}\right)\right)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} 2^{n-k-1}t^{n+k}$$

$$= \left(Q_{1,r} + t\left(Q_{2,r} - 2Q_{1,r}\right)\right)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} 2^{n-k-1}t^{n+k}$$

dir. n yerine, n+k+1 yazılırsa;

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_{n,r}t^n = \left(Q_{1,r} + t\left(Q_{2,r} - 2Q_{1,r}\right)\right)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{k!\,n!} 2^n t^{n+2k+1}$$

elde edilir. Şimdi n yerine, n-2k-1 yazılırsa;

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_{n,r}t^n = \left(Q_{1,r} + t\left(Q_{2,r} - 2Q_{1,r}\right)\right)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\frac{(n-k-1)!}{k!\,(n-2k-1)!} 2^{n-2k-1}t^n$$

$$= Q_{1,r}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\frac{(n-k-1)!}{k!\,(n-2k-1)!}2^{n-2k-1}\right]t^n$$

$$+\left(Q_{2,r}-2Q_{1,r}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\frac{(n-k-1)!}{k!\,(n-2k-1)!}2^{n-2k-1}\right]t^{n+1}$$

$$= Q_{1,r}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\frac{(n-k-1)!}{k!\,(n-2k-1)!}2^{n-2k-1}\right]t^n$$

$$+\left(Q_{2,r}-2Q_{1,r}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor}\frac{(n-k-2)!}{k!\,(n-2k-2)!}2^{n-2k-1}\right]t^n$$

$$Q_{n,r} = Q_{1,r}\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\frac{(n-k-1)!}{k!\,(n-2k-1)!}2^{n-2k-1}$$

$$+\left(Q_{2,r}-2Q_{1,r}\right)\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor}\frac{(n-k-2)!}{k!\,(n-2k-2)!}2^{n-2k-2}$$

t^n ‘nin katsayıları eşitlenirse;

$$Q_{n,r} = Q_{1,r}\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n-k-1}{k}2^{n-2k-1} + (Q_{2,r}-2Q_{1,r})\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor}\binom{n-k-2}{k}2^{n-2k-2}$$

bulunur.

3.16. Teorem

$n \in Z^+$ ve $n \geq 1$ için

$$Q_{-n,r} = (-1)^n\left(Q_{2,r}p_{n+2} - Q_{1,r}p_{n+3}\right)$$

dir.

İspat

Binet formülü (3.4)' den;

$$Q_{-n,r} = \frac{1}{\gamma-\mu}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\gamma^{-n-1} + (\gamma Q_{1,r} - Q_{2,r})\mu^{-n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\frac{1}{\gamma^{n+1}} + (\gamma Q_{1,r} - Q_{2,r})\frac{1}{\mu^{n+1}}\right]$$

$\frac{1}{\gamma} = -\mu$ ve $\frac{1}{\mu} = -\gamma$ olduğundan;

$$Q_{-n,r} = \frac{1}{\gamma-\mu}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})(-\mu)^{n+1} + (\gamma Q_{1,r} - Q_{2,r})(-\gamma)^{n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{\gamma-\mu}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})(-1)^{n+1}\mu^{n+1} + (\gamma Q_{1,r} - Q_{2,r})(-1)^{n+1}\gamma^{n+1}\right]$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma-\mu}\left[(Q_{2,r}-\mu Q_{1,r})\mu^{n+1} + (\gamma Q_{1,r} - Q_{2,r})\gamma^{n+1}\right]$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma-\mu}\left[Q_{1,r}(\gamma^{n+2}-\mu^{n+2}) - Q_{2,r}(\gamma^{n+1}-\mu^{n+1})\right]$$

$$= (-1)^n\left[Q_{2,r}\left(\frac{\gamma^{n+1}-\mu^{n+1}}{\gamma-\mu}\right) - Q_{1,r}\left(\frac{\gamma^{n+2}-\mu^{n+2}}{\gamma-\mu}\right)\right]$$

$$= (-1)^n\left(Q_{2,r}p_{n+2} - Q_{1,r}p_{n+3}\right)$$

dir.

3.17. Teorem

Eğer $n > m$ ise o zaman tüm $m \geq 0$ ve $n > 0$ için

$$Q_{n+m,r} = Q_{n-1,r}p_m + Q_{n,r}p_{m+1}$$

dir.

İspat

Sonuç 3.9'dan;

$Q_{n+m,r} = Q_{2,r}p_{n+m} + Q_{1,r}p_{n+m-1,r}$ dir.

(1.10)'dan;

$$Q_{n+m,r} = Q_{2,r}(p_{n-1}p_m + p_n p_{m+1}) + Q_{1,r}(p_{n-2}p_m + p_{n-1}p_{m+1})$$
$$= p_m\left(Q_{2,r}p_{n-1} + Q_{1,r}p_{n-2}\right) + p_{m+1}\left(Q_{2,r}p_n + Q_{1,r}p_{n-1}\right)$$

Sonuç 3.9 tekrar uygulanırsa;

$Q_{n+m,r} = Q_{n-1,r}p_m + Q_{n,r}p_{m+1}$

elde edilir.

3.18. Sonuç

1) $Q_{2n,r} = Q_{n-1,r}p_n + Q_{n,r}p_{n+1}$
2) $Q_{2n-1,r} = Q_{n-1,r}p_{n-1} + Q_{n,r}p_n$
3) $Q_{2n-2,r} = Q_{n-1,r}p_{n-2} + Q_{n,r}p_{n-1}$
4) $Q_{2n-k,r} = Q_{n-1,r}p_{n-k} + Q_{n,r}p_{n-k+1}$

İspat

Teorem 3.17'de $m = n,\ m = n-1,\ m = n-2$ ve $m = n-k$ yazılırsa sonuçları verir.

3.19. Teorem

$n \in Z^+$ ve $n \geq 2$ için

$$Q_{2,r}Q_{3,r} + Q_{3,r}Q_{4,r} + \cdots + Q_{2n-1,r}Q_{2n,r} = \frac{1}{2}\left(Q_{2n,r}^2 - Q_{2,r}^2\right)$$

dir.

İspat

$n = 2$ için sol taraf;

$$Q_{2,r}Q_{3,r} + Q_{3,r}Q_{4,r} = Q_{3,r}\left(Q_{2,r} + Q_{4,r}\right)$$

Sağ taraf;

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(Q_{4,r}^2 - Q_{2,r}^2\right) &= \frac{1}{2}\left(Q_{4,r} - Q_{2,r}\right)\left(Q_{4,r} + Q_{2,r}\right)\\ &= \frac{1}{2}2Q_{3,r}\left(Q_{4,r} + Q_{2,r}\right)\\ &= Q_{3,r}\left(Q_{4,r} + Q_{2,r}\right)\end{aligned}$$

n=2 için sağ taraf sol tarafa eşit, tümevarım adımları için farz edelim ki n için doğru olsun, n+1 için doğru olduğuna bakalım. Yani;

$$Q_{2,r}Q_{3,r} + Q_{3,r}Q_{4,r} + \cdots + Q_{2n-1,r}Q_{2n,r} = \frac{1}{2}\left(Q_{2n,r}^2 - Q_{2,r}^2\right)$$

eşitliğinin doğru olduğunu kabul edelim ve n+1 için doğru olup olmadığını araştıralım.

$$\begin{aligned}&Q_{2,r}Q_{3,r} + Q_{3,r}Q_{4,r} + \cdots + Q_{2n-1,r}Q_{2n,r} + Q_{2n,r}Q_{2n+1,r} + Q_{2n+1,r}Q_{2n+2,r}\\ &= \frac{1}{2}\left(Q_{2n,r}^2 - Q_{2,r}^2\right) + Q_{2n,r}Q_{2n+1,r} + Q_{2n+1,r}Q_{2n+2,r}\\ &= \frac{1}{2}Q_{2n,r}^2 + Q_{2n,r}Q_{2n+1,r} + Q_{2n+1,r}Q_{2n+2,r} - \frac{1}{2}Q_{2,r}^2\\ &= Q_{2n,r}\left(\frac{1}{2}Q_{2n,r} + Q_{2n+1,r}\right) + Q_{2n+1,r}Q_{2n+2,r} - \frac{1}{2}Q_{2,r}^2\\ &= \frac{1}{2}Q_{2n,r}Q_{2n+2,r} + Q_{2n+1,r}Q_{2n+2,r} - \frac{1}{2}Q_{2,r}^2\\ &= Q_{2n+2,r}\left(\frac{1}{2}Q_{2n,r} + Q_{2n+1,r}\right) - \frac{1}{2}Q_{2,r}^2\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} Q_{2n+2,r}^2 - \frac{1}{2} Q_{2,r}^2$$

dir.

3.20. Lemma

n inci Pell-Lucas sayısı Q_n olsun.

$$Q_n = (\gamma - \mu)\left(\frac{Q_{2,r}Q_{n,r} - Q_{1,r}Q_{n+1,r}}{Q_{2,r}^2 - Q_{1,r}Q_{3,r}}\right)$$

dir.

İspat

Binet formülü (3.4)'den;

$$Q_{2,r}Q_{n,r} - Q_{1,r}Q_{n+1,r} = Q_{2,r}\left[\frac{(Q_{2,r} - \mu Q_{1,r})\gamma^{n-1}}{\gamma - \mu} + \frac{(\gamma Q_{1,r} - Q_{2,r})\mu^{n-1}}{\gamma - \mu}\right]$$
$$-Q_{1,r}\left[\frac{(Q_{2,r} - \mu Q_{1,r})\gamma^{n}}{\gamma - \mu} + \frac{(\gamma Q_{1,r} - Q_{2,r})\mu^{n}}{\gamma - \mu}\right]$$
$$= Q_{2,r}\left[Q_{2,r}\left(\frac{\gamma^{n-1} - \mu^{n-1}}{\gamma - \mu}\right) + Q_{1,r}\left(\frac{\gamma^{n-2} - \mu^{n-2}}{\gamma - \mu}\right)\right]$$
$$- Q_{1,r}\left[Q_{2,r}\left(\frac{\gamma^{n} - \mu^{n}}{\gamma - \mu}\right) + Q_{1,r}\left(\frac{\gamma^{n-1} - \mu^{n-1}}{\gamma - \mu}\right)\right]$$
$$= \frac{\gamma^{n-1} - \mu^{n-1}}{\gamma - \mu}\left(Q_{2,r}^2 - Q_{1,r}^2\right) + \frac{Q_{1,r}Q_{2,r}}{\gamma - \mu}(\gamma^{n-2} - \mu^{n-2} - \gamma^{n} + \mu^{n})$$
$$= \frac{\gamma^{n-1} - \mu^{n-1}}{\gamma - \mu}\left(Q_{2,r}^2 - Q_{1,r}^2\right) + \frac{Q_{1,r}Q_{2,r}}{\gamma - \mu}\left(\gamma^{n-2}(1 - \gamma^2) - \mu^{n-2}(1 - \mu^2)\right)$$

$1 - \gamma^2 = -2\gamma$ ve $1 - \mu^2 = -2\mu$ olduğundan;

$$Q_{2,r}Q_{n,r} - Q_{1,r}Q_{n+1,r}$$
$$= \frac{\gamma^{n-1} - \mu^{n-1}}{\gamma - \mu}\left(Q_{2,r}^2 - Q_{1,r}^2\right) + \frac{Q_{1,r}Q_{2,r}}{\gamma - \mu}\left(\gamma^{n-2}(-2\gamma) - \mu^{n-2}(-2\mu)\right)$$
$$= \frac{\gamma^{n-1} - \mu^{n-1}}{\gamma - \mu}\left(Q_{2,r}^2 - Q_{1,r}^2 - 2Q_{1,r}Q_{2,r}\right)$$

$$= \frac{\gamma^{n-1} - \mu^{n-1}}{\gamma - \mu}\left(Q_{2,r}^2 - Q_{1,r}Q_{3,r}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{Q_n^2 - 4(-1)^{n-1}}}{\gamma - \mu}\left(Q_{2,r}^2 - Q_{1,r}Q_{3,r}\right)$$

$$Q_n = (\gamma - \mu)\left(\frac{Q_{2,r}Q_{n,r} - Q_{1,r}Q_{n+1,r}}{Q_{2,r}^2 - Q_{1,r}Q_{3,r}}\right)$$

dir.

3.21. Teorem

r-toplam Pell-Lucas sayısının n inci terimi $Q_{n,r}$ olmak üzere;

$$Q_{m,r}Q_{n,r} - Q_{m-k,r}Q_{n+k,r}$$
$$= (-1)^{m-k-1}\left[\frac{\left(Q_{2,r}Q_{k+1,r} - Q_{1,r}Q_{k+2,r}\right)\left(Q_{2,r}Q_{n-m+k+1,r} - Q_{1,r}Q_{n-m+k+2,r}\right)}{Q_{2,r}^2 - Q_{1,r}Q_{3,r}}\right] \quad (3.8)$$

olup, buradan $n \geq m$ ve $k \geq 1$ dir.

İspat

Binet formülü (3.4)'den;

$$Q_{n,r} = A\gamma^{n-1} + B\mu^{n-1}$$

olup, burada $A = \frac{Q_{2,r} - \mu Q_{1,r}}{\gamma - \mu}, B = \frac{\mu Q_{1,r} - Q_{2,r}}{\gamma - \mu}, \gamma = 1 + \sqrt{2}$ ve $\mu = 1 - \sqrt{2}$;

$$Q_{m,r}Q_{n,r} - Q_{m-k,r}Q_{n+k,r} = (A\gamma^{m-1} + B\mu^{m-1})(A\gamma^{n-1} + B\mu^{n-1})$$
$$-(A\gamma^{m-k-1} + B\mu^{m-k-1})(A\gamma^{n+k-1} + B\mu^{n+k-1})$$
$$= AB(\gamma^{m-1}\mu^{n-1} + \gamma^{n-1}\mu^{m-1} - \gamma^{m-k-1}\mu^{n+k-1} - \gamma^{n+k-1}\mu^{m-k-1})$$
$$= AB\left(\gamma^{m-1}\mu^{n-1}(1 - \gamma^{-k}\mu^{k}) + \gamma^{n-1}\mu^{m-1}(1 - \gamma^{k}\mu^{-k})\right)$$
$$= AB\left(\gamma^{m-1}\mu^{n-1}\left(\frac{\gamma^k - \mu^k}{\gamma^k}\right) - \gamma^{n-1}\mu^{m-1}\left(\frac{\gamma^k - \mu^k}{\gamma^k}\right)\right)$$

$$= AB(\gamma^k - \mu^k)\left(\frac{\gamma^{m-1}\mu^{n-1}}{\gamma^k} - \frac{\gamma^{n-1}\mu^{m-1}}{\mu^k}\right)$$
$$= AB(\gamma^k - \mu^k)(\gamma\mu)^{-k}(\gamma^{m-1}\mu^{n+k-1} - \gamma^{n+k-1}\mu^{m-1})$$
$$= AB(\gamma^k - \mu^k)(-1)^{-k}(\gamma^{m-1}\mu^{m-1})(\mu^{n-m+k} - \gamma^{n-m+k})$$
$$= -AB(\gamma^k - \mu^k)(-1)^{-k}(\gamma\mu)^{m-1}(\gamma^{n-m+k} - \mu^{n-m+k})$$
$$= -AB(-1)^{m-k-1}(\gamma^k - \mu^k)(\gamma^{n-m+k} - \mu^{n-m+k})$$

dir.

$-AB = \frac{Q_{2,r}^2 - Q_{1,r}Q_{3,r}}{(\gamma-\mu)^2}$ olduğundan;

$$Q_{m,r}Q_{n,r} - Q_{m-k,r}Q_{n+k,r} = (-1)^{m-k-1}\frac{Q_{2,r}^2 - Q_{1,r}Q_{3,r}}{(\gamma-\mu)^2}(\gamma^k - \mu^k)(\gamma^{n-m+k} - \mu^{n-m+k})$$
$$= (-1)^{m-k-1}\frac{Q_{2,r}^2 - Q_{1,r}Q_{3,r}}{(\gamma-\mu)^2}\sqrt{Q_{k+1}^2 - 4(-1)^k}\sqrt{Q_{n-m+k+1}^2 - 4(-1)^{n-m+k}}$$

Lemma 3.2'den;

$$Q_{k+1} = (\gamma-\mu)\left(\frac{Q_{2,r}Q_{k+1,r} - Q_{1,r}Q_{k+2,r}}{Q_{2,r}^2 - Q_{1,r}Q_{3,r}}\right)$$

ve

$$Q_{n-m+k+1} = (\gamma-\mu)\left(\frac{Q_{2,r}Q_{n-m+k+1,r} - Q_{1,r}Q_{n-m+k+2,r}}{Q_{2,r}^2 - Q_{1,r}Q_{3,r}}\right)$$

$$Q_{m,r}Q_{n,r} - Q_{m-k,r}Q_{n+k,r}$$
$$= (-1)^{m-k-1}\left[\frac{(Q_{2,r}Q_{k+1,r} - Q_{1,r}Q_{k+2,r})(Q_{2,r}Q_{n-m+k+1,r} - Q_{1,r}Q_{n-m+k+2,r})}{Q_{2,r}^2 - Q_{1,r}Q_{3,r}}\right]$$

elde edilir.

3.22. Sonuç

1) (Catalan özdeşliği). Eğer Teorem 3.21' de m=n alınırsa, tüm $n > k \geq 1$ için

$$Q_{n,r}^2 - Q_{n-k,r}Q_{n+k,r} = \frac{(-1)^{n-k-1}}{Q_{2,r}^2 - Q_{1,r}Q_{3,r}}\left(Q_{2,r}Q_{k+1,r} - Q_{1,r}Q_{k+2,r}\right)^2$$

dir.

2) (Cassini özdeşliği). Eğer Teorem 3.21' de n=m ve k=1 alınırsa, tüm $n \geq 1$ için

$$Q_{n,r}^2 - Q_{n-1,r}Q_{n+1,r} = (-1)^{n-2}\left(Q_{2,r}^2 - Q_{1,r}Q_{3,r}\right)$$

dir.

3) (d'Ocagen özdeşliği). Eğer Teorem 3.21' de n=m, m=n+1 ve k=1 alınırsa;

$$Q_{n+1,r}Q_{m,r} - Q_{n,r}Q_{m+1,r} = (-1)^{n-1}\left(Q_{2,r}Q_{m-n+1,r} - Q_{1,r}Q_{m-n+2,r}\right)$$

burada $m > n \geq 0$ dir.

Aşağıdaki teotemde r-toplam Pell-Lucas sayılarının determinant içeren diğer özelliklerini inceleyeceğiz.

3.23. Teorem (Determinant Özdeşlikleri)

a) $n \in Z^+$ve $n \geq 1$ için

$$\begin{vmatrix} Q_{n+1,r} & 2Q_{n+2,r} & Q_{n+3,r} \\ Q_{n+4,r} & 2Q_{n+5,r} & Q_{n+6,r} \\ Q_{n+7,r} & 2Q_{n+8,r} & Q_{n+9,r} \end{vmatrix} = 0$$

dir.

İspat

Birinci ve ikinci kolonları toplanıp birinci kolonda yerine yazılırsa;

$$\begin{vmatrix} Q_{n+1,r} & 2Q_{n+2,r} & Q_{n+3,r} \\ Q_{n+4,r} & 2Q_{n+5,r} & Q_{n+6,r} \\ Q_{n+7,r} & 2Q_{n+8,r} & Q_{n+9,r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Q_{n+1,r} + 2Q_{n+2,r} & 2Q_{n+2,r} & Q_{n+3,r} \\ Q_{n+4,r} + 2Q_{n+5,r} & 2Q_{n+5,r} & Q_{n+6,r} \\ Q_{n+7,r} + 2Q_{n+8,r} & 2Q_{n+8,r} & Q_{n+9,r} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} Q_{n+3,r} & 2Q_{n+2,r} & Q_{n+3,r} \\ Q_{n+6,r} & 2Q_{n+5,r} & Q_{n+6,r} \\ Q_{n+9,r} & 2Q_{n+8,r} & Q_{n+9,r} \end{vmatrix}$$

Determinant özelliğinden iki satır(sütun) eşit ise determinant sonucu sıfırdır.

b) $n \in Z^+$ ve $n \geq 1$ için

$$\begin{vmatrix} Q_{n,r} + 2Q_{n+1,r} & 2Q_{n+1,r} + Q_{n+2,r} & Q_{n,r} + Q_{n+2,r} \\ Q_{n+2,r} & Q_{n,r} & 2Q_{n+1,r} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

dir.

İspat

Birinci satırı ve ikinci satırı toplanıp birinci satıra yazılırsa;

$$\begin{vmatrix} Q_{n,r} + 2Q_{n+1,r} & 2Q_{n+1,r} + Q_{n+2,r} & Q_{n,r} + Q_{n+2,r} \\ Q_{n+2,r} & Q_{n,r} & 2Q_{n+1,r} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2Q_{n+2,r} & 2Q_{n+2,r} & 2Q_{n+2,r} \\ Q_{n+2,r} & Q_{n,r} & 2Q_{n+1,r} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2Q_{n+2,r} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ Q_{n+2,r} & Q_{n,r} & 2Q_{n+1,r} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

elde edilir.

c) $n \in Z^+$ ve $n \geq 1$ için

$$\begin{vmatrix} Q_{n,r} & Q_n & 1 \\ 2Q_{n+1,r} & 2Q_{n+1} & 1 \\ Q_{n+2,r} & Q_{n+2} & 1 \end{vmatrix} = 2\left(Q_n Q_{n+1,r} - Q_{n+1} Q_{n,r}\right)$$

dir.

İspat

$R_1 \to R_2 - R_1 \; ve \;\; R_2 \to R_3 - R_2$ satır işlemleri uygulanırsa;

$$\begin{vmatrix} Q_{n,r} & Q_n & 1 \\ 2Q_{n+1,r} & 2Q_{n+1} & 1 \\ Q_{n+2,r} & Q_{n+2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2Q_{n+1,r} - Q_{n,r} & 2Q_{n+1} - Q_n & 0 \\ Q_{n+2,r} - 2Q_{n+1,r} & Q_{n+2} - 2Q_{n+1} & 0 \\ Q_{n+2,r} & Q_{n+2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2Q_{n+1,r} - Q_{n,r} & 2Q_{n+1} - Q_n & 0 \\ Q_{n,r} & Q_n & 0 \\ Q_{n+2,r} & Q_{n+2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2Q_nQ_{n+1,r} - Q_nQ_{n,r} - 2Q_{n+1}Q_{n,r} + Q_nQ_{n,r}$$
$$= 2\left(Q_nQ_{n+1,r} - Q_{n+1}Q_{n,r}\right)$$

elde edilir.

d) $n \in Z^+$ ve $n \geq 1$ için

$$\begin{vmatrix} Q_{n,r} & L_n & 1 \\ 2Q_{n+1,r} & L_{n+1} & 1 \\ Q_{n+2,r} & L_{n+2} & 1 \end{vmatrix} = 2L_nQ_{n+1,r} - L_{n+1}Q_{n,r}$$

dir.

İspat

$R_1 \to R_2 - R_1 \; ve \; R_2 \to R_3 - R_2$ satır işlemleri uygulanırsa;

$$\begin{vmatrix} Q_{n,r} & L_n & 1 \\ 2Q_{n+1,r} & L_{n+1} & 1 \\ Q_{n+2,r} & L_{n+2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2Q_{n+1,r} - Q_{n,r} & L_{n+1} - L_n & 0 \\ Q_{n+2,r} - 2Q_{n+1,r} & L_{n+2} - L_{n+1} & 0 \\ Q_{n+2,r} & L_{n+2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2Q_{n+1,r} - Q_{n,r} & L_{n+1} - L_n & 0 \\ Q_{n,r} & L_n & 0 \\ Q_{n+2,r} & L_{n+2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2L_nQ_{n+1,r} - L_nQ_{n,r} - L_{n+1}Q_{n,r} + L_nQ_{n,r}$$

$$= 2L_nQ_{n+1,r} - L_{n+1}Q_{n,r}$$

elde edilir.

e) $n \in Z^+$ ve $n \geq 1$ için

$$\begin{vmatrix} 1+Q_{n,r} & Q_{n+1,r} & \cdots & Q_{n+k,r} \\ Q_{n,r} & 1+Q_{n+1,r} & \cdots & Q_{n+k,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{n,r} & Q_{n+1,r} & \cdots & 1+Q_{n+k,r} \end{vmatrix} = 1 + Q_{n,r} + Q_{n+1,r} + \cdots + Q_{n+k,r}$$

dir.

İspat

İspatı n üzerinde tümevarım ve kolon indirgemesi kullanılarak yapılır.

f) $n \in Z^+$ ve $n \geq 1$ için

$$\begin{vmatrix} 2Q_{n,r} & Q_{n+1,r} & Q_{n+2,r} \\ Q_{n+2,r} & 2Q_{n,r} & Q_{n,r} \\ Q_{n+1,r} & Q_{n+2,r} & 2Q_{n,r} \end{vmatrix} = 9\left(Q_{n,r}^3 + Q_{n+1,r}^3\right)$$

dir.

İspat

$$\begin{vmatrix} 2Q_{n,r} & Q_{n+1,r} & Q_{n+2,r} \\ Q_{n+2,r} & 2Q_{n,r} & Q_{n+1,r} \\ Q_{n+1,r} & Q_{n+2,r} & 2Q_{n,r} \end{vmatrix}$$

$$= 2Q_{n,r}\left(4Q_{n,r}^2 - Q_{n+1,r}Q_{n+2,r}\right) + Q_{n+1,r}\left(Q_{n+1,r}^2 - 2Q_{n,r}Q_{n+2,r}\right)$$

$$+ Q_{n+2,r}\left(Q_{n+2,r}^2 - 2Q_{n,r}Q_{n+1,r}\right)$$

$$= 8Q_{n,r}^3 + Q_{n+1,r}^3 + Q_{n+2,r}^3 - 6Q_{n,r}Q_{n+1,r}Q_{n+2,r}$$

$Q_{n+2,r} = 2Q_{n+1,r} + Q_{n,r}$ olduğundan;

$$\begin{vmatrix} 2Q_{n,r} & Q_{n+1,r} & Q_{n+2,r} \\ Q_{n+2,r} & 2Q_{n,r} & Q_{n+1,r} \\ Q_{n+1,r} & Q_{n+2,r} & 2Q_{n,r} \end{vmatrix}$$

$$= 8Q_{n,r}^3 + Q_{n+1,r}^3 + \left(2Q_{n+1,r} + Q_{n,r}\right)^3 - 6Q_{n,r}Q_{n+1,r}(2Q_{n+1,r} + Q_{n,r})$$

$$= 8Q_{n,r}^3 + Q_{n+1,r}^3 + 8Q_{n+1,r}^3 + 12Q_{n+1,r}^2Q_{n,r} + 6Q_{n+1,r}Q_{n,r}^2 + Q_{n,r}^3 - 12Q_{n,r}Q_{n+1,r}^2$$

$$- 6Q_{n,r}^2Q_{n+1,r}$$

$$= 9\left(Q_{n,r}^3 + Q_{n+1,r}^3\right)$$

elde edilir.

4. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell-Lucas sayıların tanımları verilerek, Pell ve Pell-Lucas sayılarının mevcut olan genelleştirmelerden farklı bir genelleştirme elde edilmiştir. Bu yeni genelleştirilmiş Pell ve genelleştirilmiş Pell-Lucas sayı dizilerin tanımları ifade edilerek, bu yeni sayı dizileri için Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, açık toplam formülü, ilk n terimler toplamı, tek indisli ilk n terimler toplamı, çift indisli ilk n terimler toplamı, Catalan özdeşlikleri, Cassini özdeşlikleri, d'Ocagne özdeşlikleri ve determinant özdeşlikleri elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

1. Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. New York: Wisley-Interscience Publicications, 1-200.

2. Koshy, T. (2014). *Pell and Pell-Lucas Numbers whit Applications*. New York: Springer Science, 1-200.

3. Dasdemir, A. (2011). On the pell, pell-lucas and modified pell numbers by matrix method, *Applied Mathematical Sciences,* 5(64), 3173-3181.

4. Falcon, S., and Plaza, A. (2007). On the fibonacci K-nımbers. *Chaos Solution Fractals,*32(5) 1615-1624.

5. Horadam, A. F. (1961). A generalized fibonacci sequence. *The American Mathematical Monthly,* 68(5), 455-459.

6. Horadam A. F. (1965). Basic properties of a certain generalized sequence of numbers, *The Fibonacci Quarterly*, 3(3), 161-176.

7. Oduol, F. O., and Okoth, I. O. (2020). On generalized fibonacci numbers. *Communication in Advanced Mathematical Sciences*, 2(4), 186-202.

8. Kalma, D., and Mena, R. (2002). The fibonacci numbers-exposed, *Mathematical Mag*, 2(2), 167-181.

9. Gupta, Y. K., Singh, M., and Sikhwal, O. (2014). Generalized Fibonacci-Like sequence associated with Fibonacci and Lucas sequences. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 2(6), 233-238.

10. Panwar, Y. K., and Singh, M. (2014). Certain properties of generalized Fibonacci sequence. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 2(1), 6-8.

11. Rathore, G. P. S., Sikhwal, O., and Choudhary, R. (2016). Generalized Fibonacci-like sequence and some identities, *Sciences Journal Mathematical*, 1(1), 107-118.

12. Sikwal, O., and Vyas, Y. (2016). Generalized fibonacci-type sequence its properties, *International Journal Sciences Res*, 5(12), 2043-2047.

13. Singh, B., and Bhatnager, S. (2010). Fibonacci-like sequence and its properties. *International Journal Contemp Mathematical Sciences*, 5(18), 859-868.

14. Singh, B., Bhatnagar, S., and Sikhwal, O. (2013). Fibonacci-like sequence. *International Journal of Advanced Mathematical Sciences*, 1(3), 145-151.

15. Taşçı, D., ve Taş, Z. K. (2019). On generalized lucas and pell-lucas sequence, *Journal of Science and Arts*, 3(48), 637-646.



Gazili olmak ayrıcalıktır